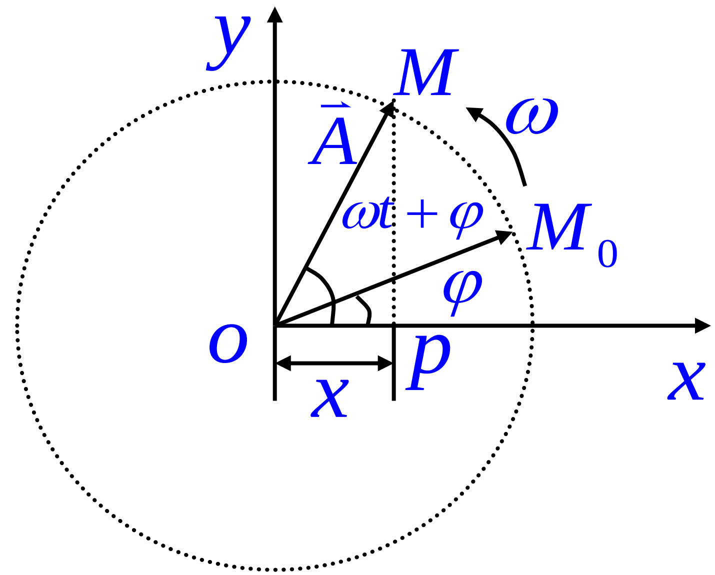
正弦量的相量表示法

为了更直观的感受正弦量和相量之间的关系，我们先来看一下几个Flash动画。

研究简谐振动的一种辅助方法—旋转矢量法。

旋转矢量法

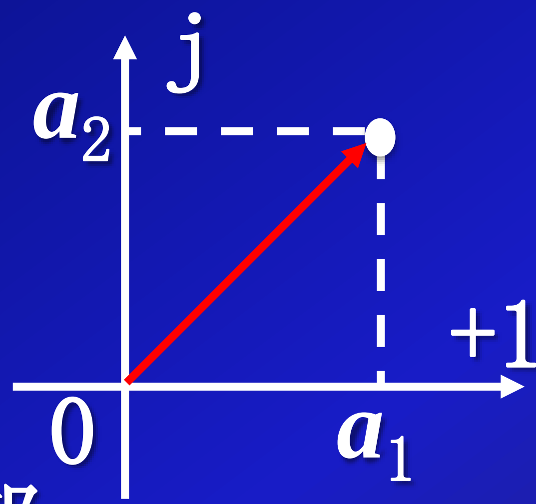


自ox轴的原点作一矢量 $\vec{A}$(A为振幅大小)，绕 o 点以 ω 逆时针匀角速度转动，设 $t=0$ 时，矢量 $\vec{A}$ 与ox轴夹角为 φ ，则任一时刻，矢量 $\vec{A}$ 与ox轴夹角为($\omega t+\varphi$)，矢量 $\vec{A}$ 端点在ox轴上投影点的位置

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

复数的表示

相量：在电路分析中把能表征正弦量的**复数**称为相量。



复数： $A = a_1 + ja_2$

其中：a_1、a_2 为实数；

a_1 称为实部，a_2 称为虚部；

$j=\sqrt{-1}$ 是虚数单位。

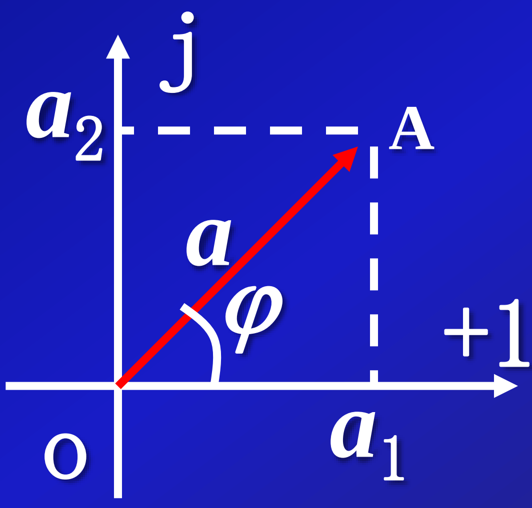
●复数的表示

直角坐标形式：$A=a_1+ja_2$

三角形式：$A=a(\cos\varphi+j\sin\varphi)$

指数形式：$A=ae^{j\varphi}$

极坐标形式：$A=a\angle\varphi$



复数的复平面表示

形式间的转换关系：

$a_1=a\cos\varphi$ $a_2=a\sin\varphi$

$$a=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}} \qquad \varphi=arctg\frac{a_2}{a_1}$$

●复数的运算

设有两个复数

$$A = \underline{a_1 + ja_2} = a\angle\theta_A$$

$$B = \underline{b_1 + jb_2} = b\angle\theta_B$$

①相等？

②加减运算？ 直角坐标形式

$$A + B = a_1 + ja_2 + b_1 + jb_2$$

$$= (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2)$$

●复数的运算

设有两个复数

$$A = a_1 + ja_2 = \underline{a\angle\theta_A}$$

$$B = b_1 + jb_2 = \underline{b\angle\theta_B}$$

③乘除运算？ **极坐标形式**

$$A \cdot B = ae^{j\theta_A} \cdot be^{j\theta_B} = abe^{j(\theta_A+\theta_B)}$$

$$A \cdot B = a\angle\theta_A \cdot b\angle\theta_B = ab\angle(\theta_A + \theta_B)$$

●复数的运算

设有两个复数

$$A = a_1 + ja_2 = \underline{a\angle\theta_A}$$

$$B = b_1 + jb_2 = \underline{b\angle\theta_B}$$

③乘除运算？ 极坐标形式

$$\frac{A}{B} = \frac{ae^{j\theta_A}}{be^{j\theta_B}} = \frac{a}{b}e^{j(\theta_A - \theta_B)}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{a\angle\theta_A}{b\angle\theta_B} = \frac{a}{b}\angle(\theta_A - \theta_B)$$

复数的运算

(1)加减：实部与实部相加减，虚部与虚部相加减。

(2) 乘除法：通常用指数形式或极坐标形式，模相乘/除，辐角相加/减。

(3) *微分：正弦量对时间取导数，相当于对应相量乘以 $j\omega$ 的运算。

(4) *积分：正弦量对时间取积分，相当于对应相量乘以 $1/j\omega$ 的运算。

例3（P196例7–3）已知

$$A=6+j8=10\angle 53.1^{\circ},\quad B=2.5+j4.33=5\angle 60^{\circ}$$

试计算 $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ \dfrac{A}{B}$。

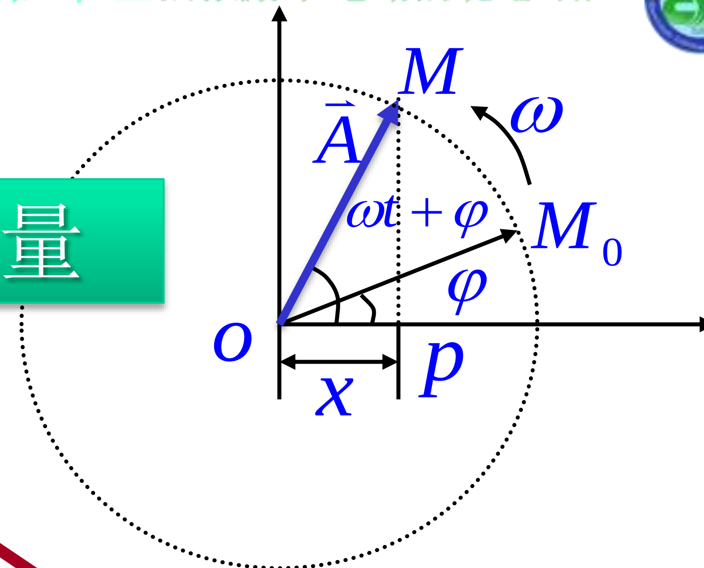
解：

$$A+B=6+j8+2.5+j4.33=8.5+j12.33$$

$$A-B=6+j8-(2.5+j4.33)=3.5+j3.67$$

$$A\cdot B=10\angle 53.1^{\circ}\cdot 5\angle 60^{\circ}=50\angle 113.1^{\circ}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{10\angle 53.1^{\circ}}{5\angle 60^{\circ}}=2\angle -6.9^{\circ}$$



