Théorie spectrale et méthodes variationnelles
M2 Mathématiques et Applications
Spécialité Mathématiques de la Modélisation

Devoirs Maison, Juin 2020

David FRENKIEL (3770971)

5 juin 2020

Partie I

Exercice 1a

A bien définie :

Soit $u \in D(A)$. Notant que les λ_n ($n \in \mathbb{N}$) sont réels, on a

$$\begin{aligned}
\|Au\|_{\mathcal{H}}^2 &= (Au, Au)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \, (e_i, u)_{\mathcal{H}} \, e_i, \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \, (e_j, u)_{\mathcal{H}} \, e_j \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\lambda_i \, (e_i, u)_{\mathcal{H}} \, e_i, \lambda_j \, (e_j, u)_{\mathcal{H}} \, e_j \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_i \lambda_j \overline{(e_i, u)_{\mathcal{H}}} \, (e_j, u)_{\mathcal{H}} \, (e_i, e_j)_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i^2 | \, (e_i, u)_{\mathcal{H}} \, |^2 \\
&< \sum_{i\in\mathbb{N}} (1 + \lambda_i^2) | \, (e_i, u)_{\mathcal{H}} \, |^2 < \infty \qquad (\text{car } u \in D(A)).
\end{aligned}$$

Donc $\|Au\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$ pout tout $u \in D(A)$, et A est alors bien définie.

$D(A)$ dense :

Soit $u \in \mathcal{H}$, $N \in \mathbb{N}$, et $\epsilon > 0$. On se donne une fonction $\tilde{u} = u_N + u_\epsilon$, où $u_N = \sum_{n=1}^{N} (e_n, u) \, e_n$, $u_\epsilon \in D(A)$ tel que $\|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}} < \epsilon/2$, et

$$\|u - u_N\|_{\mathcal{H}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Un tel u_N existe car l'ensemble des sommes finies est dense dans $\mathcal{H}$.

Comme u_N est une somme finie, on a $u_N \in D(A)$. Il s'ensuit que $\tilde{u} \in D(A)$. Et donc, pour tout $u \in \mathcal{H}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $\tilde{u} \in D(A)$ telle que

$$\begin{aligned}
\|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{H}} &= \|u - u_N - u_\epsilon\|_{\mathcal{H}} \\
&\le \|u - u_N\|_{\mathcal{H}} + \|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Donc D(A) est dense dans $\mathcal{H}$.

A **symétrique :**

Soit $u, v \in D(A)$. En exprimant v avec la base hilbertienne, on a

$$\begin{aligned}
(Au, v)_{\mathcal{H}} &= \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i \, (e_i, u)_{\mathcal{H}} \, e_i, \sum_{j \in \mathbb{N}} (e_j, v)_{\mathcal{H}} \, e_j \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_i \overline{(e_i, u)_{\mathcal{H}}} \, (e_j, v)_{\mathcal{H}} \, (e_i, e_j)_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i \overline{(e_i, u)_{\mathcal{H}}} \, (e_i, v)_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \overline{(e_i, u)_{\mathcal{H}}} \lambda_i \, (e_i, v)_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{(e_i, u)_{\mathcal{H}}} \lambda_j \, (e_j, v)_{\mathcal{H}} \, (e_i, e_j)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} (e_i, u)_{\mathcal{H}} \, e_i, \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \, (e_j, v)_{\mathcal{H}} \, e_j \right)_{\mathcal{H}} \\
&= (u, Av)_{\mathcal{H}} \, .
\end{aligned}$$

Donc A est symétrique.

Exercice 1b

Comme l'opérateur A est à domaine dense son adjoint est bien définie. Alors soit $f \in \mathcal{H}$ et u une fonction définie par

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(e_n, \frac{f}{\lambda_n - i} \right)_{\mathcal{H}} e_n.$$

Comme la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est réelle, $\lambda_n - i \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc u est bien définie.

Il s'ensuit aussi que $u \in D(A)$, car

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + \lambda_n^2) |\,(e_n, u)_{\mathcal{H}}\,|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + \lambda_n^2) \left| \left(e_n, \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(e_j, \frac{f}{\lambda_j - i} \right)_{\mathcal{H}} e_j \right)_{\mathcal{H}} \right|^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + \lambda_n^2) \left| \left(e_n, \frac{f}{\lambda_n - i} \right)_{\mathcal{H}} \right|^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1 + \lambda_n^2}{|\lambda_n - i|^2} |\,(e_n, f)_{\mathcal{H}}\,|^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\,(e_n, f)_{\mathcal{H}}\,|^2 \\
&= \|f\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}(A-i)u &= (A-i)\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(e_n, \frac{f}{\lambda_n - i}\right)_{\mathcal{H}} e_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(e_n, \frac{f}{\lambda_n - i}\right)_{\mathcal{H}} (\lambda_n - i)e_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (e_n, f)_{\mathcal{H}}\, e_n = f.\end{aligned}$$

On a ainsi montré que pour tout $f \in \mathcal{H}$ il existe $u \in D(A)$ telle que $(A-i)u = f$. C'est-à-dire, $Ran(A-i) = \mathcal{H}$.

On a évidemment un résultat pareil pour $Ran(A+i)$.

Comme l'opérateur A est symétrique et à domaine dense, par la critère fondamentale d'auto-adjonction A est auto-adjoint.

