知识点Z4.27

功率谱

主要内容：

1.信号功率的定义

2.功率有限信号及其相关函数

3.功率密度谱的定义

基本要求：

1.了解信号的功率和功率有限信号相关函数的基本概念

2.了解功率有限信号的功率密度谱的基本概念

3.了解功率有限信号的功率密度谱和自相关函数的关系

Z4.27功率谱

1. 信号功率

定义：时间（-∞, ∞）区间上信号$f(t)$的平均功率。

$$P \overset{def}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$ 复函数

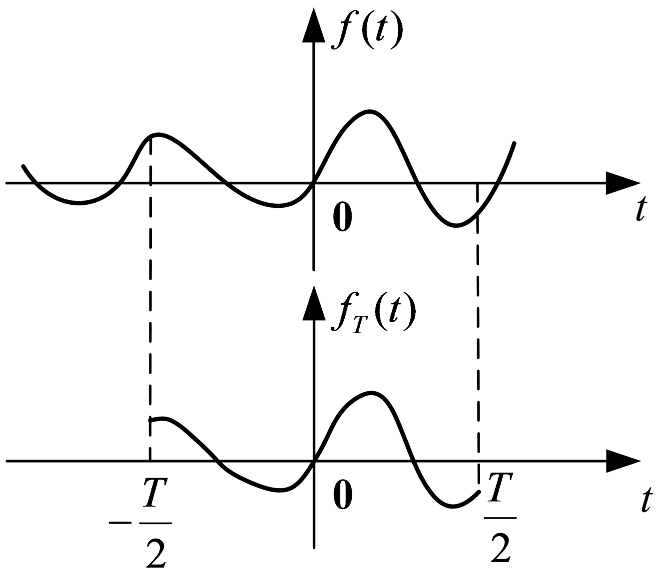
$$P \overset{def}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\,\mathrm{d}t$$ 实函数

如果信号功率有限，即$0<P<\infty$，信号称为功率有限信号，简称功率信号。如周期信号等。

- 若信号能量E有限，则$P=0$；
- 若信号功率P有限，则$E=\infty$。即 $\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\,\mathrm{d}t\to\infty$ 。

4.6能量谱和功率谱

从$f(t)$中截取$|t|\le T/2$的一段，得到一个截尾函数$f_T(t)$，它可以表示为：



$$f_T(t)=f(t)[\varepsilon(t+\frac{T}{2})-\varepsilon(t-\frac{T}{2})]$$

如果T是有限值，则$f_T(t)$的能量也是有限的。令

$$F_T(j\omega)=\mathcal{F}[f_T(t)]$$

由帕斯瓦尔能量方程，$f_T(t)$的能量E_T可表示为：

$$E_T=\int_{-\infty}^{\infty}f_T^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_T(j\omega)|^2d\omega$$

4.6能量谱和功率谱

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F_T(j\omega)|^2 d\omega$$

由于
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt$$

***f*(*t*)的平均功率为：**

$$P \overset{def}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(j\omega)|^2}{T}d\omega$$

- 当T增加时，$f_T(t)$的能量增加，$|F_T(j\omega)|^2$也增加；
- 当T→∞时，$f_T(t) \to f(t)$，此时$|F_T(j\omega)|^2/T$可能趋于一极限；
- 定义$|F_T(j\omega)|^2/T$为$f(t)$的功率密度函数，简称功率谱。

2. 功率密度谱

定义：单位频率的信号功率。

在频带df内信号的功率为 P(ω) df，因而信号在整个频率区间（-∞, ∞）的平均功率为：

$$P=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{P}(\omega)\,\mathrm{d}f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{P}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

比较得：

$$\boxed{\mathrm{P}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{T}}$$

信号的功率谱P (ω) 是ω的偶函数，它只取决于频谱函数的模量，而与相位无关。单位：W·s。

3. 功率密度谱与自相关函数的关系

若$f_1(t)$和$f_2(t)$是功率有限信号，此时相关函数的定义为：

$$\left.\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\,t] \\ R_{21}(\tau) &= \lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t-\tau)f_2(t)\,\mathrm{d}\,t] \end{aligned}\right\}$$

自相关函数：

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\,t]$$

两边取傅里叶变换，得：

$$\mathcal{F}[R(\tau)] = \mathcal{F}[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t-\tau)\,\mathrm{d}t]$$

$$= \mathcal{F}[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)f_T(t-\tau)\,\mathrm{d}t]$$

$$= \mathcal{F}\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[f_T(\tau)*f_T(-\tau)]\}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|F_T(j\omega)\right|^2$$

$$= \mathcal{P}(\omega)$$

4.6能量谱和功率谱

根据前面推导：

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{P}(\omega) &= \mathcal{F}[R(\tau)] \\ R(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{P}(\omega)] \end{aligned}\right\}$$

$$R(\tau) \longleftrightarrow \mathcal{P}(\omega)$$

结论：功率有限信号的功率谱P(ω)与自相关函数*R*(τ)是一对傅里叶变换，称为维纳-欣钦(Wiener-Khintchine)关系。

$$\boxed{R(\tau) = \lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t-\tau)\,\mathrm{d}t]} \Longleftrightarrow \boxed{\mathcal{P}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(j\omega)|^2}{T}}$$