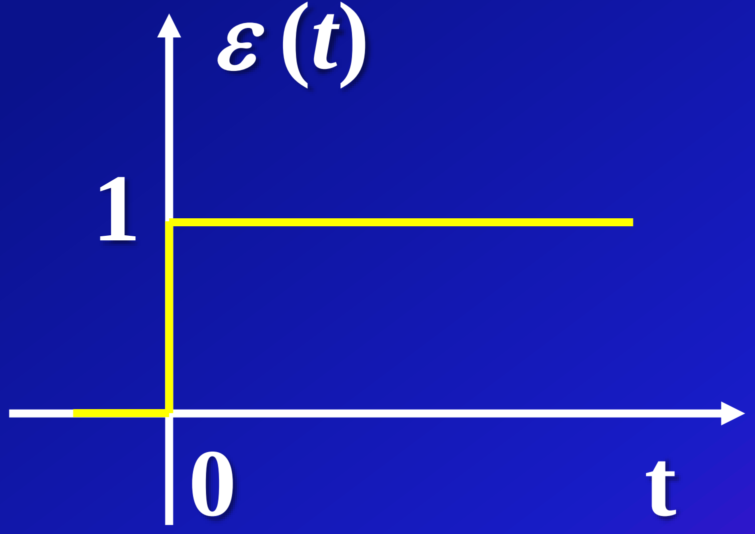
一阶电路的阶跃响应

单位阶跃函数

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



Notes: (1) 在t=0处函数值无定义；

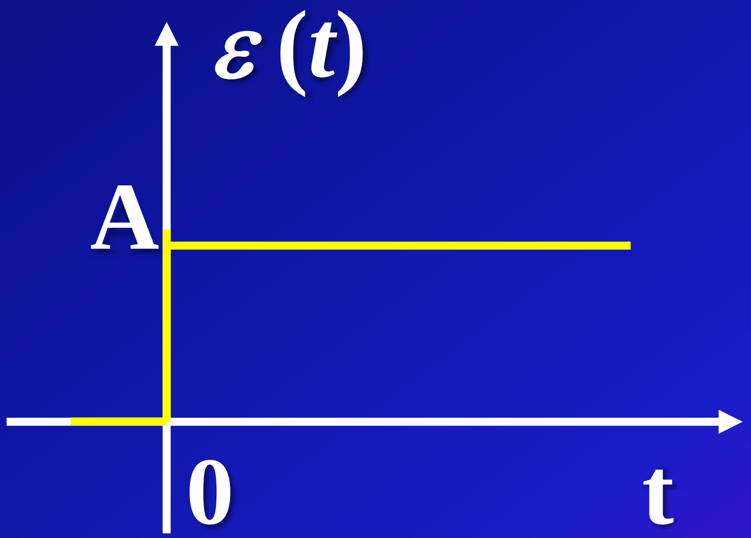
(2) 函数本身无量纲；

当用单位阶跃函数表示电压或电流时，统称为单位阶跃信号，有量纲。

一般阶跃函数

数学定义：

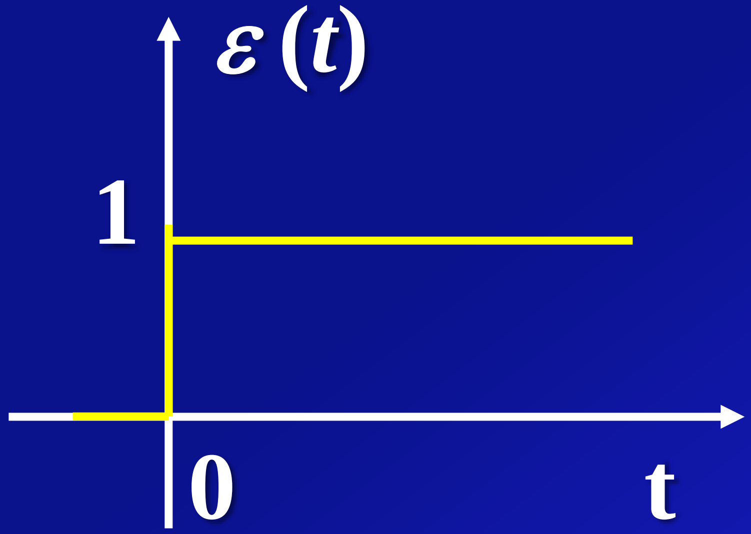
$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ A & t>0\end{cases}$$