On remarque aussi que, d'après l'exercice 1a, $v \in D(A^*)$ doit appartenir à $D(A)$ pour que $(u, Av)_{\mathcal{H}}$ soit bien défini. En effet, par Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}|\,(u, Av)_{\mathcal{H}}\,|^2 &\leq \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \|Av\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i^2 |\,(e_i, v)_{\mathcal{H}}\,|^2 \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{i\in\mathbb{N}} (1+\lambda_i^2)|\,(e_i, v)_{\mathcal{H}}\,|^2.\end{aligned}$$

Donc, pour que $(u, Av)_{\mathcal{H}}$ soit bien défini il faut que $\sum_{i\in\mathbb{N}}(1+\lambda_i^2)|\,(e_i, v)_{\mathcal{H}}\,|^2 < \infty$. C'est-à-dire, il faut que $D(A^*) \subset D(A)$.

Exercice 1c

Étape 1

Comme A est auto-adjoint on sait que son spectre est réel. Pour un élément e_n de la base de $\mathcal{H}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Ae_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i\,(e_i, e_n)_{\mathcal{H}}\, e_i = \lambda_n e_n.$$

Donc $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(A)$. Si l'ensemble $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ ne contient pas de valeur d'adhérence on a aussi

$$\overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}} = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(A).$$

Étape 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \not\subset \overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}}$. Cela implique qi'il existe un $\epsilon > 0$ tel que $|\lambda - \lambda_n| > \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $u \in D(A)$ on a

$$\begin{aligned}
\big\|(A-\lambda)u\big\|_{\mathcal{H}}^2 &= \big\|Au - \lambda u\big\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \, (e_n, u)_{\mathcal{H}} \, e_n - \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} (e_n, u)_{\mathcal{H}} \, e_n \big\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n - \lambda) \, (e_n, u)_{\mathcal{H}} \, e_n \big\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n - \lambda)^2 \, |(e_n, u)_{\mathcal{H}}|^2 \qquad \text{(par Parseval)} \\
&\geqslant \epsilon^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} |(e_n, u)_{\mathcal{H}}|^2 \\
&= \epsilon^2 \big\|u\big\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Donc $\ker(A - \lambda) = \{0\}$, et il s'ensuit que $\sigma(A) \subset \overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}}$.

Étape 3

Dans le cas où $\overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}}$ contient des valeurs d'adhérence, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une telle valeur d'adhérence. Il existe alors une sous-suite $(\lambda_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \lambda_{\phi(n)} = \lambda$. Pour la suite $(e_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ on a donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \big\|(A-\lambda)e_{\phi(n)}\big\|_{\mathcal{H}}^2 &= \lim_{n\to\infty} \big\|(\lambda_{\phi(n)} - \lambda)e_{\phi(n)}\big\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} (\lambda_{\phi(n)} - \lambda)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Comme $\|e_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(e_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Weyl. Cela implique que $\lambda \in \sigma(A)$, et donc que $\overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}} \subset \sigma(A)$.

On a ainsi montré que $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}}$.

Exercice 1d

Tout d'abord, V est clairement dense dans $\mathcal{H}$ et, comme A est auto-adjoint, on a $\overline{A} = A$. En effect, $A = A^*$ implique que

$$\overline{A} = A^{**} = A^* = A.$$

Soit A_V l'opérateur de domaine $V \subset D(A)$ tel que pour tout $u \in D(A_V)$, on a $A_V u = Au$. Donc $A_V \subset A$. Comme A est auto-adjoint, cela implique que l'opérateur dense A_V est symétrique et fermable.

Comme $D(A_V) = V$ est dense dans $\mathcal{H}$, on peut définir l'adjoint de A_V. Le domaine $D(A_V^*)$ de l'adjoint de A_V est défini par

$$D(A_V^*) = \{v \in \mathcal{H} \mid \exists M_v \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall u \in D(A_V), |\,(A_V u, v)_{\mathcal{H}}\,| \leqslant M_v \big\|u\big\|_{\mathcal{H}}\}.$$

Soit $u \in D(A_V)$ et $v \in \mathcal{H}$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u = \sum_{i=0}^{N} (e_i, u)_{\mathcal{H}}\, e_i$, et

$$\begin{aligned}
|\,(A_V u, v)_{\mathcal{H}}\,| &= \left| \left(\sum_{i=0}^{N} \lambda_i\, (e_i, u)_{\mathcal{H}}\, e_i, \sum_{j\in\mathbb{N}} (e_j, v)_{\mathcal{H}}\, e_j \right)_{\mathcal{H}} \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{N} \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_i \overline{(e_i, u)_{\mathcal{H}}}\, (e_j, v)_{\mathcal{H}}\, (e_i, e_j)_{\mathcal{H}} \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{N} \overline{(e_i, u)_{\mathcal{H}}} \lambda_i\, (e_i, v)_{\mathcal{H}} \right| < \infty.
\end{aligned}$$

Comme cette somme est finie, il est bien définie pour tout $v \in \mathcal{H}$. Donc $D(A_V^*) = \mathcal{H}$.

Et A_V^* est symétrique car, pour tout $u, v \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned}
(A_V^* u, v)_{\mathcal{H}} &= \sum_{i=0}^{N} \overline{(e_i, u)_{\mathcal{H}}} \lambda_i\, (e_i, v)_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{N} \overline{(e_i, u)_{\mathcal{H}}} \lambda_j\, (e_j, v)_{\mathcal{H}}\, (e_i, e_j)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} (e_i, u)_{\mathcal{H}}\, e_i, \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, (e_j, v)_{\mathcal{H}}\, e_j \right)_{\mathcal{H}} \\
&= (u, A_V^* v)_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned}$$

Le symétrie de A_V^* implique que $\overline{A}_V$ est auto-adjoint. En effet, soit $u, v \in \overline{A}_V$. Donc $u, v \in A_V^*$ car $\overline{A}_V \subset (\overline{A}_V)^* = A^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\big(\overline{A}_V u, v\big)_{\mathcal{H}} &= \big(u, (\overline{A}_V)^* v\big)_{\mathcal{H}} \\
&= (u, A_V^* v)_{\mathcal{H}} \\
&= (A_V^* u, v)_{\mathcal{H}} \\
&= (u, A_V^{**} v)_{\mathcal{H}} \\
&= \big(u, \overline{A}_V v\big)_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned}$$

L'auto-adjonction de $\overline{A}_V$ implique que A est l'unique extension auto-adjointe de $\overline{A}_V$, et donc, par définition, que A_V est essentiellement auto-adjoint. En effet, soit B une autre extension auto-adjointe de $\overline{A}_V$. Donc $\overline{A}_V \subset A$ et $\overline{A}_V \subset B$, et

$$B = B^* \subset (\overline{A}_V)^* = \overline{A}_V \subset \overline{A} = A.$$

Et donc

$$A = A^* \subset B^* = B.$$

Donc $A \subset B$ et $B \subset A$. C'est-à-dire, $A = B$.

Donc A_V est essentiellement auto-adjoint (avec A comme l'unique extension auto-adjointe) et $\overline{A_V} u = Au = \overline{A} u$ pour tout $u \in V$. Alors, $V = D(A_V)$ est un cœur pour A.

Exercice 1e

Par le point 2 des "notations, rappels et compléments", les fonctions propres $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'opérateur $H_{\mathrm{oh},1}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Par le point 4 des "notations, rappels et compléments", on peut définir une base de $L^2(\mathbb{R}^d)$ à partir des $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$(\phi_{1,n_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{d,n_d}(x)) = \prod_{j=1}^{d}\phi_{j,n_j}(x_j).$$

Les éléments de cette base "tensorielle" sont aussi des fonctions propres de $H_{\mathrm{oh,d}}$. En effet,

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{oh,d}}\left(\prod_{j=1}^{d}\phi_{j,n_j}(x_j)\right) &= -\frac{1}{2}\left(\left[\frac{d^2}{dx_1^2}-x_1^2\right]+\cdots+\left[\frac{d^2}{dx_d^2}-x_d^2\right]\right)\left(\prod_{j=1}^{d}\phi_{j,n_j}(x_j)\right)\\
&= \left(\left[n_1+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[n_d+\frac{1}{2}\right]\right)\left(\prod_{j=1}^{d}\phi_{j,n_j}(x_j)\right).
\end{aligned}$$

On voit donc que chaque $\prod_{j=1}^{d}\phi_{j,n_j}(x_j)$ est une fonction propre de $H_{\mathrm{oh,d}}$ associée à la valeur propre $\sum_{j=1}^{d}(n_j+\frac{1}{2})$.

Alors, il existe une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d)$ formée de fonctions propres de $H_{\mathrm{oh,d}}$.

Exercice 1f

On postule que les résultats précédents concernant l'opérateur auto-adjoint A sur un espace d'Hilbert quelconque s'appliquent à l'opérateur $H_{\mathrm{oh,d}}$.

Cela implique immédiatement, d'après l'exercice 1b, que $H_{\mathrm{oh,d}}$ est auto-adjoint.

D'après l'exercice 1c, le spectre de $H_{\mathrm{oh,d}}$ est donc donné par

$$\sigma(H_{\mathrm{oh,d}}) = \overline{\{\lambda_n^{(d)}, n\in\mathbb{N}\}} = \{\lambda_n^{(d)}, n\in\mathbb{N}\},$$

où $\lambda_n^{(d)} = \left(\left[n_1+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[n_d+\frac{1}{2}\right]\right)$ avec $(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}^d$. Comme l'ensemble des tuples $\{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}^d\}$ est dénombrable, il existe une bijection entre n et $\{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}^d\}$. Les $\lambda_n^{(d)}$ sont alors bien définis.

D'apres le corollaire 4.9 du polycopié du cours, on sait que tout opérateur auto-adjoint satisfait $\sigma(A)\subset[\alpha,+\infty[$ si et seulement si $(u,Au)_{\mathcal{H}}\geqslant\alpha\|A\|_{\mathcal{H}}^2$ pour tout $v\in D(A)$.

Donc, comme $H_{\mathrm{oh,d}}$ est auto-adjoint, il s'ensuit que $H_{\mathrm{oh,d}}\geqslant\frac{d}{2}$. En effect, le plus petit valeur propre de $H_{\mathrm{oh,d}}$ est donné par

$$\lambda_0^{(d)} = \underbrace{\left[0+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[0+\frac{1}{2}\right]}_{d\text{ termes}} = \frac{d}{2}.$$

Et par le corollaire 4.9, $\sigma(H_{\mathrm{oh,d}})\subset[\frac{d}{2},+\infty[$ implique que $(v,H_{\mathrm{oh,d}}v)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\geqslant\frac{d}{2}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $v\in D(H_{\mathrm{oh,d}})$.

Pour montrer que $H_{\mathrm{oh,d}}$ est à résolvante compacte on note tout d'abord que $0 \notin \sigma(H_{\mathrm{oh,d}})$, et donc que $H_{\mathrm{oh,d}}$ est inversible. Avec la notation plus abstraite de l'exercice 1a on pose

$$H_{\mathrm{oh,d}}^{-1} u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(e_n, \frac{u}{\lambda_n} \right)_{\mathcal{H}} e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} \left(e_n, u \right)_{\mathcal{H}} e_n.$$

Par un calcul directe on montre que cette définition est justifiée :

