知识点Z3.18

卷积和公式

主要内容：

1. 卷积和的定义
2. 卷积和的计算

基本要求：

掌握卷积和公式

Z3.18 卷积和公式

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i)$$

根据$h(k)$的定义： $\delta(k) \longrightarrow h(k)$

由时不变性： $\delta(k-i) \longrightarrow h(k-i)$

由齐次性： $f(i)\delta(k-i) \longrightarrow f(i)\,h(k-i)$

由叠加性： $\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i) \longrightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i) = f(k), \qquad \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i) = y_{zs}(k)$$

$$y_{zs}(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)$$ 卷积和

3.3 卷积和

卷积和的定义

已知定义在区间（–∞，∞）上的两个函数$f_1(k)$和$f_2(k)$，则定义

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)f_2(k-i)$$

为$f_1(k)$与$f_2(k)$的卷积和，简称卷积；记为

$$f(k)= f_1(k)*f_2(k)$$

注意：求和是在虚设的变量 i 下进行的， i 为求和变量，k 为参变量。结果仍为k 的函数。

$$\boxed{y_{zs}(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)=f(k)*h(k)}$$

3.3 卷积和

若有两个序列 $f_1(k)$与 $f_2(k)$，如果序列 $f_1(k)$是因果序列，即有 $f_1(k)=0, k<0$, 则卷积和可改写为：

$$f(k)=\sum_{i=0}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i)$$

若有两个序列 $f_1(k)$与 $f_2(k)$，如果序列 $f_2(k)$是因果序列，即有 $f_2(k)=0, k<0$, 则卷积和可改写为：

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{k} f_1(i) f_2(k-i)$$

如果序列 $f_1(k)$与 $f_2(k)$均为因果序列，即若$f_1(k)=f_2(k)=0, k<0$, 则卷积和可写为：

$$f(k)=[\sum_{i=0}^{k} f_1(i) f_2(k-i)]\varepsilon(k)$$

例1 $f(k)=a^k\varepsilon(k),\ h(k)=b^k\varepsilon(k)$, 求$y_{zs}(k)$。

解： $y_{zs}(k)=f(k)*h(k)$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f(i)h(k-i)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a^i\varepsilon(i)b^{k-i}\varepsilon(k-i)$$

当$i<0$, $\varepsilon(i)=0$； 当$i>k$时，$\varepsilon(k-i)=0$

$$y_{zs}(k)=\left[\sum_{i=0}^{k}a^ib^{k-i}\right]\varepsilon(k)=b^k\left[\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^i\right]\varepsilon(k)=\begin{cases}b^k\dfrac{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{k+1}}{1-\dfrac{a}{b}}\varepsilon(k) & ,a\neq b\\ b^k(k+1)\varepsilon(k) & ,a=b\end{cases}$$

例2 求 $\varepsilon(k)*\varepsilon(k)$

$$\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\varepsilon(i)\varepsilon(k-i)$$

$$=(\sum_{i=0}^{k}1)\varepsilon(k)=(k+1)\varepsilon(k)$$

例3 求 $a^{k}\varepsilon(k)*\varepsilon(k-4)$

$$a^{k}\varepsilon(k)*\varepsilon(k-4)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a^{i}\varepsilon(i)*\varepsilon(k-4-i)=(\sum_{i=0}^{k-4}a^{i})\varepsilon(k-4)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1-a^{k-3}}{1-a}\varepsilon(k-4), & a\neq 1\\ (k-3)\varepsilon(k-4), & a=1\end{cases}$$

例4 求 $\varepsilon(k-3)*\varepsilon(k-4)$

$$\varepsilon(k-3)*\varepsilon(k-4)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\varepsilon(i-3)\varepsilon(k-4-i)$$

$$=(\sum_{i=3}^{k-4}1)\varepsilon(k-4-3)=(k-6)\varepsilon(k-7)$$

例5 求 $(0.5)^k\varepsilon(k)*1$

$$(0.5)^k\varepsilon(k)*1=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(0.5)^i\varepsilon(i)\times 1$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(0.5)^i=\frac{1}{1-0.5}=2$$