4M054 : Mise en oeuvre des eleménts finis

Projet 2018/2019

David Frenkiel (3770971)

28/04/2019

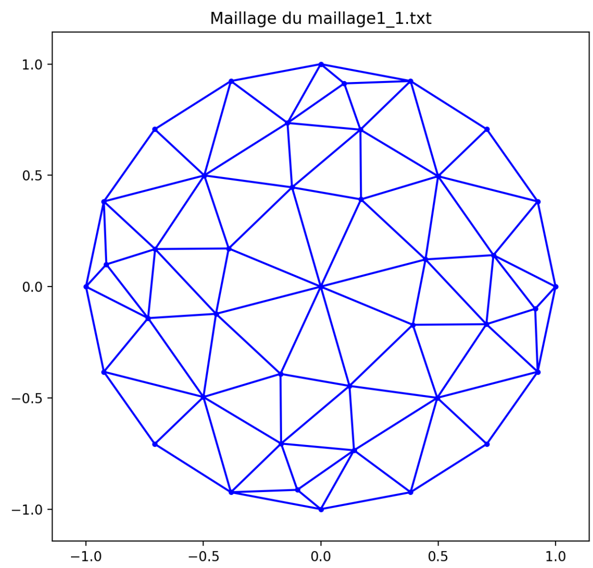
Question 1

Exécuter le code :

```
./question.sh 1a data/maillages/maillage1_1.txt
./question.sh 1b data/maillages/maillage1_1.txt
```

Le code se trouve dans

```
questions/q1b_afficher_maillage.py
```



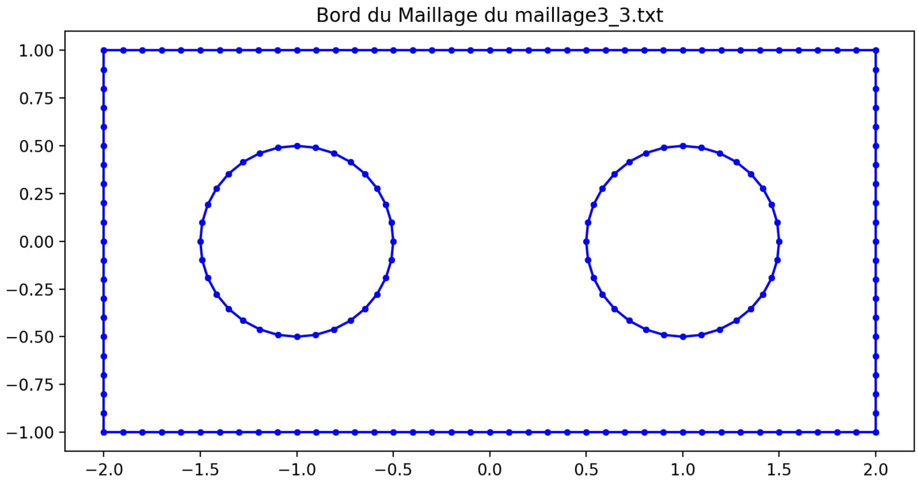
Question 2

Exécuter le code :

```
./question.sh 2 data/maillages/maillage3_3.txt
```

Le code se trouve dans

```
questions/q2_afficher_maillage_bord.py
```



Question 3

On aimerait écrire le problème suivant sous forme variationnelle :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \text{où } f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

On suppose que $u \in C_0^2(\Omega)$ et on se donne $v \in C_0^1(\Omega)$. Ensuite on multiplie l'égalité par v et on l'integre. Cela nous donne

$$-\int_\Omega v\Delta u \, dx = \int_\Omega vf \, dx$$

Comme $u \in C_0^2(\Omega)$ et $v \in C_0^1(\Omega)$ on peut donc se servir d'une formule de Green, ce qui nous améne à

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dx - \int_\Gamma v\nabla u \cdot n \, d\sigma = \int_\Omega vf \, dx$$

Comme v est nulle sur Γ on arrive finalement à

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dx = \int_\Omega vf \, dx$$

Comme $C_0^1(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ on suppose maintenant que $u \in H_0^1(\Omega)$. Par passage à la limite on en tire la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ a(u,v) = \ell(v) \; \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Où

$$
\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \; dx \\
\ell(v) &= \int_\Omega v f \; dx
\end{aligned}
$$