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{oh,d}}^{-1} H_{\mathrm{oh,d}} u &= H_{\mathrm{oh,d}}^{-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \left(e_n, u \right)_{\mathcal{H}} e_n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} \left(e_n, \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \left(e_i, u \right)_{\mathcal{H}} e_i \right)_{\mathcal{H}} e_n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(e_n, \lambda_i \left(e_i, u \right)_{\mathcal{H}} e_i \right)_{\mathcal{H}} e_n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} \lambda_n \left(e_n, u \right)_{\mathcal{H}} e_n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(e_n, u \right)_{\mathcal{H}} e_n = u.
\end{aligned}$$

Comme noté dans la corrigé de la question 8 de l'examen de 2018, l'opérateur $H_{\mathrm{oh,d}}^{-1}$ est la limite au sens de la norme d'opérateur d'une suite $(H_N^{-1})_{N\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs de rangs finis définis par

$$H_N^{-1} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\lambda_n} \left(e_n, u \right)_{\mathcal{H}} e_n.$$

Comme ces opérateurs sont de rangs finis, ils sont compacts. Donc la limite de la suite $H_{\mathrm{oh,d}}^{-1}$ est compact. La résolvante $R_0(H_{\mathrm{oh,d}}) = H_{\mathrm{oh,d}}^{-1}$ est alors aussi compact, et donc par définition $H_{\mathrm{oh,d}}$ est à résolvante compacte.

Finalement, pour terminer, il faut montrer que l'opérateur $H_{\mathrm{oh,d}}$ coïncide avec l'opérateur plus abstrait A de l'exercice 1a.

D'après l'exercice 1e on sait que la suite $(\phi_n^{(d)})_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit $(\lambda_n^{(d)})_{n\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres de $H_{\mathrm{oh,d}}$ définies ci-dessus et $(\phi_n^{(d)})_{n\in\mathbb{N}}$ les fonctions propres correspondantes définies par

$$\phi_n^{(d)} = \prod_{j=1}^{d} \phi_{j,n_j}(x_j),$$

avec une bijection convenable entre n et les tuples $\{(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d\}$.

L'action de l'opérateur $H_{\mathrm{oh,d}}$ sur $D(H_{\mathrm{oh,d}})$ coïncide clairement avec l'action de A sur $D(A)$. En effect, soit $u \in D(H_{\mathrm{oh,d}})$. Donc

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{oh,d}} u &= H_{\mathrm{oh,d}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\phi_n^{(d)}, u \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \phi_n^{(d)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{(d)} \left(\phi_n^{(d)}, u \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \phi_n^{(d)}.
\end{aligned}$$

Comme $u \in D(H_{\text{oh,d}})$, $\|H_{\text{oh,d}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty$. Donc

$$\|H_{\text{oh,d}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{(d)2} \left| \left(\phi_n^{(d)}, u \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right|^2 < \infty.$$

Il s'ensuit alors que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (1 + \lambda_n^{(d)2}) \left| \left(\phi_n^{(d)}, u \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right|^2 < \infty.$$

Donc les 2 domaines $D(H_{\text{oh,d}})$ et $D(A)$ coïncident. On a ainsi montré que les opérateurs $H_{\text{oh,d}}$ et A coïncident. Ceci implique que tous les résultats ci-dessus concernant l'opérateur abstrait A s'appliquent également à l'opérateur $H_{\text{oh,d}}$.

Exercice 1g

Comme $H_{\text{oh,d}}$ est à résolvante compacte, par le corollaire 5.21 du polycopié du cours, son spectre essentiel est vide :

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\text{oh,d}}) = \emptyset.$$

Le spectre discret $\sigma_{\text{disc}}(H_{\text{oh,d}})$ est le complémentaire du spectre essentiel dans $\sigma(H_{\text{oh,d}})$. Comme $\sigma_{\text{ess}}(H_{\text{oh,d}})$ est vide on a

$$\sigma_{\text{disc}}(H_{\text{oh,d}}) = \sigma(H_{\text{oh,d}}) = \left\{ n_1 + \cdots + n_d + \frac{d}{2}, (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d \right\}.$$

On remarque aussi que le spectre discret est définie comme l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie. Comme chaque valeur propre de $H_{\text{oh,d}}$ est de multiplicité d, le spectre discret est égale au spectre entier.

Le spectre ponctuel $\sigma_{\text{ponc}}(H_{\text{oh,d}})$ est l'ensemble de toutes les valeurs propres de $H_{\text{oh,d}}$. Il est donc égale au spectre discret :

$$\sigma_{\text{ponc}}(H_{\text{oh,d}}) = \sigma_{\text{disc}}(H_{\text{oh,d}}) = \left\{ n_1 + \cdots + n_d + \frac{d}{2}, (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d \right\}.$$

Le spectre continu $\sigma_{\text{cont}}(H_{\text{oh,d}})$ est le complémentaire du spectre ponctuel dans $\sigma(H_{\text{oh,d}})$. Comme $\sigma_{\text{ponc}}(H_{\text{oh,d}}) = \sigma(H_{\text{oh,d}})$, le spectre continu est vide :

$$\sigma_{\text{cont}}(H_{\text{oh,d}}) = \emptyset.$$

Exercice 1h

Soit $\psi_0(x_1, x_2) = (1+x_1+2x_2+3x_1x_2)e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}$. On remarque tout d'abord que $\psi_0(x_1, x_2)$ est une combinaison linéaire des fonctions propres de $H_{\text{oh},2}$:

$$\begin{aligned}\psi_0(x_1, x_2) &= \pi^{\frac{1}{2}}\phi_0^{(2)} + \frac{1}{4}\pi^{\frac{1}{2}}\phi_1^{(2)} + \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\phi_2^{(2)} + \frac{3}{16}\pi^{\frac{1}{2}}\phi_3^{(2)} \\ &= \pi^{\frac{1}{2}} \left(\phi_0^{(2)} + \frac{1}{4}\phi_1^{(2)} + \frac{1}{2}\phi_2^{(2)} + \frac{3}{16}\phi_3^{(2)} \right),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\phi_0^{(2)} &= \phi_{1,0}\phi_{2,0} = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}},\\
\phi_1^{(2)} &= \phi_{1,1}\phi_{2,0} = 4\pi^{-\frac{1}{2}} x_1 e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}},\\
\phi_2^{(2)} &= \phi_{1,0}\phi_{2,1} = 4\pi^{-\frac{1}{2}} x_2 e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}},\\
\phi_3^{(2)} &= \phi_{1,1}\phi_{2,1} = 16\pi^{-\frac{1}{2}} x_1 x_2 e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Comme $d = 2$, les valeurs propres (dégénérées) de $H_{\text{oh},2}$ sont de la forme

$$\sum_{j=1}^{d} n_j + \frac{d}{2} = n_0 + n_1 + 1.$$

Donc les valeurs propres correspondantes aux fonctions propres ci-dessus sont définies par

$$\begin{aligned}
\lambda_0^{(2)} &= 0 + 0 + 1 = 1,\\
\lambda_1^{(2)} &= 1 + 0 + 1 = 2,\\
\lambda_2^{(2)} &= 0 + 1 + 1 = 2,\\
\lambda_3^{(2)} &= 1 + 1 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
H_{\text{oh},2}\psi_0(x_1, x_2) &= \pi^{\frac{1}{2}} H_{\text{oh},2}\left(\phi_0^{(2)} + \frac{1}{4}\phi_1^{(2)} + \frac{1}{2}\phi_2^{(2)} + \frac{3}{16}\phi_3^{(2)}\right)\\
&= \pi^{\frac{1}{2}}\left(\phi_0^{(2)} + \frac{1}{2}\phi_1^{(2)} + \phi_2^{(2)} + \frac{9}{16}\phi_3^{(2)}\right).
\end{aligned}$$

Et on en déduit que

$$\begin{aligned}
H^n_{\text{oh},2}\psi_0(x_1, x_2) &= \pi^{\frac{1}{2}} H^n_{\text{oh},2}\left(\phi_0^{(2)} + \frac{1}{4}\phi_1^{(2)} + \frac{1}{2}\phi_2^{(2)} + \frac{3}{16}\phi_3^{(2)}\right)\\
&= \pi^{\frac{1}{2}}\left(\phi_0^{(2)} + \frac{2^n}{4}\phi_1^{(2)} + \frac{2^n}{2}\phi_2^{(2)} + \frac{3\times 3^n}{16}\phi_3^{(2)}\right).
\end{aligned}$$

Or, comme $H^n_{\text{oh},2}\psi_0(x_1, x_2)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le remarque 4.40 du polycopié du cours concernant les series et le calcul fonctionnelle, on peut calculer $e^{-itH_{\text{oh},2}}\psi_0(x_1, x_2)$ avec une série :

$$\begin{aligned}
e^{-itH_{\text{oh},2}}\psi_0(x_1, x_2) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(it)^n}{n!} H^n_{\text{oh},2}\psi_0(x_1, x_2)\\
&= \pi^{\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(it)^n}{n!}\left(\phi_0^{(2)} + \frac{2^n}{4}\phi_1^{(2)} + \frac{2^n}{2}\phi_2^{(2)} + \frac{3\times 3^n}{16}\phi_3^{(2)}\right)\\
&= \pi^{\frac{1}{2}}\left(e^{-it}\phi_0^{(2)} + \frac{1}{4}e^{-2it}\phi_1^{(2)} + \frac{1}{2}e^{-2it}\phi_2^{(2)} + \frac{3}{16}e^{-3it}\phi_3^{(2)}\right)\\
&= \left(e^{-it} + \frac{1}{4}e^{-2it}4x_1 + \frac{1}{2}e^{-2it}4x_2 + \frac{3}{16}e^{-3it}16x_1x_2\right)e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\\
&= \left(e^{-it} + e^{-2it}x_1 + 2e^{-2it}x_2 + 3e^{-3it}x_1x_2\right)e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Partie II

Exercice 2a

Soit $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Donc

$$\begin{aligned}(A\phi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \left((-\frac{1}{2}\Delta + V(x) + x_1)\phi, \psi\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\Delta\phi, \psi\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left((V(x) + x_1)\phi, \psi\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

On commence avec le terme du laplacien, où on effectue 2 fois une intégration par parties.

Soit $B_R \in \mathbb{R}^3$ la boule centrée à l'origine de rayon $R > 0$, et soit $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ le vecteur normal orienté vers l'extérieur de B_R. Pour tout $u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ on a

$$\begin{aligned}(\Delta u, v)_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \lim_{R\to\infty} \int_{B_R} (\Delta \overline{u}) v \; dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R} v(\nabla \overline{u} \cdot \hat{n}) \; dx - \lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \nabla \overline{u} \cdot \nabla v \; dx \\ &= -\lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \nabla \overline{u} \cdot \nabla v \; dx \qquad (\text{car } u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)) \\ &= -\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R} \overline{u}(\nabla v \cdot \hat{n}) \; dx + \lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \overline{u}(\Delta v) \; dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \overline{u}(\Delta v) \; dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{u}(\Delta v) \; dx \\ &= (u, \Delta v)_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Le laplacien est donc symétrique sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Comme $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ il s'ensuit que le laplacien et aussi symétrique sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Pour le deuxième terme on a

$$((V(x) + x_1)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} ((V(x) + x_1)\overline{u}v \; dx.$$

