一阶电路的零状态响应

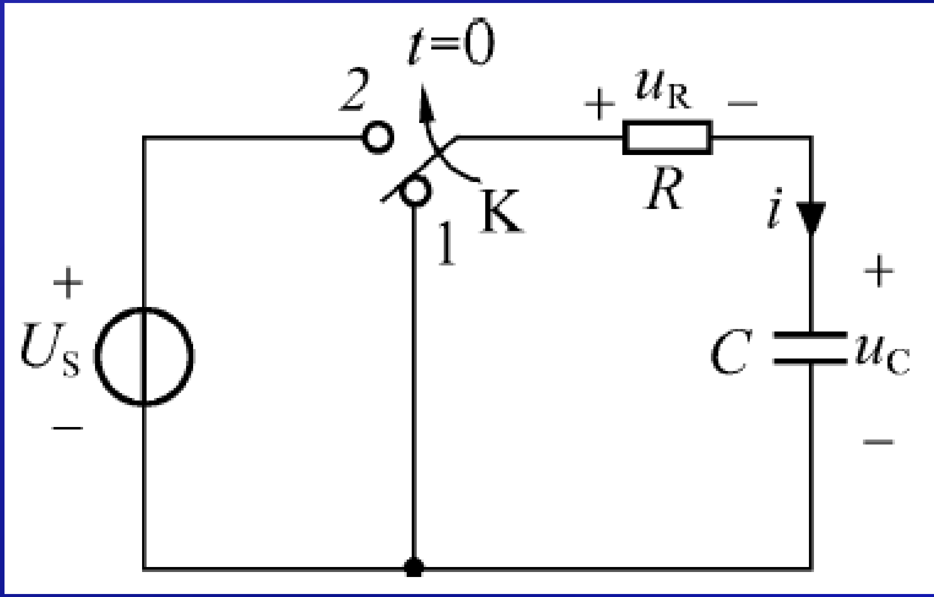
- 零状态响应

初始状态(P134↑11行)为零，仅由独立电源(称为外激励或输入)引起的响应。

$$u_C(0^-) = 0 \text{ 或 } i_L(0^-) = 0$$

这里仅讨论一阶电路在直流激励下的零状态响应。

● *RC*电路的零状态响应

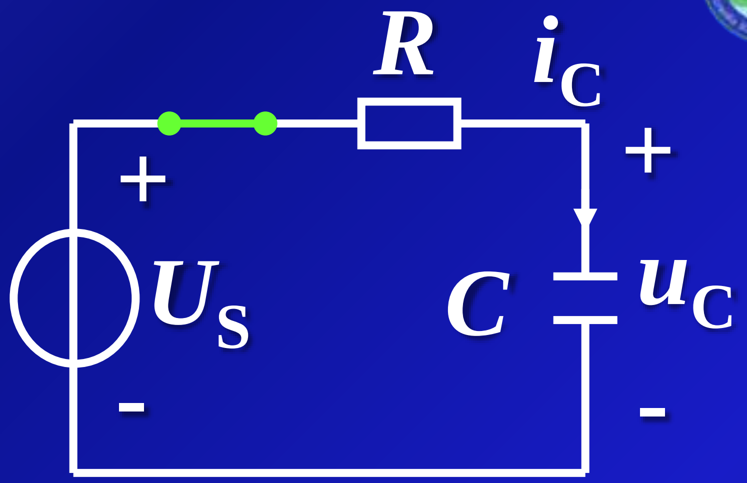


换路时，由于电容电流有界，电容电压不会跃变

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$$

换路后如右图

以电容电压为变量，列微分方程



$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S,\quad t\geq 0$$

这是一个常系数一阶线性非齐次微分方程，其解由两部分组成，即

$$u_C(t)=u_{Ch}(t)+u_{Cp}(t)$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{u}_{\mathrm{Ch}}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{u}_{\mathrm{Cp}}(\boldsymbol{t})$$

$\boldsymbol{u}_{\mathrm{Ch}}(\boldsymbol{t})$是与其相应的齐次微分方程的通解，其形式与零输入响应相同，即

通解：$u_{\mathrm{Ch}}(t)=Ae^{st}=Ae^{-\frac{t}{RC}}\qquad(t\geq 0)$

$\boldsymbol{u}_{\mathrm{Cp}}(\boldsymbol{t})$是非齐次微分方程的特解，一般来说，它的形式与输入函数相同。对于直流激励的电路，它是一个常数，可令

特解：$\boldsymbol{u}_{\mathrm{Cp}}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{K}$

不同激励时动态电路的特解

激励 $f(t)$	特解 $y_p(t)$的形式
直流	K
t^n	$K_n t^n + K_{n-1} t^{n-1} + \cdots + K_0$
$e^{\alpha t}$	$K e^{\alpha t}$ 当 α 不是特征根时 $K_1 t e^{\alpha t} + K_0 e^{\alpha t}$ 当 α 为特征单根时 $K_2 t^2 e^{\alpha t} + K_1 t e^{\alpha t} + K_0 e^{\alpha t}$ 当 α 为二重特征根时
$\cos\beta t$ $\sin\beta t$	$K_1 \cos\beta t + K_2 \sin\beta t$

* 注：表中 K_0，K_1，…，K_n 均为待定常数。

将它代入微分方程：$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S,\quad t\geq 0$

求得特解为：$u_{Cp}(t)=K=U_S$

故，原一阶线性非齐次微分方程完全解为：

$$u_C(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}+U_S,\quad t\geq 0$$

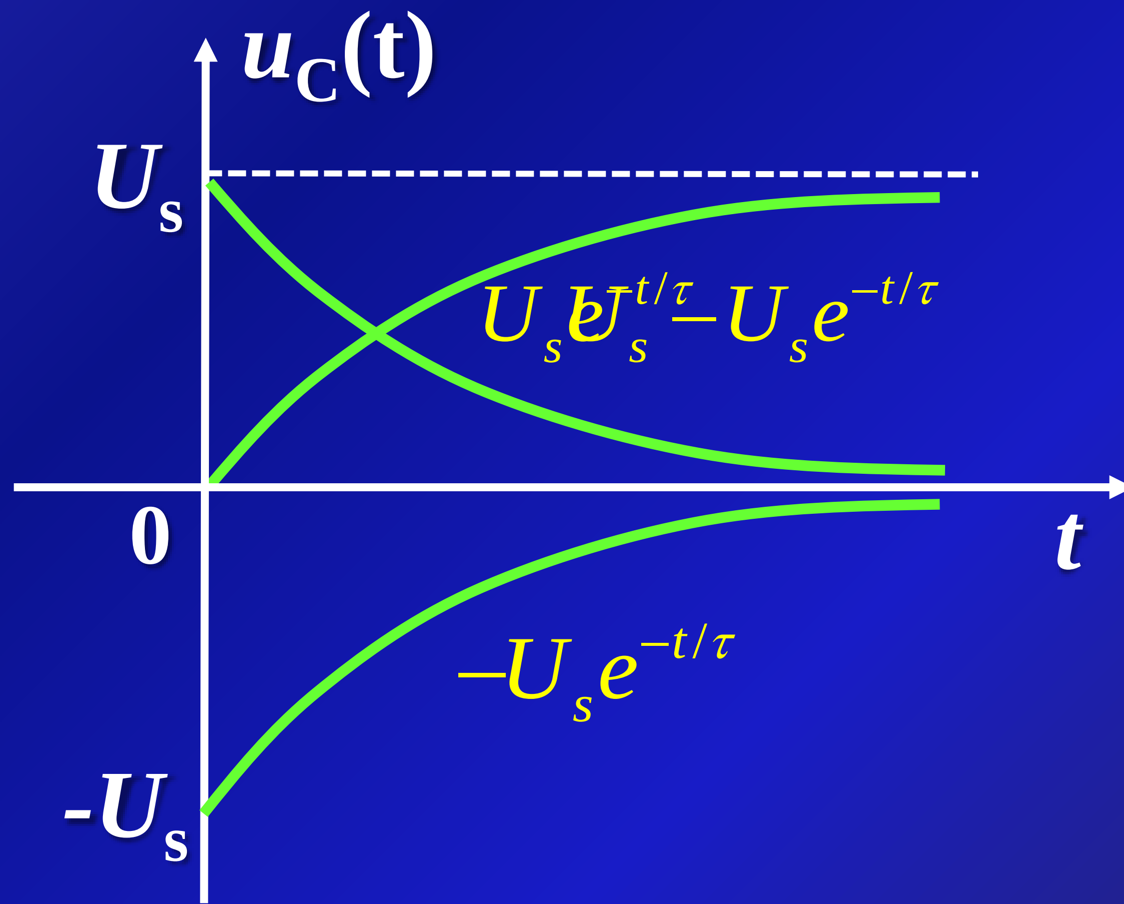
式中的系数A由初始条件确定：

$$u_C(0^+)=A+U_S=0$$

得：$A=-U_S$

零状态响应为

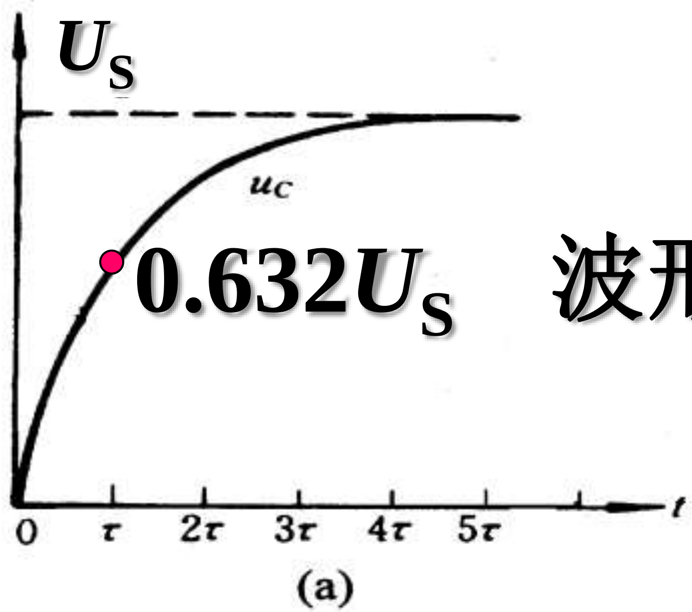
$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = U_S - U_S e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$



零状态响应为

$$u_C(t)=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})=U_S-U_Se^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t\geq 0)$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t>0)$$



波形图

说明：

1. 电路的零状态响应，各电流电压均按相同的指数规律变化。电容电压按指数规律从初始值逐渐增长，趋近于稳定值 U_S；

2. 零状态响应变化的快慢也取决于时间常数$\tau=RC$。τ 越大，充电过程越长；

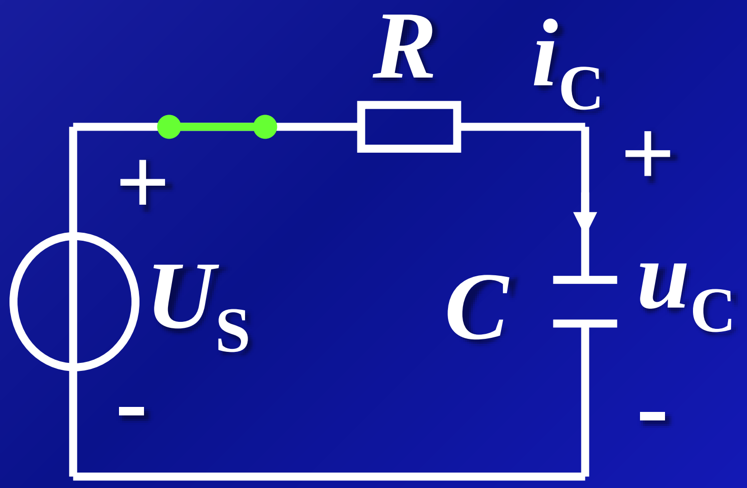
3. 电容电压的零状态响应为两个分量的和：一个是齐次方程的通解 $u_{Ch}(t)=-U_S e^{-\frac{t}{RC}}$，另一个是非齐次方程的特解 $u_{Cp}(t)=U_S$。

4. 通解 $u_{Ch}(t) = -U_S e^{-\frac{t}{RC}}$ 由激励引起，但响应形式与激励无关，反映电路自身特性——固有响应分量或自然响应分量。有耗电路，$t \to \infty$时这一分量趋于0 ——暂态响应分量。

5. 电容电压的特解 $u_{Cp}(t) = U_S$ 与激励形式相同——强制响应分量。直流激励的一阶电路，它就是t→∞达到稳态时的电容电压，即$U_{Cp}(t) = U_C(\infty)$ ——稳态响应分量。

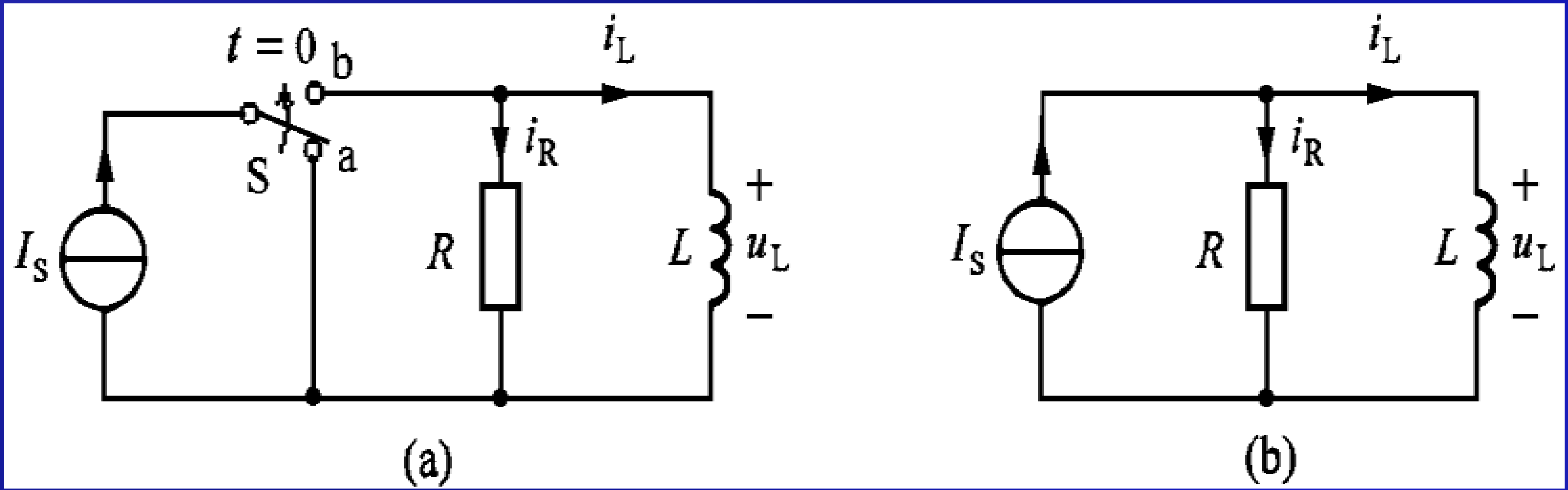
电阻在电容充电过程中消耗的总能量：

$$W_{\mathrm{R}}=\int_0^{\infty} i_{\mathrm{R}}^2(t)R\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\left(\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\mathrm{d}t=\frac{1}{2}CU_S^2$$



