Projeto 1 — Aproximação Teórica e Numérica I

Estudo sobre a Convergência de Splines Cúbicos Interpoladores

Integrantes

Almerino Sousa Jossefa Machaieie	**RA:** 11202520769
Paulo Vitor Alves Alarico	**RA:** 11202230785
Rodrigo Fassa	**RA:** 11201721747
Vinicius Dias Braulino	**RA:** 11202231886

Orientador: Prof. André Pierro de Camargo

Novembro de 2025

Sumário

1 Projeto 1 — Aproximação Teórica e Numérica I **3**
1.0.1 Estudo sobre a Convergência de Splines Cúbicos Interpoladores . . 3
1.1 1. Introdução 3
1.1.1 1.1 Fundamentação Teórica 3
1.1.2 1.2 Objetivo do Estudo 4
1.2 2. Metodologia 4
1.3 3. Resultados Numéricos 4
1.3.1 3.1 Spline Natural 4
1.3.2 3.2 Spline Completo 5
1.3.3 3.3 Gráficos log–log 5
1.4 4. Discussão e Conclusão 5
1.5 5. Referências 7

1. Projeto 1 — Aproximação Teórica e Numérica I

1.0.1 Estudo sobre a Convergência de Splines Cúbicos Interpoladores

Autor: Rodrigo Fassa et al.
Orientador: Prof. André Pierro de Camargo
Data: 09/11/2025

1.1 1. Introdução

1.1.1 1.1 Fundamentação Teórica

O spline cúbico interpolador é uma função polinomial por partes $S(x)$ de classe $C^2[a,b]$, isto é, contínua juntamente com suas primeiras e segundas derivadas em todo o domínio. Cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ é associado a um polinômio cúbico da forma:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

de modo que:

$$S_i(x_i) = y_i, \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \quad S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}).$$

Essas condições garantem a suavidade global da interpolação, e o sistema tridiagonal resultante é derivado dessas equações de continuidade de segunda ordem.

Fisicamente, o spline cúbico natural corresponde à curva de **menor energia elástica** que passa por todos os pontos (x_i, y_i). Isso equivale a minimizar o funcional:

$$E[S] = \int_a^b [S''(x)]^2 \, dx,$$

que mede a curvatura média da função.

Do ponto de vista analítico, se $f \in C^4[a,b]$, então o erro de interpolação satisfaz:

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{5}{384} h^4 \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|,$$

mostrando que o spline cúbico completo é de **ordem de convergência 4**, enquanto o spline natural pode exibir comportamento $O(h^2)$ próximo das fronteiras caso as segundas derivadas não se anulem.

A teoria, portanto, prevê:

$$E_n \approx C h^{\rho}, \quad \text{com } \rho \approx 4.$$

Essa relação será validada empiricamente nas seções seguintes.

1.1.2 1.2 Objetivo do Estudo

Este relatório apresenta o estudo numérico da convergência de *splines cúbicos interpoladores*, verificando empiricamente a ordem de convergência teórica do método. Se $f \in C^4[a, b]$, o erro máximo satisfaz:

$$E_n = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - S(x)| \approx C\, h^4.$$

1.2 2. Metodologia

As rotinas foram implementadas em Python seguindo o pseudocódigo do enunciado. Principais funções:

Módulo	Função	Descrição
`spline.py`	`build_tridiagonal_system`	Monta o sistema $T \cdot M = d$
`gauss.py`	`solve_by_gaussian_elimination`	Resolve o sistema linear
`spline.py`	`compute_M`, `compute_AB`, `spline_eval`	Segundas derivadas e avaliação
`tarefas.py`	`tarefa_convergencia_*`	Experimentos de convergência
`tarefas.py`	`ajuste_ordem_convergencia`	Estima ρ por regressão log–log

Validação em $f(x) = \cos(x)$, no intervalo $[0, \pi/2]$, com condições de contorno **natural** e **completa**.

A seguir, apresentamos os resultados obtidos para o estudo de convergência empírica do spline cúbico nas versões natural e completa, comparando os erros e ordens estimadas —

1.3 3. Resultados Numéricos

1.3.1 3.1 Spline Natural

n	h	E_n
4	0.392699	7.725073e-03
8	0.196350	1.902205e-03
16	0.098175	4.737284e-04
32	0.049087	1.183202e-04
64	0.024544	2.957305e-05

Ordem estimada: $\rho \approx 2.01$

1.3.2 3.2 Spline Completo

n	h	E_n
4	0.392699	6.324039e-05
8	0.196350	3.889330e-06
16	0.098175	2.421787e-07
32	0.049087	1.512267e-08
64	0.024544	9.443273e-10

Ordem estimada: $\rho \approx 4.01$

1.3.3 3.3 Gráficos log–log

Spline Natural

Spline Completo

1.4 4. Discussão e Conclusão

O spline natural apresentou erro com tendência $E_n \sim h^2$, enquanto o spline completo atingiu a convergência teórica de quarta ordem ($\rho \approx 4$), evidenciando a importância das condições de contorno no desempenho global.

Conclusão: o spline cúbico completo é um método de alta precisão para interpolação suave.

