UNLP. Facultad de Informática
Algoritmos y Estructuras de Datos

Guía para el cálculo del T(n)

13 de mayo de 2017

1. Ejercicio 1

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 1 \\ 27T\left(\dfrac{n}{3}\right) + n^3 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

1.1. Resolución

El objetivo es poder reescribir el $T(n)$ eliminando la recursión.

Suponiendo $n \geq 2$

Paso 1

$$27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3$$

Paso 2

$$27\left[27T\left(\frac{\frac{n}{3}}{3}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)^3\right] + n^3$$

$$27\left[27T\left(\frac{n}{3^2}\right) + \frac{n^3}{3^3}\right] + n^3$$

$$27^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 27\frac{n^3}{3^3} + n^3$$

como $3^3 = 27$ se simplifican los términos

$$27^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + n^3 + n^3$$

$$27^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 2n^3$$

Paso 3

$$27^2\left[27T\left(\frac{\frac{n}{3^2}}{3}\right)+\left(\frac{n}{3^2}\right)^3\right]+2n^3$$
$$27^2\left[27T\left(\frac{n}{3^3}\right)+\frac{n^3}{(3^2)^3}\right]+2n^3$$
$$27^3T\left(\frac{n}{3^3}\right)+27^2\frac{n^3}{(3^2)^3}+2n^3$$
$$\text{ahora bien: } (3^2)^3=3^{2*3}=3^{3*2}=(3^3)^2=27^2$$
$$\text{acá se utiliza la propiedad nro 3 de las potencias}$$
$$\text{del resumen de Propiedades matemáticas}$$
$$27^3T\left(\frac{n}{3^3}\right)+n^3+2n^3$$
$$27^3T\left(\frac{n}{3^3}\right)+3n^3$$

Paso i (Paso general)

$$27^iT\left(\frac{n}{3^i}\right)+in^3$$

Caso base

$$¿\frac{n}{3^i}=1?$$

$$\begin{aligned}\frac{n}{3^i} &= 1\\ n &= 3^i\\ \log_3(n) &= \log_3(3^i)\\ \log_3(n) &= i\end{aligned} \tag{1}$$

Se reemplaza el valor de i en el paso general

$$27^{log_3(n)}T\left(\frac{n}{3^{log_3(n)}}\right)+log_3(n)n^3$$
$$27^{log_3(n)}T(1)+log_3(n)n^3$$
$$27^{log_3(n)}3+log_3(n)n^3$$

Ahora bien, $27^{log_3(n)}$, se debería reescribir de otra manera, porque no queda claro que tipo de función es. Esto se puede resolver de diferentes maneras aplicando propiedades matemáticas.

- **Forma 1**

$$\begin{aligned}(27)^{log_3(n)} =& (3^3)^{log_3(n)} \\ =& 3^{3*log_3(n)} \\ =& 3^{log_3(n)*3} \\ =& (3^{log_3(n)})^3 \\ =& n^3\end{aligned}$$

- **Forma 2**

  $27 = 3^3$, entonces en el paso anterior 27^i se podría reescribir como $(3^3)^i$

  $$\text{Luego } (3^3)^i = 3^{3*i} = 3^{i*3} = (3^i)^3,$$

  aplicando la propiedad nro 3 de potencias del resumen de Propiedades matemáticas. Ahora bien, cuando se despejó el caso base, en una parte se obtuvo que $n = 3^i$ (1). Esta igualdad es utilizada para quitar el valor de i. Por lo que: $(3^i)^3 = n^3$

- **Forma 3**

$$\begin{aligned}(27)^{log_3(n)} =& (3^3)^{log_3(n)} \\ =& (3 * 3 * 3)^{log_3(n)} \qquad (2) \\ =& 3^{log_3(n)} * 3^{log_3(n)} * 3^{log_3(n)} \\ =& n * n * n \\ =& n^3\end{aligned}$$

  En (2) se aplicó la propiedad nro 4 de potencias del resumen de propiedades matemáticas.

Con hacerlo con algunas de estas formas u otra diferente alcanza. Se muestran distintas maneras para familiarizarse con las propiedades.

Entonces $27^{log_3(n)}$ es lo mismo que n^3. Finalmente,

$$T(n) = 27^{log_3(n)}3 + log_3(n) * n^3$$
$$T(n) = n^3 * 3 + log_3(n) * n^3$$
$$\boxed{T(n) = 3 * n^3 + log_3(n) * n^3}$$

Al finalizar, se debe verificar que no haya quedado ninguna variable de los iteradores o del paso general (en este caso i), la única variable debe ser n.

2. Ejercicio 2

```
public static void ejercicio2 (int n) {

  int i, j;

  for (i = 1; i <= n; i++) {
    j = i;
    while (j <= Math.pow (n,3)){ // esto significa: while (j <= n^3)
          j++;
    }
    System.out.println ("El indice j es: " + j);
  }
}
```

2.1. Resolución

Planteo inicial:

$$T(n) = c1 + \sum_{i=1}^{n} \left[c2 + \sum_{j=i}^{n^3} c3 \right]$$

$c1$ representaría la declaración inicial de variables y para simplificar se puede decir que $c2$ representaría la asignación de la variable, la comparación de $i <= n$ y el incremento de i, y el costo del println; mientras que c_3 representaría la comparación de $j <= n^3$ y el incremento de j.

Se pasa a resolver...

$$
\begin{aligned}
T(n) =& c1 + \sum_{i=1}^{n} \left[c2 + \sum_{j=i}^{n^3} c3 \right] \\
T(n) =& c1 + \sum_{i=1}^{n} \left[c2 + \sum_{j=1}^{n^3} c3 - \sum_{j=1}^{i-1} c3 \right] \\
T(n) =& c1 + \sum_{i=1}^{n} \left[c2 + n^3 c3 - (i-1)c3 \right] \\
T(n) =& c1 + \sum_{i=1}^{n} \left[c2 + n^3 c3 - (ic3 - c3) \right] \\
T(n) =& c1 + \sum_{i=1}^{n} \left[c2 + n^3 c3 - ic3 + c3 \right] \\
T(n) =& c1 + \sum_{i=1}^{n} c2 + \sum_{i=1}^{n} n^3 c3 - \sum_{i=1}^{n} ic3 + \sum_{i=1}^{n} c3 \\
T(n) =& c1 + nc2 + nn^3 c3 - c3 \sum_{i=1}^{n} i + nc3 \\
T(n) =& c1 + nc2 + n^4 c3 - c3 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + nc3 \\
T(n) =& c1 + nc2 + n^4 c3 - c3 \frac{(n^2+n)}{2} + nc3 \\
T(n) =& c1 + nc2 + n^4 c3 - (c3 \frac{n^2}{2} + c3 \frac{n}{2}) + nc3 \\
T(n) =& c1 + nc2 + n^4 c3 - c3 \frac{n^2}{2} - c3 \frac{n}{2} + nc3 \\
T(n) =& c1 + nc2 + n^4 c3 - c3 \frac{n^2}{2} - c3 \frac{n}{2} + nc3
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{T(n) = c1 + nc2 + n^4 c3 - n^2 \frac{c3}{2} - n \frac{c3}{2} + nc3}
$$

Al finalizar, se debe verificar que no haya quedado ninguna variable de los iteradores (en este caso i o j), la única variable debe ser n.