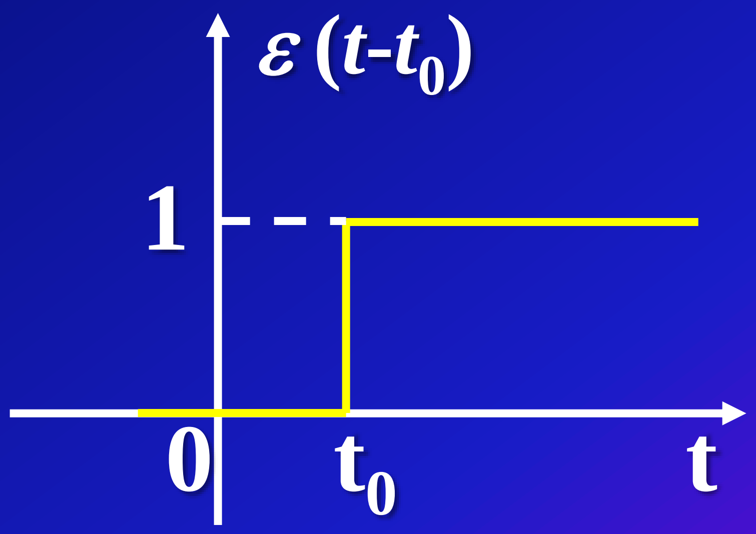


常量A表示在t=0处跃变的幅度，称为跃变量；

延迟单位阶跃函数：

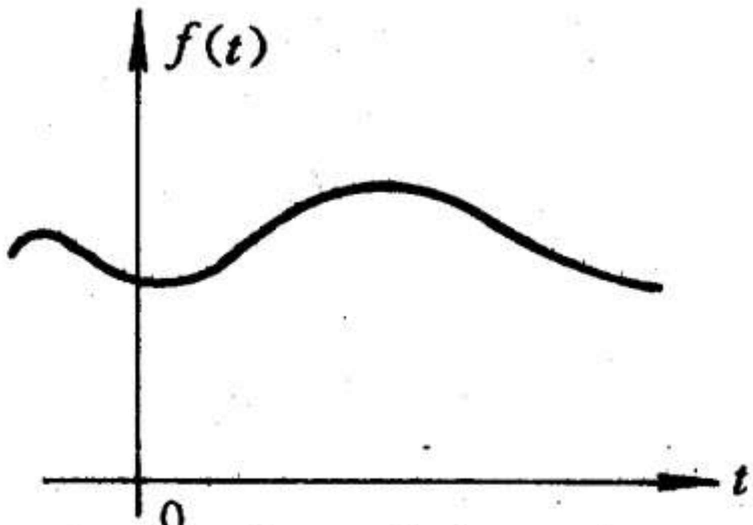
表示在$t=t_0$处跃变幅度为1的信号；



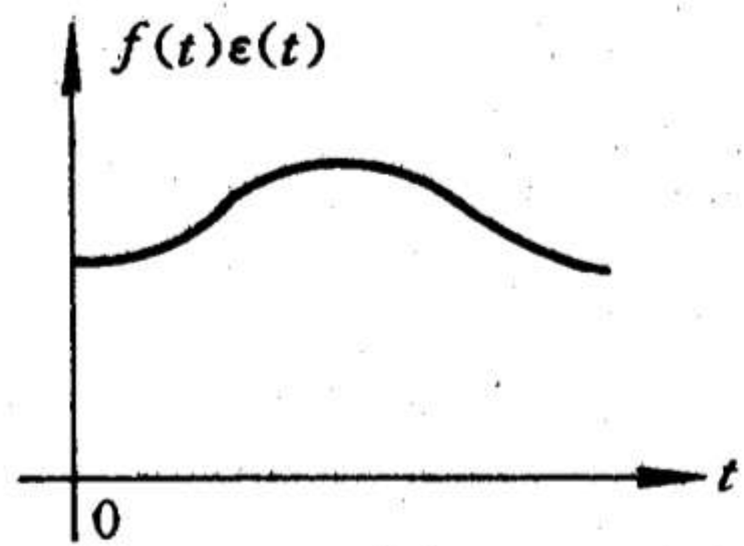


$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

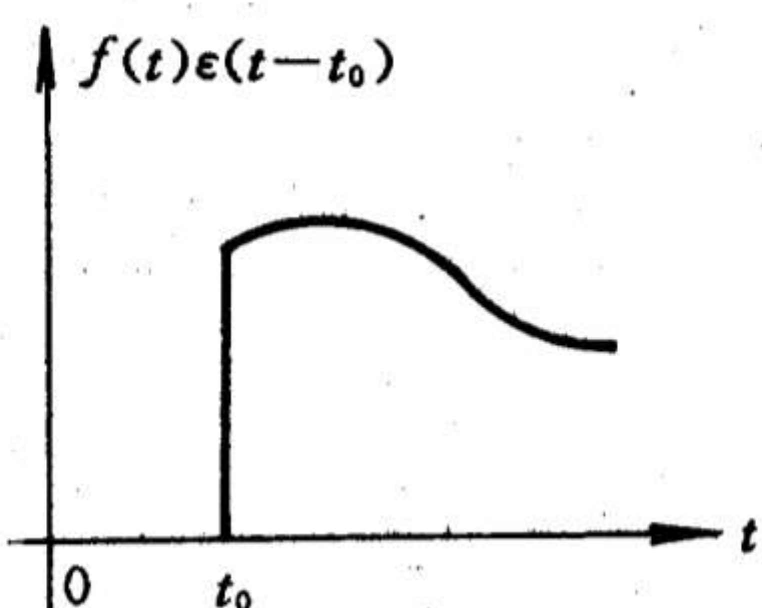
$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$



