教学模块6 基于状态空间模型的极点配置设计方法

教学单元4 按极点配置设计观测器

东北大学 · 关守平
guanshouping@ise.neu.edu.cn

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

问题的提出：不可能直接反馈系统的全部状态（尤其对于高阶系统）。

解决的方法：

找到一种算法，利用输入量及其可量测的输出量来重构系统的全部状态（ $\mathbf{x}(k),\ \hat{\mathbf{x}}(k)$ ），让 $\mathbf{u}(k)=-L\hat{\mathbf{x}}(k)$ 代替 $\mathbf{u}(k)=-L\mathbf{x}(k)$ 。

观测器：根据输出量来重构系统状态的算法。

4.1 开环观测器

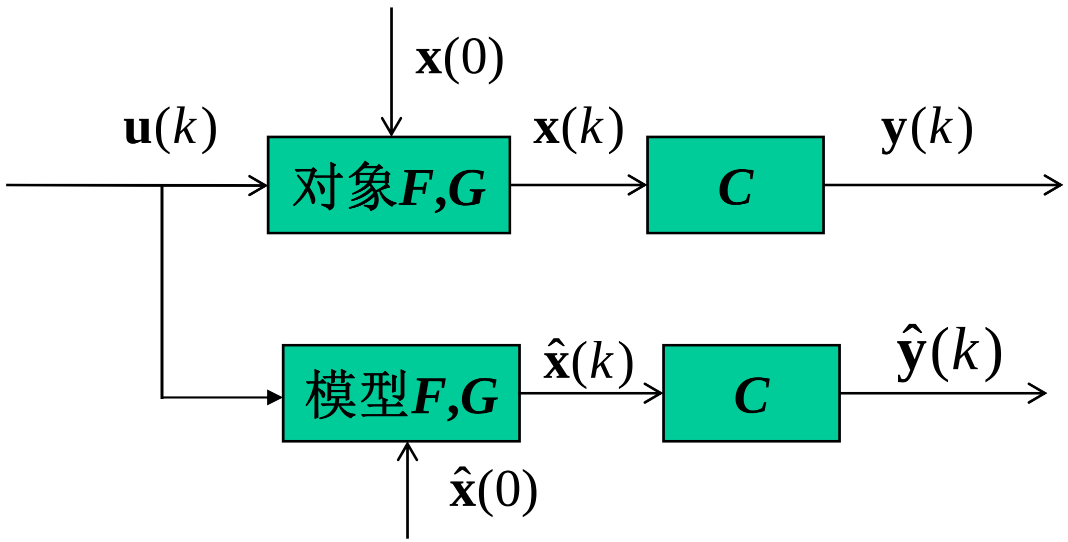

图 1 开环观测器结构

控制对象：
$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad (1)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^n$，$\mathbf{u} \in R^m$，$\mathbf{y} \in R^r$

则开环观测器方程为：

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1)=F\hat{\mathbf{x}}(k)+G\mathbf{u}(k) \qquad （2）$$

（1）初始条件相等，即 $\hat{\mathbf{x}}(0)=\mathbf{x}(0)$，则状态重构为： $\hat{\mathbf{x}}(k)=\mathbf{x}(k)$

控制对象： $\mathbf{x}(k+1)=F\mathbf{x}(k)+G\mathbf{u}(k)$

（2）初始条件不相等，即 $\hat{\mathbf{x}}(0) \neq \mathbf{x}(0)$ 有状态重构误差为：

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) \qquad (3)$$

式（1）中第一式减去式（2），得到状态重构误差方程为：

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = F\tilde{\mathbf{x}}(k) \qquad (4)$$

其特征方程为：

$$\left| zI - F \right| = 0 \qquad (5)$$

结论： $\boxed{|zI-F|=0}$

只要控制对象稳定，即$\boldsymbol{F}$特征值均在单位圆内，则即使状态初始值不相等，即 $\tilde{\mathbf{x}}(0)=\mathbf{x}(0)-\hat{\mathbf{x}}(0)$，经过一段时间，仍然有：

$$\tilde{\mathbf{x}}(k)=\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k)\to 0$$