结果表明：与充电结束时电容所储存的电场能量相同，充电效率50%。

● *RL*电路的零状态响应



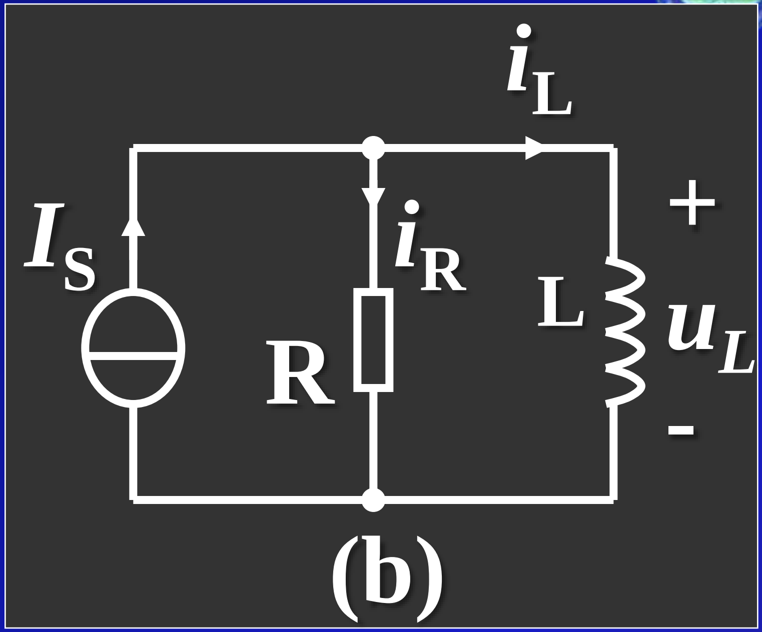
图(a)电路换路前已稳定，即

$$i_L(0^-)=0$$

由于电感电压有界时，电感电流不能跃变，即$i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$。

图(b)电路列方程：

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=I_S \quad (t\geq 0)$$



为常系数一阶线性非齐次微分方程，其解与RC电路相似，即：

$$i_L(t)=i_{Lh}(t)+i_{Lp}(t)=Be^{-\frac{R}{L}t}+I_S=Be^{-\frac{t}{\tau}}+I_S$$

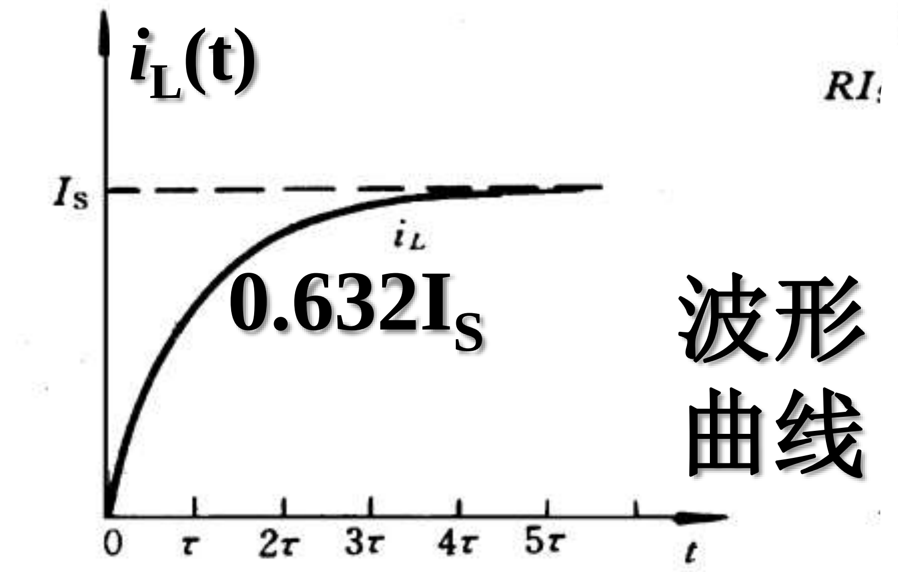
$\tau=L/R$是该电路的时间常数；系数B由初始条件确定，即由下式

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=B+I_S=0 \quad 即B=-I_S$$

*RL*一阶电路的零状态响应为：

$$i_L(t) = I_S(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = RI_S e^{-\frac{R}{L}t} = RI_S e^{-\frac{t}{\tau}} (t > 0)$$



(a)

