知识点Z1.9

冲激函数的导数

主要内容：

1.冲激偶的定义

2.冲激函数*n*阶导的定义

基本要求：

1.掌握冲激偶的计算公式

2.掌握冲激函数n阶导的计算公式

Z1.9 冲激函数的导数

1. δ'(t) (也称冲激偶)

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

证明：

$$[f(t)\delta(t)]' = f(t)\delta'(t) + f'(t)\delta(t)$$

$$f(t)\delta'(t) = [f(t)\delta(t)]' - f'(t)\delta(t)$$

$$= f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

δ'(t)的定义：
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t = -f'(0)$$

1. **利用积分和部分积分**：考虑积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt$，我们可以使用部分积分法来处理这个表达式，设置 $u = f(t)$ 和 $dv = \delta'(t)dt$，则 $du = f'(t)dt$ 和 $v = \delta(t)$。
2. **应用部分积分公式**：部分积分公式为 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$。在这里应用这个公式，我们得到：

$$\int f(t)\delta'(t)dt = f(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \delta(t)f'(t)dt$$

   因为δ函数在除0以外的所有点都是0，所以第一项 $f(t)\delta(t)$ 在极限 $-\infty$ 和 ∞ 下都是0。
3. **应用δ函数的筛选性质**：剩下的项是 $-\int \delta(t)f'(t)dt$。这里，我们可以直接应用δ函数的筛选性质，这将"挑选"出 $f'(t)$ 在 $t = 0$ 的值：

$$-\int \delta(t)f'(t)dt = -f'(0)$$

   因此，我们得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$$

1.2 基本信号

推广： $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-a)\,\mathrm{d}t = -f'(a)$$

举例：

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2\delta'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(t-2)^2]\Big|_{t=0} = -2(t-2)\Big|_{t=0} = 4$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2\delta'(t-1)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(t-2)^2]\Big|_{t=1} = -2(t-2)\Big|_{t=1} = 2$$

2. $\delta^{(n)}(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(0)$$