故 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 可以作为 $\mathbf{x}(k)$ 的状态重构。

开环观测器特征方程：$\left|zI - F\right| = 0$

问题：（1）F具有不稳定的特征根时，不能采用该类型的状态观测器。

（2）动态特性取决于系数矩阵F，不能按需要进行调整。

$$\hat{\mathbf{x}}(k) - - \rightarrow \mathbf{x}(k)$$

逼近速度可调

原因：只利用了输入量及模型参数，而没有利用可以量测到的输出量信息。

解决方法：

充分利用输入量、模型参数和输出量信息，对开环观测器进行重构，得到闭环结构的观测器。

4.2 预报观测器

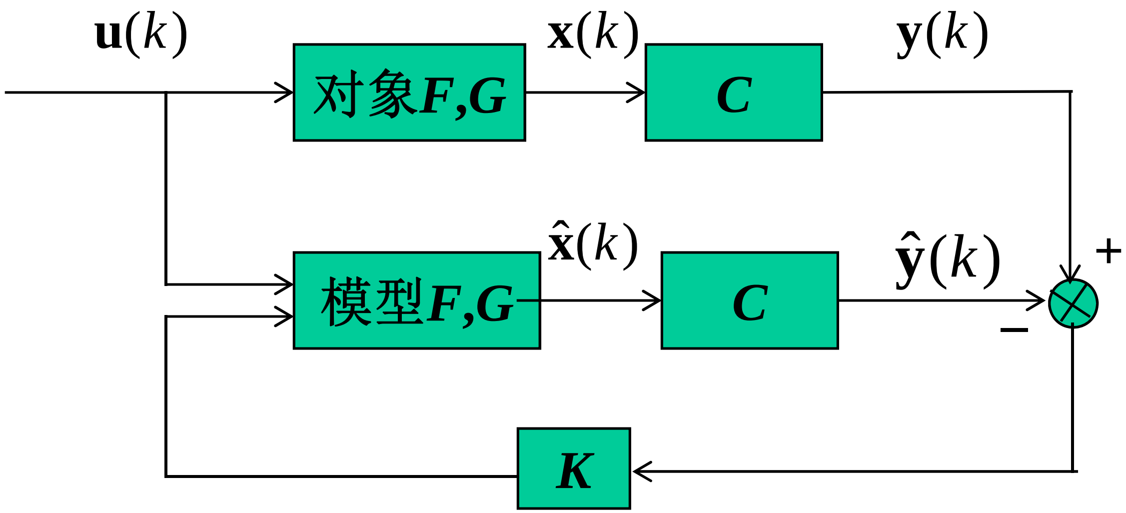

图 2 预报观测器结构

由图2，可以写出预报观测器方程为：

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1)=F\hat{\mathbf{x}}(k)+G\mathbf{u}(k)+K[\mathbf{y}(k)-C\hat{\mathbf{x}}(k)] \quad (6)$$

上式中，***k*+1**时刻的状态重构 $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ 只利用到了***kT***时刻的量测量***y*(*k*)**，因此称为“预报观测器”，其中***K***称为观测器增益矩阵。

问题：预报观测器是否收敛？观测器增益***K***的求解？

于是得到状态重构误差方程为：

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\
&= \left[F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k)\right] - \left\{F\hat{\mathbf{x}}(k) + G\mathbf{u}(k) + K\left[C\mathbf{x}(k) - C\hat{\mathbf{x}}(k)\right]\right\} \\
&= F[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] - KC[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] \\
&= [F - KC]\tilde{\mathbf{x}}(k)
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

状态重构误差的特征方程（观测器的特征方程）为：

$$
\left| zI - F + KC \right| = 0 \qquad (8)
$$

其根分布决定观测器性能。

预报观测器特征方程： $|zI - F + KC| = 0$

开环观测器特征方程： $|zI - F| = 0$

比较

分析：

（1）状态重构误差的动态特性取决于系数矩阵***F-KC***，而***K***可调；

（2）***F***具有不稳定的特征根时，可通过适当调整***K***使状态可以重构。

求预报观测器的增益矩阵*K*：

已知观测器的特征方程为：

$$|zI - F + KC| = 0 \qquad (8)$$

给定观测器特征方程的根为 $\beta_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，则特征方程为：

$$\begin{aligned}\alpha_e(z) &= (z - \beta_1)(z - \beta_2)\cdots(z - \beta_n) \\ &= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0\end{aligned} \qquad (9)$$

