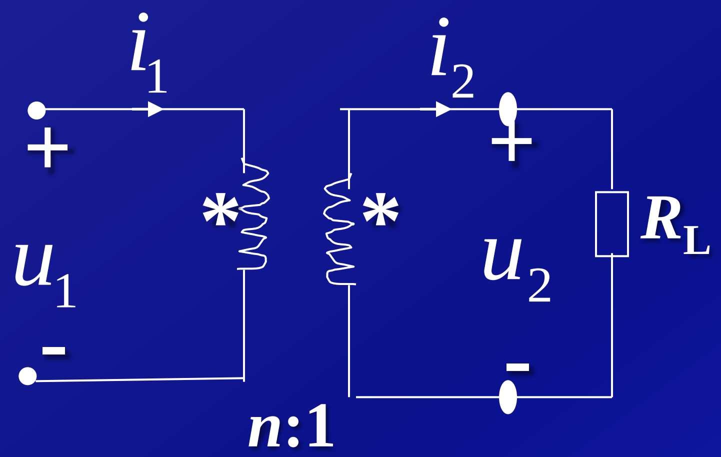
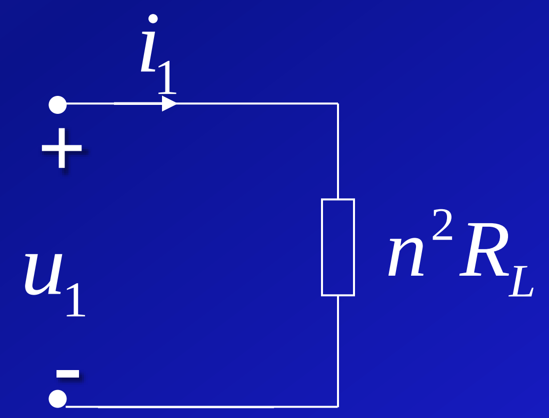
● 含理想变压器电路的分析计算

- 全耦合变压器的等效电路中含理想变压器
- 激磁电感(即初级电感)可以认为是外接电感
- 本节也包括了全耦合变压器电路的分析计算

理想变压器的阻抗变换





理想变压器从初级看进去的等效电阻为：

$$R_i=\frac{u_1}{i_1}=\frac{nu_2}{\frac{1}{n}i_2}=n^2\frac{u_2}{i_2}=n^2R_L$$

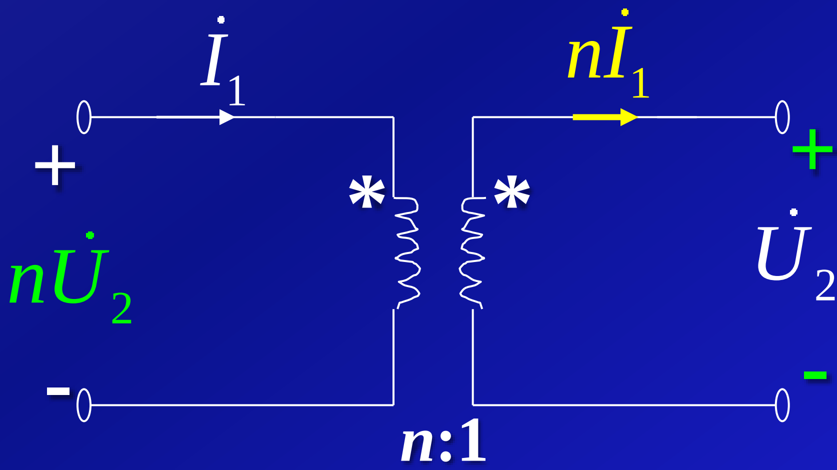
✓理想变压器的作用？

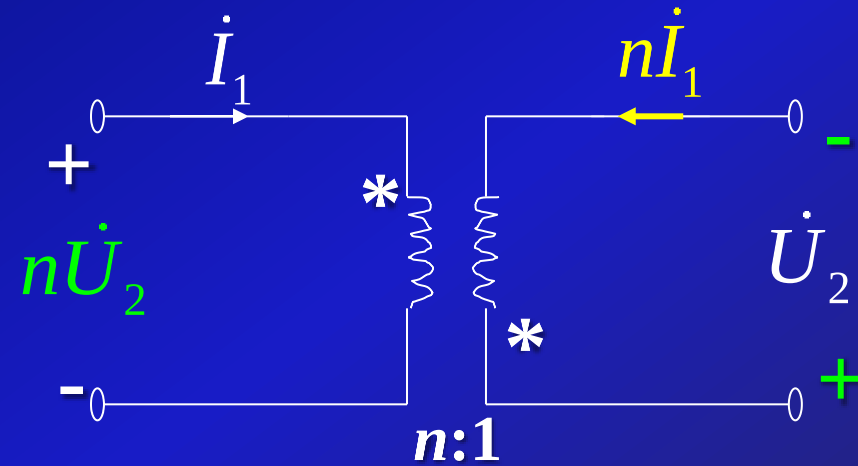
✓输入电阻与同名端有关吗？

理想变压器的相量模型

对于正弦稳态电路，如果按照前面所规定的参考方向，**理想变压器伏安关系的相量形式为：**

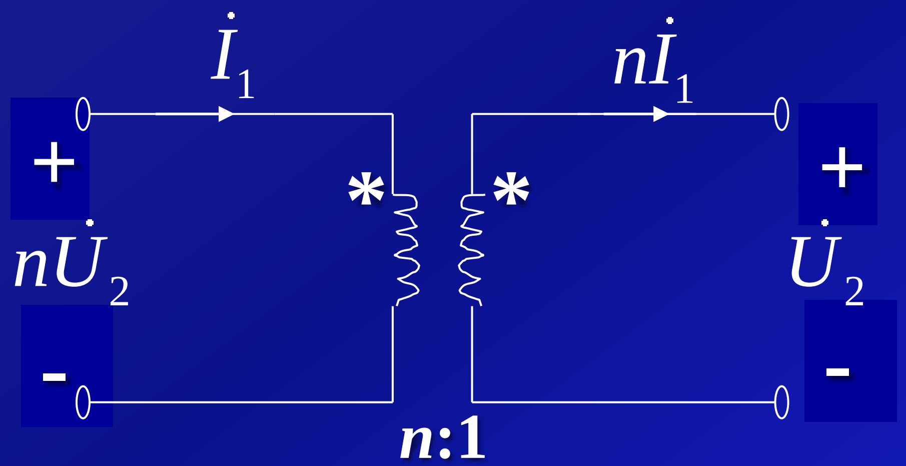
$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2\,,\quad \dot{I}_2 = n\dot{I}_1$$

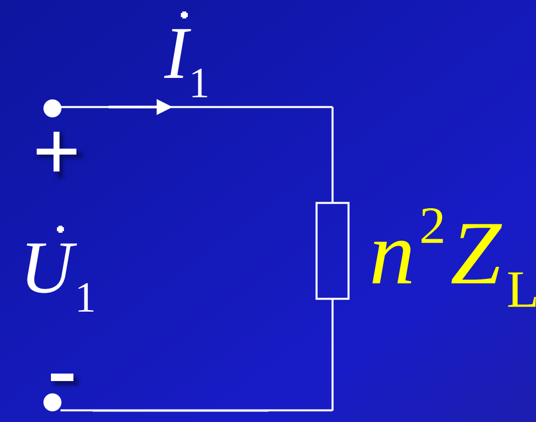




若次级接负载阻抗，则从初级看进去的等效阻抗即输入阻抗为：

$$Z_i = n^2 Z_\mathrm{L}$$





理想变压器最重要的特性是只改变阻抗的幅度，即只改变阻抗的大小，而不改变阻抗的性质。

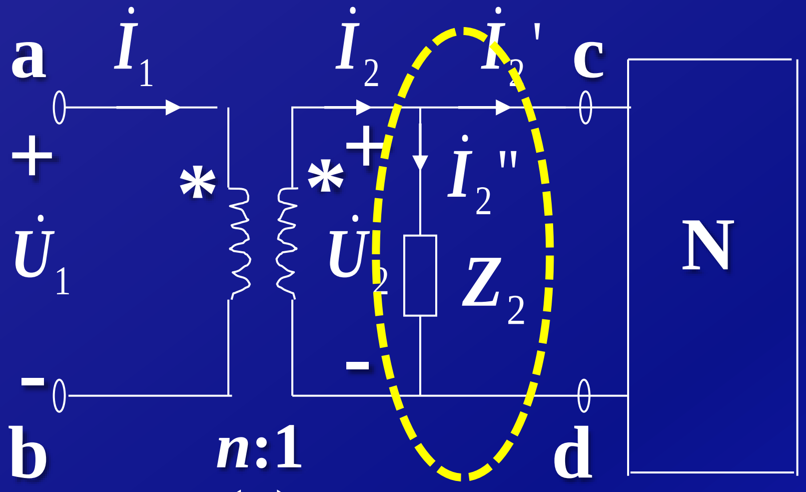
上述“**搬移**”**阻抗**的方法还可以进一步推广：

1. 并联阻抗可以在次级与初级间搬移；

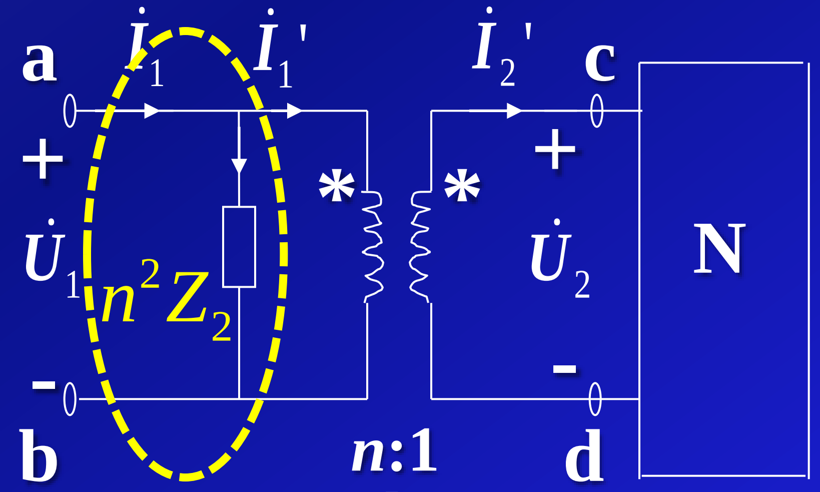
2. 串联阻抗可以在初级与次级间搬移。

即：阻抗可以从初级与次级之间来回搬移。

1. 并联阻抗从次级搬移到初级：



(a)



(b)

