教学模块6 基于状态空间模型的极点配置设计方法

教学单元3 状态可测时按极点配置设计控制规律

东北大学 · 关守平
guanshouping@ise.neu.edu.cn

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

3.1 设计原理说明

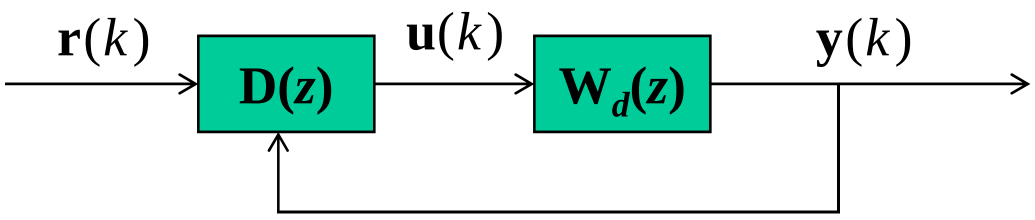


图 1

（1） $\mathbf{r}(k)=0$ ，为调节系统

（2） $\mathbf{r}(k)\neq 0$ ，为随动系统

首先研究调节系统，然后引入参考输入 **r(*k*)**，研究随动系统。

3.1 设计原理说明

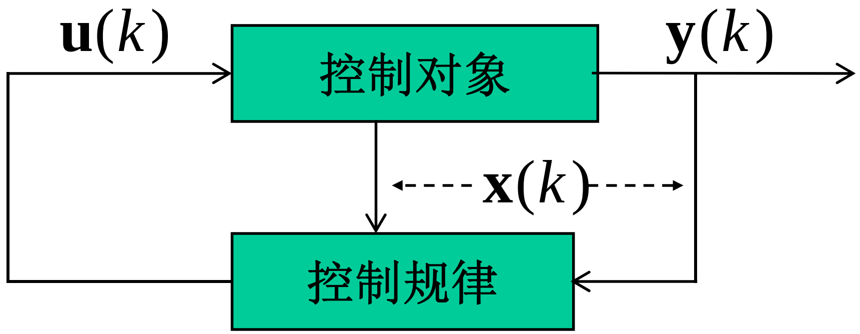


图 2

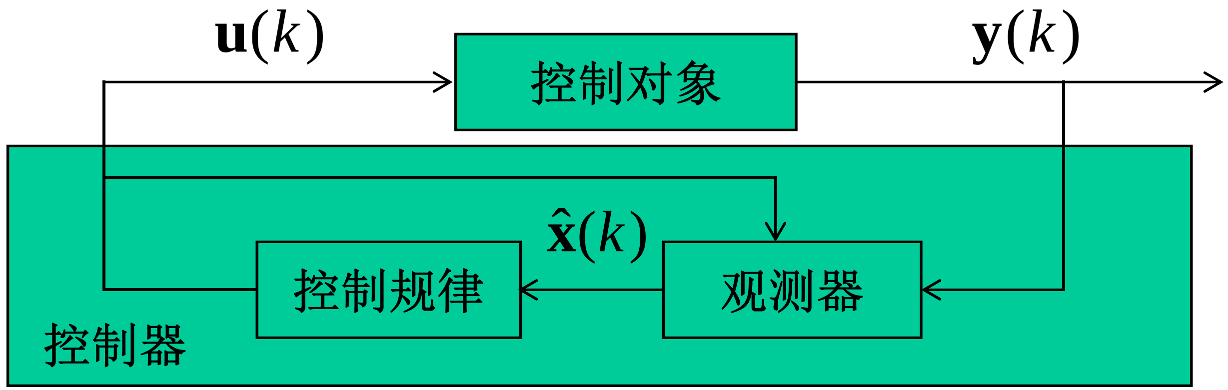


图 3

3.2 控制规律设计过程

在这一设计过程中，我们假设控制规律反馈的是实际对象的全部状态，而不是重构的状态。

被控对象的状态方程为：

$$\mathbf{x}(k+1) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k) \qquad (1)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^n$， $\mathbf{u} \in R^m$

设控制规律为线性状态反馈，即

$$\mathbf{u}(k) = -L\mathbf{x}(k) \qquad (2)$$

问题：设计反馈控制规律 L，以使得闭环系统具有所需得极点配置。

将（2）式代入（1）式，得到闭环系统状态方程为：

$$\mathbf{x}(k+1)=(F-GL)\mathbf{x}(k) \qquad （3）$$

闭环系统得特征方程为：

$$\left|zI-F+GL\right|=0 \qquad （4）$$

设给定所需要的闭环系统的极点为 $\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$ ，则闭环系统的特征方程为:

$$\begin{aligned}\alpha_c(z)&=(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n)\\&=z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\cdots+\alpha_n=0\end{aligned} \qquad （5）$$

