知识点K4.04

离散小波变换

主要内容：

1. 离散小波函数的定义
2. Haar小波
3. DWT的快速算法

基本要求：

1. 了解离散小波函数点
2. 了解Haar小波的特点
3. 了解DWT快速分解与合成的实现原理

离散小波变换

1. 离散小波函数

尺度化的连续小波变换不是真正的离散变换，因为小波函数在平移轴（即时间轴）上是连续的，仅仅是尺度采样。离散小波变换（DWT）是同时针对尺度和平移进行离散化采样，它则不仅提供了信号分析和重构所需的足够信息，而且便于计算机实现，运算量也大为减少。

定义： 若有连续小波函数 $\psi_{a,b}=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ $a>0$，令 $a=a_0^j(a_0>1)$，

$b=ka_0^jb_0$，则称：$\psi_{j,k}(t)=a_0^{-j/2}\psi\left(a_0^{-j}t-kb_0\right)$ 为离散小波函数。

定义： 若信号 $\psi_{j,k}(t)=a_0^{-j/2}\psi(a_0^{-j}t-k)$，$f(t)\in L^2(R)$，$a_0>1$，$j,k\in Z$，则

$$W_f^{\psi}(j,k)=\left\langle f(t),\psi_{j,k}(t)\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{\psi}_{j,k}(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)a_0^{-j/2}\overline{\psi}(a_0^{-j}t-k)dt \qquad (9.4\text{-}2)$$

为 $f(t)$ 的离散小波变换，其中 $W_f^{\psi}(j,k)$ 称为第 j 级变换的小波系数。

离散小波变换

需要特别注意的是，离散小波变换中并未对小波函数和信号在时间轴上进行离散采样，因此小波系数的积分仍然是采用连续积分来完成的。离散小波变换可以认为是在尺度-平移平面上若干散列点上进行小波变换得到的结果，这些点构成了规则的栅格排列。

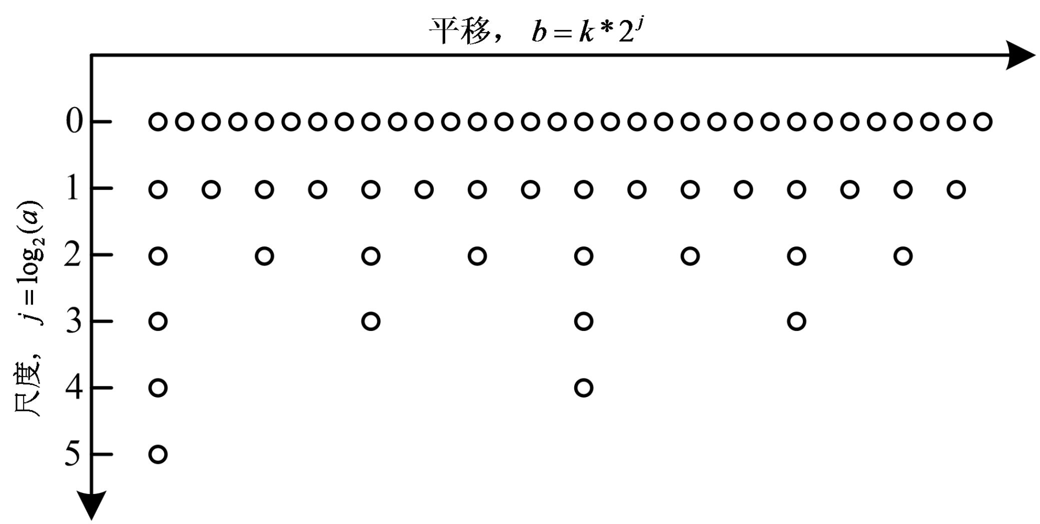


图9.4-1 DWT的尺度-平移采样示意图

离散小波变换

定义： 若信号 $\psi_{j,k}(t)=a_0^{-j/2}\psi\left(a_0^{-j}t-k\right)$，$j,k\in Z$ 构成 $L^2(R)$ 上的标准正交基，即内积 $\left\langle\psi_{j,k},\psi_{m,n}\right\rangle=\delta_{jm}\delta_{kn}=\begin{cases}1, & j=m\text{且}k=n\\0, & \text{其他}\end{cases}$，则称 $\psi(t)$ 为<u>正交小波</u>。相应地，

$$W_f^{\psi}(j,k)=\left\langle f(t),\psi_{j,k}(t)\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{\psi}_{j,k}(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)a_0^{-j/2}\bar{\psi}(a_0^{-j}t-k)dt \qquad (9.4\text{-}3)$$

