

知识点K2.14

## 离散系统稳定性判据

主要内容:

- 1.系统函数与系统特性
- 2.离散系统稳定性判据

基本要求:

- 1.掌握系统函数与系统特性
- 2.掌握离散系统稳定性判据



# 离散系统稳定性判据

## K2.14 离散系统稳定性判据（因果系统）

(1) 离散系统稳定的时域充要条件：
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

(2) 离散系统稳定性的Z域充要条件：

若LTI离散系统的系统函数 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆，则系统为稳定系统。

若LTI离散因果系统稳定，要求其系统函数 $H(z)$ 的极点全部在单位圆内。



# 离散系统稳定性判据

**例1** 某离散系统的差分方程为

$$y(k) + 0.2y(k-1) - 0.24y(k-2) = f(k) + f(k-1)$$

- (1) 求系统函数 $H(z)$ ;
- (2) 讨论因果系统 $H(z)$  的稳定性;
- (3) 求单位样值响应 $h(k)$  ;
- (4) 求单位阶跃响应 $g(k)$ 。

**解:** (1) 将差分方程两边取  $z$  变换, 得

$$Y(z) + 0.2z^{-1}Y(z) - 0.24z^{-2}Y(z) = F(z) + z^{-1}F(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} - 0.24z^{-2}}$$



# 离散系统稳定性判据

(2)  $H(z)$  极点是0.4和-0.6，在单位圆内，故系统稳定。

(3) 将 $H(z)/z$ 进行部分分式展开，得到

$$H(z) = \frac{1.4z}{z-0.4} - \frac{0.4z}{z+0.6} \quad |z| > 0.6$$

$$h(k) = \left[ 1.4(0.4)^k - 0.4(-0.6)^k \right] \varepsilon(k)$$

(4) 求阶跃响应

$$Y(z) = F(z)H(z) = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)(z-0.4)(z+0.6)}$$

$$Y(z) = \frac{2.08z}{z-1} - \frac{0.93z}{z-0.4} - \frac{0.15z}{z+0.6} \quad |z| > 1$$

$$g(k) = \left[ 2.08 - 0.93(0.4)^k - 0.15(-0.6)^k \right] \varepsilon(k)$$



# 离散系统稳定性判据

## (3) 离散因果系统稳定性判定——朱里准则

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

要判断 $A(z)=0$ 的所有根的绝对值是否都小于1。

朱里列表：

第1行	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	.....	$a_2$	$a_1$	$a_0$
第2行	$a_0$	$a_1$	$a_2$	.....	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
第3行	$c_{n-1}$	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	.....	$c_1$	$c_0$	
第4行	$c_0$	$c_1$	$c_2$	.....	$c_{n-2}$	$c_{n-1}$	
第5行	$d_{n-2}$	$d_{n-3}$	$d_{n-4}$	.....	$d_0$		
第6行	$d_0$	$d_1$	$d_2$	.....	$d_{n-2}$		
.....							
第2n-3行	$r_2$	$r_1$	$r_0$				



# 离散系统稳定性判据

第3行按下列规则计算：

$$c_{n-1} = \begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix} \quad c_{n-2} = \begin{vmatrix} a_n & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad c_{n-3} = \begin{vmatrix} a_n & a_2 \\ a_0 & a_{n-2} \end{vmatrix} \quad \dots$$

一直到第 $2n-3$ 行，该行有3个元素。

朱里准则指出：

$A(z)=0$ 的所有根都在单位圆内的充要条件是：

$$(1) A(1) > 0 \quad (2) (-1)^n A(-1) > 0$$

$$(3) a_n > |a_0| \quad c_{n-1} > |c_0| \quad d_{n-2} > |d_0| \quad \dots \quad r_2 > |r_0|$$

对奇数行，其第1个元素必大于最后一个元素的绝对值。

**特例：**对二阶系统： $A(z)=a_2z^2+a_1z+a_0$ ，易得

$$A(1) > 0, A(-1) > 0, a_2 > |a_0|$$



## 离散系统稳定性判据

**例2** 已知:  $A(z)=4z^4-4z^3+2z-1$ , 判断系统稳定性。

**解:**

$$A(1)=1>0 \quad (-1)^4 A(-1)=5>0$$

**朱里列表:**

4	-4	0	2	-1
-1	2	0	-4	4
15	-14	0	4	
4	0	-14	15	
209	-210	56		

根据朱里准则:  $4>1$  ,  $15>4$  ,  $209>56$   
所以系统稳定。

