知识点Z3.3

差分方程的经典解法

主要内容：

1. 递推迭代
2. 经典法

基本要求：

1. 了解递推迭代法
2. 掌握经典法的齐次解和特解的求解方法

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

Z3.3 差分方程的经典解法

1.递推迭代

差分方程本质上是递推的代数方程，若已知初始条件和激励，利用迭代法可求得其数值解。

例1 若描述某系统的差分方程为

$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$$

已知$y(0)=0$，$y(1)=2$，激励$f(k)=2^k\varepsilon(k)$，求$y(k)$。

解：

$$y(k)=-3y(k-1)-2y(k-2)+f(k)$$

$$y(2)=-3y(1)-2y(0)+f(2)=-2$$

$$y(3)=-3y(2)-2y(1)+f(3)=10 \quad \ldots\ldots$$

注：迭代法一般不易得到解析形式的(闭合)解。

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

2.经典法

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\ldots+a_0y(k-n) = b_m f(k)+ \ldots +b_0 f(k-m)$$

与连续系统的微分方程经典解类似，差分方程的解由齐次解$y_h(k)$和特解$y_p(k)$两部分组成，即 （类比）

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

齐次解是对应齐次差分方程的解：

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+ \ldots +a_0y(k-n)=0$$

特征根为$1+a_{n-1}\lambda^{-1} + \ldots +a_0\lambda^{-n}=0$ 的根$\lambda_i(i=1，2，\ldots，n)$，由特征根可以设定齐次解的函数形式。

特解的函数形式与激励的函数形式有关。

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

3.1 差分方程的建立及经典解法

3.齐次解的常用函数形式(p.74)

表3-1 不同特征根所对应的齐次解

特征根λ	齐次解$y_h(k)$
单实根	$C\lambda^k$
2重实根	$(C_1k+C_0)\lambda^k$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=a\pm jb=\rho e^{\pm j\beta}$	$\rho^k[C\cos(\beta k)+D\sin(\beta k)]$或$A\rho^k\cos(\beta k-\theta)$ 其中$Ae^{j\theta}=C+jD$

4.特解的常用函数形式(p.74)

表3-2 不同激励所对应的特解

激励$f(k)$	特解$y_p(k)$	
k^m	$P_mk^m+P_{m-1}k^{m-1}+\cdots+P_1k+P_0$	所有的特征根均不等于1;
	$k(P_1k+P_0)$	有一个特征根等于1;
a^k	Pa^k	a不等于特征根;
	$(P_1k+P_0)a^k$	a等于特征单根;
$\cos(\beta k)$或$\sin(\beta k)$	$P\cos(\beta k)+Q\sin(\beta k)$	所有的特征根均不等于$e^{\pm j\beta}$
	或$A\cos(\beta k-\theta)$, 其中$Ae^{j\theta}=P+jQ$	

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

3.1 差分方程的建立及经典解法

例2 若某系统的差分方程为

$$y(k)+4y(k-1)+4y(k-2) = f(k)$$

已知$y(0)=0$，$y(1)=-1$；$f(k)=2^k$，$k\geq 0$。求方程的全解。

解： 特征根： $\lambda_1=\lambda_2=-2$ （how？）

设齐次解：$y_h(k)=(C_1k+C_2)(-2)^k$

设特解为：$y_p(k)=P(2)^k$，$k\geq 0$，代入得：$P=1/4$

故全解为：$y(k)=y_h+y_p=(C_1k+C_2)(-2)^k+2^{k-2}$，$k\geq 0$

代入$y(0)$，$y(1)$，解得：$C_1=1$，$C_2=-1/4$

说明： 差分方程的齐次解也称为系统的自由响应，特解也称为强迫响应。本例中由于$|\lambda|>1$，故自由响应随k的增大而增大。

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

例3 某人向银行贷款M=10万元，月利率β=1%，他定期于每月初还款数为$f(k)$，尚未还清的款数为$y(k)$，列出$y(k)$的方程。如果他从贷款后第一个月(可设为k=0)还款N，则有$f(k)=N\varepsilon(k)$万元和$y(-1)=M$=10万元。

（1）如每月还款N=0.5万元，求$y(k)$。

（2）他还清贷款需要几个月？

（3）如果他想在10个月内还清贷款，求每月还款数N。

解：(1) 列出$y(k)$的差分方程

$$y(k)=y(k-1)(1+\beta)-f(k)$$

整理得：

$$y(k)-(1+\beta)y(k-1)=-f(k)$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

3.1 差分方程的建立及经典解法

$$y(k)-(1+\beta)y(k-1)=-f(k)=-N\varepsilon(k)$$

初始条件： $y(-1)=10$

迭代得： $y(0)=y(-1)(1+\beta)-N=10.1-N$

齐次解： $y_h(k)=C(1+\beta)^k\varepsilon(k)$

特解： $y_p(k)=P$

特解代入得： $P=\dfrac{N}{\beta}=100N=50$

全解：

$$y(k)=y_h(k)+y_p(k)=C(1+\beta)^k+N/\beta$$

代入初始值： $y(0)=10.1-N=C+N/\beta$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

解得： $C = 10.1 - N - N/\beta = -40.4$

所以： $y(k) = -40.4(1+0.01)^k + 50, \qquad k \ge 0$

(2)还清贷款需要满足*y*(*k*) ≤0，即：

$$y(k) = -40.4(1+0.01)^k + 50 \le 0$$

解得：

$$k \ge \frac{\lg \dfrac{50}{40.4}}{\lg 1.01} \approx 21.43$$

***k*取整数，故*k*=22。**

***k*从0开始计算，所以还清贷款需要23个月。**

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

(3)如果想10个月还清贷款，需要满足 $y(9)\le 0$。

$$y(k)=y_h(k)+y_p(k)=C(1+\beta)^k+P=[10.1-N-\frac{N}{\beta}](1+\beta)^k+\frac{N}{\beta}$$

$$y(9)=[10.1-N-\frac{N}{\beta}](1+\beta)^9+\frac{N}{\beta}\le 0$$

$$[10.1-101N](1+\beta)^9+100N\le 0$$

$$[101(1+0.01)^9-100]N\ge 10.1(1+0.01)^9$$

$$N\ge\frac{10.1(1+0.01)^9}{101(1+0.01)^9-100}\approx 1.06(\text{万元})$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved