知识点Z5.3

离散傅里叶变换定义

主要内容：

1.离散傅里叶变换

2.离散傅里叶变换的基

3.离散傅里叶变换的物理意义

基本要求：

1.离散傅里叶变换的定义

2.离散傅里叶变换的基

5.2 离散傅里叶变换(DFT)

定义： 对于一个长度为N 的离散信号 $x[n],\quad n = 0, \mathrm{K}\ , N-1$

其离散傅里叶变换（**DFT**）为：

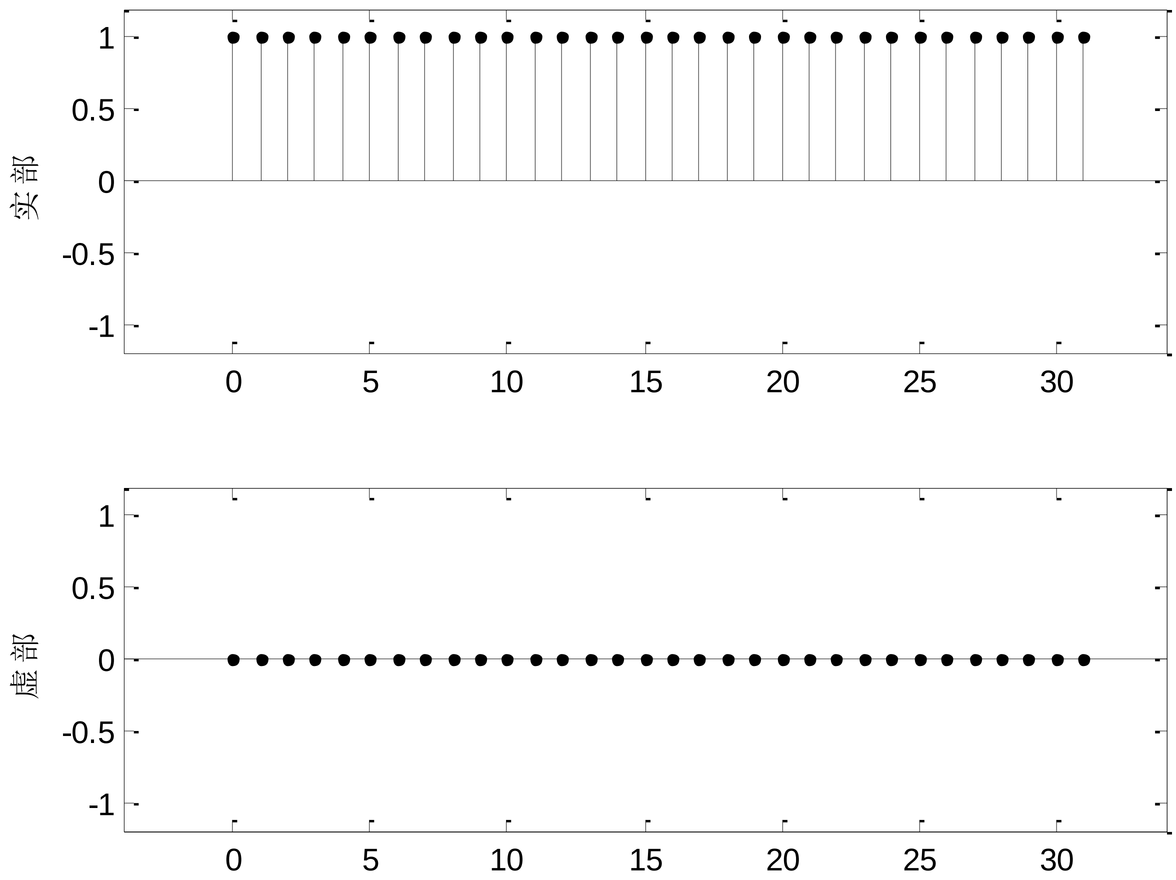
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \qquad k = 0, \mathrm{K}\ , N-1$$

其中： $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

可验证： $w^{(k)} = [1 \quad W_N^{-k} \quad W_N^{-2k} \quad \mathrm{K} \quad W_N^{-(N-1)k}]^T$ 构成N维复数空间 C^N 中的一组**正交基**，也是**DFT**的基函数。

