Lect 1 Example 1.3

Q. $u(t) = 1,\ t \geq 0$ $\quad x(0) = [1\ \ -1]^T$ output response?

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = Cx(t) = [1\ \ 0]\, x(t)$$

Solution

$$X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) + [sI - A]^{-1} B U(s)$$

$$x(t) = \Phi(t)\, x(0) + \gamma(t)$$

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{a}{s(s+a)} = \frac{1}{2} \frac{2}{s(s+2)} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

$$\Phi(t) = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$ ×

$$[sI - A]^{-1} B U(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{s(s+2)} \\ \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s^2(s+2)} \\ \frac{2}{s(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\gamma(t) = L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{2}{s^2(s+2)} \\ \frac{2}{s(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \Phi(t)\, x(0) + \gamma(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} + t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^{-2t} + 1 - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + t + \frac{5}{2}e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad t + e^{-2t}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + t + \frac{5}{2}e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad t + e^{-2t}$$

$$= -\frac{3}{2} + t + \frac{5}{2}e^{-2t} \quad t + e^{-2t}$$