知识点Z1.10

冲激函数的尺度变化

主要内容：

1. $\delta(at)$的定义

2.冲激函数和冲激偶函数的奇偶性

基本要求：

1.掌握冲激函数尺度和时移的重要公式

2.掌握冲激函数和冲激偶函数的奇偶性

Z1.10 冲激函数的尺度变化

1. $\delta(at)$ 的定义

$$\delta^{n}(at)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{a^{n}}\delta^{n}(t)$$

特例：

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

证明：

若$a>0$,则$|a|=a$,令$x=at$,则上式可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(\frac{x}{a})\frac{dx}{|a|}=\frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

若$a<0$,则$|a|=-a$,有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)dt=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(x)\varphi(\frac{x}{a})\frac{dx}{-|a|}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(\frac{x}{a})\frac{dx}{|a|}=\frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

1.2 基本信号

2. 推广结论

(1) $\delta(at-t_0)=\delta[a(t-\frac{t_0}{a})]=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$

(2) 当$a=-1$时 $\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t)$

$\delta(-t)=\delta(t)$ 为偶函数

$\delta'(-t)=-\delta'(t)$ 为奇函数

例1 **计算** $\int_{-\infty}^{\infty}(t-2)^2\delta'(-t)\,\mathrm{d}t$

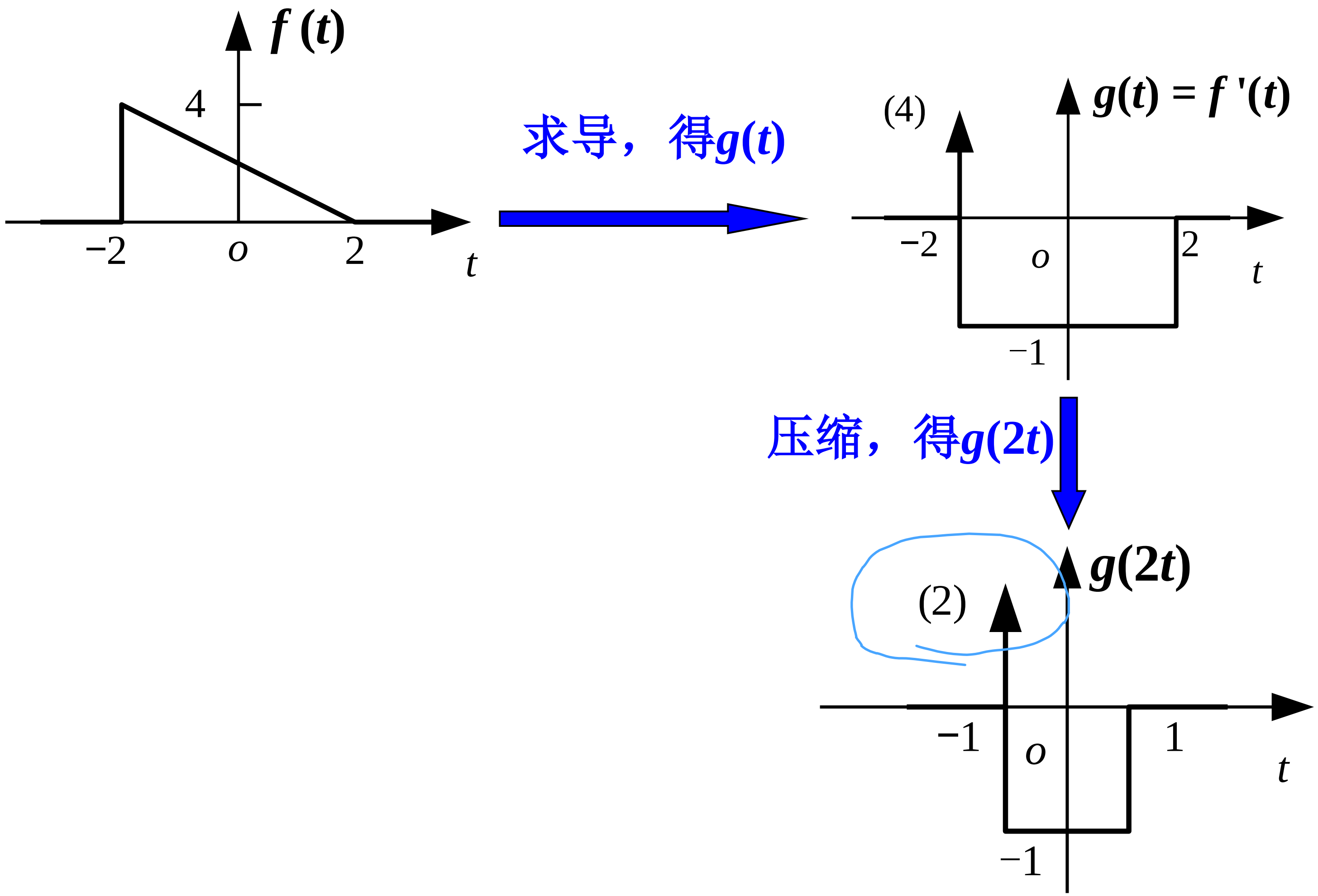
$$=\int_{-\infty}^{\infty}-(t-2)^2\delta'(t)\,\mathrm{d}t$$

