知识点K2.11

差分方程的z变换解

主要内容：

差分方程的z域解

基本要求：

掌握离散系统的z域描述和分析方法

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

K2.11 差分方程的z域解

单边z变换将系统的初始条件自然地包含于其代数方程中，故可求系统的零输入、零状态响应和全响应。

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} f(k-j)$$

设$f(k)$在k=0时接入，系统初始状态为$y(-1), y(-2), \ldots y(-n)$。

取单边 z 变换得：

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} [z^{-i} Y(z) + \sum_{k=0}^{i-1} y(k-i) z^{-i}] = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} [z^{-j} F(z)]$$

$$[\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{-i}] Y(z) + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} [\sum_{k=0}^{i-1} y(k-i) z^{-k}] = (\sum_{j=0}^{m} b_{m-j} z^{-j}) F(z)$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

差分方程的z变换解

$$Y(z)=\frac{M(z)}{A(z)}+\frac{B(z)}{A(z)}F(z)=Y_{zi}(z)+Y_{zs}(z)$$

系统函数 $$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}$$

$$h(k)\longleftrightarrow H(z)$$

例1： 若某系统的差分方程为

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)+2f(k-2)$$

已知$y(-1)=2$，$y(-2)=-1/2$，$f(k)=\varepsilon(k)$。求系统的$y_{zi}(k)$、$y_{zs}(k)$、$y(k)$。

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

差分方程的z变换解

解：方程两边取单边z变换，得：

$$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+y(-1)z^{-1}]=F(z)+2z^{-2}F(z)$$

整理得：

$$Y(z)=\frac{(1+2z^{-1})y(-1)+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}+\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}F(z)$$

$$=\underbrace{\frac{z^2+4z}{z^2-z-2}}_{Y_{zi}(z)}+\underbrace{\frac{z^2+2}{z^2-z-2}\frac{z}{z-1}}_{Y_{zs}(z)}$$

$$Y_{zi}(z)=\frac{z^2+4z}{(z-2)(z+1)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{-z}{z+1}\rightarrow y_{zi}(k)=[2(2)^k-(-1)^k]\varepsilon(k)$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{2z}{z-2}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{3}{2}\frac{z}{z-1}\rightarrow y_{zs}(k)=[2^{k+1}+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{3}{2}]\varepsilon(k)$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

例2： **(求LTI系统差分方程的3种响应)**

已知：离散系统的方程为：

$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k-2)$$

$$y(-1)=1,\quad y(-2)=0,\quad f(k)=\varepsilon(k)$$

求：$y(k)$，$y_{zi}(k)$，$y_{zs}(k)$。

解： **(1) 求完全响应$y(k)$：**

由单边z变换的右移性质：

$$f(k-m)\leftrightarrow z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1}f(k-m)z^{-k}$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

差分方程的z变换解

$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k-2)$$

对差分方程两边取单边z变换，得

$$Y(z)+3[z^{-1}Y(z)+\sum_{k=0}^{0}y(k-1)z^{-k}]+2[z^{-2}Y(z)+\sum_{k=0}^{1}y(k-2)z^{-k}]=z^{-2}F(z)$$

$$Y(z)=\frac{(-3-2z^{-1})y(-1)-2y(-2)}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}+\frac{z^{-2}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}F(z)$$

$$=\frac{-3z^{3}+z^{2}+3z}{(z+1)(z-1)(z+2)},\quad F(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{1}{6}\frac{z}{(z-1)}+\frac{1}{2}\frac{z}{(z+1)}-\frac{11}{3}\frac{z}{(z+2)},\quad |z|>2$$

$$y(k)=\frac{1}{6}\times 1^{k}+\frac{1}{2}\times(-1)^{k}-\frac{11}{3}(-2)^{k},\quad k\geq 0$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

差分方程的z变换解

(2)求零输入响应

$$y_{zi}(k)+3y_{zi}(k-1)+2y_{zi}(k-2)=0$$

$$y_{zi}(-1)=y(-1)=1,\quad y_{zi}(-2)=y(-2)=0$$

根据右移性质，对 方程两边取单边z变换，得：

$$Y_{zi}(z)+3z^{-1}[Y_{zi}(z)+y_{zi}(-1)z^{-(-1)}]+2z^{-2}[Y_{zi}(z)+\sum_{k=0}^{1}y_{zi}(k-2)z^{-k}]=0$$

$$Y_{zi}(z)=\frac{(-3-2z^{-1})y_{zi}(-1)-2y_{zi}(-2)}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{-3z^2-2z}{(z+1)(z+2)},\quad |z|>2$$

$$=\frac{z}{z+1}-\frac{4z}{z+2}$$

$$y_{zi}(k)=(-1)^k-(-2)^{k+2},\quad k\geq 0$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

差分方程的z变换解

(3)求零状态响应

$$y_{zs}(k)+3y_{zs}(k-1)+2y_{zs}(k-2)=f(k-2)$$

$$y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=0,\ f(k)=\varepsilon(k)$$

由右移性质，对方程两边取单边z变换，得

$$Y_{zs}(z)+3z^{-1}y_{zs}(z)+2z^{-2}Y_{zs}(z)=z^{-2}F(z)$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{z^{-2}}{(1+3z^{-1}+2z^{-2})}F(z)=\frac{z}{(z+1)(z-1)(z+2)}$$

$$=\frac{1}{6}\frac{z}{(z-1)}-\frac{1}{2}\frac{z}{(z+1)}+\frac{1}{3}\frac{z}{(z+2)},\quad |z|>2$$

$$y_{zs}(k)=[\frac{1}{6}\times 1^{k}-\frac{1}{2}(-1)^{k}+\frac{1}{3}(-2)^{k}]\varepsilon(k)$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

差分方程的z变换解

说明：前向差分方程的解法：

方法1：用左移性质：$f(k+m) \leftrightarrow z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}$,

初始条件：$y(0)$，$y(1)$，…

方法2：转变为后向差分方程，用右移性质求解

初始条件：$y(-1)$，$y(-2)$，…

若初始条件不适用，则用递推法由相应的差分方程递推得到需要的初始条件。

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved