阻抗与导纳

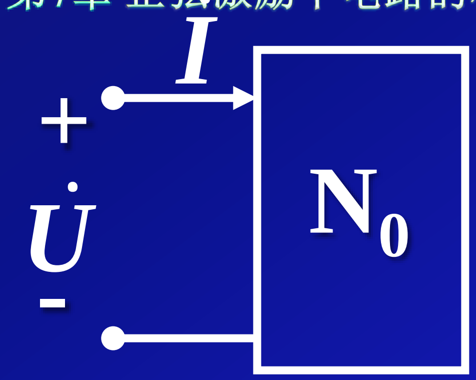
电流、电压是同频率的正弦量，且参考方向关联，VCR为：

$R: \dot{U} = R\dot{I}; \quad C: \dot{U} = \dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}; \quad L: \dot{U} = j\omega L\dot{I}$

R	$\dfrac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$
电阻	容抗	感抗
（与ω无关）	（与ω成反比）	（与ω成正比）

一无源二端网络N_0

在关联参考方向下：



电压相量与电流相量之比 ➔阻抗

$$Z(j\omega)=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$ 单位： Ω

电流相量与电压相量之比 ➔导纳

$$Y(j\omega)=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}$$ 单位： S

显然有： $Z=\dfrac{1}{Y}$ $Y=\dfrac{1}{Z}$

R、*L*、*C*元件电压与电流相量间的关系类似欧姆定律：

欧姆定律的相量形式：

$$\dot{U} = Z(j\omega)\dot{I} \quad 或 \quad \dot{I} = Y(j\omega)\dot{U}$$

电压与电流相量之比是一个与时间无关的量，只与角频率有关；

在正弦稳态电路中，任意一个无源二端网络的相量模型可等效为一个阻抗或导纳。

R、C、L元件的阻抗如下：

$$\dot{U}_{\mathrm{R}} = R\,\dot{I}_{\mathrm{R}} \qquad Z_R = \frac{\dot{U}_{\mathrm{R}}}{\dot{I}_{\mathrm{R}}} = R$$ 称为电阻

$$\dot{U}_{\mathrm{L}} = j\omega L\dot{I}_{\mathrm{L}} \qquad Z_L = \frac{\dot{U}_{\mathrm{L}}}{\dot{I}_{\mathrm{L}}} = \mathrm{j}\omega L$$ 称为感抗

$$\dot{U}_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_{\mathrm{C}} \qquad Z_C = \frac{\dot{U}_{\mathrm{C}}}{\dot{I}_{\mathrm{C}}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$ 称为容抗

R、C、L元件的阻抗是一个与时间无关的量，且是一个复数。单位：Ω

G、C、L元件的导纳如下：

$$\dot{I}_{\mathrm{R}} = G\dot{U}_{\mathrm{R}} \qquad Y_R = \frac{\dot{I}_{\mathrm{R}}}{\dot{U}_{\mathrm{R}}} = G$$ 称为电导

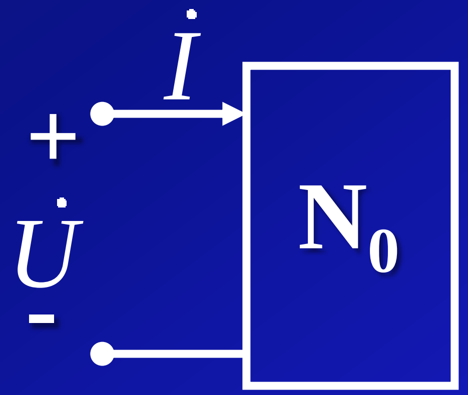
$$\dot{I}_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\dot{U}_{\mathrm{L}} \qquad Y_L = \frac{\dot{I}_{\mathrm{L}}}{\dot{U}_{\mathrm{L}}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$$ 称为感纳

$$\dot{I}_{\mathrm{C}} = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_{\mathrm{C}} \qquad Y_C = \frac{\dot{I}_{\mathrm{C}}}{\dot{U}_{\mathrm{C}}} = \mathrm{j}\omega C$$ 称为容纳

G、C、L元件的导纳是一个与时间无关的量，是一个复数。单位：S

一般情况：阻抗是复数，

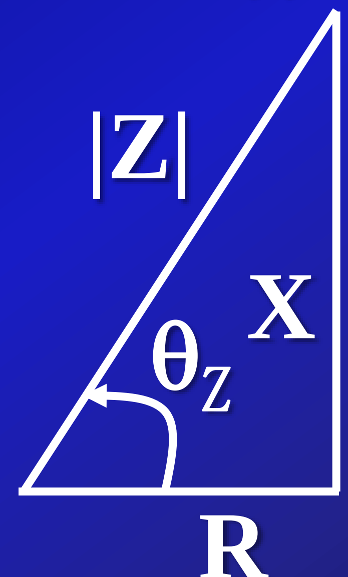
$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+\mathrm{j}X=|Z|\angle\theta_Z$$



实部R称为**电阻**分量，虚部X称为**电抗**分量，$\theta_Z=\varphi_v-\varphi_i$称为**阻抗角**，$|Z|=U/I$称为**阻抗的模**

$$|Z|=\sqrt{R^2+X^2}\qquad \theta_Z=arctg\frac{X}{R}$$

$$R=|Z|\cos\theta_Z\qquad X=|Z|\sin\theta_Z$$



阻抗三角形

任意一个无源二端网络，总是可用一个电阻元件和一个电抗元件的串联电路等效：

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+\mathrm{j}X=|Z|\angle\theta_Z$$

当$X=0$时：$\theta_Z=0$，端口电压与电流同相，网络呈电阻性，可等效为一个电阻。

当$X>0$时：$\theta_Z>0$，端口电压超前电流，网络呈感性，电抗元件可等效为一个电感；

当$X<0$时：$\theta_Z<0$，端口电流超前电压，网络呈容性，电抗元件可等效为一个电容；

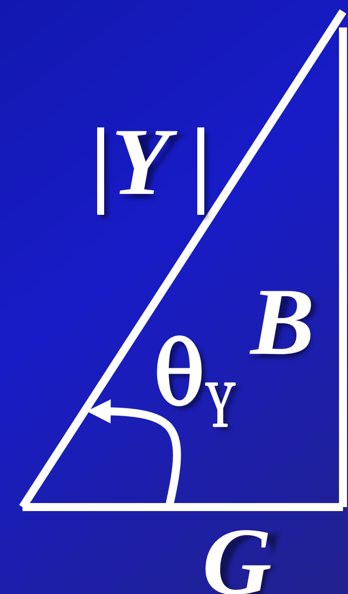
一般情况：导纳是复数，

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=G+\mathrm{j}B=|Y|\angle\theta_{\mathrm{Y}}$$

实部G称为**电导**分量，虚部B称为**电纳**分量，**导纳角** $\boxed{\theta_{\mathrm{Y}}=\varphi_{\mathrm{i}}-\varphi_{\mathrm{u}}=-\theta_{\mathrm{Z}}}$ 。

$$|Y|=\frac{I}{U}=\sqrt{G^2+B^2} \qquad \theta_{\mathrm{Y}}=arctg\frac{B}{G}$$

$$G=|Y|\cos\theta_{\mathrm{Y}} \qquad B=|Y|\sin\theta_{\mathrm{Y}}$$



导纳三角形

无源二端网络 总是可用一个电导元件和一个电纳元件的并联电路等效：

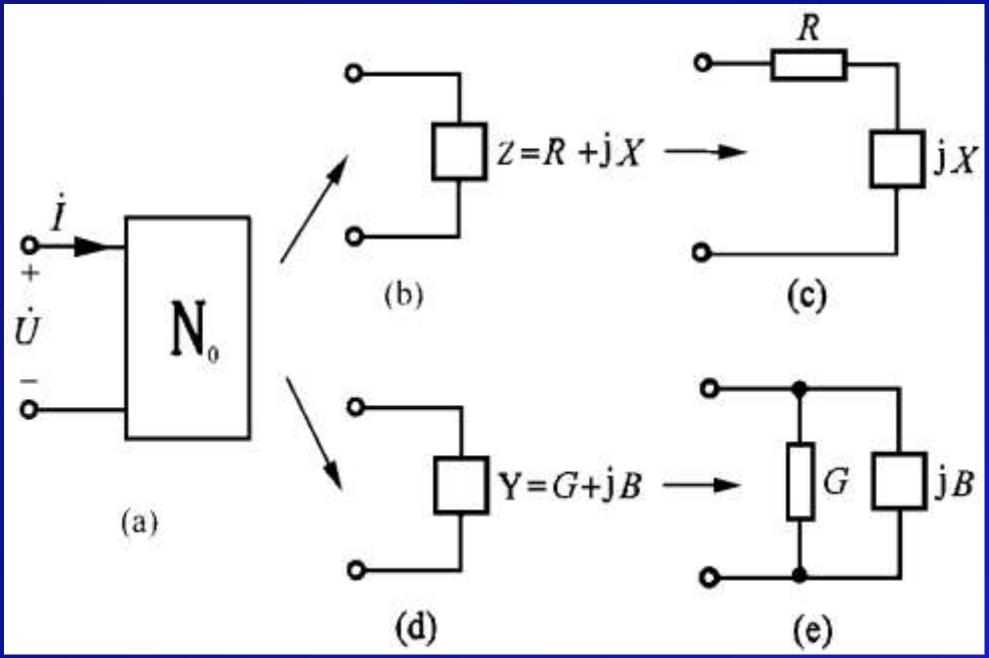
$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=G+\mathrm{j}B=|Y|\angle\theta_Y$$

当$B=0$时：$\theta_Y=0$，端口电压与电流同相，网络呈电导性，可等效为一个电导。

当$B>0$时：$\theta_Y>0$，端口电流超前电压，网络呈容性，电纳元件可等效为一个电容；

当$B<0$时：$\theta_Y<0$，端口电压超前电流，网络呈感性，电纳元件可等效为一个电感；

无源网络相量模型的两种等效电路：



一种是根据阻抗$Z=R+jX$得到的**电阻R与电抗jX串联**电路，如图(c)；

另一种是根据导纳$Y=G+jB$得到的**电导G与电纳jB的并联**，如图(e)。

注意：

一般情况下，阻抗Z和导纳Y都是角频率ω的函数，即：

随着ω的变化，电路的性质和等效电路中的元件参数都会随之改变。

只有在一个特定的角频率ω下，正弦稳态电路才有一个确定的等效电路。

阻抗Z和导纳Y不是相量。

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=|Z|\angle\theta_{Z}=R+jX,$$

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=|Y|\angle\theta_{Y}=G+jB$$

$$\therefore Z=\frac{1}{Y} \rightarrow |Z|=\frac{1}{|Y|},\ \theta_{Z}=-\theta_{Y}$$

且：一般情况下均为 ω 的函数；

阻抗角或导纳角在一、四象限内。

注意:一般情况下：

$$R\neq\frac{1}{G},\qquad |X|\neq\frac{1}{|B|}$$

若已知阻抗 $Z = R + jX$，则等效导纳为：

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

$$\therefore G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

若已知导纳 $Y = G + jB$，则等效阻抗为：

$$\therefore R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

阻抗串、并联的等效阻抗和等效导纳

1、阻抗串联

n个阻抗串联，等效阻抗为：

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n$$

电流与端口电压相量的关系为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n} = \frac{\dot{U}}{\sum_{k=1}^{n} Z_k}$$

第k个阻抗上的电压相量与端口电压相量的关系为：

$$\dot{U}_k = Z_k \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n} Z_k = \frac{Z_k}{\sum_{k=1}^{n} Z_k} \dot{U}$$

称为n个阻抗串联时的分压公式。

注意：正弦稳态电路中，部分或全部串联阻抗上的电压有效值可能大于总电压的有效值。

2、导纳并联

n个导纳并联组成的单口网络，就端口特性来说，等效于一个导纳，其等效导纳值等于各并联导纳之和，即

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k$$

电压与其端口电流相量的关系为：

$$\dot{U}=\frac{\dot{I}}{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}=\frac{\dot{I}}{\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k}$$

第k个导纳中的电流与端口电流相量的关系为

$$\dot{I}_k = Y_k \dot{U} = \frac{\dot{I}}{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n} Y_k = \frac{Y_k}{\sum_{k=1}^{n} Y_k} \dot{I}$$

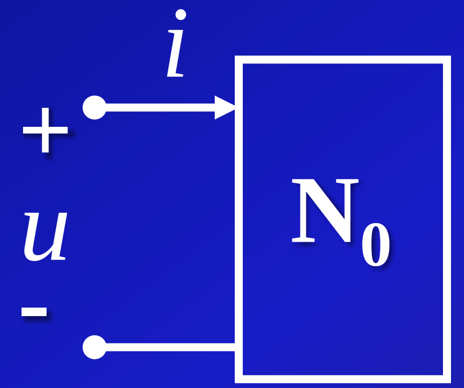
这是导纳并联时的分流公式。

注意：正弦稳态电路中，部分或全部并联导纳上的电流有效值可大于总电流的有效值。

例12（P206例7-10）图示无源二端网络中，已知端口电压和电流，试求该二端网络的输入阻抗、导纳及其等效电路。

$$u(t) = 10\sqrt{2}\cos(100t + 36.9^0)\ \text{V}$$

$$i(t) = 2\sqrt{2}\cos 100t\ A$$



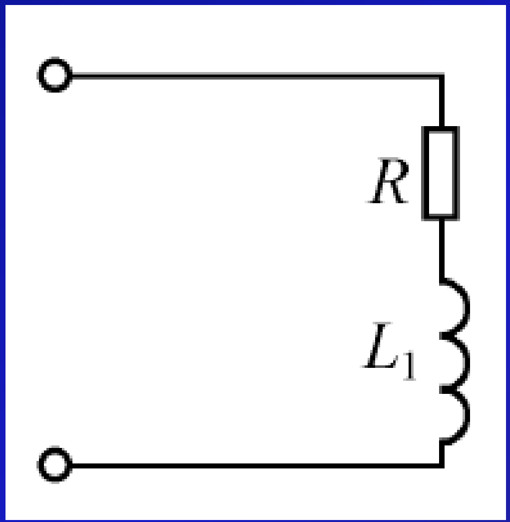
解：电流电压有效值相量为

$$\dot{U} = 10\angle 36.9^\circ\ \text{V},\ \dot{I} = 2\angle 0^\circ\ A$$

输入阻抗为

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+jX=\frac{10\angle 36.9^{\circ}}{2\angle 0^{\circ}}=5\angle 36.9^{\circ}=4+j3\Omega$$

