



# **Projeto 1 — Aproximação Teórica e Numérica I**

**Estudo sobre a Convergência de Splines Cúbicos Interpoladores**

Rodrigo Fassa et al.

Orientador: Prof. André Pierro de Camargo

Novembro de 2025

## Sumário

0.1	Introdução . . . . .	3
0.2	Metodologia . . . . .	3
0.3	Resultados Numéricos . . . . .	3
0.3.1	Spline Natural . . . . .	3
0.3.2	Spline Completo . . . . .	4
0.3.3	Gráficos log–log . . . . .	4
0.4	Discussão e Conclusão . . . . .	5

## 0.1 Introdução

Este relatório apresenta o estudo numérico da convergência de *splines cúbicos interpoladores*, com o objetivo de verificar experimentalmente a ordem de convergência teórica prevista para o método. O spline cúbico é uma função polinomial por partes, de classe  $C^2$ , construída de modo que a curvatura (segunda derivada) varie suavemente, minimizando a energia elástica da curva.

Se  $f \in C^4[a, b]$ , então o erro máximo satisfaz:

$$E_n = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - S(x)| \approx C h^4,$$

onde  $h$  é o espaçamento da malha.

## 0.2 Metodologia

As rotinas foram implementadas em Python de acordo com o pseudocódigo do enunciado. As principais funções são:

Módulo	Função	Descrição
spline.py	build_tridiagonal_system	Monta o sistema $T \cdot M = d$ para o spline cúbico.
gauss.py	solve_by_gaussian_elimination	Solve o sistema linear.
spline.py	compute_M, compute_AB, spline_eval	Calculam segundas derivadas e coeficientes.
tarefas.py	tarefa_convergencia_*	Experimentos de convergência.
tarefas.py	ajuste_ordem_convergencia	Estima $\rho$ por regressão log-log.

A validação foi feita sobre  $f(x) = \cos(x)$ , em  $[0, \pi/2]$ , usando as condições de contorno **natural** e **completa**.

## 0.3 Resultados Numéricos

### 0.3.1 Spline Natural

n	h	$E_n$
4	0.392699	7.725073e-03
8	0.196350	1.902205e-03
16	0.098175	4.737284e-04
32	0.049087	1.183202e-04
64	0.024544	2.957305e-05

Ordem estimada:  $\rho \approx 2.01$

---

### 0.3.2 Spline Completo

n	h	$E_n$
4	0.392699	6.324039e-05
8	0.196350	3.889330e-06
16	0.098175	2.421787e-07
32	0.049087	1.512267e-08
64	0.024544	9.443273e-10

Ordem estimada:  $\rho \approx 4.01$

---

### 0.3.3 Gráficos log–log

#### Spline Natural

[Imagem não encontrada: \includegraphics [keepaspectratio,alt={Convergência logarítmica}]

#### Spline Completo

[Imagem não encontrada: \includegraphics [keepaspectratio,alt={Convergência logarítmica}]

---

#### 0.4 Discussão e Conclusão

Observou-se que o spline natural apresentou erro decaindo aproximadamente como  $E_n \sim h^2$ , enquanto o spline completo atingiu a convergência teórica de quarta ordem ( $\rho \approx 4$ ). A imposição das derivadas nas extremidades remove o viés de contorno e garante a suavidade global  $C^2$ .

Assim, o comportamento numérico confirma a teoria apresentada em sala e conclui que o *spline cúbico completo* é um método de alta precisão para interpolação suave.