

기계공학실험 : 동역학 실험 B

모드 형상 실험

5조 2019-15838 주기영

분 석

1. 감쇠기를 포함한 1 DOF 시스템

Fig 1에 나타난 system에 식(1)과 같은 외력이 가해지고, 그에 따른 system의 변위가 식(2)와 같이 나타난다고 가정하자.

$$f(t) = Fe^{j\omega t} \quad (1)$$

$$x(t) = Xe^{j\omega t} \quad (2)$$

이를 식(3)에 대입하여 정리하면 식(4)와 같은 결과를 얻는다.

$$mx'' + cx' + kx = f \quad (3)$$

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{(k - m\omega^2) + jcw} \quad (4)$$

식(4)를 복소수로 표현하면 식(5)와 같이 나타난다.

$$\frac{X}{F} = \frac{(k - m\omega^2) - c\omega j}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \quad (5)$$

식(5)에서 ω 에 물체의 고유진동수를 대입하면 실수부는 0이 되고, 허수부만이 남게 된다. 즉, 고유진동수에서의 진동의 경우에는 감쇠계수와 무관하게 정확히 90° 의 위상 차이를 갖게 되는 것을 알 수 있다.

따라서 고유 진동수에서의 물체의 모드 형상을 도시하기 위해서는 복소수 FRF에서의 허수부만을 이

용하면 되는 것을 알 수 있다.

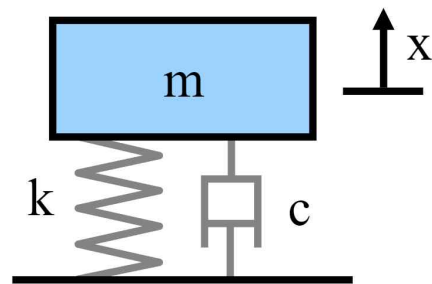


Fig 1. Mass-spring-damper system

2. Plate system

원래 본 실험을 진행할 때는 16개의 가진 점에 대해서 16개의 가속도계를 올려놓고, 총 256개의 FRF를 행렬로 표현하여 모드 형상을 도시하는 것이 원칙이다. 하지만 가속도계의 가격이 비싸기 때문에 가속도계를 물체의 중량을 위치시키고, 가진 점을 16개를 설정하여 각각의 점에 가진을 하였을 때의 FRF 16개를 이용하였다.

지점 1에서의 FRF의 절대값 함수, 실수부 함수, 허수부 함수, 주파수에 대한 phase에 대한 함수를 그려보면 Fig 2와 같이 나타난다.

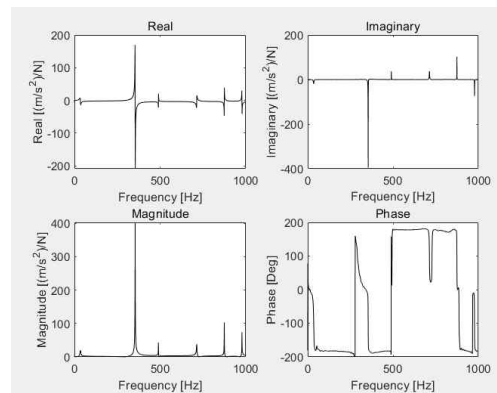


Fig 2. FRF at point 1

Fig 2를 관찰하면 phase가 -90° 인 w 에서 FRF를 살펴보면 주변 함수값과 비교하여 함수값의 절대값이 큰 것을 관찰할 수 있다. 즉, 극대값을 가진다. Frequency-Magnitude graph는 6개의 peak를 가지는 것을 뚜렷하게 관찰할 수 있는데, 이것이 이 System의 고유진동수라고 할 수 있을 것이다. System의 고유진동수는 말그대로 고유한 것이다.

따라서 다른 가진점을 사용하더라도 그 지점에서의 FRF 또한 같은 6개 지점에서 peak를 가질 것을 예상할 수 있다.

