教学模块4数字控制器的模拟化设计方法

教学单元2连续控制器的离散化方法

东北大学 · 刘建昌
liujianchang@ise.neu.edu.cn

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

教学单元2连续控制器的离散化方法

连续控制器的离散化——求连续控制器传递函数$D(s)$的等效离散传递函数$D(z)$。

离散化的基本原则——保证$D(z)$与$D(s)$具有相同或相近的动态性能和频率特性。

- z 变换法
- 差分变换法
- 双线性变换法
- 零极点匹配法

2.1 z 变换法

——直接用z 变换，由模拟控制器求数字控制器

$$D(z)=Z\left[D(s)\right]$$

符合z变换定义 $z=\mathrm{e}^{sT}$

控制器的输入 $E(z)=Z\left[E(s)\right]$

数字控制器算法 $u(k)=Z^{-1}[E(z)D(z)]$

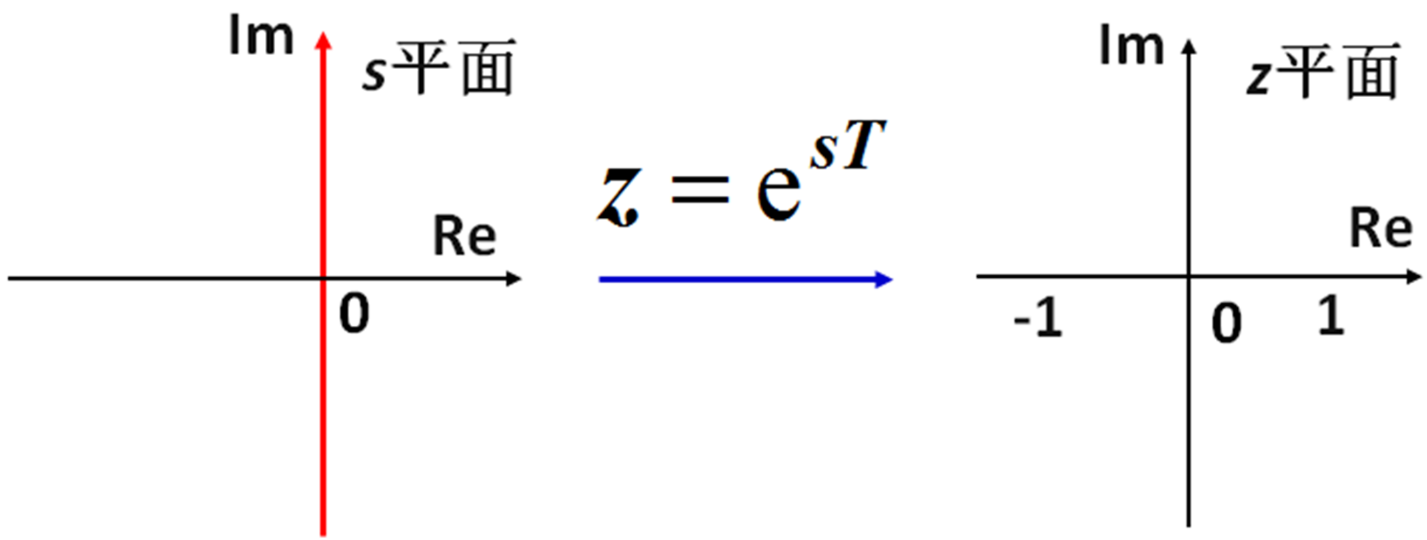
◆ z变换法的特点

（1）形式简单、直观，这种变换方法符合z变换的定义，通过z变换直接得数字控制器。

◆ z变换法的特点

（2）若$D(s)$稳定，则$D(z)$也稳定，而且变换前后频率不会发生畸变。

z变换的频率映射关系



◆ z变换法的特点

（3）产生频率混叠——将s平面上角频率以采样角频率为周期的所有信号，都重叠地映射到z平面上同一频率点的信号。

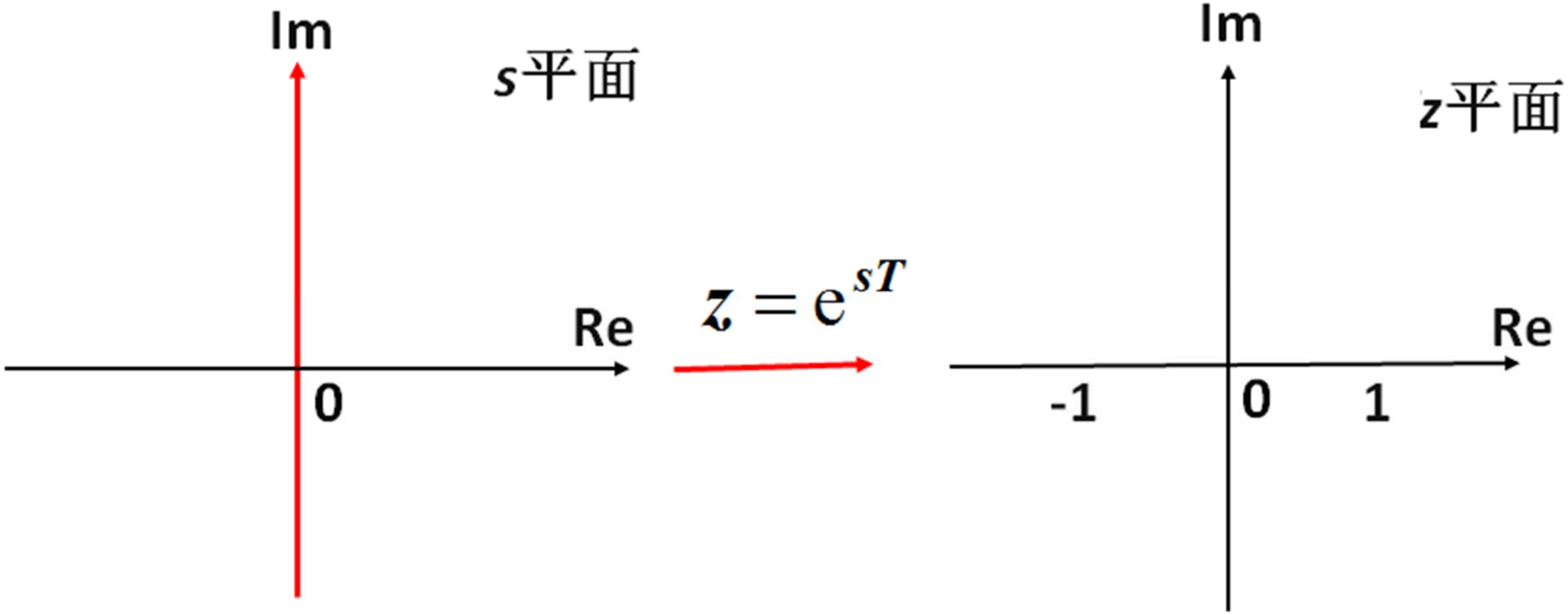
按z变换定义 $z = e^{sT}$

s平面角频率ω与z平面角频率ω_1之间的关系为：

$$z\Big|_{\omega_1} = e^{j\omega T} = e^{j(\omega T + 2k\pi)}$$

$$= e^{j(\omega + k\frac{2\pi}{T})T} = e^{j(\omega + k\omega_s)T}$$

