# 知识点K1.08

## 拉普拉斯变换的性质—时域和复频域的微积分特性

主要内容：

1.拉普拉斯变换的时域微积分性质

2.S域的微积分性质

基本要求：

1.掌握拉普拉斯变换的时域和复频域的微积分特性

2.结合性质计算信号的拉氏变换

## K1.08 拉普拉斯变换的性质—时域、复频域的微积分

### 一、时域微分特性

若 $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ , $\mathrm{Re}[s]>\sigma_0$,

则 $f'(t) \longleftrightarrow sF(s) - f(0_-)$

$f''(t) \longleftrightarrow s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$

若$f(t)$为因果信号，则 $f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^nF(s)$

例1 $\delta^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^n$

例2 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos 2t\varepsilon(t)] \longleftrightarrow \dfrac{s^2}{s^2+4}$

例3 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos 2t] \longleftrightarrow \dfrac{-4}{s^2+4}$

## 二、时域积分特性

若$f(t) \longleftrightarrow F(s)$ , Re[$s$]>$\sigma_0$, 则

$$\int_{0-}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow \frac{1}{s}F(s) \qquad \left(\int_{0-}^{t}\right)^n f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow \frac{1}{s^n}F(s)$$

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow s^{-1}F(s) + s^{-1}f^{(-1)}(0_-)$$

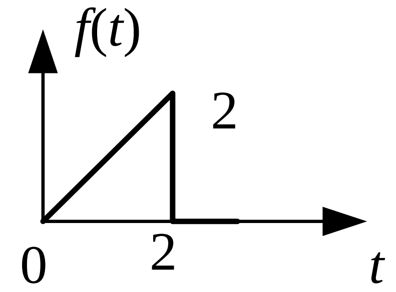
**例1** $t^2\varepsilon(t) \longleftrightarrow ?$

$$\int_0^t \varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = t\varepsilon(t)$$

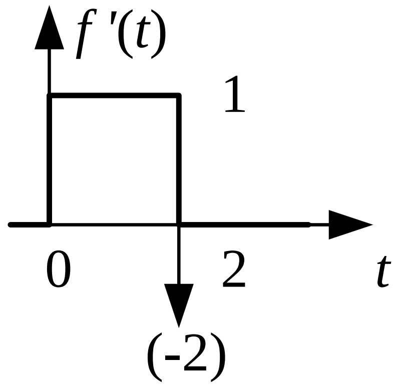
$$\left(\int_0^t\right)^2 \varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t x\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2}\varepsilon(t)$$

$$t^2\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{2}{s^3}$$

**例2** 已知因果信号$f(t)$如图，求$F(s)$。




**解：** 对$f(t)$求导得$f'(t)$，如图




$$\int_{0-}^{t} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(t) - f(0_-)$$

由于$f(t)$为因果信号，故 $f(0-)=0$

$$f(t) = \int_{0-}^{t} f'(x)\,\mathrm{d}x$$

由于 $f'(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)-2\delta(t-2)$

$$\longleftrightarrow F_1(s) = \frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s}) - 2\mathrm{e}^{-2s}$$

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{s}$$

若$f(t)$为因果信号，已知$f^{(n)}(t) \leftrightarrow F_n(s)$ 则 $f(t) \leftrightarrow F_n(s)/s^n$

## 三、s域微分和积分

若$f(t) \longleftrightarrow F(s)$ , Re[s]>$\sigma_0$, 则

$$(-t)f(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s} \qquad (-t)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$$

$$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^{\infty} F(\eta)d\eta$$

例1　$t^2e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow$ ?

$e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow 1/(s+2)$

$$t^2e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{1}{s+2}\right) = \frac{2}{(s+2)^3}$$

# 拉普拉斯变换的性质—时域和复频域的微积分特性

**例2** $\dfrac{\sin t}{t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow ?$

$$\sin t\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{\sin t}{t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \int_s^{\infty}\frac{1}{\eta^2+1}\mathrm{d}\eta = \arctan \eta\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\frac{1}{s}$$

**例3** $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2t}}{t} \longleftrightarrow ?$

$$1-\mathrm{e}^{-2t} \longleftrightarrow \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{1-e^{-2t}}{t} \longleftrightarrow \int_s^{\infty}(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_1+2})\mathrm{d}s_1 = \ln\frac{s_1}{s_1+2}\Big|_s^{\infty} = \ln\frac{s+2}{s}$$