知识点K4.03

连续小波变换

主要内容：

1. 连续小波变换的定义

2.小波参数的含义

3.三种变换的比较

4. 二进小波

基本要求：

1.了解母小波函数与小波函数的关系

2.理解尺度和平移参数的含义

3.了解三种变换的时间分辨率与频率分辨率的关系

4.了解二进小波的特点

连续小波变换

1. 小波的定义

定义： 若函数 $\psi(t)$ 是一个平方可积函数，即 $\psi(t) \in L^2(R)$，若其傅里叶变换

$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt$，满足容许条件(Admissibility condition),即

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty$$

则称函数 $\psi(t)$ 是母小波函数。

小波，仅从字面上理解就是小的波形，而其数学定义也表明这个名字是很恰当的。“小”的含义是指定义域是紧支撑的，仅在有限区域内非零；而均值为零则表明波形有正有负，具有正负交叠的波动性质，这正是“波”的含义。

小波变换过程中窗口宽度可变，因而具有了多尺度特性和局部化能力，这是小波变换最重要的特征。

连续小波变换

定义：若信号 $f(t)\in L^2(R)$，$\psi(t)$ 是小波母函数，则连续小波变换的定义如下：

$$W_f^{\psi}(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{\psi}_{a,b}(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)dt,\quad a>0 \cdots\cdots(9.3\text{-}3)$$

其中 $\psi_{a,b}(t)$ 是小波函数，a 为尺度参数，b 为平移参数，$\bar{\psi}_{a,b}(t)$ 是 $\psi_{a,b}(t)$ 的共轭，称 $W_f^{\psi}(a,b)$ 为小波变换系数，简称小波系数。

定义：若信号 $f(t)\in L^2(R)$，$\psi(t)$ 是小波母函数，$\Psi(\omega)$ 是 $\psi(t)$ 的傅里叶变换，$W_f^{\psi}(a,b)$ 是相应的连续小波变换系数，那么连续小波逆变换的定义如下：

$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} a^{-2}W_f^{\psi}(a,b)\psi_{a,b}(t)dbda \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9.3\text{-}4)$$

其中 $C_\psi=\int_0^{\infty}\frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega}d\omega<+\infty$。

从形式上看，小波变换的结果是关于尺度参数和评议参数的函数，因此其图像必然是在尺度-平移平面上展现出来的。

2. 小波参数的含义

一、尺度参数a的特性

尺度参数是一个正实数，反映的是一个特定小波函数的尺度，也就是小波函数支撑集的宽度。如果$a>1$，那么$\psi_{a,b}(t)$是对$\psi(t)$的拉伸，表明用一个拉伸过的$\psi(t)$波形在较大范围内(相比于用原始$\psi(t)$)来观察信号$f(t)$，也就是测量$f(t)$与一个拉伸过的$\psi(t)$的相似程度；而如果$0<a<1$则是用一个压缩过的$\psi(t)$在较小的局部观察$f(t)$。

二、平移参数b的特性

平移参数，又称定位参数，取值范围是整个实数域。平移参数用于指定一个特定小波函数沿t轴平移的位置。通常小波基函数是以原点为中心，在有限范围内（仅在支撑内）非零的函数，所以平移参数就确定了基函数的中心，从而确定了要观察信号的具体位置，也就是观察的位置。如果信号是时间信号，平移参数为b时的变换结果反映的就是b时刻的信号信息；若是空间信号，则反映的是b位置处的信息。

连续小波变换

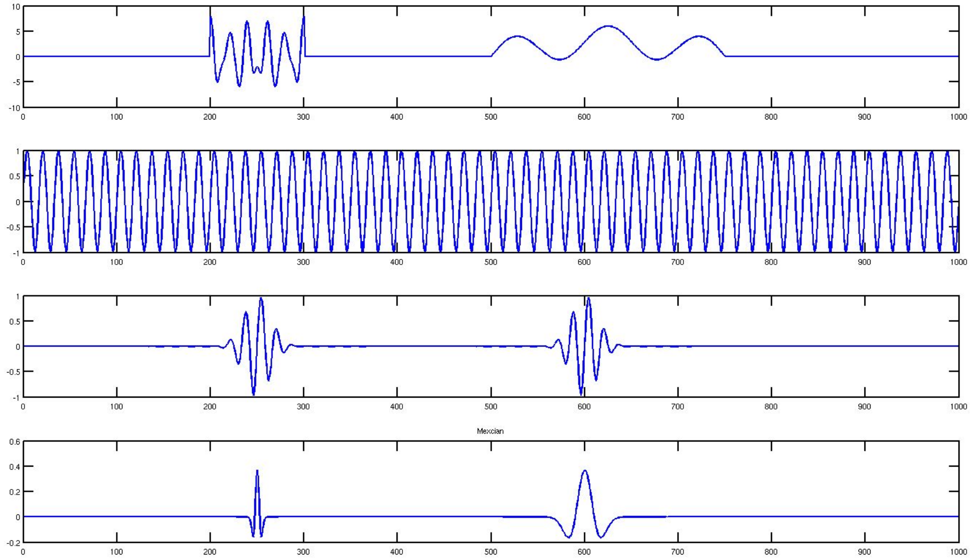


图9.3-1 傅里叶变换，STFT和小波变换积分核函数示意图

上图给出了三种变换的积分和函数的示意图。傅里叶变换全局采用三角函数，而短时傅里叶变换则依据不同的信号位置采用了加窗的函数，通过窗函数的位置来获得频率分量的时间信息；小波变换可以在不同位置采用不同尺度的核函数，以此来获得多分辨特性和局部化的分析能力。

