教学模块2 信号转换与z变换

教学单元2 信号转换分析

东北大学 · 关守平
guanshouping@ise.neu.edu.cn

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

2.1 采样过程及采样函数的数学表示

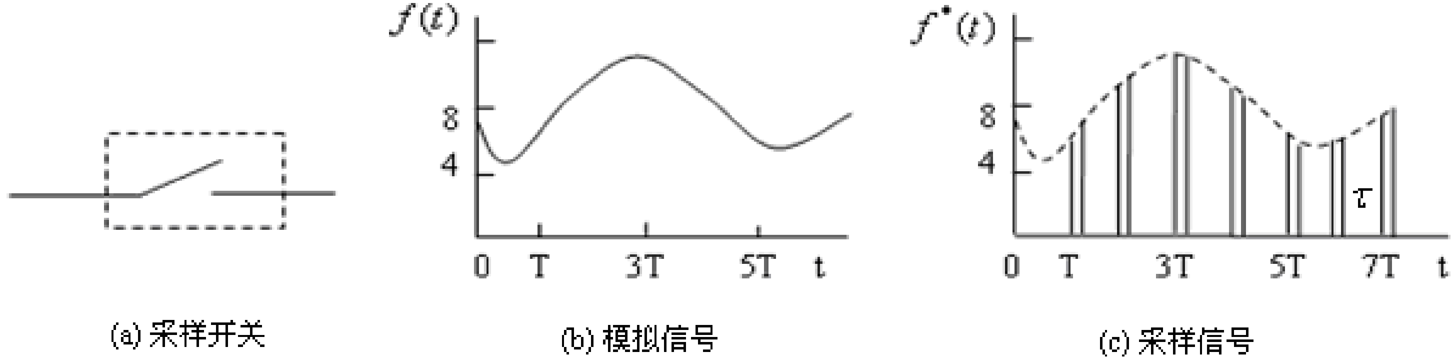


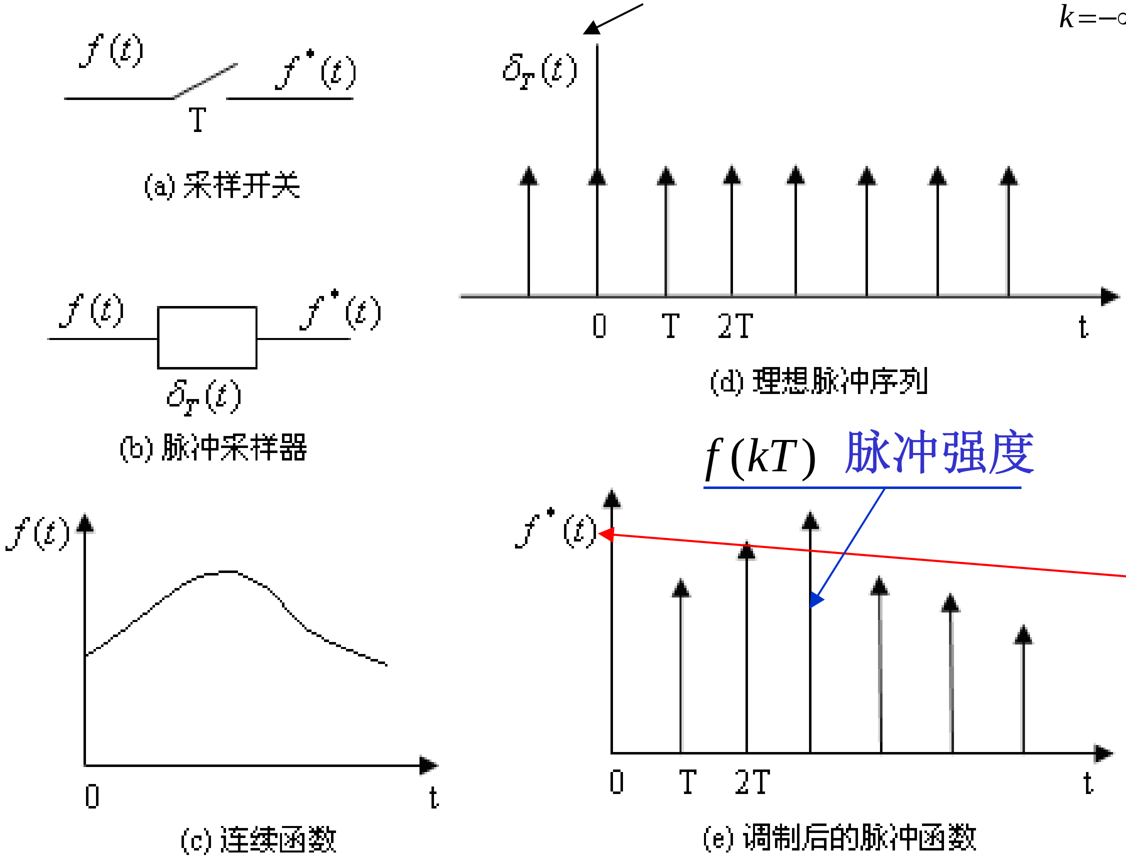
图2.1 信号的转换过程

每隔一定时间（例如秒），开关闭合短暂时间（例如秒），对模拟信号进行采样，得到时间上离散数值序列：

$$f^*(t) = \{ f(0T), f(1T), f(2T), \cdots f(kT), \cdots \}$$

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

单位理想脉冲序列：$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$



理想单位脉冲：

$$\delta(t-kT)=\begin{cases}\infty & t=kT\\ 0 & t\neq kT\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty}\delta(t-kT)dt=1$$

冲量

采样函数：

$$f^*(t)=f(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)$$

图2.2 ***f(t)*** 经脉冲采样器的调制过程

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

2.2 采样函数的频谱分析及采样定理

采样函数的一般表达式为 $f^*(t)=f(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=f(t)\delta_T(t)$

$\delta_T(t)$ 是周期函数，可以展成傅氏级数（**Fourier**）： $\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_k e^{jk\omega_s t}$

其中采样角频率： $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}$ 傅氏系数： $C_k=\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)e^{-jk\omega_s t}dt$

