自动控制原理速成课

课时3 线性系统的根轨迹绘制与分析

高数帮

考点解析： （本节内容重点共15-20分）

视频讲解更清晰
仅5小时

1. 根轨迹的基本概念（大题 4-8分）

2. 根轨迹的绘制法则并掌握（大题 6-8分）

3. 用根轨迹法分析系统的性能（填空、选择、大题第二问等2-6分）

3.1 线性系统的根轨迹基本概念

根轨迹的基本概念：系统开环传递函数的某一个参数（多指 K）从零变化到无穷大时，闭环系统特征方程的根在 S 平面上的变化轨迹。

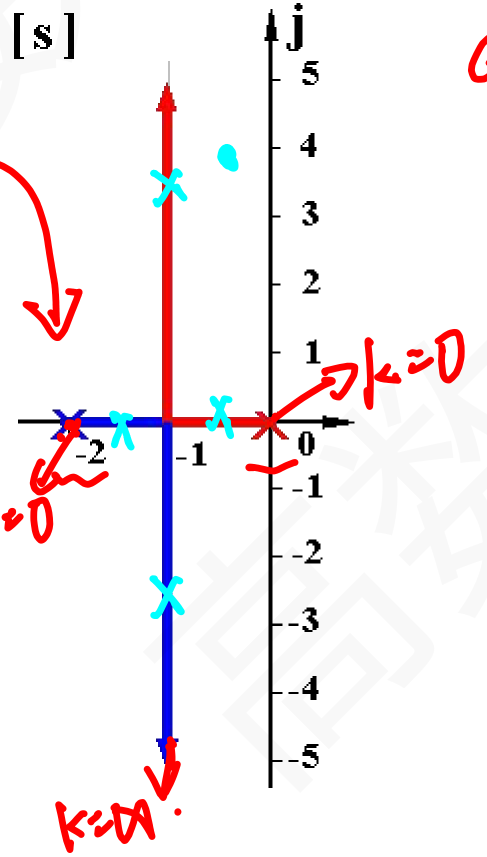
0 ∞

根轨迹法: 用来分析由于某个参数的变化引起的系统性能（稳准快）的改变

$$G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}=\frac{K^*=2K}{s(s+2)}$$

★①

- K ：开环增益（尾1标准型）
- K^*: 根轨迹增益（首1标准型）



注意:

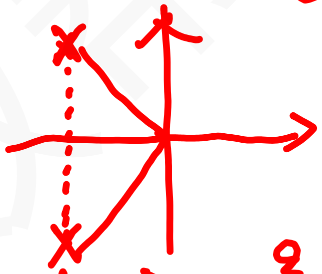
一般情况下均已知的是根轨迹增益，

要会求开环增益

$G(s)\Rightarrow$ 特征方程 $D(s)=S(S+2)+K^*$

s^2+2s+K^*

$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$



$-\xi\omega_n \rightarrow \omega_n \rightarrow$ t_p: σ: t_s:

ξ

根轨迹的基本概念：根轨迹上的所有的点满足模值条件和相角条件

|5|=5

模值条件：$\left|G(s)H(s)\right| = \dfrac{K^*\left|s-z_1\right|\cdots\left|s-z_m\right|}{\left|s-p_1\right|\cdots\left|s-p_n\right|} = 1$ 模值

根: z_i 零 极

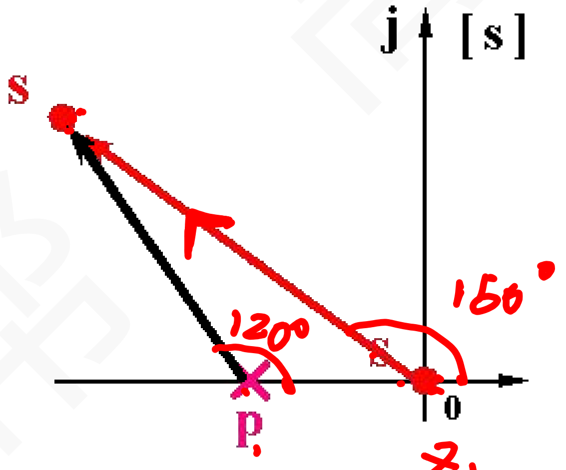
相角条件：$\angle G(s)H(s) = \sum\limits_{i=1}^{m}\angle s-z_i - \sum\limits_{j=1}^{n}\angle s-p_j = (2k+1)\pi$

