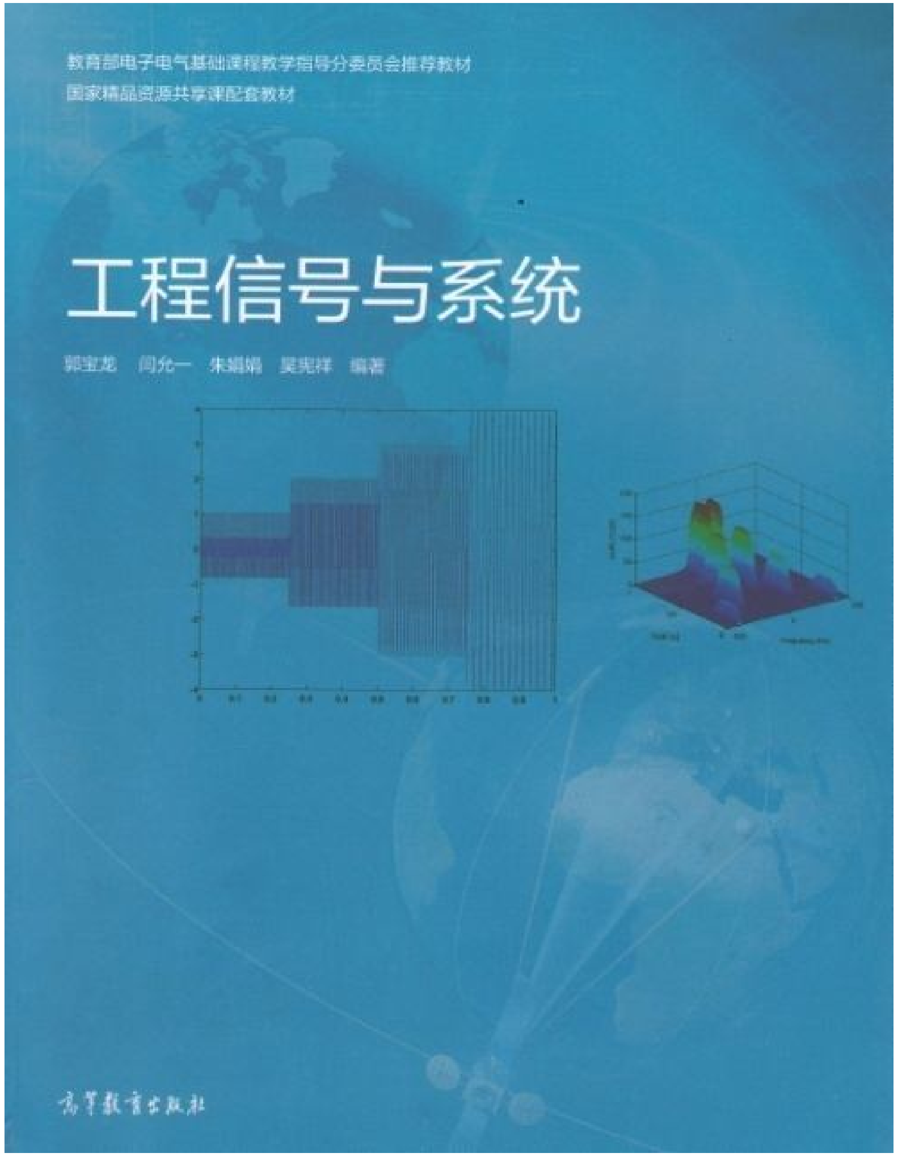


工程信号与系统

西安电子科技大学
Xidian University, Xi'an China

离散系统z域分析

知识点名称	知识点名称
K2.01 z换的定义及收敛域	K2.14 离散系统稳定性判据
K2.02 常见序列的z变换	K2.15 系统的方框图
K2.03 z变换性质-线性、移序、反折	K2.16 系统的z域信号流图
K2.04 z变换性质-z域尺度特性、微分	K2.17 离散系统的模拟
K2.05 z变换性质-时域卷积	K2.18 系统对正弦序列的响应
K2.06 z变换性质-部分和	K2.19LTI离散系统的 频率响应
K2.07 z变换性质-初值和终值定理	K2.20 Matlab绘制零极点图
K2.08 逆z变换：幂级数展开和部分分式展开	K2.21 应用案例
K2.09 z变换 Matlab计算	K2.22系统函数零极点的配置
K2.10 z变换与拉普拉斯变换的关系	K2.23 数字滤波器的分类
K2.11 差分方程的z变换解	K2.24 冲激响应不变法设计IIR滤波器
K2.12 系统函数H(z)	K2.25 双线性变换法设计IIR滤波器
K2.13 系统函数与系统特性	K2.26 窗函数法实现FIR滤波器设计

取样

连续 $\rightleftarrows$ 离散

还原(有条件)

思考问题:

问题1：差分方程如何转变为代数方程？z变换？

问题2：类比－－离散系统如何分析？

问题3：如何设计数字滤波器？

知识点K2.01

z变换定义及收敛域

主要内容:

1. z变换的定义

2. z 变换的收敛域

基本要求:

理解z变换的定义及其收敛域的概念

z变换定义及收敛域

拉氏变换把连续系统微分方程转换为代数方程，同样地，也可以通过一种称为z变换的数学工具，把差分方程转换为代数方程。

K2.01 z变换定义及收敛域

1、z变换导出

对连续信号进行均匀冲激取样后，就得到离散信号。

取样信号 $$f_S(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

两边取双边拉普拉斯变换，得：

$$F_{Sb}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,\mathrm{e}^{-kTs}$$

z变换定义及收敛域

令$z = e^{sT}$，上式将成为复变量 z 的函数，用$F(z)$表示；$f(kT) \to f(k)$，得

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

称为序列$f(k)$的双边z变换

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

称为序列$f(k)$的单边z变换

若$f(k)$为因果序列，则单边、双边z变换相等，否则不同。今后在不致混淆的情况下，统称它们为z变换。

表示：$F(z) = \mathscr{Z}[f(k)]$，$f(k) = \mathscr{Z}^{-1}[F(z)]$；

$f(k) \longleftrightarrow F(z)$

2、收敛域

当幂级数收敛时，z变换才存在，即满足绝对可和条件：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$$

它是序列$f(k)$的 z 变换存在的充分条件。

【定义】收敛域：

对于序列$f(k)$，满足 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$

所有z值组成的集合称为其z变换$F(z)$的收敛域。

例1 求$\delta(k)$的 z变换。

解：

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)=1$$

其单边、双边z变换相等，其收敛域为整个z平面。

例2 求有限长序列$f(k)=\varepsilon(k+1)-\varepsilon(k-2)$ 的双边z变换。

解：

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}=\sum_{k=-1}^{1}z^{-k}=z+1+z^{-1}$$

根据绝对可和条件：$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|=|z|+1+\left|z^{-1}\right|<\infty$

收敛域为： $0<|z|<\infty$

整个z平面收敛

例3 求因果序列 $f(k)=a^k\varepsilon(k)$的z变换(式中a为常数)。

解：

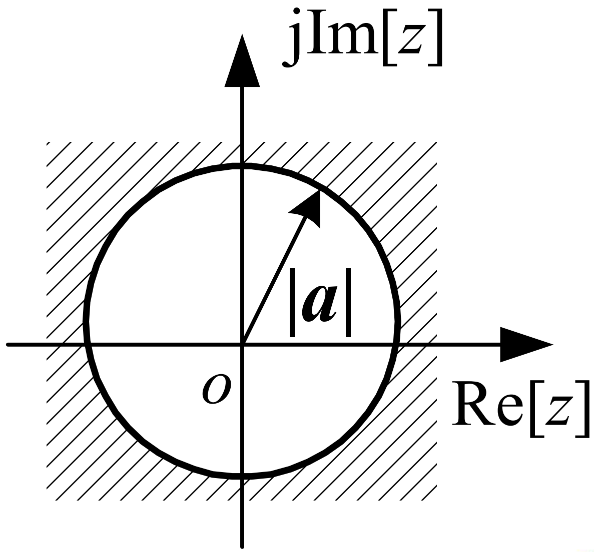
$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}(az^{-1})^k=\lim_{N\to\infty}\frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}}$$

仅当 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$时，其z变换存在。

$$f(k)=a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\frac{z}{z-a}$$

收敛域为 $|z|>|a|$

（某一圆之外）



例4 求反因果序列 $f(k) = b^k\varepsilon(-k-1)$的$z$变换。

解:

