知识点Z4.23

时域微积分特性

主要内容：

时域微积分特性

基本要求：

掌握傅里叶变换时域微积分特性的基本概念

Z4.23时域微积分特性

若 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$

时域微分： $f^{(n)}(t)\longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$

时域积分： $\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)+\dfrac{F(j\omega)}{j\omega}$

其中 $F(0)=F(j\omega)\big|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

证明：

$$f^{(n)}(t)=\delta^{(n)}(t)*f(t)\longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x=\varepsilon(t)*f(t)\longleftrightarrow [\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]F(j\omega)=\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

例1 $f(t)=\dfrac{1}{t^2}\longleftrightarrow F(j\omega)=?$

解:

$$\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow\frac{2}{j\omega}$$

根据对称性，

$$\frac{2}{jt}\longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{sgn}(-\omega)$$

$$\frac{1}{t}\longleftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

根据时域微分特性，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2}\longleftrightarrow -(j\omega)j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)=\pi\;\omega\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$\frac{1}{t^2}\longleftrightarrow -\pi\;\omega\,\mathrm{sgn}(\omega)=-\pi\,|\,\omega\,|$$

推论1：

若 $f'(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$ 则 $f(t) \longleftrightarrow \dfrac{F_1(j\omega)}{j\omega} + \pi[f(-\infty) + f(\infty)]\delta(\omega)$

证明：

$$f(t) - f(-\infty) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{d} f(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} F_1(j\omega) + \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d} f(t)}{\mathrm{d} t} \mathrm{d} t \delta(\omega)$$

$$= \frac{1}{j\omega} F_1(j\omega) + \pi[f(\infty) - f(-\infty)]\delta(\omega)$$

$$F(j\omega) - 2\pi\ f(-\infty)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} F_1(j\omega) + \pi[f(\infty) - f(-\infty)]\delta(\omega)$$

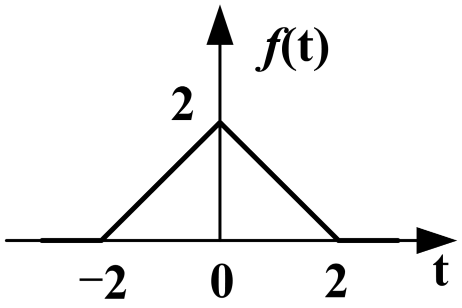
所以 $$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F_1(j\omega) + \pi[f(\infty) + f(-\infty)]\delta(\omega)$$

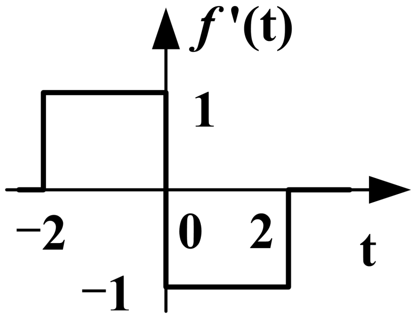
示例： **d ε (t)/dt = δ(t) ←→ 1　ε (t) ←→ 1/(j ω)+ π δ(ω)**

推论2：

若$f^{(n)}(t) \leftrightarrow F_n(j\omega)$ 且 $\pi[f(-\infty)+f(\infty)]=0$

则 $f(t) \longleftrightarrow \dfrac{F_n(j\omega)}{(j\omega)^n}$





例2 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)=?$

解： $f''(t) \longleftrightarrow \delta(t+2)-2\delta(t)+\delta(t-2)$

$$F_2(j\omega)=e^{j2\omega}-2+e^{-j2\omega}=2\cos(2\omega)-2$$

$$F(j\omega)=\frac{F_2(j\omega)}{(j\omega)^2}=\frac{2-2\cos(2\omega)}{\omega^2}=4Sa^2(\omega)$$