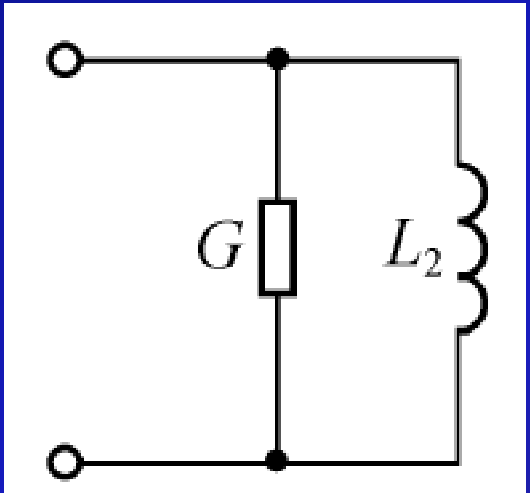
其中 $X=3\Omega>0$ ，说明电路呈感性，故等效电路为一个 $R=4\Omega$ 的电阻与一个感抗 $X_L=\omega L_1=3\Omega$的电感元件的串联。



$$L_1=\frac{X_L}{\omega}=\frac{3}{100}=0.03H$$

导纳为

$$Y=\frac{1}{Z}=G+jB=0.2\angle-36.9^{\circ}=0.16-j0.12S$$

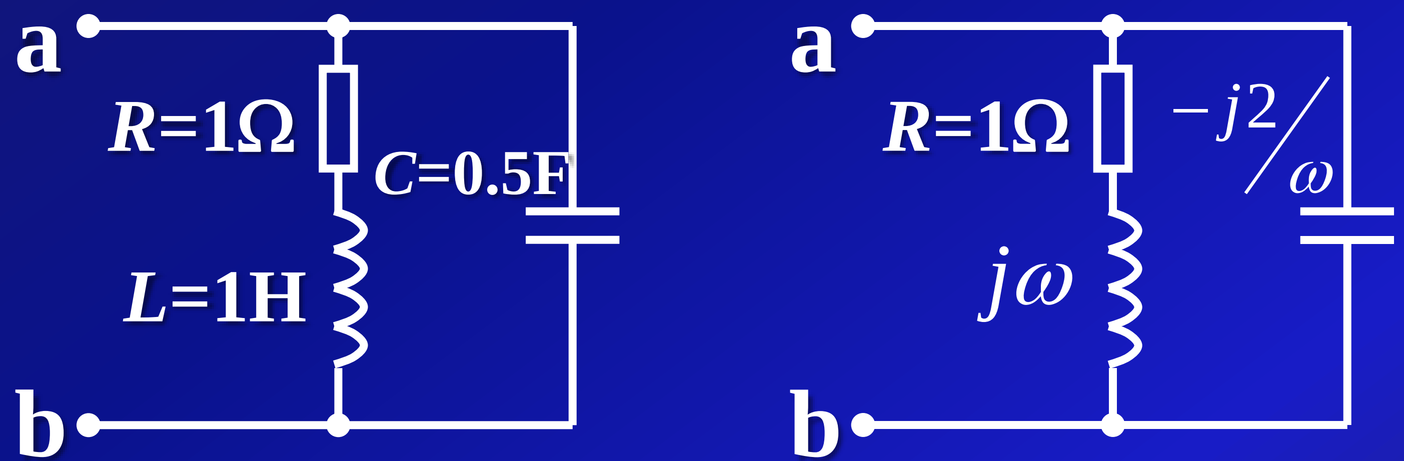


其中 $B=-0.12S<0$，说明电路呈感性，故等效电路为一个$G=0.16S$的电阻与一个导纳

$$B_L=\frac{1}{\omega L_2}=0.12S \qquad L_2=\frac{1}{\omega B_L}=\frac{1}{100\times0.12}=\frac{1}{12}H$$

的电感元件的串联。

例13 求图(a)网络在ω=1rad/s和ω=2rad/s时的等效阻抗和等效电路。

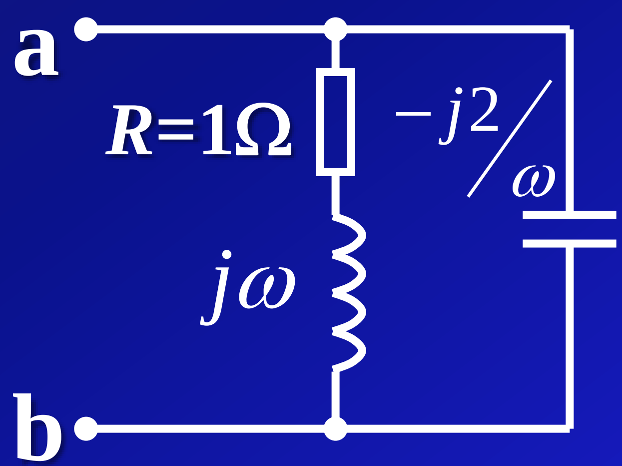


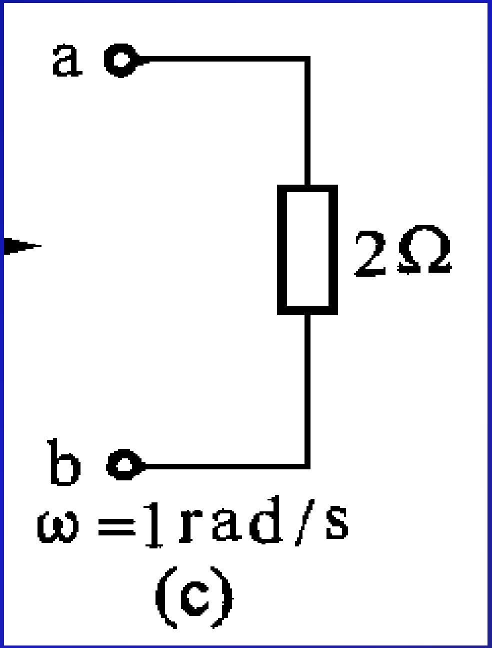
(a)

解:(1)建立ω时的相量模型;

(2) 求出ω=1rad/s等效阻抗：

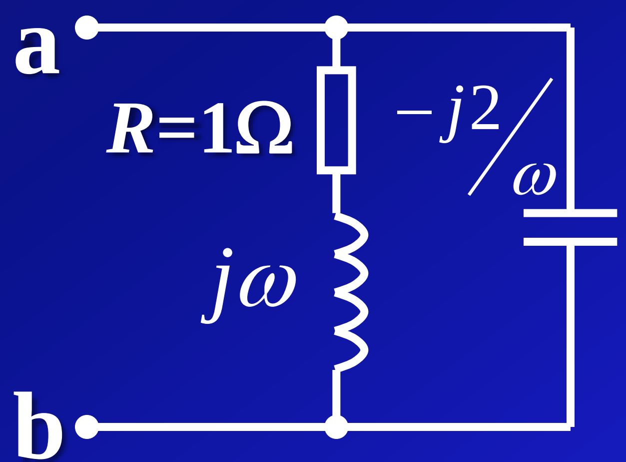
$$Z(j1)=\frac{(1+j1)(-j2)}{1+j1-j2}=\frac{2-j2}{1-j}=2\Omega$$

