知识点K2.24

冲激响应不变法设计IIR滤波器

主要内容：

冲激响应不变法设计IIR滤波器

基本要求：

掌握冲激响应不变法设计IIR滤波器

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

K2.24 冲激响应不变法设计IIR滤波器

基本思想：

(1) 假设模拟系统的冲激响应 $h_a(t)$ 的拉普拉斯变换，即模拟滤波器的系统函数$H_a(s)$ 是一个有理真分式，具有单极点，则部分分式展开的结果为:

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$$

(2)求逆变换，可得:

$$h_a(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i t}\varepsilon(t)$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

冲激响应不变法设计IIR滤波器

(3) 对其进行均匀采样并求其z变换：

$$h(k)=h_a(kT)=\sum_{i=1}^{N}A_ie^{s_ikT}\varepsilon(k)$$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}A_ie^{s_ikT}\right)z^{-k}=\sum_{i=1}^{N}A_i\sum_{i=0}^{\infty}\left(e^{s_iT}z^{-1}\right)^k=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$$

与模拟系统函数比较： $H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$

IIR滤波器的设计：把$H_a(s)$部分分式展开式 $\frac{1}{s-s_i}$ 替换成 $\frac{1}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

冲激响应不变法设计IIR滤波器

例 试用冲激响应不变法设计一个能够实现如下传输函数的离散时间系统，并比较原系统和数字滤波器系统在区间 $\omega = 0 \sim 50$ 内的频谱。

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

解：

$$H_a(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

极点为-1，-2，则设计的数字滤波器的系统函数为：

$$H(z) = \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}} = \frac{(e^{-T}-e^{-2T})z}{z^2-(e^{-T}+e^{-2T})z+e^{-3T}}$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

冲激响应不变法设计IIR滤波器

为了比较原模拟滤波器和设计数字滤波器的性能，给出两者的频率特性如下：

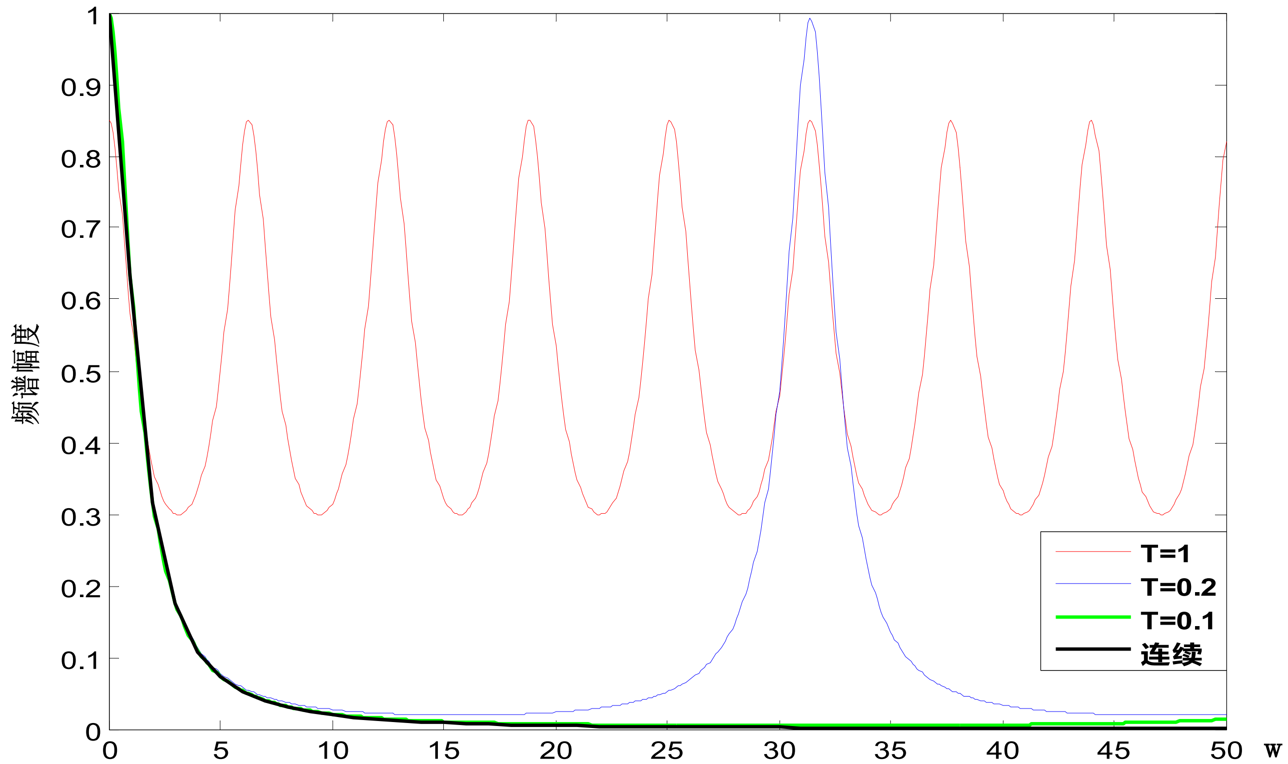
$$H_a(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\rightarrow H_a(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

