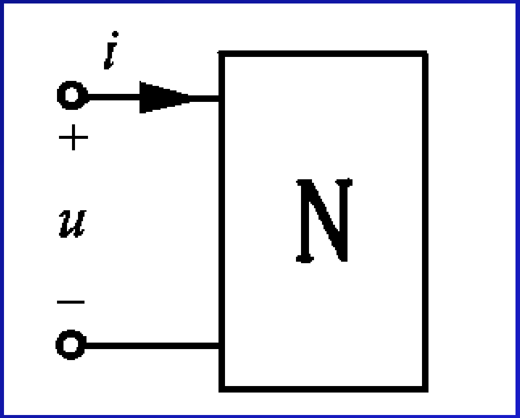
正弦稳态电路的功率

本节讨论正弦稳态二端网络的瞬时功率、平均功率(有功功率)、无功功率、视在功率、复功率和功率因数。

正弦稳态二端网络向可变负载传输最大功率的问题。

瞬时功率

关联参考方向下，瞬时吸收功率为：



$$p(t)=u(t)i(t)$$

正弦稳态时，端口电压和电流是同频率正弦量，即设：

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{u}})=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{u}})$$

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})$$

瞬时功率

$$p(t)=u(t)i(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{u}})I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})$$

（积化和差公式 $\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$）

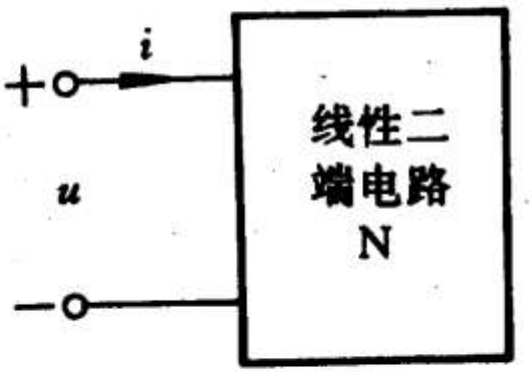
$$=\frac{1}{2}U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}[\cos(\varphi_{\mathrm{u}}-\varphi_{\mathrm{i}})+\cos(2\omega t+\varphi_{\mathrm{u}}+\varphi_{\mathrm{i}})]$$

$$=\boxed{UI\cos\theta_{Z}}+\boxed{UI\cos(2\omega t+2\varphi_{\mathrm{u}}-\theta_{Z})}$$

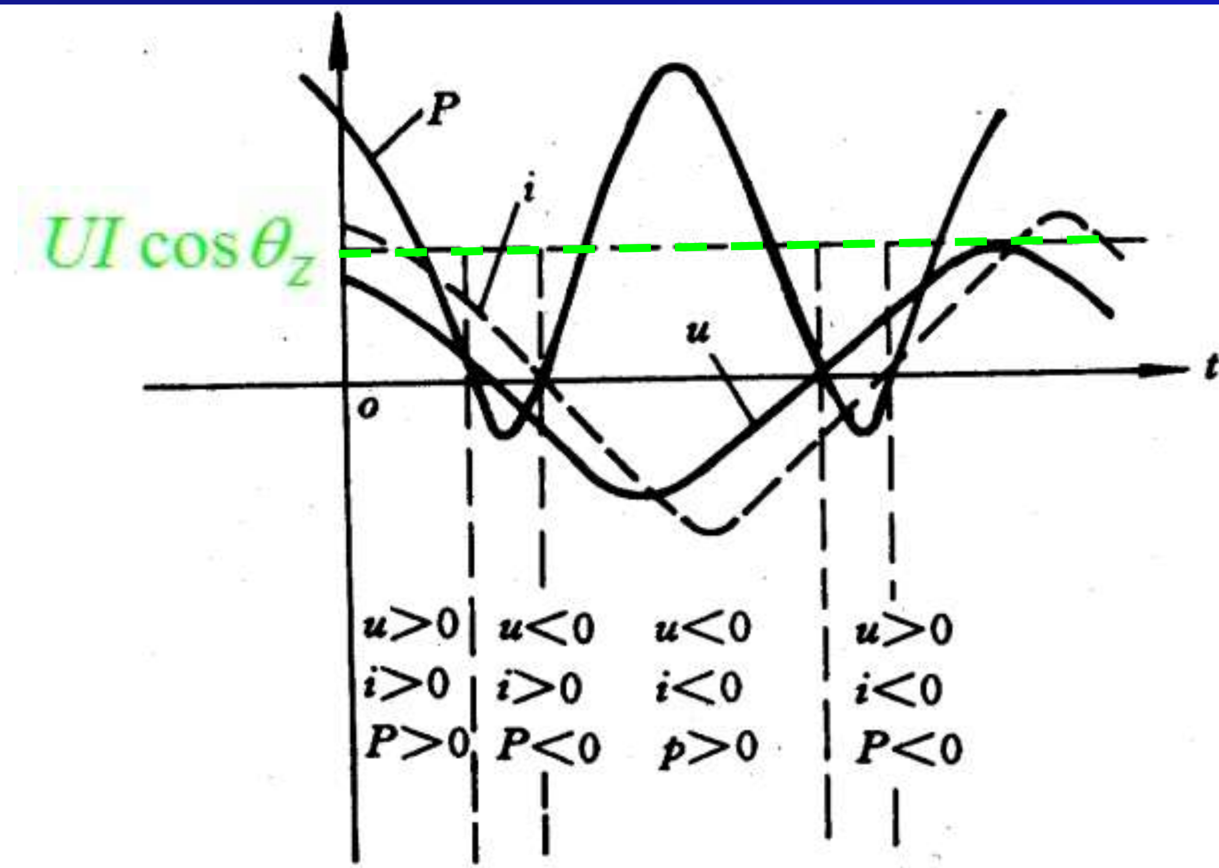
恒定分量

正弦分量

二端电路的瞬时功率波形

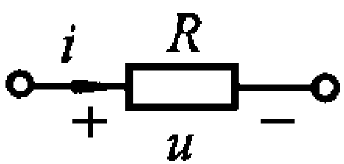


(a)

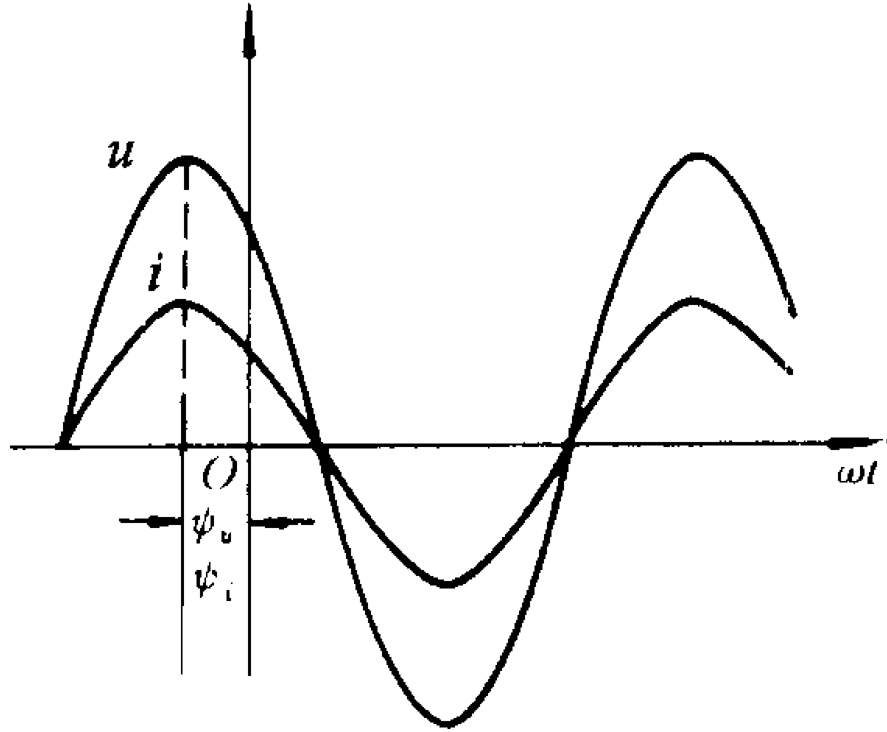


(b)