于是，有 $$|zI - F + GL| = \alpha_c(z) \qquad （6）$$

上式展开，通过比较 **z** 的同次幂的系数，可以得到 **n** 个代数方程：

（**1**）对于单输入系统，可以得到**L**的唯一解；

（**2**）对于多输入系统（**m>1**），反馈系数阵**L**共有**mn**个未知数，而总共只有**n**个方程，因此需要附加其他限制条件（如输出解耦、干扰解耦等），才能完全确定控制规律**L**。

可以证明，对于任意极点配置，**L**具有唯一解的充分必要条件是控制对象完全能控，即

$$rank\begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = n \qquad (7)$$

物理意义：只有当系统的所有状态都是能控的，才能通过适当的状态反馈控制，使得闭环系统的极点放置到任意指定的位置上。

问题：

（1）如何根据对系统性能的要求来合适地给定闭环系统的极点。

（2）如何计算L。

问题（1）的解决：

1）由s平面给出极点，由 $z_i = e^{s_i T}(i=1,2,\cdots,n)$ 求出 z 平面中的极点。

2）将所有极点放置在原点，即令 $\alpha_c(z) = z^n$ ，从而变成最小拍控制。

3）对于二阶系统，由 $\delta\%$ 和 T_s 给出阻尼系数 ξ 和无阻尼震荡频率 ω_n，再求出 $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$ ，从而得到 z 平面极点分布。

4）高阶系统采用二阶模型，即根据性能指标的要求给出一对主导极点，将其余极点放置在离主导极点很远的位置。

问题（2）的解决：

1）直接展开（6）式左边行列式，通过方程两边z系数比较求得L中的各个元素。

$$\left|zI-F+GL\right|=\alpha_c(z) \qquad (6)$$

2）通用求解方法。

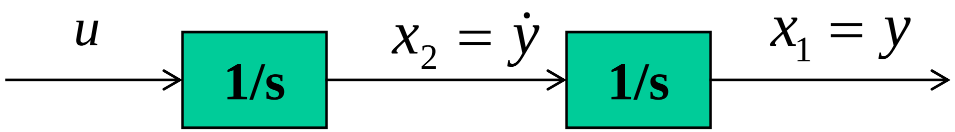
$$L = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1][G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G]^{-1}\alpha_c(F) \qquad (8)$$

该公式通常称为阿克曼（**Ackermann**）公式。

注：阿克曼公式推导过程见课本。

例题讲解

例 3.1



$$\xi = 0.5, \quad \omega_n = 3.6, \quad T = 0.1s$$

要求按调节系统，用极点配置设计方法设计状态反馈控制规律。

解：（一）求离散化状态方程

由图，控制对象状态方程为：$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$

其中 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

离散化状态方程为：$\mathbf{x}(k+1)=F\mathbf{x}(k)+G\mathbf{u}(k)$

利用级数求和法，得到

$$F=e^{AT}=\begin{bmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad G=\int_0^T e^{At}dtB=\begin{bmatrix}0.005\\ 0.1\end{bmatrix}$$

（二）闭环系统特征方程

s平面的两个极点为： $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n = -1.8 \pm j3.12$

利用 $z = e^{sT}$ ，求得 **z** 平面得两个极点为：

$$z_{1,2} = 0.835e^{\pm j17.9^{\circ}}$$

于是，闭环系统得特征方程为：

$$\alpha_c(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - 1.6z + 0.7 \qquad \text{（9）}$$

（三）反馈控制规律

设状态反馈控制规律为： $L=\begin{bmatrix}L_1 & L_2\end{bmatrix}$

则闭环系统特征方程为：

$$\alpha_c(z)=\left|zI-F+GL\right|=\left|z\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0.1\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.005\\0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_1 & L_2\end{bmatrix}\right|$$

$$=z^2+(0.1L_2+0.005L_1-2)z+0.005L_1-0.1L_2+1 \qquad \text{（10）}$$

$$\alpha_c(z)=(z-z_1)(z-z_2)=z^2-1.6z+0.7$$

式（9）

（**9**）、（**10**）两式比较，得到：

$$\begin{cases} 0.1L_2 + 0.005L_1 - 2 = -1.6 \\ 0.005L_1 - 0.1L_2 + 1 = 0.7 \end{cases}$$

解方程组，得到 $L_1 = 10, \quad L_2 = 3.5$

于是得到 $L = \begin{bmatrix} 10 & 3.5 \end{bmatrix}$

（四）利用阿克曼公式直接求解：

$$
\begin{aligned}
L &= [0 \quad 1][G \quad FG]^{-1}\alpha_c(F) \\
&= [0 \quad 1][G \quad FG]^{-1}(F^2 - 1.6F + 0.7I) \\
&= [10 \quad 3.5]
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

$$
L = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1][G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G]^{-1}\alpha_c(F)
$$

·教学单元三结束·