几个代表性的连续小波函数

（1）Mexcian hat wavelet墨西哥帽小波

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}}\left(e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}\bullet\left(\frac{t^2}{\sigma^2}-1\right)\right)$$

（2）高斯差分小波

$$\psi(t)=e^{-t^2/2}-\frac{1}{2}e^{-t^2/8}$$

（3）Morlet小波

$$\psi(t)=e^{iat}\bullet e^{-t^2/2\sigma^2}$$

（4）复Shannon小波

$$\psi(t)=\sqrt{b}\sin(bt)\bullet e^{j2\pi ct}$$

（5）复高斯小波

$$\psi(t)=C_p e^{-jt}\bullet e^{-t^2}$$

连续小波变换

例9.3-1 设小波函数 $\psi(t)=\cos(5t)*e^{-t^2/2}$

f1(t)=4*cos(2*pi*4*t)+5*cos(2*pi*50*t)+2*cos(2*pi*80*t)，

f2(t)=5*sin(2*pi*5*t)+3*sin(2*pi*50*t)+3*sin(2*pi*27*t)，并令

f(t)=f1(t1)+f2(t2),且0.22<t1<0.3,0.5<t2<0.75,

试计算$f(t)$的连续小波变换系数的能量分布特性。

解析：

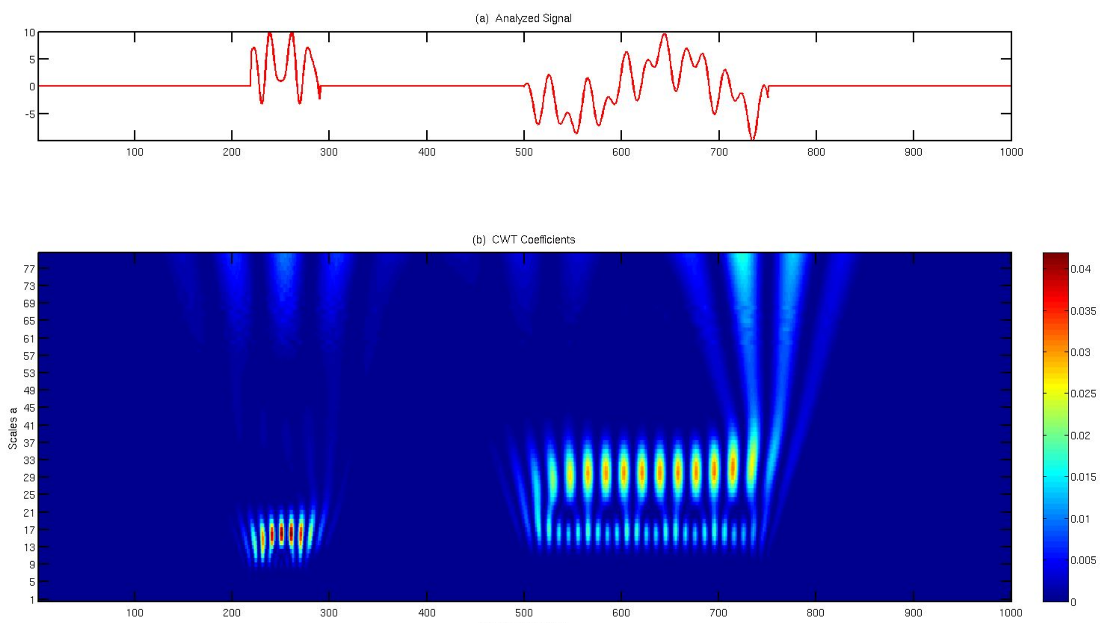


图9.3-2 $f(t)$以及连续小波变换系数的能量分布示意图

连续小波变换

从连续变换图的平移轴（时间轴）上看，变换结果中的低尺度波峰与原信号的波形波动基本同步，小波变换系数对高频信号的时间分辨率较高，定位能力强，这反映出了小波变换的局部化能力。同时可以看到，随着尺度的增大，波峰的宽度变宽，时间分辨率降低，时域定位能力变差。

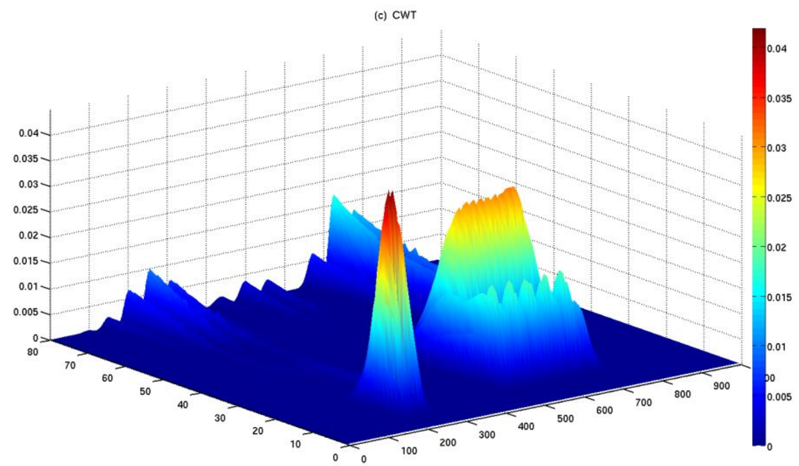
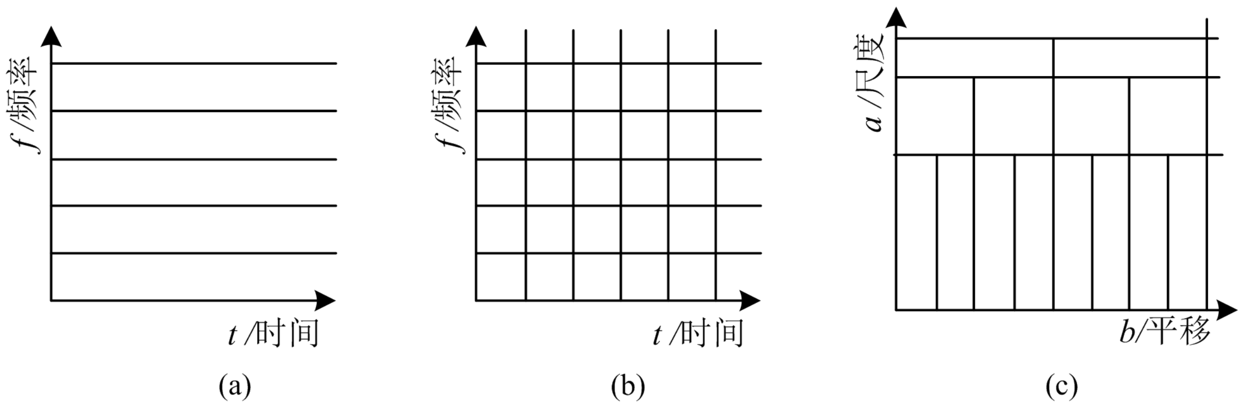


图9.3-2(c) 连续小波系数能量分布三维示意图

3. 三种变换的比较



连续傅里叶变换、短时傅里叶变换以及连续小波变换三者之间存在内在联系，基本上可以看做是一个从简单到复杂的过程。从变换核的时-频窗宽度的角度，即从时频分辨率的角度对三种变换进行比较能够清楚地看出三者之间的内在联系。

傅里叶变换是对信号在无限长的时域内进行积分，因而其变换核的时域窗口无限宽，而频域窗口无限窄，从而获得了最精确的频域分辨率。

连续小波变换

为了描述三种变换的时间分辨率与频率分辨率的关系，图中的每个矩形块的时间轴的宽度代表了时间窗的宽度，而频率轴的高度代表了频率窗的宽度，需要注意的是，对小波变换而言，一般不使用“频率”而是使用“尺度”进行图示，尺度与频率成反比关系。窗口的宽度（不管是频率窗还是时间窗）表征的是变换结果所覆盖到的（频率或者时间）范围。所有的方块的面积都是非零的，这说明在时频平面内，无法确切地知道某个特定的“点”对应的信息，能知道的只能是这些方块覆盖范围内的信号的变换结果，是一个局部范围的总体信息。

对于小波变换而言，虽然矩形块的宽高不同，但是其面积却是常数，即每矩形块都代表时-频平面内相同的范围，只不过时间和频率的各自宽度不相同。

4. 二进小波

无论是傅里叶变换(FT)，短时傅里叶变换(STFT)还是连续小波变换(CWT)，都能用连续积分的方式来计算。

为了降低数据的冗余，最直观的做法是直接在尺度-平移平面上进行采样，即让尺度参数和平移参数的取值不再连续，而只是局限在某些特定的点。

理论分析表明，对尺度参数a可以采用指数形式进行离散化。若有连续小波函数为 $\psi_{a,b}=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$，令$a=a_0^j, a_0>0$，则尺度离散化的小波函数的形式为 $\psi_{j,b}(t)=a_0^{-j/2}\psi\left(a_0^{-j}t-a_0^{-j}b\right)$。特别地，如果$a_0=2$则称为二进小波。

连续小波变换

说明：

（1）二进小波的波形在尺度-平移平面内的若干条连续曲线，不再是连续平面；

（2）每进行一次二进小波变换，尺度增大为原来两倍。

二进小波仅对尺度参数进行了离散化，因而又被称为半离散小波。在实际应用之中，连续小波变换和二进小波的优势在于能够对信号的任意位置在不同尺度下进行分析，缺点是数据存在大量冗余，并且相对而言，二进小波仅在平移轴有数据冗余而获得更广泛的应用。