波形曲线

一阶电路电容电压、电感电流零状态响应的一般公式

直流激励下零状态电路的动态过程是动态元件的充电过程，其电容电压和电感电流的零状态响应的一般形式为：

$$u_{Czs}(t)=u_C(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}),\quad t\geq 0$$

$$i_{Lzs}(t)=i_L(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}),\quad t\geq 0$$

τ：时间常数；

$u_{Czs}(\infty)$、 $i_{Lzs}(\infty)$：稳态值或终值。

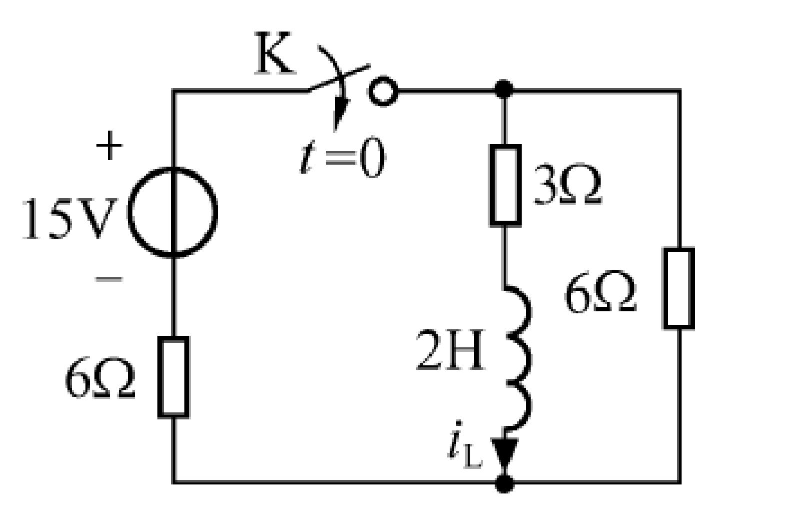
确定一阶电路零状态响应的一般步骤

1、画出$t=\infty$时电路达到稳态时的等效电路，（令电路中的电容开路，电感短路），计算换路后电路的终值$u_C(\infty)$和$i_L(\infty)$；

2、画出求τ时的等效电路，求等效电阻时令所有的独立电源置0，计算时间常数τ；

3、直接应用零状态响应的一般形式写出电容电压和电感电流的零状态响应$u_{Czs}(t)$和$i_{Lzs}(t)$

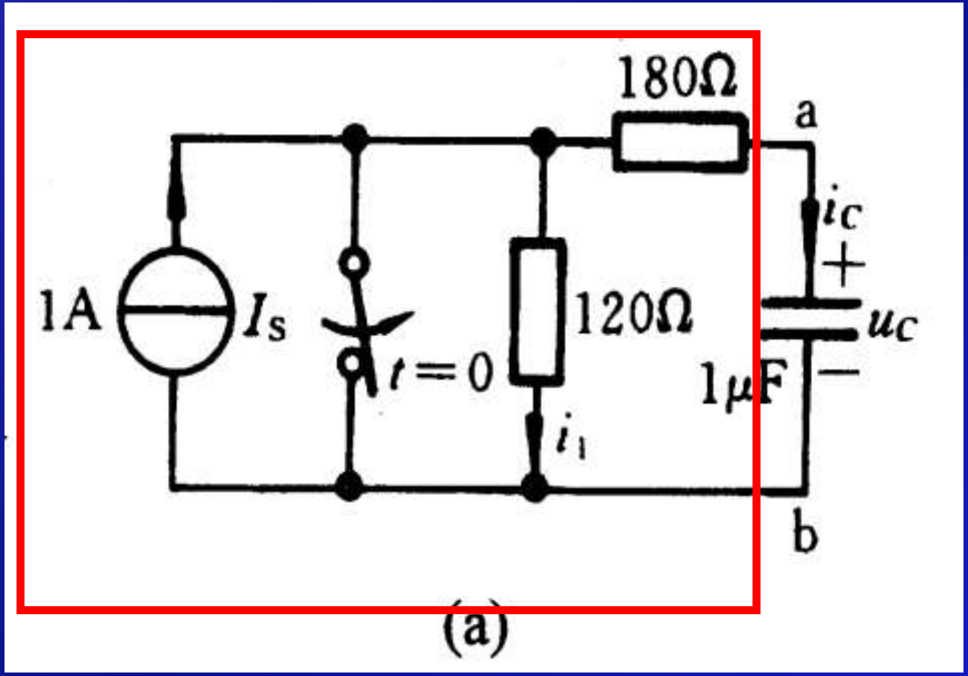
例13（P147例6-7）图(a)电路原已稳定，t=0时开关闭合，试求t>0时的i_L(t)。



