知识点Z4.4

三角形式的傅里叶级数

主要内容：

1.周期信号三角形式的傅里叶级数

2.狄里赫利条件

3.吉布斯现象

基本要求：

1.掌握周期信号三角形式傅里叶级数和谐波的基本概念

2.了解狄里赫利条件

3.了解吉布斯现象的原理

Z4.4周期信号三角形式的傅里叶级数

1.三角形式的傅里叶级数

三角函数集 {1，cos($n\Omega t$)，sin($n\Omega t$)，n=1,2,…}

设周期信号$f(t)$，其周期为T，角频率Ω=2π/T，当满足狄里赫利(Dirichlet)条件时，可展开为三角形式的傅里叶级数。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

系数a_n , b_n称为傅里叶系数。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

直流　n次余弦分量　n次正弦分量

直流分量： $$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t$$

余弦分量系数： $$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

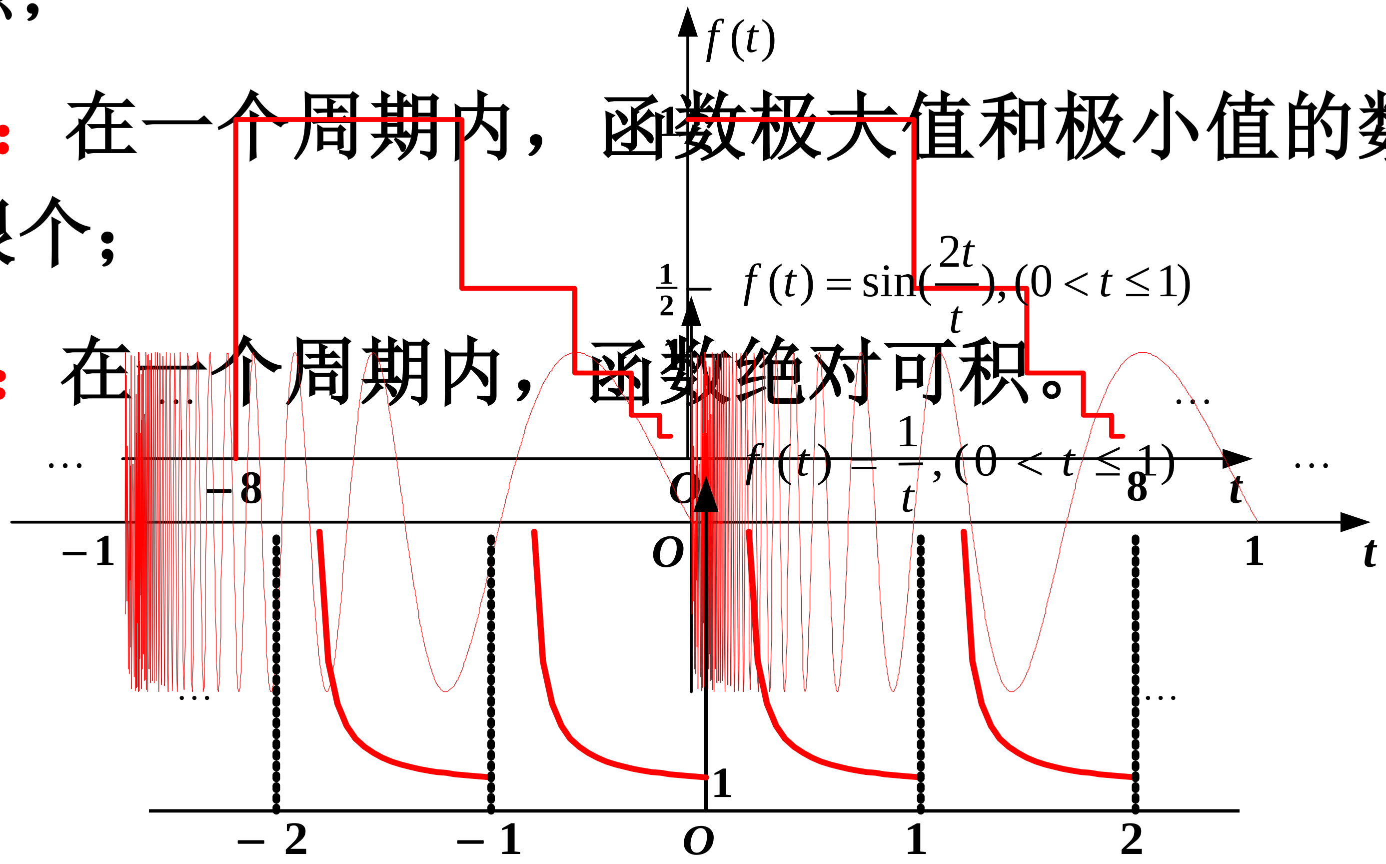
正弦分量系数： $$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

2.狄里赫利(Dirichlet)条件：

条件1：在一个周期内，函数连续或只有有限个第一类间断点；

条件2：在一个周期内，函数极大值和极小值的数目应为有限个；

条件3：在一个周期内，函数绝对可积。



3.余弦形式的傅里叶级数

$$\boxed{f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\Omega t)+b_n\sin(n\Omega t)]}$$

合并**n**次正余弦分量

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$$\begin{cases}A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ \varphi_n=-\arctan\dfrac{b_n}{a_n}\end{cases}\qquad\begin{cases}a_n=A_n\cos\varphi_n\\ b_n=-A_n\sin\varphi_n\end{cases}$$

4.2周期信号的傅里叶级数

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

含义：周期信号可分解为直流和许多余弦分量。

$A_0/2$ 为直流分量；

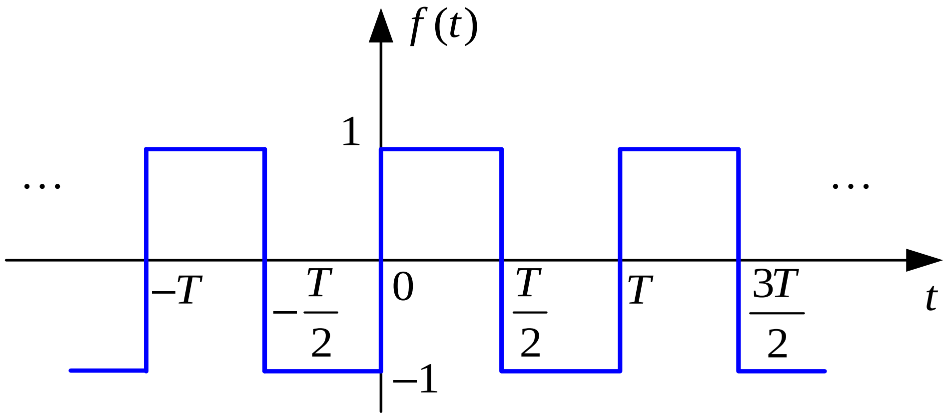
$A_1\cos(\Omega t+\varphi_1)$ 称为基波或一次谐波，角频率与原周期信号相同；

$A_2\cos(2\Omega t+\varphi_2)$ 称为二次谐波；

…

$A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$ 称为n次谐波。

例：将图示方波信号*f(t)*展开为傅里叶级数。



解：

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-1)\times\cos(n\Omega t)dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}1\times\cos(n\Omega t)dt$$

$$=\frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}[-\sin(n\Omega t)]\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}[\sin(n\Omega t)]\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

考虑到Ω=2π/T，可得： $a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-1)\times\sin(n\Omega t)dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}1\times\sin(n\Omega t)dt$$

$$=\frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}[\cos(n\Omega t)]\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}[-\cos(n\Omega t)]\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{2}{T}\frac{T}{n2\pi}\{[1-\cos(-n\pi)]+[1-\cos(n\pi)]\}$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-\cos(-n\pi)]=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

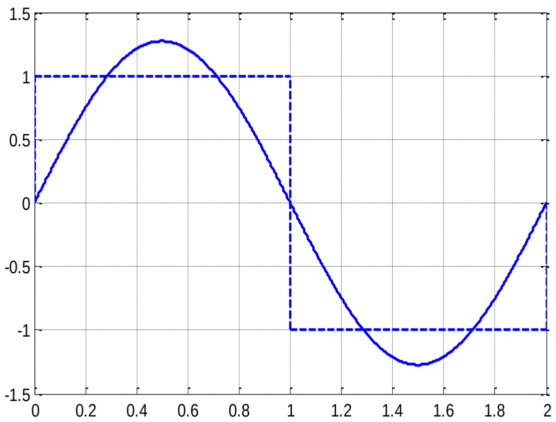
信号的傅里叶级数展开式为：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

