4M054 : Mise en oeuvre des éléments finis
C.Guichard, G.Migliorati, X.Claeys & T.Cimic

Projet

Il est possible de réaliser le projet en binôme. Celui-ci devra être déposé sur Moodle au plus tard le dimanche 7 mai 2019 à minuit

Le projet sera écrit en Python3. L'usage de toute librairie ou routine de scipy, numpy ou matplotlib est autorisée. Le projet sera envoyé sous forme d'une archive .zip contenant les éléments suivants :

- les codes sources du projet,
- un rapport au format pdf ou bien au format notebook jupyter
- un fichier texte intitulé readme.txt expliquant comment se servir du code source du projet

Le code source python du projet doit pouvoir être utilisé indépendamment de tout notebook. On attend que vous mettiez en place des tests de votre propre initiative pour vous assurer du bon fonctionnement de votre code et de sa conformité au cahier des charges imposé. Vous serez interrogés sur les tests mis en place. Pour les courbes, on prendra soin de faire apparaitre une légende et des graduations selon une police suffisamment grosse pour permettre une lecture sans effort.

1 Condition de Dirichlet par pseudo-élimination

Etant donné un domaine de calcul $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dont la frontière sera notée Γ, et deux fonctions $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

Question 1)
Ecrivez une première routine permettant de lire un fichier de maillage dans le format indiqué en appendice et de le charger dans deux tableaux représentant les triangles et les noeuds du maillage. La routine prendra en argument d'entrée le nom du fichier de maillage. Ecrivez une deuxième routine permettant d'afficher graphiquement le maillage à partir du nom de fichier en argument d'entrée.

Question 2)
Écrivez une routine python prenant en entrée un maillage triangulaire comme à la question précédente et qui construit un tableau contenant les arêtes localisées sur la frontière du domaine de calcul. Écrivez une fonction permettant d'afficher ce maillage du bord.

Question 3)
On se place dans le cas où $g = 0$. Lorsqu'on écrit (1) sous forme variationnelle, la forme bilinéaire correspondante est-elle coercive ? Ecrivez un code éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange permettant de résoudre (1) pour le cas $f(\boldsymbol{x}) = 1$ et $g(\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Pour imposer la condition aux limites de Dirichlet on utilisera l'une des méthodes vue en cours (telle que la pseudo-élimination).

Question 4)
Quelle est la solution du problème (1) dans le cas où le domaine de calcul est le disque unité $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, |\boldsymbol{x}| < 1\}$ et où $f = 1$ et $g = 0$? Ici et dans la suite, $|\boldsymbol{x}|^2 := x_1^2 + x_2^2$ pour $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Vérifiez que la solution numérique que vous avez obtenue à la question précédente approche correctement cette solution exacte dans le cas de cette géométrie et ces données particulières.

Question 5)
On s'intéresse maintenant au cas où $f = 0$ et $g(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2/4$. On peut alors chercher la solution de (1) sous la forme $u(\boldsymbol{x}) = \tilde{u}(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$. On se ramène ainsi au problème caractérisant $\tilde{u} := u - g$ et donné par

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} = \Delta g \quad \text{dans } \Omega \\ \tilde{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

En utilisant cette remarque ainsi que les questions précédentes, écrivez une routine qui approche numériquement la solution de (1) pour le cas où $f = 0$ et $g(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2/4$. On notera $u_h^{(1)}(\boldsymbol{x})$ la fonction $\mathbb{P}_1$-Lagrange approchant la solution $u(\boldsymbol{x})$ avec cette méthode. En utilisant la routine `tripcolor` de `matplotlib`, affichez $u_h^{(1)}(\boldsymbol{x})$ au moyen d'une carte de couleur.

Question 6)
Notons $\Pi_h(u)$ l'interpolé de $u(\boldsymbol{x})$ sur les fonctions $\mathbb{P}_1$-Lagrange, où $u(\boldsymbol{x})$ est la solution exacte de (1). Pour $f = 0$, $g(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2/4$ et en considérant les fichiers de maillage `maillage1_1.txt`, ..., `maillage1_5.txt` (le domaine de calcul est fixé et la finesse du maillage tend vers 0), représentez l'erreur $E_h^1 := \|u_h^{(1)} - \Pi_h(u)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}/\|\Pi_h(u)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ en fonction de h en échelle logarithmique.

2 Condition de Dirichlet par multiplicateurs de Lagrange

Dans cette partie on se place encore dans le cas où $f = 0$, et on se propose d'explorer une autre approche permettant d'imposer une condition de Dirichlet non-homogène sur le bord. On supposera dans la suite que la frontière du domaine Ω est suffisament régulière pour que la solution de (1) vérifie $\lambda := -\partial_{\boldsymbol{n}} u \in \mathrm{L}^2(\Gamma)$. On rappelle que par définition $\partial_{\boldsymbol{n}} u := \boldsymbol{n} \cdot \nabla u|_\Gamma$ où $\boldsymbol{n}$ est le champ de vecteur normal unitaire à Γ dirigé vers l'extérieur de Ω.

Question 7)
En notant donc $\lambda := -\partial_{\boldsymbol{n}} u$ et en supposant que $f = 0$, vérifiez que la solution u de (1) satisfait les relations variationnelles suivantes : $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathrm{L}^2(\Gamma)$ et

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\boldsymbol{x} + \int_\Gamma \lambda v \, d\sigma = 0 \quad &\forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \\ &\int_\Gamma u\mu \, d\sigma = \int_\Gamma g\mu \, d\sigma &\forall \mu \in \mathrm{L}^2(\Gamma). \end{aligned} \tag{2}$$

On décide de discrétiser cette formulation selon une stratégie de Galerkin. On note $\mathscr{T}_h(\Omega)$ une triangulation régulière de Ω et, en considérant toutes les arêtes du maillage localisées sur le bord du domaine de calcul, ceci induit $\mathscr{T}_h(\Gamma) = \{\Gamma \cap \partial\tau,\ \tau \in \mathscr{T}_h(\Omega)\}$ une triangulation régulière de $\Gamma = \partial\Omega$.

Question 8)
Pour approcher $\mathrm{H}^1(\Omega)$, on considère $\mathrm{V}_h(\Omega)$ l'espace des fonctions $\mathbb{P}_1$-Lagrange sur le maillage $\mathscr{T}_h(\Omega)$. Pour approcher $\mathrm{L}^2(\Gamma)$, on considère $\mathrm{V}_h(\Gamma)$ l'espace des fonctions $\mathbb{P}_1$-Lagrange sur le maillage $\mathscr{T}_h(\Gamma)$. On est donc amené à considérer la formulation discrète suivante : trouver $u_h \in \mathrm{V}_h(\Omega)$, $\lambda_h \in \mathrm{V}_h(\Gamma)$ tels que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v d\boldsymbol{x} + \int_\Gamma \lambda_h v \, d\sigma = 0 \quad &\forall v \in \mathrm{V}_h(\Omega) \\ &\int_\Gamma u_h\mu \, d\sigma = \int_\Gamma g\mu \, d\sigma &\forall \mu \in \mathrm{V}_h(\Gamma). \end{aligned} \tag{3}$$

Montrez que, lorsque l'on décompose les fonction de $\mathrm{V}_h(\Omega)$ (resp. $\mathrm{V}_h(\Gamma)$) sur une base de fonctions de forme nodales $\varphi_j^\Omega, j = 1 \dots N_\Omega$ (resp. $\varphi_j^\Gamma, j = 1 \dots N_\Gamma$), la formulation discrète se ramène au système linéaire

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}^{\top} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad & \mathrm{A} = (\mathrm{A}_{j,k}), \quad \mathrm{A}_{j,k} = \int_{\Omega} \varphi_j^{\Omega} \varphi_k^{\Omega} d\boldsymbol{x} \quad j,k = 1 \dots N_{\Omega} \\ & \mathrm{A} = (\mathrm{B}_{j,k}), \quad \mathrm{B}_{j,k} = \int_{\Gamma} \varphi_j^{\Omega} \varphi_k^{\Gamma} d\sigma \quad j = 1 \dots N_{\Omega}, \ \ k = 1 \dots N_{\Gamma} \end{aligned} \tag{4}$$

et où U (resp. L) est le vecteur des valeurs de u_h (resp. λ_h) aux noeuds de $\mathscr{T}_h(\Omega)$ (resp. $\mathscr{T}_h(\Gamma)$), et $G = (G_j)_{j=1}^{N_\Gamma}, G_j = \int_{\Gamma} g \varphi_j^{\Gamma} d\sigma$.

Question 9)

Implémentez la résolution numérique de la formulation (2) au moyen de (4). On note $u_h^{(2)}$ la fonction $\mathbb{P}_1$-Lagrange solution de (3) approchant $u(\boldsymbol{x})$ solution de (1) au moyen de cette deuxième méthode. Vérifiez que, pour $g(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2/2$ (et $f = 0$), les deux solutions numériques $u_h^{(1)}(\boldsymbol{x})$ et $u_h^{(2)}(\boldsymbol{x})$ sont proches. On mènera cette comparaison en calculant la norme de l'erreur $E_h^2 := \|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}/\|u_h^{(1)}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ pour Ω associé aux différents fichiers de maillage `maillagea_b.txt` avec $b = 1, \dots, 5$, et pour $a = 1$ puis $a = 2$ ceci afin de représenter la courbe E_h en fonction de h en échelle logarithmique pour deux géométries distinctes.

Appendice : format et fichiers de maillage

L'archive décrivant le sujet du projet contient trois séries de fichiers de maillage intitulés `maillagea_b.txt`, correspondant à trois formes différentes (a = 1,2,3) du domaines de calcul, et 5 finesse de maillages différentes (b=1 : maillage le plus grossier, b=5 : maillage le plus fin). Le format de ces fichiers de maillage est décrit ci-dessous et correspondant au format type considéré en cours.

`#Nombre de noeuds`
Ns

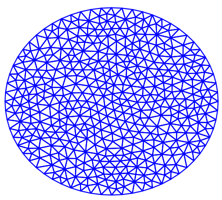
`#Coordonnees des noeuds`

x_1	y_1	z_1
x_2	y_2	z_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{Ns}	y_{Ns}	z_{Ns}

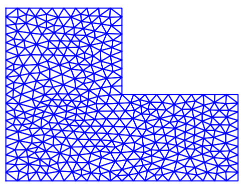
`#Nombre de triangles`
Nt

`#Numeros des sommets de chaque triangle`

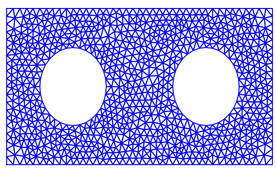
$\mathrm{I}_{1,1}$	$\mathrm{I}_{1,2}$	$\mathrm{I}_{1,3}$
$\mathrm{I}_{2,1}$	$\mathrm{I}_{2,2}$	$\mathrm{I}_{2,3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathrm{I}_{\mathrm{Nt},1}$	$\mathrm{I}_{\mathrm{Nt},2}$	$\mathrm{I}_{\mathrm{Nt},3}$



Domaine 1



Domaine 2



Domaine 3