零 极 0→π 1→-π

$z_j = -\dfrac{1}{\tau_{zj}}$ $(j=1,2,\cdots,m)$ —开环零点 (○表示)

zero: 0

$p_i = -\dfrac{1}{\tau_{pi}}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ —开环极点 (×表示)



零: 150°, 由 z_1→s 的角度

极: 120°, 由 p→s 的角度

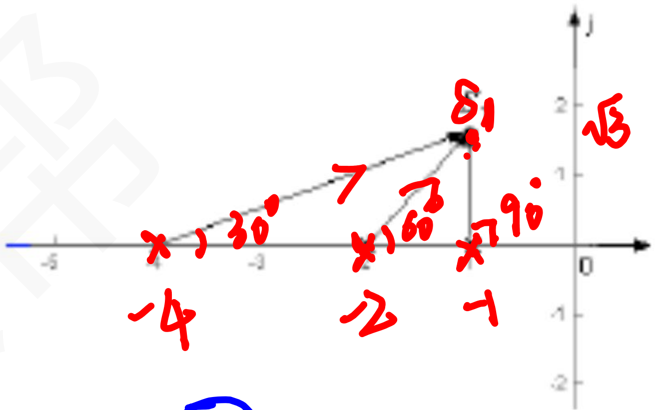
150°-120°=30° (√)

60° (×)

3.1 线性系统的根轨迹基本概念练习题

考题 系统的开环传递函数为

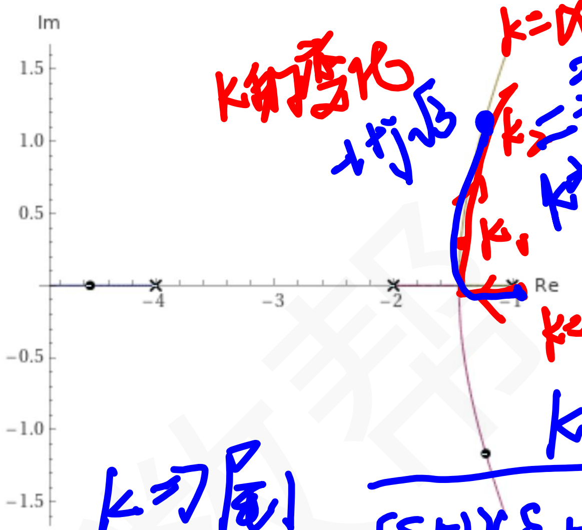
$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$



试证明 $s_1=-1+j\sqrt{3}$ 在根轨迹上，并求出相应的根轨迹增益 K^* 和开环增益 K。

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

$\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$



① 相角：零到它 − 极到它 $=(2k+1)\pi$

$0-(90^\circ+60^\circ+30^\circ)=-\pi$ 当 $k=-1$ 时满足 √

$90^\circ+60^\circ+30^\circ-0=\pi$ 当 $k=0$ 时满足 √

② 幅值：代入 $s_1=-1+j\sqrt{3}$，求：

$$\frac{K^*}{\left|(-1+j\sqrt{3}+1)(-1+j\sqrt{3}+2)(-1+j\sqrt{3}+4)\right|}=1$$

$$\frac{K^*}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{3^2+3}}=1$$

$K^*=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{12}=12$

$$\frac{K^*/(2\times4)}{(s+1)(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{4}+1)}$$

故 $K=\frac{K^*}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

绘制法则：

法则1 根轨迹的起点和终点：根轨迹起始于开环极点Pi（×表示），终止于开环零点Zi（○表示）；如果开环零点个数，少于开环极点个数，则有 n-m 条根轨迹终止于无穷远处

m　o　<　x　n

法则2 实轴上的根轨迹：它右边的零、极点个数之和为奇数，必是根轨迹

1个　2个　1　奇偶

法则3 渐近线

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_i}{n-m} \qquad \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

极　零　坐标　角度　k=∞　趋势

$G(s)=\frac{s+2}{s(s+1)}$　n=2　m=1

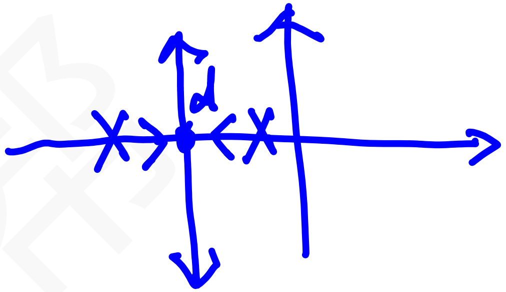
$\sigma_a = \frac{0+1-2}{2-1} = -1$

$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2-1}$

k=0　π

k=-1　-π

3.2 线性系统的根轨迹绘制



$\frac{s+2}{s(s+1)}$ $p_1=0$ $p_2=-1$ $z_1=-2$

$\frac{1}{d-0}+\frac{1}{d+1}=\frac{1}{d+2} \Rightarrow d$

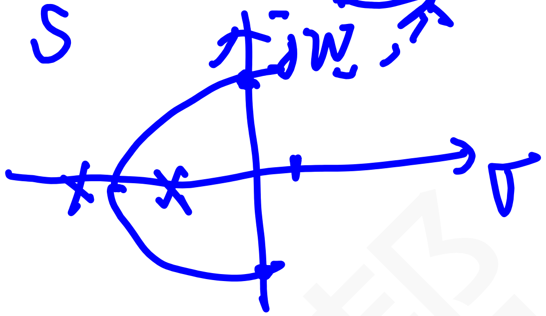
绘制法则：

法则4 分离点 d： $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$

极　零

法则5 与虚轴交点： 意义： 1）劳斯判据/系统临界稳定点　$s=\sigma+jw$

正根



2）特征方程 / s = jw 是根的点（实部为0）

$$D(s)=s(s+1)(s+2)+K^*=s^3+3s^2+2s+K^*=0$$

$$D(j\omega)=-j\omega^3-3\omega^2+j2\omega+K^*=0$$

求w

$s \to jw$

法则6 出射角/入射角

$$\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i-\sum_{j=1}^{n}\angle s-p_j=(2k+1)\pi$$

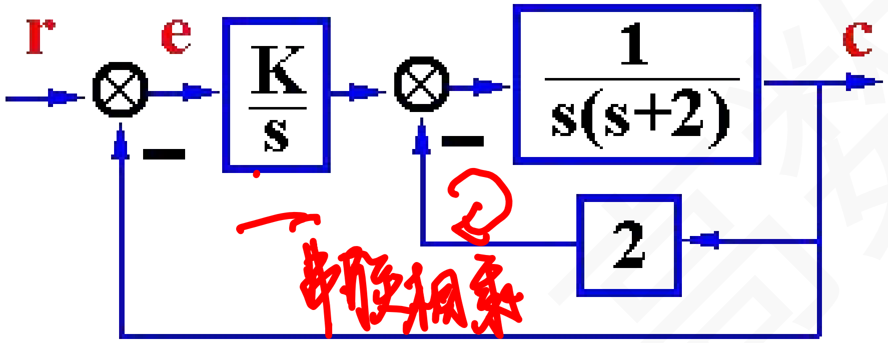
零 － 极

课时3 线性系统的根轨迹绘制练习

绘制法则：

①写开环传递函数G(s)　$\frac{G}{1+GH}$

题1：已知系统结构图，绘制根轨迹



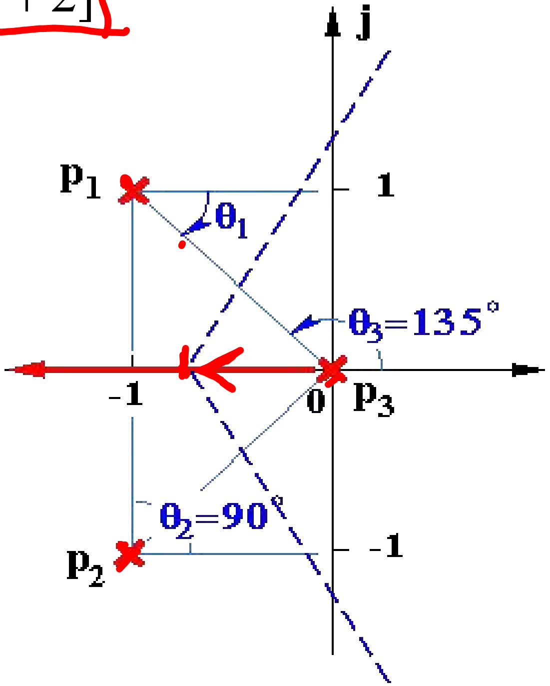
$$G(s)=\frac{K}{s}\cdot\frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1+\frac{2}{s(s+2)}}=\boxed{\frac{K}{s[s^2+2s+2]}}$$