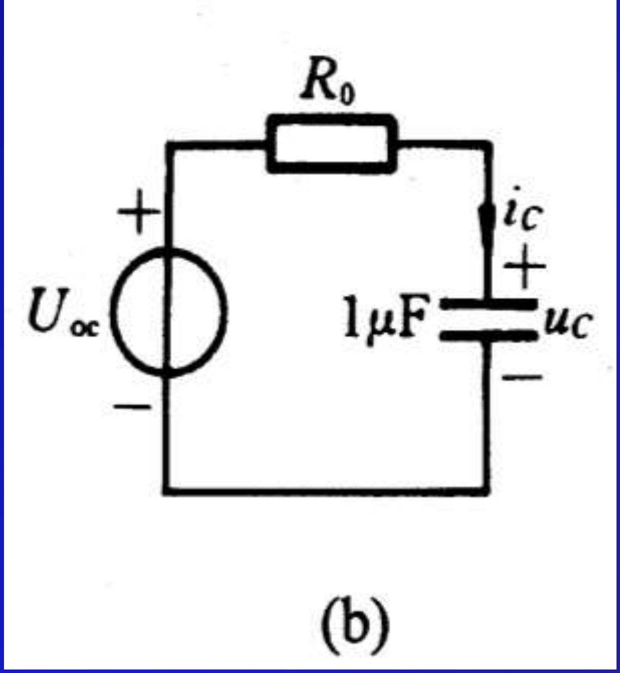
(a)

$t = \infty$图

例14 图(a)电路原已稳定，求$t \geq 0$的$u_C(t)$, $i_C(t)$及$i_1(t)$。



(a)

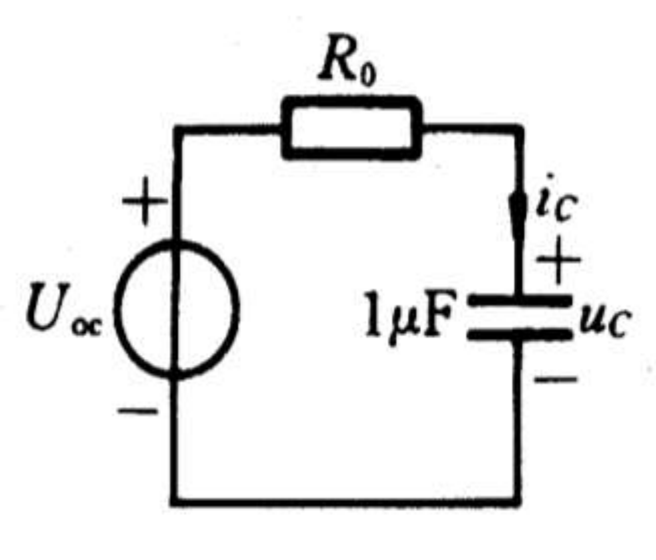


(b)

解：先求等效戴维南电路，得图(b)，其中 $U_{oc}=120\times1=120\text{V}$ $R_0=120+180=300\Omega$

$$\tau = R_0 C = 300\times10^{-6} = 3\times10^{-4}s = 300\mu s$$

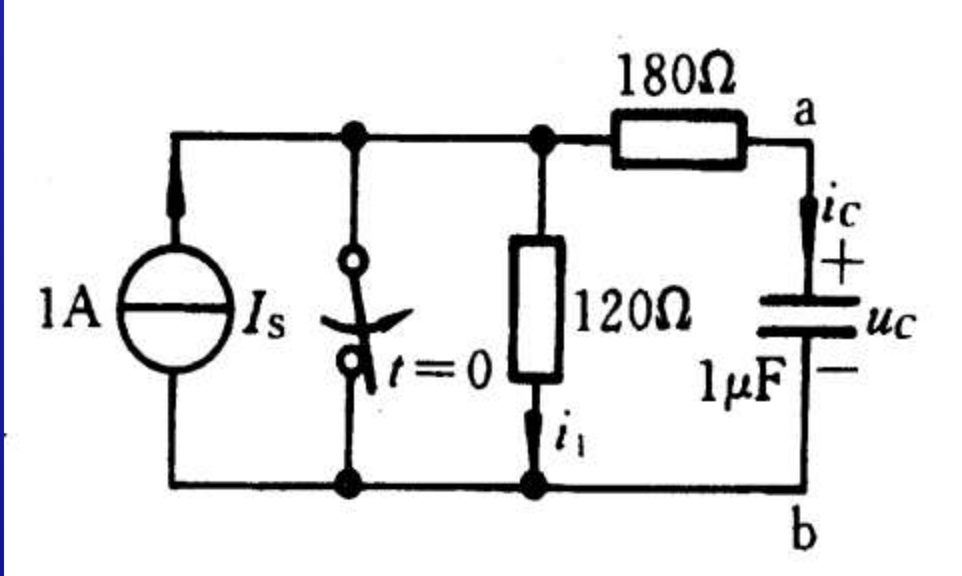
当电路达到新的稳定状态时，**电容相当开路**，可得



$$u_C(\infty) = U_{oc} = 120\text{V}$$

$$u_C(t) = U_{oc}(1-\text{e}^{-\frac{t}{RC}}) = 120(1-\text{e}^{-\frac{1}{3}\times10^4 t})\text{V}\ (t\geq 0)$$

$$i_C(t) = C\frac{\text{d}u_C}{\text{d}t} = 0.4\text{e}^{-\frac{1}{3}\times10^4 t}\text{A} \qquad (t>0)$$

