一阶电路的零输入响应

- **一阶电路**

  电路中仅含一个独立的动态元件的电路；

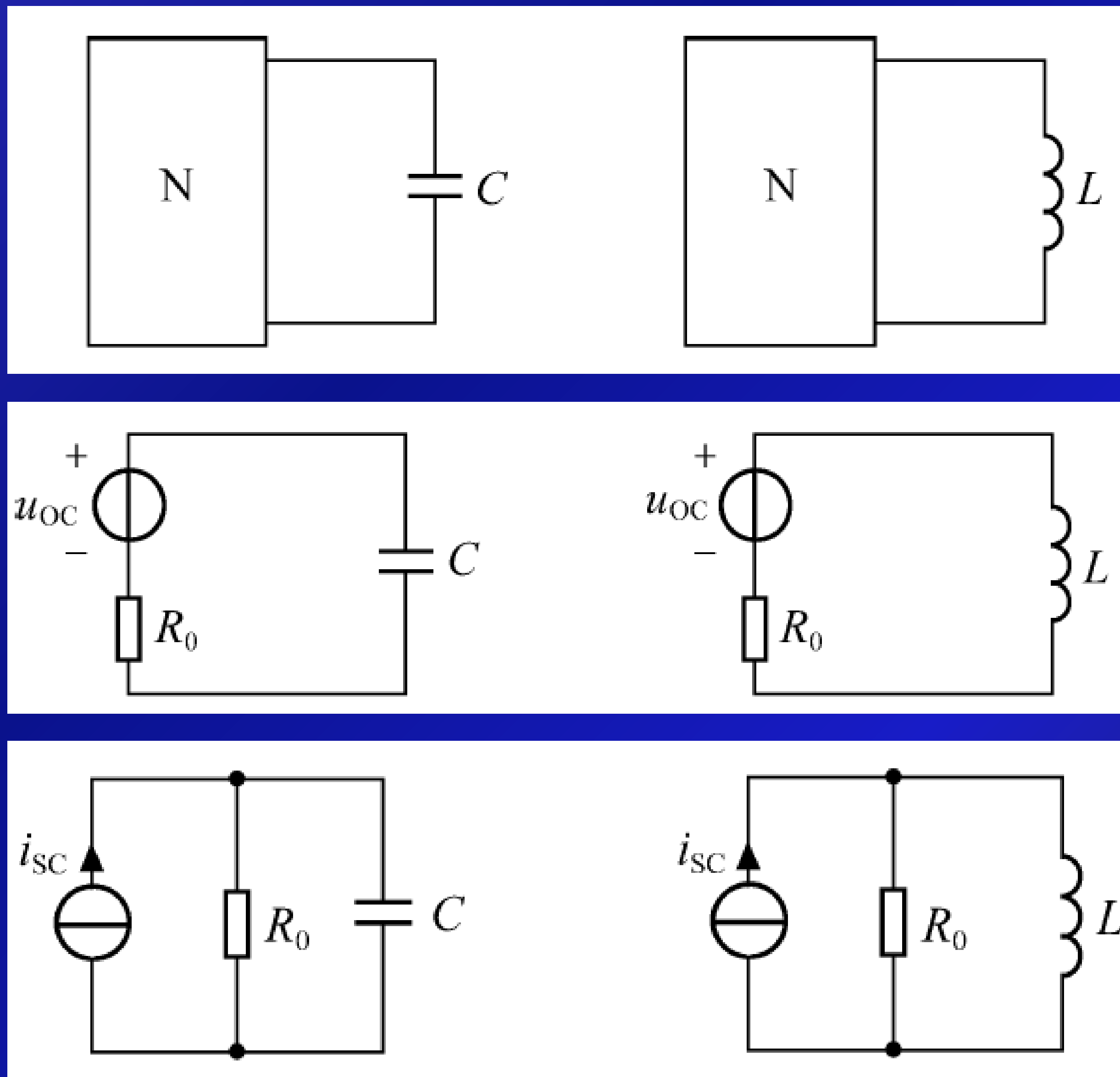
- **特性方程**

  一阶微分方程。

- 凡是可以用等效概念化归为一个等效动态元件的电路都是一阶电路。

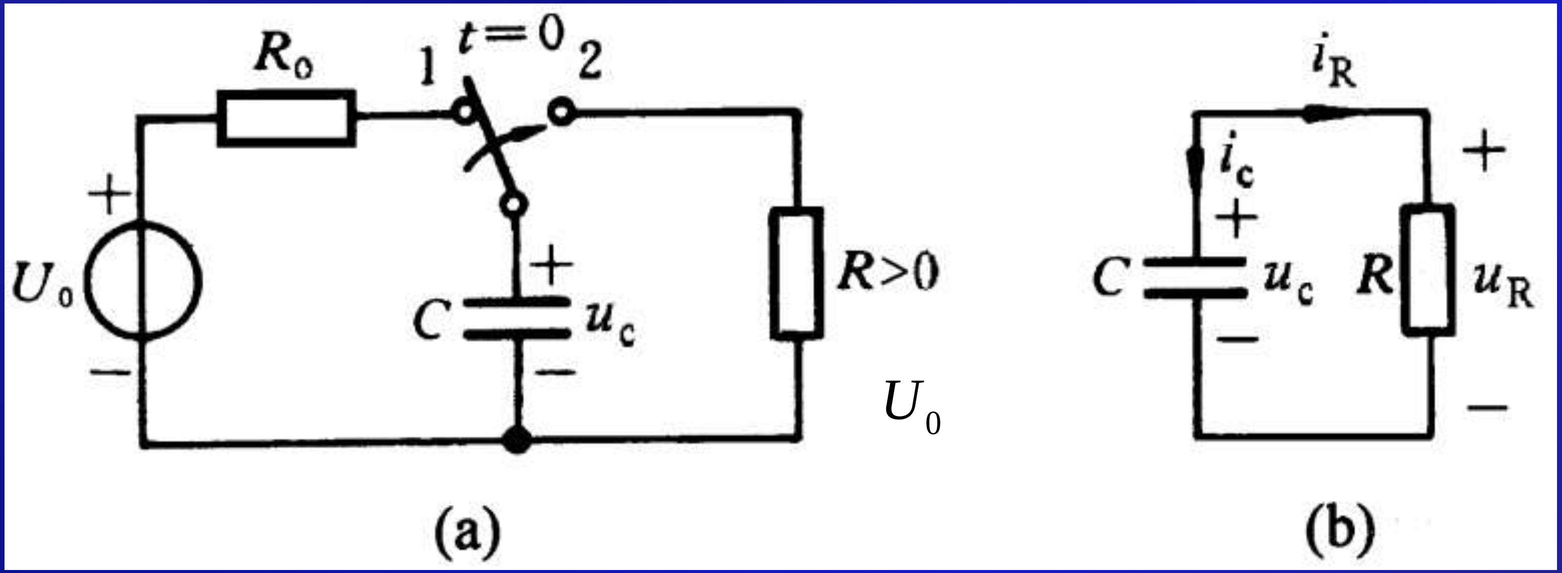
- 任意一阶电路，换路后总是可以等效为一个有源二端电阻网络外接一动态元件。

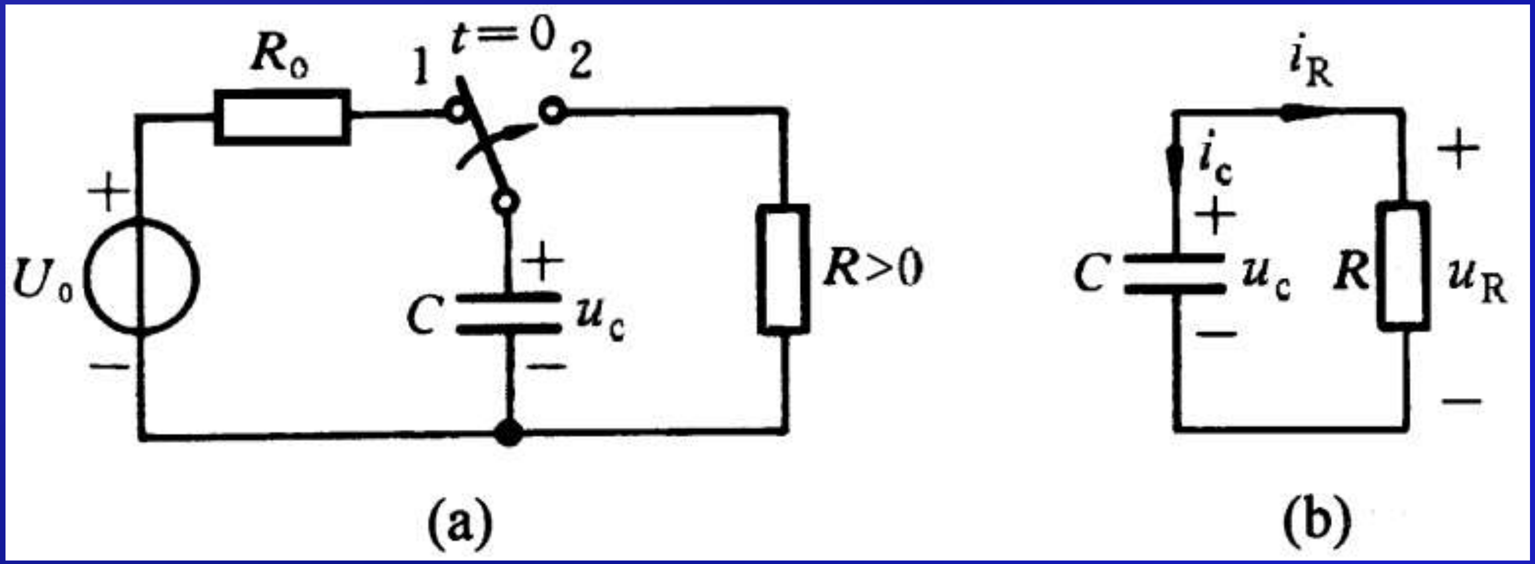
一阶电路基本形式



RC电路的零输入响应

零输入响应：没有外加激励时的响应，仅由动态元件的初始状态（内激励）引起。





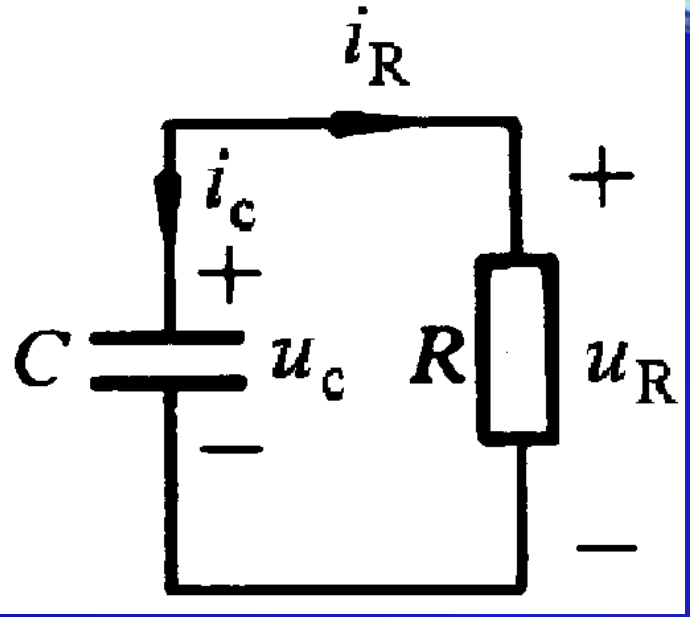
开关转换前，电容电压已经达到U_0。换路后如图(b)所示。由换路定则得

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=U_0$$

由KVL $\quad u_R - u_C = 0$

由VCR $\quad i_R = u_R / R$

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$



代入KVL得以下方程：

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0 \quad (t \geq 0)$$

这是一个常系数一阶线性齐次微分方程

其通解为： $u_C(t) = Ae^{st}$

特征方程： $RCs+1=0$

特征根： $s=-\frac{1}{RC}$

于是响应电容电压为：

$$u_C(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

系数A是一个常量，由初始条件确定；

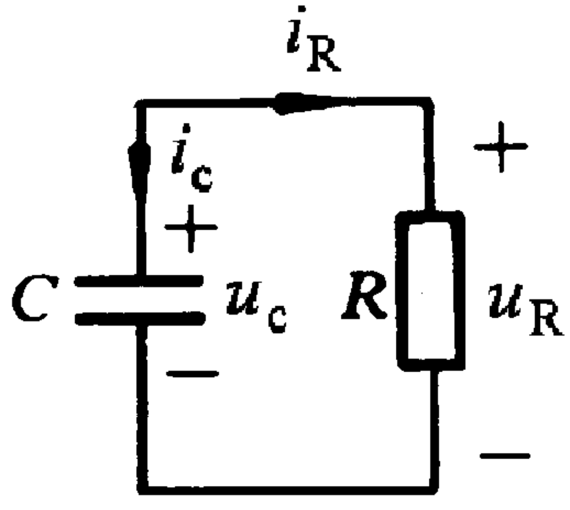
当 t=0$^+$ 时上式为：$u_C(0^+)=Ae^{-\frac{t}{RC}}\Big|_{t=0+}=A$