（3）频率混叠现象



虚轴	$s = j\omega$	单位圆
左半平面	$s = -\sigma + j\omega$	单位圆内
右半平面	$s = \sigma + j\omega$	单位圆外

（3）频率混叠现象

- ◆ 频率混叠将使数字控制器的频率响应与模拟控制器的频率响应的近似性变差，很少使用
- ◆ 为防止混叠现象发生，需要提高采样频率

2.2 差分变换法

——把微分方程中的导数用有限差分来近似等效，得到一个与给定微分方程逼近的差分方程

$$\begin{cases}\text{后向差分}\\ \text{前向差分}\end{cases}$$

（1）后向差分变换法

假设有模拟信号$e(t)$，后向差分变换：

$$\frac{de(t)}{dt}=\frac{e(k)-e(k-1)}{T}$$

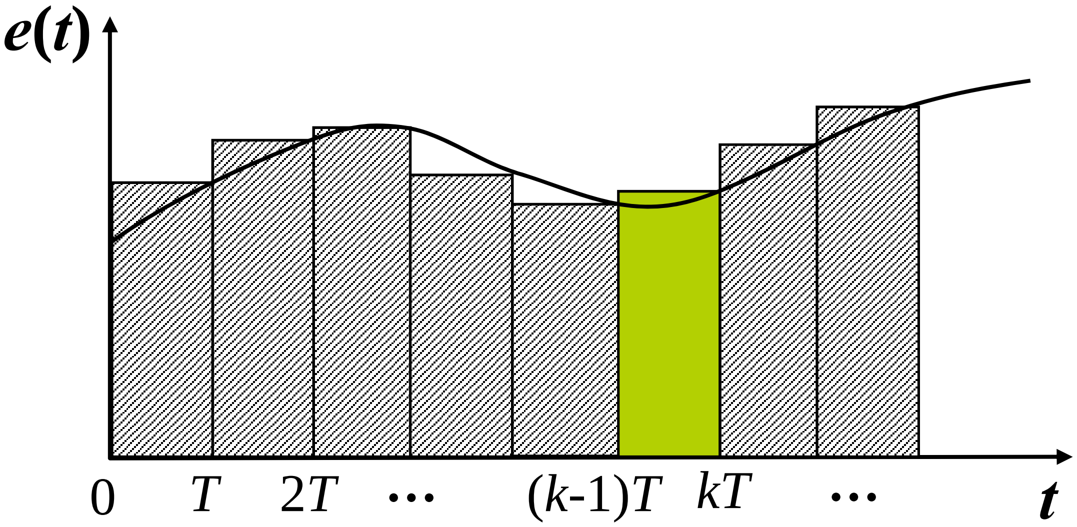
拉氏变换　　　　z变换

$$sE(s)=\frac{1-z^{-1}}{T}E(z)$$

令 $E(s)=E(z)$

◆ 后向差分变换 $s=\dfrac{1-z^{-1}}{T}$ 或 $z=\dfrac{1}{1-Ts}$

◆ 后向差分变换法亦称为后向矩形积分法——以后向矩形面积近视代替积分面积



$$\int_{(k-1)T}^{kT} e(t)dt = e(kT)\cdot T$$

——后向矩形积分法

◆ 后向矩形积分法

设控制器传递函数为：
$$D(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{1}{s}$$

$$\frac{du(t)}{dt}=e(t)$$ ——微分方程

$$\int_{(k-1)T}^{kT}\frac{du(t)}{dt}dt=\int_{(k-1)T}^{kT}du(t)=\int_{(k-1)T}^{kT}e(t)dt$$

