知识点K2.04

z变换性质－ z域尺度特性、微分

主要内容：

z变换的z域尺度特性、微分的性质

基本要求：

熟练运用z变换的性质

K2.04 z变换的性质-z域尺度特性、微分

1、z域尺度变换：序列乘 $a^k, a \neq 0$

设 $f(k) \leftrightarrow F(z),\ \alpha < |z| < \beta$,且有常数***a***

则 $a^k f(k) \leftrightarrow F(\frac{z}{a}),\ |a|\alpha < |z| < |a|\beta$

2、序列乘k（z域微分）

设 $$f(k) \leftrightarrow F(z), \qquad \alpha < |z| < \beta$$

则 $$kf(k) \leftrightarrow (-z)\frac{d}{dz}F(z)$$

$$k^2 f(k) \leftrightarrow (-z)\frac{d}{dz}[(-z)\frac{d}{dz}F(z)]$$

$$k^m f(k) \leftrightarrow \underbrace{(-z)\frac{d}{dz}(\cdots(-z)\frac{d}{dz}((-z)\frac{d}{dz}F(z))\cdots)}_{m\text{次}}, \quad \alpha < |z| < \beta$$

z变换性质— z域尺度特性、微分

例1： $a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow ?$

解:

$$\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{z}{z-1}$$

$$a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a}-1}=\frac{z}{z-a}$$

例2： $\cos(\beta k)\varepsilon(k)\longleftrightarrow ?$

解:

$$\cos(\beta k)\varepsilon(k)=\frac{1}{2}(e^{j\beta k}+e^{-j\beta k})\longleftrightarrow\frac{0.5z}{z-\mathrm{e}^{j\beta}}+\frac{0.5z}{z-\mathrm{e}^{-j\beta}}$$

例3： 求 $a^{-k}\varepsilon(-k-1)$ 的 z 变换。

解：

$$a^{k-1}\varepsilon(k-1) \longleftrightarrow \frac{z^{-1}z}{z-a} = \frac{1}{z-a}, \quad |z|>a$$

$$a^{-k-1}\varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow \frac{1}{z^{-1}-a}, \quad |z|<\frac{1}{a}$$

利用齐次性，k域和z域同时乘以 a 得：

$$a^{-k}\varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow \frac{a}{z^{-1}-a}, \quad |z|<\frac{1}{a}$$

例4： 求 $f(k)= k\,\varepsilon(k)$ 的z变换 $F(z)$。

<解法1>

$$\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$k\varepsilon(k) \longleftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}, \qquad |z|>1$$

<解法2>

$$f(k+1) = (k+1)\varepsilon(k+1) = (k+1)\varepsilon(k) = f(k)+\varepsilon(k)$$

两边取z变换： $zF(z) - zf(0) = F(z) + \dfrac{z}{z-1}$

$$kf(k) \leftrightarrow F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$