FRF의 Imaginary part를 이용하면 보다 뚜렷하게 system의 고유진동수를 확인할 수 있기 때문에 나머지 16개 지점에 대해서도 FRF의 Imaginary part를 도시해서 비교해보자.

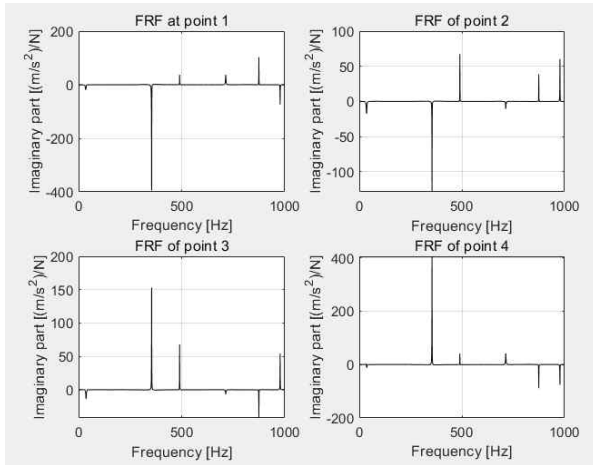


Fig 3. Imaginary part of FRF at point 1~4

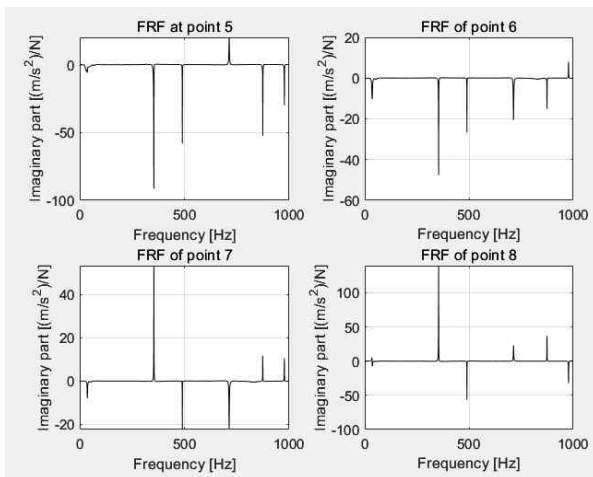


Fig 4. Imaginary part of FRF at point 5~8

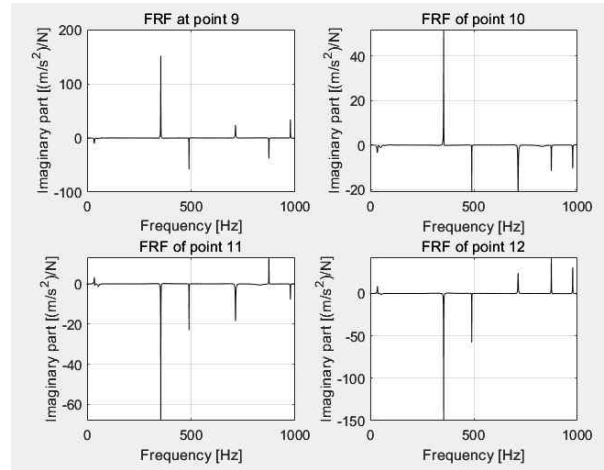


Fig 4. Imaginary part of FRF at point 9~12

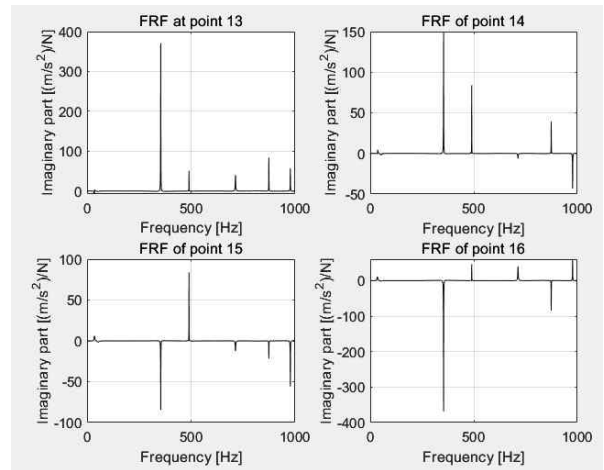


Fig 5. Imaginary part of FRF at point 13~16

평평한 plate system의 이론적 DOF는 무한대이므로, 고유진동수 또한 무한 개를 가져야 한다. 일반적으로 N DOF system은 N 개의 고유진동수를 갖는 것으로 알려져있다.

