知识点K1.02

收敛域

主要内容：

收敛域的确定

基本要求：

1.熟练求取信号的双边拉普拉斯变换

2.掌握收敛边界和收敛域

3.掌握信号及其拉氏变换与收敛域的相互关系

K1.02 收敛域

只有选择适当的σ 值才能使积分收敛，信号$f(t)$的双边拉普拉斯变换存在。

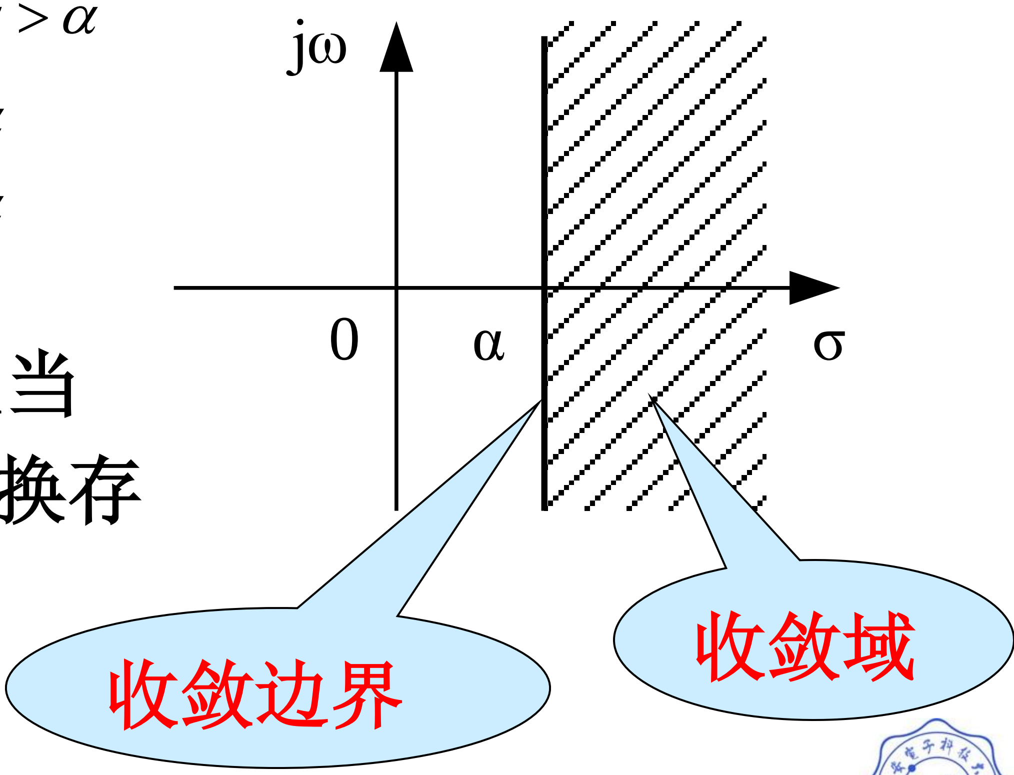
收敛域： 使 $f(t)$ 拉氏变换存在的σ取值范围。

收敛域

例1 因果信号$f_1(t)= e^{\alpha t}\varepsilon(t)$，求其拉普拉斯变换。

解：
$$F_{1b}(s)=\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}\,dt=\left.\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\right|_0^\infty=\frac{1}{(s-\alpha)}[1-\lim_{t\to\infty}e^{-(\sigma-\alpha)t}e^{-j\omega t}]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{s-\alpha}, & \mathrm{Re}[s]=\sigma>\alpha\\ \text{不定}, & \sigma=\alpha\\ \text{无界}, & \sigma<\alpha\end{cases}$$



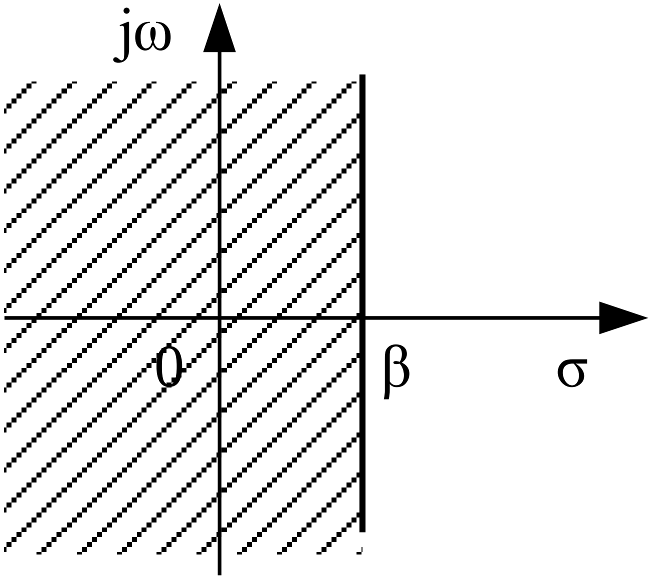
可见，对于因果信号，仅当$\mathrm{Re}[s]=\sigma>\alpha$时，其拉氏变换存在。收敛域如图所示。

例2 反因果信号$f_2(t)= e^{\beta t}\varepsilon(-t)$，求其拉普拉斯变换。

解:

$$F_{2b}(s)=\int_{-\infty}^{0}e^{\beta t}e^{-st}dt=\frac{e^{-(s-\beta)t}}{-(s-\beta)}\Bigg|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{-(s-\beta)}[1-\lim_{t\to-\infty}e^{-(\sigma-\beta)t}e^{-j\omega t}]$$

$$=\begin{cases}\text{无界}, & \mathrm{Re}[s]=\sigma>\beta\\ \text{不定}, & \sigma=\beta\\ \dfrac{1}{-(s-\beta)}, & \sigma<\beta\end{cases}$$



可见，对于反因果信号，仅当$\mathrm{Re}[s]=\sigma<\beta$时，其拉氏变换存在。收敛域如图所示。

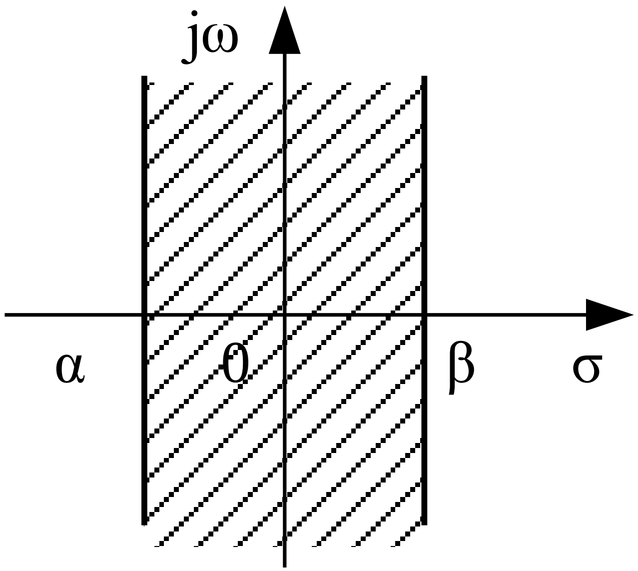
收敛域

例3 双边信号 $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} e^{\beta t}, & t < 0 \\ e^{\alpha t}, & t > 0 \end{cases}$

求其拉普拉斯变换。

解： 其双边拉普拉斯变换 $F_b(s)=F_{1b}(s)+F_{2b}(s)$

仅当$\beta>\alpha$时，其收敛域为 $\alpha<\mathrm{Re}[s]<\beta$ 的一个带状区域，如图所示。



例4 求下列信号的双边拉氏变换。

$f_1(t)= e^{-3t}\varepsilon(t) + e^{-2t}\varepsilon(t)$， $f_2(t)= - e^{-3t}\varepsilon(-t) - e^{-2t}\varepsilon(-t)$,

$f_3(t)= e^{-3t}\varepsilon(t) - e^{-2t}\varepsilon(-t)$

解： $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s) = \dfrac{1}{s+3} + \dfrac{1}{s+2}$ $\quad$ **Re[s]= σ > – 2**

$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]=\sigma < -3$$

$$f_3(t) \longleftrightarrow F_3(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \qquad -3 < \sigma < -2$$

可见，象函数相同，但收敛域不同。双边拉氏变换必须标出收敛域。

收敛域

结论：

1、对于双边拉普拉斯变换而言，$F_b(s)$和收敛域一起，可以唯一地确定 $f(t)$。即：

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} F_b(S)+\text{收敛域}$$

2、不同的信号可以有相同的$F_b(s)$，但收敛域不同。