$$H(z)=\frac{(e^{-T}-e^{-2T})z}{z^2-(e^{-T}+e^{-2T})z+e^{-3T}}\rightarrow H(e^{j\omega T})=\frac{(e^{-T}-e^{-2T})e^{j\omega T}}{e^{j2\omega T}-(e^{-T}+e^{-2T})e^{j\omega T}+e^{-3T}}$$

给出T=1, 0.1, 0.2下连续系统和数字滤波器的频率响应；同时给出对数坐标下的频谱。

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

冲激响应不变法设计IIR滤波器



(*a*)滤波器频谱

可以看到，数字滤波器的频率响应是模拟滤波器频率响应的周期延拓，其周期为取样角频率2 π /T 。

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

冲激响应不变法设计IIR滤波器

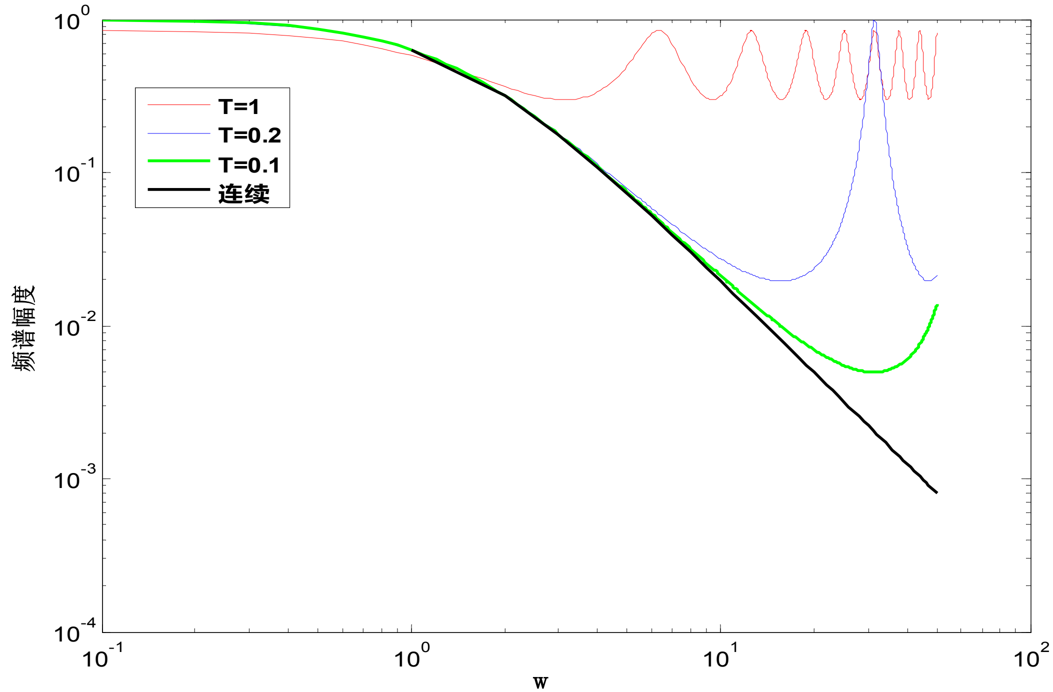
原因：$h(k)$是$h_a(t)$的取样，数字滤波器的频率响应自然是连续系统频率响应的周期化。

另外，频率响应的周期化会导致频谱混叠。取样间隔 T 越大，混叠越严重，失真也就越大。由取样定理，若信号的截止频率为 ω_m，则只要$2\pi/T \geq 2\omega_m$，就不会发生频谱混叠现象。

事实上，大多数系统的系统函数都具有收敛性，当频率达到一定程度时，幅频特性近似为0，频谱的混叠可以忽略。

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

冲激响应不变法设计IIR滤波器



(*b*)对数坐标下的频谱

从图可以看出，当 T=0.1时，离散系统的频率响应与原连续系统的频率响应非常接近，可以认为滤波器达到了设计要求。

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved