

知识点K2.18

系统对正弦序列的响应

主要内容:

LTI离散系统对正弦序列的响应

基本要求:

掌握系统对正弦序列的响应



系统对正弦序列的响应

K2.18 LTI离散系统对正弦序列的响应

问题： 设系统输入为 $f(k) = A \cos \Omega T k$, $-\infty < k < \infty$

初始时刻 $k_0 = -\infty$, 求响应 $y(k)$ 。

$$f(k) \text{ 表示为: } f(k) = \frac{A}{2} (e^{j\Omega T k} + e^{-j\Omega T k})$$

(1) 系统对 $e^{j\Omega T k}$ 的响应：

设输入 $f(k) = e^{j\Omega T k}$, 响应为 $y_1(k)$

则

$$y_1(k) = h(k) * e^{j\Omega T k}$$



系统对正弦序列的响应

即

$$\begin{aligned}y_1(k) &= h(k) * e^{j\Omega Tk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\Omega T(k-m)} \\&= e^{j\Omega Tk} \sum_{m=0}^{\infty} h(m) e^{-j\Omega Tm}, (h(k) \text{ 为因果信号}) \\&= e^{j\Omega Tk} \sum_{m=0}^{\infty} h(m) (e^{j\Omega T})^{-m}\end{aligned}$$

设 $H(z)$ 的收敛域含单位圆，令 z 为：

$$z = re^{j\theta} = e^{j\Omega T}$$

则

$$\begin{aligned}y_1(k) &= e^{j\Omega Tk} \left[\sum_{m=0}^{\infty} h(m) z^{-m} \right] \Big|_{z=e^{j\Omega T}} \\&= e^{j\Omega Tk} H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega T}} = e^{j\Omega Tk} H(e^{j\Omega T})\end{aligned}$$



系统对正弦序列的响应

$$y_1(k) = h(k) * e^{j\Omega Tk} = e^{j\Omega Tk} H(z) \big|_{z=e^{j\Omega T}} = e^{j\Omega Tk} H(e^{j\Omega T})$$

(2) 系统对 $e^{-j\Omega Tk}$ 的响应:

设输入 $f(k) = e^{-j\Omega Tk}$, 响应为 $y_2(k)$

则

$$\begin{aligned} y_2(k) &= h(k) * e^{-j\Omega Tk} \\ &= e^{-j\Omega Tk} H^*(z) \big|_{z=e^{j\Omega T}} \\ &= e^{-j\Omega Tk} H^*(e^{j\Omega T}) \end{aligned}$$

其中, $H(z)$ 的收敛域含单位圆。

(3) 系统对正弦序列的响应:

系统输入 $f(k) = A \cos(\Omega Tk) = \frac{A}{2} (e^{j\Omega Tk} + e^{-j\Omega Tk})$



系统对正弦序列的响应

由系统的线性性质，得：

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{A}{2} [y_1(k) + y_2(k)] \\ &= \frac{A}{2} [e^{j\Omega T k} H(e^{j\Omega T}) + e^{-j\Omega T k} H^*(e^{j\Omega T})] \end{aligned}$$

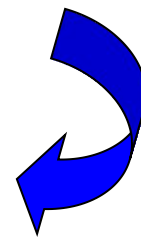
设 $H(e^{j\Omega T}) = |H(e^{j\Omega T})| e^{j\varphi(\Omega T)}$

则 $H^*(e^{j\Omega T}) = |H(e^{j\Omega T})| e^{-j\varphi(\Omega T)}$

$$f(k) = A \cos(\Omega T k + \theta)$$

$$y(k) = A |H(e^{j\Omega T})| \cos(\Omega T k + \theta + \varphi(\Omega T))$$

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{A}{2} |H(e^{j\Omega T})| [e^{j(\Omega T k + \varphi(\Omega T))} + e^{-j(\Omega T k + \varphi(\Omega T))}] \\ &= A |H(e^{j\Omega T})| \cos(\Omega T k + \varphi(\Omega T)), \quad -\infty < k < \infty \end{aligned}$$



$y(k)$ 称LTI离散系统的**正弦稳态响应**。