δ'(t)的定义： $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t=-f'(0)$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[-(t-2)^2]\Big|_{t=0}=2(t-2)\Big|_{t=0}=-4$$

1.2 基本信号

例2 已知 $f(t)$，画出 $g(t) = f'(t)$ 和 $g(2t)$。



例3 计算下列各式。

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2t)}{t} \delta(t) dt$$

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty} (t^3 - 3t^2 + 5t - 1)\delta'(t-1) dt$$

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + 5)\delta(\frac{t}{2}) dt$$

(4) $$\int_{-\infty}^{t} (2-x)\delta'(x) dx$$

1.2 基本信号

解：

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2t)}{t}\delta(t)dt$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2t)}{t}$$

$$=2$$

1.2 基本信号

解：

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3-3t^2+5t-1)\delta'(t-1)dt$

$$=-(t^3-3t^2+5t-1)'\big|_{t=1}$$

$$=-(3t^2-6t+5)\big|_{t=1}$$

$$=-2$$

1.2 基本信号

解：

$$(3)\quad \int_{-\infty}^{\infty}(t^3+5)\delta(\frac{t}{2})dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+5)\cdot 2\delta(t)dt$$

$$=2(t^3+5)\Big|_{t=0}$$

$$=10$$

1.2 基本信号

解：

$$(4)\quad \int_{-\infty}^{t}(2-x)\delta'(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{t}[2\delta'(x)-(-1)\delta(x)]dx$$

$$=2\delta(t)+\varepsilon(t)$$

- 第一项：$\int_{-\infty}^{t} 2\delta'(x)\,dx = 2\delta(t)$
  - 这里用到了δ函数的一个性质：$\int_{-\infty}^{t} \delta'(x)\,dx = \delta(t)$，因为δ函数的积分是一个阶跃函数，其导数（δ函数的导数）回到了δ函数。
- 第二项：$\int_{-\infty}^{t} -x\delta'(x)\,dx$
  - 利用分部积分（积分的乘积规则），设$u=-x$，$dv=\delta'(x)dx$；则$du=-dx$，$v=\delta(x)$。积分变为：

$$-x\delta(x)|_{-\infty}^{t}+\int_{-\infty}^{t}\delta(x)\,dx$$

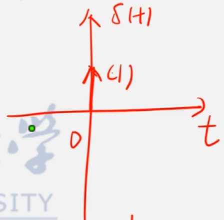
  - 在$x=t$时，δ函数为0，因此第一个项消失，剩下的积分是δ函数在区间$[-\infty,t]$上的积分，等于1，因此结果为$\varepsilon(t)$，这里$\varepsilon(t)$是阶跃函数。

最终结果：

$$2\delta(t)+\varepsilon(t)$$

$\int_{-\infty}^{t}(2-x)\delta'(x)dx$

$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$

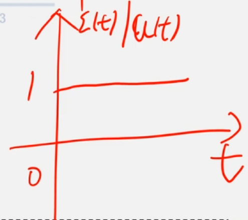


$\delta'(t)$ 奇函数

$\delta'(t)=-\delta'(-t)$ $\quad\delta(t)=\delta(-t)$

$\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)d\tau=\delta(\tau)\Big|_{-\infty}^{t}=\delta(t)-\cancel{\delta(-\infty)}=\delta(t)$

$\varepsilon(t)/u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$



① 分部积分

$$\boxed{\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)}$$

② $\boxed{f(t)\cdot\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)}$

$(f(t)\delta(t))'=f'(t)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$

$(f(0)\delta(t))'=f'(0)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$

$f(0)\delta'(t)=f'(0)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$

$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

$\int_{-\infty}^{t}\underbrace{(2-x)}_{f(x)}\delta'(x)dx$

$=\int_{-\infty}^{t}(2-0)\delta'(x)-(-1)\delta(x)dx$

$=\int_{-\infty}^{t}2\delta'(x)+\delta(x)dx$

$=2\delta(x)+\varepsilon(x)\Big|_{-\infty}^{t}$

$=2\delta(t)+\varepsilon(t)-\cancel{2\delta(-\infty)}-\cancel{\varepsilon(-\infty)}$