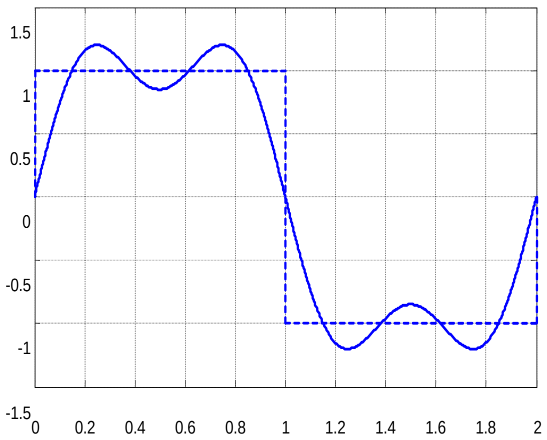
$$=0+\frac{4}{\pi}[\sin(\Omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\Omega t)+\cdots+\frac{1}{n}\sin(n\Omega t)+\cdots],\quad n=1,3,5,\cdots$$

直流　基波　3次谐波　n次谐波

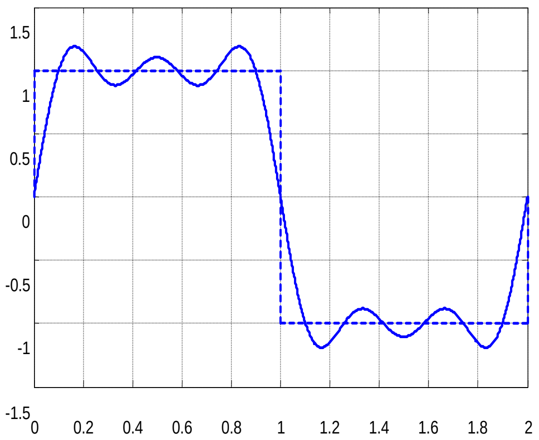
4.2周期信号的傅里叶级数



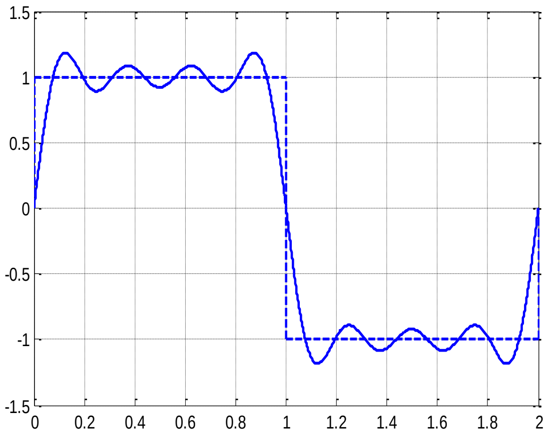
（a）1次谐波（基波）



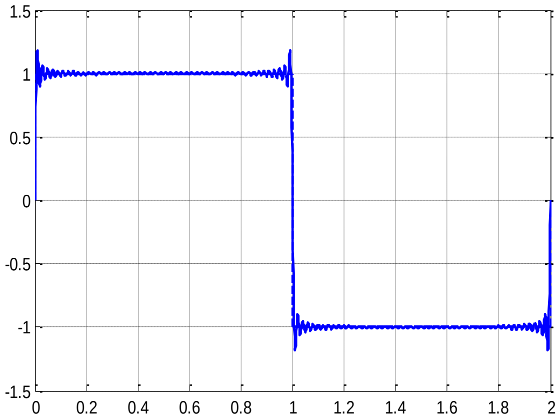
（b）1&3次谐波



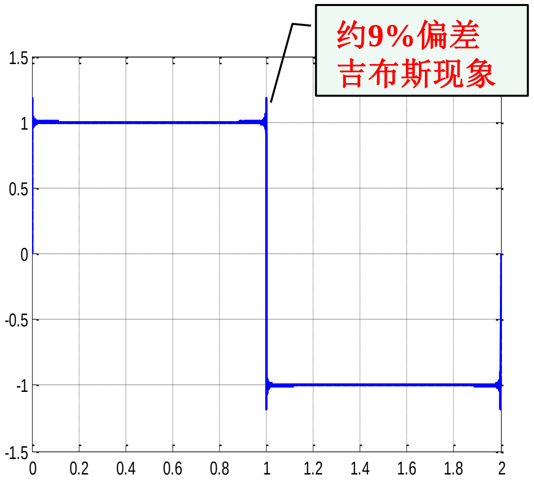
（c）1&3&5次谐波



（d）1&3&5&7次谐波



（e）1&3&…&99次谐波



（f）1&3&…&999次谐波

4.吉布斯现象

用有限项傅里叶级数表示有间断点的信号时，在间断点附近不可避免的会出现振荡和超调量。超调量的幅度不会随所取项数的增加而减小。只是随着项数的增多，振荡频率变高，并向间断点处压缩，从而使它所占有的能量减少。

当选取的项数很大时，该超调量趋于一个常数，大约等于总跳变值的9%，并从间断点开始以起伏振荡的形式逐渐衰减下去。这种现象称为吉布斯现象。