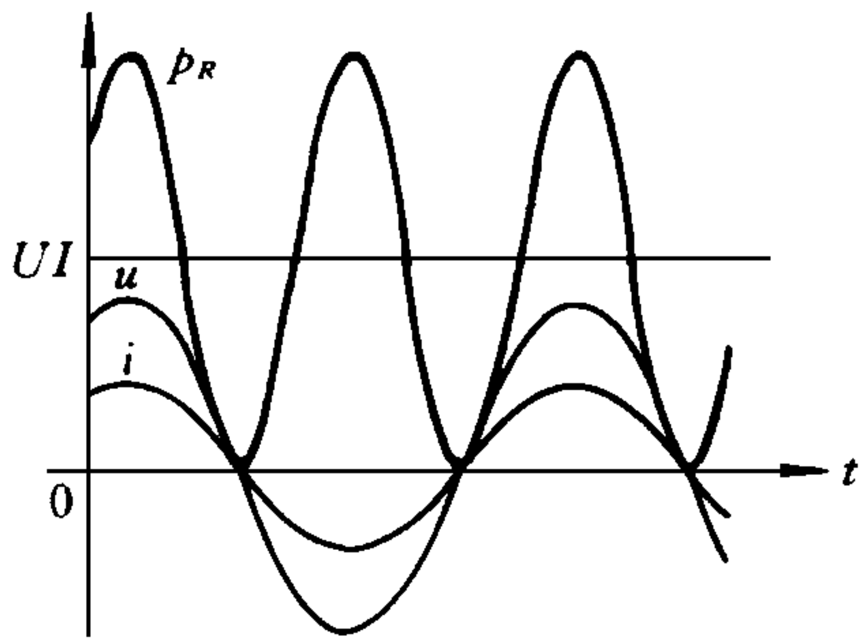
$$p = ui = UI\cos\theta_Z + UI\cos(2\omega t + 2\varphi_{\mathrm{u}} - \theta_Z)$$

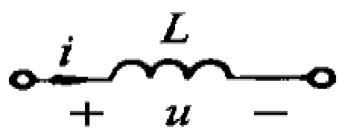


(a)

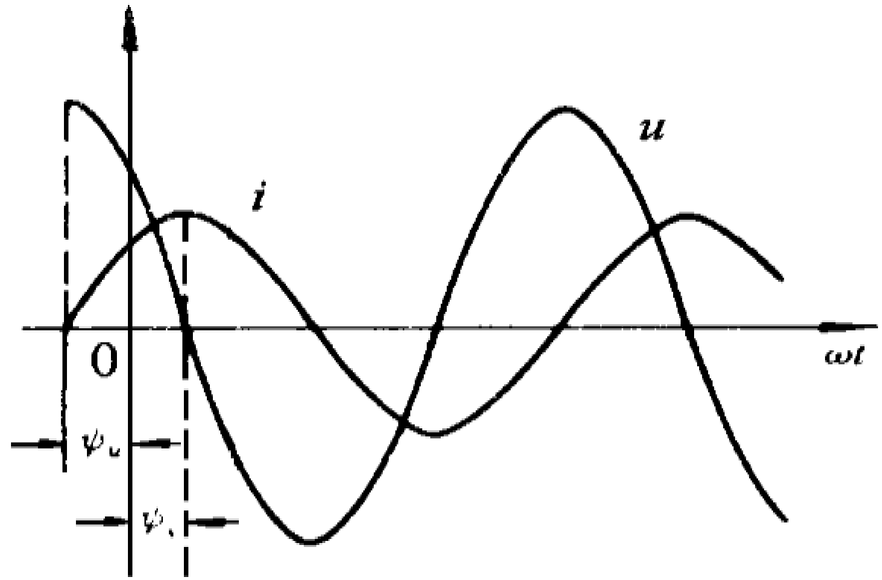


(b)

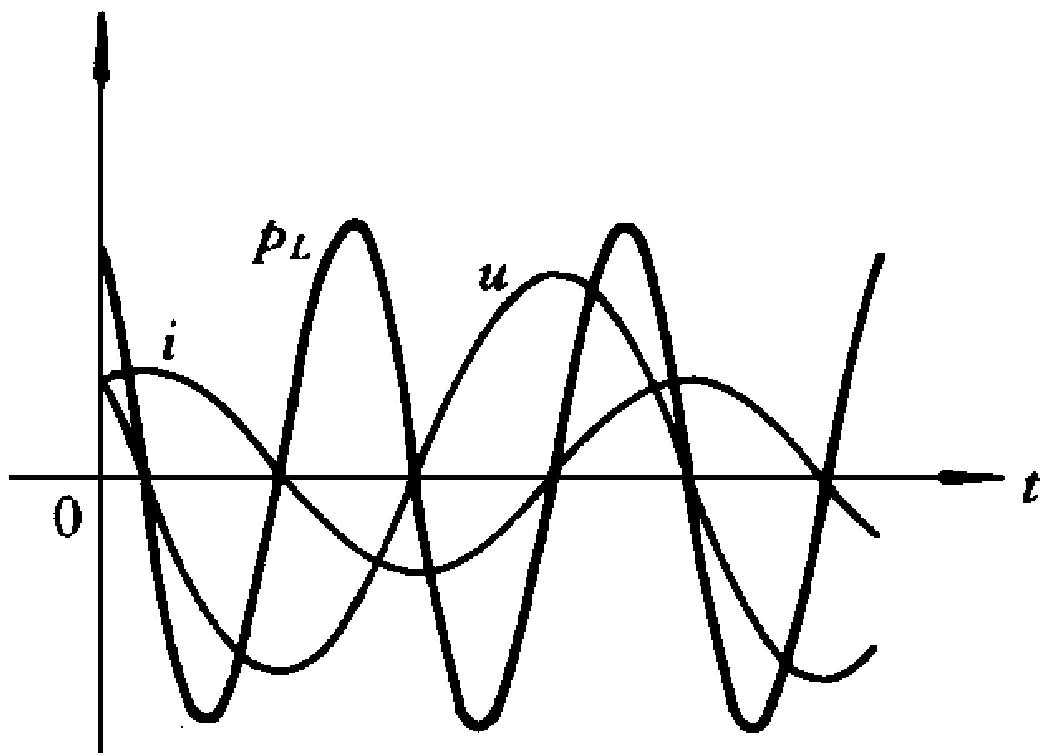


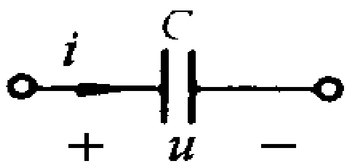


(a)

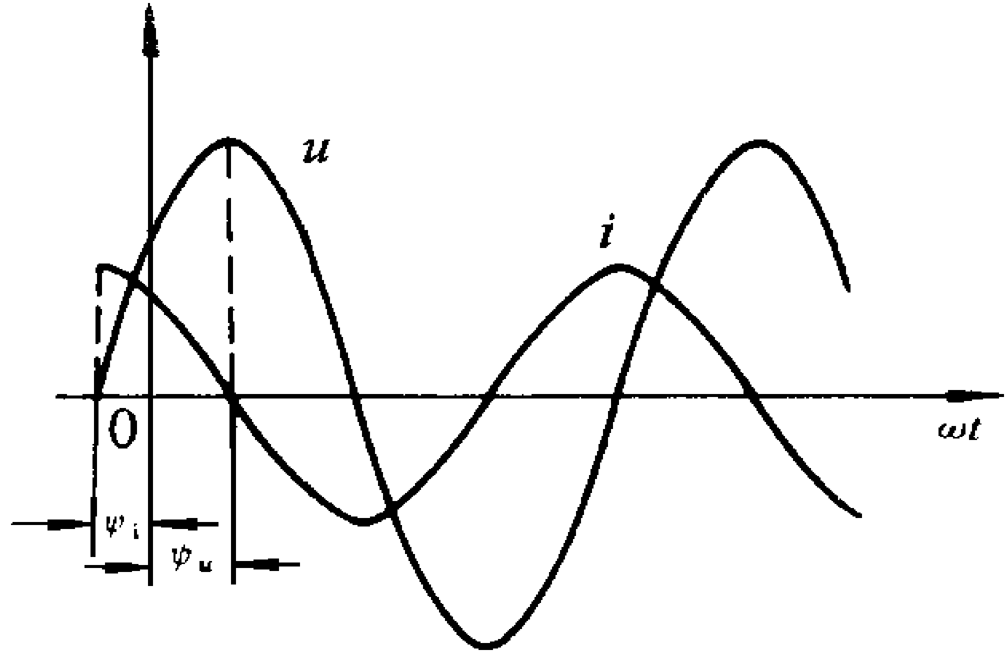


(b)