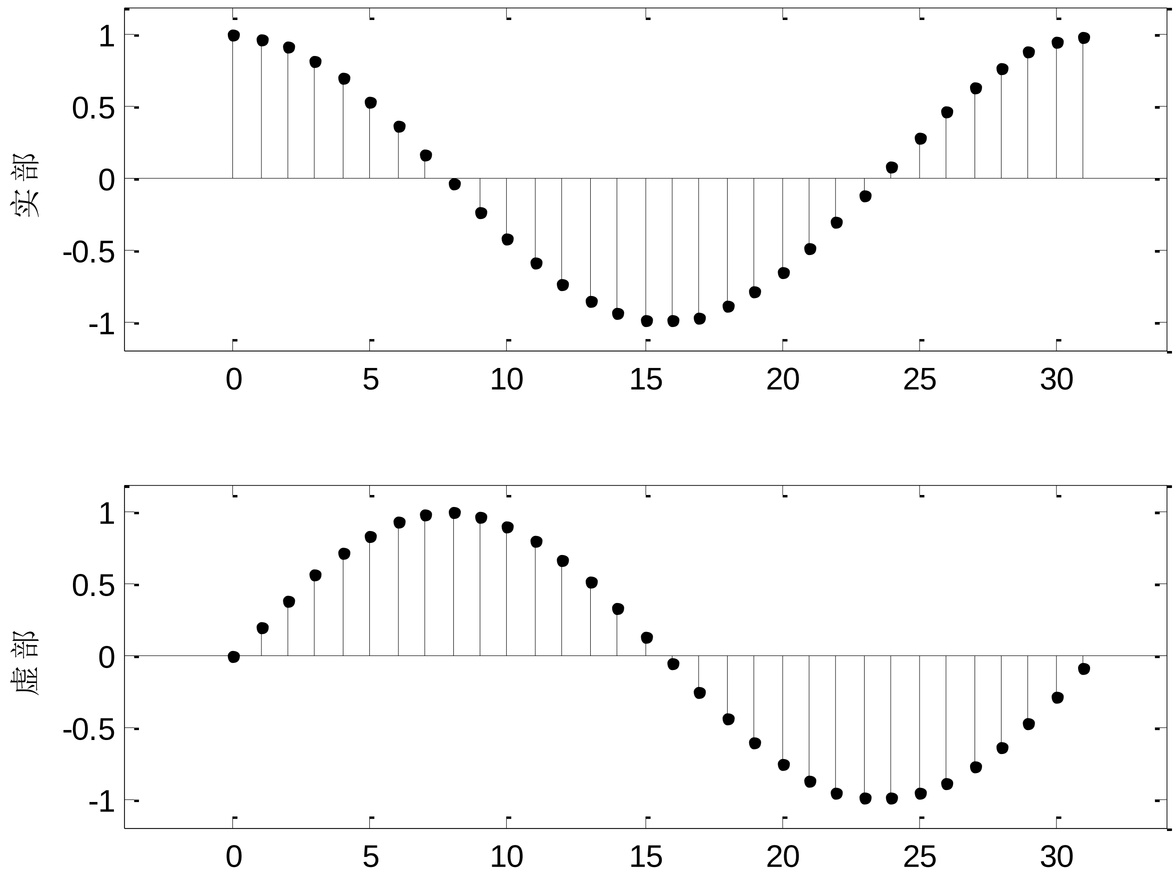
由于 $\left\| w^{(k)} \right\|^2 = N$，为了使其成为正交规范基，可以通过 $1/\sqrt{N}$ 的缩放因子而使其规范化。

5.2 离散傅里叶变换(DFT)