본 실험에서는 1000Hz까지 FRF를 취했으며, 1000Hz까지의 plate system의 고유진동수는 총 6개 존재하는 것으로 관찰된다.

16개의 graph를 모두 비교해보면 plate system의 고유진동수는 Table 1과 같이 나타낼 수 있다.

Mode	f_n [Hz]
1	35.00
2	354.38
3	490.00
4	713.75
5	874.38
6	977.50

Table 1. Natural frequency of the plate system

3. Mode shape of plate system

각 고유진동수에서의 모드 형상을 도시해보자. 고유진동수에서는 식(5)에서 허수부만이 남기 때문에 FRF에서의 Imaginary part의 함수값을 사용하면 된다.

또한 모드 형상은 각 지점의 상대적인 형상을 보는 것이므로 FRF의 함수값을 이용할 수 있는 것이다.

System의 FRF가 $H(w)$, 진폭이 $A(w)$, phase가 $\phi(w)$ 일 때, FRF의 Imaginary part는 식(6)을 통하여 구할 수 있다.

$$Im(H(w)) = A(w)\sin(\phi(w)) \quad (6)$$

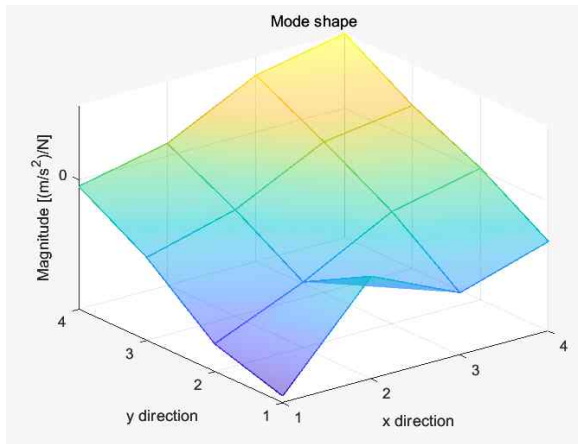


Fig 6. Mode shape of first mode (35Hz)

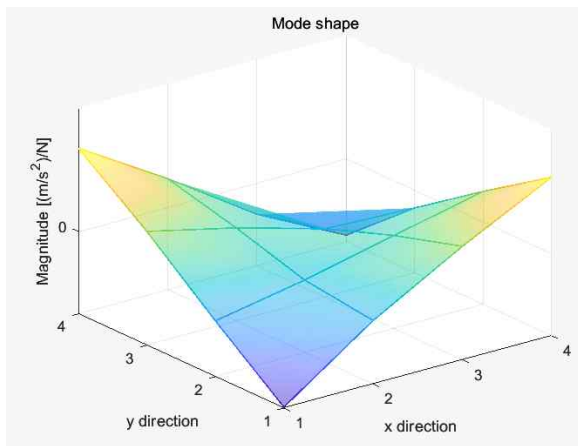


Fig 7. Mode shape of second mode (354.38Hz)

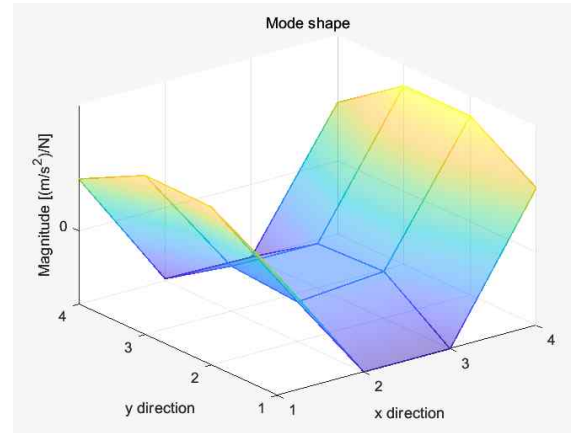


Fig 8. Mode shape of third mode (490Hz)