(a)



(b)

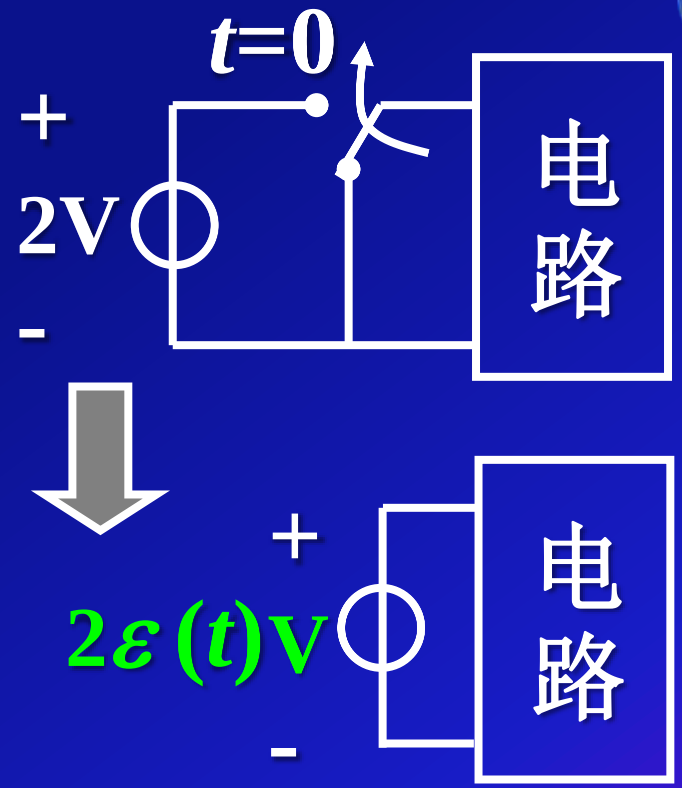


(c)

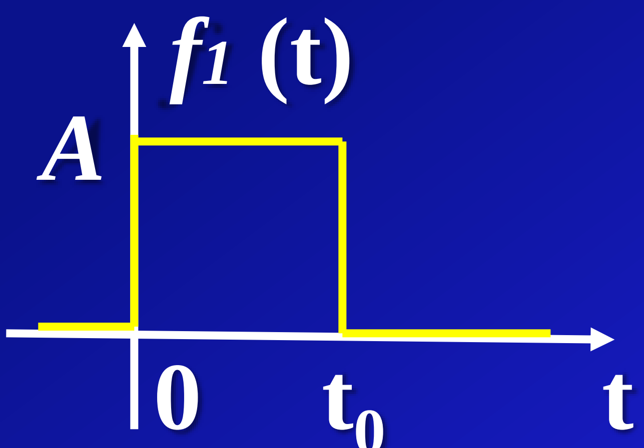
阶跃信号用途:

