知识点Z4.20

时移特性

主要内容：

傅里叶变换的时移特性

基本要求：

掌握信号时域平移对应的频域的变化

Z4.20时移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 则 $f(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0} F(j\omega)$,$t_0$为实常数。

若 $F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ 则 $f(t \pm t_0) \leftrightarrow |F(j\omega)| \cdot e^{j[\varphi(\omega) \pm \omega t_0]}$

说明：幅度频谱无变化，只影响相位频谱，相移±ωt$_0$。

证明：$\mathscr{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$

$$\overset{t-t_0=\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega\tau} \mathrm{d}\tau \ \mathrm{e}^{-j\omega t_0}$$

$$= \mathrm{e}^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

例1 $f(t)$如图所示，$F(j\omega) = ?$

解: $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

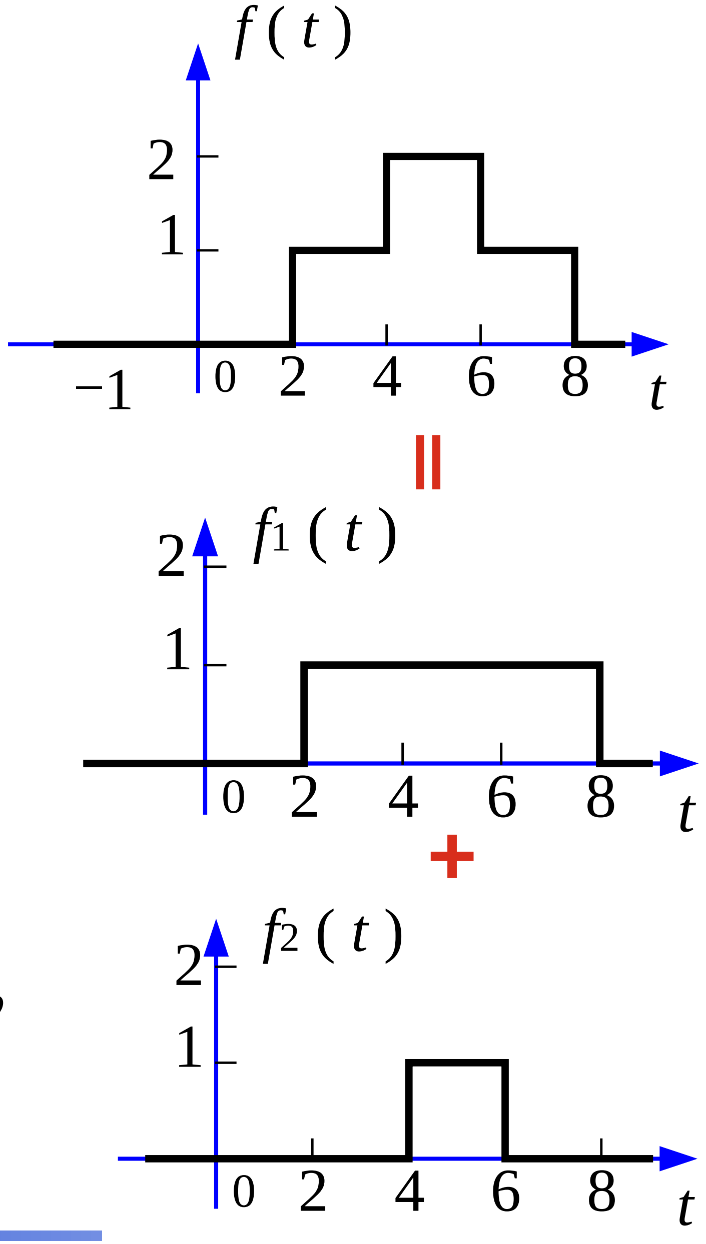
$$f_1(t) = g_6(t-5)$$

$$f_2(t) = g_2(t-5)$$

$$g_6(t-5) \longleftrightarrow 6\,\mathrm{Sa}(3\omega)\,e^{-j5\omega}$$

$$g_2(t-5) \longleftrightarrow 2\,\mathrm{Sa}(\omega)\,e^{-j5\omega}$$

$$\therefore F(j\omega) = [6\,\mathrm{Sa}(3\omega) + 2\,\mathrm{Sa}(\omega)]\,e^{-j5\omega}$$



例2 若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 求 $f(at-b) \leftrightarrow ?$

解：根据时移特性， $f(t-b) \leftrightarrow e^{-j\omega b}F(j\omega)$

根据尺度变换特性，

$$f(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}e^{-j\frac{\omega}{a}b}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

或者:

根据尺度变换特性，$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$

根据时移特性，

$$f(at-b) = f\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right] \leftrightarrow \frac{1}{|a|}e^{-j\omega\frac{b}{a}}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

例3 $f(t)=\dfrac{t^2-2t+3}{t^2-2t+2}$， **F(jω) = ?**

解: $\mathrm{e}^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$ α=1 $\mathrm{e}^{-|t|} \longleftrightarrow \dfrac{2}{1+\omega^2}$

根据对称性,

$\dfrac{2}{1+t^2} \longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{e}^{-|-\omega|}$ 整理 $\dfrac{1}{1+t^2} \longleftrightarrow \pi\,\mathrm{e}^{-|\omega|}$

所以,

$$f(t)=\frac{t^2-2t+3}{t^2-2t+2}=1+\frac{1}{(t-1)^2+1} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)+\pi e^{-|\omega|}e^{-j\omega}$$