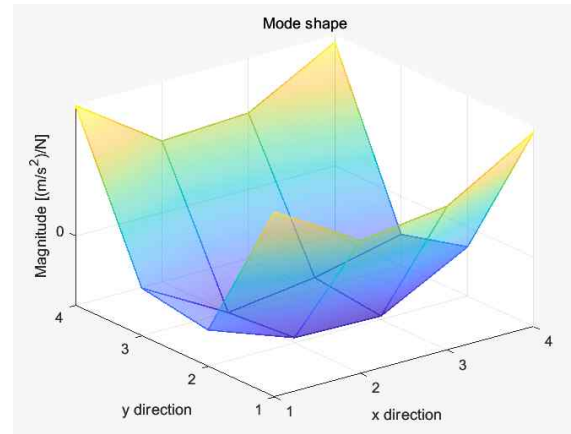


Fig 9. Mode shape of forth mode (713.71 Hz)

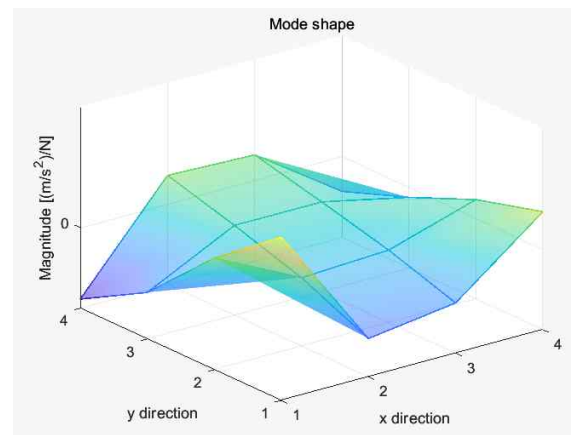


Fig 10. Mode shape of fifth mode (874.38 Hz)

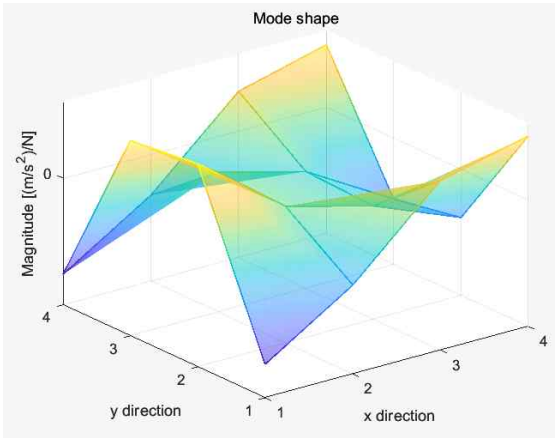


Fig 11. Mode shape of sixth mode (977.5Hz)

Fig 6부터 Fig 11은 plate system의 각 고유진동수에서의 Mode shape를 나타낸 것이다.

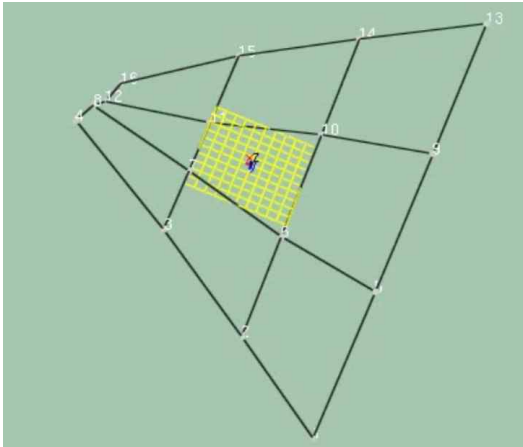


Fig 12. Actual mode shape of second mode in (354.38Hz)