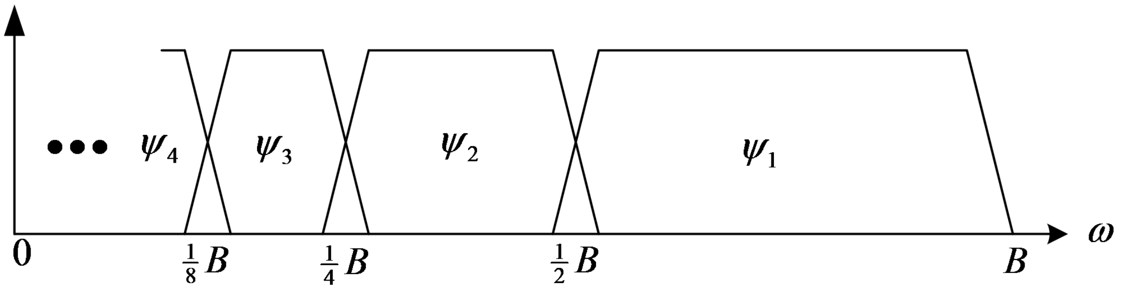
称为<u>正交小波变换</u>，并且将

$$f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}W_f^{\psi}(j,k)\psi_{j,k}(t) \qquad (9.4\text{-}4)$$

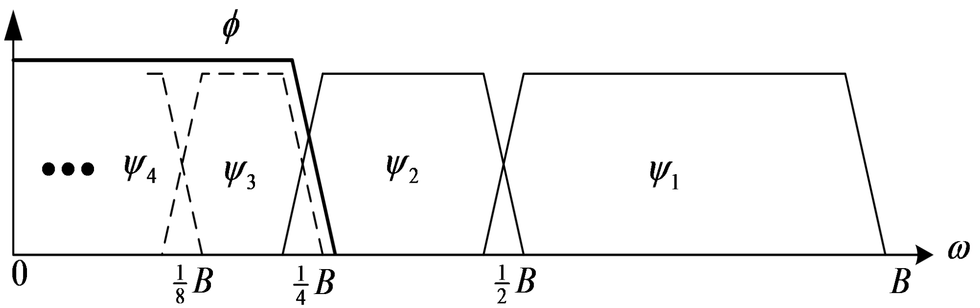
称为<u>小波级数</u>。

正交变换可以保证信号在变换前后的能量是相等的，这一点在傅里叶变换中已经体现出来了。

离散小波变换



小波变换每次得到频率较高的一半，剩下一半的频谱，由于绝大多数信号存在直流或低频分量，因此如果要继续用小波函数来实现对频谱的完整覆盖，那将需要无穷多次小波变换，也就是这个频谱上的“洞”永远无法完全补上，只会越来越小，这就导致了尺度轴上的无穷次计算。



为此引入尺度函数，由于其低通特性，低通函数常被称为平均滤波函数，它对应一个低通滤波器。

2. Haar小波

若定义 $\phi(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ 0, & otherwise\end{cases}$，则显然 $\phi(t)$ 是一个定义在[0,1)区间上的连续函数，该函数被称为Haar函数，并进一步定义 $\phi_{j,k}(t)=\sqrt{2^j}\phi(2^j t-k)$，$k=0,\ldots,2^j-1$

那么则容易有如下关系：

$$\phi(t)=\phi_{0,0}(t) \tag{9.4-5}$$

$$\phi(2t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t),\quad \phi(2t-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t) \tag{9.4-6}$$

并且

$$\phi(t)=\phi(2t)+\phi(2t-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t)+\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t) \tag{9.4-7}$$

上式常被称为双尺度方程。

若信号分解以Haar函数为基函数，则其幅度系数表明了某个区间内常数分量的大小，其本质上表征的是区间内的信号均值。

离散小波变换

$$\psi(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<\frac{1}{2}\\ -1, & \frac{1}{2}\le t<1\end{cases} \tag{9.4-9}$$

$\psi(t)$ 称为 Haar 小波函数，简称 Haar 小波，并且

$$\psi(t)=\phi(2t)-\phi(2t-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t)\text{。} \tag{9.4-10}$$

Haar小波的系数表明前半个区间[0,1/2)内的信号均值与后半个区间[1/2,1)内信号均值之间的差值，也就是表征了高频信息。

结合Haar函数的意义，我们可以知道对一个作用区间为[0,1)的函数而言，如果将其变换或者分解为尺度函数和小波函数的组合表示，那么的尺度系数表明的整个信号的均值，即低频信息，而则小波系数给出了[0,1/2) 和[1/2,1)两段子区间内信号均值的差值，即高频信息

离散小波变换

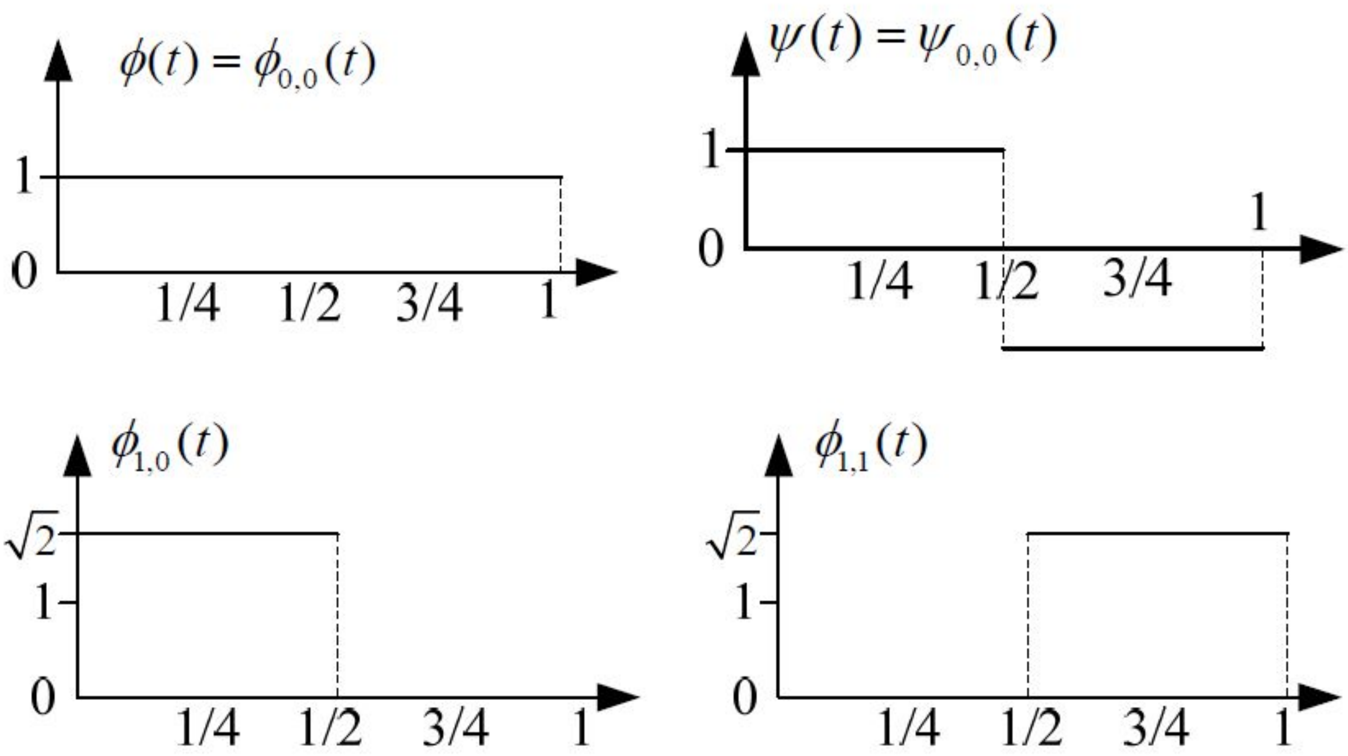


图 9.4-4 尺度 0 上的 Haar 小波 $\psi_{0,0}(t)$、Haar 函数 $\phi_{0,0}(t)$ 和尺度 1 上的 Haar 函数 $\phi_{1,k}(t)$

离散小波变换

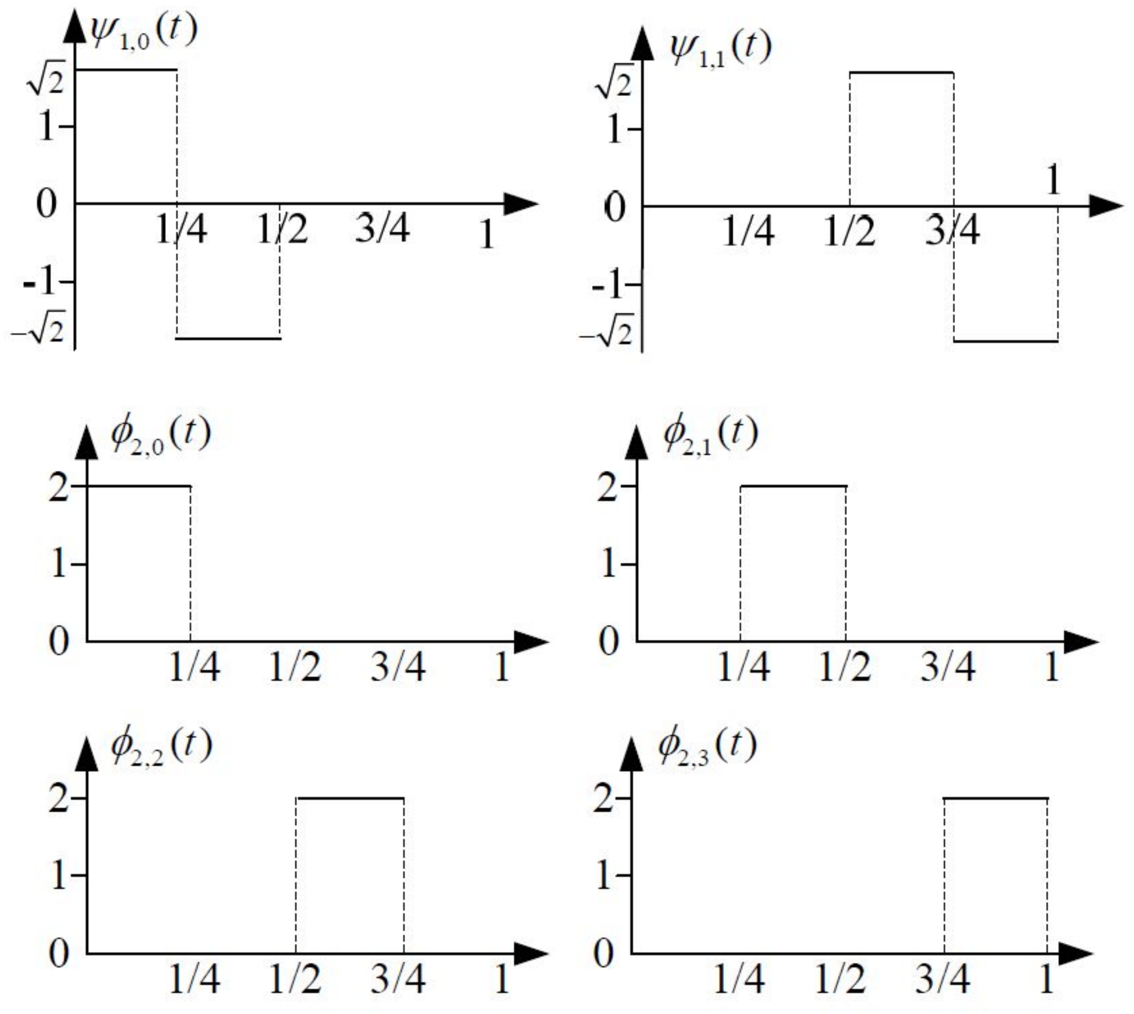
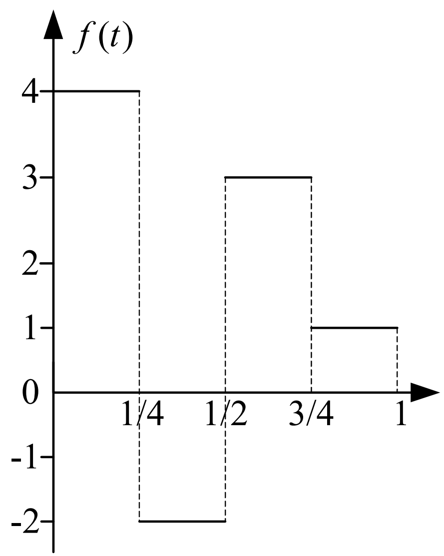
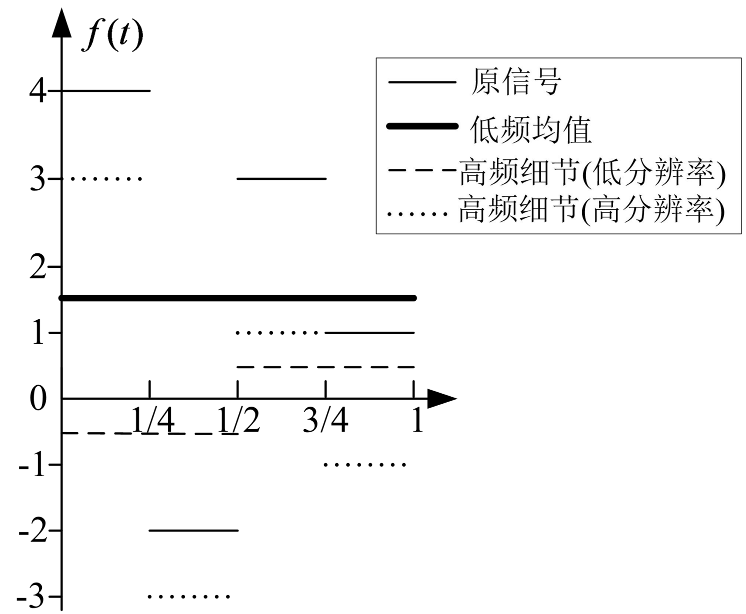


