知识点Z4.2

信号的正交分解

主要内容：

1.信号正交的定义

2.正交函数集、完备正交函数集的定义

3.信号的正交分解

基本要求：

1.掌握信号正交、正交函数集和完备正交函数集的基本概念

2.掌握信号正交分解的方法

Z4.2 信号的正交分解

1.信号正交

【定义】在(t_1，t_2)区间的两个函数$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$, 若满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\varphi_2^*(t)\,\mathrm{d}t = 0$$ (两函数的内积为0)

则称$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$ 在区间(t_1，t_2)内正交。

说明：实函数正交 $\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,\mathrm{d}t = 0$（内积为0）

2.正交函数集：

若n个函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$构成一个函数集，当这些函数在区间$(t_1，t_2)$内满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & i\neq j\\ K_i\neq 0, & i=j\end{cases}$$

则称此函数集为在区间$(t_1，t_2)$上的正交函数集。

说明：如果 $K_i=1$，称为标准正交函数集。

3.完备正交函数集:

如果在正交函数集$\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$之外，不存在任何函数 $\varphi(t)$ ($\neq 0$) 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\varphi_i^*(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则称此函数集为完备正交函数集。

例：两组典型的在区间(t_0，t_0+T)($T=2\pi/\Omega$)上的完备正交函数集。

（1）三角函数集{1，$\cos(n\Omega t)$，$\sin(n\Omega t)$，$n=1,2,\ldots$}

（2）虚指数函数集{ $e^{jn\Omega t}$，$n=0$，±1，±2，…}

证明过程见扩展资源Y4001。

4. 信号的正交分解

设有n个函数$\varphi_1(t)$， $\varphi_2(t)$，…， $\varphi_n(t)$在区间(t_1, t_2)构成一个正交函数空间。将任一函数$f(t)$用这n个正交函数的线性组合来近似，可表示为

$$f(t) \approx C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \cdots + C_i\varphi_i(t) \cdots + C_n\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)$$

思考问题：如何选择各系数C_j，使$f(t)$与近似函数之间误差在区间(t_1, t_2)内为最小？

通常使误差的方均值(称为均方误差)最小。

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)]^2 \mathrm{d}t$$

4.1信号分解为正交函数

为使上式最小（系数C_j变化时），有

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_i}=\frac{\partial}{\partial C_i}\left\{\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f(t)-\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)]^2\mathrm{d}t\right\}=0$$

展开被积函数，并求导，只有两项不为0，写为：

$$\frac{\partial}{\partial C_i}\left\{\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[-2C_i\varphi_i(t)f(t)+C_i^2\varphi_i^2(t)\right]\mathrm{d}t\right\}=0$$

即：

$$-2\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t+2C_i\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\mathrm{d}t=0$$

$$C_i=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\mathrm{d}t}=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t$$

代入，得最小均方误差

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f(t)-\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)]^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}[C_j\varphi_j(t)]^2\mathrm{d}t-2\sum_{j=1}^{n}C_j\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)\mathrm{d}t-\sum_{j=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}[C_j\varphi_j(t)]^2\mathrm{d}t\right]\geq 0$$

在用正交函数去近似***f*(*t*)**时，所取的项数越多，即***n***越大，则均方误差越小。当***n***→∞时（完备正交函数集），均方误差为零。

结论

任意信号*f*(*t*)可以表示为无穷多个正交函数之和：

$$\boxed{f(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+\cdots+C_i\varphi_i(t)+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\varphi_i(t)}$$

上式称为信号的正交展开式，也称为广义傅里叶级数。

实变函数下

$$C_i=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\mathrm{d}t}=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t$$

复变函数下

$$C_i=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i^*(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_i^*(t)\mathrm{d}t}=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i^*(t)\mathrm{d}t$$

广义傅里叶系数