根据初始条件 $u_C(0^+)=U_0$

故： $A=U_0$

最后得到图(b)电路的零输入响应为：

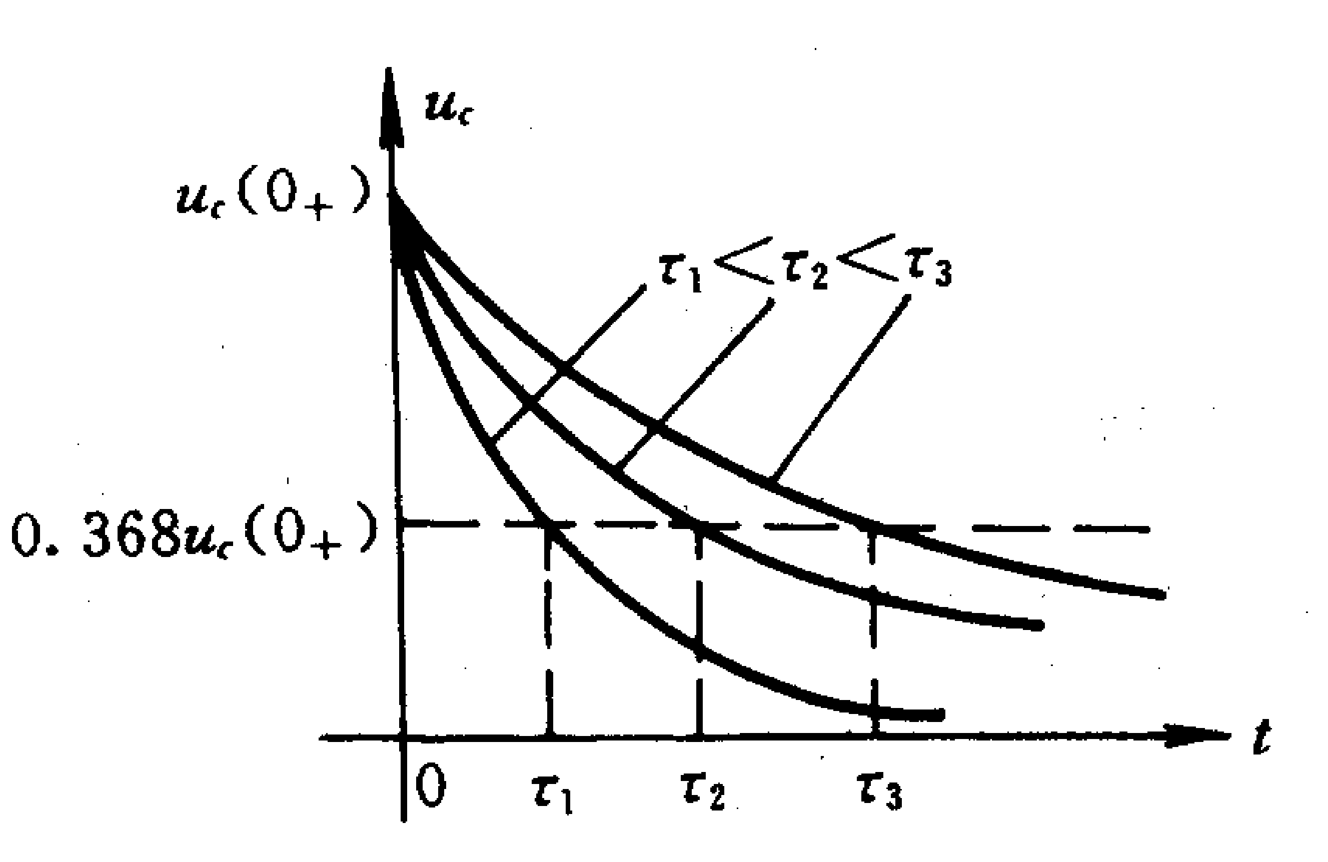
$$u_C(t)=U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t>0)$$



物理意义：在电路的放电过程中电容电压随时间变化的规律。

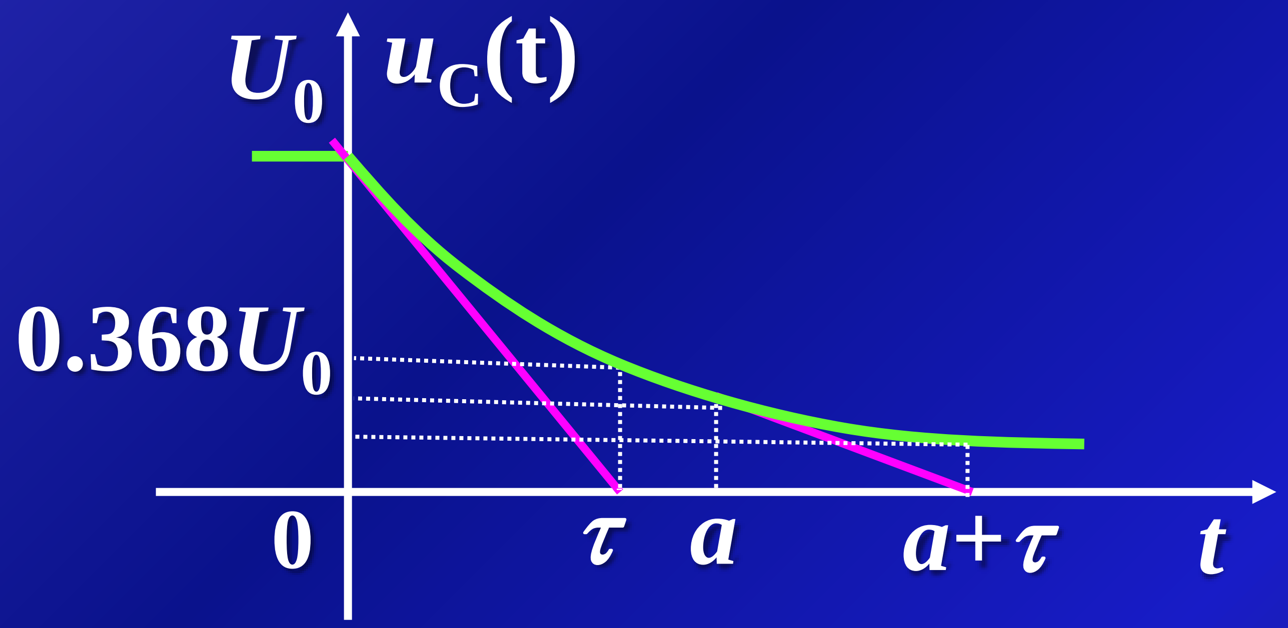
$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t>0)$$