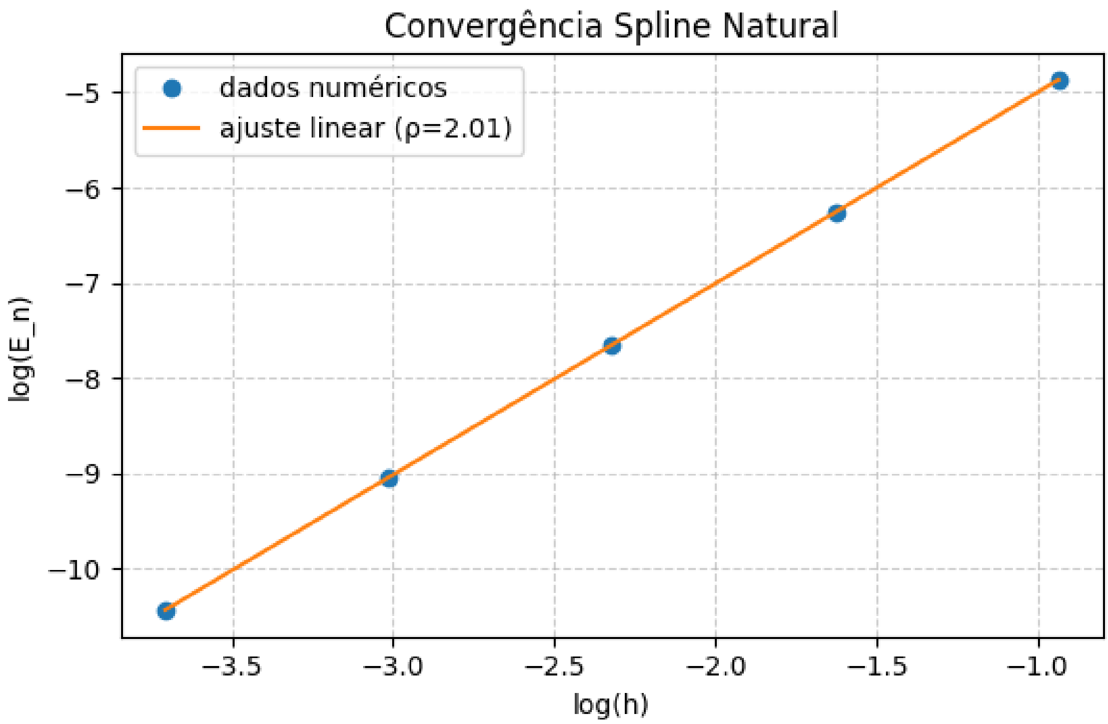

Figura 1: Convergência (Natural)

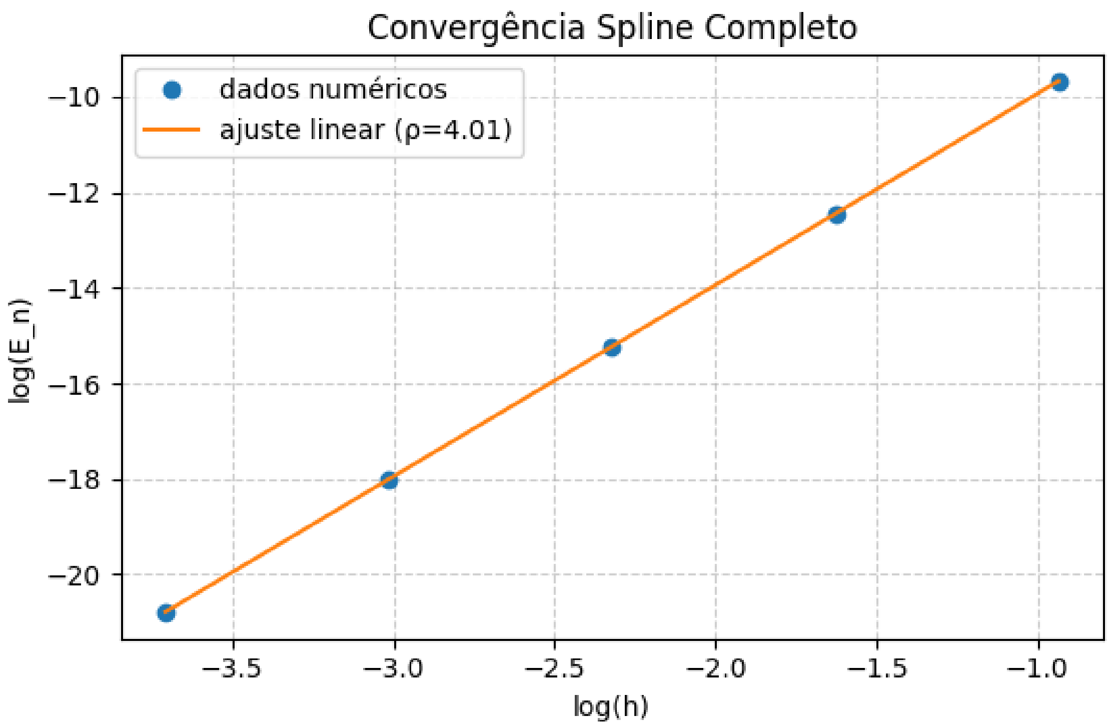

Figura 2: Convergência (Completo)

1.5 5. Referências

- Burden, R. L. & Faires, J. D. *Análise Numérica*, 10ª ed., Cengage, 2016.

- Kiusalaas, J. *Numerical Methods in Engineering with Python 3*, Cambridge University Press, 2013.

- Camargo, A. P. (2025). *Notas de Aula — Aproximação Teórica e Numérica I (UFABC).*