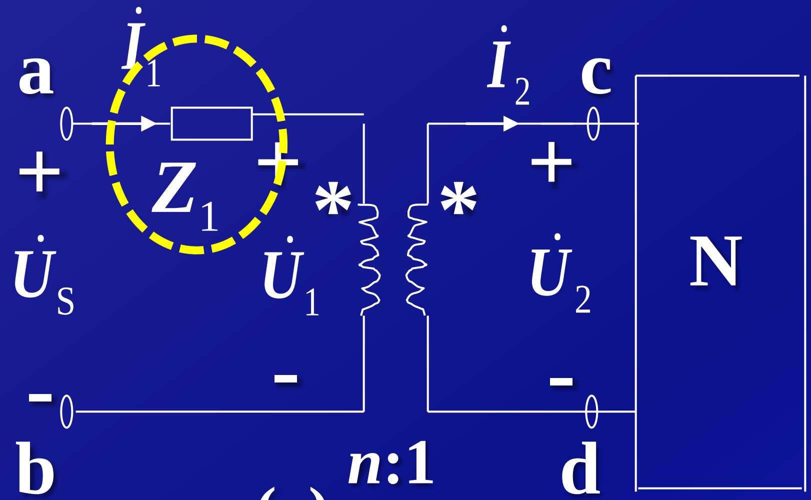
由图(a)： $\dot{U}_1 = n\dot{U}_2$

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{n}\dot{I}_2 = \frac{1}{n}(\dot{I}_2'' + \dot{I}_2') = \frac{1}{n}(\frac{\dot{U}_2}{Z_2} + \dot{I}_2')$$

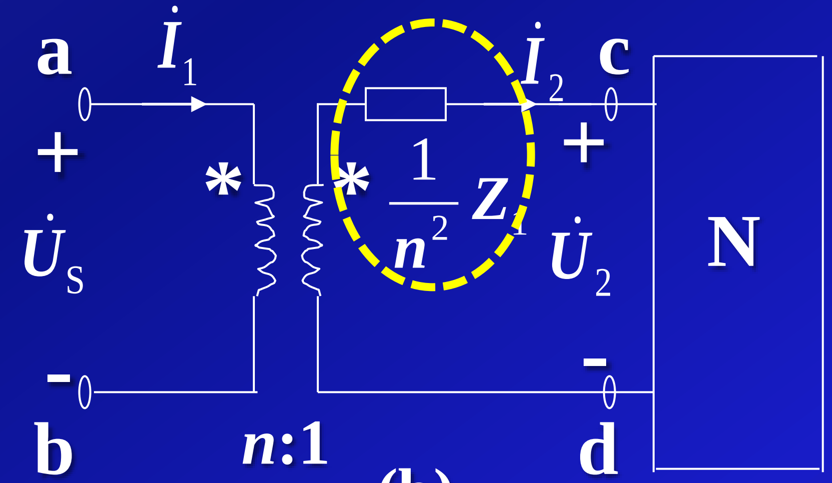
$$= \frac{\dot{U}_1}{n^2 Z_2} + \dot{I}_1' \text{（其中：} \dot{I}_1' = \frac{1}{n}\dot{I}_2' \text{）}$$

即：并联在次级上的阻抗可等效搬移为与初级并联的阻抗 n^2Z_2。

2.串联阻抗从初级搬移到次级：



(a)



(b)

由图(a): $\dot{I}_2 = n\dot{I}_1$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{n}\dot{U}_1 = \frac{1}{n}(\dot{U}_S - Z_1\dot{I}_1) = \frac{1}{n}(\dot{U}_S - Z_1\frac{\dot{I}_2}{n})$$

$$= \frac{1}{n}\dot{U}_S - \frac{Z_1}{n^2}\dot{I}_2$$

即：串联在初级上的阻抗可等效搬移为与次级串联的阻抗 Z_1/n^2。

注意：阻抗的 n^2 倍与元件的 n^2 倍是不一样的：

电阻和电感意义相同，元件值增加了 n^2 倍；

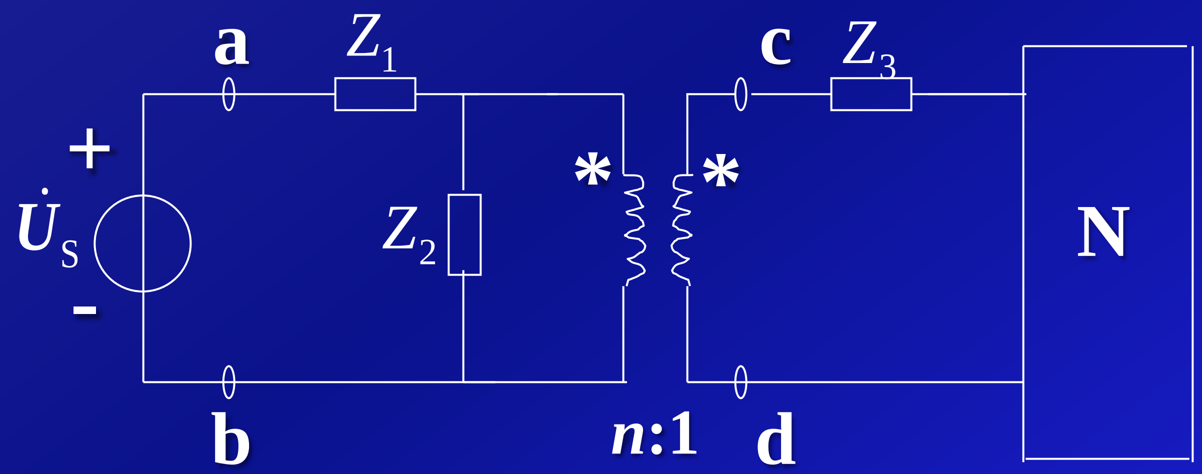
而电容意义刚好相反，元件值缩小了 n^2 倍；

$$n^2 \times R = (n^2 R)$$

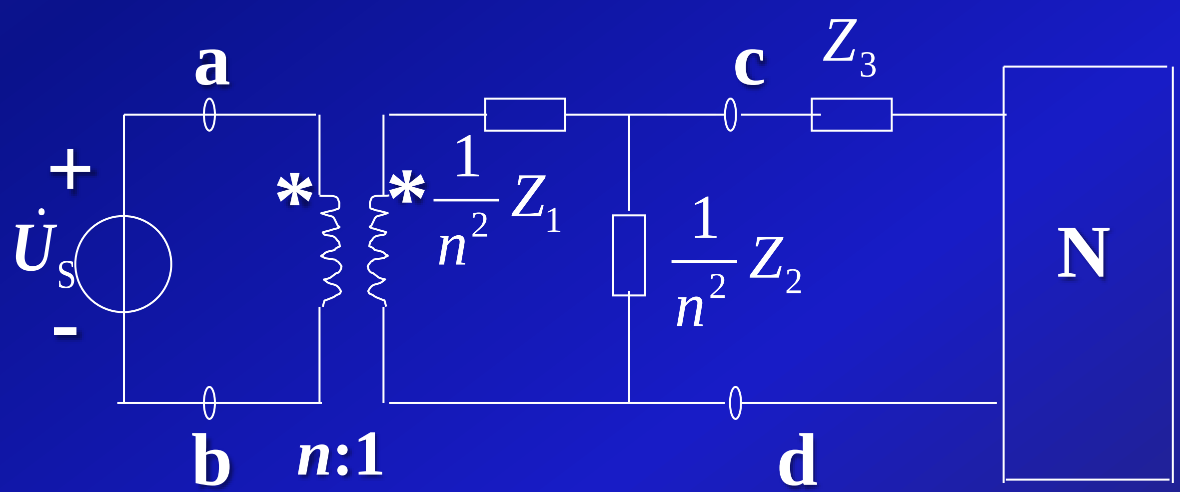
$$n^2 \times (\mathrm{j}\omega L) = \mathrm{j}\omega(n^2 L)$$

$$n^2 \times \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega(\frac{1}{n^2}C)}$$