考虑到脉冲函数 $\delta(t)$ 的筛选特性，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0)=f(t)\big|_{t=0}$$

$\delta_T(t)$ 在 $[-T/2,T/2]$ 时间内，仅在**t=0**时刻有脉冲，于是得到：

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jk\omega_s t}dt=\frac{1}{T}e^{-jk\omega_s t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{T}$$

于是有： $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_s t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_s t}$

从而得到： $f^*(t) = f(t)\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t)e^{jk\omega_s t}$

于是采样函数 $f^*(t)$ 的拉氏变换式为：

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} f^*(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t)e^{jk\omega_s t}e^{-st}dt = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} f(t)e^{jk\omega_s t}e^{-st}dt$$

定义拉氏变换式： $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

$$\boxed{L[e^{-at}f(t)] = F(s+a)}$$

拉氏变换复位移定理

根据拉氏变换复位移定理得到： $F^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(s-jk\omega_s)$

令 $n=-k$ ，得到 $F^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(s+jn\omega_s)$

再令 $s=j\omega$ 则采样函数的傅氏变换式 为：

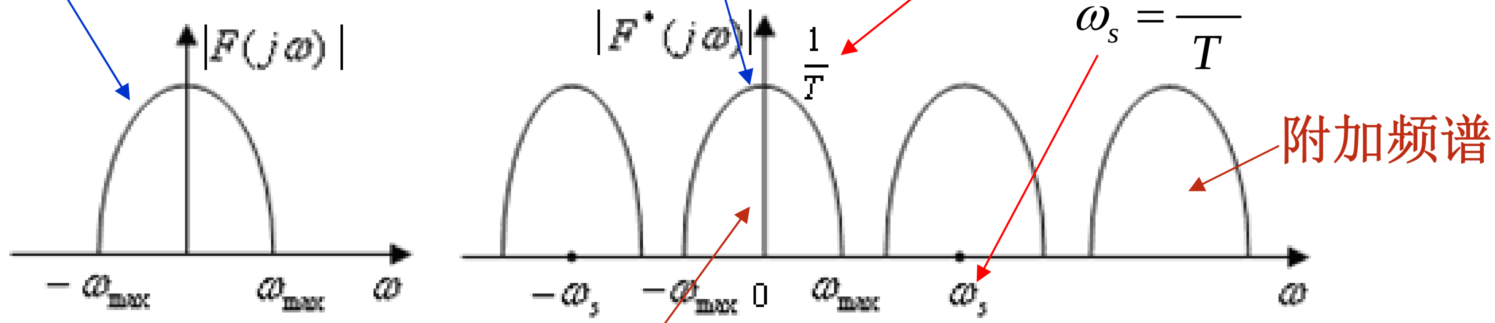
$$F^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(j\omega+jn\omega_s)$$