$$i_R(t)=-i_C(t)=\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t>0)$$



不同时间常数的u_C波形

时间常数在曲线上的意义



τ ：$t=0^+$时切线与横轴的交点（切距）；电压衰减到原来值36.8%所需的时间。

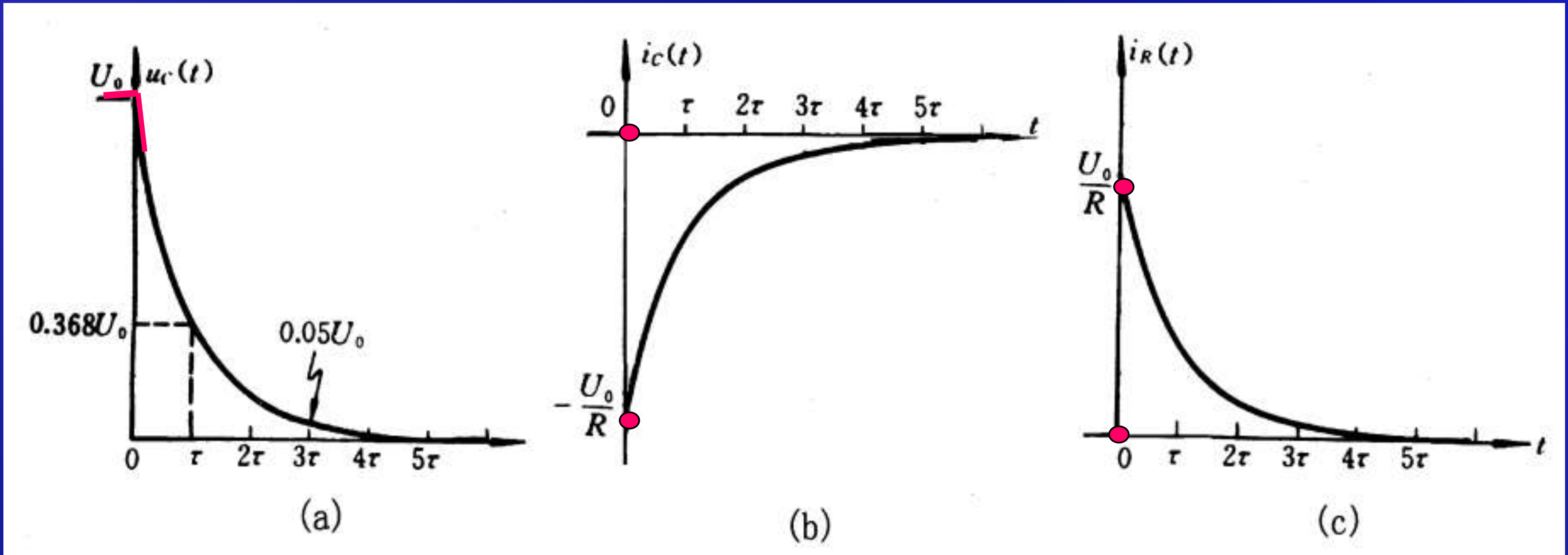
说明：

1. 各电压电流均以相同的指数规律变化变化的快慢取决于*R*和*C*的乘积。

2. $\tau=RC$，τ 具有时间的量纲，称为*RC*电路的**时间常数**。$S=1/\tau$ 称为电路的固有频率。

3. 在一定的初始值情况下
C越大，衰减越快or慢？
R越大，衰减越快or慢？

RC电路零输入响应的波形曲线



$$i_{\mathrm{C}}(t)=-\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad (t>0)$$

$$u_{\mathrm{C}}(t)=U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad (t>0)$$

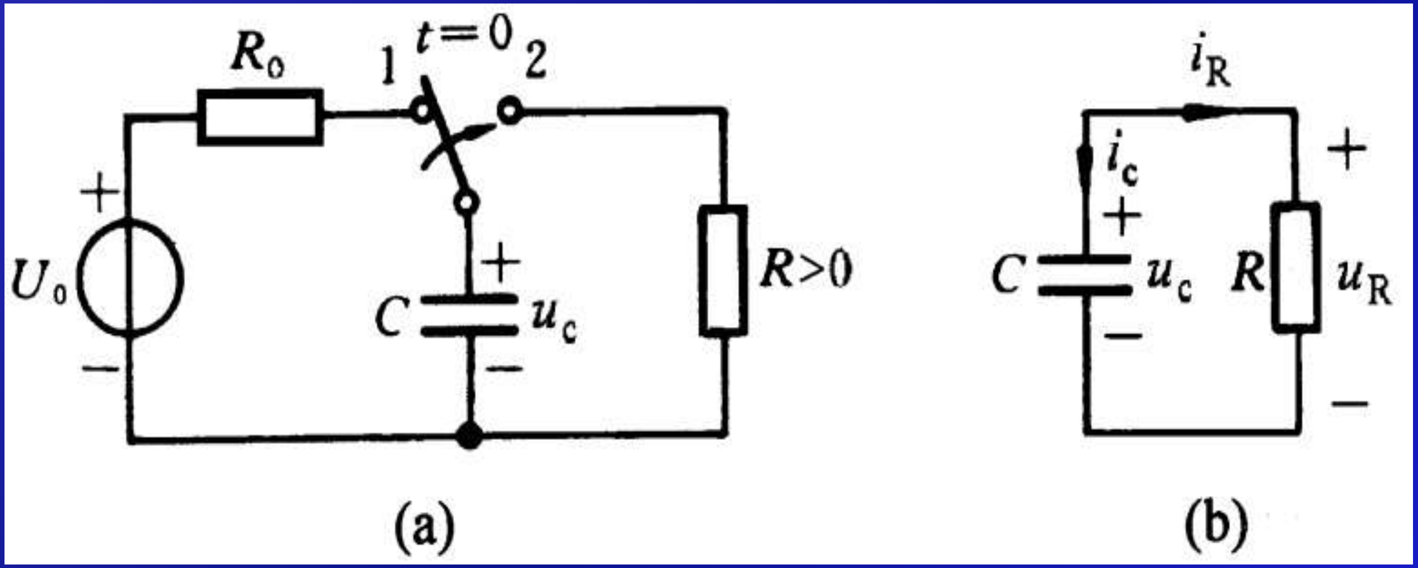
$$i_{\mathrm{R}}(t)=\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad (t>0)$$

电压的变化与时间常数的关系

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$u_c(t)$	U_0	0. 368U_0	0. 135U_0	0. 050U_0	0. 018U_0	0. 007U_0

τ的**物理含义**：u_C与 i_C衰减到初始值的 1/e（36. 8%）时所经历的时间。

由于波形衰减很快，实际上只要经过4～5τ的时间就可认为放电（瞬态）过程基本结束。



电阻在电容放电过程中消耗的总能量：

$$W_R = \int_0^\infty i_R^2(t) R \mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R \mathrm{d}t = \frac{1}{2} C U_0^2$$

