知识点K2.10

z变换与拉普拉斯变换的关系

主要内容：

z变换与拉普拉斯变换的关系

基本要求：

理解z变换与拉普拉斯变换的关系

1、Z平面与S平面的映射关系

$$z = e^{sT} \qquad s = \frac{1}{T}\ln z$$

式中T是序列的时间间隔，重复频率 $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$。

为了说明s与z的映射关系，将s表示成直角坐标形式，而把 z 表示成极坐标形式，即：

$$s = \sigma + j\omega \qquad z = re^{j\theta}$$

$$z = re^{j\theta} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

于是，得到

$$r = e^{\sigma T} = e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}} \qquad \theta = \omega T = 2\pi\frac{\omega}{\omega_S}$$

z变换与拉普拉斯变换的关系

上式表明s平面与z平面有如下的映射关系：

(1) s平面上的虚轴($\sigma=0$，$s=j\omega$)映射到z平面是单位圆$r=1$，其右半平面$\sigma>0$映射到 z平面的单位圆外$r>1$，而左半平面映射到 z平面的单位圆内$r<1$。

(2) s平面的实轴($s=\sigma$，$\omega=0$) 映射到z平面的正实轴；原点（$s=0$）映射到z平面的正实轴上一点($r=1,\theta=0$) 。

(3) 由于$e^{j\theta}$ 是以 ω_s为周期的周期函数，因此在s平面上沿虚轴移动对应于z平面上沿单位圆周期旋转，每平移ω_s，则沿单位圆转一圈。所以 $s\sim z$映射并不是单值的。

2、s变换与z变换的转换公式

z变换的定义式是通过理想取样信号的拉普拉斯变换引出的，由此，离散序列的z变换和理想取样信号的拉普拉斯变换之间具有如下关系：

$$F(z)\Big|_{z=e^{sT}} = F_s(s)$$

表明： z变换式中令 $z = e^{sT}$ ，则变换式就成为相应的理想取样信号的拉普拉斯变换。

如果进一步地，令拉普拉斯变换中的变量s=jω，则

$$F(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = F_s(j\omega)$$

上式变为与序列相对应的理想取样信号的傅里叶变换。

z变换与拉普拉斯变换的关系

讨论：若连续信号$f(t)$由N项指数信号相加而成(单极点)：

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+\ldots+f_N(t)=\sum_{i=1}^{N}f_i(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{p_i t}\varepsilon(t)$$

容易求得，其拉普拉斯变换为：

$$F(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-p_i}$$

对应的采样离散序列$f(k)$由N项指数序列相加而成

$$f(k)=f_1(k)+f_2(k)+\ldots+f_N(k)=\sum_{i=1}^{N}f_i(k)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{p_i kT}\varepsilon(k)$$

它的z变换为

$$F(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i z}{z-e^{p_i T}}$$

z变换与拉普拉斯变换的关系

$$F(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-p_i}$$

$$F(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i z}{z-e^{p_i T}}$$

结论： 如果$F(s)$有N个单极点 p_i，则相应的z变换即为 $F(z)$。

例： 已知拉普拉斯变换为 $\dfrac{1}{s+a}$，求其对应离散序列的z变换。

解：

$$F(s)=\frac{1}{s+a}$$

只有一个极点： $p=-a$

直接写出z变换： $F(z)=\dfrac{z}{z-e^{pT}}=\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$

事实上，该连续信号为： $e^{-at}\varepsilon(t)\leftrightarrow F(s)=\dfrac{1}{s+a}$

对应的离散采样序列为： $e^{-akT}\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$