Comme $V(x)$ est borné et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ est stable par multiplication par des polynômes, l'intégrale à droite est bien définie. Donc

$$\begin{aligned}((V(x) + x_1)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3} ((V(x) + x_1)\overline{u}v \; dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{u}((V(x) + x_1)v \; dx \\ &= (u, (V(x) + x_1)v)_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
(A\phi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \left((-\frac{1}{2}\Delta + V(x) + x_1)\phi, \psi \right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&= -\frac{1}{2} (\Delta\phi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ((V(x) + x_1)\phi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&= -\frac{1}{2} (\phi, \Delta\psi)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + (\phi, (V(x) + x_1)\psi)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&= \left(\phi, (-\frac{1}{2}\Delta + V(x) + x_1)\psi \right)_{L^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Donc A est un opérateur symétrique sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 2b

(i) Équivalence unitaire et valeur de c :

Soit $u \in D(H_{\text{oh},3})$, $t \in \mathbb{R}^3$, et $(\mathcal{T}(t)u)(x) = u(x-t)$ l'opérateur de translation sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. On choisit $t = t_1 = (1,0,0)^\intercal$, ce qui nous amène à

$$\begin{aligned}
H_{\text{oh},3}(\mathcal{T}(t_1)u)(x) &= H_{\text{oh},3}u(x - t_1) \\
&= H_{\text{oh},3}u(x - (1,0,0)^\intercal) \\
&= (-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2)u(x - (1,0,0)^\intercal).
\end{aligned}$$

Ensuite on effectue le changement de variable $y = x - (1,0,0)^\intercal$. Cela implique que

$$\begin{aligned}
|x|^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
&= (y_1 + 1)^2 + y_2^2 + y_3^2 \\
&= 1 + 2y_1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\
&= 1 + 2y_1 + |y|^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
H_{\text{oh},3}(\mathcal{T}(t_1)u)(x) &= (-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2)u(x - (1,0,0)^\intercal) \\
&= (-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}(1 + 2y_1 + |y|^2))u(y) \\
&= (-\frac{1}{2}\Delta + y_1 + \frac{1}{2}|y|^2 + \frac{1}{2})u(y) \\
&= (N_0 + \frac{1}{2})u(y).
\end{aligned}$$

On en tire que

$$N_0 = (H_{\text{oh},3} - \frac{1}{2})\mathcal{T}(t_1) = (H_{\text{oh},3} + c)\mathcal{T}(t_1),$$

où $c = -\frac{1}{2}$.

D'après la section 4.7.2 du polycopié du cours, $\mathcal{T}(t_1)$ est bien un opérateur unitaire. Donc avec $D(N_0) = \mathcal{T}(t_1)D(H_{\text{oh},3})$, N_0 est unitairement équivalent à $H_{\text{oh},3} - \frac{1}{2}$.

(ii) N_0 auto-adjoint :

L'opérateur $H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2}$ est bien auto-adjoint, car $H_{\mathrm{oh},3}$ est auto-adjoint et pour tout $u, v \in D(H_{\mathrm{oh},3})$ on a

$$\begin{aligned}\left((H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2})u, v\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= (H_{\mathrm{oh},3}u, v)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left(-\frac{1}{2}u, v\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= (u, H_{\mathrm{oh},3}v)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left(u, -\frac{1}{2}v\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= \left(u, (H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2})v\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Comme N_0 est unitairement équivalent à un opérateur auto-adjoint, il s'ensuit que N_0 est aussi auto-adjoint. En effet, soit A un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A) \subset \mathcal{H}$, U un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$, et B un opérateur unitairement équivalent à A de domaine $D(B) = UD(A)$. Par la critère fondamentale d'auto-adjonction, pour tout $f \in \mathcal{H}$ il existe $u \in D(A)$ tel que $(A - i)u = f$. Donc

$$f = (A - i)u = (U^*BU - i)u = U^*(B - i)Uu.$$

Et donc

$$(B - i)Uu = U^*f.$$

Si on pose $g = U^*f \in \mathcal{H}$ et $v = Uu \in D(B)$ on a

$$(B - i)v = g.$$

Alors, pour tout $g \in \mathcal{H}$ il existe $v \in D(B)$ tel que $(B - i)v = g$. On a bien sûr un résultat pareil pour $B + i$. Donc par la critère fondamentale d'auto-adjonction B (et N_0) est auto-adjoint.

(iii) Spectre de N_0 et $N_0 \geqslant 1$:

Soit $(\lambda_n^{(3)})_{n\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres de $H_{\mathrm{oh},3}$ et $(\phi_n^{(3)})_{n\in\mathbb{N}}$ les fonctions propres associées. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2})\phi_n^{(3)} = (\lambda_n^{(3)} - \frac{1}{2})\phi_n^{(3)}$. Donc les valeurs propres de $H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2}$ sont définies par $(\lambda_n^{(3)} - \frac{1}{2})_{n\in\mathbb{N}}$.

Comme N_0 est unitairement équivalent à $H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2}$, ses valeurs propres sont identique aux valeurs propres de $H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2}$. En effet, soit A, B, et U définies comme ci-dessus. Alors, $Av = \lambda v$ implique que $B(Uv) = \lambda(Uv)$.

Le spectre ponctuel de N_0 est donc définie par $\sigma_{ponc}(N_0) = (\lambda_n^{(3)} - \frac{1}{2})_{n\in\mathbb{N}}$, et son spectre continu est vide.

Comme le plus petit valeur propre de $H_{\mathrm{oh},3}$ est $\lambda_0^{(3)} = \frac{3}{2}$, le plus petit valeur propre de $H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2}$ est donc $\lambda_0^{(3)} - \frac{1}{2} = 1$. Et comme $H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2}$ est auto-adjoint et son spectre est $\sigma(H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2}) \subset [1, +\infty[$ il s'ensuit, par le corollaire 4.9 du polycopié du cours, que $H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2} \geqslant 1$.