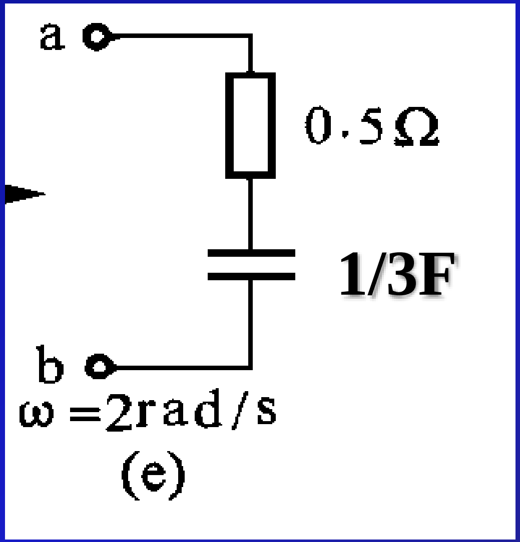




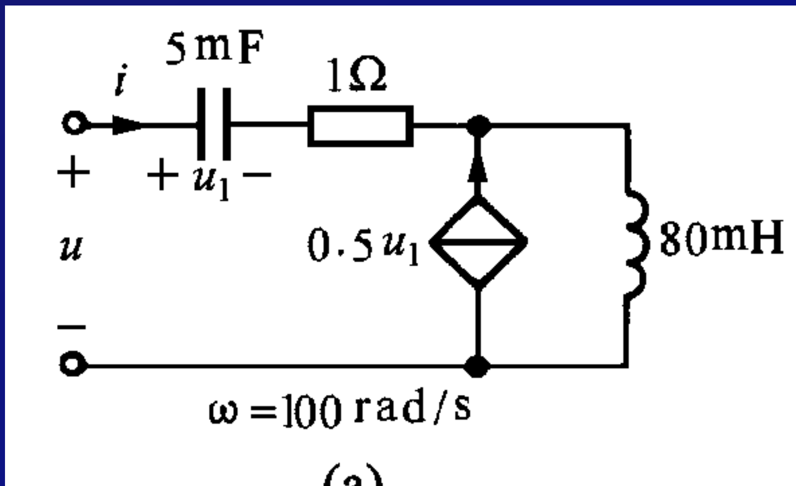
（3）同理求出ω=2rad/s时的等效阻抗:

$$Z(j2)=\frac{(1+j2)(-j1)}{1+j2-j1}=\frac{2-j}{1+j}=\frac{1-j3}{2}=0.5-j1.5\,\Omega$$

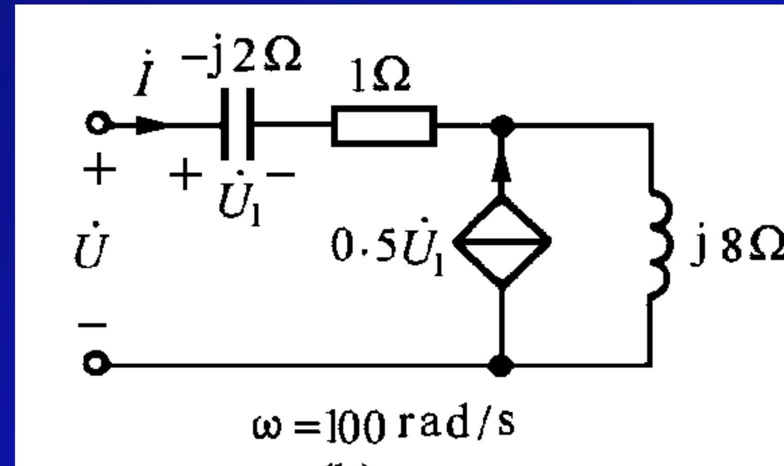




例14 试求等效阻抗和相应的等效电路。



(a)

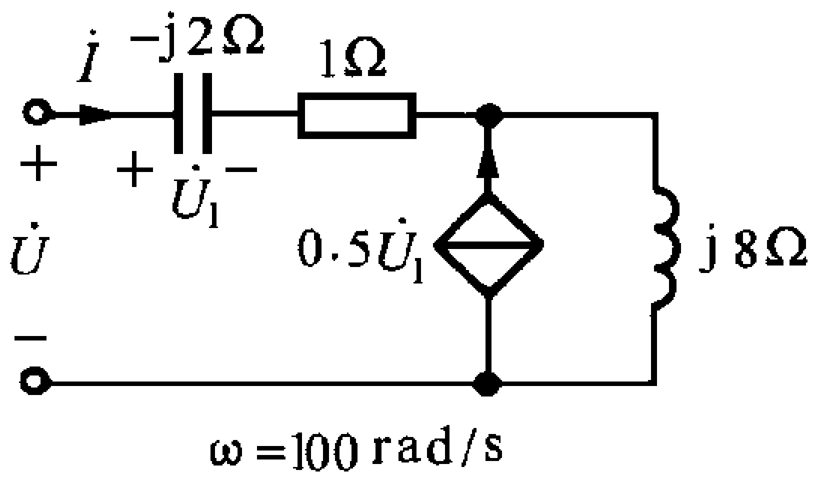


(b)

解:1) 相量模型如图(b)。

2) 求等效阻抗：

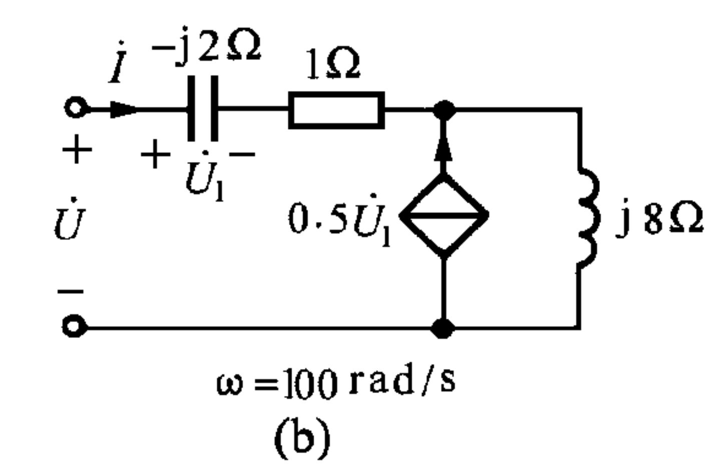
设在端口加电压源，用相量形式KVL方程求电压相量

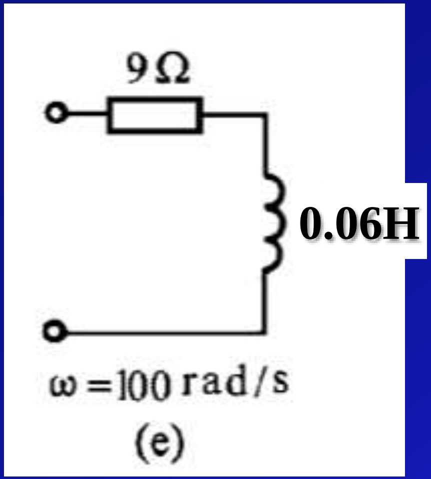


(b)

$$\dot{U}=(-j2+1)\dot{I}+j8(\dot{I}+0.5\dot{U}_1)$$

$$=(j6+1)\dot{I}+j4\times(-j2\dot{I})=(9+j6)\dot{I}$$



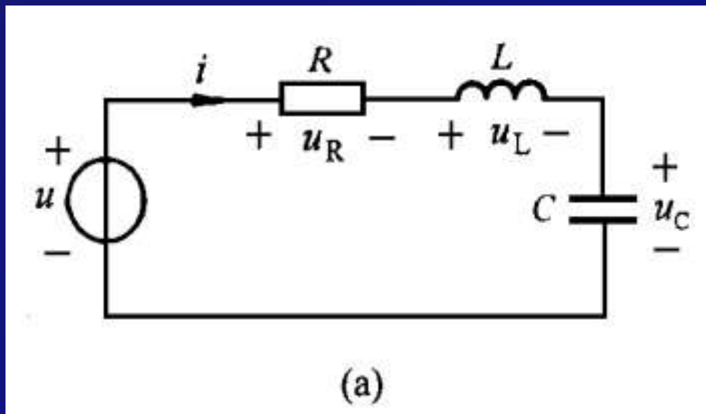


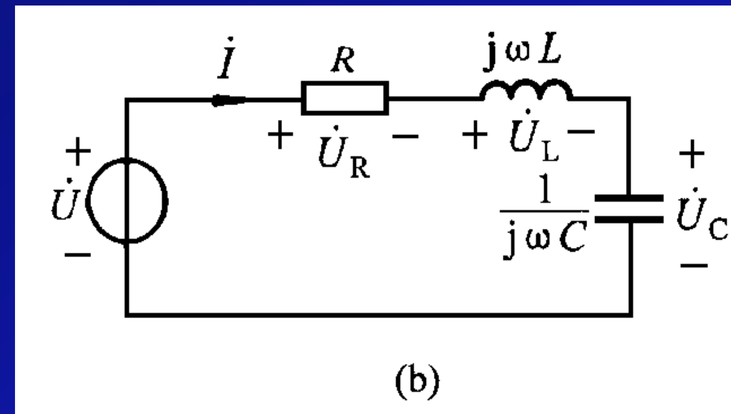
等效阻抗为 $Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=9+j6\,\Omega$

3) 给出等效电路：

$$L=\frac{X}{\omega}=\frac{6}{100}=0.06H$$

●分析RLC串联电路





相量模型如图(b)所示。等效阻抗

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}=R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})=R+jX$$

阻抗的电阻为电路的电阻R，阻抗的电抗为感抗与容抗之差 $X=(\omega L-\frac{1}{\omega C})$ 。

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+\mathrm{j}(X_L-X_C)=R+\mathrm{j}X$$

当$X=X_L-X_C=0$时，$\theta_Z=0$，电压与电流同相，电路呈**电阻性**，**等效为R**。

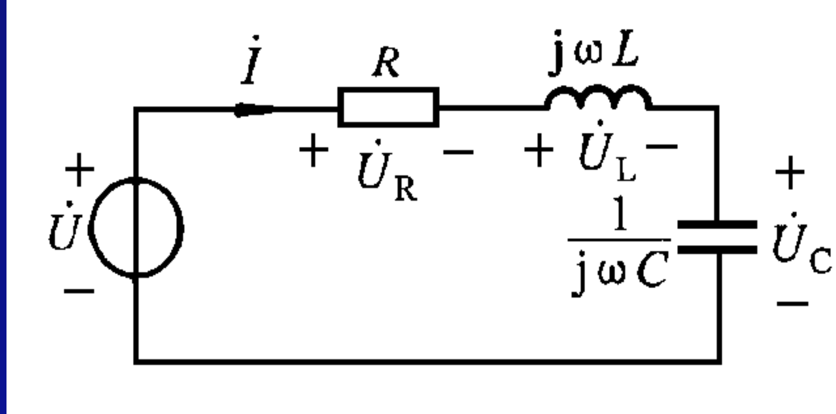
当$X=X_L-X_C>0$时，$\theta_Z>0$，电压超前于电流，电路呈**感性**，等效为**R串联电感**；

当$X=X_L-X_C<0$时，$\theta_Z<0$，电流超前于电压，电路呈**容性**，等效为**R串联电容**；

$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C$$

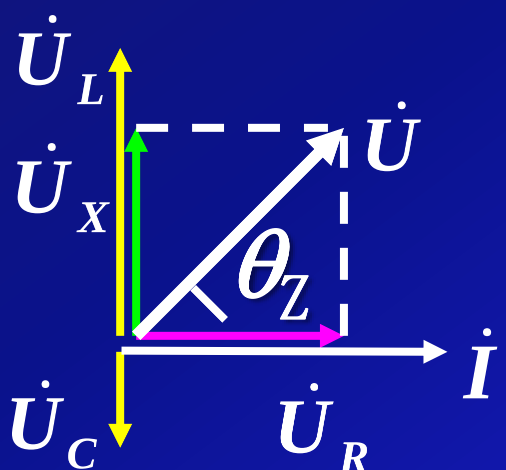
$$\dot{U}=Z\dot{I}=R\dot{I}+\mathrm{j}(X_L-X_C)\dot{I}$$

$$=R\dot{I}+\mathrm{j}X\dot{I}=\dot{U}_R+\dot{U}_X$$

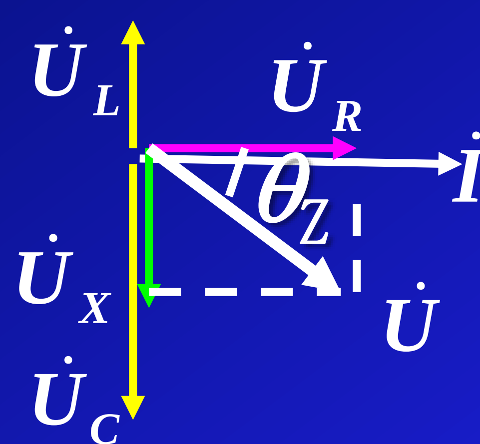


(b)