Pour démontrer la coércivité de $a(u, v)$ on note tout d'abord que, par l'inégalite de Poincaré, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$
\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \;\; \forall u \in H_0^1(\Omega)
$$

Il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
a(u, u) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \; dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq \frac{1}{C} \, \|u\|_{H^1(\Omega)}^2
\end{aligned}
$$

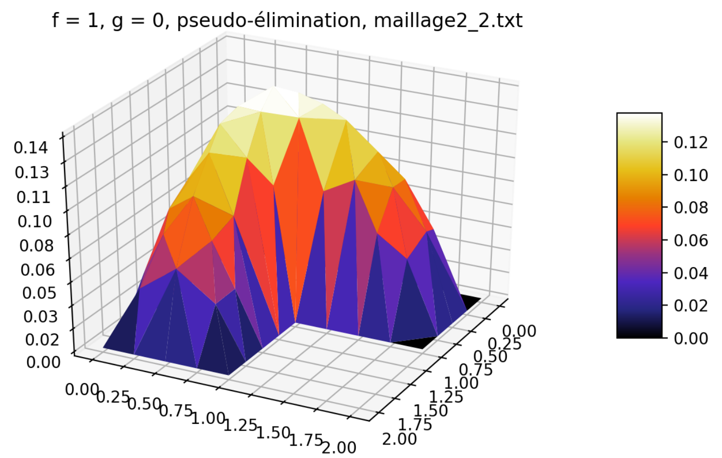
On a ainsi démontré la coércivité de a.

Exécuter le code :

```
./question.sh 3 data/maillages/maillage2_2.txt
```

Le code se trouve dans

```
questions/q3_resoudre_probleme_poisson.py
```



Question 4

On aimerait resoudre analytiquement l'équation de Poisson aux conditions de Dirichlet homogène dans le disque unité ($\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, |\boldsymbol{x}| < 1\}$). On cherche $u \in C^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Étant donné la symétrie circulaire du domaine on peut se servir du laplacien en coordonnées polaires :

$$\Delta f(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

En plus, étant donné la symétrie circulaire de u sur la frontière on peut supposer que u ne dépend pas de θ. Il faut donc resoudre l'équation differentielle suivante :

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 1, \text{ où } u = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Cette équation se resoudre facilement en l'intégrant 2 fois :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) &= -1 \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) &= -r \\
\Rightarrow r\frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{2}r^2 + A \\
\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{2}r + \frac{A}{r} \\
\Rightarrow u &= -\frac{1}{4}r^2 + A\log r + B
\end{aligned}$$

Comme on cherche une solution dans $C^2(\Omega)$ il faut que A soit 0. Donc

$$u = -\frac{1}{4}r^2 + B$$

Et comme $u(1) = 0$, il en resulte que $B = \frac{1}{4}$. On a alors la solution suivante :

$$u(r) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}r^2$$

Et donc en coordonnées cartésienne :

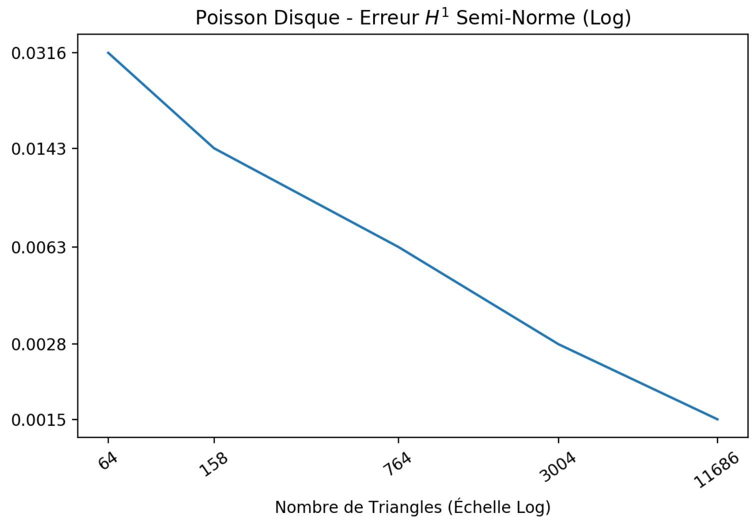
$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1 - |\boldsymbol{x}|^2}{4}$$

