知识点K2.08

逆z变换：幂级数和部分分式展开

主要内容：

1.幂级数展开法

2.部分分式展开法

3.用性质求逆z变换

基本要求：

掌握正反z变换的方法

K2.08 逆z变换

$F(z)$ 的逆z变换：

$$f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}F(z)z^{k-1}dz,\quad -\infty<k<\infty$$

z 逆变换的计算方法：

（1）反演积分法（留数法）；
（2）幂级数展开法；有局限性
（3）部分分式展开法；
（4）用 z 变换性质求逆 z 变换。组合使用

逆z变换：幂级数和部分分式展开

一般而言，双边序列$f(k)$可分解为因果序列$f_1(k)$和反因果序列$f_2(k)$两部分，即

$$f(k)=f_2(k)+f_1(k)=f(k)\varepsilon(-k-1)+f(k)\varepsilon(k)$$

相应地，其z变换也分为两部分

$$F(z)=F_2(z)+F_1(z),\quad \alpha<|z|<\beta$$

其中

$$F_1(z)=Z[f(k)\varepsilon(k)]=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k},\quad |z|>\alpha$$

$$F_2(z)=Z[f(k)\varepsilon(-k-1)]=\sum_{k=-\infty}^{-1}f(k)z^{-k},\quad |z|<\beta$$

已知象函数$F(z)$时，根据给定的收敛域不难由$F(z)$分解为$F_1(z)$和$F_2(z)$，分别求对应的原序列$f_1(k)$和$f_2(k)$，根据线性性质，将两者相加原序列 $f(k)$。

1、幂级数展开法

根据z变换的定义，因果序列和反因果序列的象函数分别是z^{-1}和z的幂级数; 其系数就是相应的序列值。

例： 已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\dfrac{z^2}{z^2-z-2}$

其收敛域如下，分别求其对应的原序列 $f(k)$。

(1) $|z|>2$; (2) $|z|<1$; (3) $1<|z|<2$。

逆z变换：幂级数和部分分式展开

解： (1) 收敛域在半径为2的圆外，故 $f(k)$为因果序列。

将$F(z)$ (分子分母按z的降幂排列) 展开为z^{-1}的幂级数：

$$F(z)=\frac{z^2}{z^2-z-2}=1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\cdots$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\cdots \\ \hline
z^2-z-2 & z^2 \\
 & z^2-z-2 \\ \hline
 & z+2 \\
 & z-1-2z^{-1} \\ \hline
 & 3+2z^{-1} \\
 & \cdots
\end{array}$$

则： $f(k)=\{\ 1,\quad 1,\quad 3,\quad 5,\quad \cdots\ \}$

$\uparrow k=0$

逆z变换：幂级数和部分分式展开

(2) $F(z)$的收敛域在半径为1的圆内，故$f(k)$为反因果序列。将$F(z)$ (分子分母按z 的升幂排列) 展开为z 的幂级数。

$$F(z)=\frac{z^2}{z^2-z-2}=\frac{z^2}{-2-z+z^2}$$

$$=-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\cdots$$

于是，得原序列：

$$f(k)=\left\{\cdots,\ \frac{5}{16},\ -\frac{3}{8},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ 0\right\}$$

$$\uparrow k=-1$$

(3) 收敛域为$1<|z|<2$的环形，其原序列$f(k)$为双边序列。将$F(z)$展开为部分分式，有

$$F(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2},\quad 1<|z|<2$$

上式第一项属于因果序列的象函数$F_1(z)$，第二项属于反因果序列的象函数$F_2(z)$，即

$$F_1(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1},|z|>1 \qquad F_2(z)=\frac{\frac{2}{3}z}{z-2},|z|<2$$

逆z变换：幂级数和部分分式展开

将它们分别展开为z^{-1}及z的幂级数，有

$$F_1(z)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}-\frac{1}{3}z^{-3}+\cdots$$

$$F_2(z)=\cdots+\frac{1}{12}z^{3}-\frac{1}{6}z^{2}-\frac{1}{3}z$$

于是，得原序列：

$$f(k)=\left\{\cdots,\ -\frac{1}{12},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ \underset{\uparrow k=0}{\frac{1}{3}},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \cdots\right\}$$

上述方法求逆z变换，原序列通常难以写成闭合形式。

2、部分分式展开法

$$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+.....+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_1 z+a_0},m\le n$$

(1) *F*(*z*)均为单极点，且不为0

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_0}{z}+\frac{K_1}{z-z_1}+....+\frac{K_n}{z-z_n}$$

其中

$$K_i=(z-z_i)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=z_i}$$

所以：

$$F(z)=K_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i z}{z-z_i}$$

$$F(z)=K_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i z}{z-z_i}$$

根据收敛域，将上式划分为$F_1(z)(|z|>\alpha)$和$F_2(z)(|z|<\beta)$两部分，由如下已知变换对，来求原函数。

$$\delta(k)\longleftrightarrow 1$$

$$a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{z}{z-a},\ |z|>|a|$$

$$-a^k\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow\frac{z}{z-a},\ |z|<|a|$$

逆z变换：幂级数和部分分式展开

例1 已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$ ，分别求***f*(*k*)**。

$$(1)\ |z|>2;\quad (2)\ |z|<1;\quad (3)\ 1<|z|<2$$

解：

$$F(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z+1}+\frac{2}{3}\frac{z}{z-2}$$

(1) |z|>2，因果序列 $f(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$

(2) |z|>1，反因果序列 $f(k)=[-\frac{1}{3}(-1)^k-\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(-k-1)$

(3) 1<|z|<2，双边序列 $f(k)=\frac{1}{3}(-1)^k\varepsilon(k)-\frac{2}{3}(2)^k\varepsilon(-k-1)$

逆z变换：幂级数和部分分式展开

例2 $F(z)=\dfrac{z(z^3-4z^2+\frac{9}{2}z+\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z-1)(z-2)(z-3)}\quad 1<|z|<2$ 求 $f(k)$。

解：

$$F(z)=\frac{-z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{z-3}$$

由收敛域可知，上式前两项的收敛域满足|z|>1 ，后两项满足|z|<2 。

$$f(k)=-(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)+2\varepsilon(k)+(2)^k\varepsilon(-k-1)-(3)^k\varepsilon(-k-1)$$

逆z变换：幂级数和部分分式展开

(2) $F(z)$有共轭单极点 $z_{1,2}=c+jd=\alpha e^{\pm j\beta}$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_1}{z-c-jd}+\frac{K_1^*}{z-c+jd}$$

令 $K_1=|K_1|e^{j\theta}$ ，得

$$F(z)=\frac{|K_1|e^{j\theta}z}{z-\alpha e^{j\beta}}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}z}{z-\alpha e^{-j\beta}}$$

若 $|z|>\alpha$ ，则 $f(k)=2|k_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$

若 $|z|<\alpha$ ，则 $f(k)=-2|k_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(-k-1)$

逆z变换：幂级数和部分分式展开

例： $F(z)=\dfrac{z}{z^2-4z+8}$

(1) $|z|>2\sqrt{2}$，求 $f(k)$；

(2) $|z|<2\sqrt{2}$，求 $f(k)$。

解： $F(z)=\dfrac{z}{[z-(2+j2)][z-(2-j2)]}$

$$=-j\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-(2+j2)}+j\frac{1}{4}\frac{z}{z-(2-j2)}$$

$$=\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{z}{(z-2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})}+\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}\frac{z}{(z-2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})}$$

逆z变换：幂级数和部分分式展开

（1）$|z|>2\sqrt{2}$， $f(k)$为因果序列

$$f(k)=[\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}(2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}})^k+\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}(2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{2}})^k]\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{4}(2\sqrt{2})^k[e^{j(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})}+e^{-j(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})}]\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^k\cos(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})\varepsilon(k)$$

（2） $|z|<2\sqrt{2}$， $f(k)$ 为反因果序列

$$f(k)=-\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^k\cos(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})\varepsilon(-k-1)$$

(3) $F(z)$有重极点

$$F(z)=F_a(z)+F_b(z)=\frac{K_{11}z}{(z-a)^r}+\frac{K_{12}z}{(z-a)^{r-1}}+\ldots.+\frac{K_{1r}z}{(z-a)}+F_b(z)$$

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}\left[(z-a)^r\frac{F(z)}{z}\right]\Big|_{z=a}$$

$F(z)$展开式中含$\dfrac{z}{(z-a)^r}$项$(r>1)$，则逆变换为：

若$|z|>a$，对应原序列为因果序列：

$$\frac{k(k-1)\ldots..(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}\varepsilon(k)$$

逆z变换：幂级数和部分分式展开

以 $|z|>a$ 为例：

当 r=2 时，为 $ka^{k-1}\varepsilon(k)$

当 r=3 时，为 $\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)$

$$\longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)^r}$$

推导记忆：

$$\mathscr{Z}[a^k\varepsilon(k)]=\frac{z}{z-a}$$

两边对a求导得：$\mathscr{Z}[ka^{k-1}\varepsilon(k)]=\frac{z}{(z-a)^2}$

再对a求导得：$\mathscr{Z}[k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)]=\frac{2z}{(z-a)^3}$

$$\mathscr{Z}[\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)]=\frac{z}{(z-a)^3}$$

逆z变换：幂级数和部分分式展开

例： 已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^3+z^2}{(z-1)^3}$ ，$|z|>1$。求原函数。

解：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}=\frac{K_{11}}{(z-1)^3}+\frac{K_{12}}{(z-1)^2}+\frac{K_{13}}{z-1}$$

$$K_{11}=(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=1}=2\,;\quad K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\bigg|_{z=1}=3;$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\bigg|_{z=1}=1.$$

$$F(z)=\frac{2z}{(z-1)^3}+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

$$f(k)=\left[\frac{2}{2!}k(k-1)+3k+1\right]\varepsilon(k)=(k+1)^2\varepsilon(k)$$

3、用性质求逆z变换

例1 $F(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$，$|z|>3$，**求原函数 $f(k)$。**

解：

<方法1>

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z(z-2)(z-3)}=\frac{\frac{1}{6}}{z}+\frac{-\frac{1}{2}}{z-2}+\frac{\frac{1}{3}}{z-3}$$

$$F(z)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\frac{z}{z-2}+\frac{1}{3}\frac{z}{z-3}$$

$$f(k)=\frac{1}{6}\delta(k)-(\frac{1}{2}\times 2^{k}-\frac{1}{3}\times 3^{k})\varepsilon(k)=\frac{1}{6}\delta(k)-(2^{k-1}-3^{k+1})\varepsilon(k)$$

逆z变换：幂级数和部分分式展开

<方法2>

$$F(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{-1}{z-2}+\frac{1}{z-3}$$

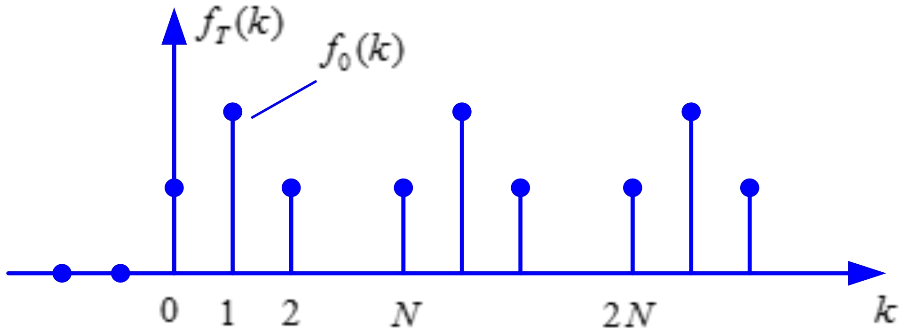
$$=z^{-1}\left(\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{z-3}\right)$$

由移位性质：

$$f(k)=-2^{k-1}\varepsilon(k-1)+3^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$=(3^{k-1}-2^{k-1})\varepsilon(k-1)$$

例2 因果周期信号$f_T(k)$如图，求$f_T(k)$的单边z变换$F(z)$。



解： 设第一周期内信号为 $f_0(k)$，则$f_T(k)$可表示为

$$f_T(k) = f_0(k) + f_0(k-N) + f_0(k-2N) + \cdots$$

$$f_0(k) \leftrightarrow F_0(z), \qquad f_T(k) \leftrightarrow F(z)$$

$$F(z) = F_0(z) + z^{-N}F_0(z) + z^{-2N}F_0(z) + \cdots$$

$$= F_0(z)(1 + z^{-N} + z^{-2N} + \cdots) = \frac{F_0(z)}{1-z^{-N}} \qquad |z|>1$$