$\dot{U}$、$\dot{U}_R$和$\dot{U}_X$构成电压三角形：



感性$X_\mathrm{L}>X_\mathrm{C}$



容性$X_\mathrm{L}<X_\mathrm{C}$

$$|U|=\sqrt{U_R^{\,2}+U_X^{\,2}}$$

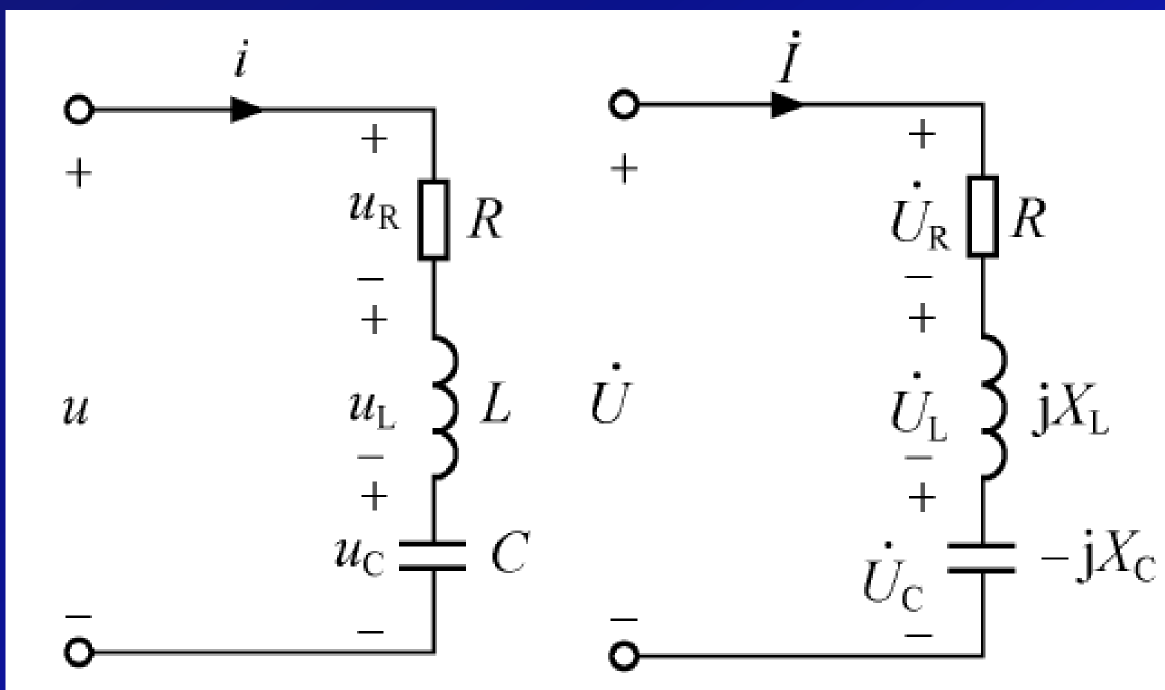
$$U_R=U\cos\theta_Z$$

$$U_X=U\,|\sin\theta_Z\,|$$

例15（P209例11）如图所示RLC串联电路中，已知 $R=100\Omega$，$L=20\text{mH}, C=1\mu F$

端电压 $u(t)=100\sqrt{2}\cos(10^4 t+30^\circ)\ V$

试求电路中的电流和各元件上的电压。

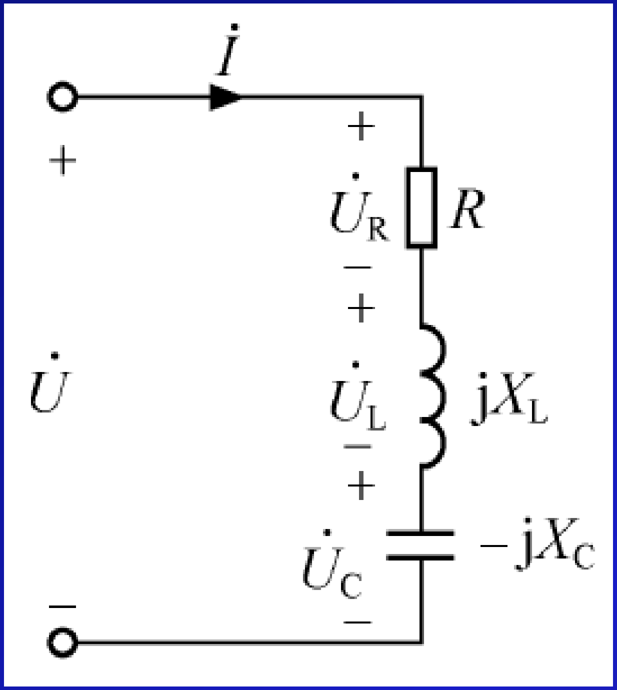


$$\dot{U}=100\angle 30^\circ \text{V}$$

$$X_L=\omega L=200\Omega$$

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=100\Omega$$

解：相量模型如图所示



等效阻抗：

$$
\begin{aligned}
Z &= Z_R + Z_L + Z_C \\
&= 100 + j200 - j100 \\
&= 100 + j100\Omega
\end{aligned}
$$

相量电流

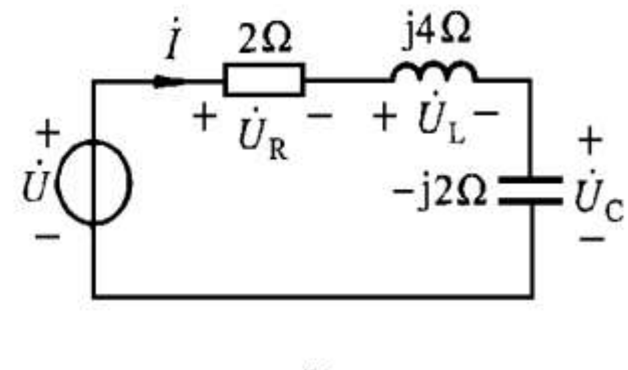
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{100\angle 30^\circ}{100 + j100} = \frac{100\angle 30^\circ}{100\sqrt{2}\angle 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle -15^\circ \text{A}$$

RLC元件上的电压相量

$$\dot{U}_{R}=100\dot{I}=50\sqrt{2}\angle-15^{\circ}\,\mathrm{V}$$

$$\dot{U}_{L}=\mathrm{j}200\dot{I}=100\sqrt{2}\angle75^{\circ}\,\mathrm{V}$$

$$\dot{U}_{C}=-\mathrm{j}100\dot{I}=50\sqrt{2}\angle-105^{\circ}\,\mathrm{V}$$



(b)

$$\dot{I}=\frac{\sqrt{2}}{2}\angle-15^{\circ}\,\mathrm{A}$$

各量的时域表达式：

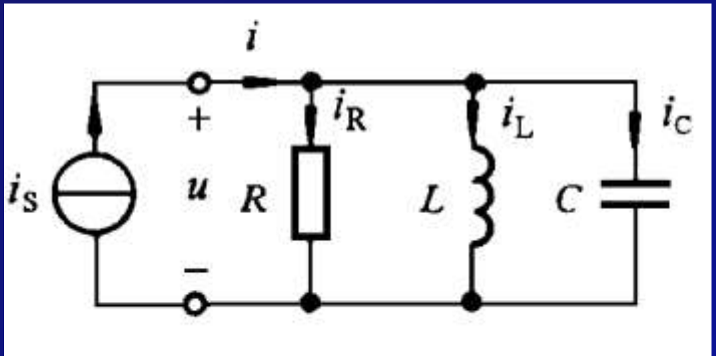
$$i(t)=\cos(10^{4}t-15^{\circ})\mathrm{A}$$

$$u_{R}(t)=100\cos(10^{4}t-15^{\circ})\mathrm{V}$$

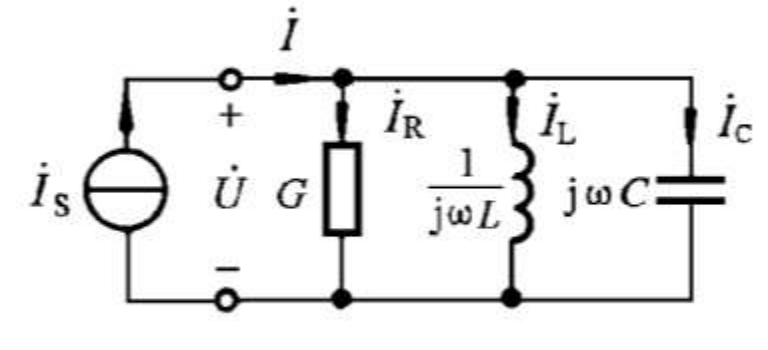
$$u_{L}(t)=200\cos(10^{4}t+75^{\circ})\mathrm{V}$$

$$u_{C}(t)=100\cos(10^{4}t-105^{\circ})\mathrm{V}$$

●分析GLC并联电路



(a)



(b)

相量模型如图(b)所示。等效导纳：

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=G+j\omega C+\frac{1}{j\omega L}=G+j(\omega C-\frac{1}{\omega L})=G+jB$$

其电导为电路的电导G，电纳为容纳与感纳之差，$B=\omega C-\dfrac{1}{\omega L}=B_C-B_L$。

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=G+\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}=G+\mathrm{j}(\omega C-\frac{1}{\omega L})=G+jB$$

