知识点K3.07

Ch.8.2, 8.3

系统状态方程的变换域求解

主要内容：

1. 连续系统状态方程的 *s* 域求解
2. 离散系统状态方程的 *z* 域求解

基本要求：

1.掌握连续系统状态方程/输出方程的 *s* 域求解方法

2.掌握离散系统状态方程/输出方程的 *z* 域求解方法

1. 连续系统状态方程的s域求解

状态方程：$\dot{X}(t)=AX(t)+Bf(t)$

根据单边拉氏变换的时域微分性质， 两边取拉氏变换：

$$sX(s)-X(0\_)=AX(s)+BF(s)$$

$$sX(s)-AX(s)=X(0\_)+BF(s)$$

$$(sI-A)X(s)=X(0\_)+BF(s)$$

$$X(s)=(sI-A)^{-1}X(0\_)+(sI-A)^{-1}BF(s)$$

$$=\underbrace{\Phi(s)X(0\_)}_{X_{zi}(s)}+\underbrace{\Phi(s)BF(s)}_{X_{zs}(s)} \qquad \Phi(s)=(sI-A)^{-1}$$

$$X_{zi}(s)=\mathscr{L}[X_{zi}(t)] \qquad X_{zs}(s)=\mathscr{L}[X_{zs}(t)]$$

$$X(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}[X_{zi}(s)]+\mathscr{L}^{-1}[X_{zs}(s)]$$

系统状态方程的变换域求解

输出方程：$Y(t) = CX(t) + Df(t)$

两边取拉普拉斯变换：$Y(s) = CX(s) + DF(s)$

代入 $X(s) = \Phi(s)X(0\_) + \Phi(s)BF(s)$

$$Y(s) = C\Phi(s)X(0\_) + [C\Phi(s)B + D]F(s)$$

$$= \underbrace{C\Phi(s)X(0\_)}_{Y_{zi}(s)} + \underbrace{H(s)F(s)}_{Y_{zs}(s)}$$

$$H(s) = C\Phi(s)B + D = \mathscr{L}[h(t)]$$

$$Y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \mathscr{L}^{-1}[Y_{zi}(s)] + \mathscr{L}^{-1}[Y_{zs}(s)]$$

系统状态方程的变换域求解

连续系统状态方程、输出方程的s域求解步骤:

(1) 状态方程 s 域求解:

Step1: 求 $\Phi(s)=(sI-A)^{-1};$

Step2: 求 $X_{zi}(s)=\Phi(s)X(0_-);$

Step3: 求 $X_{zs}(s)=\Phi(s)BF(s);$

Step4: 求 $X(s)=X_{zi}(s)+X_{zs}(s);$

Step5: 求 $X(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)].$

(2)输出方程 s 域求解:

Step1: 求 $\Phi(s)=(sI-A)^{-1}$;

Step2: 求 $Y_{zi}(s)=C\Phi(s)X(0_-)$;

Step3: 求 $H(s)=C\Phi(s)B+D$;

Step4: 求 $Y_{zs}(s)=H(s)F(s)$;

Step5: 求 $Y_{zi}(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y_{zi}(s)]$

$Y_{zs}(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y_{zs}(s)]$;

Step6: 求 $Y(t)=Y_{zi}(t)+Y_{zs}(t)$.

2. 离散系统状态方程的z域求解

状态方程: $X(k+1)=AX(k)+Bf(k)$

根据单边 z 变换的左移性质，两边取 z 变换：

$$zX(z)-zX(0)=AX(z)+BF(z)$$

$$(zI-A)X(z)=zX(0)+BF(z)$$

$$X(z)=(zI-A)^{-1}zX(0)+(zI-A)^{-1}BF(z)$$

$$=\underbrace{\Phi(z)X(0)}_{X_{zi}(z)}+\underbrace{z^{-1}\Phi(z)BF(z)}_{X_{zs}(z)} \qquad \Phi(z)=(zI-A)^{-1}z$$

$$X(k)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)]=\mathscr{Z}^{-1}[X_{zi}(z)]+\mathscr{Z}^{-1}[X_{zs}(z)]$$

系统状态方程的变换域求解

输出方程：$Y(k)=CX(k)+Df(k)$

方程两边取单边 z 变换，得：

$$Y(z)=CX(z)+DF(z)$$

把 $X(z)$ 代入上式，得：

$$Y(z)=C\Phi(z)X(0)+[Cz^{-1}\Phi(z)B+D]F(z)$$

$$=\underbrace{C\Phi(z)X(0)}_{Y_{zi}(z)}+\underbrace{H(z)F(z)}_{Y_{zs}(z)}$$

$$H(z)=Cz^{-1}\Phi(z)B+D=\mathscr{Z}[h(k)]$$

$$Y(k)=\mathscr{Z}^{-1}[Y(z)]=Y_{zi}(k)+Y_{zs}(k)$$

离散系统状态方程、输出方程的 z 域求解步骤：

(1)状态方程 z 域求解：

Step1： 求 $\Phi(z)=(zI-A)^{-1}z;$

Step2： 求 $X_{zi}(z)=\Phi(z)X(0);$

Step3： 求 $X_{zs}(z)=z^{-1}\Phi(z)BF(z);$

Step4： 求 $X(z)=X_{zi}(z)+X_{zs}(z);$

Step5： 求 $X(k)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)].$

系统状态方程的变换域求解

(2)输出方程 z 域求解:

Step1: 求 $\Phi(z)=(zI-A)^{-1}z;$

Step2: 求 $Y_{zi}(z)=C\Phi(z)X(0);$

Step3: 求 $H(z)=Cz^{-1}\Phi(z)B+D;$

Step4: 求 $Y_{zs}(z)=H(z)F(z);$

Step5: 求 $Y_{zi}(k)=\mathscr{Z}^{-1}[Y_{zi}(z)]$

$$Y_{zs}(k)=\mathscr{Z}^{-1}[Y_{zs}(z)];$$

Step6: 求 $Y(k)=Y_{zi}(k)+Y_{zs}(k).$