

## Lect 2 Example 2.8

Q. find control sequence

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow x(3) = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

Solution

$$x(N) = A^N x(0) + W_c U$$

$$W_c = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -9 \\ 1 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1+2 \\ -4-1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-10 \\ 4+5 \\ -5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 9 & 18 & 0 \\ 36 & -9 & 0 \\ 12 & 15 & 27 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 9 & 18 & 0 \\ 36 & -9 & 0 \\ 12 & 15 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & -9 \\ 1 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -9 \\ 1 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 24 \\ -17 \\ -64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -305.8 \\ -1.75 \\ 31.125 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{244}{8} \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{249}{8} \end{bmatrix}$$