教学模块6 基于状态空间模型的极点配置设计方法

教学单元5 状态不可测时控制器的设计

东北大学 · 关守平
guanshouping@ise.neu.edu.cn

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

5.1 状态不可测时调节系统控制器的设计

问题：设计控制规律时：　$\mathbf{u}(k) = -L\mathbf{x}(k)$

实际应用时：　$\mathbf{u}(k) = -L\hat{\mathbf{x}}(k)$

则实际闭环系统是否具有按极点配置设计控制规律时所要求的性能？

控制对象：

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad (1)$$

观测器（预报观测器）：

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = F\hat{\mathbf{x}}(k) + G\mathbf{u}(k) + K[\mathbf{y}(k) - C\hat{\mathbf{x}}(k)] \qquad (2)$$

控制规律：

$$\mathbf{u}(k) = -L\hat{\mathbf{x}}(k) \qquad (3)$$

求闭环系统状态方程。令闭环系统的状态为：

$$\mathbf{z}(k)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \hat{\mathbf{x}}(k)\end{bmatrix} \tag{4}$$

于是得到：

$$\mathbf{x}(k+1)=F\mathbf{x}(k)+G\mathbf{u}(k)=F\mathbf{x}(k)-GL\hat{\mathbf{x}}(k) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1)&=F\hat{\mathbf{x}}(k)-GL\hat{\mathbf{x}}(k)+K\left[C\mathbf{x}(k)-C\hat{\mathbf{x}}(k)\right]\\ &=KC\mathbf{x}(k)+(F-GL-KC)\hat{\mathbf{x}}(k)\end{aligned} \tag{6}$$

结合（5）（6）式，可以得到闭环系统的状态方程为：

$$\mathbf{z}(k+1)=\bar{F}\mathbf{z}(k) \qquad (7)$$

其中 $$\bar{F}=\begin{bmatrix} F & -GL \\ KC & F-GL-KC \end{bmatrix} \qquad (8)$$

从而得到闭环系统的特征方程为：

$$\alpha(z)=\left|zI-\bar{F}\right|=\begin{vmatrix} zI-F & GL \\ -KC & zI-F+GL+KC \end{vmatrix}$$ （第二列加到第一列）

$$=\begin{vmatrix} zI-F+GL & GL \\ zI-F+GL & zI-F+GL+KC \end{vmatrix}$$ （第二行减去第一行）

$$=\begin{vmatrix} zI-F+GL & GL \\ 0 & zI-F+KC \end{vmatrix}$$

$$=\left|zI-F+GL\right|\cdot\left|zI-F+KC\right| \qquad (9)$$

$$=\alpha_c(z)\alpha_e(z)$$

调节系统闭环特征方程： $\alpha(z) = \alpha_c(z)\alpha_e(z)$

- 闭环系统的**2*n***个极点由两部分组成。一部分是没有观测器时，按性能指标设计系统时的极点（简称控制极点），另一部分是设计观测器时的极点（简称观测器极点），这就是分离性原理，利用此原理可把控制器的设计分开进行。

- 因为控制极点是按性能指标设计的。所以闭环系统的性能应主要取决于控制极点，亦即控制极点应是闭环系统的主导极点。
- 观测器极点的引入通常将使系统性能变差，为了减小观测器极点对系统的影响，应使观测器所决定的状态重构的跟随速度远远大于由于控制极点所决定的系统响应速度。
- 极限情况下，可将观测器极点均放置在原点。这时状态重构具有最快的响应速度。

- 观测器极点位置：<u>应使观测器所决定的状态重构的跟随速度远远大于由于控制极点所决定的系统响应速度</u>。

图1

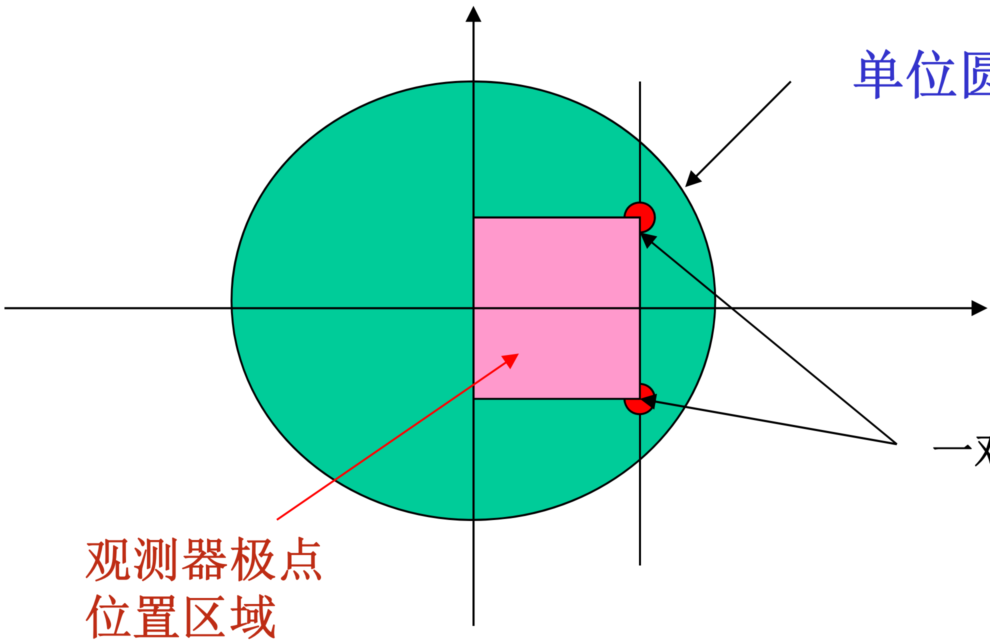


图1

调节系统按极点配置设计控制器的步骤如下：

（1）按对系统性能要求给定n个控制极点；

（2）按极点配置设计出控制规律L；

（3）选择观测器的类型：

① 若测量比较准确，即测量无噪声，则考虑用降阶观测器，否则用全阶观测器；

② 若控制器的计算延时与采样周期的大小处于同一量级，则可考虑用预报观测器；

③ 若控制器的计算延时远远小于采样周期，则可考虑用现时观测器。

（4）合适地给定观测器的极点：

① 若测量中不存在较大的误差或噪声，则可将所有观测器极点放置在原点；

②若测量中包含较大的误差或噪声，则可考虑按状态重构的跟随速度比控制极点所对应的系统响应速度快4~5倍的要求给定观测器的极点。

（5）根据给定的观测器极点及所选定的观测器类型计算增益矩阵K。

例题讲解

例5.1 被控对象： $G(s)=\dfrac{1}{s(10s+1)}$ $\quad \xi=0.5,\quad \omega_n=1,\quad T=1$

系统存在测量噪声，计算延时远远小于采样周期。

要求：按极点配置的方法设计控制器。

解： （1）连续对象状态空间模型：

取 $x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$

则系统状态为：
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

（2）离散化状态空间模型为：

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

其中 $F = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9516 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix}$ $G = \int_0^T e^{At} dt B = \begin{bmatrix} 0.04837 \\ 0.09516 \end{bmatrix}$

（3）控制规律*L*： $\mathbf{u}(k) = -L\hat{\mathbf{x}}(k)$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n = -0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由 $z = e^{sT}$ 得到： $z_{1,2} = e^{-0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}}$

于是控制规律特征多项式为：

$$\alpha_c(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - 0.786z + 0.368$$

所以控制规律：

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix}^{-1} \alpha_c(F) = \begin{bmatrix} 6.116 & 8.648 \end{bmatrix}$$

（4）观测器：

根据已知条件（系统存在测量噪声，且计算延时远远小于采样周期），选用全阶现时观测器，即

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = F\hat{\mathbf{x}}(k) + G\mathbf{u}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{x}}(k+1) + K[\mathbf{y}(k+1) - C\bar{\mathbf{x}}(k+1)] \end{cases}$$