周期函数，周期为 $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$

$$F(j\omega)=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad F^{*}(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(j\omega+jn\omega_{s})$$

频谱幅值发生变化

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$$



(a) $F(j\omega)$ —频谱

非周期频谱

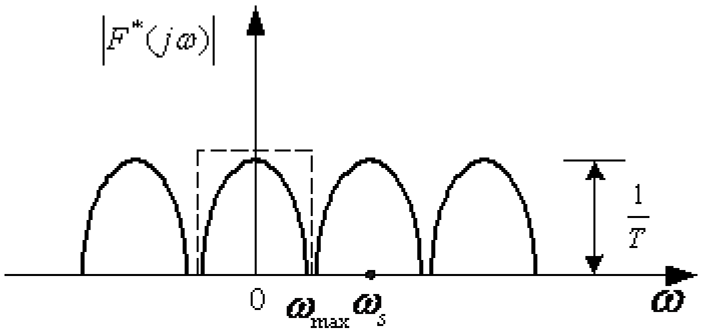
主频谱

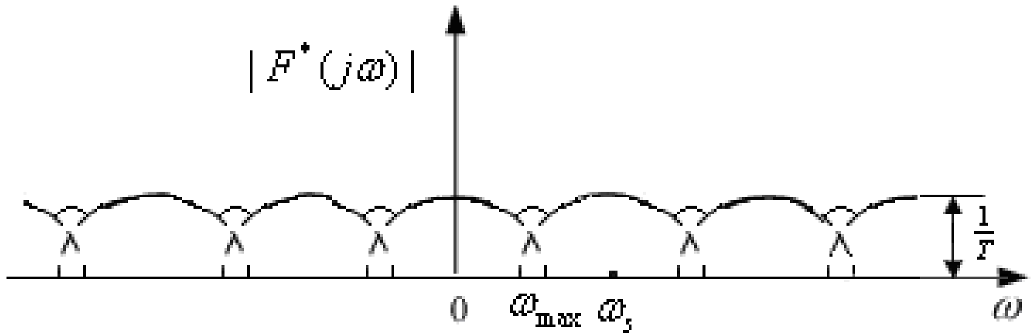
(b) $F^{*}(j\omega)$ —频谱

周期频谱

图2.3 频谱图

信息科学与工程学院





(a) $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ **(b)** $\omega_s < 2\omega_{\max}$

为了不失真地由采样函数恢复原连续函数，要求：$\omega_s \geq 2\omega_{\max}$

香农（Shannon）采样定理：

"如果一个连续信号不包含高于频率 $\omega_{\max}$ 的频率分量（连续信号中所含频率分量的最高频率为 $\omega_{\max}$ ），那么就完全可以用周期 $\le \pi/\omega_{\max}$ 的均匀采样值来描述。或者说，如果采样频率 $\omega_s \ge 2\omega_{\max}$ ，那么就可以从采样信号中不失真地恢复原连续信号"