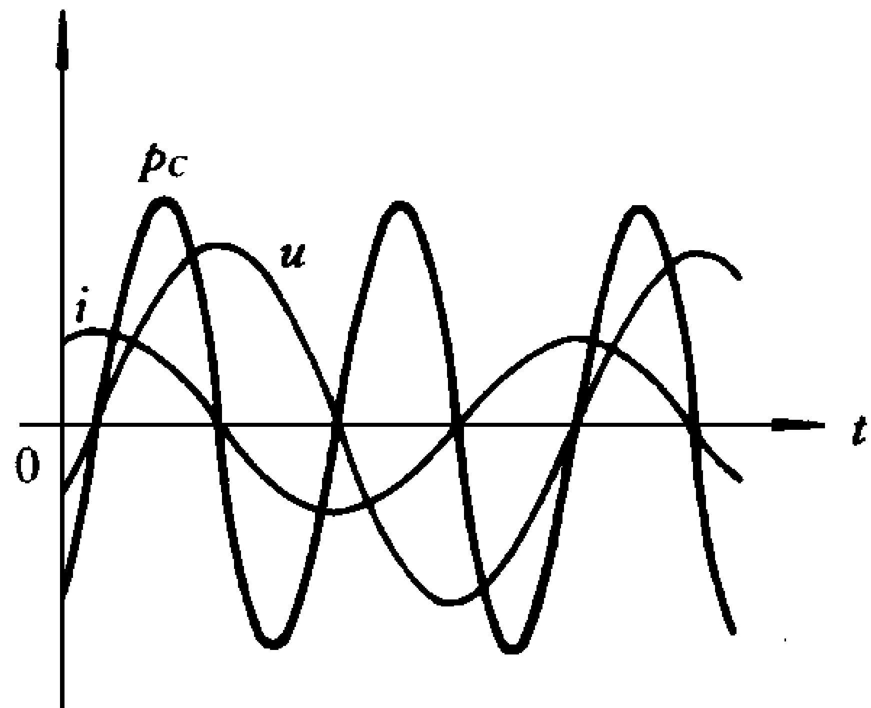




(a)



(b)



平均功率（有功功率）

一个周期内瞬时功率的平均值简称**功率**。

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T [UI\cos\theta_Z+UI\cos(2\omega t+\varphi_\mathrm{u}+\varphi_\mathrm{i})]\mathrm{d}t$$

$$=UI\cos\theta_Z$$

✓平均功率由什么决定？

平均功率（有功功率）

1) 网络等效阻抗为一个电阻：

$$P = UI\cos 0^o = I^2R = \frac{U^2}{R}$$

① 与直流电路相同；
② 电阻始终吸收功率和消耗能量。

● 平均功率（有功功率）

2) 网络等效阻抗为一个电抗：

$$P = UI\cos 90^{o} = 0$$

① 电感或电容半个周期吸收功率存储能量，半个周期发出功率释放它所获得的全部能量。

② 电感和电容不消耗能量，它们是无源元件。

平均功率（有功功率）

3) 任意二端网络：

$$P = UI\cos\theta_Z$$

设：$Z = R + jX \qquad Y = G + jB$

$$P = UI\cos\theta_Z = I^2R = U^2G$$

① 电阻分量消耗的平均功率，就是网络吸收的平均功率；

② 注意 $P \neq \dfrac{I^2}{G} \qquad P \neq \dfrac{U^2}{R}$

视在功率

$S = UI$ 单位：伏安(VA)

表示一个电气设备的最大容量(标称值)，是单口网络可吸收的平均功率的最大值。

例如我们说某个发电机的容量为100kVA，而不说其容量为100kW

● 功率因数

网络吸收的平均功率P与$\cos\theta_Z$的大小密切相关，$\cos\theta_Z$表示功率的利用程度，称为功率因数：

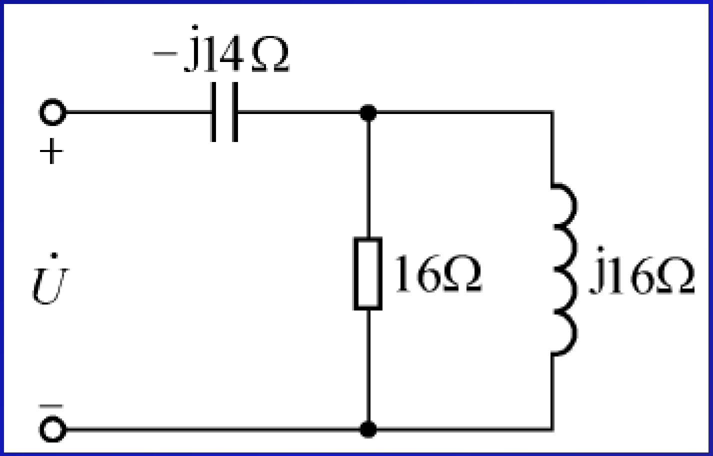
$$pf = \cos\theta_Z = \frac{P}{S}$$

$\theta_Z = \varphi_u - \varphi_i$：功率因数角

✓当二端网络为无源元件R、L、C组成时？

例24（P218例7-19） 电路相量模型如图所示，已知端口电压的有效值感性负载接在U=100V, 试求该二端网络的P、Q、S、$\tilde{S}$和pf

解：设端口电压相量为



$$\dot{U}=100\angle 0^{o}V$$

二端网络的等效阻抗

$$Z=-j14+\frac{16\times(j16)}{16+j16}=8-j6=10\angle-36.9^{0}$$

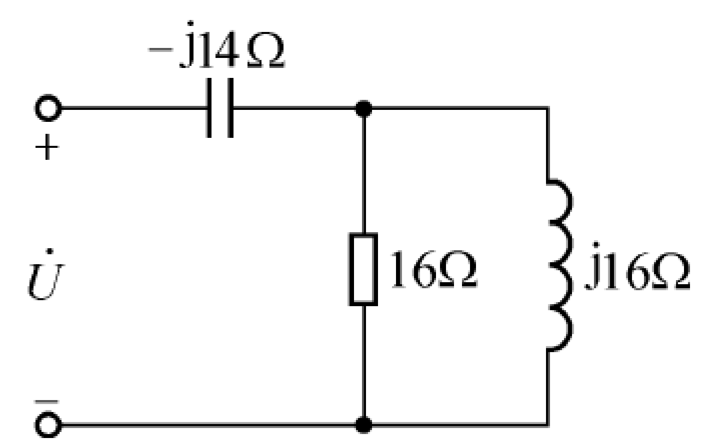
$$\dot{U} = 100\angle 0^{o} V$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{100\angle 0^{o}}{10\angle -36.9^{0}} = 10\angle 36.9^{0} A$$

$$P = U I \cos\theta_{Z} = 1000\cos 36.9^{\circ} = 800W$$

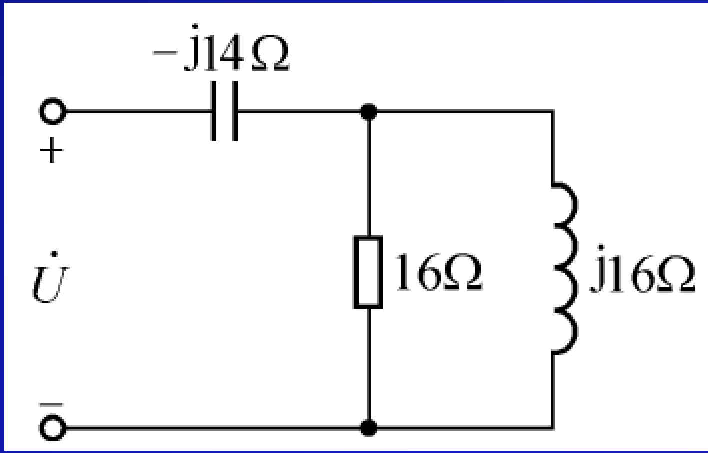
$$S = UI = 1000VA$$

$$pf = \cos\theta_{Z} = 0.8$$



$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{\dot{I}} = 100\angle 0^o \cdot 10\angle -36.9^o = 1000\angle -36.9^o$$