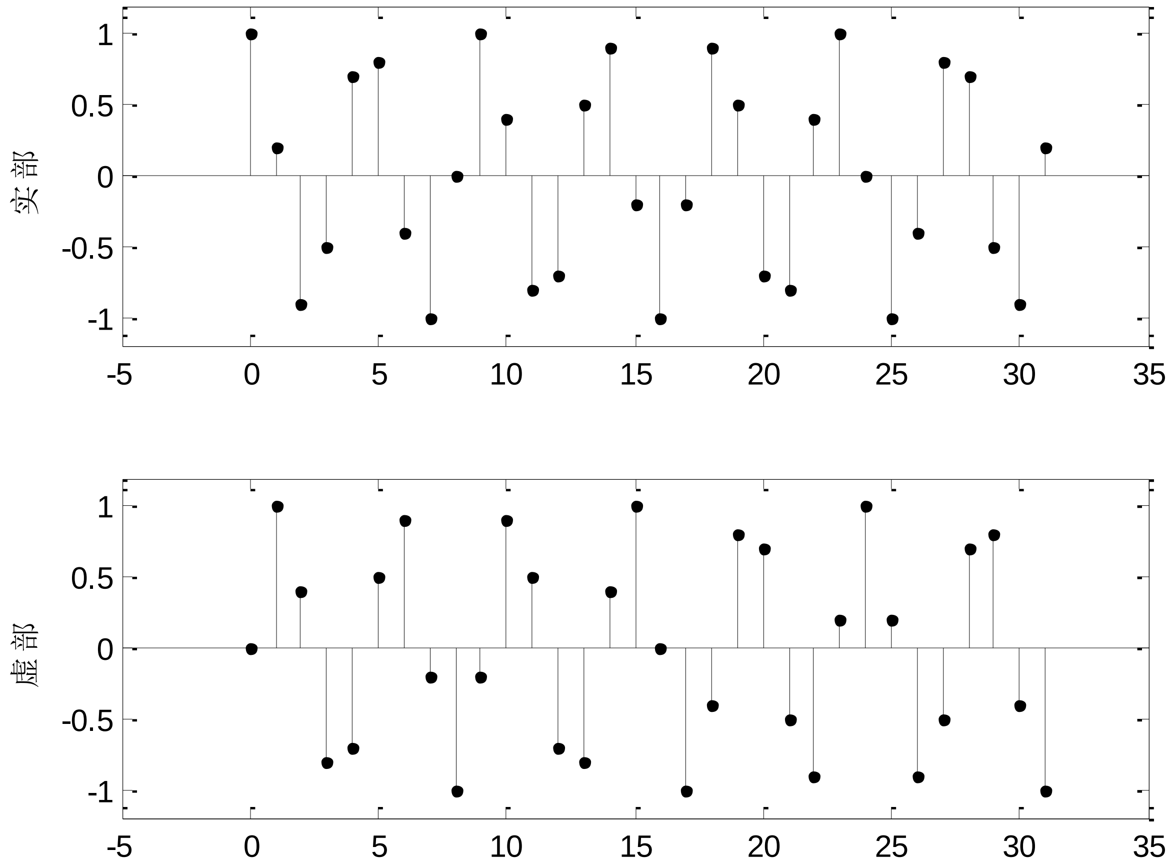
DFT基向量 $w^{(0)} \in C^{32}$

5.2 离散傅里叶变换(DFT)



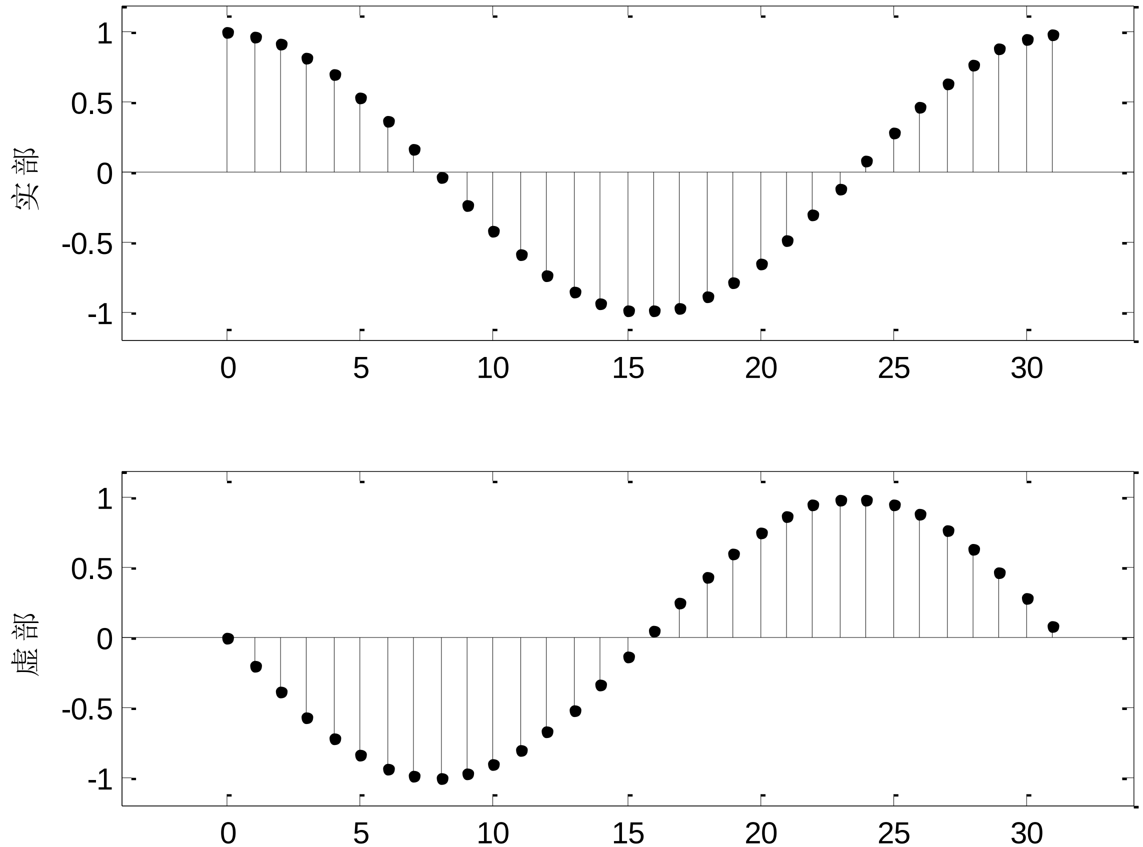
DFT基向量 $w^{(1)} \in C^{32}$

5.2 离散傅里叶变换(DFT)



DFT基向量 $w^{(7)} \in C^{32}$

5.2 离散傅里叶变换(DFT)



DFT基向量 $w^{(31)} \in C^{32}$

5.2 离散傅里叶变换(DFT)

由离散傅里叶变换的公式可知，信号在经过变换后的长度不变，但是由于**DFT**的基是复数，所以通常变换系数也为复数，因此可以从幅度和相位两个方面来分析**DFT**的特性。

离散傅里叶反变换：若 $X[k], k=0,\ldots,N-1$ 为长度为**N**的离散傅里叶变换系数序列，则称

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-nk}, \qquad n=0,\ldots,N-1$$

为 $X[k]$ 的离散傅里叶反变换（**IDFT**）。

离散傅里叶变换的物理意义

离散傅里叶反变换是将一个有限信号***x*[*n*]**表示成了***N***个离散正弦分量的加和，每个正弦分量的振幅和初始相位由系数***X*[*k*]**给出。

更直观地，可以将离散傅里叶反换描述为：

（1）设计一组包含N个复正弦分量信号发生器；

（2）将其中第***k***个正弦量发生器的频率设置为 $\frac{2\pi k}{N}$

（3）将其中第***k***个正弦量发生器的振幅设置为 $|X[k]|/N$

（4）将其中第***k***个正弦量发生器的相位设置为 $\angle X[k]$

（5）同时启动发生器，将它们的输出相加。按照先后顺序，前***N***个输出值为 $x[n]$，$n=0,\ldots,N-1$

5.2 离散傅里叶变换(DFT)

例 设信号

$$x_1[n]=\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right),n=0,\ldots,63 \quad x_2[n]=\cos\left(\frac{\pi}{8}n+\frac{\pi}{3}\right),n=0,\ldots,63$$

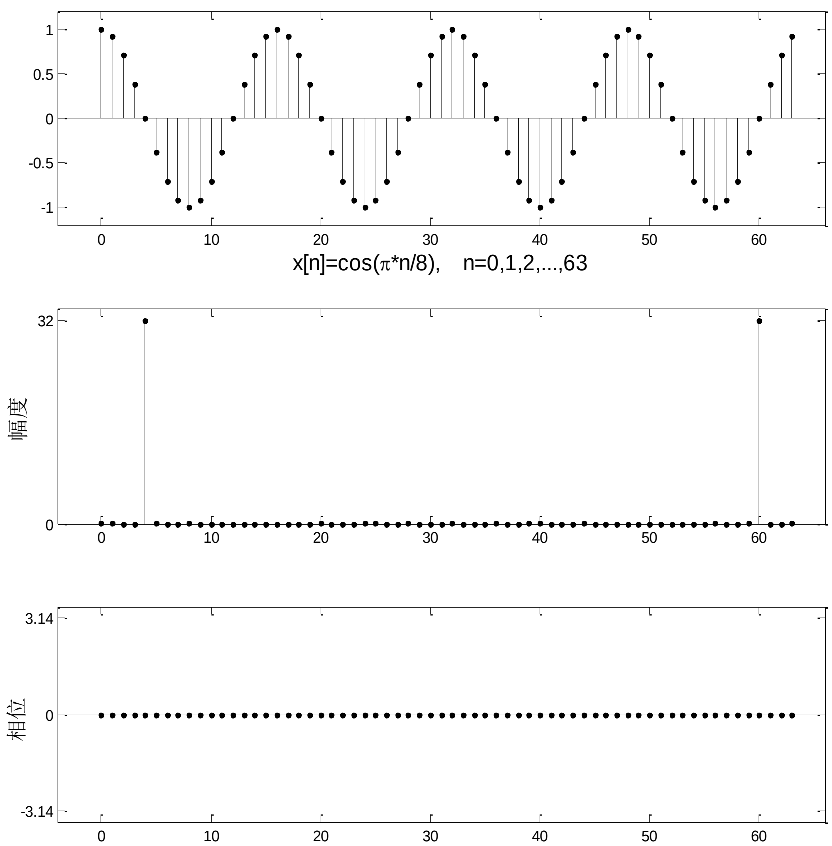
试分析两个信号离散傅里叶变换结果的差异。

解：

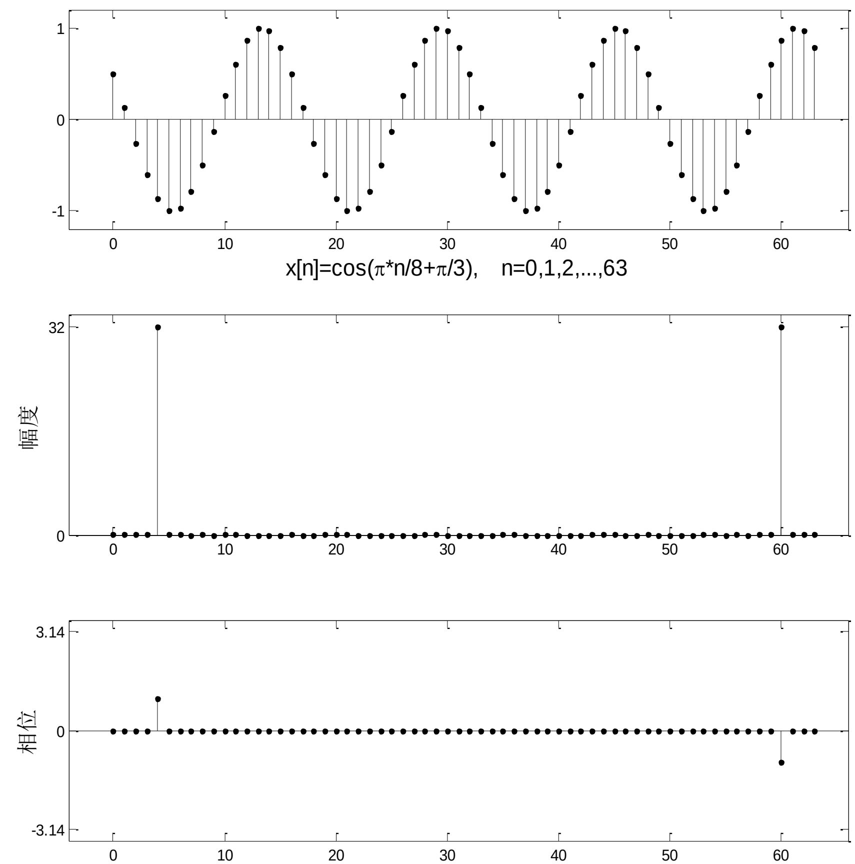
信号$\boldsymbol{x_1[n]}$是一正弦曲线，其频率与其基向量之一的 $\boldsymbol{\omega^{(4)}}$ 一致 (因为**π/8=4×2π/64**)，通过计算可知其变换系数只有$X[4]$和$X[60]$是非零的，而相位在全局皆为**0**。

其离散傅里叶变换结果如图所示。

5.2 离散傅里叶变换(DFT)



$x_1[n]$ 及其**DFT**



$x_2[n]$ 及其**DFT**

5.2 离散傅里叶变换(DFT)

从上述两图可以看出，两个信号的幅频特性相同，但相频特性有明显差异，这与时域表达式中两信号具有相同的角频率但初相不同的结果是一致的。

关于其它序列的离散傅里叶频谱的描述以及图形，详见扩展资源L5001。