知识点Z4.42

取样定理（时域）

主要内容：

1.时域取样定理

2.奈奎斯特频率

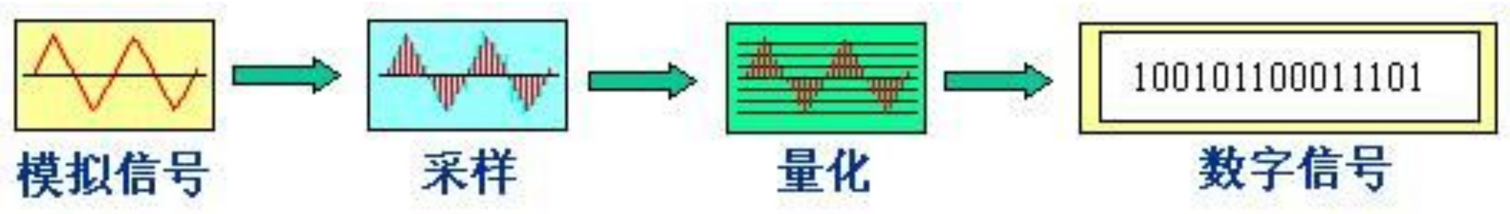
基本要求：

1.掌握时域取样定理的基本概念

2.掌握奈奎斯特频率的概念及计算方法

【重要意义】：取样定理是连续信号与离散信号间的一座桥梁，为其相互转换提供了理论依据。

在一定条件下，一个带限连续信号完全可以用其离散样本值表示。即这些样本值包含了该连续信号的全部信息，用它们可以恢复原信号。



模拟信号的数字化过程

Z4.42 取样定理（时域）

由于 $f_s(t)=f(t)s(t)=f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)$

当 $\omega_S \geq 2\omega_m$ 时，将冲激取样信号通过**低通滤波器**：

$$\boxed{h(t)=T_S\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)\longleftrightarrow}\ H(j\omega)=\begin{cases}T_S, & |\omega|<\omega_C\\ 0, & |\omega|>\omega_C\end{cases}$$

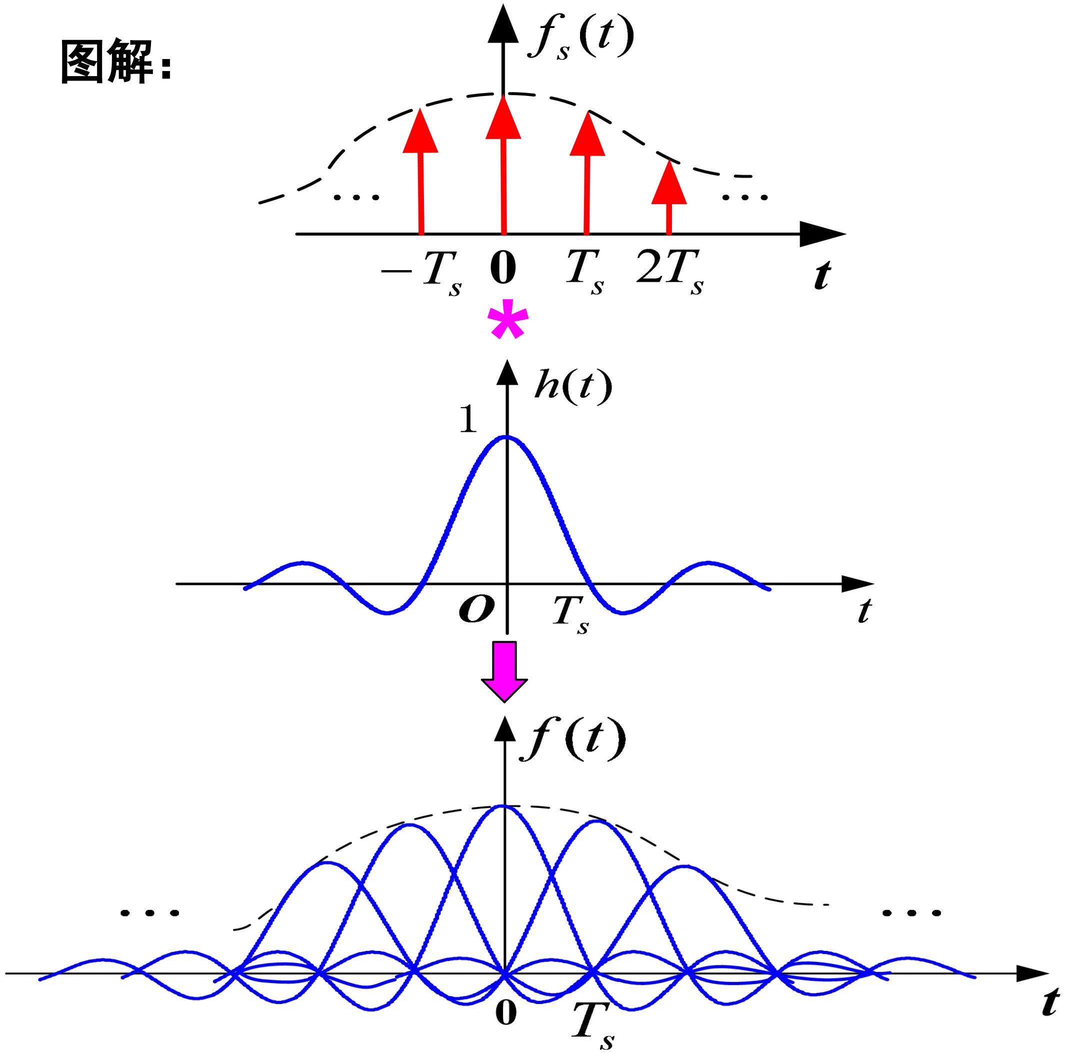
其截止角频率 ω_C 取 $\omega_m<\omega_C<\omega_S-\omega_m$，即可恢复原信号。　为方便，取 $\omega_C=0.5\omega_S$。