注意：连续信号的频谱是无限带宽，此时无论怎样提高采样频率，频谱混叠或多或少都将发生

香农采样定理解决了理论上选择采样周期 T 的方法。

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

2.3 采样周期T的讨论

香农采样定理存在的问题：

（1）采样周期越小越好； $T \to 0 \Leftrightarrow \omega_s \to \infty$

（2）系统数学模型不好精确地测量，系统的最高角频率$\omega_{\max}$不好确定的情况下，如何确定采样周期？

第（1）个问题解决：工程上讲究“适当”就好。

表2.1 工程上慢过程采样周期选择方法

被控对象	流　量	液　位	压　力	温　度	成　分
采样周期T/s	1~5	5~10	3~10优选3~8	10~20或取纯滞后时间	15~20

第（2）个问题解决：

对于快过程，工程上采样周期选择方法：

$$\omega_s \approx 10\omega_c \qquad \text{即} \qquad T \approx \pi / 5\omega_c$$

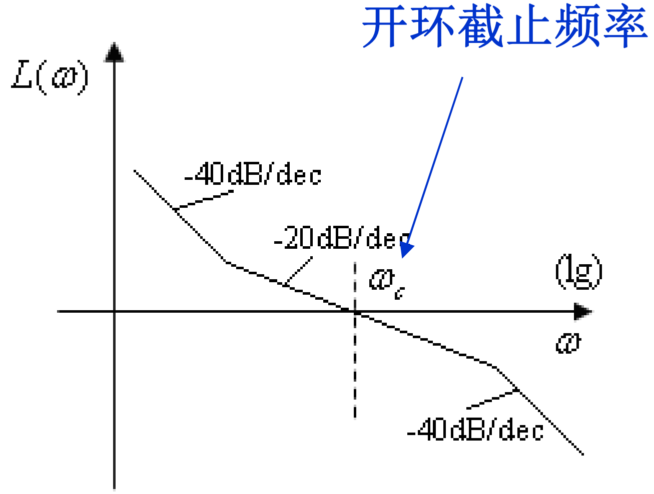
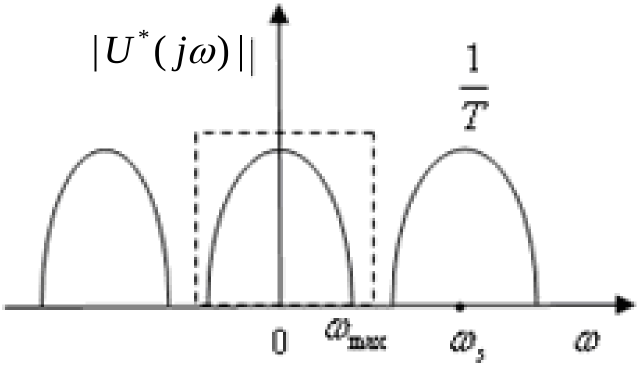


图2.4 系统预期开环频率特性

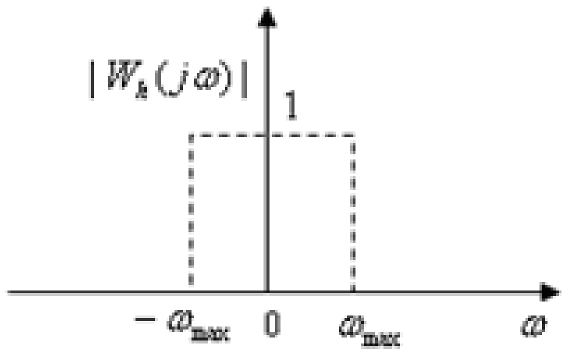
2.4 采样信号恢复过程分析

若把数字信号无失真地复现成连续信号，由香农采样定理可知，采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ ，则在被控对象前加一个理想滤波器，可以再现主频谱分量而除掉附加的高频频谱分量

$$|W_h(j\omega)| = \begin{cases} 1 & -\omega_{\max} \leq \omega \leq \omega_{\max} \\ 0 & |\omega| \geq \omega_{\max} \end{cases}$$