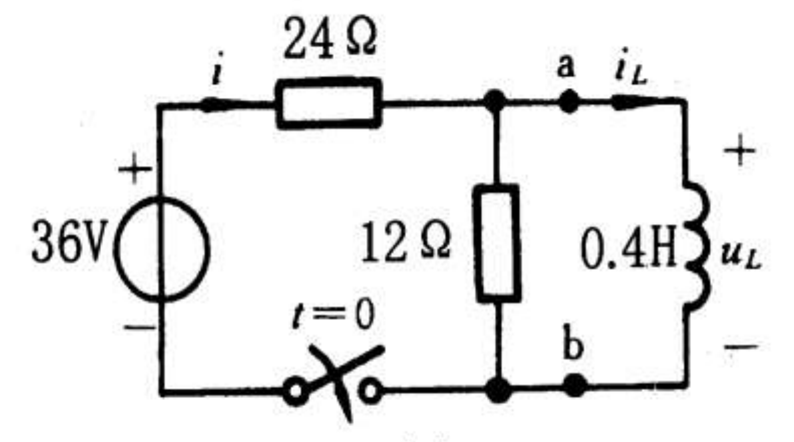


(a)

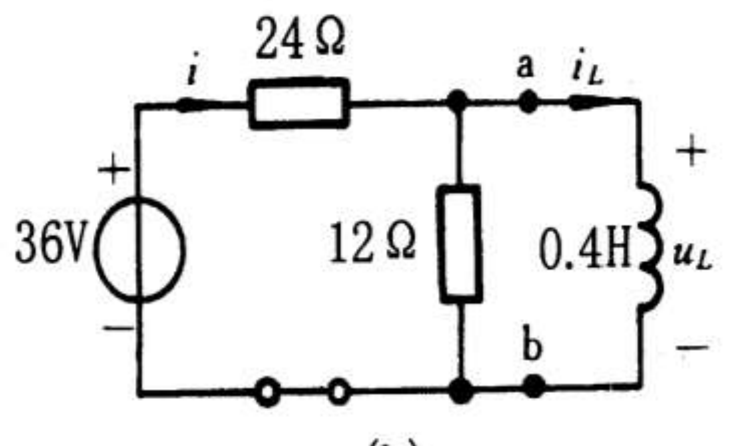
图(a)用KCL可得

$$i_1(t) = I_S - i_C(t) = (1 - 0.4e^{-\frac{1}{3}\times 10^4 t})\text{A}, \quad (t > 0)$$

例15 图(a)电路原已稳定，求$t\geq 0$的电感电流和电感电压。



(a)

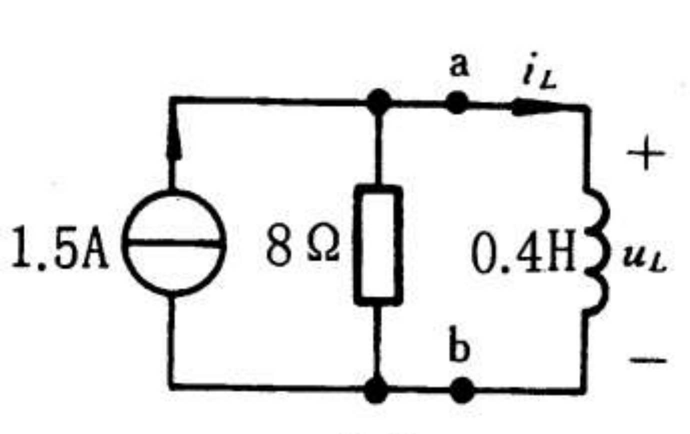


(b)

解：换路后如图(b)，开关闭合瞬间电感电压有界，电感电流不能跃变，即初始状态为0, 则：

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

将图(b)电感以外的电路用诺顿等效电路代替，得到图(c)电路。求得时间常数为：



(c)

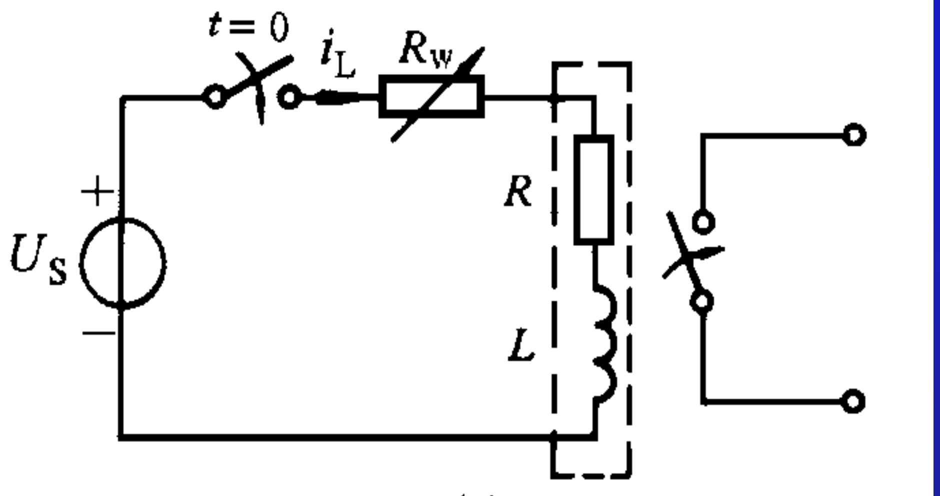
$$\tau = \frac{L}{R_o} = \frac{0.4}{8} = 0.05s$$