由于存在噪声，按观测器极点所对应的衰减速度比控制极点所对应的衰减速度快约5倍。选观测器所对应的极点为：

$$\beta_{1,2} \approx (e^{-0.5})^5 = 0.08$$

控制极点：

$$z_{1,2} = e^{-0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

从而得到观测器的特征方程为：

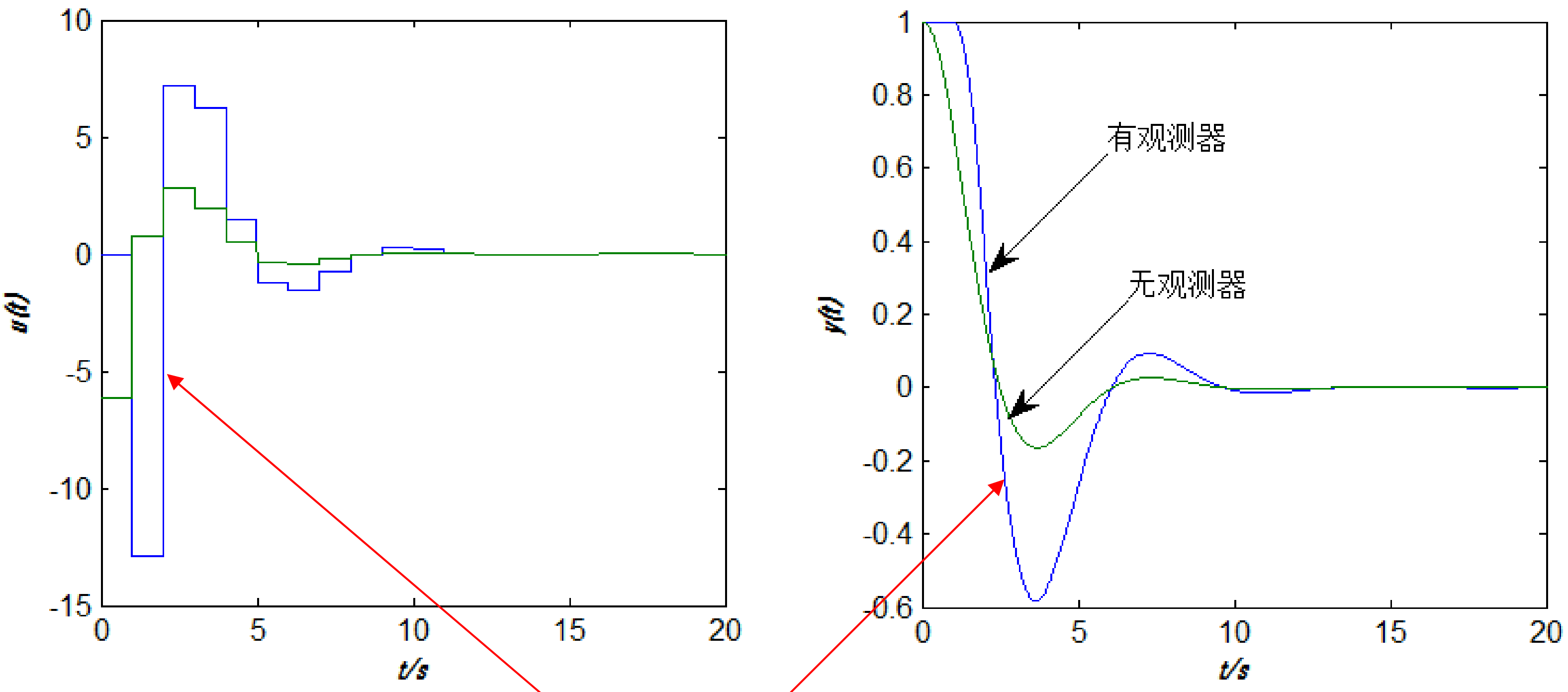
$$\alpha_e(z)=(z-0.08)^2=z^2-0.16z+0.0064$$

从而得到：

$$K=\alpha_e(F)\begin{bmatrix} CF \\ CF^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.993 \\ 0.790 \end{bmatrix}$$