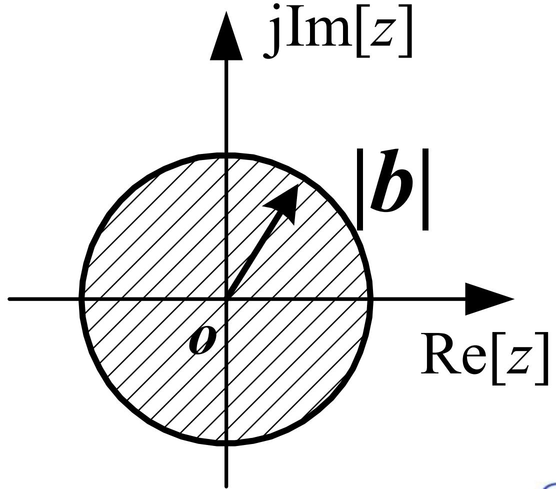
$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}(bz^{-1})^k=\sum_{m=1}^{\infty}(b^{-1}z)^m=\lim_{N\to\infty}\frac{b^{-1}z-(b^{-1}z)^{N+1}}{1-b^{-1}z}$$

可见，$|b^{-1}z|<1$，即$|z|<|b|$时，其z变换存在。

$$f(k)=b^k\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow F(z)=\frac{-z}{z-b}$$

收敛域为$|z|<|b|$

（某一圆之内）



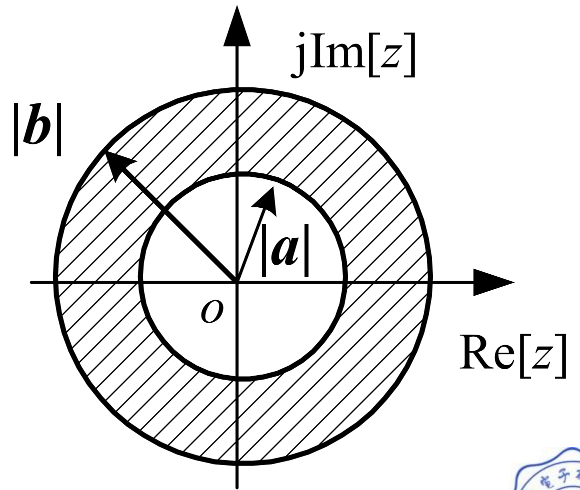
例5 求如下双边序列的z变换。

$$f(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ a^k, & k\ge 0 \end{cases},|a|<|b|$$

解:

$$F(z)=\frac{-z}{z-b}+\frac{z}{z-a}$$

其收敛域为 $|a|<|z|<|b|$



部分z平面收敛

（圆环区域）

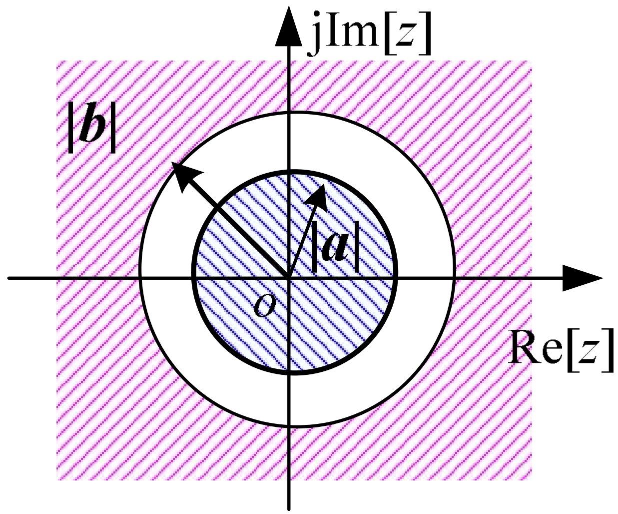
例6 求如下双边序列的z变换。

$$f(k)=\begin{cases}a^k, & k<0\\ b^k, & k\geq 0\end{cases},|a|<|b|$$

解:

$$f_1(k)=b^k, k\geq 0 \leftrightarrow \frac{z}{z-b}, |z|>|b|$$

$$f_2(k)=a^k, k<0 \leftrightarrow \frac{-z}{z-a}, |z|<|a|$$



整个z平面均不收敛

z变换定义及收敛域

离散序列的收敛域情况分类

序列特性	收敛域特性
有限长序列	常为整个平面
因果序列	某个圆外区域
反因果序列	某个圆内区域
双边序列	(若存在)环状区域

注意：双边 z 变换必须标明收敛域！　　（Why？）

例：

$$f_1(k)=2^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow F_1(z)=\frac{z}{z-2},|z|>2$$

$$f_2(k)=-2^k\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow F_2(z)=\frac{z}{z-2},|z|<2$$

对单边z变换，其收敛域是某个圆外的区域，可省略。

结论：

双边$F_b(z)$ + 收敛域 $\longleftrightarrow$ $f(k)$

单边$F(z)$ $\longleftrightarrow$ $f(k)$