1. 描述开关动作

电路中可省去开关。

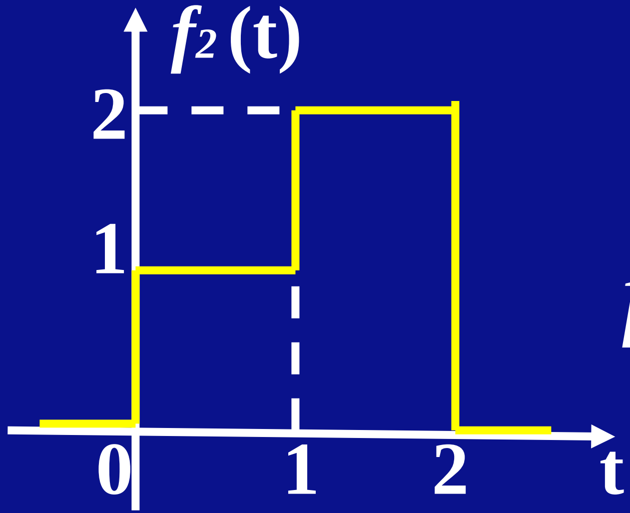


2. 描述信号

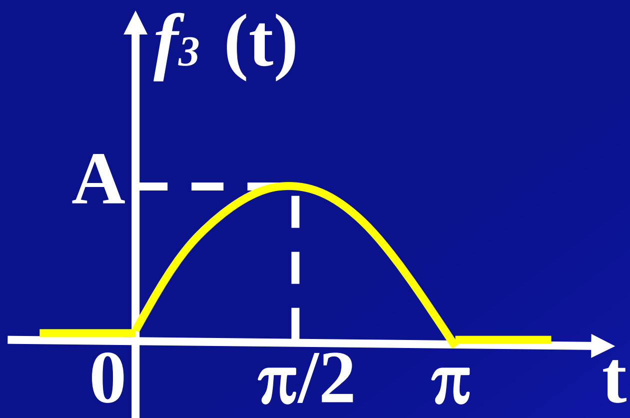


$$f_1(t) = A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)]$$

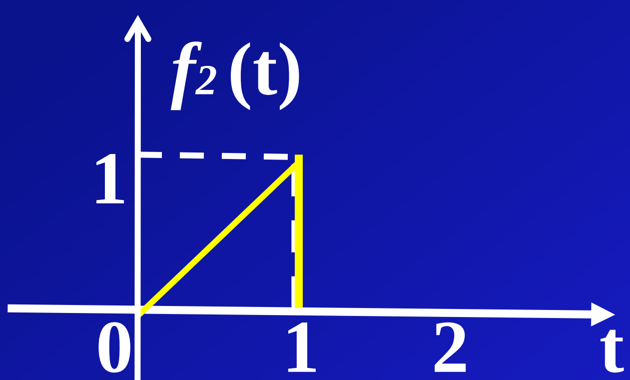
信号表达更方便简洁，可省去时域定义。



$$f_2(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)-2\varepsilon(t-2)$$



$$f_3(t)=A\sin t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\pi)]$$



$$f_4(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$$

阶跃响应

单位阶跃响应$s(t)$： 单位阶跃信号激励在**零状态电路**中产生的响应。

即：

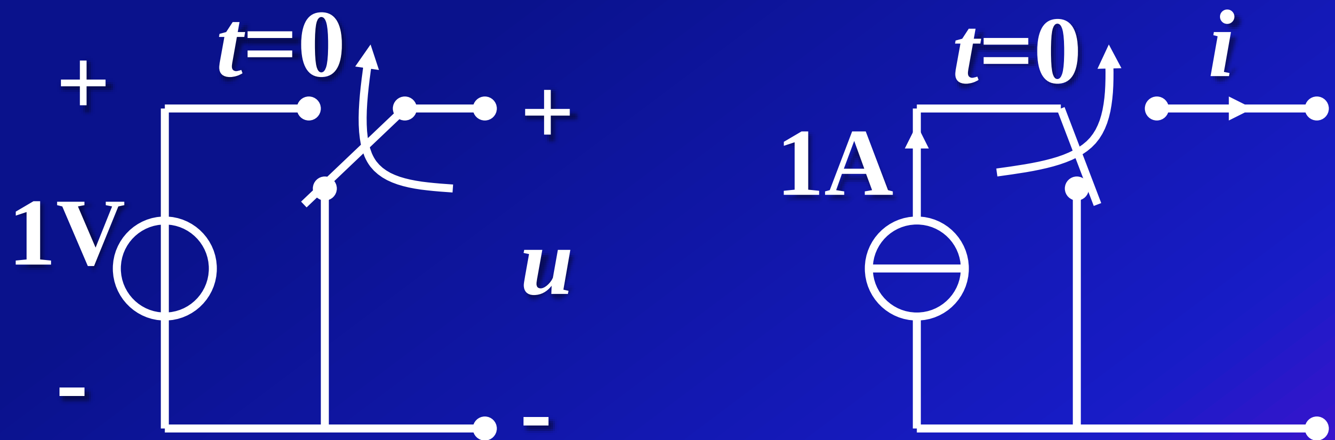
(1) 激励为单位阶跃信号$\varepsilon(t)$时；

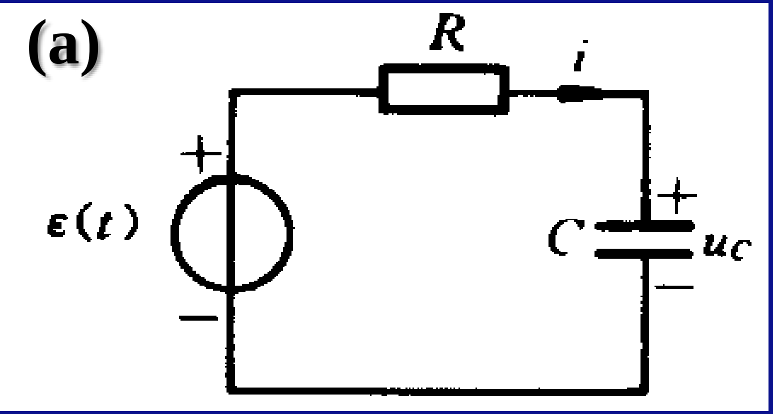
(2) 求零状态响应；

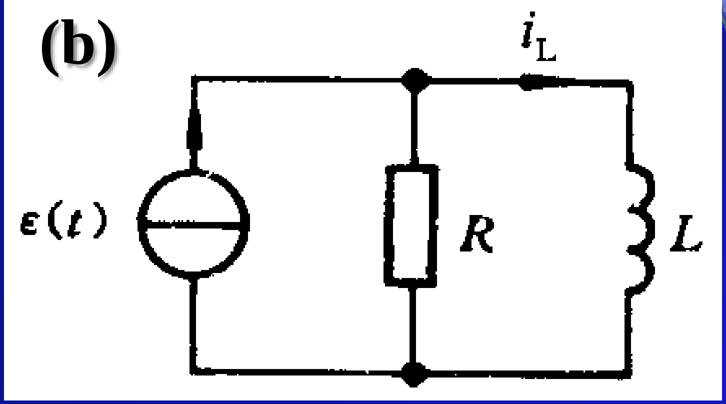
(3) 时域为$t>0$；

单位阶跃响应分析法

