知识点Z4.19

尺度变换特性

主要内容：

傅里叶变换的尺度变换特性

基本要求：

1.掌握傅里叶变换尺度变换特性的基本概念

2.了解信号持续时间的占用频带的反比关系

Z4.19尺度变换特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 则 $f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F\left(j\dfrac{\omega}{a}\right)$,a为非零实数。

证明：

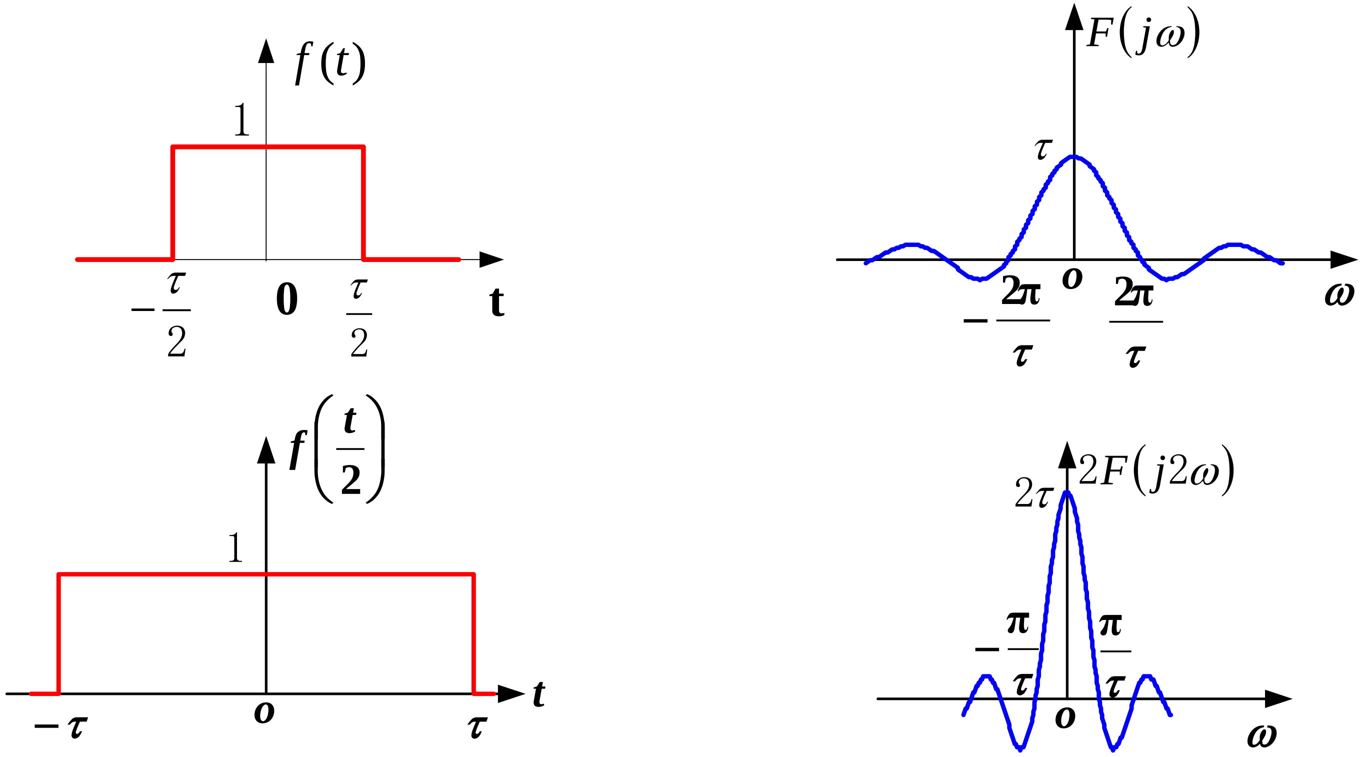
$$\mathscr{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

当a>0时，$\mathscr{F}[f(at)] \overset{\tau=at}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \dfrac{1}{a} \mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{a} F\left(j\dfrac{\omega}{a}\right)$

当a<0时，$\mathscr{F}[f(at)] \overset{\tau=at}{=} \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \dfrac{1}{a} \mathrm{d}\tau = -\dfrac{1}{a} F\left(j\dfrac{\omega}{a}\right)$

