Let 1   Example 1.3

Q. $u(t) = 1$, $t \geqslant 0$ $x(0) = [1 \quad -1]^T$ output ?
                                        response ?

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$

$y(t) = C x(t) = [1 \quad 0] x(t)$

Solution

$X(s) = [sI-A]^{-1} x(0) + [sI-A]^{-1} BU(s)$

$x(t) = \underline{\phi}(t) x(0) + \gamma(t)$

$[sI-A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$

$\underline{\phi}(t) = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2-2e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

$[sI-A]^{-1} BU(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s(s+2)} \\ \dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix} \dfrac{1}{s} \quad = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s^2(s+2)} \\ \dfrac{2}{s(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\gamma(t) = L^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{2}{s^2(s+2)} \\ \dfrac{2}{s(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \underline{\Phi}(t)\, X(0) + \gamma(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 - 2e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2 + 2e^{-2t} + t - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^{-2t} + 1 - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} + t + \dfrac{5}{2}e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} + t + \dfrac{5}{2}e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= -\dfrac{3}{2} + t + \dfrac{5}{2}e^{-2t}$$