把$\varepsilon(t)$看作下图开关动作，则求解单位阶跃响应（零状态）可用三要素法：





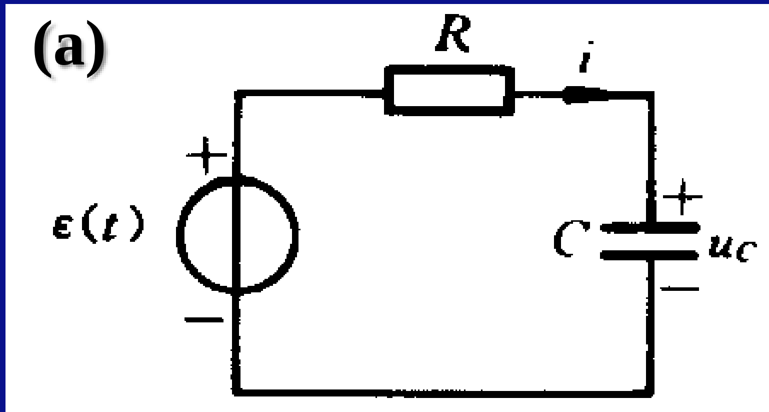


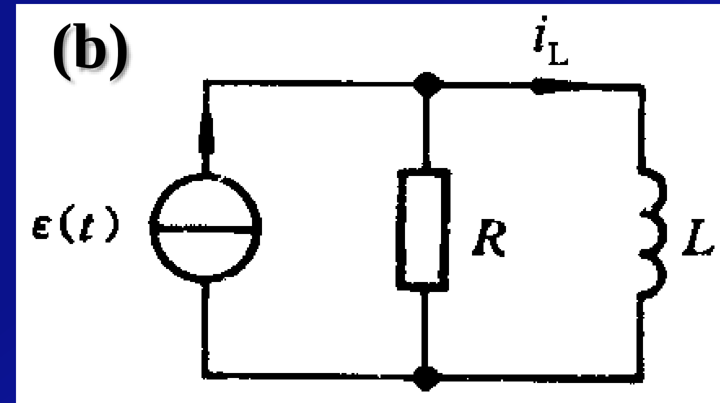
图(a)RC串联电路，初始值$u_C(0^+)=0V$，稳态值$u_C(\infty)=1V$，时间常数$\tau=RC$；

图(b)RL并联电路，初始值$i_L(0^+)=0A$，稳态值$i_L(\infty)=1A$，时间常数$\tau=L/R$；

可分别得到$u_C(t)$和$i_L(t)$的阶跃响应如下：

$$s_C(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \qquad s_L(t)=(1-e^{-\frac{R}{L}t}t)\varepsilon(t)$$





$$u_C(t)=s_C(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i_L(t)=s_L(t)=(1-e^{-\frac{R}{L}t}t)\varepsilon(t)$$

电路中，换路用开关函数$\varepsilon(t)$表示，响应的时域也用$\varepsilon(t)$限制。

线性电路具有两个特性：齐次性和叠加性。若以$\varepsilon(t)$ 表示激励，**s(t)**表示电路的零状态响应。

齐次性:

$$\varepsilon(t) \to s(t)$$

$$A\varepsilon(t) \to As(t)$$

叠加性:

