

Let 1 Example 1.4

Q. $T = 0.1$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad \text{for discrete-time state space.}$$

Solution.

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-0.1} \\ 0 & e^{-0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix}$$

$$\theta(T) = \int_0^T \Phi(y) dy B$$

$$= \begin{bmatrix} t & t + e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} \end{bmatrix} \Big|_0^{0.1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 + e^{-0.1} \\ 0 & -e^{-0.1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

...

$$= \begin{bmatrix} 0.1 & -0.9 + e^{-0.1} \\ 0 & -e^{-0.1} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.9 + e^{-0.1} \\ 1 - e^{-0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix}$$

$$x((k+1)T) = \Phi(T) x(kT) + \Theta(T) u(kT)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix} x(kT) + \begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix} u(kT)$$

$$y(kT) = [1 \ 0] x(kT)$$