当$B=B_C-B_L>0$时，$\theta_Y>0$，电流超前于电压，电路呈容性，等效为G并联电容 ；

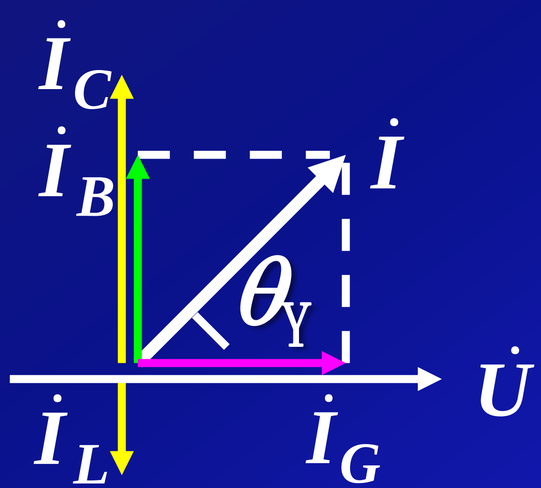
当$B=B_C-B_L<0$时，$\theta_Y<0$，电压超前于电流，电路呈感性，等效为G并联电感；

当$B=B_C-B_L=0$时，$\theta_Y=0$，电压与电流同相，电路呈电阻性，等效为G 。

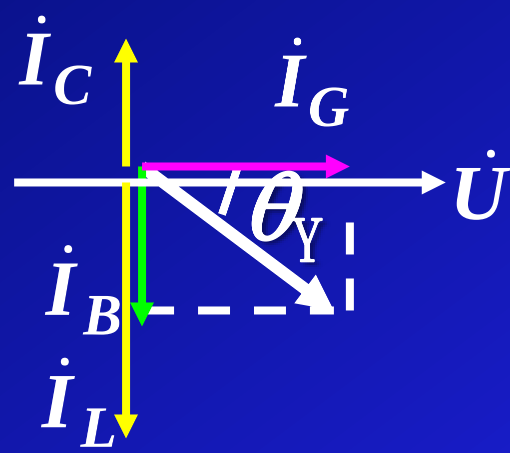
$$\dot{I} = Y\dot{U} = G\dot{U} + \mathrm{j}(\mathrm{B}_\mathrm{C} - \mathrm{B}_\mathrm{L})\dot{U} = G\dot{U} + \mathrm{j}B\dot{U} = \dot{I}_G + \dot{I}_B$$

$$|I| = \sqrt{I_G^{\ 2} + I_B^{\ 2}} \quad I_G = I\cos\theta_Y \quad I_B = I\,|\sin\theta_Y|$$

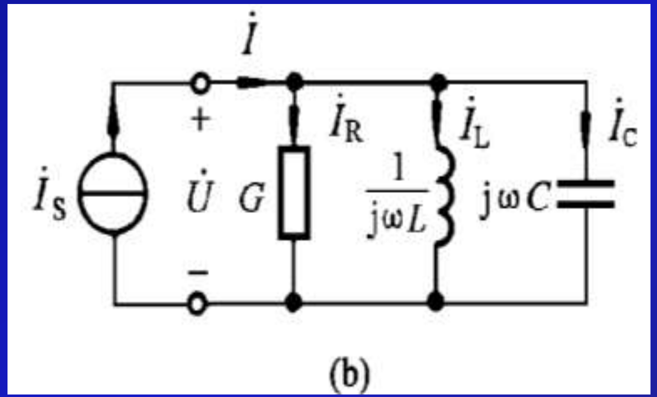
电流三角形：



容性$B_C>B_L$

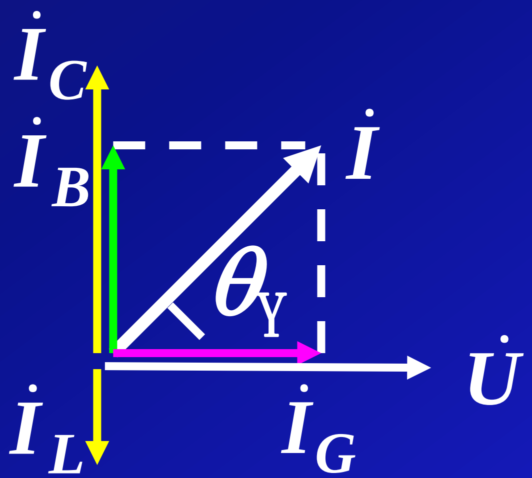


感性$B_C<B_L$



例16（P210例7-12） GCL并联电路中，已知端口电流及流过电感和电容上电流的有效值分别为 $I = 5A, I_C = 9A, I_L = 6A,$ 试求电导上电流的有效值 I_G

解：在GCL并联电路中，$\dot I$、$\dot I_G$和$\dot I_B$构成电流直角三角形，它们有效值之间的关系为



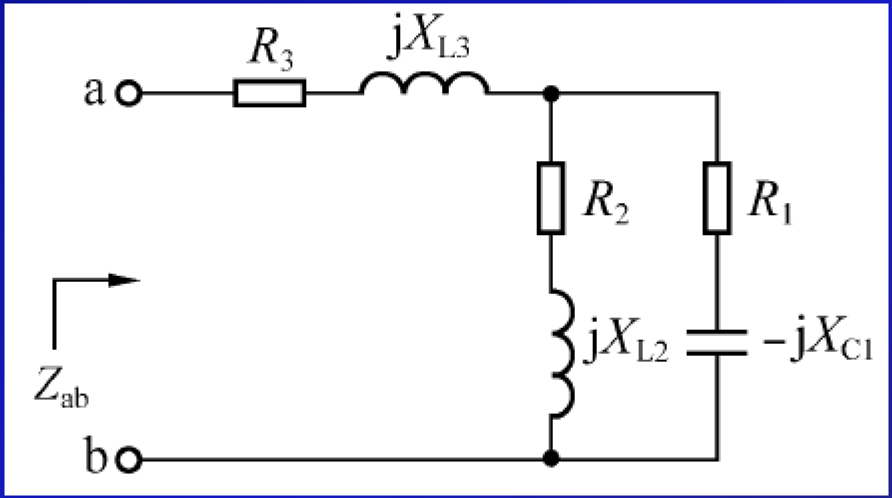
$$\dot I = \sqrt{\dot I_G{}^2 + \dot I_B{}^2}$$

$$I_B = I_C - I_L = 9 - 6 = 3A$$

$$\dot I_G = \sqrt{\dot I^2 - \dot I_B{}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4A$$

例17（P211例7-13）在如图所示正弦稳态电路的相量模型中，已知 $R_1=8\Omega, X_{C1}=6\Omega, R_2=3\Omega, X_{L2}=4\Omega, R_3=5\Omega$，$X_{L2}=10\Omega$。试求电路的输入阻抗 Z_{ab}

解：首先求出各支路阻抗



$$Z_1=R_1-\mathrm{j}X_{C1}=8-j6\Omega$$

$$Z_2=R_2+\mathrm{j}X_{L1}=3+j4\Omega$$

$$Z_3=R_3+\mathrm{j}X_{L3}=5+j10\Omega$$

利用阻抗的串并联关系可得

$$Z_{ab}=Z_3+\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}=5+j10+\frac{(8-j6)(3+j4)}{(8-j6)+(3+j4)}$$

$$=5+j10+\frac{24-j18+j32+24}{11-j2}$$

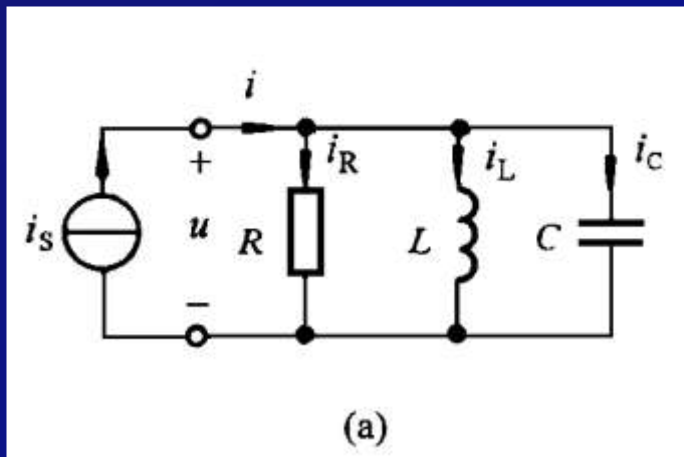
$$=5+j10+\frac{48+j14}{11-j2} \qquad \frac{50\angle 16.26}{5\sqrt{5}\angle -10.30}$$

$$=5+j10+2\sqrt{5}\angle 26.26$$

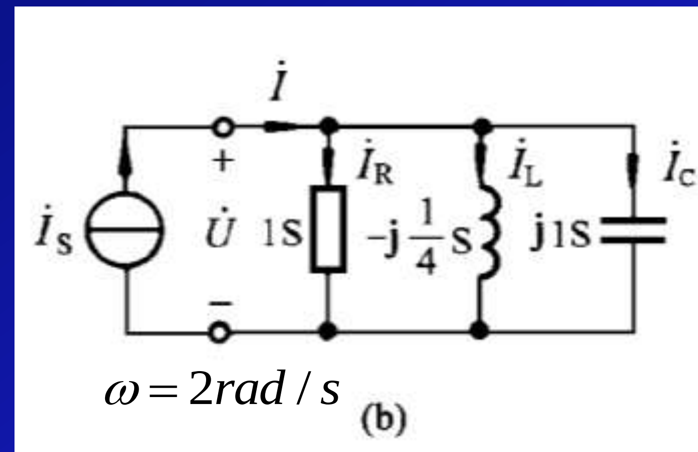
$$=5+j10+4+j2=9+j12\Omega$$

例18 求：$u(t)$, $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$。已知：

$$i_S(t)=15\sqrt{2}\cos 2t\ \text{A},\quad R=1\Omega, L=2\text{H}, C=0.5\text{F}$$



(a)



(b)

解：相量模型如图(b)。 等效导纳：

$$Y=Y_R+Y_L+Y_C=1-j\frac{1}{4}+j1=1+j0.75=1.25\angle 36.9^\circ \text{S}$$

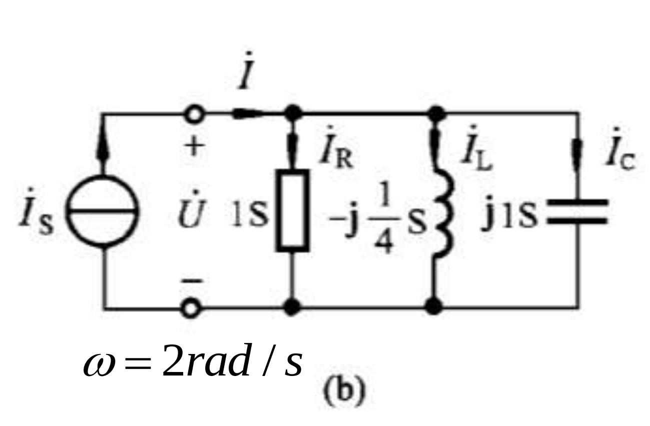
求相量电压：$$\dot{U}=\frac{\dot{I}}{Y}=\frac{15\angle 0^\circ}{1.25\angle 36.9^\circ}=12\angle -36.9^\circ \text{V}$$

各电流相量：$\dot{U}=12\angle -36.9^\circ\,\text{V}$

$$\dot{I}_{\text{R}}=G\dot{U}=12\angle -36.9^\circ\,\text{A}$$

$$\dot{I}_{\text{C}}=\text{j}1\times\dot{U}=12\angle 53.1^\circ\,\text{A}$$

$$\dot{I}_{\text{L}}=-\text{j}0.25\times\dot{U}=3\angle -126.9^\circ\,\text{A}$$



时域表达式：

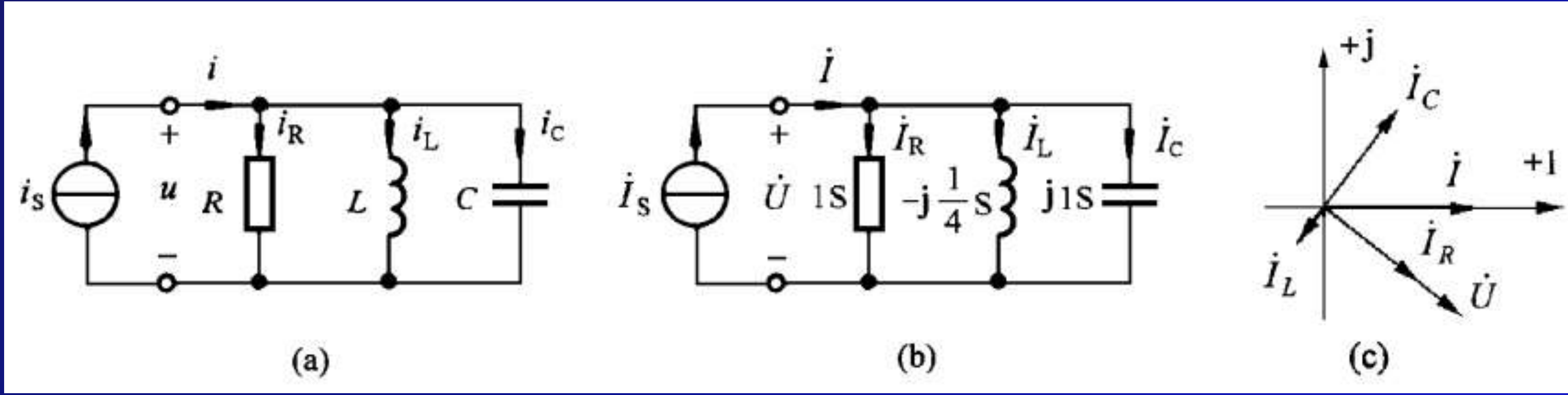
$$u(t)=12\sqrt{2}\cos(2t-36.9^\circ)\text{V}$$

$$i_{\text{R}}(t)=12\sqrt{2}\cos(2t-36.9^\circ)\text{A}$$

$$i_{\text{L}}(t)=3\sqrt{2}\cos(2t-126.9^\circ)\text{A}$$

$$i_{\text{C}}(t)=12\sqrt{2}\cos(2t+53.1^\circ)\text{A}$$

相量图如图(c)所示：



(a) (b) (c)

从中看出各电压电流的相量关系：如端口电流的相位超前于端口电压相位36.9°，RLC并联单口网络的端口特性等效于一个电阻与电容的并联，该单口网络具有电容性