于是 $$|zI - F + KC| = \alpha_e(z) \qquad (10)$$

展开行列式，比较两边z的同次幂的系数，则一共可以得到n个代数方程：

（1）对于单输入系统（$r=1$），一般情况下可以获得唯一解；

（2）对于多输入系统（$r>1$），共有nr个未知数，而总共只有n个方程，故需加限制条件。

对于单输入系统可以证明：***K***具有唯一解的充分必要条件是系统完全能观，即

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CF \\ \vdots \\ CF^{n-1} \end{bmatrix} = n \qquad （11）$$

物理意义：

系统完全能观时，才能通过适当选择增益矩阵***K***，利用输出量来调整各个状态重构跟随实际状态的响应性能。

问题：（1）如何给定观测器极点？（后续课程再讲解，比如简单情况下放在原点）

（2）如何计算增益矩阵***K***?

$$|zI - F + KC| = \alpha_e(z) \qquad （10）$$

问题（2）的解决：

（a）根据（10）式，展开左边行列式，通过比较z的同次幂

的系数，求出K的各个元素。

（b）通用求解方法

方程（10）左边矩阵转置（转置后行列式不变），故（10）式变为：

$$|zI - F^T + C^T K^T| = \alpha_e(z) \qquad （12）$$

将上式与求控制规律L式比较，即

$$|zI - F + GL| = \alpha_c(z) \qquad （13）$$

$$\left|zI - F + GL\right| = \alpha_c(z) \qquad \left|zI - F^T + C^T K^T\right| = \alpha_e(z)$$

F	$\longleftrightarrow$	F^T
G	$\longleftrightarrow$	C^T
L	$\longleftrightarrow$	K^T
$\alpha_c(z)$	$\longleftrightarrow$	$\alpha_e(z)$

表1

由求**L**表达式，即

$$L=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G & FG & \cdots & F^{n-1}G\end{bmatrix}^{-1}\alpha_c(F) \qquad \textbf{（14）}$$

得到：

$$K^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C^T & F^TC^T & \cdots & (F^T)^{n-1}C^T\end{bmatrix}^{-1}\alpha_e(F^T)$$

（15）

两边转置，得到：

$$K = \alpha_e(F)\begin{bmatrix} C \\ CF \\ \vdots \\ CF^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

系统能观

算法完毕。

例题讲解

例 **4.1**：双积分环节离散化状态空间模型为：

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

其中 $F = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

设计预报观测器。

解：　预报观测器方程为：

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = F\hat{\mathbf{x}}(k) + G\mathbf{u}(k) + K[\mathbf{y}(k) - C\hat{\mathbf{x}}(k)]$$

令　$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

将观测器的极点配置在原点，则　$\alpha_e(z) = z^2$

（一）系数比较法

于是：
$$|zI-F+KC| = \left| z\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \right|$$
$$= \begin{vmatrix} z-1+k_1 & -0.1 \\ k_2 & z-1 \end{vmatrix}$$
$$= z^2+(k_1-2)z+(1-k_1+0.1k_2)$$
$$= \alpha_e(z) = z^2$$

通过系数比较，得到增益矩阵***K***：
$$K = \begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 10\end{bmatrix}$$

（2）通用求解法

$$K=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}=\alpha_e(F)\begin{bmatrix} C \\ CF \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=F^2\begin{bmatrix} C \\ CF \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

4.3 现时观测器

由预报观测器方程： $\hat{\mathbf{x}}(k+1)=F\hat{\mathbf{x}}(k)+G\mathbf{u}(k)+K[\mathbf{y}(k)-C\hat{\mathbf{x}}(k)]$

可知，状态反馈 $\mathbf{u}(k)=-L\hat{\mathbf{x}}(k)$ 中，只包含了前一时刻的输出量信息 $\mathbf{y}(k-1)$，输出信号将不能得到及时的反馈。当采样周期较长时，将影响系统性能。为此，采用如下观测器结构：

$$\begin{cases}\bar{\mathbf{x}}(k+1)=F\hat{\mathbf{x}}(k)+G\mathbf{u}(k) & (17)\\ \hat{\mathbf{x}}(k+1)=\bar{\mathbf{x}}(k+1)+K[\mathbf{y}(k+1)-C\bar{\mathbf{x}}(k+1)] & (18)\end{cases}$$

此即为现时观测器方程。

适用范围：计算延时 τ （观测器计算）与采样周期T相比很小时，

采用现时观测器。

求取增益矩阵*K*:

状态重构误差方程为:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1)-\hat{\mathbf{x}}(k+1) \\
&= F\mathbf{x}(k)+G\mathbf{u}(k)-\left\{\overline{\mathbf{x}}(k+1)+K\left[C\mathbf{x}(k+1)-C\overline{\mathbf{x}}(k+1)\right]\right\} \\
&= F\mathbf{x}(k)+G\mathbf{u}(k)-\left\{F\hat{\mathbf{x}}(k)+G\mathbf{u}(k)\right. \\
&\qquad \left.+K\left[CF\mathbf{x}(k)+CG\mathbf{u}(k)-CF\hat{\mathbf{x}}(k)-CG\mathbf{u}(k)\right]\right\} \\
&= F\left[\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k)\right]-KCF\left[\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k)\right]=\left(F-KCF\right)\tilde{\mathbf{x}}(k) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

特征方程为: $\left|zI-F+KCF\right|=\alpha_e(z)=0$ （20）

对于单输入系统，**K**具有唯一解的充分必要条件是系统完全能观，即（**11**）式成立。

K 的求解方法：

（一）系数比较法：

将（20）式展开，通过*z*的同次幂系数比较，得到*n*个方程组成方程组，通过解方程组求得增益矩阵*K*；

$$\left|zI - F + KCF\right| = \alpha_e(z) \qquad (20)$$

（二）通用求解算法

式（10）与式（20）式相比，只是用***CF***代替***C***，故参照式（16），即预报观测器求***K***的阿克曼公式，得到：

$$\left| zI - F + KC \right| = \alpha_e(z) \qquad (10)$$

$$\left| zI - F + KCF \right| = \alpha_e(z) \qquad (20)$$

$$K = \alpha_e(F)\begin{bmatrix} CF \\ CF^2 \\ \vdots \\ CF^n \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_e(F)F^{-1}\begin{bmatrix} C \\ CF \\ \vdots \\ CF^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

需要说明的是：

$F = e^{AT}$ 总是非奇异的，即矩阵***F***是可逆的。

4.4 降阶观测器

前两种观测器为全阶观测器，即观测器阶数等于状态个数。如果输出量是状态的一部分，则没有必要再对它进行重构，只需根据能量测的部分状态重构不能量测的状态，即降阶观测器。

但是，如果可量测的部分包含有严重的噪声，则可采用全阶观测器重构出全部状态，因为观测器起到了滤波的作用。

状态向量为： $$\mathbf{x}(k)=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_a(k)\\ \mathbf{x}_b(k)\end{pmatrix} \qquad (22)$$

其中 $\mathbf{x}_a(k)$ 表示能够量测的部分状态，即 $\mathbf{y}(k)$；$\mathbf{x}_b(k)$ 表示重构的部分状态，则状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{aa} & F_{ab} \\ F_{ba} & F_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_a \\ G_b \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \qquad (23)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} \qquad (24)$$

由式（**23**），得到：

$$\mathbf{x}_a(k+1) = F_{aa}\mathbf{x}_a(k) + F_{ab}\mathbf{x}_b(k) + G_a\mathbf{u}(k) \qquad (25)$$

$$\mathbf{x}_b(k+1) = F_{ba}\mathbf{x}_a(k) + F_{bb}\mathbf{x}_b(k) + G_b\mathbf{u}(k) \qquad (26)$$