表明：电容在放电过程中释放的能量全部转换为电阻消耗的能量。

说明：

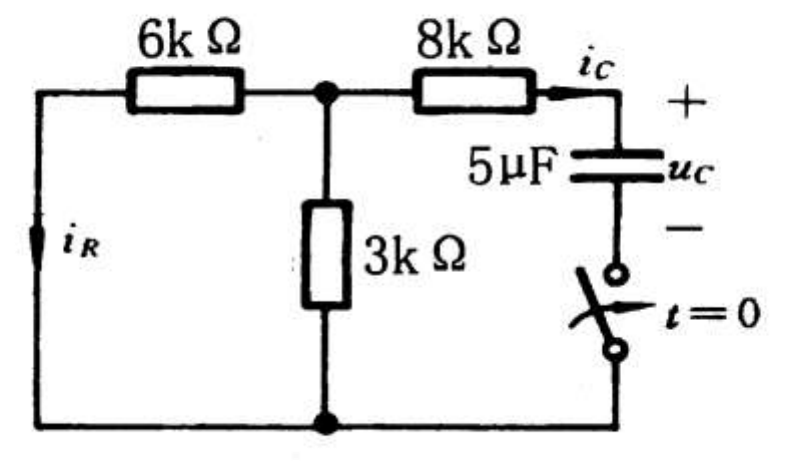
1. 电路瞬态过程的长短由时间常数τ决定，与初始值和外加激励无关；

2. τ的大小由**R**和**C**决定，**R**和**C**越大，响应衰减得越慢。

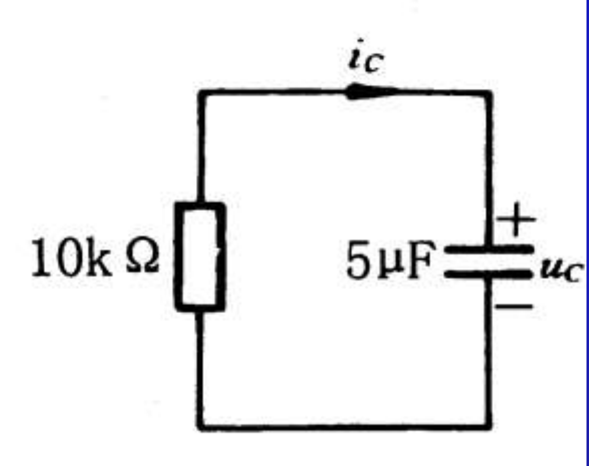
3. ***RC***电路的零输入响应由初始值和时间常数决定。

$$r_{zi}(t) = r_{zi}(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

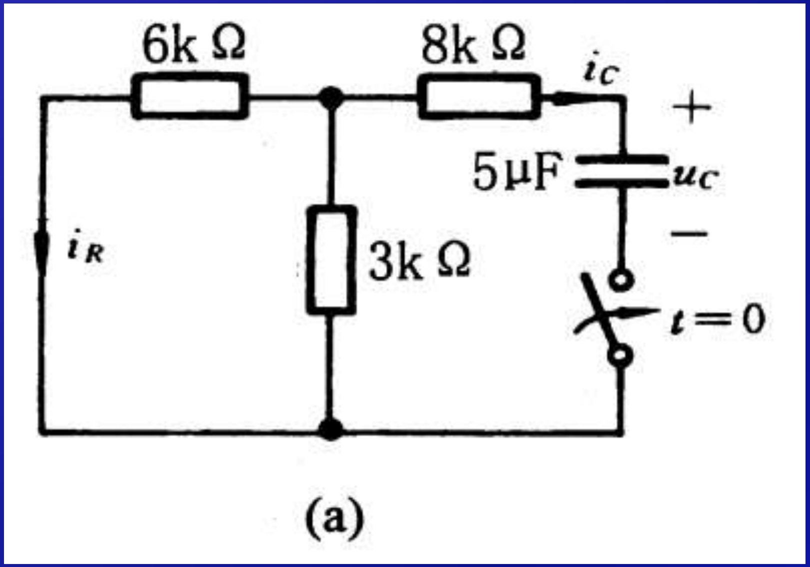
例10 已知$u_C(0^-)=6V$。求t>0的电容电压。

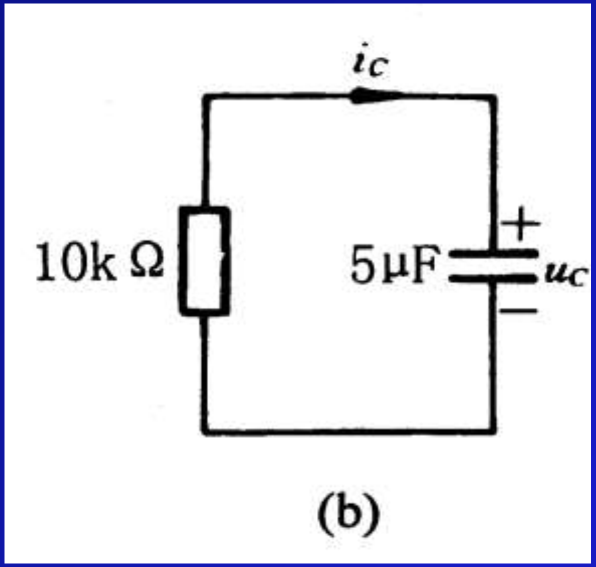


(a)



(b)

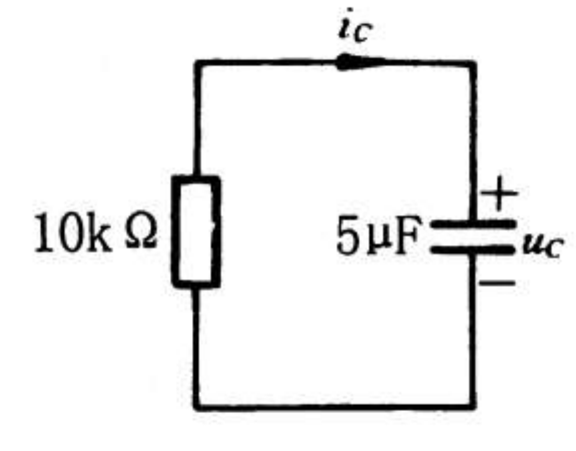




解：在开关闭合瞬间，电容电压不能跃变，则 $u_C(0^+)=u_C(0^-)=6\,\text{V}=U_0$

从电容两端看进去的电阻等效为

$$R_o=(8+6//3)\text{k}\Omega=10\text{k}\Omega$$



(b)

$$\tau = R_0 C = 10\times10^3\times5\times10^{-6}$$

$$= 5\times10^{-2} = 0.05\text{s}$$

故有：

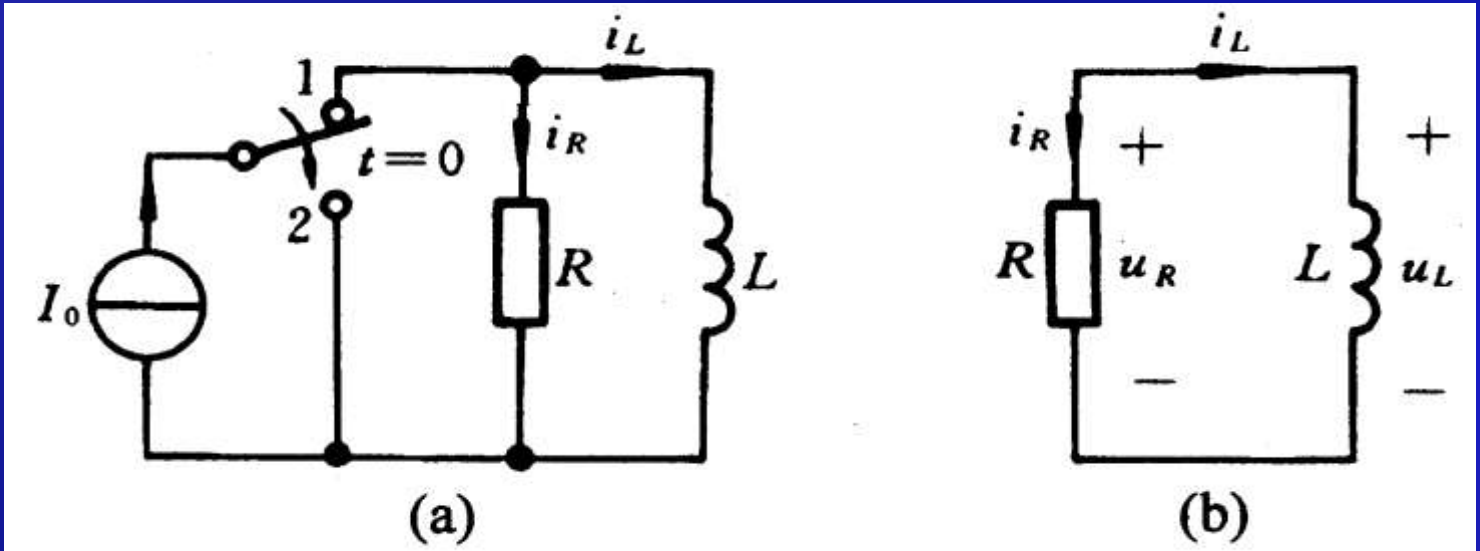
$$u_C(t) = U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 6\mathrm{e}^{-20t}\text{V} \qquad (t \ge 0)$$

假如还要计算电容中的电流$i_C(t)$，则

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = 5\times10^{-6}\times6(-20)\mathrm{e}^{-20t} = -0.6\mathrm{e}^{-20t}\text{mA}$$

或： $$i_C(t) = -\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = -0.6\mathrm{e}^{-20t}\text{mA} \qquad (t > 0)$$

RL电路的零输入响应

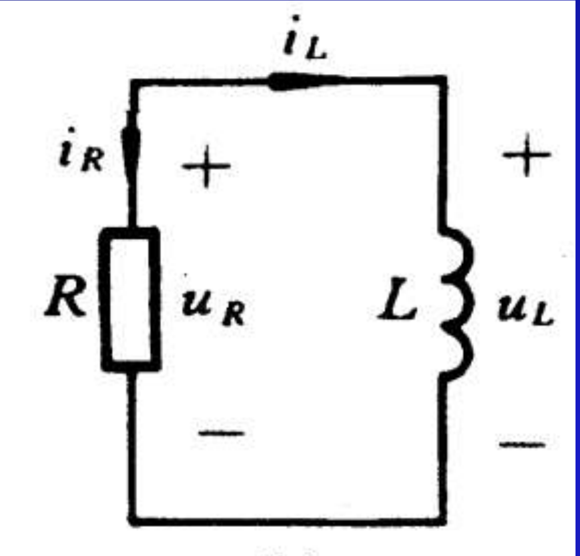


开关连接于1端已很久，电感中的电流等于I_0，换路后的电路如图(b)。

列方程：$u_{\mathrm{R}} = u_L$

代入元件VCR，得

$$-Ri_{\mathrm{L}} = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$



(b)

得到以下**常系数一阶线性齐次微分方程：**

$$\begin{cases} \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + i_{\mathrm{L}} = 0 & t \geq 0 \\ i_L(0^+) = I_0 \end{cases}$$

该微分方程的**通解**为 $i_{\mathrm{L}}(t) = Be^{-\frac{R}{L}t} \quad (t \geq 0)$

代入初始条件$i_L(0^+)=I_0$求得： $B=I_0$

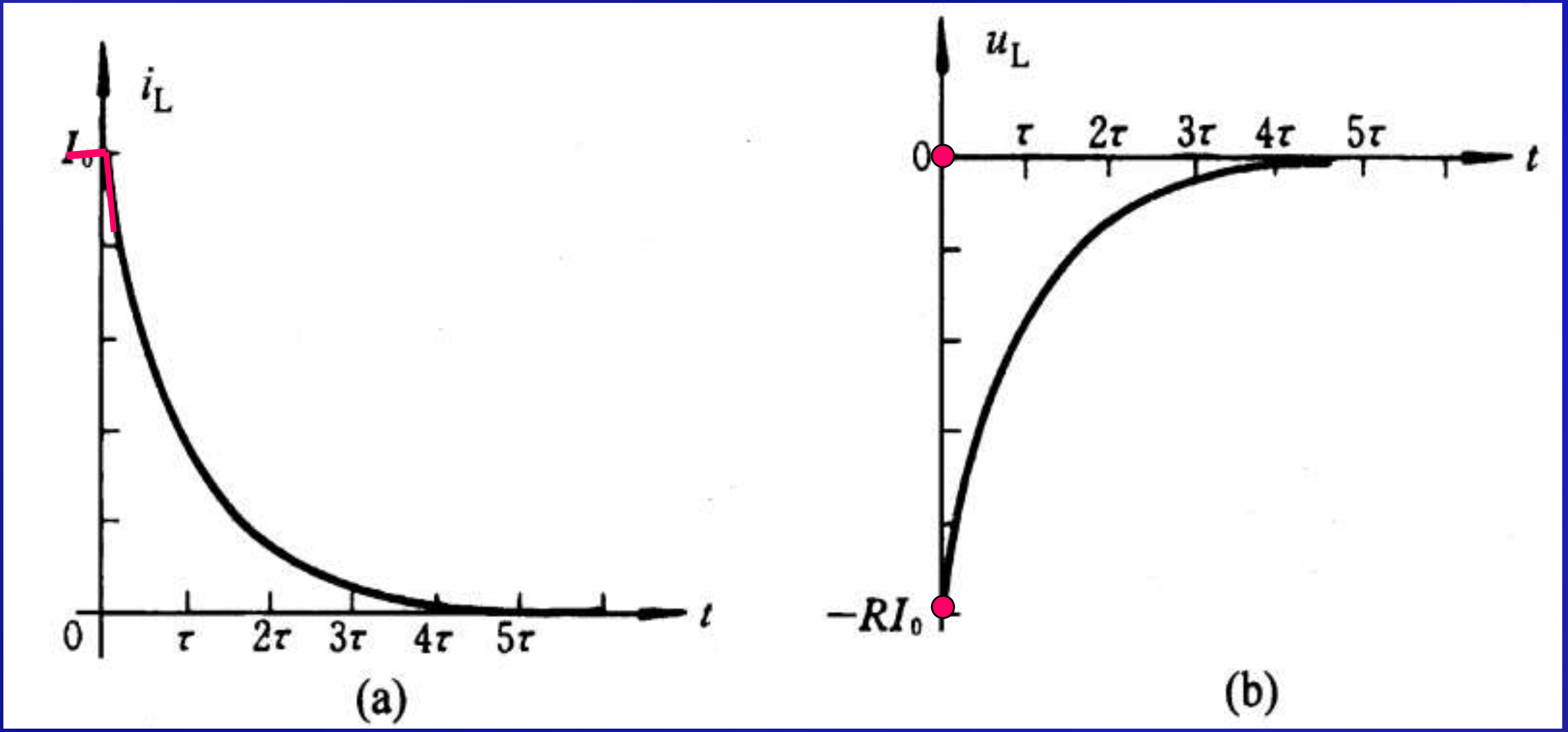
则：响应电感电流和电感电压为：

$$i_L(t)=I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}=I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq 0)$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-RI_0e^{-\frac{R}{L}t}=-RI_0e^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t>0)$$

其中：$\tau=L/R$ ，具有时间的量纲，称它为RL电路的时间常数。

其波形如下图：



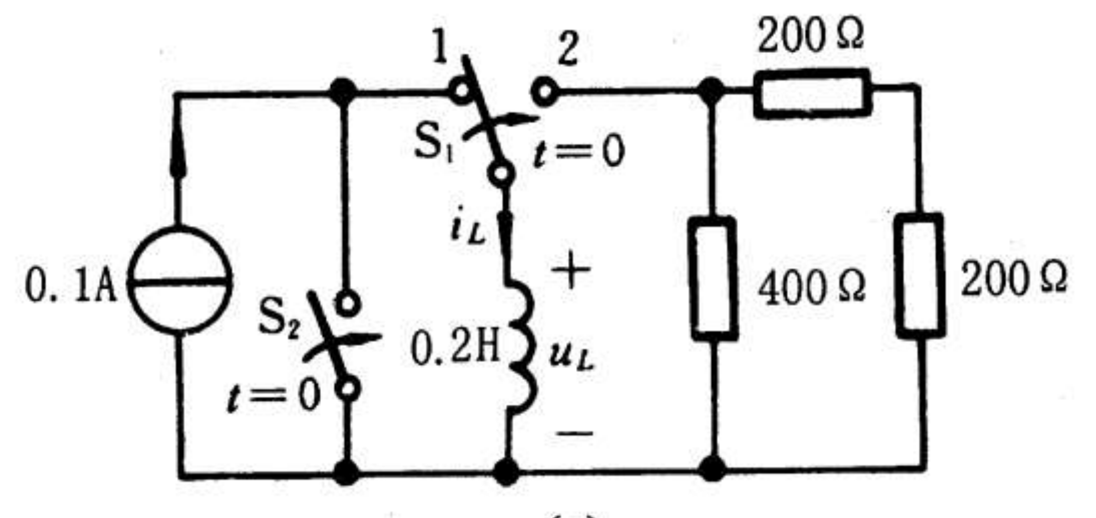
RL电路零输入响应也是按指数规律衰减，衰减的快慢取决于时间常数τ 。

电阻在电感放电过程中消耗的总能量：

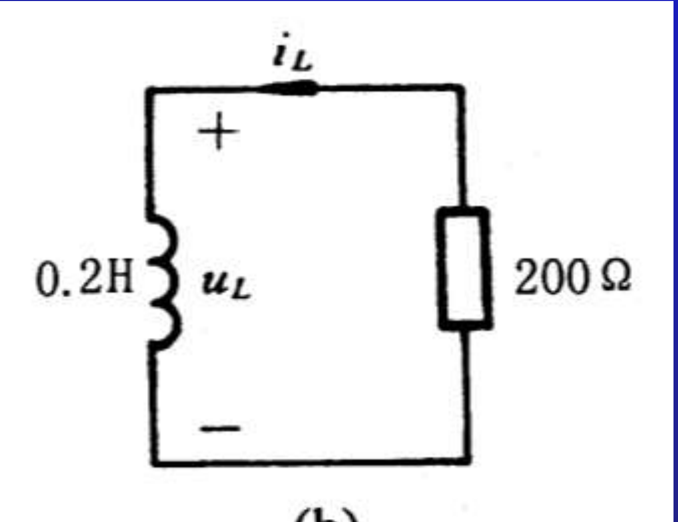
$$W_{\mathrm{R}}=\int_0^{\infty} i_{\mathrm{L}}^2(t)R\mathrm{d}t = RI_0{}^2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{2Rt}{L}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}LI_0^2$$

表明：电感在放电过程中释放的能量全部转换为电阻消耗的能量。

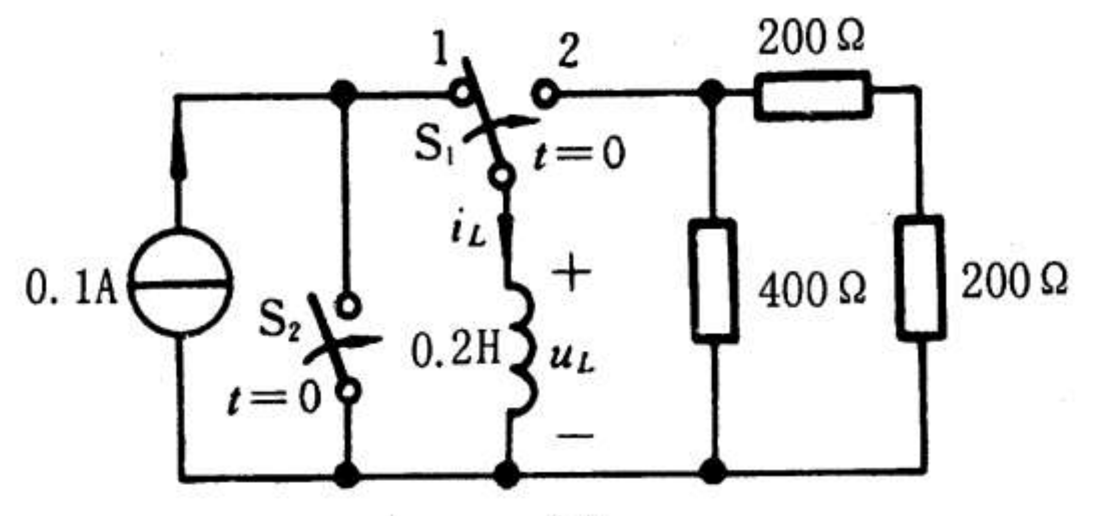
例11 开关S_1连1端已很久，t=0时S_1倒向2端，开关S_2也同时闭合。求t≥0时的$i_L(t)$和$u_L(t)$。



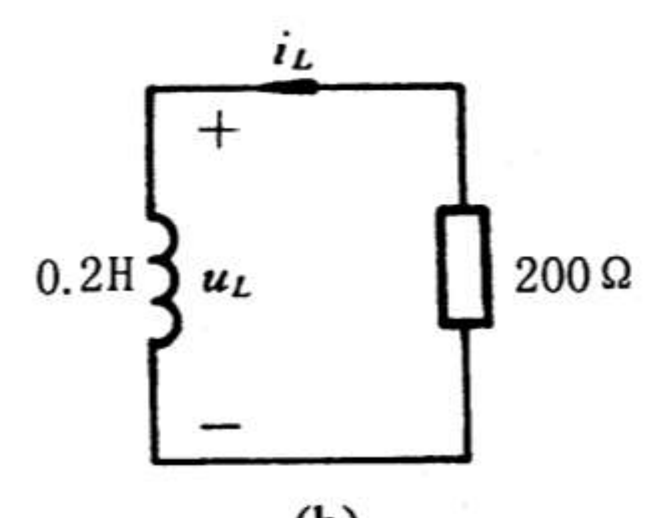
(a)



(b)



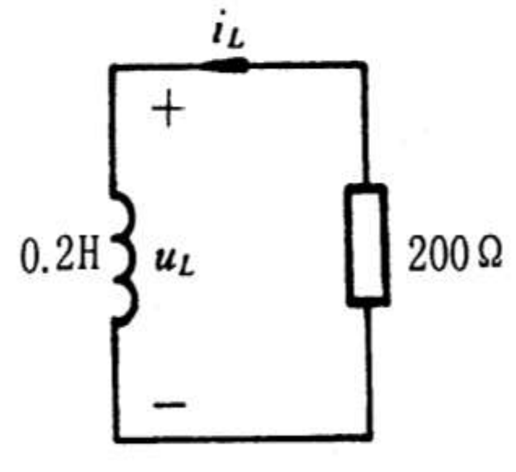
(a)