矢量A端点在横轴投影点的位置

正弦量

$$x = a\cos(\omega t+\varphi)$$

如看作一个复平面，用M点表示一个复数

$$x = \mathrm{Re}[A]$$

$$x = \mathrm{Re}\left[ae^{j(\omega t+\varphi)}\right]$$

$$A = ae^{j(\omega t+\varphi)} = a\angle\omega t+\varphi$$

$$= \mathrm{Re}\left[ae^{j\varphi}\cdot e^{j\omega t}\right]$$

或写成直角坐标形式

复数实部

$$A = a\cos(\omega t+\varphi) + ja\sin(\omega t+\varphi)$$

●正弦量的相量表示

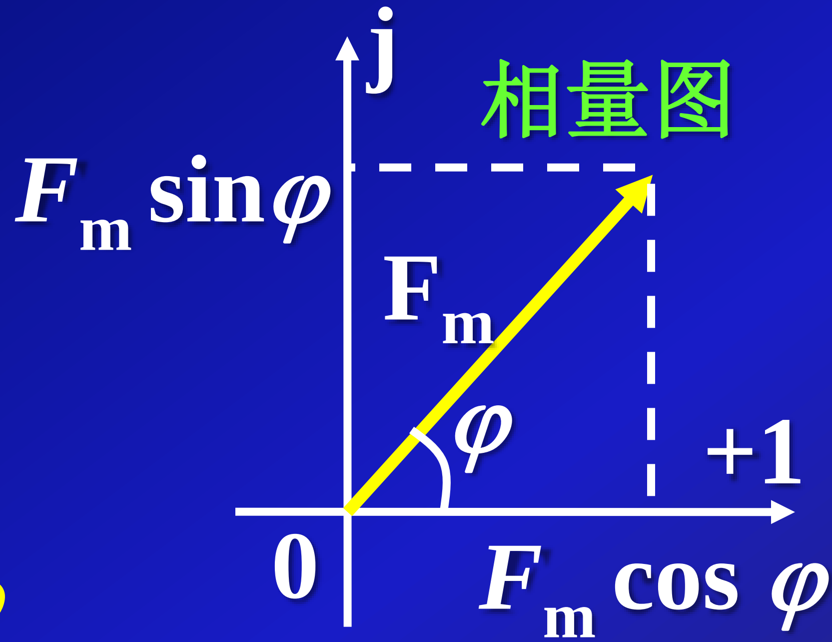
$$f(t) = F_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi)$$

$$= \mathrm{Re}[F_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{j(\omega t + \phi)}]$$

$$= \mathrm{Re}[F_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{j\phi} \mathrm{e}^{j\omega t}]$$

$$\dot{F}_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = F_{\mathrm{m}} \angle \varphi$$

称为：f (t)的振幅相量



$$\dot{F} = F\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = F\angle\varphi$$

称为：$f\,(\mathrm{t})$ 的有效值相量

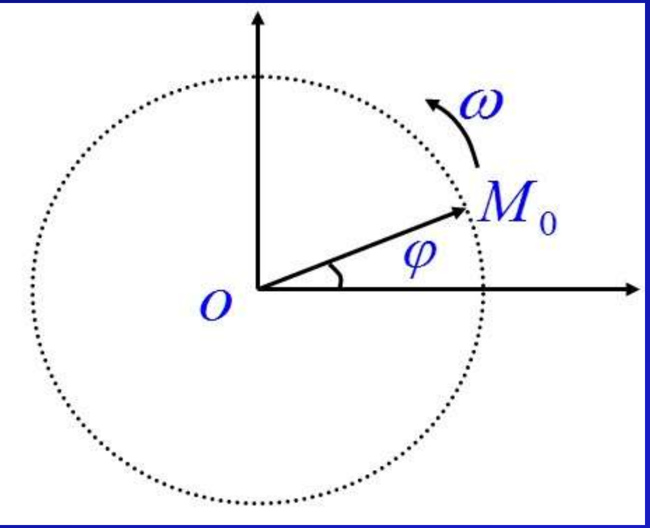
$$f(t) = F_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi) \longleftrightarrow \dot{F}_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{m}}\angle\phi$$

$$f(t) = \sqrt{2}F\cos(\omega t + \phi) \longleftrightarrow \dot{F} = F\angle\phi$$

$\dot{F}_{\mathrm{m}}$或$\dot{F}$完全能表示正弦稳态电路中的正弦量。

正弦量与其相量的对应关系：

正弦量$f(t)$是以角速度ω沿逆时针方向旋转的旋转相量 $\dot{F}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{j\omega t}$ 在实轴投影。即：



$$f(t)=\mathrm{Re}[\dot{F}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{j\omega t}]$$

复指数函数 $\mathrm{e}^{j\omega t}$ 是模为1、辐角为 ωt 的复数，它在复平面中可以用一个以恒定角速度按逆时针方向旋转的单位向量表示，通常称其为旋转因子。