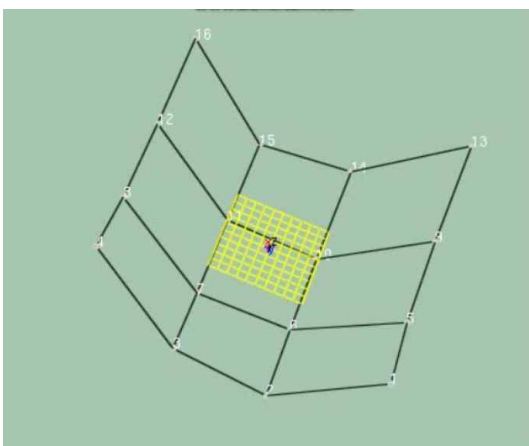


Fig 9. Actual mode shape of forth mode (713.71Hz)

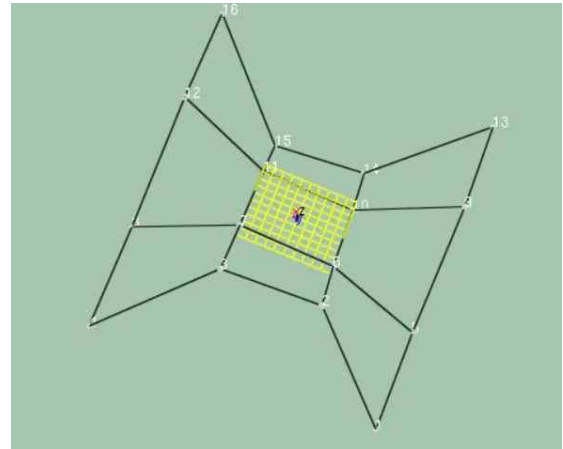


Fig 11. Actual mode shape of sixth mode (977.5Hz)

4. Discussion

4.1 힘에 대한 가속도의 FRF

식(5)는 단위 힘에 대한 변위의 FRF이지만 가속도에 대해서도 FRF는 변위의 FRF의 스칼라배만큼만 차이가 난다. 식(2)를 두 번 미분하면 식(7)이 된다.

$$x''(t) = -w^2 X'' e^{j\omega t} \quad (7)$$

식(1)과 식(7)을 다시 system의 운동방정식에 대입하면 식(8)을 얻을 수 있다. 이는 단위 힘에 대한 가속도의 FRF를 나타낸다.

$$\frac{X''}{F} = \frac{(k - mw^2) - c\omega j}{(k - mw^2)^2 + (j\omega c)^2} (-w^2) \quad (8)$$

4.2 Mode shape 모양에 대한 실제와의 비교

2, 4, 6번째 node의 FRF를 이용하여 그린 mode shape와 실제 공진주파수로 공진시켰을 때의 mode shape가 비슷한 것을 관찰할 수 있다.

2번째 mode에서는 양 대각선에 있는 점이 서로 같은 변위를 가지면서 진동을 하는 것을 관찰할 수 있다.

4번째 mode에서는 꼭짓점 4개의 점이 같은 변위를 가지면서 중앙이 그와 반대되는 변위를 가지는 것을 볼 수 있다. 마치 말 안장처럼 굽어지는 모습을 관찰할 수 있다.

6번째 mode에서는 1번, 4번 점에서 같은 변위, 13번, 16번 점에서 같은 변위를 갖고, 그 사이에서

급격하게 fluctuate하는 것을 관찰할 수 있다. 즉, 두 변의 반대쪽 방향으로 굽혀지는 형상이다.

4.3 실험 결과에 영향을 주는 요인

2, 4, 6번째 mode에서의 실제 mode shape와 FRF를 이용하여 그려본 mode shape의 형상이 거의 비슷하게 나온 것을 볼 수 있다. 하지만 완전하게 비율이 같은 것으로 관찰되지는 않는다.

이유를 생각해보면, 먼저 FRF의 Real part가 완전히 0이 아니라는 점이다. Fig 2를 보면 Real part가 고유진동수에서 심하게 fluctuate를 하는 것을 관찰할 수 있다.

이는 plate system은 무한대의 DOF를 가지기 때문에 식(5)를 완전하게 적용할 수 없기 때문에 발생하는 문제이다.

(Matlab code 1)

```
%% read data& save in vector variable
frequency = readmatrix("dynamicsC.xlsx","Sheet","1,2,3,4","Range","B83:B1683");
range_of_phase = ["F83:F1683","M83:M1683","T83:T1683","AA83:AA1683"];
range_of_magnitude = ["C83:C1683","J83:J1683","Q83:Q1683","X83:X1683"];

%% sheet 1
|
% Phase_1과 Magnitude_1은 4로 남은 뒀이 1인 지점들의 값(1,2,3,4)
Phase_1 = zeros(4,1601);
Magnitude_1 = zeros(4,1601);

for i = 1:4
    Phase_1(i,:) = readmatrix("실험C.xlsx","Sheet","1,2,3,4","Range",range_of_phase(i));
    Magnitude_1(i,:) = readmatrix("실험C.xlsx","Sheet","1,2,3,4","Range",range_of_magnitude(i));
end

Real_part_1 = Magnitude_1.*cos(Phase_1*pi()/180); % degree to radian
Imaginary_part_1 = Magnitude_1.*sin(Phase_1*pi()/180); % degree to radian

%% Fig.2 : Real,Imaginary,Magnitude,Phase

figure;
subplot(221);
plot(frequency,Real_part_1(1,:), 'k');
title("Real");
xlabel("Frequency [Hz]");
ylabel("Real [(m/s^2)/N]");

subplot(222);
plot(frequency,Imaginary_part_1(1,:), 'k');
title("Imaginary");
xlabel("Frequency [Hz]");
ylabel("Imaginary [(m/s^2)/N]");

subplot(223);
plot(frequency,Magnitude_1(1,:), 'k');
title("Magnitude");
xlabel("Frequency [Hz]");
ylabel("Magnitude [(m/s^2)/N]");

subplot(224);
plot(frequency,Phase_1(1,:), 'k');
title("Phase");
xlabel("Frequency [Hz]");
ylabel("Phase [Deg]");
```

위와 같은 방법으로 Phase_2, Phase_3, Phase_4와 Magnitude_2, Magnitude_3, Magnitude_4 또한 구하였다.

(Matlab code 2)

```
phase = [Phase_1; Phase_2; Phase_3; Phase_4];
magnitude = [Magnitude_1; Magnitude_2; Magnitude_3; Magnitude_4];

num_of_wn=[57 568 785 1143 1400 1565];
phase_mode=zeros(16,6);
magnitude_mode=zeros(16,6);

for i = 1:6
    phase_mode(:,i)=phase(:,num_of_wn(i));
    magnitude_mode(:,i)=magnitude(:,num_of_wn(i));
end

Imaginary_part_mode = magnitude_mode.*sin(phase_mode*pi()/180); % degree to radian

for i = 1:6
    figure;

    x=1:4;
    y=1:4;
    z=zeros(4,4);
    for j=1:4
        for k=1:4
            z(j, k)=Imaginary_part_mode(j+4*(k-1),i);
        end
    end

    mesh(x,y,z, 'LineWidth',1, 'EdgeColor', 'interp', 'FaceColor', 'interp', 'Facealpha',0.5);
    hold on;
    title("Mode shape")
    xlabel("x direction")
    ylabel("y direction")
    zlabel("Magnitude [(m/s^2)/N]")
    yticklabels([1,2,3,4]);
    xticklabels([1,2,3,4]);
    zticks(0);
end
```

phase와 magnitude 행렬은 16 by 1601 matrix이며, 그 중 6개의 고유주파수에 대해서 phase와 magnitude 값을 추출한 것이 phase_mode와 magnitude_mode 행렬이고, 이는 16 by 6 matrix이다.