Lecture1 Example 1.5

Q $x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.35 & 0.55 \\ -0.45 & 0.35 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k)$

$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(k)$

求 zeros and Poles and 传递函数

Solution

$$[zI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} z-1.35 & -0.55 \\ 0.45 & z-0.35 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} z-0.35 & 0.55 \\ -0.45 & z-1.35 \end{bmatrix}}{(z-1.35)(z-0.35)+0.55\times 0.45}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} z-0.35 & 0.55 \\ -0.45 & z-1.35 \end{bmatrix}}{z^2 - 1.7z + 0.72}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = C[zI - A]^{-1}B + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} z-0.35 & 0.55 \\ -0.45 & z-1.35 \end{bmatrix}}{z^2 - 1.7z + 0.72} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad -(1)$$

$$= \frac{1}{z^2 - 1.7z + 0.72} \begin{bmatrix} z-0.35+0.45 & 0.55 - z + 1.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{z^2-1.7z+0.72}\begin{bmatrix} z+0.1 & -z+1.9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{z^2-1.7z+0.72}\left(0.5z+0.05 \quad -0.5z+0.95\right)$$

$$= \frac{1-z}{z^2-1.7z+0.72}$$

为什么传递函数算出来不一样？

（1）矩阵的左上角，看成负号了

poles : $\det[zI-A]=0$

$$\begin{vmatrix} z-1.35 & -0.55 \\ 0.45 & z-0.35 \end{vmatrix}=0$$

$$(z-1.35)(z-0.35)+0.55\times0.45=0$$

$$z^2-1.7z+0.72=0$$

$$z_1=0.9 \qquad z_2=0.8$$

zeros : $\det\begin{bmatrix} z_0I-A & -B \\ C & D \end{bmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} z-1.35 & -0.55 & -0.5 \\ 0.45 & z-0.35 & -0.5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

why 含 det = 1 才出零点

$$0.55 \times 0.5 + 0.45 \times 0.5 \rightarrow (z-0.35)0.5 - 0.5(z-1.35)$$

$$= 0.5 - 0.5z + 0.5 \times 0.35 - 0.5z + 0.5 \times 1.35$$

$$= -z + 0.5(1 + 0.35 + 1.35)$$

$$= -z + 1.35$$

So $z_0 = 1.35$

$$\begin{vmatrix} z-1.35 & -0.55 & -0.5 \\ 0.45 & z-0.35 & -0.5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0.5 \times 0.55 + 0.5 \times 0.45 + 0.5(z-0.35) - 0.5 \times (z-1.35)$$