仿真结果如下：

图2



输出振荡较大（引入观测器造成的结果）

5.2 随动系统控制器的设计

设计策略：

在前述状态不可测时调节系统控制器设计的基础上，设计随动系统（或跟踪系统）的控制器。

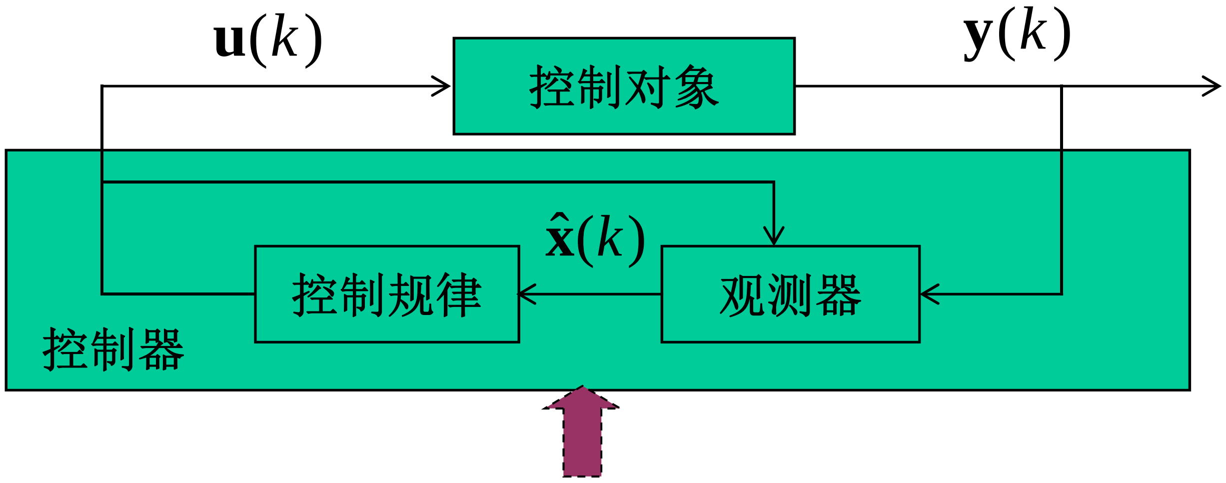
步骤：

（1）设计调节系统控制器：控制规律和观测器；

（2）在调节系统控制器中以适当的方式引入参考输入，构成随动系统控制器。

调节系统与随动系统：闭环系统特征方程相同

图 1 调节系统结构



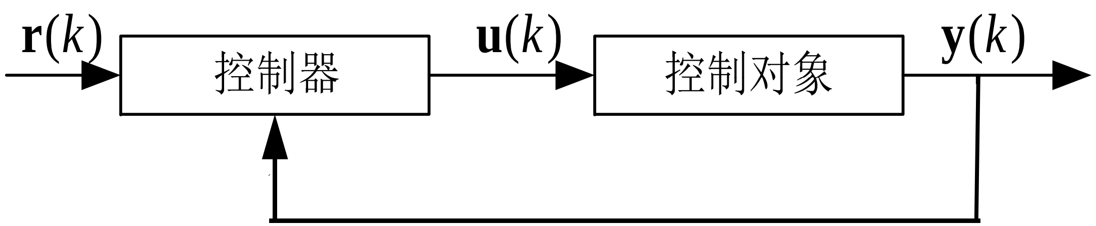


图 2 随动系统结构

控制对象模型仍为：
$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (1)$$

调节系统控制器：

预报观测器：
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= F\hat{\mathbf{x}}(k) + G\mathbf{u}(k) + K[\mathbf{y}(k) - C\hat{\mathbf{x}}(k)] \\ &= (F - GL - KC)\hat{\mathbf{x}}(k) + K\mathbf{y}(k) \end{aligned} \quad (2)$$

控制规律：
$$\mathbf{u}(k) = -L\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (3)$$

随动系统控制器应具有如下形式：

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \left(F - GL - KC\right)\hat{\mathbf{x}}(k) + K\mathbf{y}(k) + \underline{M\mathbf{r}(k)} \\ \mathbf{u}(k) = -L\hat{\mathbf{x}}(k) + \underline{N\mathbf{r}(k)} \end{cases} \quad (4)$$

引入项：*M*、*N*为常数矩阵

可以证明，这种参考输入的引入方法，可以保证随动系统与调节系统的闭环系统特征方程（亦即闭环系统的特征根）相同，仍然为：

$$\boxed{\alpha(z) = \alpha_c(z)\alpha_e(z)} \quad (5)$$

- 这种参考输入的引入方式，可以保证系统的稳定性和动态特性不变，而系统的跟踪性能和稳态性能，则可以通过合适地选取常数矩阵M和N即可。
- 若要求控制器方程只出现误差项，因此根据公式（4）必有

$$N = 0 \qquad M = -K \tag{6}$$

于是随动系统控制器的方程变为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \left(F - GL - KC\right)\hat{\mathbf{x}}(k) - K\mathbf{e}(k) \\ \mathbf{u}(k) = -L\hat{\mathbf{x}}(k) \end{cases} \tag{7}$$

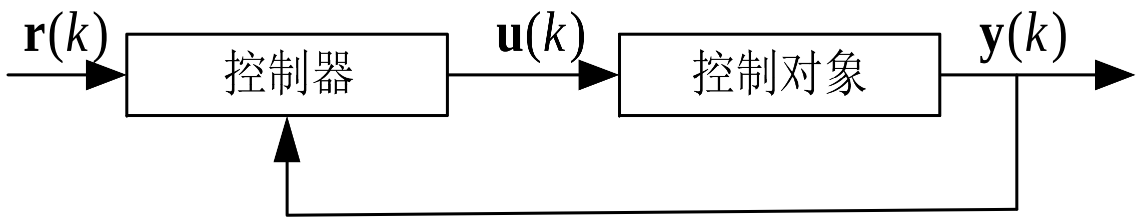


图 2

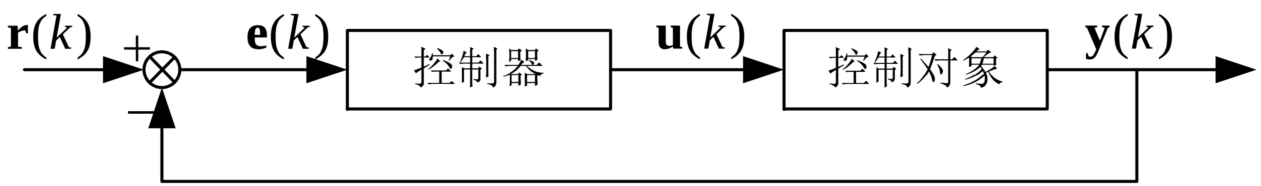


图 3

·教学单元五结束·