$$= 800 - j600VA$$



$$S = |\tilde{S}| = 1000VA$$

$$P = \mathrm{Re}[\tilde{S}] = 800W$$

$$Q = \mathrm{Im}[\tilde{S}] = -600Var$$

$$\text{pf}=\cos\theta_z = \cos(-36.9^o) = 0.8$$

一发电机其输出有效值为200V和频率为50Hz的电压，要求平均输出功率为1000W。

该发电机若对纯电阻供电，其需提供的电流为5A；

若该发电机若对一pf=0.5的感性负载供电，则其需提供的电流为10A；

即，在电源电压一定时，功率因数降低，要保持负载获得同样的有功功率，必然要求电源提供的电流增加。

为了提高电能的利用效率，电力部门采用各种措施力求**提高功率因数**。

$$P = UI\cos\theta_Z$$

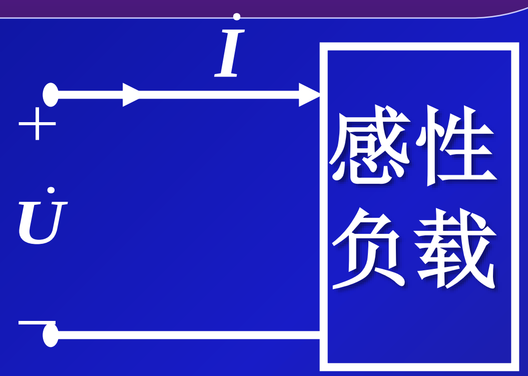
P、U一定➔ $I\cos\theta_Z$ 一定➔ $\cos\theta_Z \uparrow \rightarrow I \downarrow$

例如使用镇流器的日光灯电路，它等效于**一个电阻和电感的串联**，其功率因数小于1，它要求线路提供更大的电流。

对一感性负载，要提高其功率因数，通常是在它的**输入端并联一个适当数值的电容**来**抵销电抗分量**，使其功率因数接近于1。

例25（P219例7-20） 感性负载接在U=220V, f=50Hz的交流电源上, 其平均功率P=1.1KW, 功率因数pf=0.5，欲并联电容使负载的功率因数提高到0.8(滞后), 求电容。

解：求负载电流有效值：



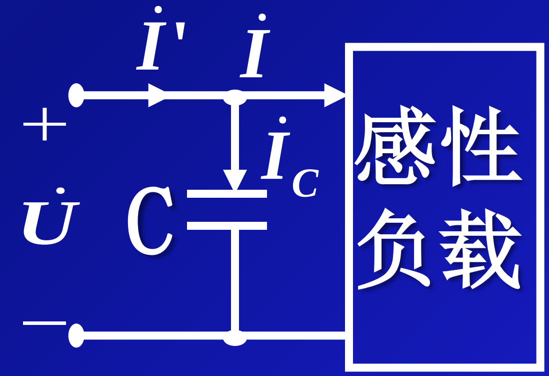
$$I=\frac{P}{U\cdot pf}=\frac{1.1\times10^{3}}{220\times0.5}=10\text{A}$$

感性负载的阻抗角： $\theta_Z=\arccos 0.5=60^\circ$

设电压相量为： $\dot{U}=220\angle0^\circ\text{V}$

负载电流相量： $\dot{I}=10\angle-60^\circ\text{A}$

并联后电源电流有效值：



$$I' = \frac{P}{U \cdot pf'} = 6.25\text{A}$$

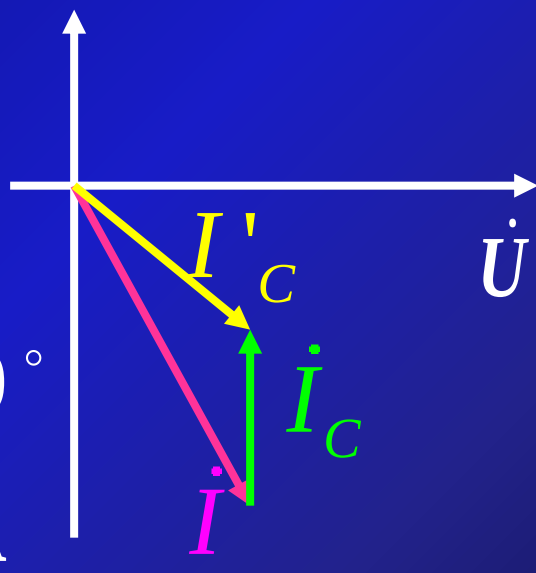
由于*pf*'=0. 8（滞后），因此功率因数角：

$$\theta_z' = \arccos 0.8 = 36.9^\circ$$

$$\therefore \dot{I}' = 6.25\angle -36.9^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}' - \dot{I} = 6.25\angle -36.9^\circ - 10\angle -60^\circ$$

$$= 5 - j3.75 - (5 - j8.66) = 4.91\angle 90^\circ\ \text{A}$$



由于：$I_C = \omega CU$

得：
$$\mathrm{C} = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{4.91}{314 \times 220} = 71\mu\mathrm{F}$$

并联电容后，并不会影响电阻吸收的平均功率；

但电容电流抵消了部分感性负载的电流，功率因数变大，电源电流的有效值由原来的10A减小到6.25A，提高了电源效率。

无功功率

$$Q = UI\sin\theta_Z$$

单位：乏(var)

(无功伏安：volt amper reactive)

无功功率反映电源(或外电路)和二端网络内储能元件之间的能量交换情况

与功率计算类似:

$$Q = UI\sin\theta_Z = I^2 X = -U^2 B$$

$$Q_L = UI$$

$$Q_C = -UI$$

$$Q_R = 0$$

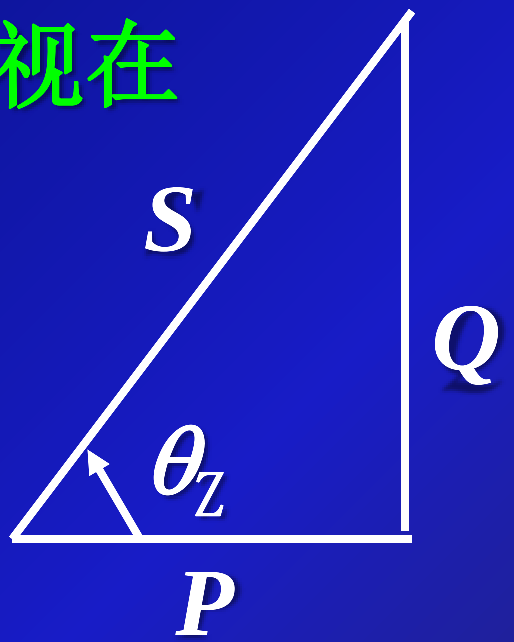
$$Q \neq \pm\frac{I^2}{B} Q \neq \pm\frac{U^2}{X}$$

● 功率三角形

有功功率P、无功功率Q和视在功率S间的关系：

$$P = S\cos\theta_z,\quad Q = S\sin\theta_z$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2},\ \theta_z = arctg\frac{Q}{P}$$



功率三角形和阻抗三角形，导纳三角形，电压三角形，电流三角形和都是相似三角形。

电阻、电感、电容的功率情况比较

	u与i的相位差	平均功率	无功功率	视在功率
定义	$\theta_z=\varphi_u-\varphi_i$	$P=UI\cos\theta_z$	$Q=UI\sin\theta_z$	$S=UI$
电阻R	$\theta_z=0^\circ$	$P_R=UI=I^2R=G^2U$	$Q_R=UI\sin 0^\circ=0$	$S_R=UI=P_R$
电感L	$\theta_z=90^\circ$	$P_L=UI\cos 90^\circ=0$	$Q_L=UI=\omega LI^2=\dfrac{U^2}{\omega L}>0$	$S_L=UI=Q_L$
电容C	$\theta_z=-90^\circ$	$P_C=UI\cos 90^\circ=0$	$Q_C=-UI=-\omega CU^2=-\dfrac{I^2}{\omega C}<0$	$S_C=UI=-Q_C$