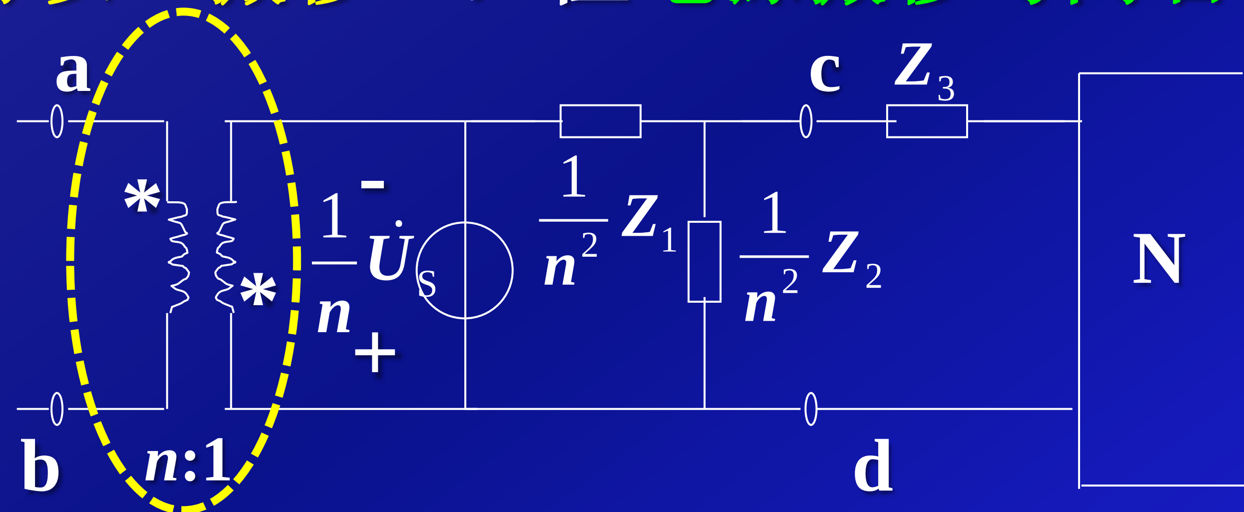
利用阻抗的来回搬移，能使问题简化。如：



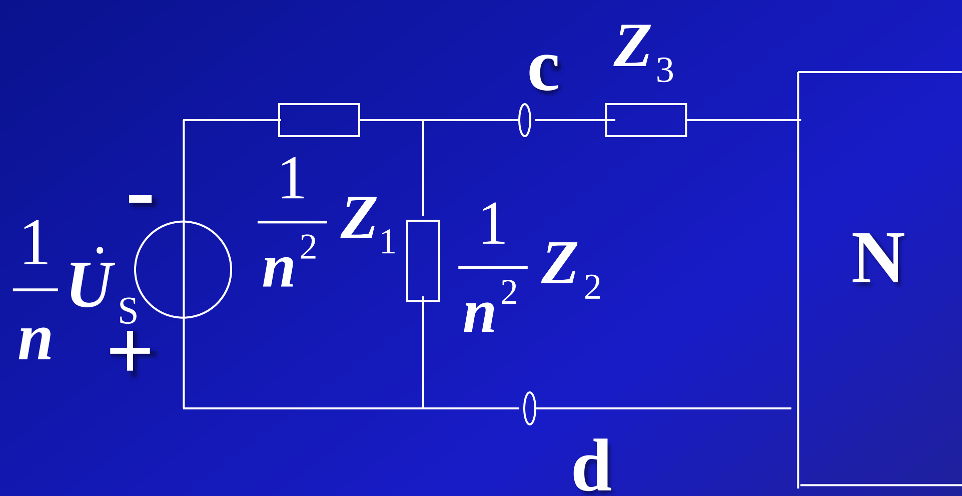
简化为



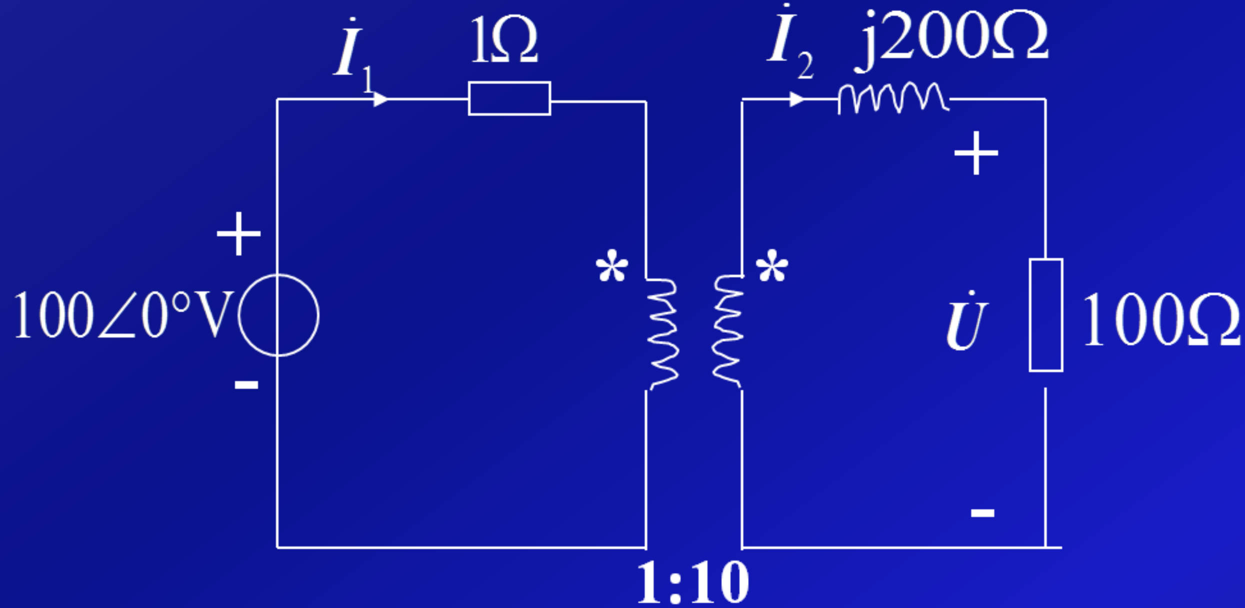
电源也可以“搬移”，但电源搬移与同名端有关。



由理想变压器的VCR，简化成没有变压器的等效电路：

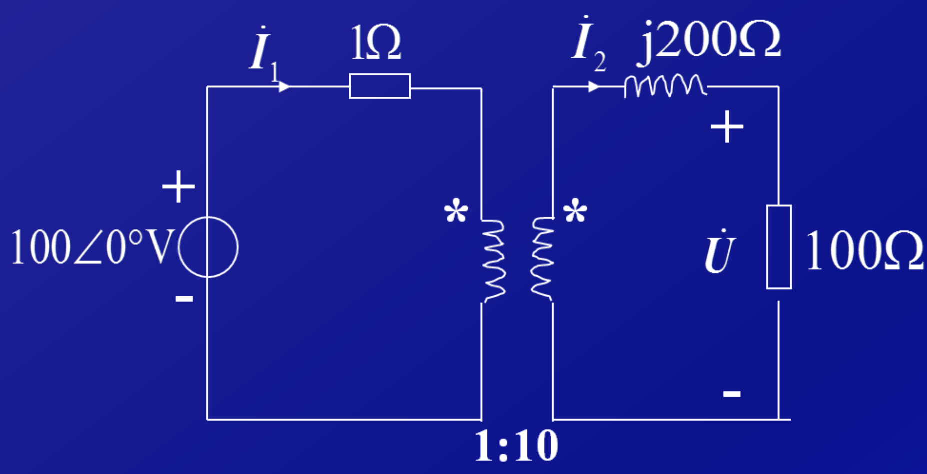


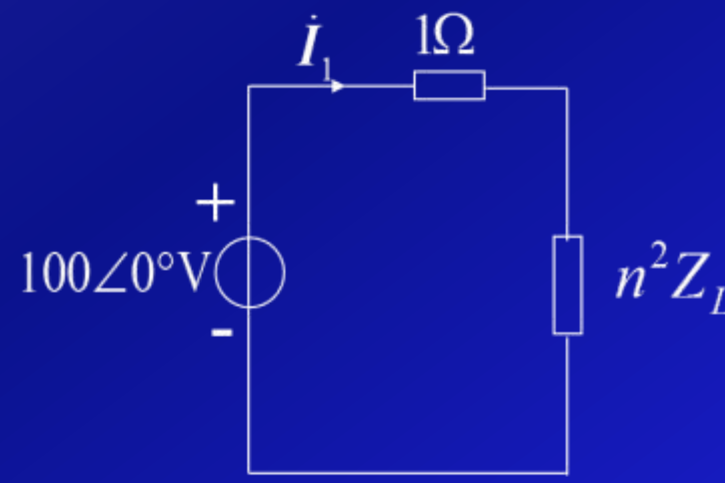
例8（P265例8-4）含理想变压器电路如图，试求 $\dot{U}$ 和$\dot{I}_1$ 。



解：先将次级折合到初级，则：

$$Z_L = 100 + j200\Omega \qquad Z_i = n^2 Z_L = 1 + j2\Omega$$





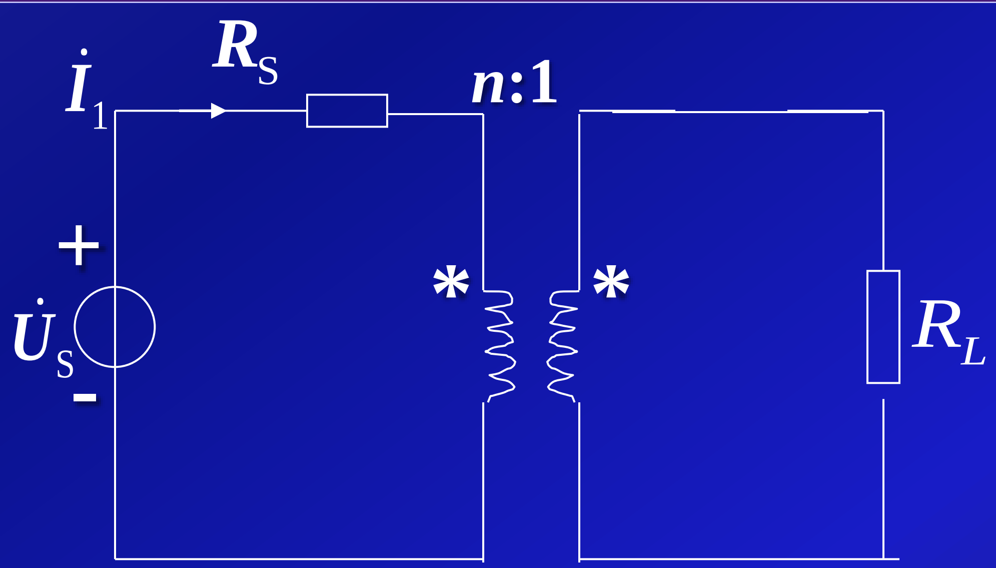
$$\dot{I}_1 = \frac{100\angle 0^\circ}{1+1+\mathrm{j}2} = 25\sqrt{2}\angle -45^\circ \mathrm{A}$$

由理想变压器的伏安关系：

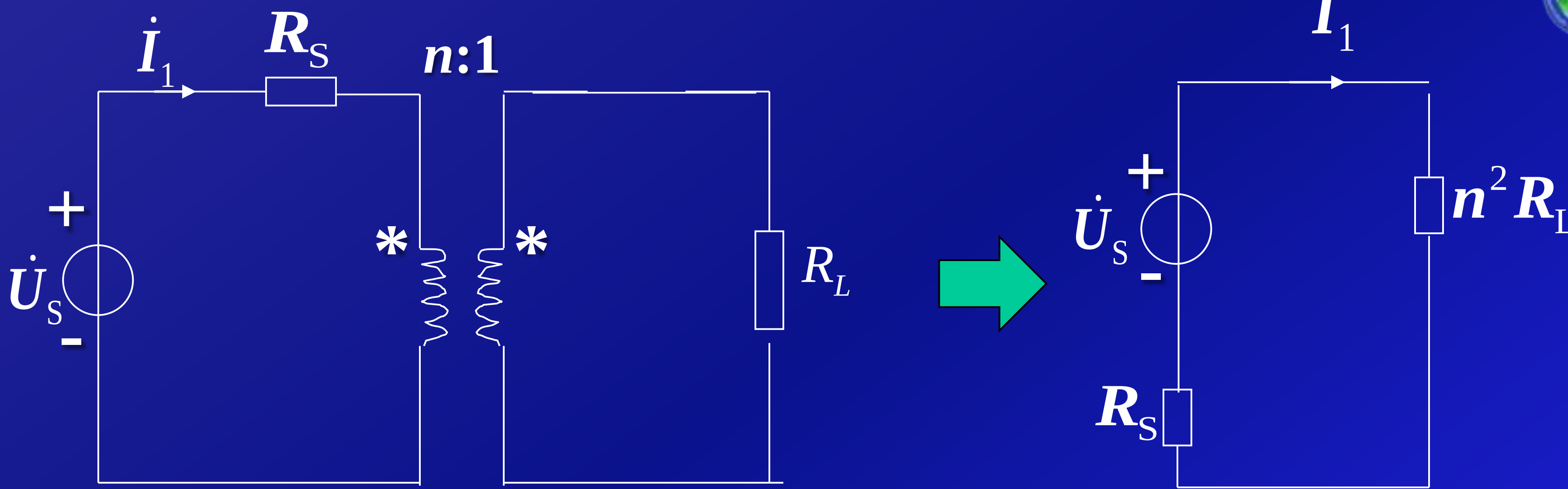
$$\dot{\boldsymbol{I}}_2 = \boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{I}}_1 = 2.5\sqrt{2}\angle -45^\circ \mathrm{A}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}} = 100\dot{\boldsymbol{I}}_2 = 250\sqrt{2}\angle -45^\circ\ \mathrm{V}$$

例9 在如图所示电路中，已知 $\dot{U}_S = 8\angle 0°\ \mathrm{V}$，内阻 $R_S = 2\,\Omega$，负载电阻 $R_L = 8\,\Omega$，求n=?时，负载电阻与电源达到最大功率匹配？此时负载获得的最大功率为多少？



正弦稳态电路中，负载电阻必须与内阻相等时，负载才能获得最大功率。



解：将次级折合到初级，根据最大功率匹配条件有

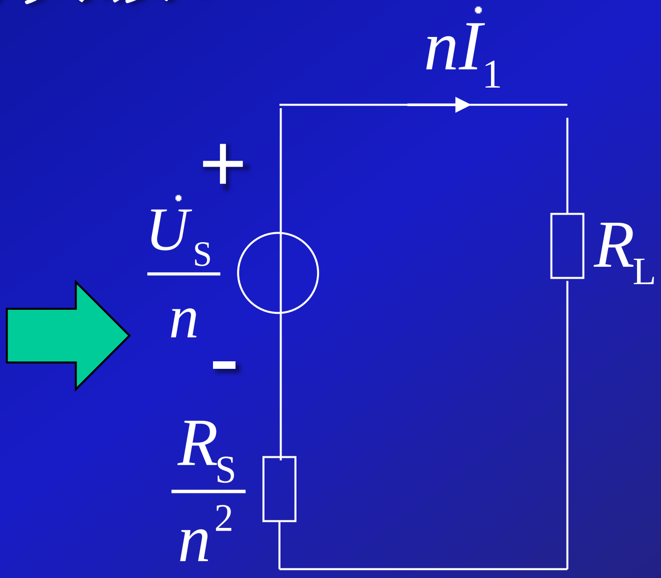
$$n^2 R_L = R_S \Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{R_S}{R_L}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = 0.5$$