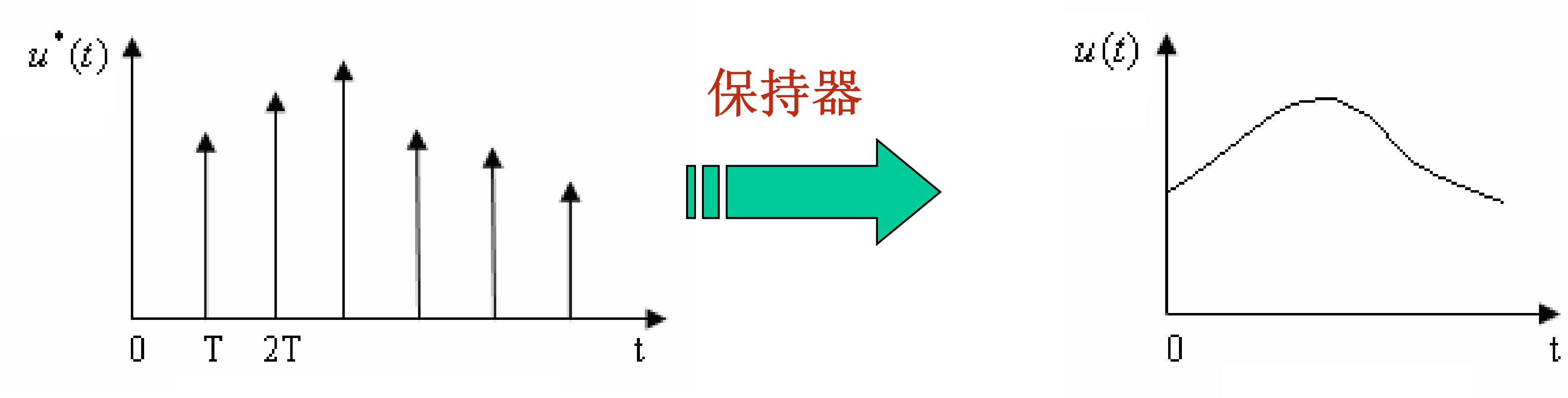
$U^*(j\omega)$ 频谱



理想滤波器特性

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

但是，这种理想滤波器是不存在的，必须找出一种与理想滤波器特性相近的物理上可实现的实际滤波器，这种滤波器称为保持器。



脉冲序列

连续信号

保持器外推表达式:

$$u(t)=u(kT)+u'(kT)(t-kT)+\frac{u''(kT)}{2}(t-kT)^2+\cdots \qquad (kT\le t<(k+1)T)$$

