知识点K1.11

拉普拉斯反变换

主要内容：

1.拉普拉斯反变换

2.拉普拉斯反变换求解方法

基本要求：

1. 掌握拉普拉斯反变换

2. 掌握求拉普拉斯反变换方法即查表法、利用性质、部分分式法等

3. 掌握部分分式分解法的极点特点

K1.11 拉普拉斯反变换

直接利用定义式求反变换---复变函数积分，比较困难。

通常的方法：（1）查表；

（2）利用性质；（3）部分分式展开 ----- 结合

若象函数$F(s)$是 s 的有理分式，可写为

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+....+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s+a_0}$$

若$m \geq n$ （假分式），可用多项式除法将象函数$F(s)$分解为 有理多项式$P(s)$+有理真分式

$$F(s)=P(s)+\frac{B_0(s)}{A(s)}$$

$$F(s)=\frac{s^4+8s^3+25s^2+31s+15}{s^3+6s^2+11s+6}=s+2+\frac{2s^2+3s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$$

***P*(s)**的拉普拉斯逆变换由冲激函数及其各阶导数构成。下面主要讨论有理真分式。

部分分式展开法

若***F*(s)**是**s**的实系数有理真分式（***m*<*n***），则可写为

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+....+a_1 s+a_0}{s^n+b_{n-1}s^{n-1}+...+b_1 s+b_0}$$

式中***A*(s)**称为***F*(s)**的特征多项式，方程***A*(s)=0**称为特征方程，它的根称为特征根，也称为***F*(s)**的固有频率（或自然频率）。***n***个特征根 p_i 称为***F*(s)**的极点。

（1）F(s)为单极点（单根）

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+....+\frac{K_i}{s-p_i}+...+\frac{K_n}{s-p_n}$$

$$K_i=(s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} \qquad \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-p_i}]=\mathrm{e}^{p_i t}\,\varepsilon(t)$$

特例：F(s)包含共轭复根时($p_{1,2}=-\alpha\pm \mathrm{j}\beta$)

$$F(s)=\frac{B(s)}{D(s)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}=\frac{B(s)}{D(s)(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)(s+\alpha+\mathrm{j}\beta)}$$

$$=\frac{K_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}+F_2(s) \qquad K_2=K_1^{\ *}$$

$$K_1=[(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)F(s)]\big|_{s=-\alpha+\mathrm{j}\beta}=|K_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\theta}=A+\mathrm{j}B$$

拉普拉斯反变换

$$F_1(s)=\frac{K_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}=\frac{|K_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{|K_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}$$

$$f_1(t)=2|K_1|\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\,\varepsilon(t)$$

若$K_{1,2}=A\pm\mathrm{j}B$，$f_1(t)=2\mathrm{e}^{-\alpha t}[A\cos(\beta t)-B\sin(\beta t)]\,\varepsilon(t)$

例1 已知 $F(s)=\dfrac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$， 求其逆变换

解：部分分解法 $F(s)=\dfrac{k_1}{s}+\dfrac{k_2}{s+1}+\dfrac{k_3}{s+3}$ （$m<n$）

其中$k_1=sF(s)\big|_{s=0}$

$$=\left.\frac{10(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=0}=\frac{100}{3}$$

拉普拉斯反变换

$$k_2 = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1}$$

$$= \frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+3)}\Bigg|_{s=-1} = -20$$

$$k_3 = (s+3)F(s)\Big|_{s=-3}$$

$$= \frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)}\Bigg|_{s=-3} = -\frac{10}{3}$$

$$F(s) = \frac{100}{3s} - \frac{20}{s+1} - \frac{10}{3(s+3)}$$

$$f(t) = \left(\frac{100}{3} - 20\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{10}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

拉普拉斯反变换

例2 已知$F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$，

求其逆变换

解： 长除法

$$
\begin{array}{r}
s+2 \\
\because\ s^2+3s+2 \,\big)\overline{\, s^3+5s^2+9s+7} \\
\underline{s^3+3s^2+2s\qquad} \\
2s^2+7s+7 \\
\underline{2s^2+6s+4} \\
s+3
\end{array}
$$

拉普拉斯反变换

$$F(s)=s+2+\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

$$\text{其中}k_1=(s+1)\cdot\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-1}=2$$

$$k_2=\frac{s+3}{s+1}\bigg|_{s=-2}=-1$$

$$\therefore F(s)=s+2+\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$\therefore f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

例3 已知$F(s)=\dfrac{s^2+3}{(s^2+2s+5)(s+2)}$， 求其逆变换

解：$F(s)=\dfrac{s^2+3}{(s+1+\mathrm{j}2)(s+1-\mathrm{j}2)(s+2)}$

$$=\frac{k_1}{s+1+\mathrm{j}2}+\frac{k_2}{s+1-\mathrm{j}2}+\frac{k_0}{s+2}$$

$$p_{1,2}=-\alpha\pm\mathrm{j}\beta,\ (\alpha=1,\beta=-2)$$

其中 $k_1=\left.\dfrac{s^2+3}{(s+1+\mathrm{j}2)(s+2)}\right|_{s=-1+\mathrm{j}2}=\dfrac{-1+\mathrm{j}2}{5}$

拉普拉斯反变换

即$k_{1,2} = A \pm \mathrm{j}B, \ (A = -\frac{1}{5}, \quad B = \frac{2}{5})$

$$k_0 = \left.\frac{s^2+3}{(s+1+\mathrm{j}2)(s+1-\mathrm{j}2)}\right|_{s=-2} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore F(s) = \frac{-\frac{1}{5}+\mathrm{j}\frac{2}{5}}{s+1+\mathrm{j}2} + \frac{-\frac{1}{5}-\mathrm{j}\frac{2}{5}}{s+1-\mathrm{j}2} + \frac{7}{5(s+2)}$$

$$\because \alpha = 1, \beta = -2 \qquad A = -\frac{1}{5}, \quad B = \frac{2}{5}$$

$$\therefore f(t) = \left\{2\mathrm{e}^{-t}\left[-\frac{1}{5}\cos(-2t) - \frac{2}{5}\sin(-2t)\right] + \frac{7}{5}\mathrm{e}^{-2t}\right\}\varepsilon(t)$$

例4 求象函数$F(s)$的原函数$f(t)$。

$$F(s)=\frac{s^3+s^2+2s+4}{s(s+1)(s^2+1)(s^2+2s+2)}$$

解： 极点是$s_1=0$，$s_2=-1$，$s_{3,4}=\pm j1$，$s_{5,6}=-1\pm j1$，故

$$F(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s-j}+\frac{K_4}{s+j}+\frac{K_5}{s+1-j}+\frac{K_6}{s+1+j}$$

$K_1=sF(s)|_{s=0}=2$，$K_2=(s+1)F(s)|_{s=-1}=-1$

$K_3=(s-j)F(s)|_{s=j}=j/2=(1/2)e^{j(\pi/2)}$，$K_4=K_3^*=(1/2)e^{-j(\pi/2)}$

$K_5=(s+1-j)F(s)|_{s=-1+j}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{3}{4}\pi}$，$K_6=K_5^*$

$$f(t)=[2-e^{-t}+\cos(t+\frac{\pi}{2})+\sqrt{2}e^{-t}\cos(t+\frac{3\pi}{4})]\varepsilon(t)$$

（2）$F(s)$有重极点（重根）

若$A(s) = 0$在$s = p_1$处有r重根，

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{r-1}}+\ldots.+\frac{K_{1r}}{(s-p_1)}$$

$$K_{11}=[(s-p_1)^r F(s)]|_{s=p1}$$

$$K_{12}=\mathrm{d}[(s-p_1)^r F(s)]|_{s=p1}/\mathrm{d}s$$

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}s^{i-1}}\left[(s-p_1)^r F(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$\mathscr{L}[t^n\varepsilon(t)]=\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s-p_1)^{n+1}}]=\frac{1}{n!}t^n\,\mathrm{e}^{p_1 t}\,\varepsilon(t)$$

例5 已知$F(s)=\dfrac{s-2}{s(s+1)^3}$， 求其逆变换

解：$$F(s)=\frac{k_{11}}{(s+1)^3}+\frac{k_{12}}{(s+1)^2}+\frac{k_{13}}{(s+1)}+\frac{k_2}{s}$$

令$F_1(s)=(s+1)^3F(s)=\dfrac{s-2}{s}$

其中 $k_{11}=F_1(s)\big|_{s=p_1}$

$$=\left.\frac{s-2}{s}\right|_{s=-1}=3$$

$$k_{12}=\left.\frac{d}{ds}F_1(s)\right|_{s=p_1}$$

$$=\left.\frac{s-(s-2)\cdot 1}{s^2}\right|_{s=-1}=2$$

拉普拉斯反变换

$$k_{13}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}F_1(s)\bigg|_{s=p_1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{-4s}{s^4}\bigg|_{s=-1}=2$$

$$k_2=sF(s)\big|_{s=0}$$

$$=\frac{s-2}{(s+1)^3}\bigg|_{s=0}=-2$$

$$\therefore F(s)=\frac{3}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)}-\frac{2}{s}$$

$$\therefore f(t)=(\frac{3}{2}t^2\mathrm{e}^{-t}+2t\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-t}-2)\varepsilon(t)$$