整理，得到：

$$\mathbf{x}_b(k+1)=F_{bb}\mathbf{x}_b(k)+F_{ba}\mathbf{x}_a(k)+G_b\mathbf{u}(k) \tag{27}$$

$$\mathbf{x}_a(k+1)-F_{aa}\mathbf{x}_a(k)-G_a\mathbf{u}(k)=F_{ab}\mathbf{x}_b(k) \tag{28}$$

一般系统状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\mathbf{x}(k+1)=F\mathbf{x}(k)+G\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k)=C\mathbf{x}(k)\end{cases} \tag{29}$$

式（27）（28）与（29）相比较，其对应关系为：

式（29）

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

式（27）与（28）

$$\mathbf{x}_b(k+1) = F_{bb}\mathbf{x}_b(k) + F_{ba}\mathbf{x}_a(k) + G_b\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{x}_a(k+1) - F_{aa}\mathbf{x}_a(k) - G_a\mathbf{u}(k) = F_{ab}\mathbf{x}_b(k)$$

$\mathbf{x}(k)$	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{x}_b(k)$
F	$\longleftrightarrow$	F_{bb}
$G\mathbf{u}(k)$	$\longleftrightarrow$	$F_{ba}\mathbf{x}_a(k) + G_b\mathbf{u}(k)$
$\mathbf{y}(k)$	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{x}_a(k+1) - F_{aa}\mathbf{x}_a(k) - G_a\mathbf{u}(k)$
C	$\longleftrightarrow$	F_{ab}

表2

根据预报观测器状态方程，即

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = F\hat{\mathbf{x}}(k) + G\mathbf{u}(k) + K[\mathbf{y}(k) - C\hat{\mathbf{x}}(k)] \tag{30}$$

利用前面的对应关系，得到降阶观测器状态方程：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) &= F_{bb}\hat{\mathbf{x}}_b(k) + F_{ba}\mathbf{x}_a(k) + G_b\mathbf{u}(k) \\ &\quad + K\left[\mathbf{x}_a(k+1) - F_{aa}\mathbf{x}_a(k) - G_a\mathbf{u}(k) - F_{ab}\hat{\mathbf{x}}_b(k)\right]\end{aligned} \tag{31}$$

上式实质上为降阶的现时观测器方程，因为**k+1**时刻的状态重构 $\hat{\mathbf{x}}_b(k+1)$ 用到了**k+1**时刻的量测量 $\mathbf{x}_a(k+1)$。

求增益矩阵*K*：

状态重构误差方程为：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) &= \mathbf{x}_b(k+1)-\hat{\mathbf{x}}_b(k+1)\\ &= F_{bb}\mathbf{x}(k)+F_{ba}\mathbf{x}_a(k)+G_b\mathbf{u}(k)-\{F_{bb}\hat{\mathbf{x}}_b(k)+F_{ba}\mathbf{x}_a(k)\\ &\quad +G_b\mathbf{u}(k)+K\left[\mathbf{x}_a(k+1)-F_{aa}\mathbf{x}_a(k)-G_a\mathbf{u}(k)-F_{ab}\hat{\mathbf{x}}_b(k)\right]\}\\ &= F_{bb}\left[\mathbf{x}_b(k)-\hat{\mathbf{x}}_b(k)\right]-K\left[F_{ab}\mathbf{x}_b(k)-F_{ab}\hat{\mathbf{x}}_b(k)\right] \qquad (32)\\ &= \left[F_{bb}-KF_{ab}\right]\tilde{\mathbf{x}}_b(k)\end{aligned}$$

其特征方程为：

$$\left|zI-F_{bb}+KF_{ab}\right| = \alpha_e(z) = 0 \qquad (33)$$

对比式（10）与（33）式，并参照（16）式，即预报观测器求*K*的阿克曼公式，得到：

$$|zI - F + KC| = \alpha_e(z) \tag{10}$$

$$|zI - F_{bb} + KF_{ab}| = \alpha_e(z) \tag{33}$$

$$K = \alpha_e(F_{bb})\begin{bmatrix} F_{ab} \\ F_{ab}F_{bb} \\ \vdots \\ F_{ab}F_{bb}^{\,n_1-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

其中，n_1 为 $\mathbf{x}_b(k)$ 的维数，对于单输入系统，有 $n_1 = n-1$。

·教学单元四结束·