Exécuter le code :

```
./question.sh 4
```

Le code se trouve dans

```
questions/q4_verifier_solution_poisson_disque.py
```



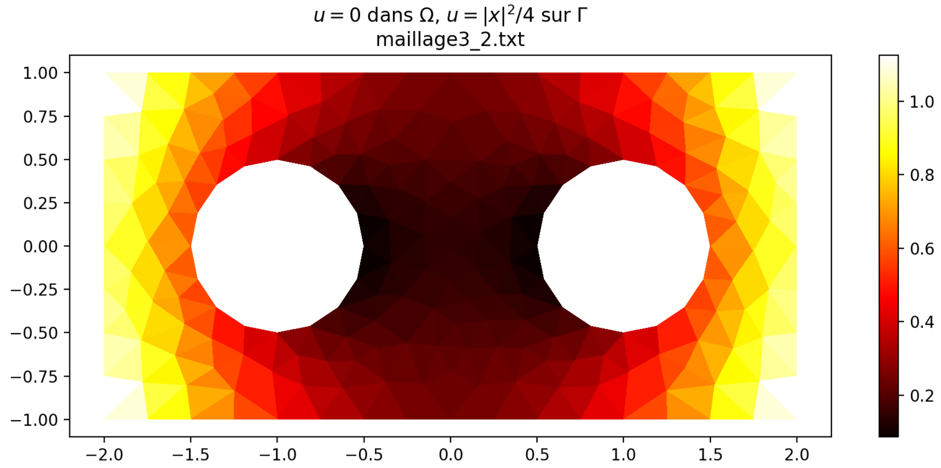
Question 5

Exécuter le code :

```
./question.sh 5 data/maillages/maillage3_2.txt
```

Le code se trouve dans

```
questions/q5_resoudre_probleme_poisson_tilde.py
```



Question 6

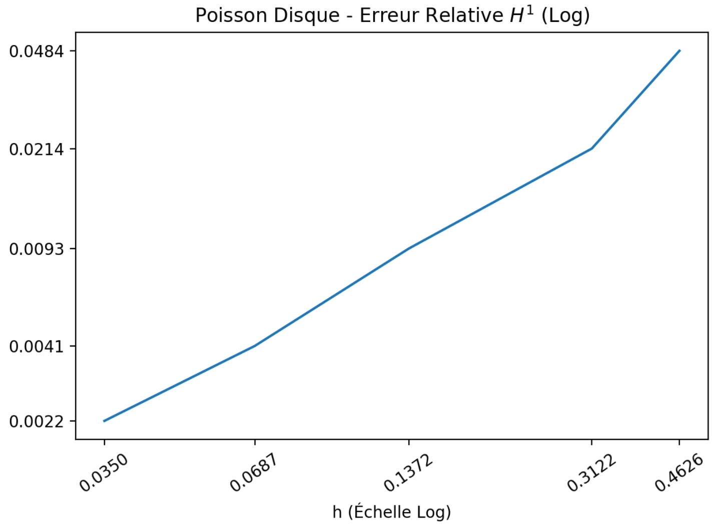
Veuillez noter que dans la visualisation h est définie comme la longueur de l'arête le plus long du maillage.