由于理想变压器既不能耗能也不能储能，故：

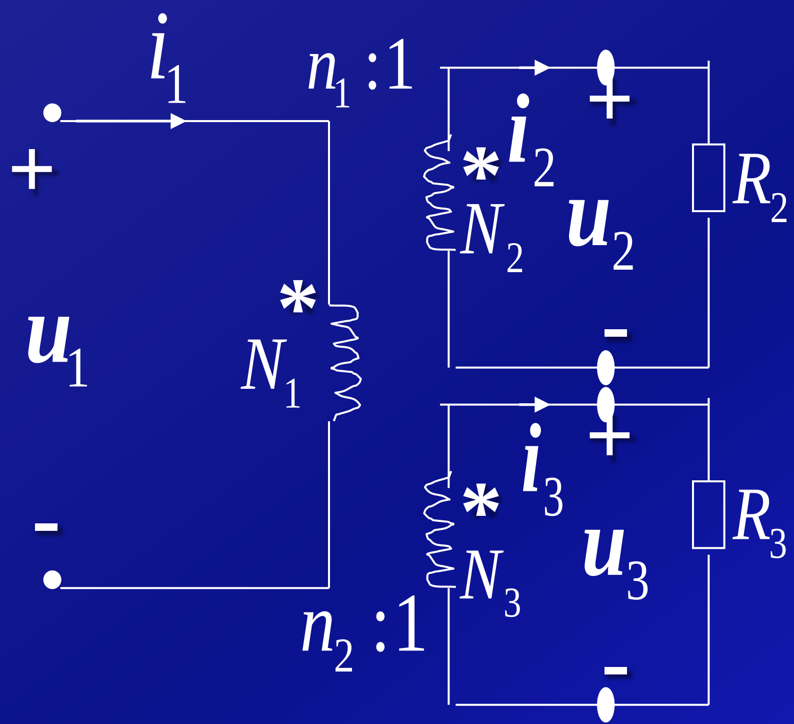
等效电路中 n^2R_L吸收的功率就是原次级电路中 R_L 获得的功率：

$$P_{max}=\frac{U_S{}^2}{4R_S}=8\text{ W}$$

另解：也可将初级折合到次级。



理想变压器还可由一个初级线圈与多个次级线圈构成：



在图示电压，电流参考方向下，有

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{N_1}{N_2}=n_1 \qquad \frac{u_1}{u_3}=\frac{N_1}{N_3}=n_2$$

（或：$\dfrac{u_1}{N_1}=\dfrac{u_2}{N_2}=\dfrac{u_3}{N_3}$ ）

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 - N_3 i_3 = 0$$ 即 $$i_1=\frac{1}{n_1}i_2+\frac{1}{n_2}i_3$$

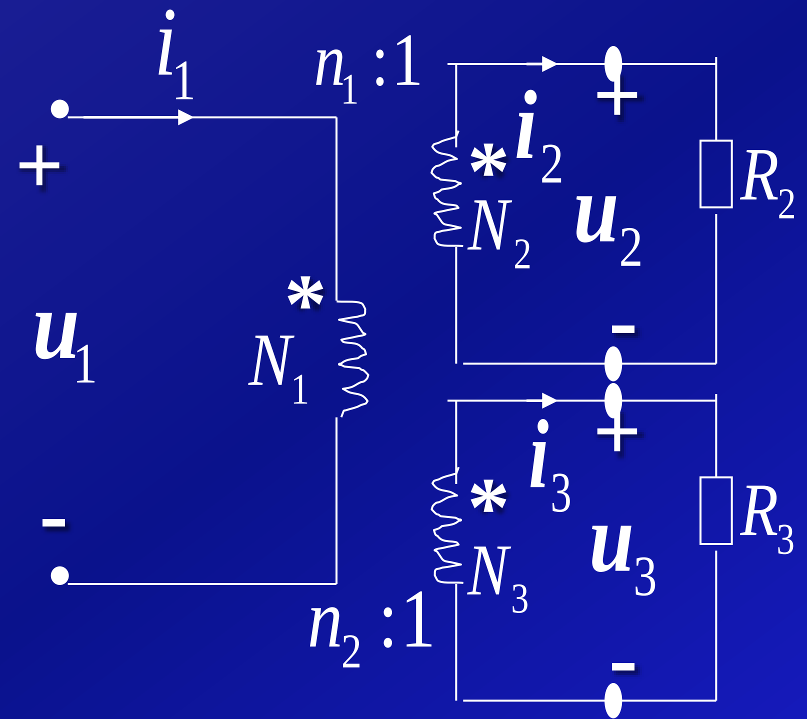
$$p = u_1 i_1 - u_2 i_2 - u_3 i_3 = u_1 i_1 - \frac{u_1}{n_1} i_2 - \frac{u_1}{n_2} i_3 = 0$$

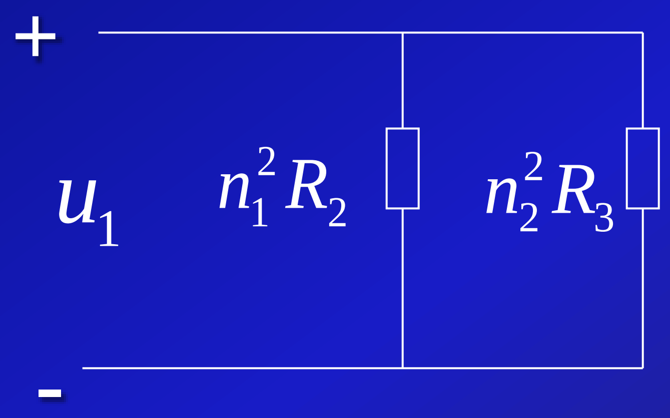
从初级看入的等效电导:

$$G_i = \frac{i_1}{u_1} = \frac{\frac{1}{n_1} i_2 + \frac{1}{n_2} i_3}{u_1} = \frac{\frac{1}{n_1} i_2}{u_1} + \frac{\frac{1}{n_2} i_3}{u_1} = \frac{\frac{1}{n_1} i_2}{n_1 u_2} + \frac{\frac{1}{n_2} i_3}{n_2 u_3} = \frac{G_2}{n_1^2} + \frac{G_3}{n_2^2}$$

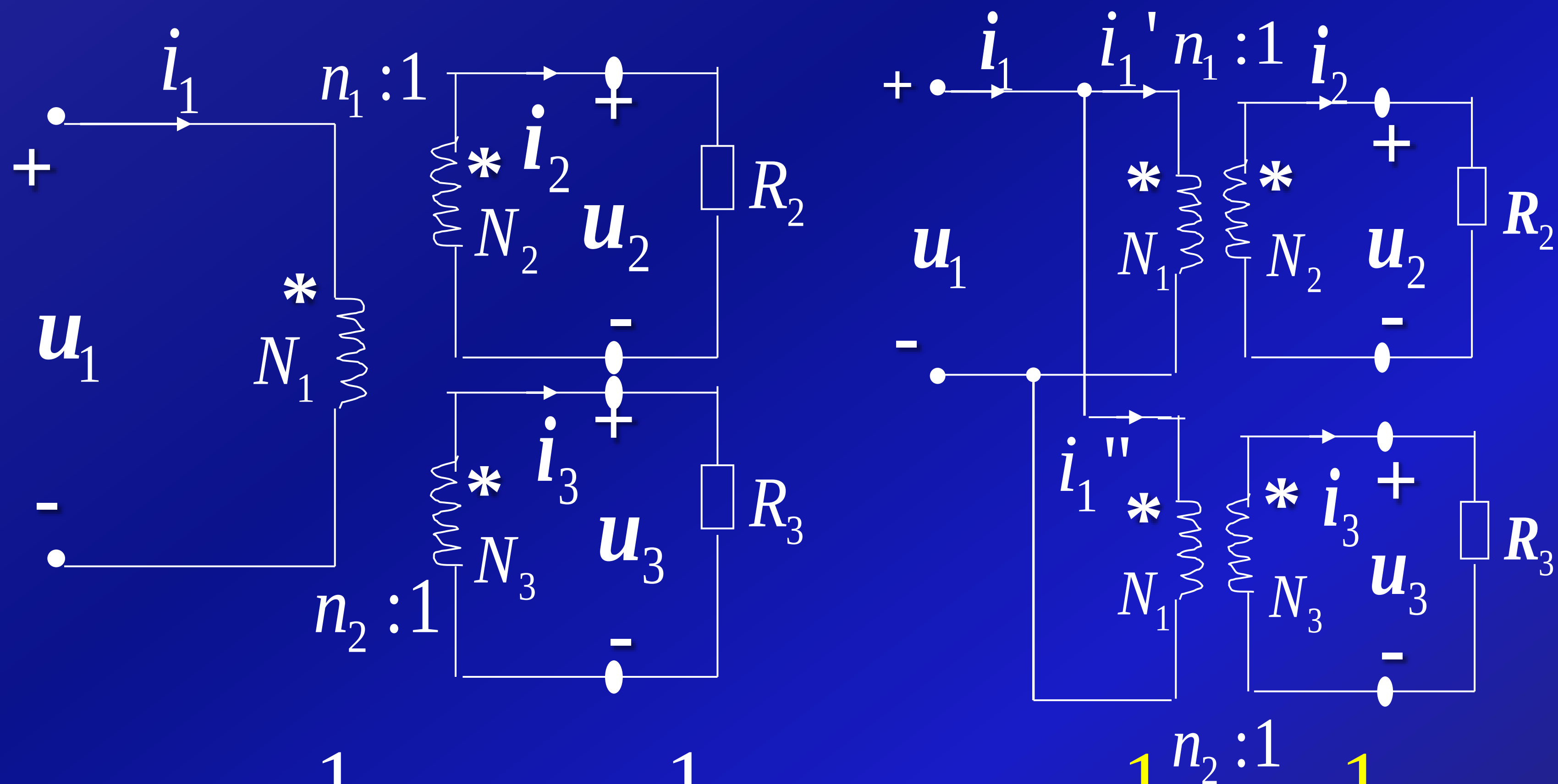
$$R_i = \frac{(n_1{}^2 R_2)(n_2{}^2 R_3)}{n_1{}^2 R_2 + n_2{}^2 R_3} = n_1{}^2 R_2 \, / / \, n_2{}^2 R_3$$