$$u(kT)-u((k-1)T)=\int_{(k-1)T}^{kT}e(t)dt$$

取后向矩形积分：

$$\int_{(k-1)T}^{kT}e(t)dt=e(kT)\cdot T$$

◆ 后向矩形积分法

$$u(kT)-u((k-1)T)=e(kT)\cdot T$$

z变换

$$U(z)-z^{-1}U(z)=TE(z)$$

数字控制器

$$D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{1}{(1-z^{-1})/T}$$

$=$

模拟控制器

$$D(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{1}{s}$$

$$s=\frac{1-z^{-1}}{T}$$

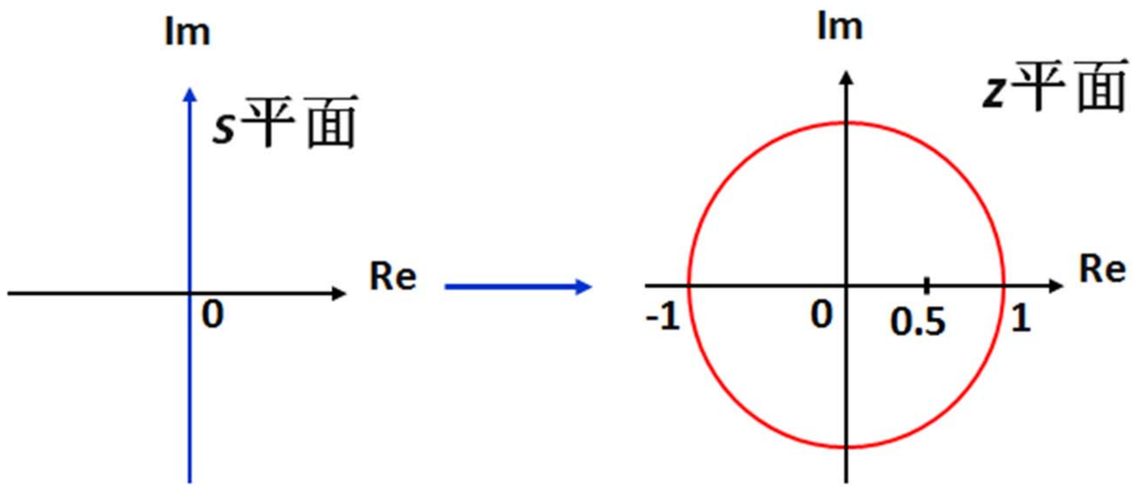
后向差分变换法也称为
后向矩形积分变换法

◆ 后向差分变换对系统性能的影响

当 $s = j\omega$ $\quad z = \dfrac{1}{1-j\omega T} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1+j\omega T}{1-J\omega T} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{2\arctan\omega T}$

$$|z-0.5| = 0.5$$

——半径为**0.5**的圆



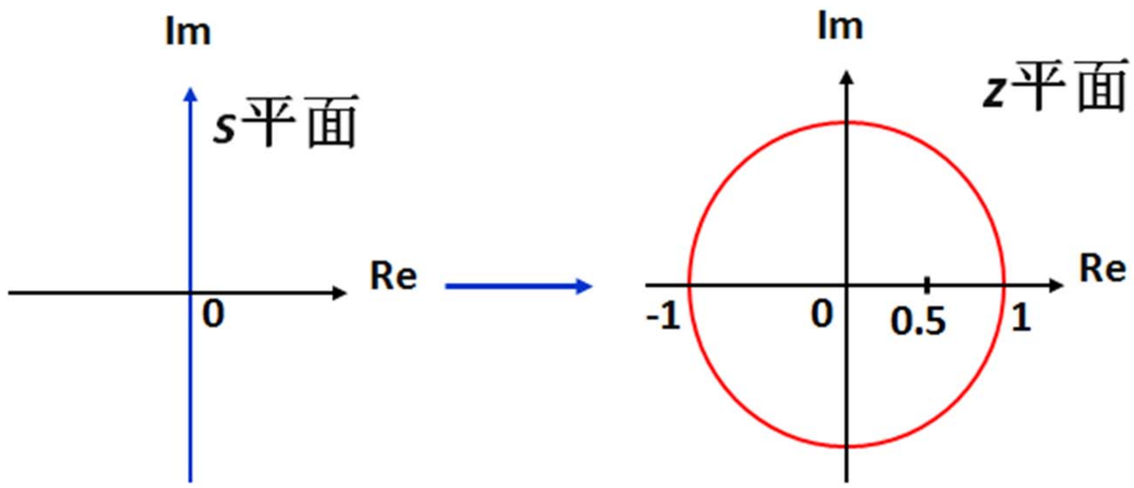
对**S** 左半平面，

设 $\boldsymbol{s = -\sigma + j\omega}$

$$z = \frac{1}{1+\sigma T - j\omega T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1-\sigma T + j\omega T}{1+\sigma T - j\omega T}$$

$|z-0.5| < 0.5$ ——半径小于**0.5**圆

后向变换对系统性能的影响：



- 若 $D(s)$稳定，则$D(z)$一定稳定；
- 数字控制器$D(z)$ 的频率产生畸变；
- 是否存在频混叠？

当 $s = j\omega$

$$z = \frac{1}{1 - j\omega T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1 + j\omega T}{1 - J\omega T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2\arctan\omega T}$$

——不存在频率混叠。

例题：

已知 $D(s)=\dfrac{20(s+4)}{s+10}$，$T$=0.015s，用后向差分法求$D(z)$控制器及控制算法。

解：用后向差分变换，将 $s=\dfrac{1-z^{-1}}{T}$ 代入$D(s)$得

$$D(z)=\frac{20\left(\dfrac{1-z^{-1}}{T}+4\right)}{\dfrac{1-z^{-1}}{T}+10}=\frac{20(1+4T-z^{-1})}{1+10T-z^{-1}}=\frac{18.43-17.39z^{-1}}{1-0.87z^{-1}}$$

$$D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}$$

$$(1-0.87z^{-1})U(z)=(18.43-17.39z^{-1})E(z)$$

$\downarrow$ z反变换

数字控制算法：

$$u(k)=0.87u(k-1)+18.43e(k)-17.39e(k-1)$$

2.2 差分变换法

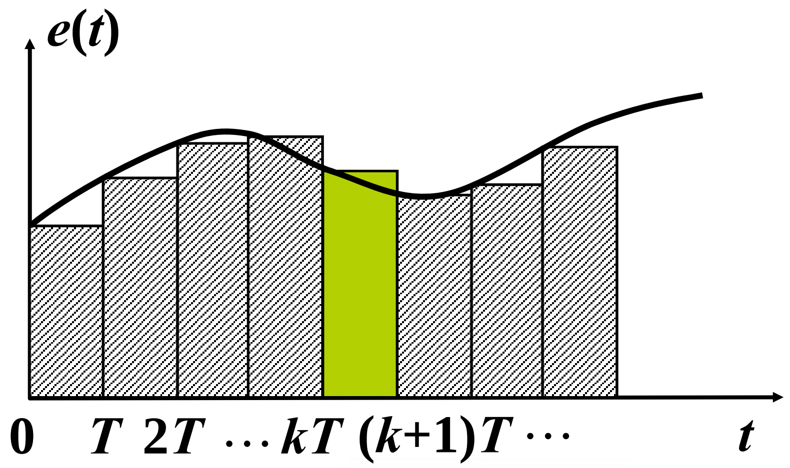
（2）前向差分变换法

$$\frac{de(t)}{dt}=\frac{e(k+1)-e(k)}{T}$$

拉氏变换（z变换）得 $$sE(s)=\frac{zE(z)-E(z)}{T}$$

◆ 前向差分变换

$$\boxed{s=\frac{z-1}{T}}$$ 或 $$\boxed{z=1+sT}$$