有：$i_L(\infty) = 0$

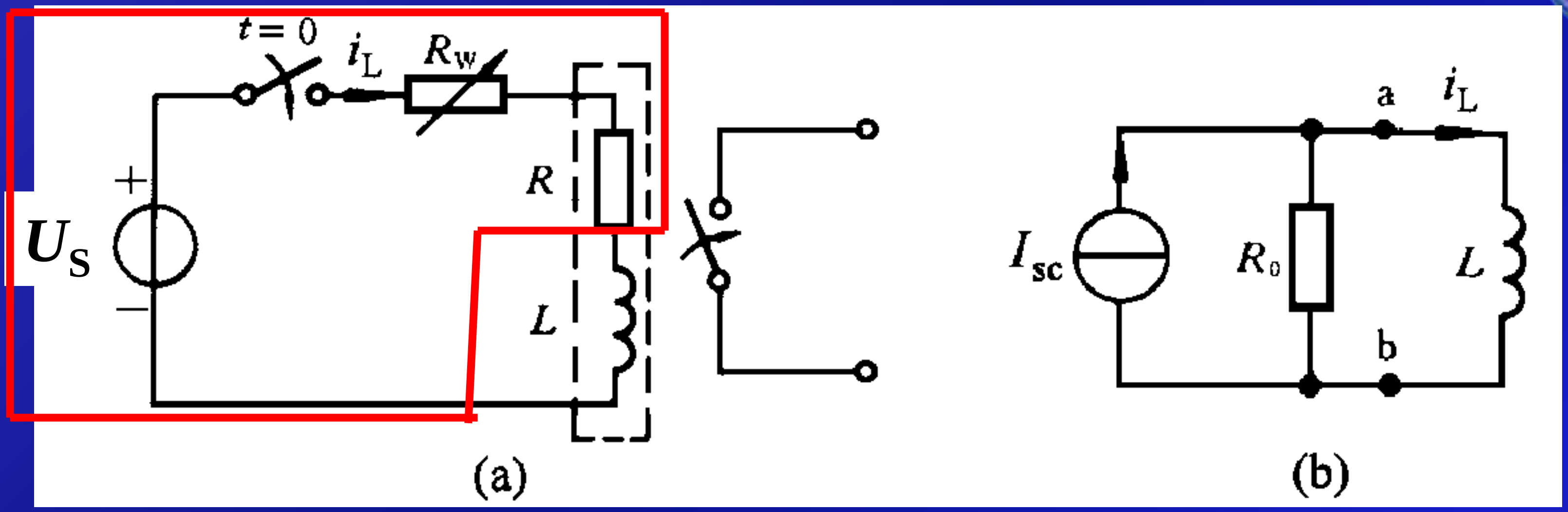
$$\therefore i_L(t) = 1.5(1 - e^{-20t})A \qquad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = 0.4 \times 1.5 \times 20e^{-20t} = 12e^{-20t}V \qquad (t > 0)$$

例16 图(a)为一继电器延时电路模型。继电器参数：R=100Ω，L=4H，当线圈电流达到6mA时，继电器动作，将触头接通。从开关闭合到触头接通时间称为延时时间。为改变延时时间，在电路中串联一个电位器，阻值从零到900Ω 间变化。若U_S=12V，试求电位器电阻值变化所引起的延时时间的变化范围.



(a)



解：开关闭合前电路处于零状态，$i_L(0^-)=0$。

由换路定则得：$i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$。用图(b)所示诺顿等效电路代替，其中：

$$R_o = R + R_W \qquad I_{sc} = \frac{U_S}{R+R_W} = \frac{U_S}{R_o}$$

电感电流的零状态响应表达式为:

$$i_L(t)=\frac{U_S}{R_o}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}),t\geq 0$$

设t_0为延时时间，则有:

$$\boldsymbol{i}_L(\boldsymbol{t}_0)=\frac{\boldsymbol{U}_S}{\boldsymbol{R}_o}(1-e^{-\frac{\boldsymbol{t}_0}{\tau}})=6\text{mA}$$

由此求得

$$t_0=\tau\ln\left[\frac{R_o i_L(t_0)}{V_S}-1\right]$$

当R_w=0Ω时, τ =0.04s

$$t_0 = 0.04\ln\left[\frac{100\times 6\times 10^{-3}}{12}-1\right] = 2.05\text{ms}$$

当R_w=900Ω时, τ =0.004s

$$t_0 = 0.004\ln\left[\frac{1000\times 6\times 10^{-3}}{12}-1\right] = 2.77\text{ms}$$