$$\varepsilon_1(t) \to s_1(t)$$

$$\varepsilon_2(t) \to s_2(t)$$

$$\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) \to s_1(t) + s_2(t)$$

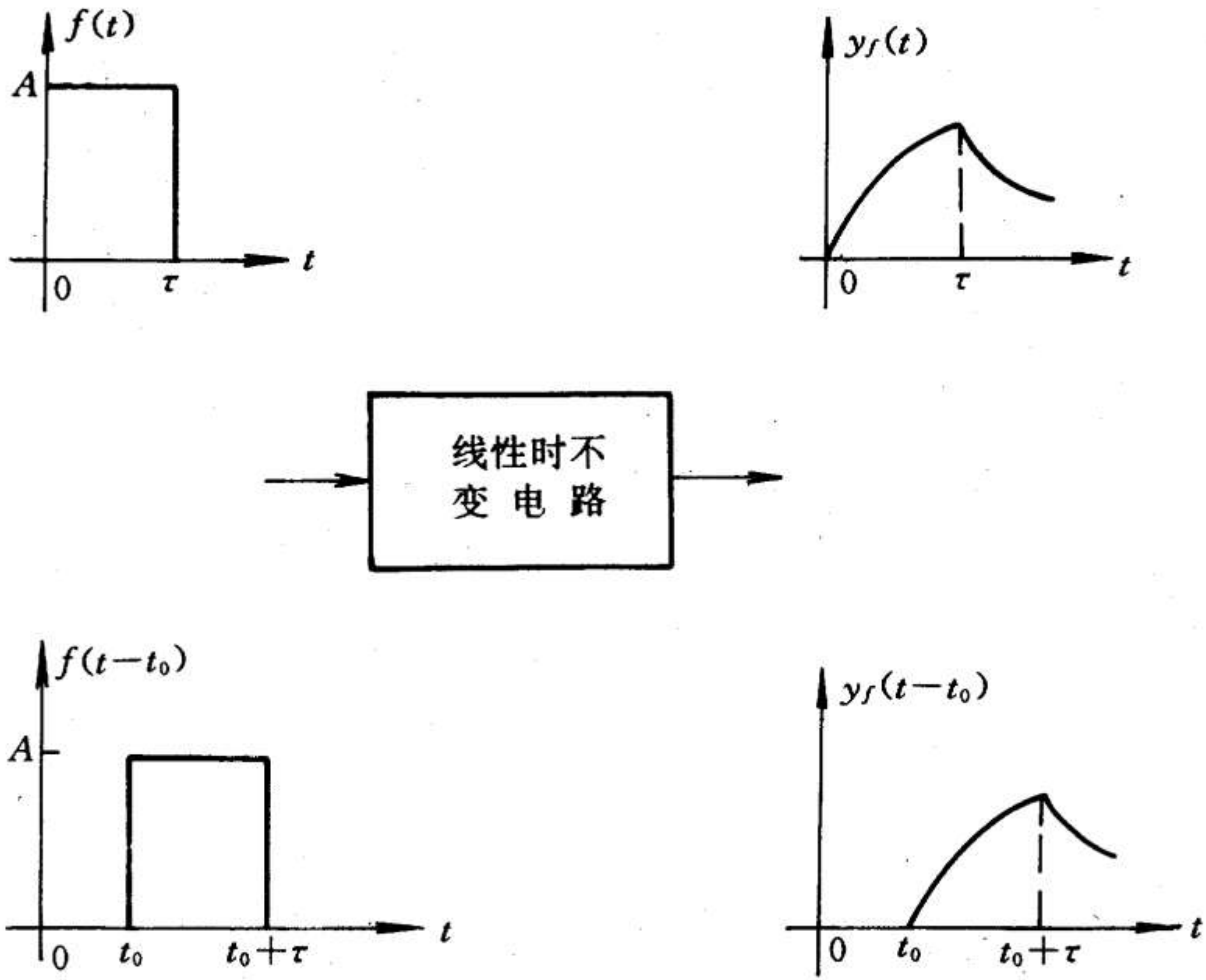
如果电路既满足齐次性又满足叠加性，则该电路是**线性**的，可表示为

$$A_1\varepsilon_1(t)+A_2\varepsilon_2(t)\rightarrow A_1s_1(t)+A_2s_2(t)$$

如果电路元件的参数不随时间变化，则该电路为**时不变**电路。这时，电路的零状态响应的函数形式与激励接入电路的时间无关，即

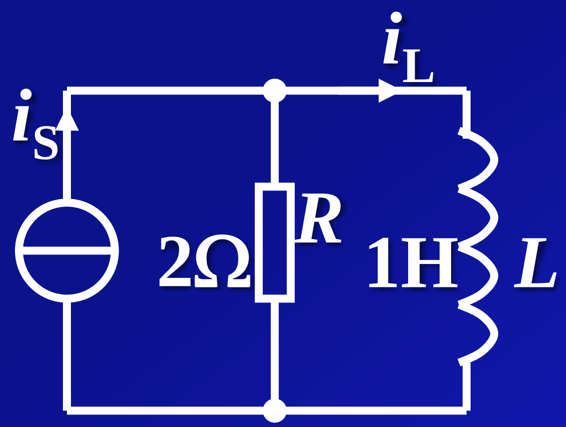
$$\varepsilon(t)\rightarrow s(t)$$

$$\varepsilon(t-t_0)\rightarrow s(t-t_0)$$

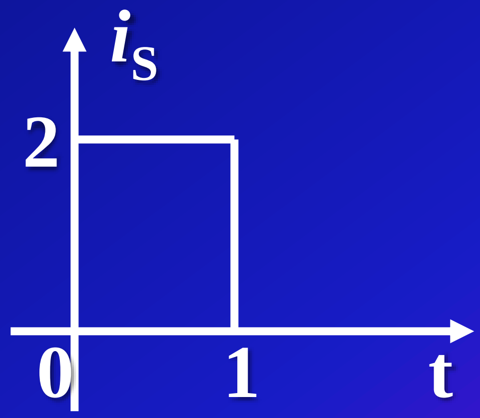