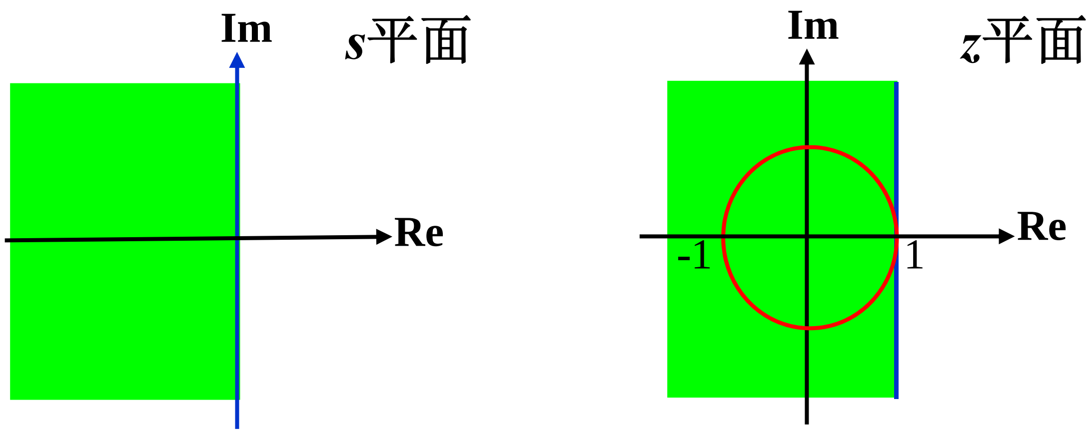
——亦称为前向矩形积分法

$$\boxed{\int_{kT}^{(k+1)T}e(t)dt=e(kT)\cdot T}$$

（2）前向差分变换法

◆ 变换对系统性能的影响

当 $s = j\omega$时，$z = 1+j\omega T$

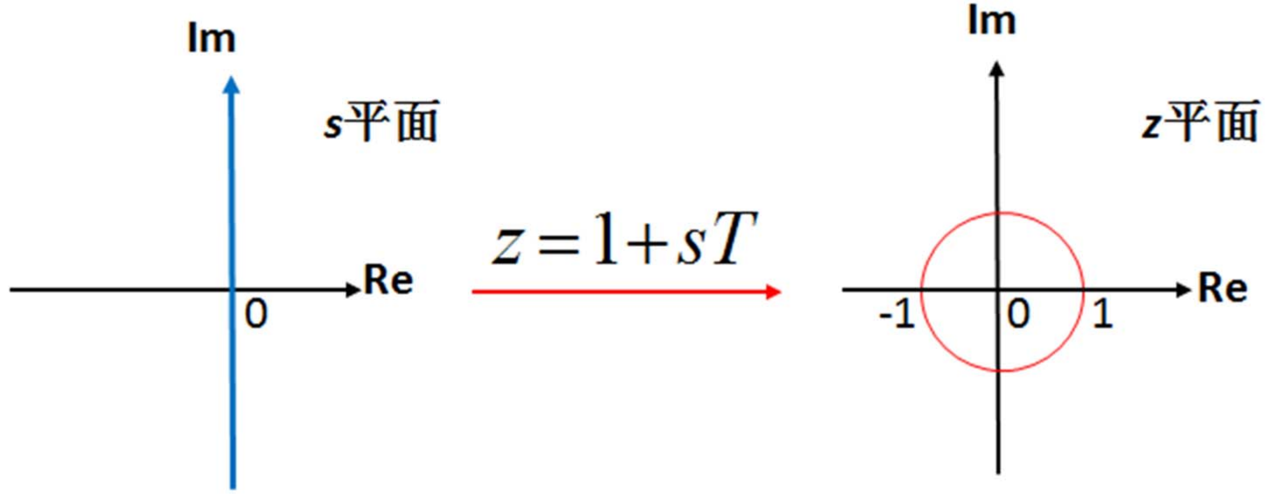


对s 左半平面，设 $s = -\sigma + j\omega$

$$z = 1 - \sigma T + j\omega T$$ ——z=1的左侧平面

（2）前向差分变换法

◆ 变换对系统性能的影响



- ◆ $D(s)$稳定，$D(z)$不一定稳定；
- ◆ $D(z)$会产生较大的畸变。

—— 一般不采用

2.3 双线性变换法

已知：
$$z = e^{Ts} = \frac{e^{\frac{Ts}{2}}}{e^{-\frac{Ts}{2}}}$$

将其中的 $e^{\frac{Ts}{2}}$ 和 $e^{-\frac{Ts}{2}}$ 展开成**Taylor**级数，并忽略高次项得：

$$z = \frac{1 + \frac{Ts}{2} + \cdots}{1 - \frac{Ts}{2} + \cdots} \approx \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s}$$

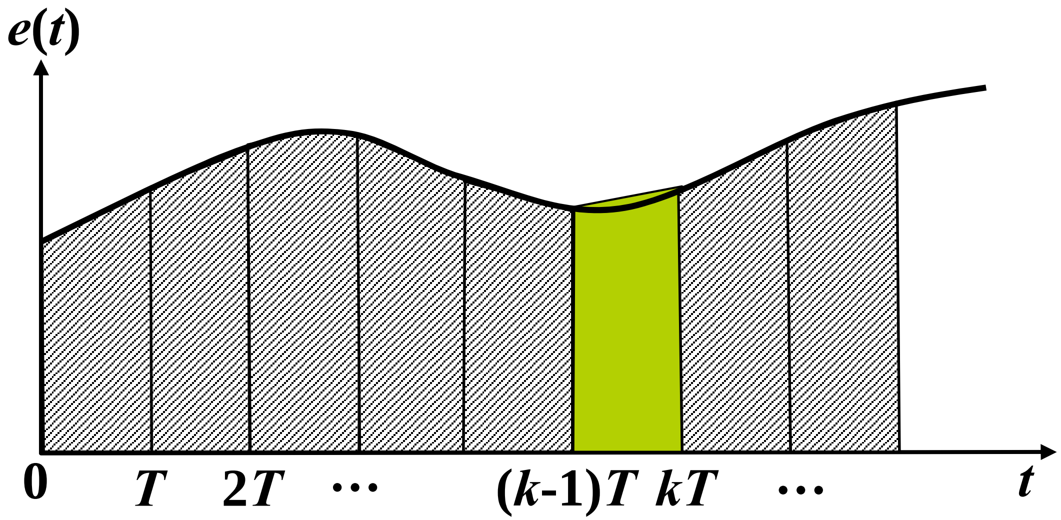
2.3 双线性变换法

- 双线性变换

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s}$$

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

——梯形近似法



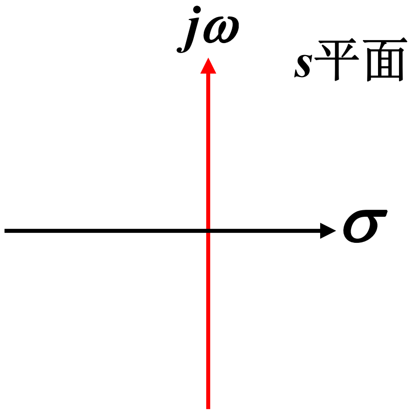
$$\int_{(k-1)T}^{kT} e(t)dt \approx \frac{T}{2}\left[e(kT) + e((k-1)T)\right]$$