根轨迹增益

解：系统的零极点分布P1=-1+1j P2=-1-1j p3=0 无零点。

$s^2+2s+2=0$ 解

① 实轴上的根轨迹：[-∞,0] 奇数



② 渐近线：$\sigma_a=\frac{0-1-1}{3}=-\frac{2}{3}$　　$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\pm60°,180°$

$n=3$

$m=0$

$\frac{-1+j-1-j+0}{3}$

$k=0$　$60°$　　$k=-1$　$-60°$

$k=1$　π

课时3 线性系统的根轨迹绘制练习

$$G(s)=\frac{K}{s}\cdot\frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1+\frac{2}{s(s+2)}}=\frac{K}{s[s^2+2s+2]}$$

特征方程 $s(s^2+2s+2)+K=0$

解：系统的零极点分布P1=-1+1j P2=-1-1j p3=0 无零点。

① 实轴上的根轨迹：[-∞,0]

② 渐近线： $\sigma_a=\frac{0-1-1}{3}=-\frac{2}{3}$ $\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60^\circ,180^\circ$

③ 出射角： $0-[\theta_1+90^\circ+135^\circ]=-180^\circ \Rightarrow \theta_1=-45^\circ$

$-[\theta_{P_1}+90^\circ+135^\circ]=(2k+1)\pi$

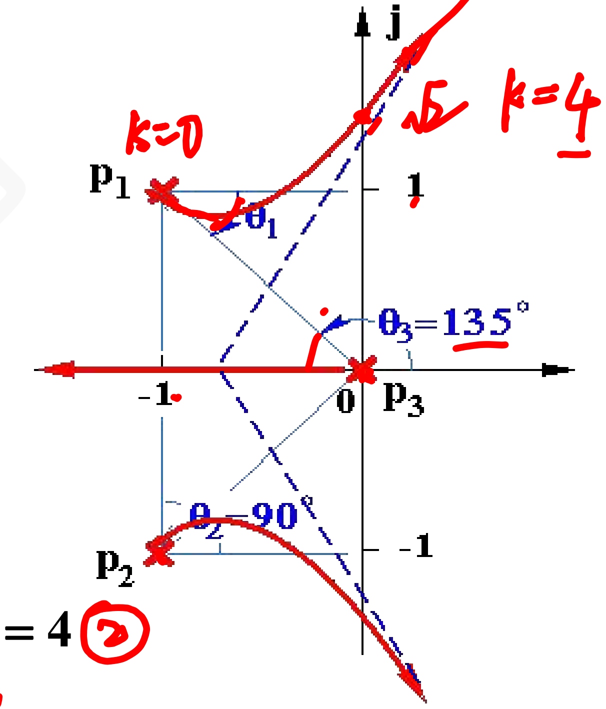
$-\theta_1-225^\circ=180^\circ$ $-\theta_1=180^\circ+225^\circ$ 大于2π

$-\theta_1=-180^\circ+225^\circ=45^\circ$

④ 与虚轴交点： $D(s)=s^3+2s^2+2s+K=0$

$\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-2\omega^2+K=0$ $\omega=\pm\sqrt{2}$ $\rightarrow K=4$ $\mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+2\omega=0$ $K=4$

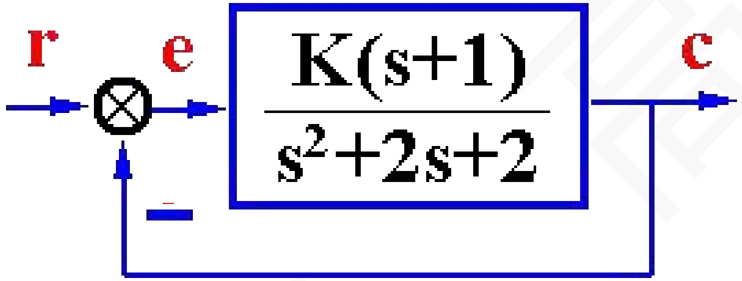
$\omega(-\omega^2+2)=0$ $\omega=\sqrt{2}$