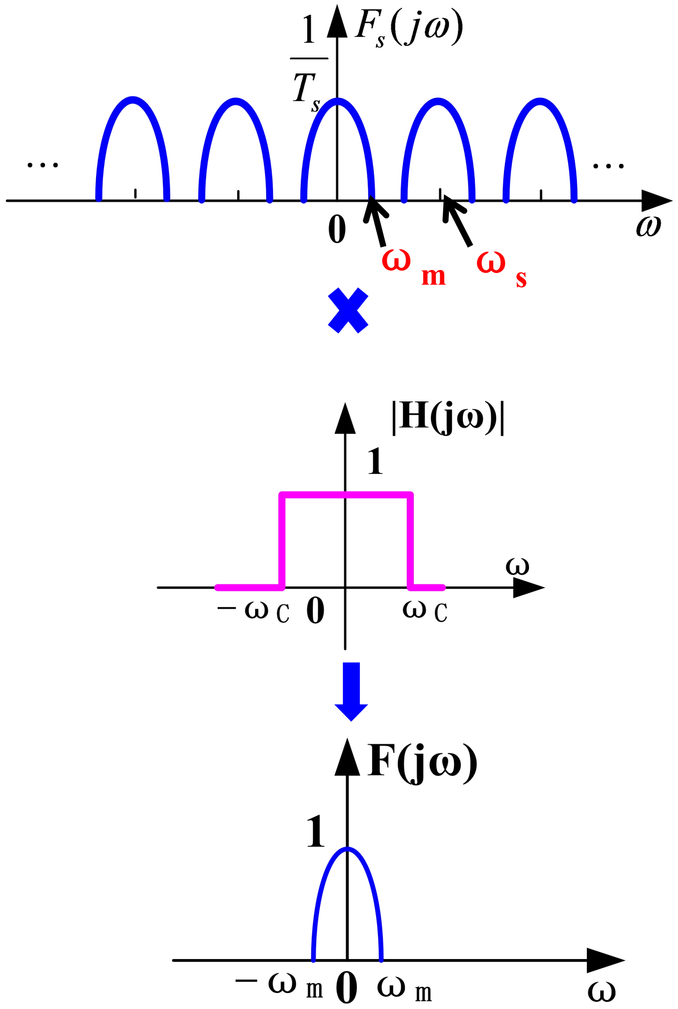
$$f(t)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)\right]*\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\mathrm{Sa}\left[\frac{\omega_s}{2}(t-nT_s)\right]$$

只要已知各取样值 $f(nT_s)$，就可唯一地确定出原信号 $f(t)$。

4.9取样定理

图解：





$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\,\mathrm{Sa}[\frac{\omega_s}{2}(t-nT_s)]$$

时域取样定理：一个频谱在区间$(-\omega_m,\omega_m)$以外为0的带限信号$f(t)$,可唯一地由其在均匀间隔$T_s[T_s<1/(2f_m)]$上的样值点$f(nT_s)$确定。

说明：为恢复原信号，必须满足两个条件：

（1）$f(t)$必须是带限信号；

（2）取样频率不能太低，必须$f_s>2f_m$，或者说，取样间隔不能太大，必须$T_s<1/(2f_m)$；否则将发生混叠。

通常把最低允许的取样频率$f_s=2f_m$称为奈奎斯特频率(Nyquist Sampling Rate)，把最大允许的取样间隔$T_s=1/(2f_m)$称为奈奎斯特间隔(Nyquist Space)。

例： 有限频带信号$f_1(t)$的最高频率为$\omega_{m1}(f_{m1})$，$f_2(t)$的最高频率为$\omega_{m2}(f_{m2})$，对下列信号进行时域抽样，试求使频谱不发生混叠的奈奎斯特频率$\omega_m(f_m)$与奈奎斯特间隔T_s。

(1) $f_1(\alpha t);\quad \alpha \neq 0$

(2) $f_1(t)+f_2(t);$

(3) $f_1(t)*f_2(t);$

(4) $f_1(t)f_2(t);$

(5) $f_1^2(t);$

解： 关键在于求出上述信号的最高频率$\omega_m(f_m)$。

$$\omega_s = 2\omega_m \qquad f_s = 2f_m \qquad T_s = \frac{1}{f_s}$$

4.9取样定理

信号表达式	频谱	最高角频率 ω_m	奈奎斯特角频率 $\omega_s=2\omega_m$
$f_1(\alpha t);\alpha\neq 0$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}F_1(j\frac{\omega}{\alpha})$	$\lvert\alpha\rvert\omega_{m1}$	$2\lvert\alpha\rvert\omega_{m1}$
$f_1(t)+f_2(t)$	$F_1(j\omega)+F_2(j\omega)$	$\max\{\omega_{m1},\omega_{m2}\}$	$2\max\{\omega_{m1},\omega_{m2}\}$
$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(j\omega)F_2(j\omega)$	$\min\{\omega_{m1},\omega_{m2}\}$	$2\min\{\omega_{m1},\omega_{m2}\}$
$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)$	$\omega_{m1}+\omega_{m2}$	$2(\omega_{m1}+\omega_{m2})$
$f_1^2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_1(j\omega)$	$2\omega_{m1}$	$4\omega_{m1}$