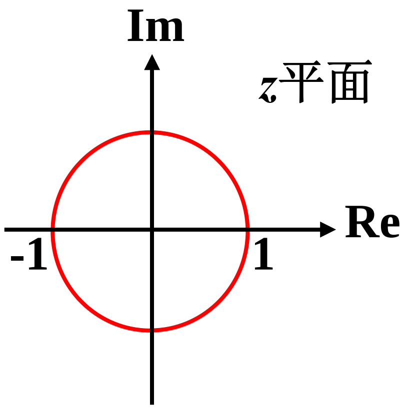
◆ 变换对系统性能的影响

$$s = j\omega$$

$$z = \frac{2/T + j\omega}{2/T - j\omega} = \frac{1 + j\frac{\omega T}{2}}{1 - \frac{j\omega T}{2}} = e^{2\arctan\frac{\omega T}{2}}$$

——*s* 平面虚轴映射在*z* 平面的的单位圆上





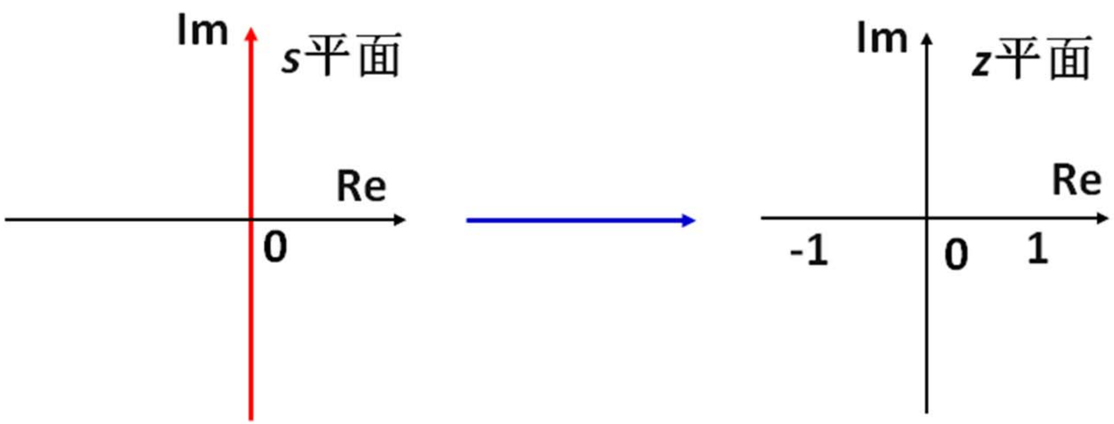
频率混叠？ ✓ 不混叠

◆ 变换对系统性能的影响

对s左半平面， $s = -\sigma + j\omega$

$$z = \frac{2/T - \sigma + j\omega}{2/T + \sigma - j\omega} \qquad |z| = \sqrt{\frac{(2/T - \sigma)^2 + \omega^2}{(2/T + \sigma)^2 + \omega^2}} < 1$$

——s 左半平面映射象在z 平面单位圆内



✓ 若$D(s)$稳定，则$D(z)$也稳定

◆ 变换对系统性能的影响

✓ 变换前后的频率发生畸变

将 $s = j\omega$ 和 $z = e^{j\omega_1 T}$ 代入 $s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

$$j\omega = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega_1 T}-1}{e^{j\omega_1 T}+1} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\frac{\omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\omega_1 T}{2}}}{e^{j\frac{\omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\omega_1 T}{2}}} = \frac{2}{T}\frac{2j\sin\frac{\omega_1 T}{2}}{2\cos\frac{\omega_1 T}{2}} = j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_1 T}{2}$$