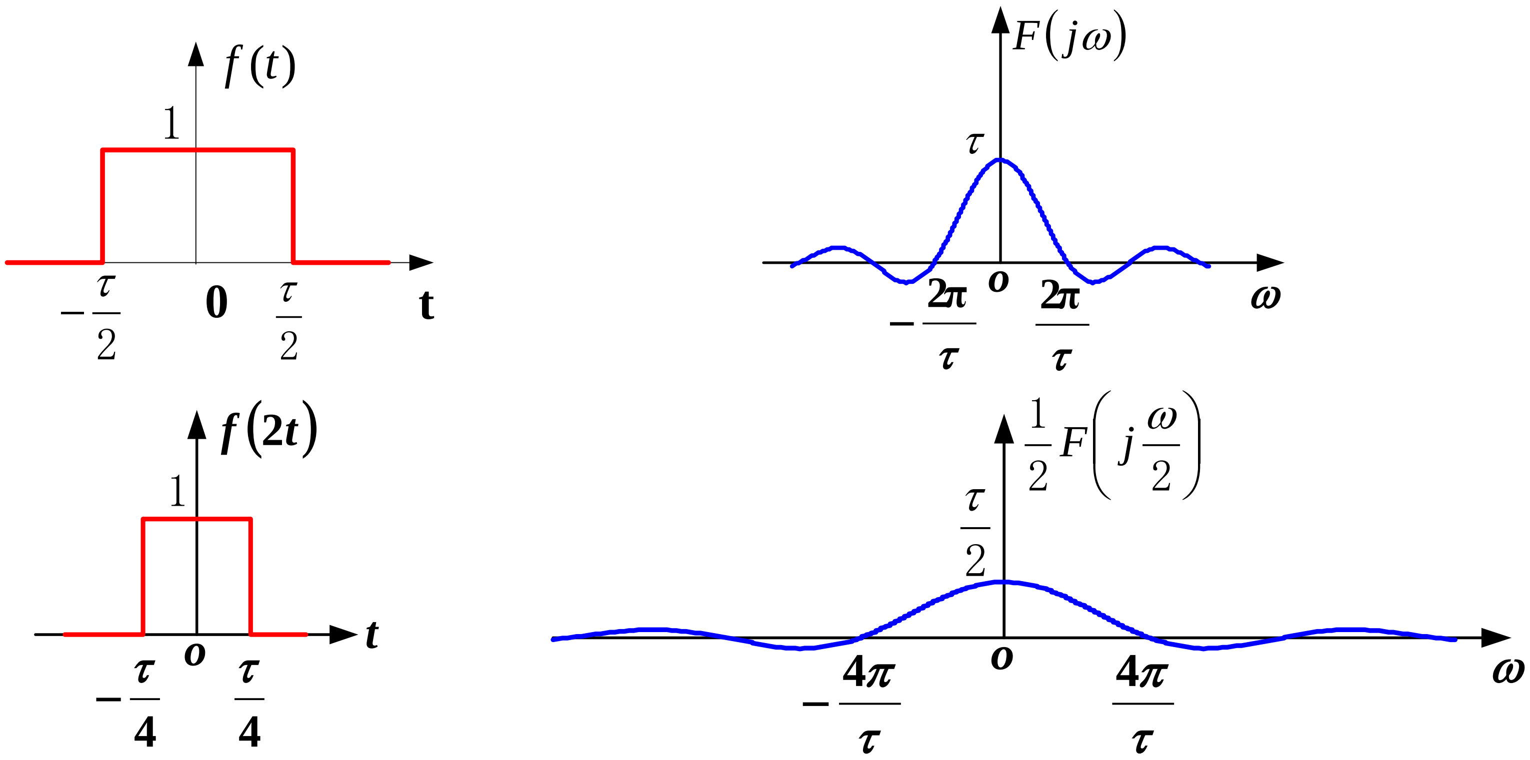
$$\therefore f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

(1) 0<*a*<1 时域扩展，频带压缩。



0<*a*<1，脉冲持续时间增加*a*倍，变化慢了，信号在频域的频带压缩*a*倍。高频分量减少，幅度上升*a*倍。

(2) $a>1$ 时域压缩，频带扩展。



$a>1$，脉冲持续持续时间短，变化快了。信号在频域高频分量增加，频带展宽，各分量的幅度下降a倍。

4.5傅里叶变换的性质

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

意义:

(1) 0<*a*<1 时域扩展，频带压缩;

(2) *a*>1 时域压缩，频域扩展*a*倍;

(3) $a=-1,\quad f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega).$

说明：信号的持续时间与信号占有频带成反比，有时为加速信号的传递，要将信号持续时间压缩，则要以展开频带为代价。

例 $f(t)=\dfrac{1}{jt-1} \longleftrightarrow F(j\omega)=?$

解:

$$\mathrm{e}^{-t}\,\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+1}$$

根据对称性,

$$\frac{1}{jt+1} \longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{e}^{\omega}\,\varepsilon(-\omega)$$

利用尺度变换特性，令 $a=-1$，可得

$$\frac{1}{-jt+1} \longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{e}^{-\omega}\,\varepsilon(\omega)$$

所以

$$\frac{1}{jt-1} \longleftrightarrow -2\pi\,\mathrm{e}^{-\omega}\,\varepsilon(\omega)$$