Donc $N_0 \geqslant 1$.

(iv) Résolvante compacte :

Tout d'abord, $H_{\text{oh},3} - \frac{1}{2}$ est à résolvante compacte par les mêmes arguments utilisés dans l'exercice 1f. Donc, comme N_0 est unitairement équivalent à un opérateur à résolvante compacte, N_0 est aussi à résolvante compacte.

En effet, soit encore A, B, et U définies comme ci-dessus, où A est à résolvante compacte. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(A-\lambda)^{-1}$ est compacte. $U(A-\lambda)^{-1}U^*$ est aussi à résolvante compacte car U est borné. Et comme A et B ont les mêmes valeurs propres $(B-\lambda)^{-1}$ est bien définie.

On en tire que

$$\begin{aligned}(B-\lambda)^{-1} &= (UAU^* - \lambda)^{-1} \\ &= (U(A-\lambda)U^*)^{-1} \\ &= U(A-\lambda)^{-1}U^*.\end{aligned}$$

Donc $(B-\lambda)^{-1}$ est compacte, et B est à résolvante compacte.

Exercice 2c

Comme dans l'exercice 2b, on pose que $D(N) = \mathcal{T}(t_1)D(H_{\text{oh},3})$. Donc sur ce domaine $N = -\frac{1}{2}\Delta + V + \frac{1}{2}|x|^2 = N_0 + V$.

Or, $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ est un opérateur borné et symétrique de domaine $D(V) = \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$. Donc $D(N_0) \subset D(V)$ et pour tout $u \in D(A)$ on a

$$\begin{aligned}\|Vu\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leqslant \|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \alpha\|N_0u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},\end{aligned}$$

où $0 \leqslant \alpha < 1$ et $C = \|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$.

Donc V est N_0 borné et, par le théorème de Kato-Rellich, l'opérateur $N = N_0 + V$ est auto-adjoint.

Soit $u \in D(N)$. On a

$$\begin{aligned}(Nu,u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= ((N_0+V)u,u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= (N_0u,u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + (Vu,u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\geqslant \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + (Vu,u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\geqslant \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)},\end{aligned}$$

car $N_0 \geqslant 1$ et $V \geqslant 0$. Donc, encore par le corollaire 4.9 du polycopié du cours, $N \geqslant 1$.

Finalement, soit l'opérateur $B = N - \frac{1}{2}H_{\text{oh},3}$ de domaine $D(B) = \mathcal{T}(t_2)D(H_{\text{oh},3})$, où $t_2 = (-2,0,0)^\intercal$. On a

$$\begin{aligned}B &= N - \frac{1}{2}H_{\text{oh},3} \\ &= -\frac{1}{2}\Delta + V + x_1 + \frac{1}{2}|x|^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2\right) \\ &= -\frac{1}{4}\Delta + V + x_1 + \frac{1}{4}|x|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\Delta + 2V + 2x_1 + \frac{1}{2}|x|^2\right).\end{aligned}$$

Ensuite on effectue le changement de variable $y = x - (-2, 0, 0)^\intercal$. Cela implique que

$$\begin{aligned}|x|^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= (y_1 - 2)^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ &= 4 - 4y_1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ &= 4 - 4y_1 + |y|^2.\end{aligned}$$

Donc, sur $D(B)$, B devient

$$\begin{aligned}B &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\Delta + 2V + 2(y_1 - 2) + \frac{1}{2}(4 - 4y_1 + |y|^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\Delta + 2V - 2 + \frac{1}{2}|y|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(N + V - 2\right).\end{aligned}$$

Or, soit $u \in D(B)$. Donc

$$\begin{aligned}(Bu, u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \frac{1}{2}\left((N + V - 2)u, u\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= \frac{1}{2}\left(Nu, u\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} - (u, u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2}\left(Vu, u\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(Nu, u\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} - (u, u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \qquad (\text{car } V \geqslant 0) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(u, u\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} - (u, u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \qquad (\text{car } N \geqslant 1) \\ &= -\frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Donc $B = N - \frac{1}{2}H_{\mathrm{oh},3} \geqslant -\frac{1}{2}$. Ce qui implique que $N \geqslant \frac{1}{2}H_{\mathrm{oh},3} - \frac{1}{2}$.

Ce n'est pas exactement la solution cherchée. Malheureusement je n'arrive pas à trouver l'erreur dans les calculs.

Exercice 2d

Pour tous les calculs ci-dessous on note $\|\cdot\|_{L^2} = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ et $(\cdot,\cdot)_{L^2} = (\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^3)}$

i)

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ et $j = 1$. On admet le fait que pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ on a

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}, \psi\right)_{L^2} = -\left(\phi, \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right)_{L^2}.$$

Ça ce montre avec une intégration par parties et par la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ est stable par multiplication par des polynômes on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, x_1\phi\right)_{L^2} &= -\left(\phi, \frac{\partial(x_1\phi)}{\partial x_1}\right)_{L^2} \\
&= -\left(\phi,\phi\right)_{L^2} - \left(\phi, x_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)_{L^2} \\
&= -\|\phi\|_{L^2}^2 - \left(x_1\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)_{L^2} \\
&= -\|\phi\|_{L^2}^2 - \overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, x_1\phi\right)}_{L^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
-\|\phi\|_{L^2}^2 &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, x_1\phi\right)_{L^2} + \overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, x_1\phi\right)}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, x_1\phi\right)_{L^2}.
\end{aligned}$$

Ce résultat est également vrai pour tout $1 \leqslant j \leqslant 3$. Donc

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}, x_j\phi\right)_{L^2} = -\frac{1}{2}\|\phi\|_{L^2}^2.$$

ii)

