

初值定理和终值定理

知识点K2.07

初值定理和终值定理

主要内容:

初值定理和终值定理

基本要求:

熟练运用初值定理和终值定理



初值定理和终值定理

K2.07 初值定理和终值定理

初值定理适用于右边序列，即适用于 $k < M$ (M 为整数) 时 $f(k)=0$ 的序列。由象函数直接求序列的初值 $f(M)$, $f(M+1), \dots$ 而不必求得原序列。

1、初值定理：

如果序列在 $k < M$ 时， $f(k)=0$ ， $f(k) \longleftrightarrow F(z)$ ， $\alpha < |z| < \infty$
则序列的初值

$$f(M) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^M F(z)$$

对因果序列 $f(k)$,

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$



初值定理和终值定理

证明:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=M}^{\infty} f(k)z^{-k} \\ &= f(M)z^{-M} + f(M+1)z^{-(M+1)} + f(M+2)z^{-(M+2)} + \dots \end{aligned}$$

两边乘 z^M , 得

$$z^M F(z) = f(M) + f(M+1)z^{-1} + f(M+2)z^{-2} + \dots$$

上式取 $z \rightarrow \infty$, 得

$$f(M) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^M F(z)$$



初值定理和终值定理

2、终值定理:

如果序列存在终值, 即:

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$$

则序列的终值

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

注意: 收敛域要求含单位圆。

