知识点K1.15

微分方程的变换解

主要内容：

微分方程的变换解

基本要求：

1.掌握微分方程的暂态分量和稳态分量

2.熟练求解微分方程

K1.15 微分方程的变换解

问题：用拉普拉斯变换求如下n阶系统的微分方程：

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t)$$

系统的初始状态为$y(0\text{-})$, $y^{(1)}(0\text{-})$,…， $y^{(n-1)}(0\text{-})$。

思路：用拉普拉斯变换微分特性

$$y^{(i)}(t) \longleftrightarrow s^i Y(s) - \sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} y^{(p)}(0_-)$$

若$f(t)$在$t = 0$时接入系统，则 $f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^n F(s)$

微分方程的变换解

$$[\sum_{i=0}^{n} a_i s^i]Y(s) - \sum_{i=0}^{n} a_i [\sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} y^{(p)}(0_-)] = [\sum_{j=0}^{m} b_j s^j]F(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i [\sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} y^{(p)}(0_-)]}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}}_{Y_{zi}(s)} + \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}}_{Y_{zs}(s)} F(s) = \frac{M(s)}{A(s)} + \frac{B(s)}{A(s)} F(s)$$

$\longrightarrow$ $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

例 描述某LTI系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2f\,'(t) + 6\,f\,(t)$$

已知初始状态$y(0\text{-}) = 1$，$y'(0\text{-}) = -1$，激励$f\,(t) = 5\cos t\,\varepsilon(t)$，求系统的全响应$y(t)$。

解： 方程取拉氏变换，并整理得

微分方程的变换解

$$Y(s)=\underbrace{\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+5y(0_-)}{s^2+5s+6}}_{Y_{zi}(s)}+\underbrace{\frac{2(s+3)}{s^2+5s+6}F(s)}_{Y_{zs}(s)} \qquad F(s)=\frac{5s}{s^2+1}$$

$$=\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}+\frac{2}{s+2}\frac{5s}{s^2+1}$$

$$=\frac{2}{s+2}+\frac{-1}{s+3}+\frac{-4}{s+2}+\frac{\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{-j26.6^\circ}}{s-j}+\frac{\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{j26.6^\circ}}{s+j}$$

$$y(t)=\underbrace{\overbrace{2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)}^{y_{zi}(t)}\overbrace{-4\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)+}}_{\text{暂态分量}y_{tc}(t)}\overbrace{\underbrace{2\sqrt{5}\cos(t-26.6^\circ)]\varepsilon(t)}_{\text{稳态分量}y_{ss}(t)}}^{y_{zs}(t)}$$