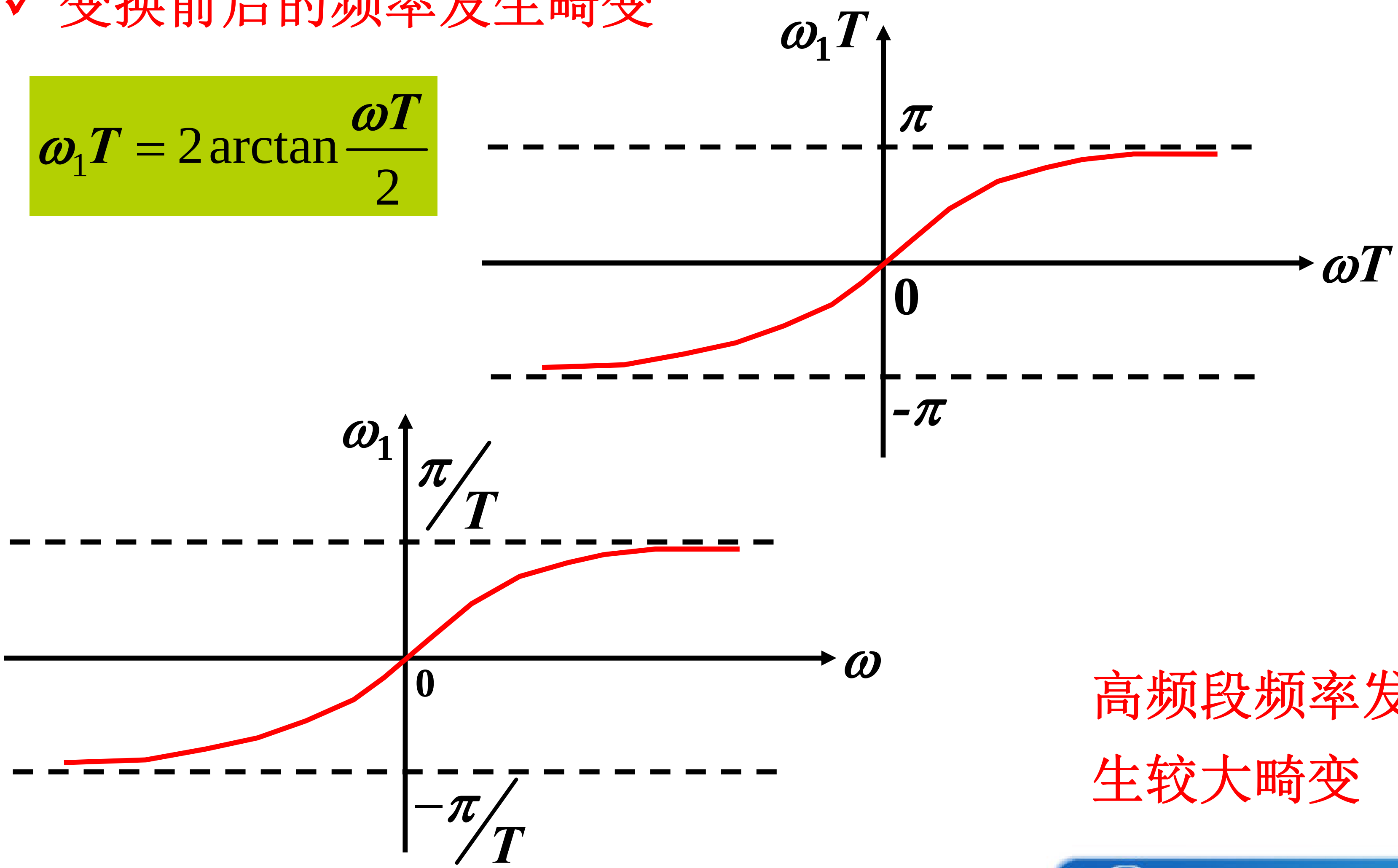
$$\omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_1 T}{2}$$

$$\omega_1 T = 2\arctan\frac{\omega T}{2}$$

◆ 变换对系统性能的影响

✓ 变换前后的频率发生畸变

$$\omega_1 T = 2\arctan\frac{\omega T}{2}$$



高频段频率发生较大畸变

2.3 双线性变换法

双线性变换的特点：

（1） $D(s)$稳定，则相应的$D(z)$也稳定；

（2）没有频率混叠现象；

（3）$D(z)$的频率响应在低频段与$D(s)$的频率响应相近，而在高频段频率响应有严重畸变；

（4）适用于对象的分子和分母已展开成多项式的形式。

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

例题：

已知 $D(s)=\dfrac{20(s+4)}{s+10}$ ，T=0.015s，用双线性变换法设计 $D(z)$ 及控制器的差分方程。

解：将 $s=\dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}$ 代入$D(s)$ 得

$$D(z)=\frac{20\left(\dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}+4\right)}{\dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}+10}=\frac{20\left[(1+2T)+(2T-1)z^{-1}\right]}{(1+5T)+(5T-1)z^{-1}}=\frac{19.1-17.96z^{-1}}{1-0.86z^{-1}}$$

$$D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{19.1-17.96z^{-1}}{1-0.86z^{-1}}$$

控制器的差分方程：

$\downarrow$ z反变换

$$u(k)=0.86u(k-1)+19.1e(k)-17.96e(k-1)$$

2.4 零极点匹配法

设 $$D(s)=\frac{K_s(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$ ，其中 $n\geq m$

◆ 通过z变换直接把$D(s)$在s平面上的零极点一一对应地映射到z平面上$D(z)$ 的零极点；

◆ 当$D(s)$的极点数比零点数多时，缺少的零点可视作在无穷远处存在零点，可用z平面上的 z=-1的零点匹配，则$D(z)$的分母和分子的阶次总是相等的。

◆ $D(z)$ 与$D(s)$ 在稳态时具有相同的增益，即

$$D(s)\big|_{s=0}=D(z)\big|_{z=1}$$

2.4 零极点匹配法

$$D(s)=\frac{K_s(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$ ，其中 $n \ge m$

◆ 按照 $z=e^{sT}$ ，用零极点匹配法设计***D(z)***

$$D(z)=\frac{K_z(z-e^{-z_1T})(z-e^{-z_2T})\cdots(z-e^{-z_mT})(z+1)^{n-m}}{(z-e^{-p_1T})(z-e^{-p_2T})\cdots(z-e^{-p_nT})}$$

$$=\frac{K_z(1-e^{-z_1T}z^{-1})(1-e^{-z_2T}z^{-1})\cdots(1-e^{-z_mT}z^{-1})(1+z^{-1})^{n-m}}{(1-e^{-p_1T}z^{-1})(1-e^{-p_2T}z^{-1})\cdots(1-e^{-p_nT}z^{-1})}$$

K_z的选择要使得$D(s)$ 与$D(z)$ 在稳态时具有相同的增益

$$D(s)\big|_{s=0}=D(z)\big|_{z=1}$$

2.4 零极点匹配法

为什么无穷远处存在零点，可以用 z 面上 z =-1的零点来匹配？

采用双线性变换，将 $s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 带入

$$D(s)=\frac{K_s(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

得$D(z)$ 分子分母同乘 $(1+z^{-1})^n$

则变换后$D(z)$ 分子中将出现 $(1+z^{-1})^{n-m}$ ，也就是说， $D(z)$ 零点与极点个数相等，新增的（n-m）个零点恰好是z =-1 。

——零极点匹配法同时具有双线性变换的效果

2.4 零极点匹配法

◆ 特点：

（1） 若$D(s)$稳定，则相应的$D(z)$也稳定；

（2）可获得双线性变换的效果，不存在频率混叠；

（3）不能保证$D(z)$的频率响应不畸变；

（4）适用于对象的分子和分母以零极点的形式出现。

◆ 例题

已知 $D(s)=\dfrac{20(s+4)}{s+10}$ ，T=0.015s ，用零极点匹配法设计数字控制器。

解：

$$D(z)=\frac{K_z\left(1-e^{-4T}z^{-1}\right)}{\left(1-e^{-10T}z^{-1}\right)}=\frac{K_z\left(1-e^{-4\times0.015}z^{-1}\right)}{1-e^{-10\times0.015}z^{-1}}=\frac{K_z\left(1-0.94z^{-1}\right)}{1-0.86z^{-1}}$$

求 K_z

$$\left.\frac{20(s+4)}{s+10}\right|_{s=0}=\left.\frac{K_z\left(1-0.94z^{-1}\right)}{1-0.86z^{-1}}\right|_{z=1}$$

K_z=18.67

$$D(z)=\frac{18.67\left(1-0.94z^{-1}\right)}{1-0.86z^{-1}}\qquad D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}$$

数字控制算法

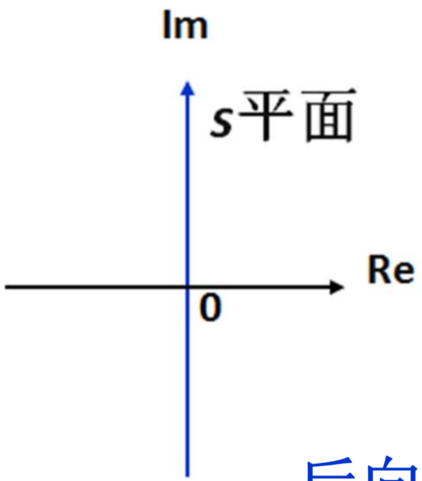
$$u(k)=0.86u(k-1)+18.67e(k)-17.55e(k-1)$$

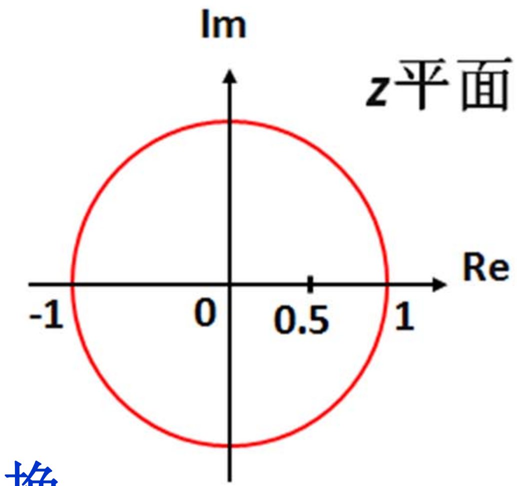
$$u(k)=0.86u(k-1)+19.1e(k)-17.96e(k-1)$$

双线性变换法

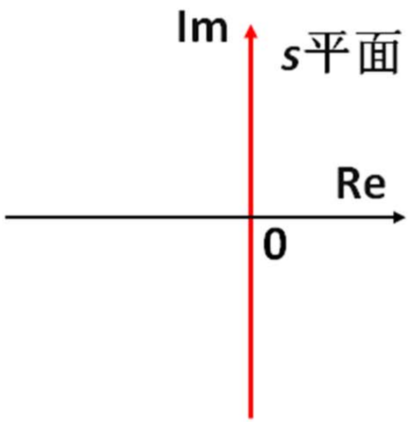
◆ 几种变换方法的比较

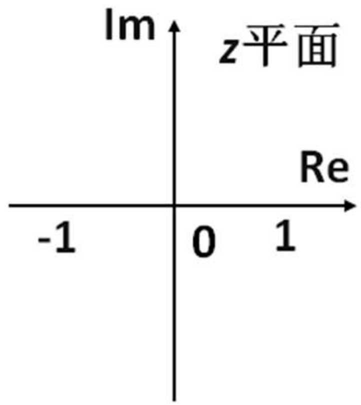
- 后向差分变换法
- 双线性变换法
- 零极点匹配法





后向差分变换





双线性变换

- ◆ 稳定性
- ◆ 复杂程度、适用形式
- ◆ 频率特性
- ◆ 综合效果

·教学单元2结束·