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. On a

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1\phi) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(x_1\phi) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(x_1\phi) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(x_1\phi) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\phi + x_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) + x_1\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + x_1\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} \\
&= 2\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + x_1\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} \\
&= 2\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + x_1\Delta\phi.
\end{aligned}$$

Donc pout tout $1 \leqslant j \leqslant 3$, on a

$$\Delta(x_j\phi) = 2\frac{\partial\phi}{\partial x_j} + x_j\Delta\phi.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
(A(x_j\phi), x_j\phi)_{L^2} &= \left(-\frac{1}{2}\Delta(x_j\phi) + (V + x_j)(x_j\phi), x_j\phi\right)_{L^2} \\
&= \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x_j} - \frac{1}{2}x_j\Delta\phi + (V + x_j)(x_j\phi), x_j\phi\right)_{L^2} \\
&= \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x_j} + x_jA\phi, x_j\phi\right)_{L^2} \\
&= (x_jA\phi, x_j\phi)_{L^2} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}, x_j\phi\right)_{L^2} \\
&= \left(A\phi, x_j^2\phi\right)_{L^2} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}, x_j\phi\right)_{L^2}.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\|N\phi\|_{L^2}^2 &= \|(A+\frac{1}{2}|x|^2)\phi\|_{L^2}^2 \\
&= \left((A+\frac{1}{2}|x|^2)\phi, (A+\frac{1}{2}|x|^2)\phi\right)_{L^2} \\
&= (A\phi, A\phi)_{L^2} + \left(A\phi, \frac{1}{2}|x|^2\phi\right)_{L^2} + \left(\frac{1}{2}|x|^2\phi, A\phi\right)_{L^2} + \left(\frac{1}{2}|x|^2\phi, \frac{1}{2}|x|^2\phi\right)_{L^2} \\
&= \|A\phi\|_{L^2}^2 + 2\mathrm{Re}\left(A\phi, \frac{1}{2}|x|^2\phi\right)_{L^2} + \frac{1}{4}\||x|^2\phi\|_{L^2}^2 \\
&= \|A\phi\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{3} \mathrm{Re}\left(A\phi, x_j^2\phi\right)_{L^2} + \frac{1}{4}\||x|^2\phi\|_{L^2}^2 \\
&= \|A\phi\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{3} \mathrm{Re}\left[(A(x_j\phi), x_j\phi)_{L^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}, x_j\phi\right)_{L^2}\right] + \frac{1}{4}\||x|^2\phi\|_{L^2}^2 \\
&= \|A\phi\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{3} (A(x_j\phi), x_j\phi)_{L^2} - \frac{3}{2}\|\phi\|_{L^2} + \frac{1}{4}\||x|^2\phi\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

car A est symétrique ($(A(x_j\phi), x_j\phi)_{L^2}$ est réel).

Et puis on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3} \left(|x|^2 x_j\phi, x_j\phi\right)_{L^2} &= \sum_{j=1}^{3} \left(|x|^2\phi, x_j^2\phi\right)_{L^2} \\
&= \left(|x|^2\phi, \sum_{j=1}^{3} x_j^2\phi\right)_{L^2} \\
&= \left(|x|^2\phi, |x|^2\phi\right)_{L^2} \\
&= \||x|^2\phi\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Alors finalement,

$$\begin{aligned}
\|N\phi\|_{L^2}^2 &= \|A\phi\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{3} (A(x_j\phi), x_j\phi)_{L^2} + \frac{1}{4}\||x|^2\phi\|_{L^2}^2 - \frac{3}{2}\|\phi\|_{L^2} \\
&= \|A\phi\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{3} (A(x_j\phi), x_j\phi)_{L^2} + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{3} \left(|x|^2 x_j\phi, x_j\phi\right)_{L^2} - \frac{3}{2}\|\phi\|_{L^2} \\
&= \|A\phi\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{3} \left((A(x_j\phi), x_j\phi)_{L^2} + \frac{1}{4}\left(|x|^2 x_j\phi, x_j\phi\right)_{L^2}\right) - \frac{3}{2}\|\phi\|_{L^2} \\
&= \|A\phi\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{3} \left(\left(A + \frac{1}{4}|x|^2\right)(x_j\phi), x_j\phi\right)_{L^2} - \frac{3}{2}\|\phi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

iv)

Sauté.

Exercice 2e

Sauté.

Exercice 2f

Comme $\psi_\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ est stable par dérivation et multiplication par des polynômes, les 2 intégrales existent. Donc, moyennant le changement de variable $y = \sigma x$ et $dy = \sigma^3 dx$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi_\sigma|^2 + \frac{\omega^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2|\psi_\sigma|^2 &= \sigma^3\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(\sigma x)|^2 + \sigma^3\frac{\omega^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2|\psi(\sigma x)|^2 \\ &= \sigma^3\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(y)|^2\frac{1}{\sigma^3} + \sigma^3\frac{\omega^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2|\psi(y)|^2\frac{1}{\sigma^3} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(y)|^2 + \frac{\omega^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2|\psi(y)|^2.\end{aligned}$$

Donc, avec $\omega = 1/\sqrt{2}$, $\sigma = 1$, et une petite astuce ($a + b \geqslant 2\sqrt{a}\sqrt{b}$ pour a,b positif), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(x)|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2|\psi(x)|^2 &\geqslant 2\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2|\psi(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2|\psi(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geqslant \frac{3}{2\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2,\end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité on utilise l'inégalité usuelle d'Heisenberg (expression 1.11 du polycopié du cours).

Et il n'y a pas de solution pour la dernière partie de l'exercice.

Exercice 2g

Sauté.

Exercice 2h

Sauté.

Exercice 2i

Sauté.