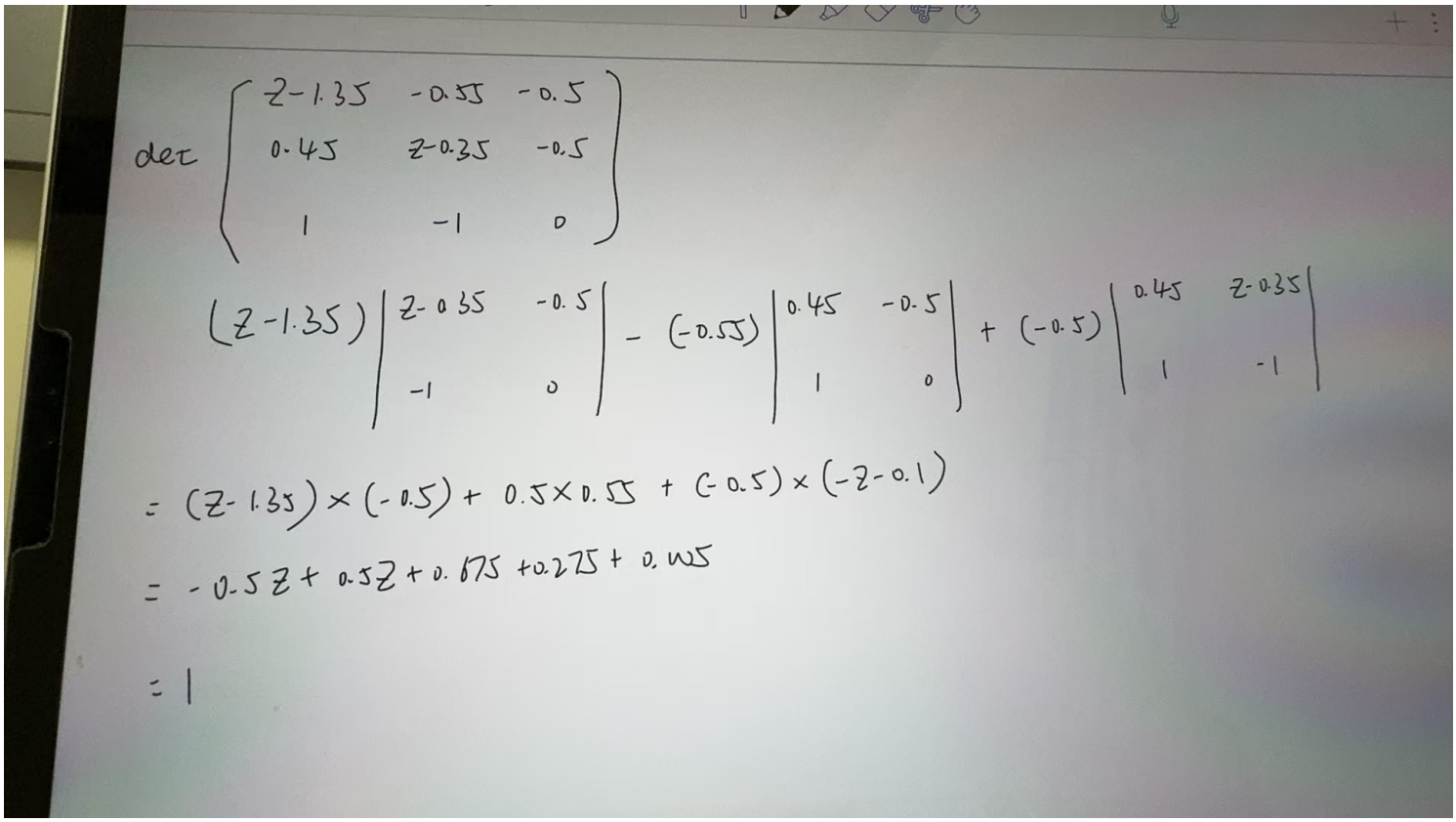
$$= 0.5(0.55 + 0.45 + z - 0.35 - z + 1.35)$$

$$= 0.5(1+1)$$

$$= 1$$

不是他的det就等于1, 不是让他等于1

没有零点



官方答案

离散时间系统的传递函数推导，极点和零点的多项式分析

Dr Lee PH EE6203

Example 1.5 Consider

系统的
离散时间
状态空间方程

$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1.35 & 0.55\\ -0.45 & 0.35\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix}0.5\\ 0.5\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)$$

$$[z\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}z-1.35 & -0.55\\ 0.45 & z-0.35\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow[z\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}z-0.35 & 0.55\\ -0.45 & z-1.35\end{bmatrix}}{z^2-1.7z+0.72}$$

46

系统的传递函数

Dr Lee PH EE6203

$$(3.6)\Rightarrow\frac{Y(z)}{U(z)}=\mathbf{C}[z\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}=\frac{1}{z^2-1.7z+0.72}$$

零点多项式

Zeros polynomial :

$$\left|\begin{bmatrix}z\mathbf{I}-\mathbf{A} & -\mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}z-1.35 & -0.55 & -0.5\\ 0.45 & z-0.35 & -0.5\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\right|=1$$

求解该矩阵的行列式，算出来等于1
没有零点。

极点多项式

Poles polynomial :

$$\det[z\mathbf{I}-\mathbf{A}]=z^2-1.7z+0.72$$

系统的极点为该二次方程的解

47