结论：

电阻只消耗有功功率，不消耗无功功率；

电感和电容只消耗无功功率，不消耗有功功率；关联方向下，其值一正一负。

复功率

工作于正弦稳态的网络，其电压电流采用关联参考方向，设 $\dot{U}=U\angle\varphi_{\mathrm{u}},\dot{I}=I\angle\varphi_{\mathrm{i}}$

电压相量与电流相量的共轭复数的乘积称为网络吸收的复功率，即：

$$\tilde{S}=\dot{U}\overset{*}{I}=UI\angle\varphi_{\mathrm{u}}-\varphi_{\mathrm{i}}=UI\angle\theta_{Z}=S\angle\theta_{Z}$$

$$=UI\cos\theta_{Z}+\mathrm{j}UI\sin\theta_{Z}=P+\mathrm{j}Q$$

单位：VA

复功率还有两个常用的公式：

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = Z\dot{I}\overset{*}{I} = I^2 Z$$

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = \dot{U}(\dot{U}Y)^* = \dot{U}\overset{*}{U}\overset{*}{Y} = U^2\overset{*}{Y}$$

电流、电压若用振幅值时，要乘1/2。

注意：复功率不是相量，只是复数，无物理含义。

● 复功率守恒定理

对于工作在正弦稳态的电路，在关联参考方向下，每个独立电源发出的复功率的总和等于电路中其它电路元件所吸收复功率的总和：

$$\sum \tilde{S}_{发出} = \sum \tilde{S}_{吸收}$$

由此可知：一个正弦稳态电路的有功功率和无功功率也守恒。

注意：正弦稳态电路中一般视在功率不守恒

正弦稳态电路中，由每个独立电源发出的有功功率的总和等于电路中其它元件所吸收的有功功率的总和：

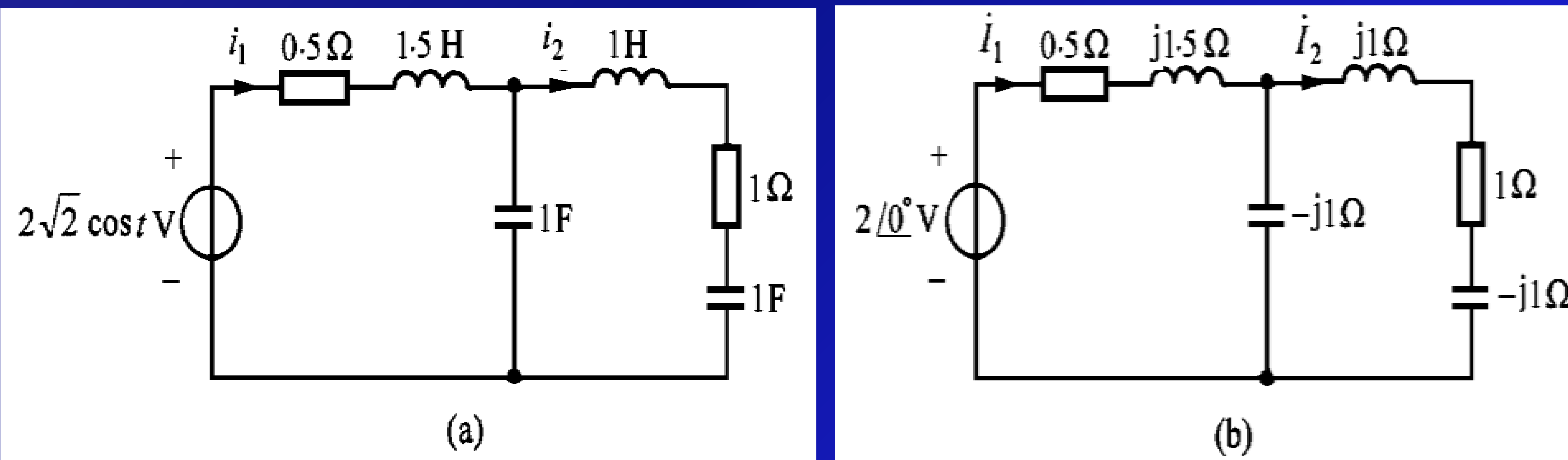
$$\sum P_{\text{发出}} = \sum P_{\text{吸收}}$$

由每个独立电源发出的无功功率的总和等于电路中其它元件所吸收的无功功率的总和：

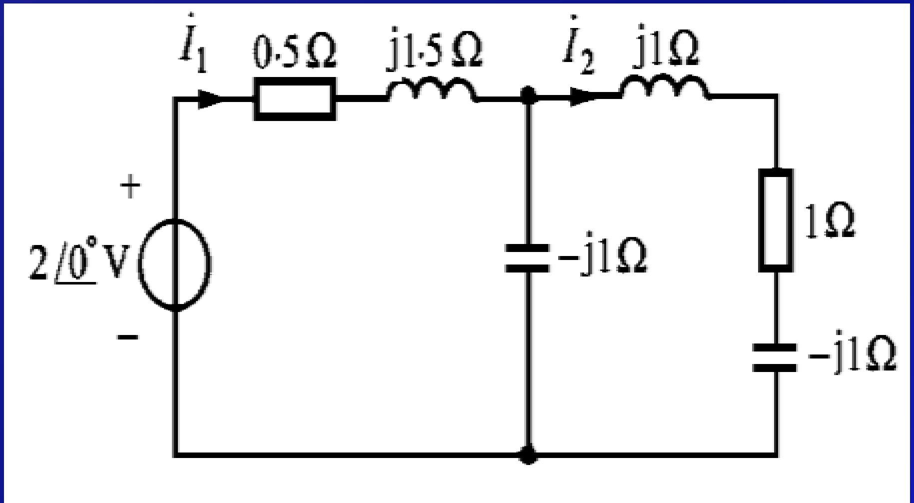
$$\sum Q_{\text{发出}} = \sum Q_{\text{吸收}}$$

由此可得：网络吸收的有功功率等于该网络内每个电阻吸收的平均功率总和；网络吸收的无功功率等于该网络内每个电抗吸收的平均功率总和。

例26 电路工作于正弦稳态，已知电压源电压为 $u_S(t)=2\sqrt{2}\cos t\ \mathrm{V}$. 试求该电压源发出的平均功率。



解：电路的**相量模型**如图(b)所示。

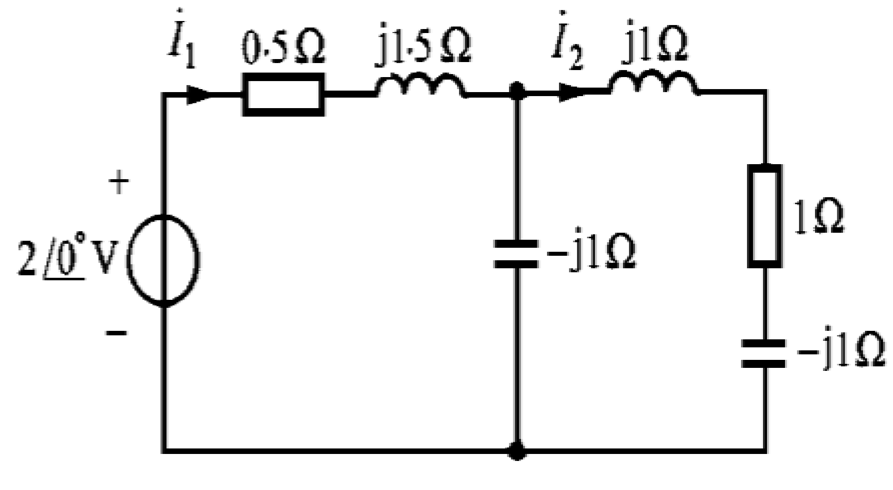


(b)

$$Z = 0.5 + j1.5 + \frac{(-j1)(j1 + 1 - j1)}{1 - j1} = 0.5 + j1.5 + 0.5 - j0.5 = 1 + j1\,\Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z} = \frac{2\angle 0^\circ}{1 + j1} = \sqrt{2}\angle -45^\circ\,\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-j1}{1 - j1} \times \dot{I}_1 = \frac{-j1}{\sqrt{2}\angle -45^\circ} \times \sqrt{2}\angle -45^\circ = -j1 = 1\angle -90^\circ\,\text{A}$$