即：有多个次级线圈时，次级阻抗可以一个一个地等效搬移为初级阻抗。



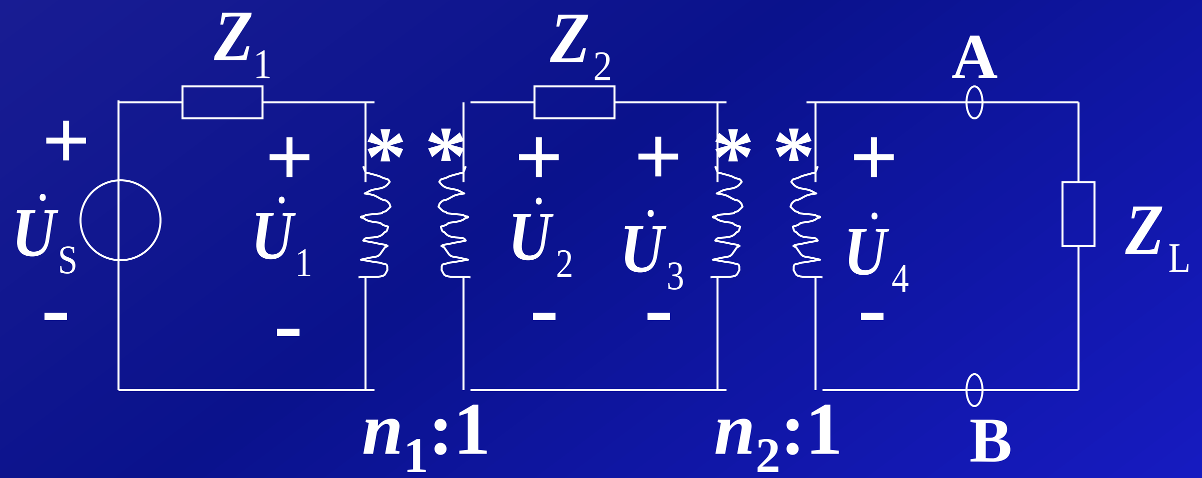


其实，多个次级的理想变压器电路，可以认为**初级是双线(或多线)并绕**，这样就更易理解。

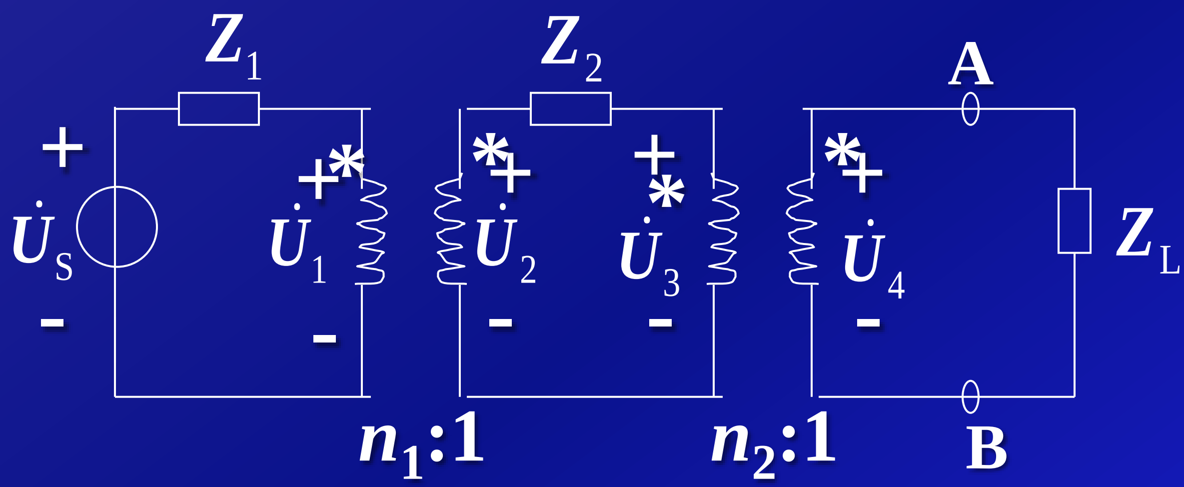


$$i_1' = \frac{1}{n_1} i_2, \quad i_1'' = \frac{1}{n_2} i_3 \qquad \Rightarrow i_1 = \frac{1}{n_1} i_2 + \frac{1}{n_2} i_3$$

例10 求：A、B以左电路的戴维南等效电路。



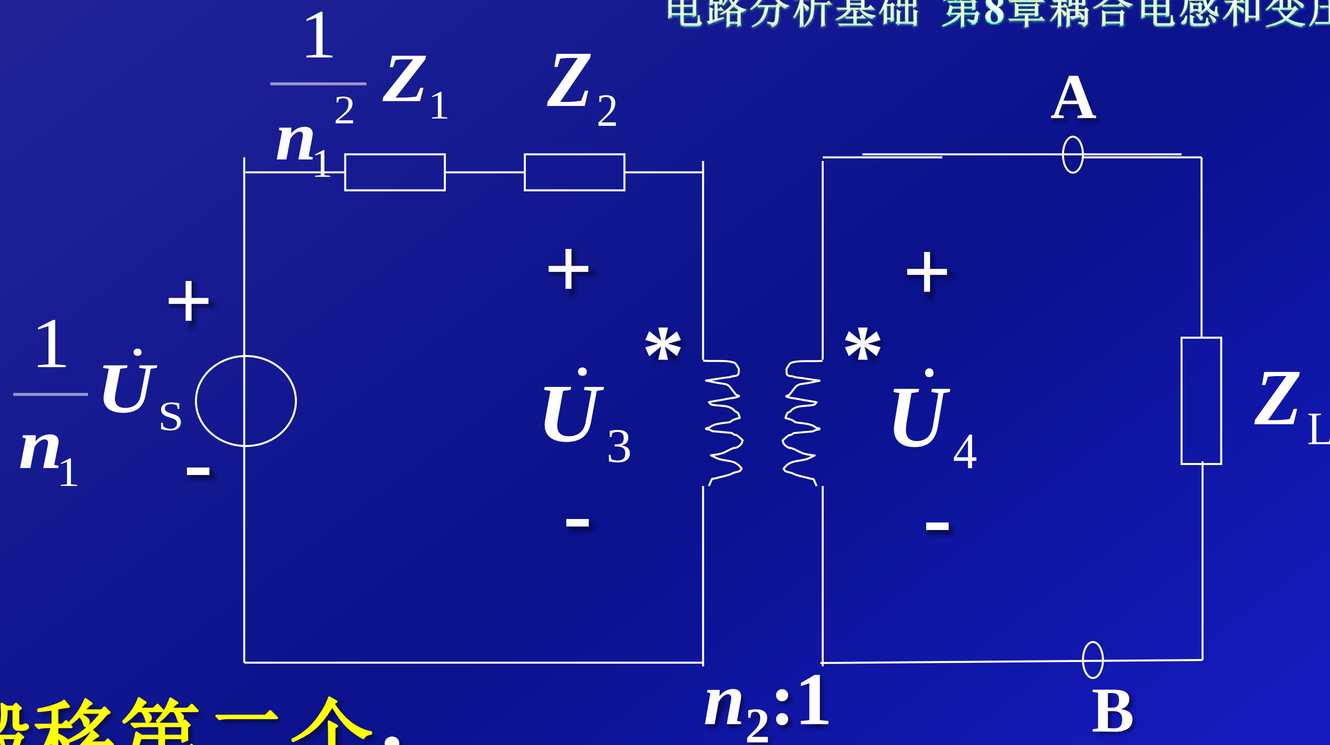
解：本题含有两个理想变压器，从电源开始，逐级搬移至第二个理想变压器的次级：



先搬移第一个：

1) 将初级的阻抗折合到次级，为$\frac{1}{n_1^2}Z_1$，与同名端无关；

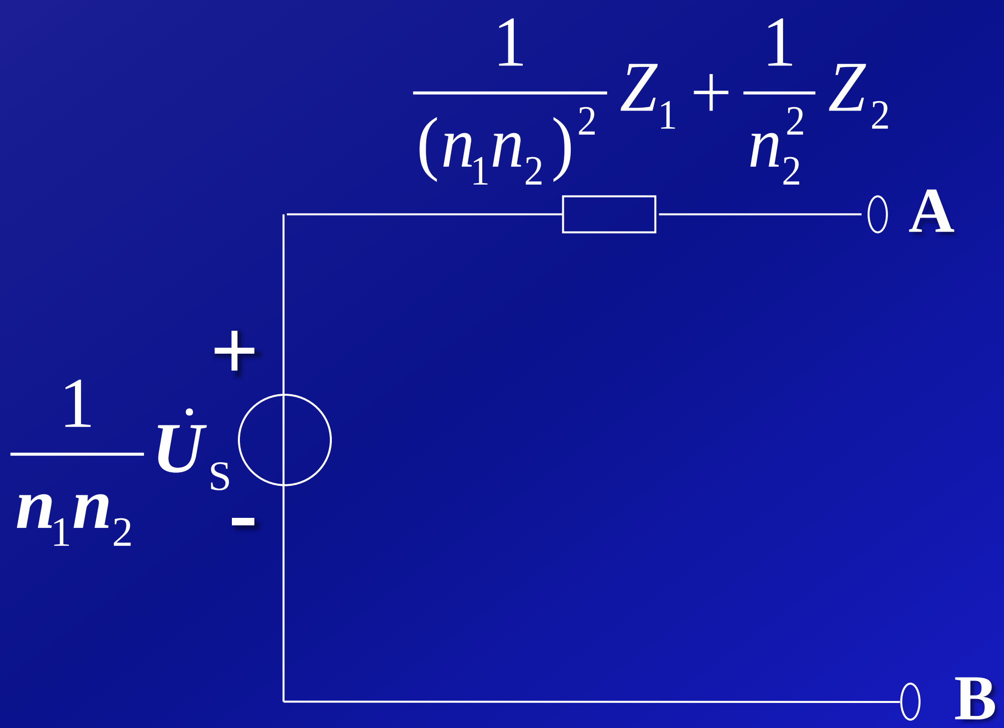
2) 将初级的电压源折合到次级，为$\frac{1}{n_1}\dot{U}_S$，与同名端有关；



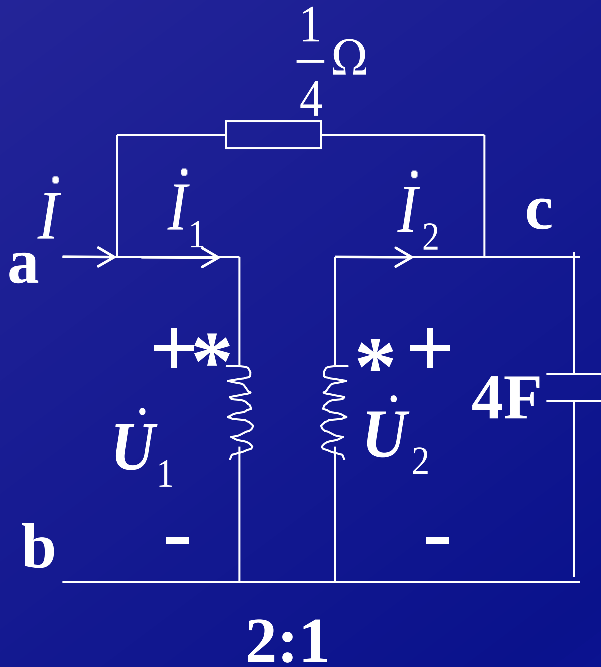
再搬移第二个：

1) 将初级的阻抗折合到次级，为 $\frac{1}{n_2^2}(\frac{1}{n_1^2}Z_1+Z_2)$，与同名端无关；

2) 将初级的电压源折合到次级，为 $\frac{1}{n_1 n_2}\dot{U}_S$，与同名端有关；



$\frac{1}{(n_1 n_2)^2} Z_1 + \frac{1}{n_2^2} Z_2$
A
+
$\frac{1}{n_1 n_2} \dot{U}_S$
-
B



例11 已知 $\omega=1$，求ab端的输入阻抗。

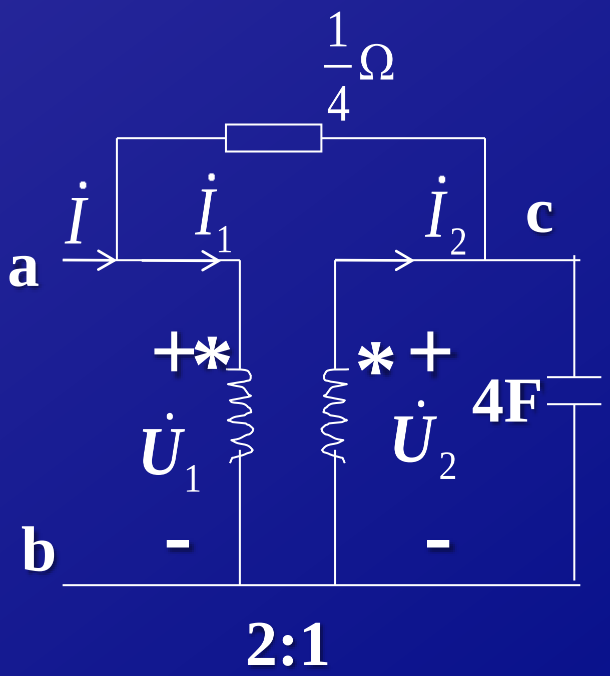
解：法一由KVL：

$$\dot{U}_{1/4\Omega}=\dot{U}_1-\dot{U}_2=2\dot{U}_2-\dot{U}_2=\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}_2}{1/j4}-\frac{\dot{U}_2}{1/4}=(-4+j4)\dot{U}_2 \therefore \dot{I}_1=\frac{1}{2}\dot{I}_2=(-2+j2)\dot{U}_2$$

$$\therefore Z_{ab}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}}=\frac{2\dot{U}_2}{\dot{I}_1+\dot{I}_{1/4\Omega}}=\frac{2\dot{U}_2}{(-2+j2)\dot{U}_2+4\dot{U}_2}=\frac{1}{2+j2}=\frac{1}{2}(1-j)\Omega$$

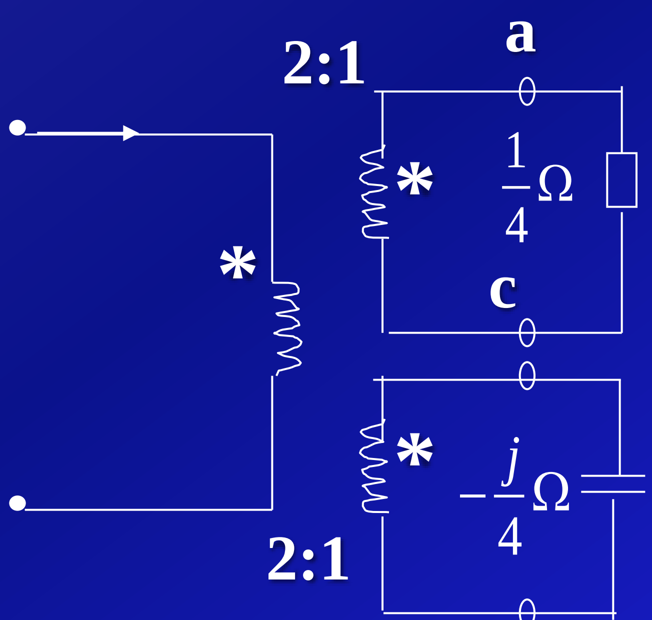
（P277习题8-13）



法二：利用阻抗搬移的结论巧妙计算

解：由KVL：

$$\dot{U}_{1/4\Omega}=\dot{U}_1-\dot{U}_2=2\dot{U}_2-\dot{U}_2=\dot{U}_2$$

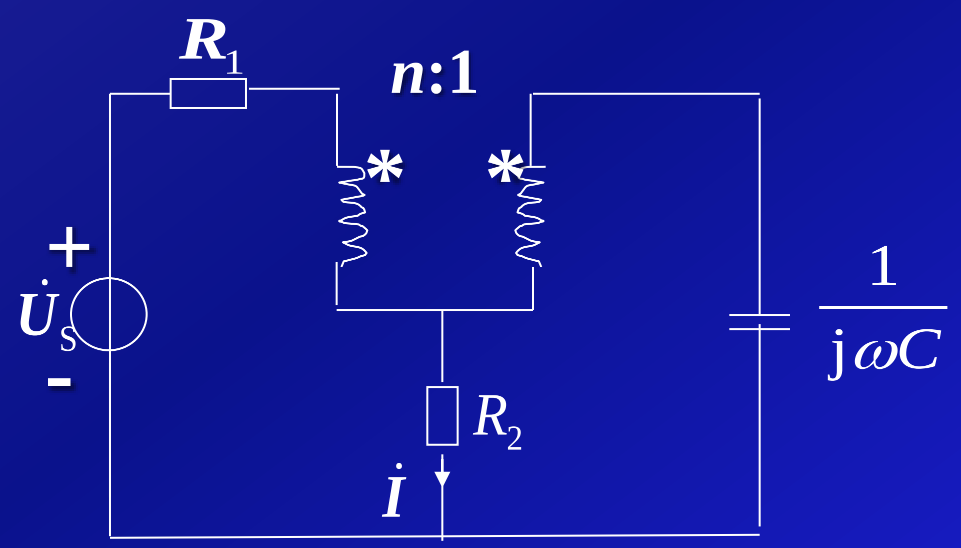


等效电路如左下图，则输入阻抗为：

$$Z_i=(2^2\times\frac{1}{4})//[(2^2\times(-\frac{j}{4}))]$$

$$=\frac{-j}{1-j}=\frac{1}{2}(1-j)\,\Omega$$

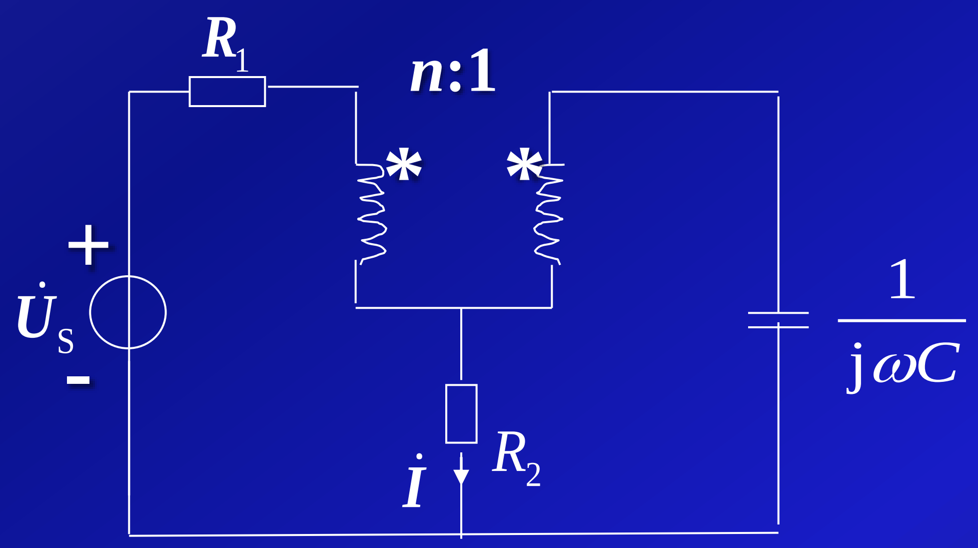
含理想变压器电路的一般分析方法



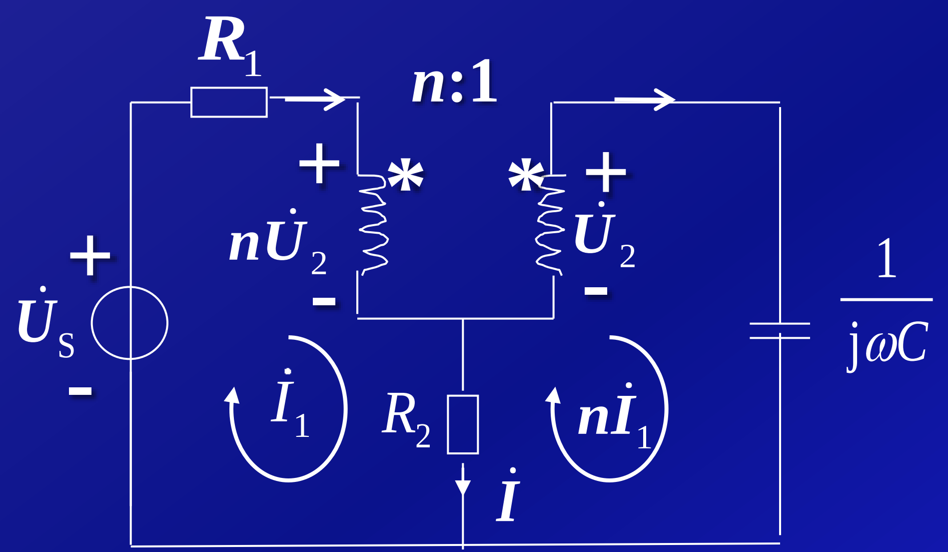
不方便用搬移方法进行化简时，可以直接列写网络方程。

例12（P270例8-8）求流过 R_2 的电流I。

$$n=0.5\,,\ R_1=R_2=10\,\Omega\,,\ \frac{1}{\omega C}=50\,\Omega,\ U_S=50\angle 0^0 V$$



