

知识点Z4.34

傅里叶级数分析法

主要内容:

傅里叶级数分析法

基本要求:

掌握周期信号激励下利用傅里叶级数进行LTI系统分析的方法



Z4.34 傅里叶级数分析法

对周期输入信号，还可用傅里叶级数分析法：

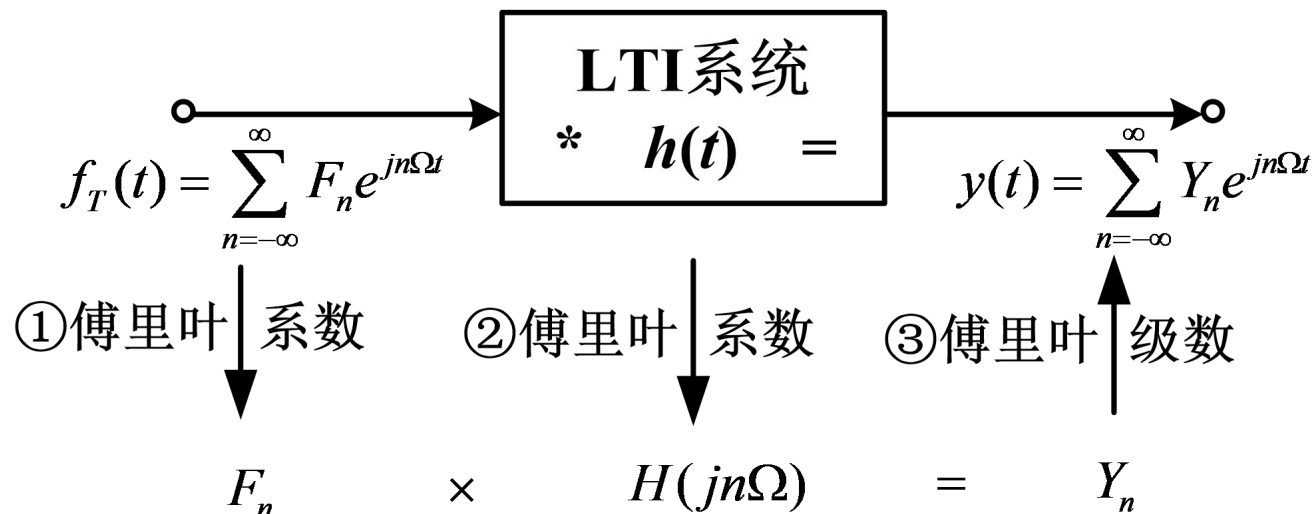
周期信号的指数形式傅里叶级数：

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

系统零状态响应：

$$y(t) = h(t) * f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \left[h(t) * e^{jn\Omega t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{F_n H(jn\Omega)}_{Y_n} e^{jn\Omega t}$$





傅里叶级数分析法步骤:

第一步，求周期输入信号 $f_T(t)$ 的傅里叶系数 F_n ；

第二步，求系统频率响应 $H(jn\Omega) = H(j\omega)|_{\omega=n\Omega}$ ；

第三步，求零状态响应 $y(t)$ 的傅里叶系数 $\mathbf{Y_n = F_n H(jn\Omega)}$ ；

第四步，求傅里叶级数展开式 $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\Omega) e^{jn\Omega t}$ 。



若周期信号采用三角形式傅里叶级数表示:

$$f_T(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

设系统频率响应函数:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

$$H(jn\Omega) = |H(jn\Omega)| e^{j\theta(n\Omega)} = H(j\omega) \Big|_{\omega=n\Omega}$$

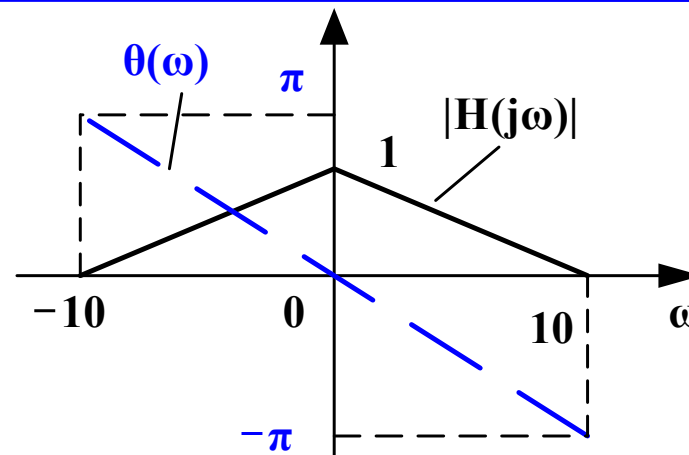
则可推导出

$$y(t) = \frac{A_0}{2} \underbrace{H(0)}_{\text{直流增益}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{|H(jn\Omega)|}_{\text{幅值相乘}} \cos[n\Omega t + \underbrace{\phi_n + \theta(n\Omega)}_{\text{相位相加}}]$$



例：某LTI系统的 $|H(j\omega)|$ 和 $\theta(\omega)$ 如图,若 $f(t)=2+4\cos(5t)+4\cos(10t)$, 求系统的响应。

解法一：用傅里叶变换分析法



$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

$$F(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + 4\pi[\delta(\omega+5) + \delta(\omega-5)] + 4\pi[\delta(\omega+10) + \delta(\omega-10)]$$

$$Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)$$

$$\begin{aligned} &= 4\pi\delta(\omega) \cdot 1 + 4\pi[\delta(\omega+5) \cdot j0.5 + \delta(\omega-5) \cdot -j0.5] \\ &\quad + 4\pi[\delta(\omega+10) \cdot 0 + \delta(\omega-10) \cdot 0] \\ &= 4\pi\delta(\omega) + 2j\pi[\delta(\omega+5) - \delta(\omega-5)] \end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)] = 2 + 2\sin 5t$$



解法二：用三角傅里叶级数分析法

$$f(t) = 2 + 4\cos(5t) + 4\cos(10t)$$

$f(t)$ 的基波角频率 $\Omega = 5\text{rad/s}$

$$f(t) = 2 + 4\cos(\Omega t) + 4\cos(2\Omega t)$$

$$H(0) = 1, \quad H(j\Omega) = 0.5e^{-j0.5\pi}, \quad H(j2\Omega) =$$

$$0$$

$$y(t) = \frac{A_0}{2} H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n |H(jn\Omega)| \cos[n\Omega t + \phi_n + \theta(n\Omega)]$$

$$= 2 \times 1 + 4 \times 0.5 \cos(\Omega t - 0.5\pi) + 4 \times 0$$

$$= 2 + 2\sin 5t$$