(b)

解：换路瞬间，电感电压有界，电感电流不能跃变，故 $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.1\text{A}$

图(b)电路的时间常数为



(b)

$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{0.2}{200} = 10^{-3}\text{s} = 1\text{ms}$$

电感电流和电感电压为

$$i_\text{L}(t) = I_0 \text{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 0.1\text{e}^{-1000t}\text{mA} \quad (t \geq 0)$$

$$u_\text{L}(t) = L\frac{\text{d}i_\text{L}}{\text{d}t} = -0.2 \times 0.1 \times 10^3 \text{e}^{-1000t}\text{V}$$

$$= -20e^{-1000t}\text{V} \qquad (t > 0)$$

一阶电路零输入响应的一般公式

各电压电流响应均从其初始值开始，按照指数规律衰减到零，一般形式为

$$r_{zi}(t) = r_{zi}(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

时间常数τ：

RC电路，**τ=*RC*; *RL***电路，**τ=*L/R***。

R为断开动态元件后的戴维南等效电路的等效电阻。

确定一阶电路零输入响应的一般步骤

1、画出 0^- 时的等效电路，计算 $u_C(0^-)$ 和 $i_L(0^-)$

2、由换路定则确定基本初始值 $u_C(0^+)$ 和 $i_L(0^+)$

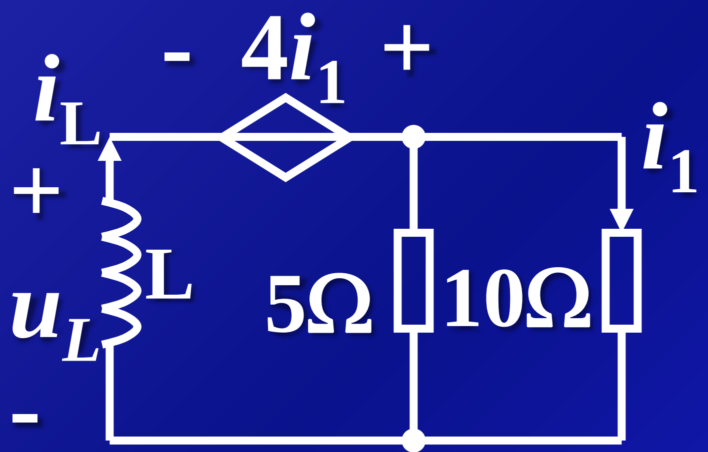
3、画出 0^+ 时的等效电路，其中电容用电压源 $u_C(0^+)$、电感用电流源 $i_L(0^+)$ 替代，计算所求零输入响应的初始值 $r_{Z_i}(0^+)$；

4、画出求 τ 时的等效电路，求等效电阻时令所有的独立电源置0，计算时间常数 τ；

5、代入零输入响应的一般形式。

$$r_{zi}(t) = r_{zi}(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

例12（P143例5-6）已知$i_L(0^-)=1.5A$，$L=0.5H$，求$i_1(t)$和$u_L(t)$。



解：（1）求$u_C(0^+)$及$i_L(0^+)$：由换路定则，得：

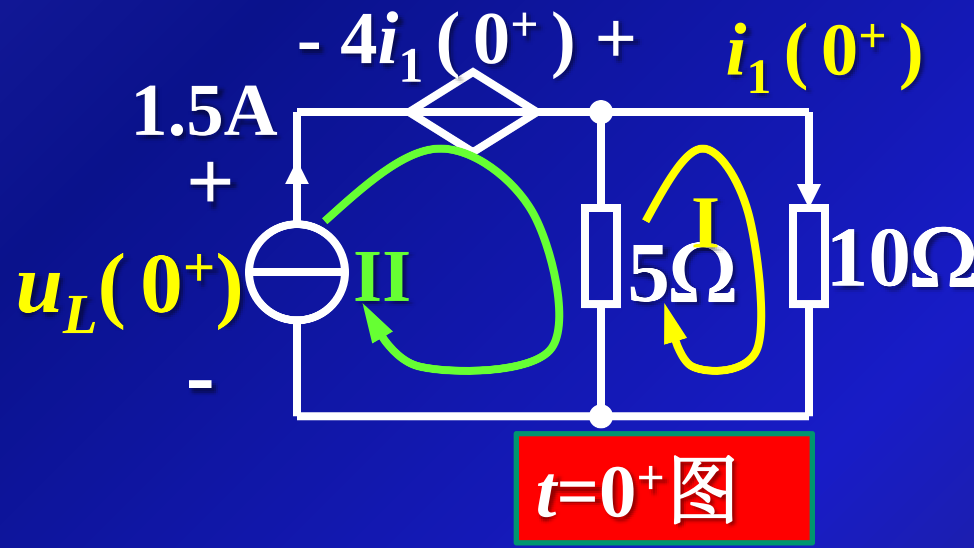
$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=1.5A$$

（2）画0^+图，求初始值$i_1(0^+)$和$u_L(0^+)$。

网孔法：

$$i_I = i_1(0^+),$$

$$i_{II} = i_L(0^+) = 1.5A$$

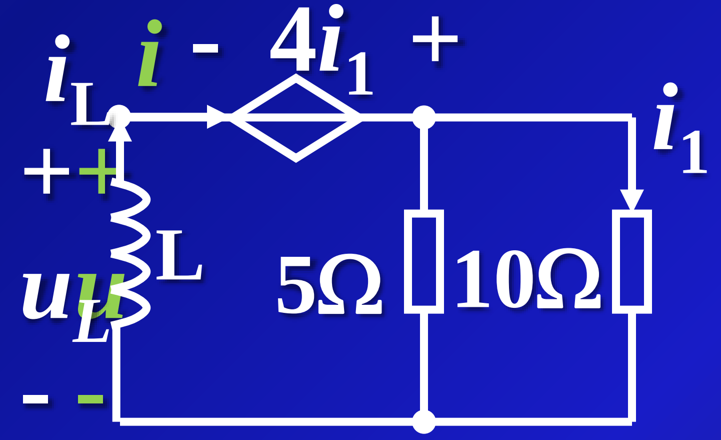


网孔方程： $(5+10)i_1(0^+) - 5\times 1.5 = 0$

即： $i_1(0^+) = 0.5\,\mathrm{A}$

$$u_L(0^+) = -4i_1(0^+) + 10i_1(0^+) = 3\,\mathrm{V}$$

(3) 求时间常数：先求电感两端的等效电阻，用加压求流法：



$$\begin{cases} u = -4i_1 + 10i_1 = 6i_1 \\ i_1 = \dfrac{5}{5+10} i \end{cases}$$

消去i_1得：$u = 2i$ 即：$R_{eq} = \dfrac{u}{i} = 2\Omega$

则：$\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{0.5}{2} = \dfrac{1}{4} s$

（4）初始值和时间常数代入一般形式：

$$r_{zi}(t) = r_{zi}(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

有：

$$i_1(t) = 0.5e^{-4t}\text{A}, \quad t > 0$$

$$u_L(t) = 3e^{-4t}\text{V}, \quad t > 0$$