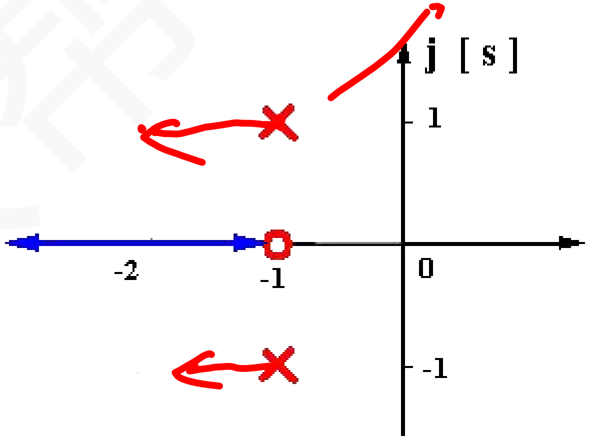
课时3 线性系统的根轨迹绘制练习

题2：系统结构图如图所示，K*= 0→∞, 变化,试分别绘制 180°根轨迹。

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s^2+2s+2}=\frac{K(s+1)}{(s+1+j)(s+1-j)}\qquad \begin{cases} K_k=K/2 \\ v=0 \end{cases}$$



解：系统的零极点分布P1=-1+1j P2=-1-1j Z1=-1



① 实轴轨迹：[-∞, -1]

② 出射角：$90°-[\theta+90°]=-180° \Rightarrow \theta=180°$

课时3 线性系统的根轨迹绘制练习

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s^2+2s+2}=\frac{K(s+1)}{(s+1+j)(s+1-j)} \qquad \begin{cases} K_k = K/2 \\ v = 0 \end{cases}$$

① 实轴轨迹：[-∞, -1]

② 出射角：$90° - [\theta + 90°] = -180° \ \Rightarrow \theta = 180°$

③ 分离点：$\dfrac{1}{d+1+j}+\dfrac{1}{d+1-j}=\dfrac{2(d+1)}{d^2+2d+2}=\dfrac{1}{d+1}$

$$\frac{1}{d-p_1}+\frac{1}{d-p_2}=\frac{1}{d-z_1}$$

$$2(d+1)^2=d^2+2d+2.$$

整理得：$d^2+2d=d(d+2)=0$

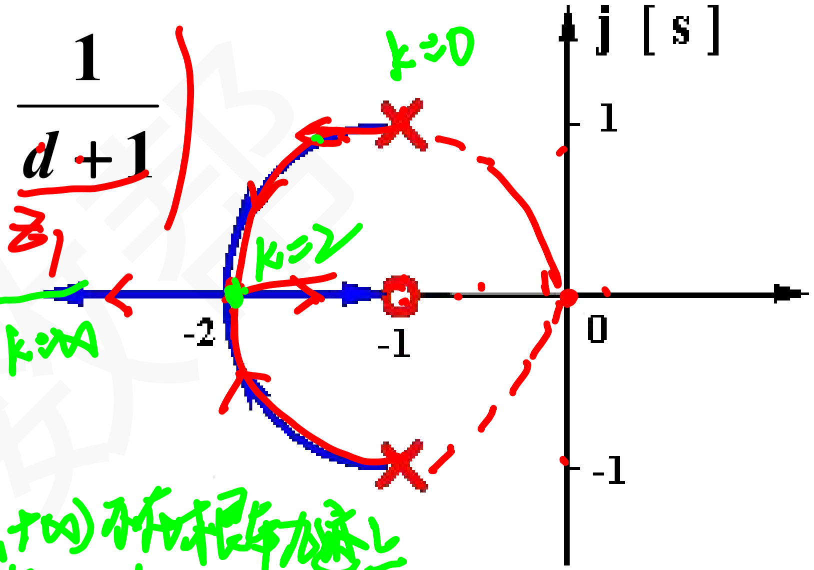
$$d_1=-2 \qquad \boxed{d_2=0\ (舍去)}$$

因为$(-1,+\infty)$不在根轨迹上 故舍去 d_2

解根：$K_{d_1}=\dfrac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|}\overset{d=-2}{=}2$

用幅值条件

$$\frac{K|d+1|}{|-1+j||-1-j|}=1 \Rightarrow K=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$$



3.2 线性系统的根轨迹绘制再次复习！！！

极　　零

法则 1　根轨迹的起点和终点　从×到○

★ 法则 2　实轴上的根轨迹右和为奇数

★ 法则 3　渐近线　$\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_i}{n-m}$　　$\varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}$

角度

法则 4　分离点 d　$\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^{m} \dfrac{1}{d-z_j}$　列方程

零

极

法则 5　与虚轴交点　$\mathrm{Re}[D(j\omega)] = \mathrm{Im}[D(j\omega)] = 0$ → 特征方程

判断

★ 法则 6　出射角/入射角　$\underline{/G(s)H(s)} = \sum_{i=1}^{m} \underline{/s-z_i} - \sum_{j=1}^{n} \underline{/s-p_j} = (2k+1)\pi$ θ

零 − 极