$$u'(kT)=\frac{1}{T}\{u(kT)-u[(k-1)T]\}$$

$$u''(kT)=\frac{1}{T^2}\{u(kT)-2u[(k-1)T]+u[(k-2)T]\}$$

••• •••

2.5 零阶保持器

仅取保持器外推式的第一项时，组成零阶保持器：

$$u_h(t)=u(kT) \qquad kT \le t < (k+1)T$$

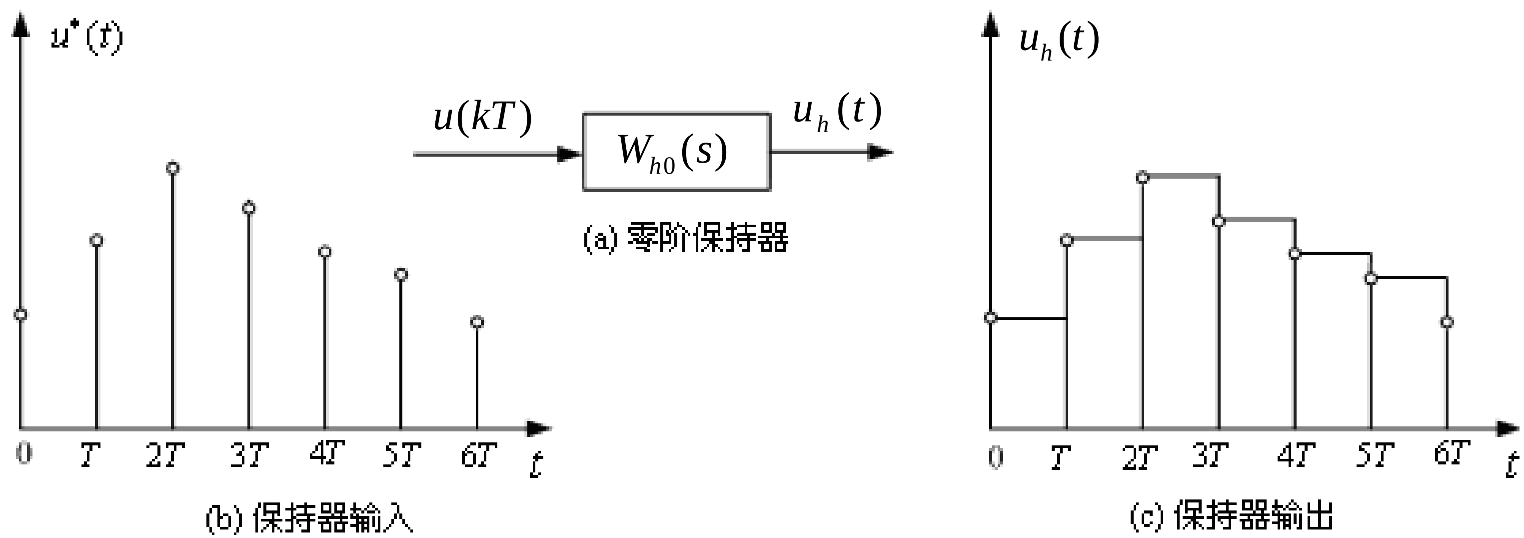


图2.5 零阶保持器输入输出的关系

求零阶保持器s传递函数表达式：

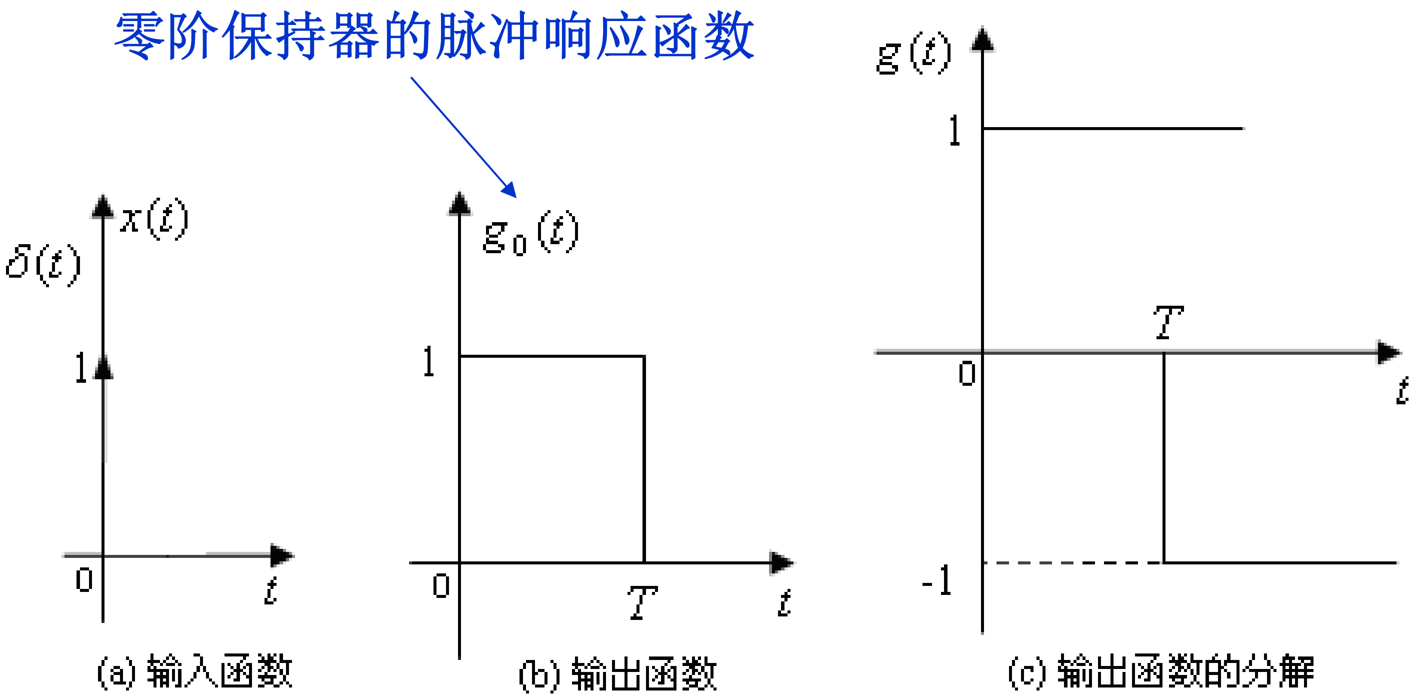


图2.6 零阶保持器时域特性

$$g_0(t) = 1(t) - 1(t-T) \qquad 1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

输出： $$G_0(s) = L\left[g_0(t)\right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

输入： $$X(s) = L\left[\delta(t)\right] = 1$$

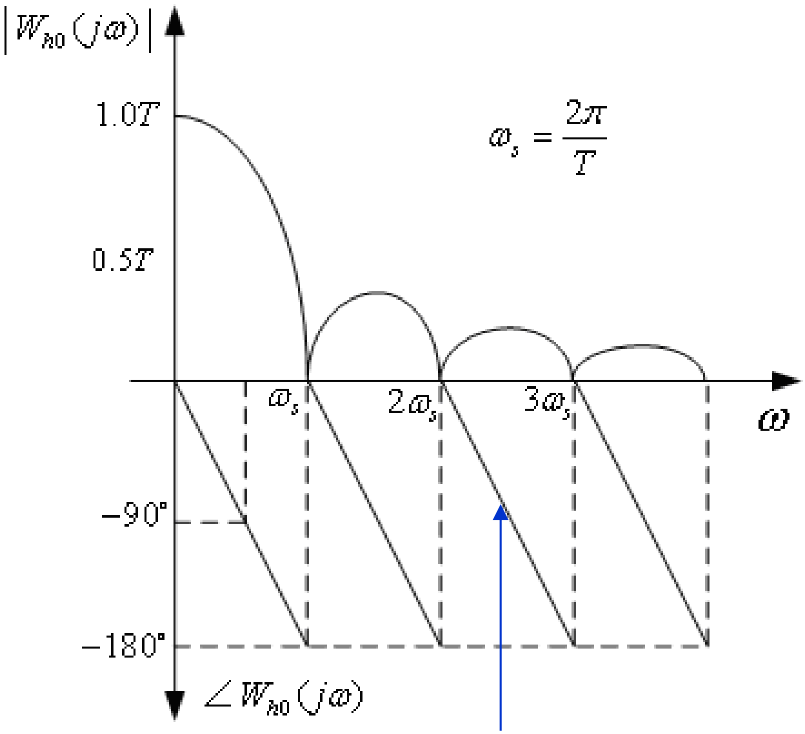
于是得到零阶保持器的传递函数为：

$$W_{h0}(s) = \frac{G_0(s)}{X(s)} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

零阶保持器的频率特性为： $W_{h0}(j\omega)=\dfrac{1-e^{-jT\omega}}{j\omega}=T\underline{\dfrac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}}e^{-j\frac{\omega T}{2}}$

正负交替出现



开关特性

幅频特性为：

$$|W_{h0}(j\omega)|=T\frac{|\sin(\omega T/2)|}{\omega T/2}$$

相频特性为：

$$\angle W_{h0}(j\omega)=-\omega T/2+\underline{k\pi},\ k=INT(\omega/\omega_s)$$

取整函数

零阶保持器特性：

- 具有低通滤波特性，但不是一个理想的滤波器
- 零阶保持器附加了滞后相位移，增加了系统不稳定因素，平均滞后 **T/2** 时间

$$W_{h0}(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}=\frac{e^{\frac{Ts}{2}}-e^{-\frac{Ts}{2}}}{s\cdot e^{\frac{Ts}{2}}}=\frac{(1+\frac{Ts}{2}+\cdots)-(1-\frac{Ts}{2}+\cdots)}{s\cdot e^{\frac{Ts}{2}}}\approx Te^{-\frac{Ts}{2}}$$

·教学单元二结束·