(b)

可用以下几种方法求电源发出的平均功率

1 $P_{发出}=U_S I_1\cos\theta_Z=2\times\sqrt{2}\times\cos45^\circ=2\text{W}$

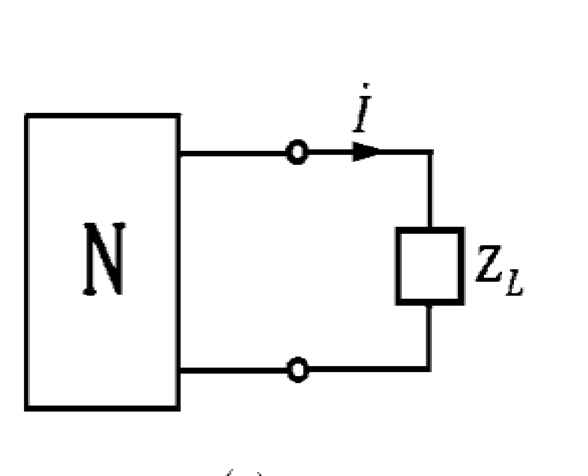
2 $\tilde{S}=\dot{U}_S\overset{*}{I}_1=2\times\sqrt{2}\angle45^\circ=2+\text{j}2\rightarrow P=\text{Re}(\tilde{S})=2\text{W}$

3 $P_{发出}=I_1^2R_1+I_2^2R_2=2\times0.5+1\times1=2\text{W}$

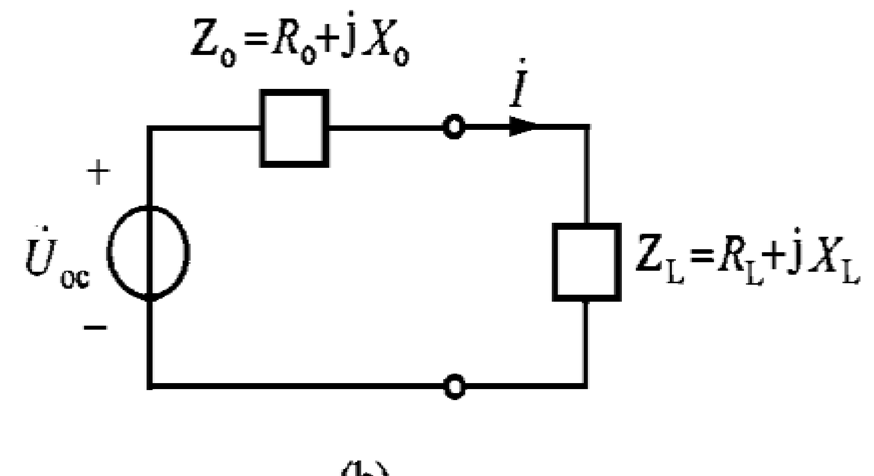
4 $P_{发出}=I_1^2\,\text{Re}(Z)=I_1^2\,\text{Re}(1+\text{j}1)=2\times1=2\text{W}$

最大功率传输

图(a)所示含独立电源网络用戴维南等效电路代替，得到图(b)。



(a)



(b)

其中，$\dot{U}_{oc}$是含源网络的开路电压，$Z_o=R_o+jX_o$是含源网络的输出阻抗，$Z_L=R_L+jX_L$是负载阻抗。

负载电流：

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_{oc}}{Z_0+Z_L}=\frac{\dot{U}_{oc}}{R_0+jX_0+R_L+jX_L}$$

$$I=\frac{U_{oc}}{\sqrt{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2}}$$

负载吸收的平均功率：

$$P=I^2R_L=\frac{U_{oc}^2R_L}{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2}$$

当$X_L=-X_o$时，分母最小：$P=\dfrac{U_{oc}^2 R_L}{(R_0+R_L)^2}$

求导数，并令其等于零。

$$\frac{dP}{dR_L}=\frac{(R_0+R_L)^2-2(R_0+R_L)R_L}{(R_0+R_L)^4}U_{oc}^2=0$$

得 $R_L=R_o$。

负载获得最大功率的条件：

$$Z_L=R_L+jX_L=R_o-jX_o=\overset{*}{Z}_o$$

所获最大功率：$P_{max}=\dfrac{U_{oc}^2}{4R_o}$

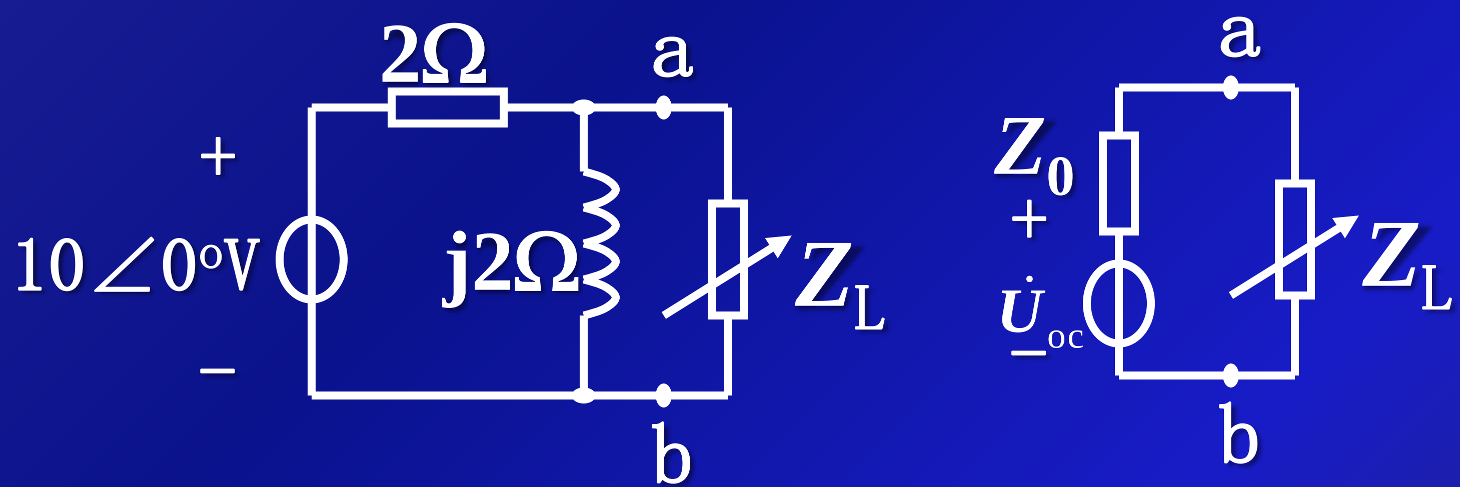
最大功率传输定理

工作于正弦稳态的网络向一个负载$Z_L=R_L+jX_L$供电，由戴维南定理（其中$Z_o=R_o+jX_o$），则在负载阻抗等于含源网络输出阻抗的共轭复数（即$Z_L=\overset{*}{Z_0}$）时，负载可以获得最大平均功率：

$$P_{max}=\frac{U_{oc}^2}{4R_o}$$

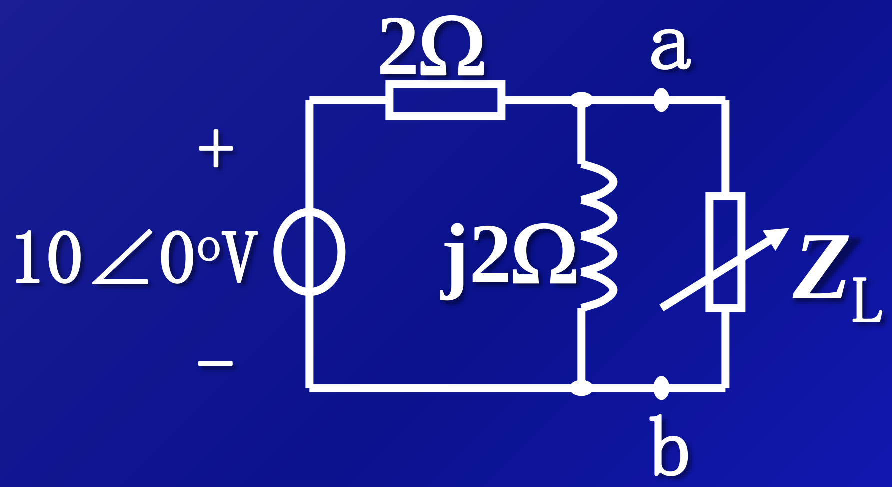
满足$Z_L=\overset{*}{Z_0}$的匹配，称为共轭匹配。

例27（P221例7-21） 图示电路，已知Z_L为可调负载，试求Z_L为何值时可获最大功率?最大功率为多少?



解：ab以左运用戴维南电路，得右图。

$$\dot{U}_{OC} = \frac{j2}{2+j2} \times 10\angle 0^\circ = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V}$$



$$Z_O = \frac{2\times j2}{2+j2} = 1+j1\Omega$$

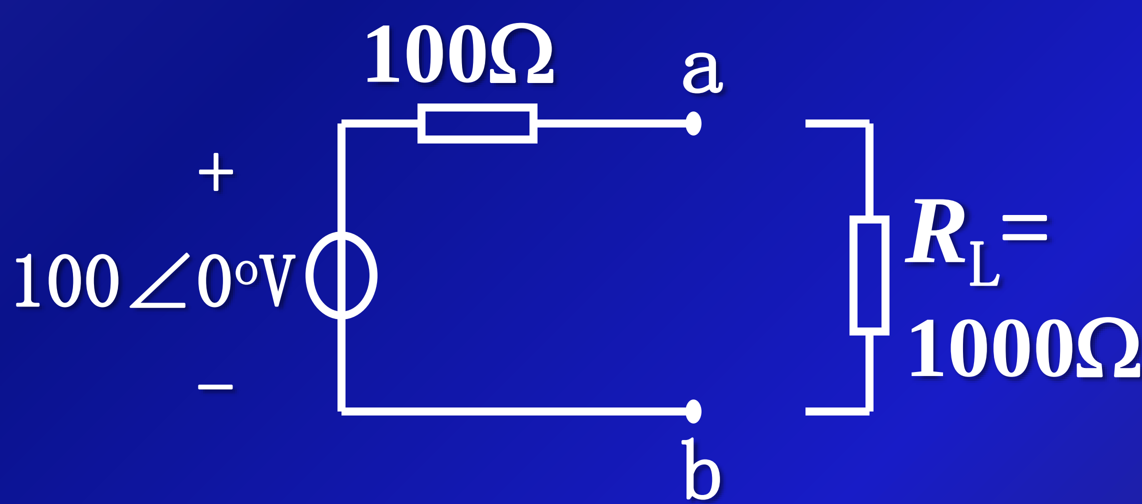
故, 当 $Z_L = \overset{*}{Z}_O = 1-j1\Omega$ 时, 可获最大功率:

$$P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_o} = \frac{(5\sqrt{2})^2}{4\times 1} = 12.5\,\text{W}$$

在通信和电子设备的设计中，常常要求满足共轭匹配，以便使负载得到最大功率。

在负载不能任意变化的情况下，可以在含源单口网络与负载之间插入一个匹配网络来满足负载获得最大功率的条件。

例28 单口网络如图，电源角频率 ω=1000rad/s, 为使R_L从单口网络中获得最大功率，试设计一个由电抗元件组成的网络来满足共轭匹配条件。



解：1 若不用匹配网络，将1000Ω 负载与网络直接相连时，负载电阻获得的平均功率为

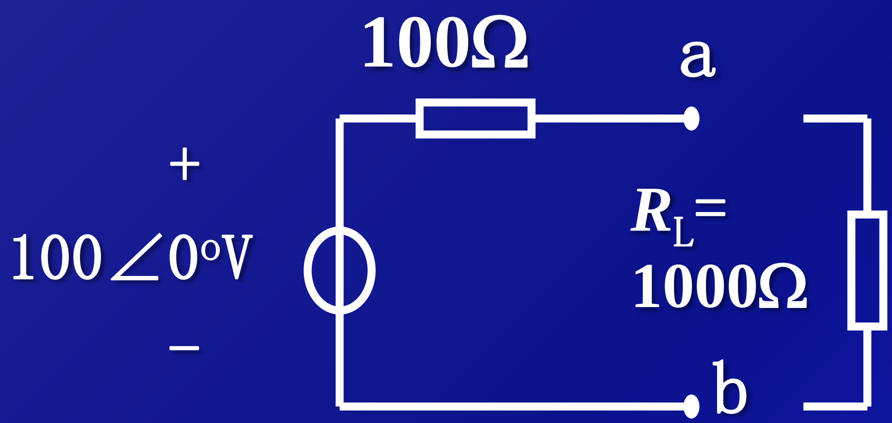
$$P_L=\left(\frac{100}{100+1000}\right)^2\times 1000=8.26\text{W}$$

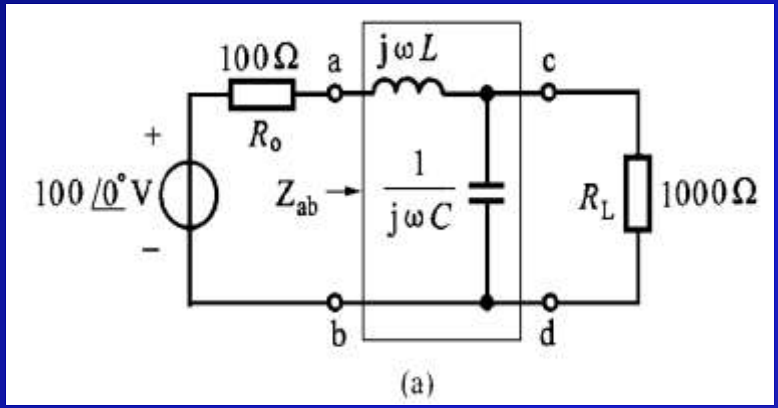
2 若采用匹配网络满足共轭匹配条件，1000Ω 负载电阻可能获得的最大平均功率为

$$P_L=\left(\frac{100}{100+100}\right)^2\times 100=25\text{W}$$

可见，采用共轭匹配网络，负载获得的平均功率将大大增加。

3 设计一个由电感和电容构成的网络来满足共轭匹配条件，以使负载获最大功率。





上图网络是可满足上述条件的一种方案。

ab以右网络的输入阻抗：

$$Z_{ab} = j\omega L + \frac{R_L \dfrac{1}{j\omega C}}{R_L + \dfrac{1}{j\omega C}}$$

$$= \mathrm{j}\omega L + \frac{R_L}{1+(R_L\omega C)^2} - \mathrm{j}\frac{R_L{}^2\omega C}{1+(R_L\omega C)^2} = \overset{*}{Z}_\mathrm{o} = R_\mathrm{o} - \mathrm{j}X_\mathrm{o}$$

令上式两边实部与虚部分别相等:

$$R_\mathrm{o} = \frac{R_L}{1+(R_L\omega C)^2}$$

$$X_\mathrm{o} = -\omega L + \frac{R_L{}^2\omega C}{1+(R_L\omega C)^2} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\omega C = \frac{1}{R_\mathrm{L}}\sqrt{\frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{o}} - 1}$$

$$\omega L = \omega C R_\mathrm{L} R_\mathrm{o}$$

代入参数, 得:

$$\omega C = \frac{1}{1000}\sqrt{10-1} = 3\mathrm{mS} \qquad C = \frac{3\mathrm{mS}}{\omega} = 3\mu\mathrm{F}$$

$$\omega L = \omega C R_L R_o = 3\times10^{-3}\times10^{3}\times10^{2} = 300\Omega$$

$$L = \frac{\omega L}{\omega} = \frac{300}{1000} = 0.3\text{H}$$

以上计算表明，如果选择L=0. 3H，C=3μF，图中ab两端以右单口网络的输入阻抗等于100Ω，它可以获得25W的最大功率，由于其中的电感和电容平均功率为零，根据平均功率守恒定理，这些功率将为R_L=1000Ω的负载全部吸收。