图 9.4-5 尺度 1 上的 Haar 小波 $\psi_{1,k}$ 和尺度 2 上的 Haar 函数 $\phi_{2,k}$

例9.4-1 已知信号的波形如图所示，试分析如何用Haar小波进行分解表示。





$$f(t)=4\phi_{2,0}(t)-2\phi_{2,1}(t)+3\phi_{2,2}(t)+1\phi_{2,3}(t)$$

$$f(t)=c_{0,0}\phi_{0,0}(t)+d_{0,0}\psi_{0,0}(t)+d_{1,0}\psi_{1,0}(t)+d_{1,1}\psi_{1,1}(t)$$

$$f(t)=\tfrac{3}{2}\phi_{0,0}(t)-\tfrac{1}{2}\psi_{0,0}(t)+\tfrac{3\sqrt{2}}{2}\psi_{1,0}(t)+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\psi_{1,1}(t)$$

3. DWT的快速分解与合成

略去详细的理论推导，针对离散时间信号的DWT的计算可以简化为数字滤波器的滤波。

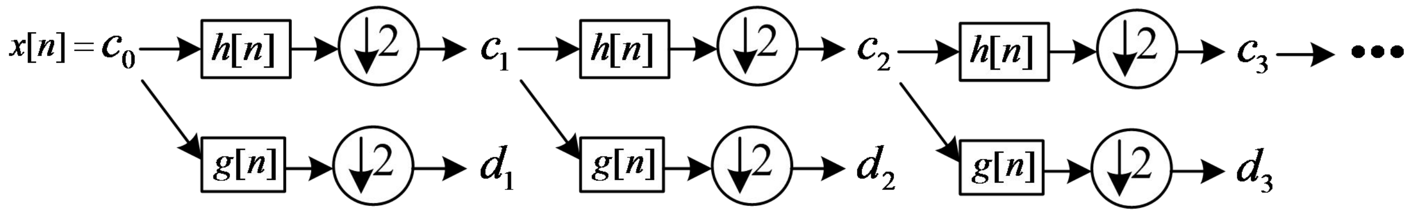
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[2n-k]$$

其中y为滤波结果，h是数字滤波器系数，x为信号，而$2n-k$中的系数2表明计算过程采用了下2采样。

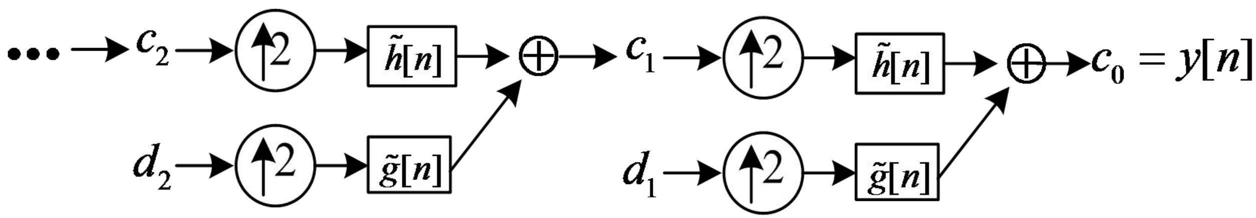
若要得到信号在不同频段上的分解，只需简单地在时域中将信号进行若干次高通和低通滤波即可。在离散小波变换中，滤波涉及到两个滤波器，分别是一个半带高通滤波器$g[n]$，滤除整个信号中较低的频率分量，得到高通子带，表示的是信号的精细细节；一个半带低通滤波器$h[n]$，滤除较高的一半频率分量，得到低通子带，表示的是信号的粗略逼近。

离散小波变换

因此，DWT的快速分解可以图解表示为：



而DWT的快速合成（即反变换）则可以图解表示为：



合成时，每级分解系数的高通子带和低通子带先进行2倍的上采样，然后再通过合成滤波器（分别对应高通和低通滤波器），然后再相加即能得到重构结果。