Exécuter le code :

```
./question.sh 6
```

Le code se trouve dans

```
questions/q6_verifier_solution_poisson_tilde.py
```



Question 7

On aimerait écrire le problème suivant sous forme variationnelle :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = g \text{ sur } \Gamma \\ \text{où } f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

On suppose que $u \in C^2(\Omega)$ et on se donne $v \in C^1(\Omega)$. Ensuite on multiplie l'égalité par v et on l'integre. Cela nous donne

$$-\int_\Omega v\Delta u \, dx = \int_\Omega vf \, dx$$

Comme $u \in C^2(\Omega)$ et $v \in C^1(\Omega)$ on peut donc se servir d'une formule de Green, ce qui nous améne à

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Gamma v\partial_{\boldsymbol{n}} u \, d\sigma = 0$$

Avec $\lambda = \partial_{\boldsymbol{n}} u$ on a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx + \int_\Gamma \lambda v \; d\sigma = 0$$

On multiplie la condition aux limites par une fonction $\mu \in L^2(\Omega)$ et l'integre pour arriver à

$$\int_\Gamma u\mu \; d\sigma = \int_\Gamma g\mu \; d\sigma$$

Comme $C^1(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ on suppose maintenant que $u \in H^1(\Omega)$. Par passage à la limite on en tire la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx + \int_\Gamma \lambda v \; d\sigma = 0 \quad & \forall v \in H^1(\Omega) \\ \int_\Gamma u\mu \; d\sigma = \int_\Gamma g\mu \; d\sigma \quad & \forall \mu \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Question 8

On exprime u_h, λ_h, v et μ dans la base de fonctions de forme :

$$\begin{aligned} u_h &= \sum_{k=1}^{N_\Omega} u_k \varphi_k^\Omega \\ \lambda_h &= \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \lambda_j \varphi_j^\Gamma \\ v &= \varphi_j^\Omega \quad j = 1 \ldots N_\Omega \\ \mu &= \varphi_j^\Gamma \quad j = 1 \ldots N_\Gamma \end{aligned}$$

Cela nous amène à la formulation variationnelle discrète suivante :

Trouver u_i $(i = 1 \ldots N_\Omega)$ et λ_j $(j = 1 \ldots N_\Gamma)$ telles que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla\Big(\sum_{k=1}^{N_\Omega} u_k \varphi_k^\Omega\Big) \cdot \nabla(\varphi_j^\Omega) \; dx + \int_\Gamma \Big(\sum_{k=1}^{N_\Gamma} \lambda_k \varphi_k^\Gamma\Big)(\varphi_j^\Omega) \; d\sigma = 0 \quad & \forall j = 1 \ldots N_\Omega \\ \int_\Gamma \Big(\sum_{j=1}^{N_\Omega} u_j \varphi_j^\Omega\Big)(\varphi_k^\Gamma) \; d\sigma = \int_\Gamma g \varphi_k^\Gamma \; d\sigma \quad & \forall k = 1 \ldots N_\Gamma \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes de ces deux expressions on en tire

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_\Omega} u_k \int_\Omega \nabla \varphi_j^\Omega \cdot \nabla \varphi_k^\Omega \; dx + \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \lambda_k \int_\Gamma \varphi_j^\Omega \varphi_k^\Gamma \; d\sigma = 0 \quad & \forall j = 1 \ldots N_\Omega \\ \sum_{j=1}^{N_\Omega} u_j \int_\Gamma \varphi_k^\Gamma \varphi_j^\Omega \; d\sigma = \int_\Gamma g \varphi_k^\Gamma \; d\sigma \quad & \forall k = 1 \ldots N_\Gamma \end{aligned}$$

Or, avec U le vecteur des composants u_j ($j = 1 \ldots N_\Omega$) et L le vecteur des composants λ_k ($k = 1 \ldots N_\Gamma$), on arrive aux deux systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} AU + BL &= 0 \\ B^T U &= G \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} A_{j,k} &= \int_\Omega \nabla\varphi_j^\Omega \cdot \nabla\varphi_k^\Omega \, dx && j,k = 1 \ldots N_\Omega \\ B_{j,k} &= \int_\Gamma \varphi_j^\Omega \varphi_k^\Gamma \, d\sigma && j = 1 \ldots N_\Omega, k = 1 \ldots N_\Gamma \\ G_k &= \int_\Gamma g\varphi_k^\Gamma \, d\sigma && k = 1 \ldots N_\Gamma \end{aligned}$$

Finalemenet, on combine ces deux systèmes en un seul systéme linéaire des matrices blocs :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}$$

Question 9

Exécuter le code :

```
./question.sh 9
```

Le code se trouve dans

```
questions/q9_verifier_solution_bloc.py
```