实际上还有一种情况：负载阻抗的模任意改变，而其阻抗角不能变。

用相同的方法，可知：

$$|Z_L| = |Z_O|$$

时负载可获得最大功率，称为模匹配。

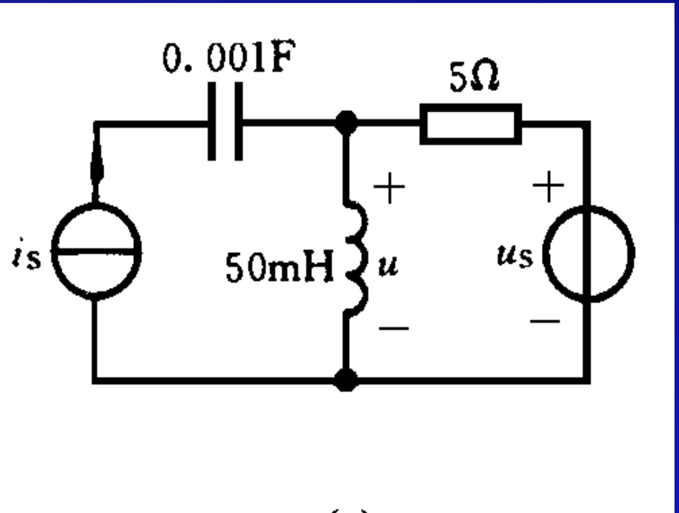
数学意义上讲，这时负载可获得的功率为极大值，并不是最大值。

激励频率不同的正弦稳态响应

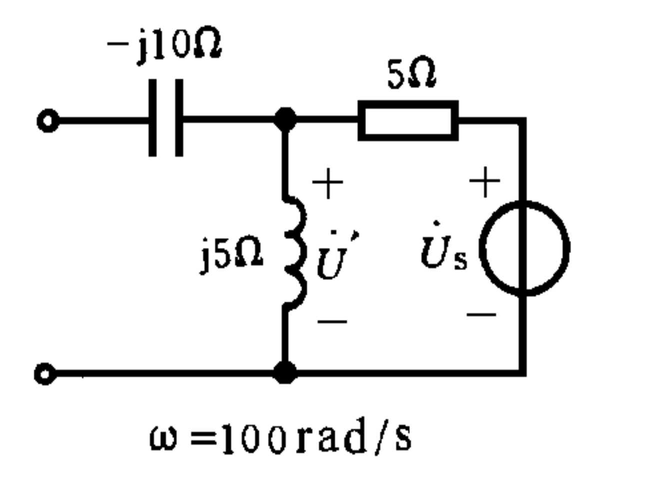
几个频率不同的正弦激励在线性时不变电路中产生的稳态电压和电流，可以利用叠加定理：

先用相量法分别计算每个正弦激励单独作用时产生的电压电流相量，然后得到时域形式的电压$u_\mathrm{k}(t)$电流和$i_\mathrm{k}(t)$，最后相加求得总的稳态电压$u(t)$和电流$i(t)$。

例22　图(a)中，$u_S(t)=20\cos(100t+10°)\,\text{V}$，$i_S(t)=\sqrt{2}\cos(200t+50^\circ)\text{A}$ 求稳态电压$u(t)$。



(a)



(b)

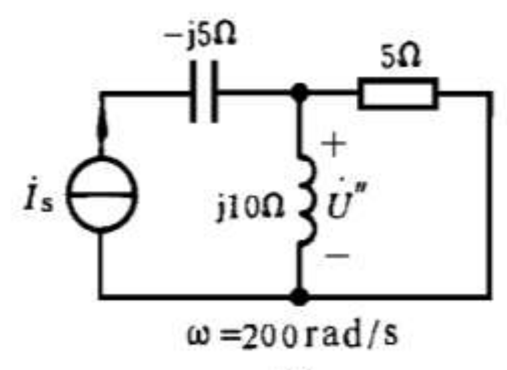
解:

1、电压源单独作用时，得图(b)相量模型

$$\dot{U}' = \frac{\text{j}5}{5+\text{j}5}\dot{U}_S = \frac{\text{j}5}{5+\text{j}5}\times 10\sqrt{2}\angle 10^\circ = 10\angle 55^\circ\,\text{V}$$

由相量写出相应的时间表达式

$$u'(t)=10\sqrt{2}\cos(100t+55^\circ)\text{V}$$



(c)

2、电流源单独作用时，将电压源用短路代替，得图(c)所示相量模型，则：

$$\dot{U}''=\frac{5\times \text{j}10}{5+\text{j}10}\dot{I}_{\text{s}}=\frac{\text{j}50}{5+\text{j}10}\times 1\angle 50^\circ=4.47\angle 76.6^\circ\text{V}$$

由相量写出相应的时间表达式：

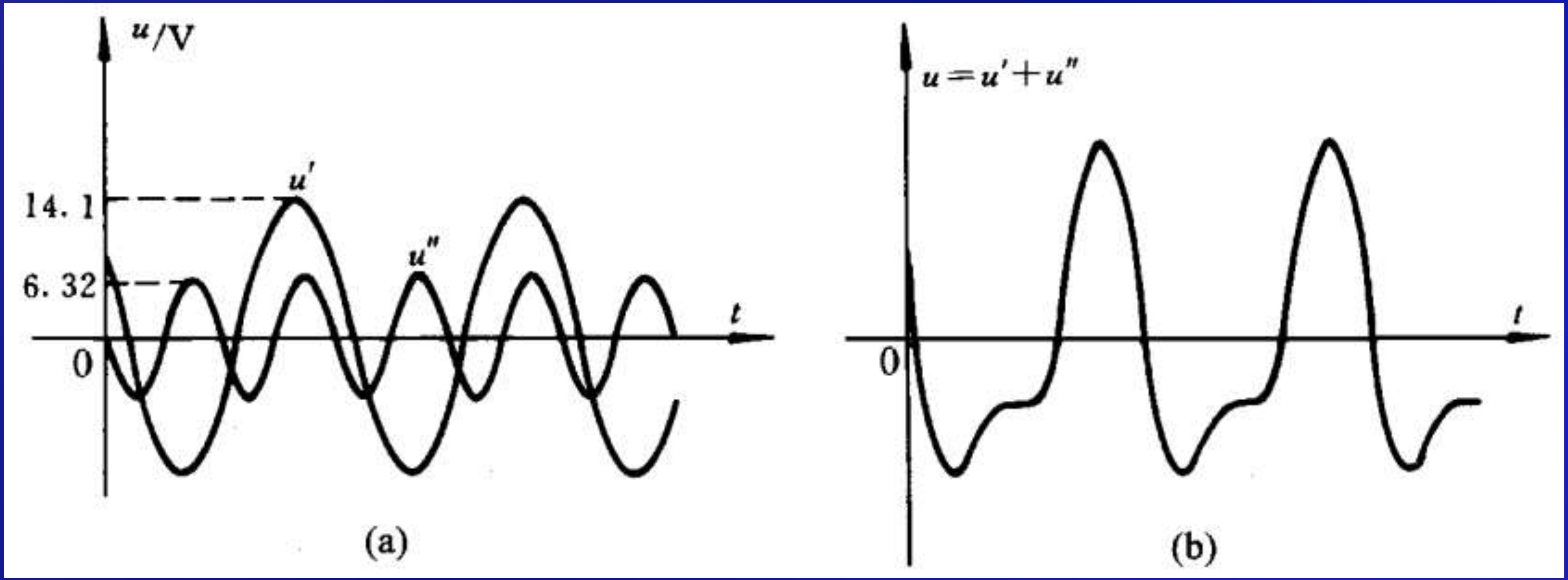
$$u''(t)=4.47\sqrt{2}\cos(200t+76.6^\circ)\text{V}$$

3、叠加求稳态电压$u(t)$

将每个正弦电源单独作用时产生的电压在时间域相加：

$$u(t) = u'(t) + u''(t)$$

$$= 10\sqrt{2}\cos(100t + 55^{\circ}) + 4.47\sqrt{2}\cos(200t + 76.6^{\circ})\text{V}$$



两个不同频率的正弦波形的叠加

可见：两个不同频率正弦波相加得到的是一个非正弦周期波形。