解：一般分析方法



网孔方程:

$$(R_1+R_2)\dot{I}_1-R_2(n\dot{I}_1)=\dot{U}_S-n\dot{U}_2$$

$$-R_2\dot{I}_1+(R_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C})(n\dot{I}_1)=\dot{U}_2$$

$$I=I_1-nI_1=(1-n)I_1$$

代入数据

$$20\dot{I}_1 - 10\times\frac{1}{2}\dot{I}_1 = 50 - \frac{1}{2}\dot{U}_2$$

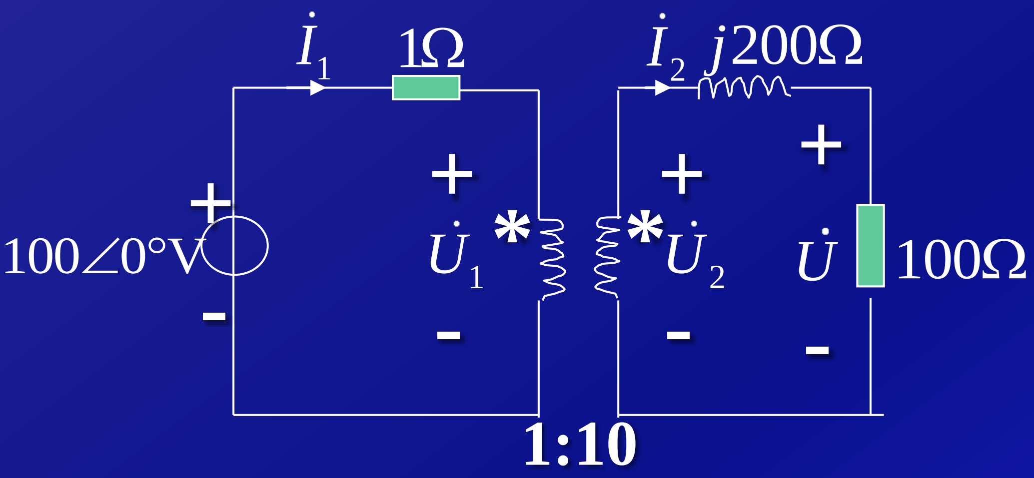
$$-10\dot{I}_1 + (20 - \mathrm{j}50)\frac{1}{2}\dot{I}_1 = \dot{U}_2$$

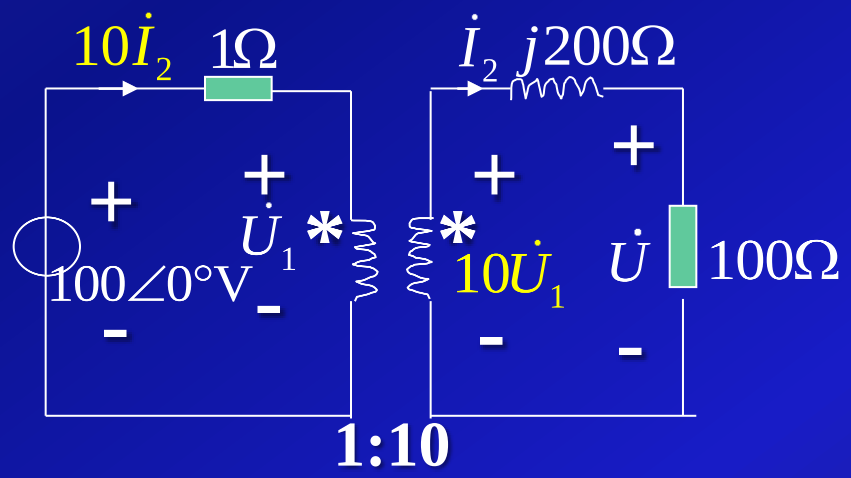
得:

$$\dot{I}_1 = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

$$\therefore\ \dot{I} = \dot{I}_1 - n\dot{I}_1 = \sqrt{2}\angle 45^\circ\ \mathrm{A}$$

例13 含理想变压器电路如图，试求 $\dot{I}_1$ 和 $\dot{U}$。





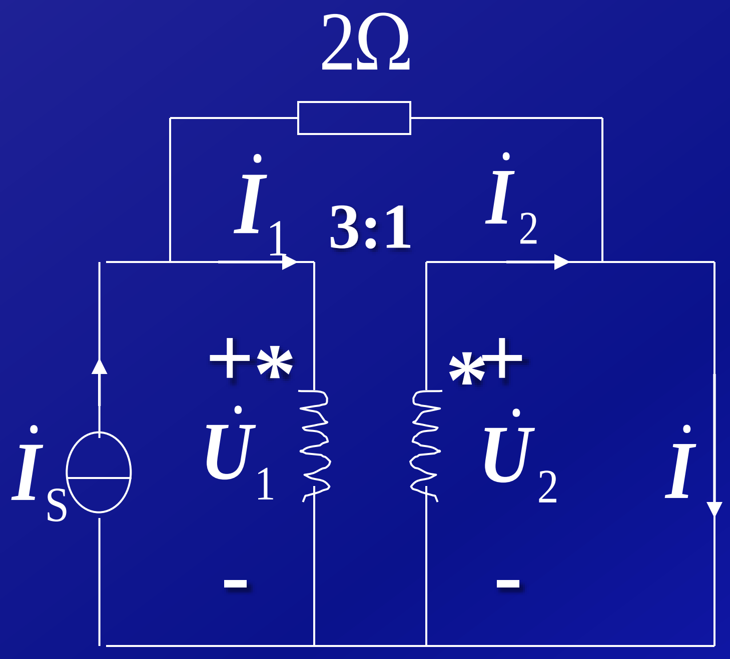
另解：由理想变压器的伏安关系：

$$\boxed{\begin{aligned} 10\dot{I}_2+\dot{U}_1 &= 100\angle 0^\circ \\ (100+j200)\dot{I}_2 &= 10\dot{U}_1 \end{aligned}}$$

$$\dot{I}_1=10\dot{I}_2=25\sqrt{2}\angle -45°\text{A}$$

$$\dot{U}=100\dot{I}_2=250\sqrt{2}\angle -45°\ \text{V}$$

例14 已知$\dot{I}_S = 6\angle 0° \text{A}$,求$\dot{I}$



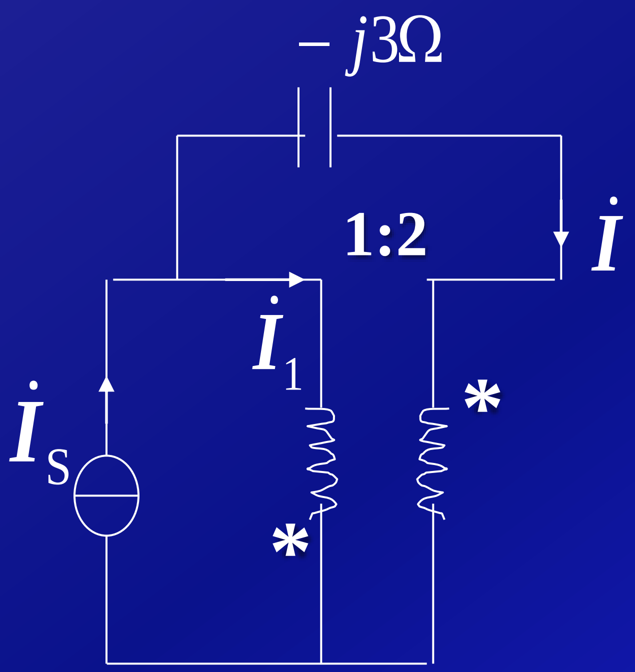
解: $\because \dot{U}_2 = 0 \quad \therefore \dot{U}_1 = 0$

则 2Ω 电阻上没有电流。

$$\therefore \dot{I}_1 = \dot{I}_S = 6\angle 0° \text{ A},$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 = 3\dot{I}_1 = 18\angle 0° \text{A}$$

例15 已知 $\dot{I}_S = 6\angle 0°\text{A}$，求 $\dot{I}$



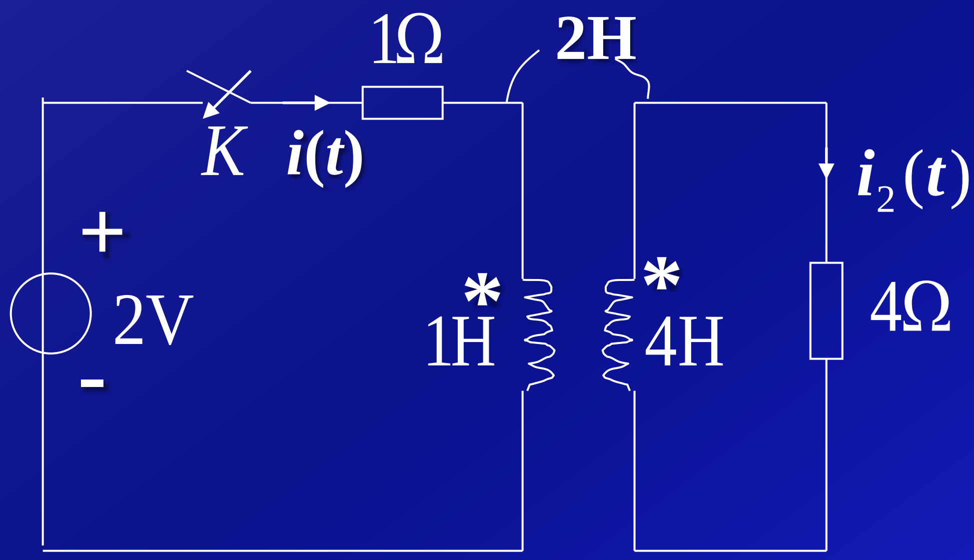
解：

$$\dot{I} = \frac{1}{2}\dot{I}_1$$

$$\dot{I}_S = \dot{I}_1 + \dot{I}$$

$$\therefore \dot{I} = \frac{1}{3}\dot{I}_S = 2\angle 0°\text{A}$$

例16 电路初始状态为零，t=0开关闭合，试求t>0时的电流$i(t)$



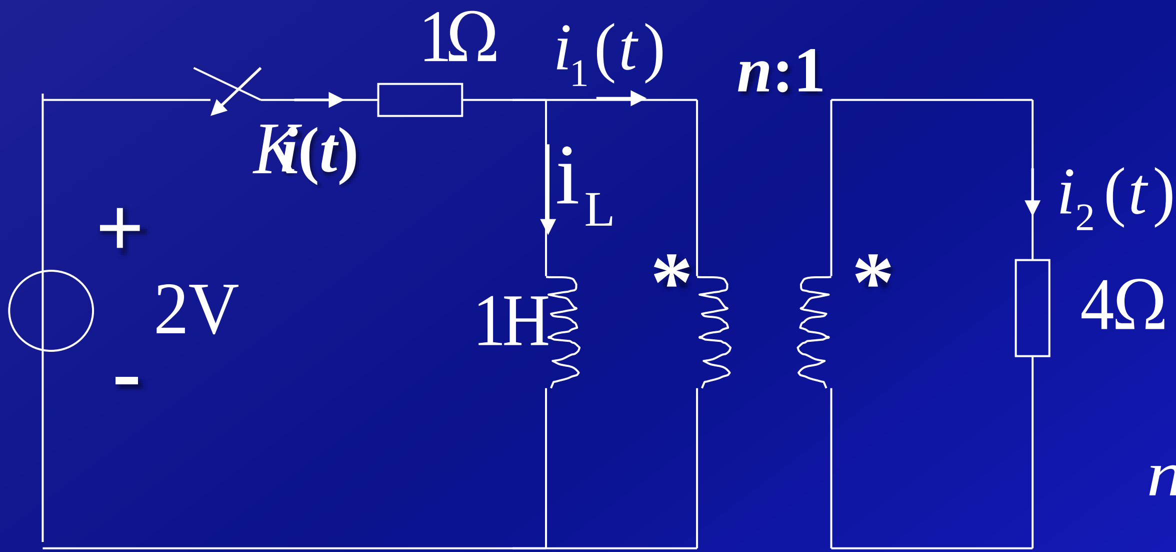
解：

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=1$$

为全耦合变压器。

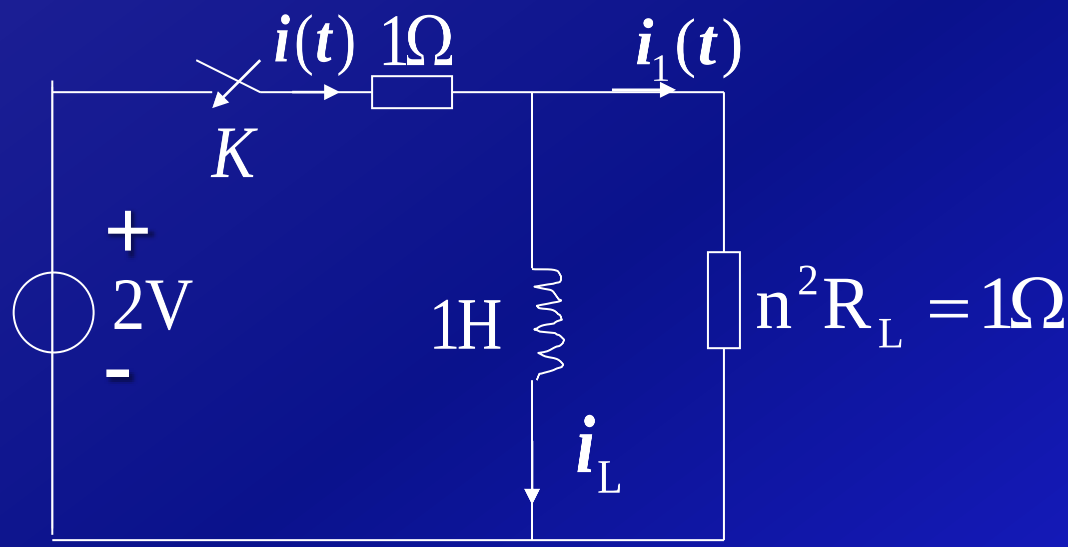
✓全耦合变压器等效电路？

等效电路为：



$$n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

再将理想变压器次级搬移到初级，得等效电路，再利用一阶电路的三要素法求解。



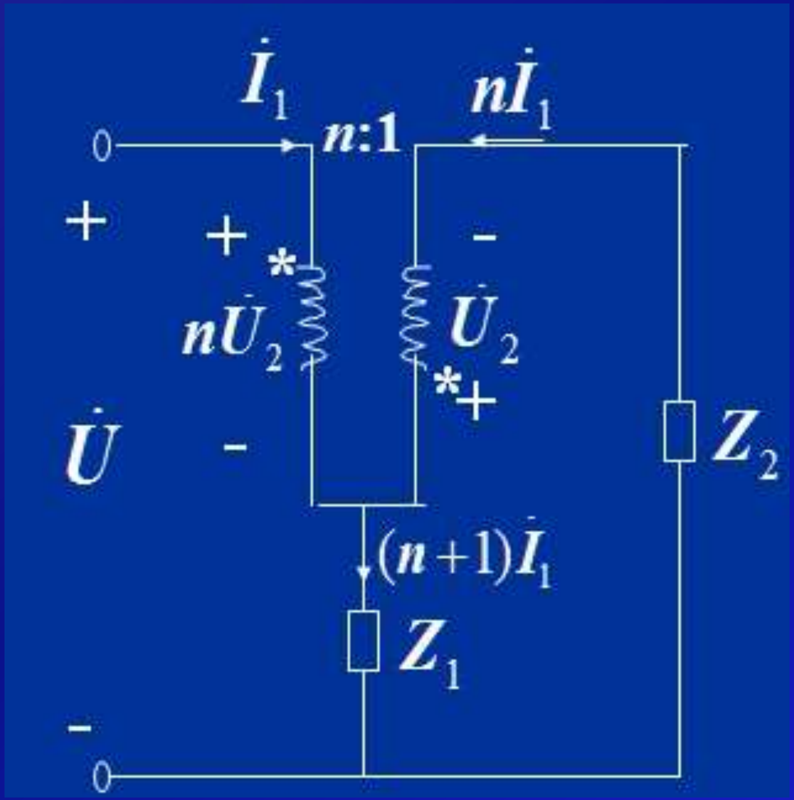
$$i_L(0^-) = 0\text{A} = i_L(0^+),$$

$$\therefore i(0^+) = \frac{2}{1+1} = 1\ \text{A}, \quad i(\infty) = \frac{2}{1} = 2\ \text{A} \quad \tau = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{R}} = 2\ \text{s}$$

$$\therefore i(t) = 2 + [1-2]e^{-\frac{1}{2}t} = 2 - e^{-\frac{1}{2}t}\ \text{A} \qquad t > 0$$

例17 求输入阻抗。

解：按图所示假设电压、电流:



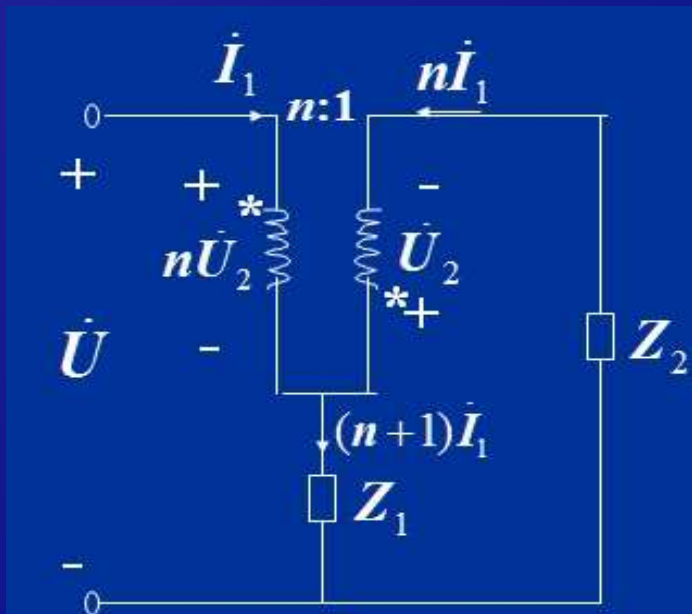
法一：列端口方程

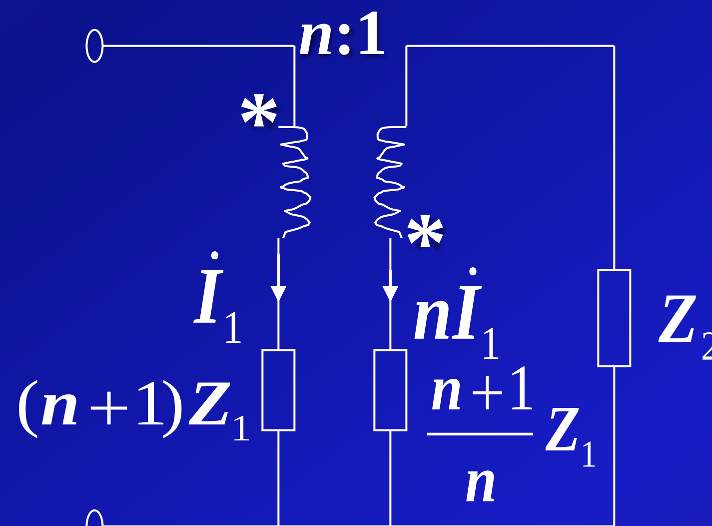
（常用方法）

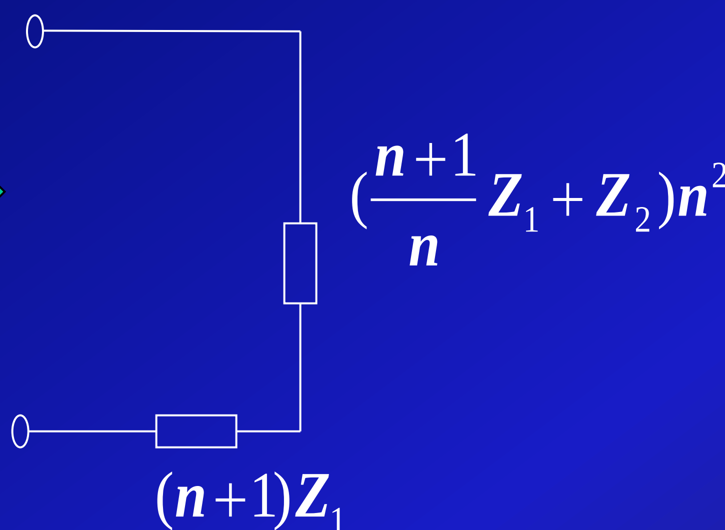
$$\begin{cases} \dot{U} = n\dot{U}_2 + (n+1)\dot{I}_1 Z_1 \\ \dot{U}_2 = n\dot{I}_1 Z_2 + (n+1)\dot{I}_1 Z_1 \end{cases}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}_1} = Z_i = n^2 Z_2 + (n+1)^2 Z_1$$

法二：等效变换；

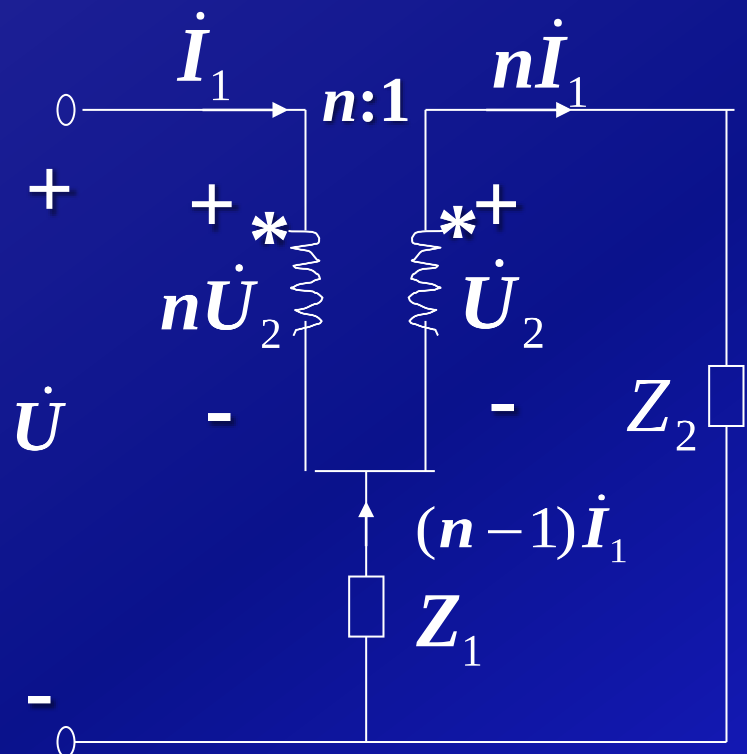






$$Z_i = n^2 Z_2 + (n+1)^2 Z_1$$

例18 求输入阻抗:



由上题完全类似，可得:

$$Z_i = n^2 Z_2 + (n-1)^2 Z_1$$

例17和例18的结论可直接用。

P270中的例 8-9就是18的实例：次级戴维南等效电路的输出阻抗为：

$$Z_o = R_o = 2^2 R_1 + (2-1)^2 R_2 = 10\Omega$$

开路电压由理想变压器的VCR直接得到：

$$\because \; i_2 = 0 \quad \therefore \; i_1 = 0$$

$$\therefore \; u_{oc} = 2u_S = 2\varepsilon(t)$$