例4（P198例7-4） 已知正弦电流和电压分别为 $i_1(t)= 5\sqrt{2}\cos(314t+30^\circ)A$

$u_2(t)= 5\sqrt{2}\sin(314t+45^\circ)V,$

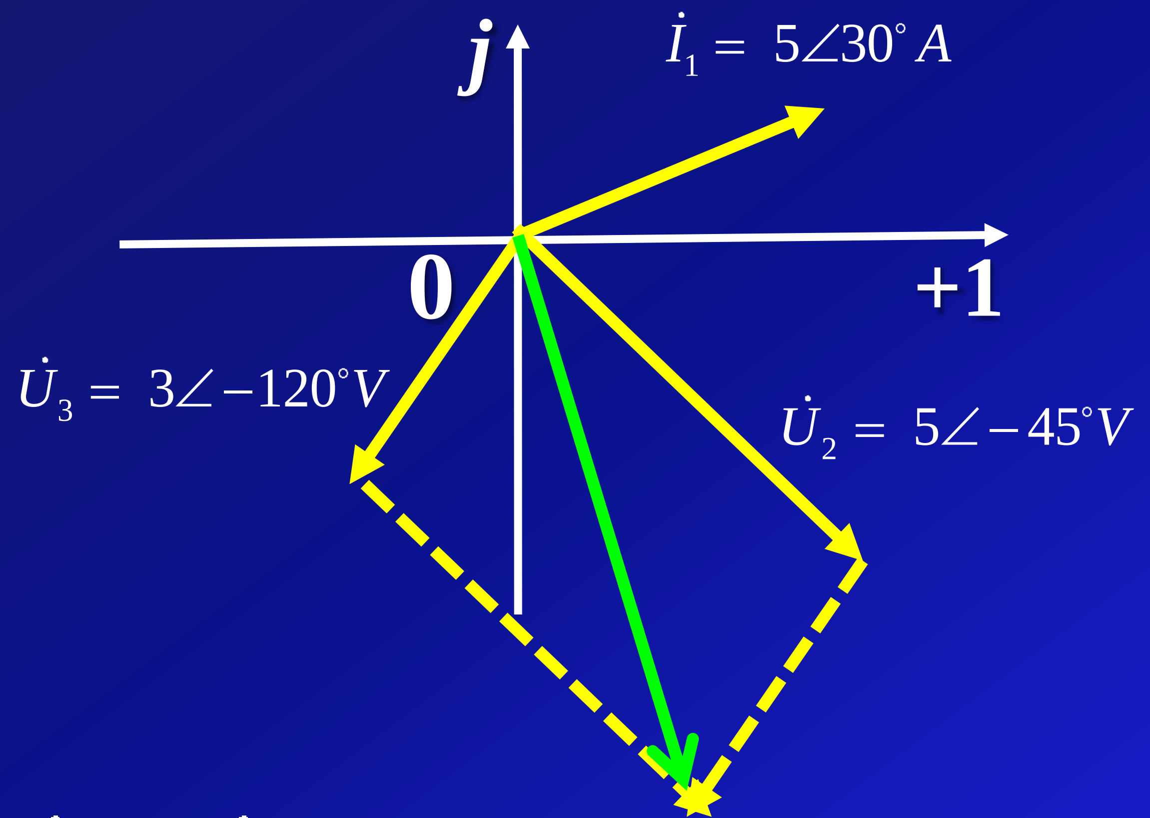
$u_3(t)=-3\sqrt{2}\cos(314t+60^\circ)V$

写出它们的相量，画出相量图。

解： $\dot{I}_1 = 5\angle 30^\circ A$

$u_2(t)= 5\sqrt{2}\cos(314t-45^\circ)V$ $\dot{U}_2 = 5\angle -45^\circ V$

$u_3(t)=3\sqrt{2}\cos(314t-120^\circ)V$ $\dot{U}_3 = 3\angle -120^\circ V$



$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 5\angle -45^\circ + 3\angle -120^\circ$$

$$= (3.54 - j3.54) + (-1.5 - j2.60)$$

$$= 2.04 - j6.14 = 6.48\angle -71.6^\circ V$$

$$\dot{U}=6.48\angle-71.6^{\circ}V$$

可得电压的表达式为

$$u(t)=6.48\sqrt{2}\cos(314t-71.6^{\circ})\mathrm{V}$$

同频率的正弦量相加减，其结果仍一频率相同的正弦量。

例5（P198例7-5）已知同频率正弦电压相量为 $\dot{U}_1 = 3 + j4V, \dot{U}_2 = -3 + j4V, \dot{U}_3 = 3 - j4V$ 频率f=50Hz。试写出它们对应的函数表达式

解：先将相量的直角坐标形式转换为极坐标形式

$$\dot{U}_1 = 3 + j4 = 5\angle 53.1^\circ V$$

$$\dot{U}_2 = -3 + j4 = 5\angle 126.9^\circ V$$

$$\dot{U}_3 = 3 - j4 = 5\angle -53.1^\circ V$$

$$\omega=2\pi f=100rad/s\approx 314rad/s$$

因此

$$u_1(t)=5\sqrt{2}\cos(314t+53.1^{\circ})V$$

$$u_2(t)=5\sqrt{2}\cos(314t+126.9^{\circ})V$$

$$u_3(t)=5\sqrt{2}\cos(314t-53.1^{\circ})V$$

注意:

(1) 相量表示不涉及角频率，故还要给出角频率。

(2) 相量与正弦量之间，只是一种对应关系，不是直接相等。

(3) 同一个电路的分析中，只能选用一种系统。