时不变特性

例23（P156例6-12）求图(a)在图(b)所示脉冲电流信号作用下的零状态响应$i_L(t)$并画出波形。

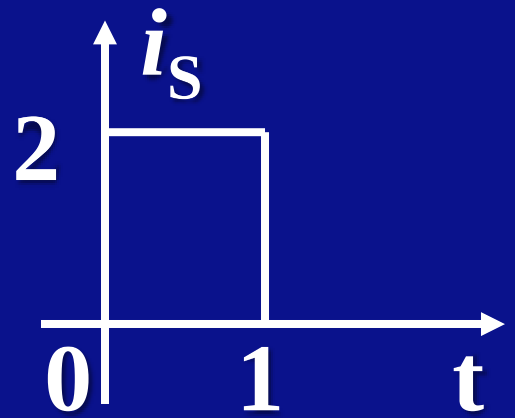


(a)



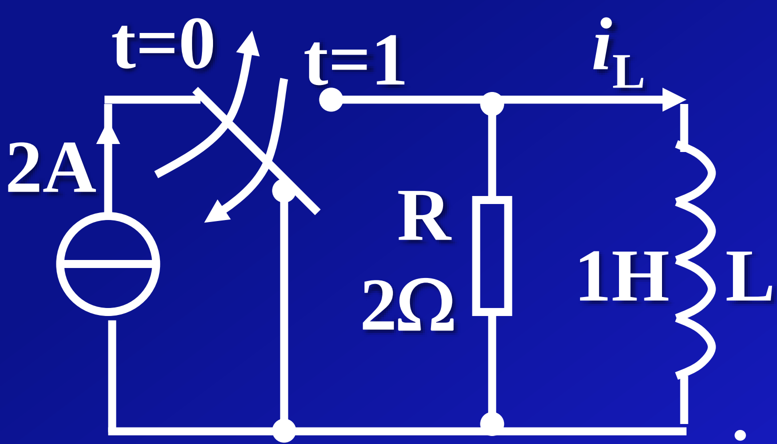
(b)

解法一：将激励看作两次开关动作;



第一次换路，t=0，充电;

第二次换路，t=1s, 放电。



0<t<1s:

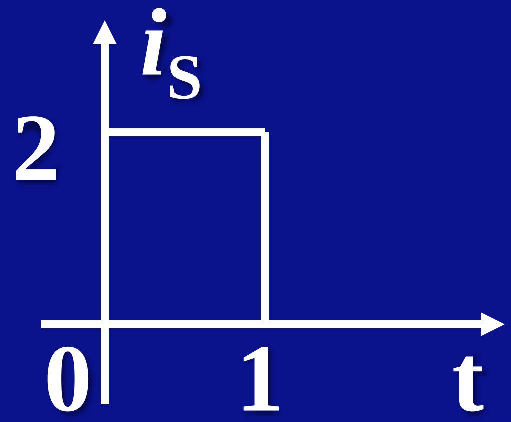
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0A$$

$$i_L(\infty) = 2A \quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{2}s$$

$$\therefore i_L(t) = 2(1 - e^{-2t})A, \ 0 \le t \le 1$$

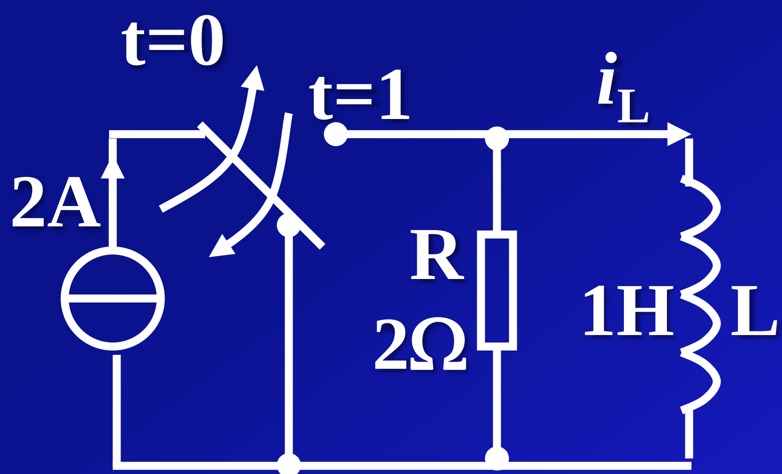
t>1s:

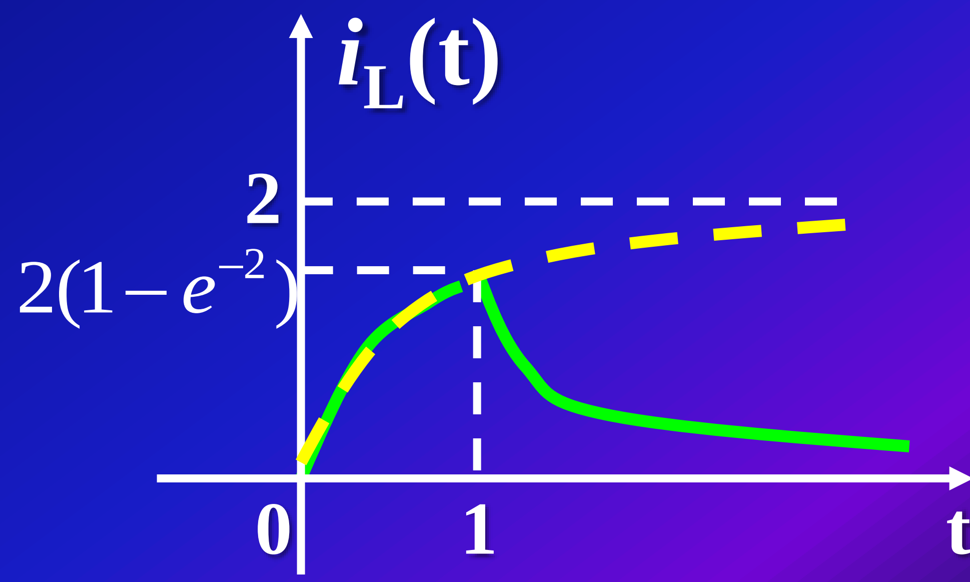
$$i_L(1^+) = i_L(1^-) = 2(1-e^{-2})A = 1.73A$$

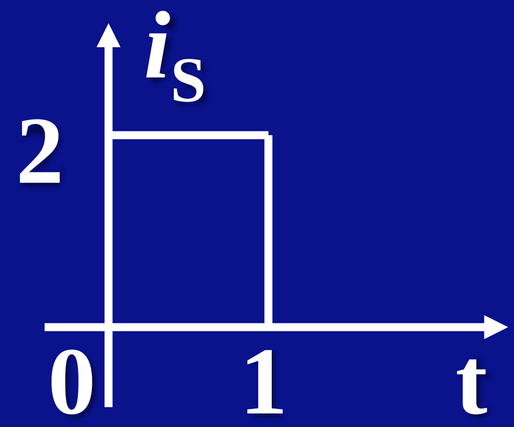


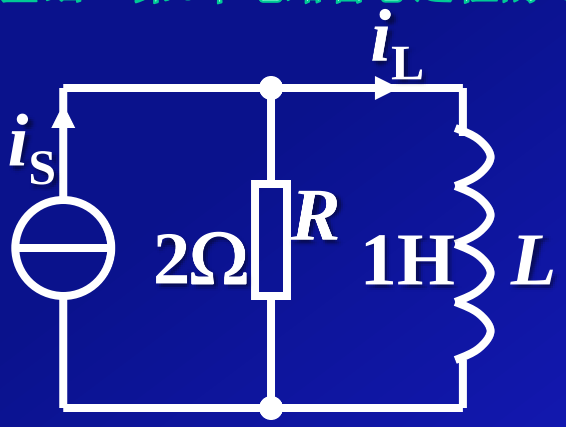
$$i_L(\infty) = 0A \qquad \tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{2}s$$

$$\therefore i_L(t) = 1.73(1-e^{-2(t-1)})A \quad t>1$$









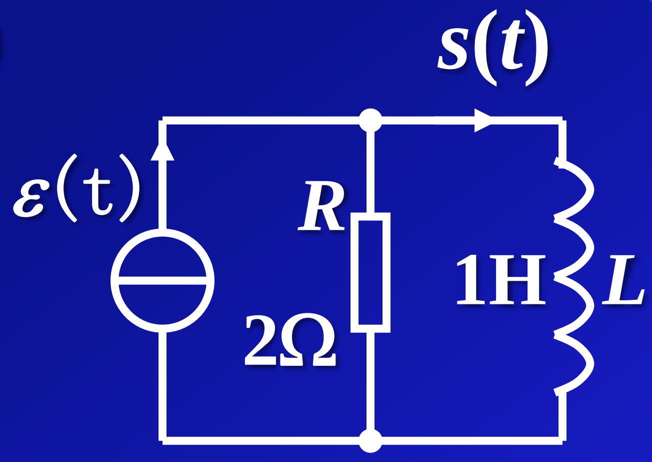
解法二：将激励电流用阶跃函数表示：

$$i_S(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)\text{A}$$

由于是线性电路，根据动态电路的叠加定理，其零状态响应等于$2\varepsilon(t)$和$-2\varepsilon(t-1)$两个阶跃电源单独作用引起零状态响应之和：

$$s_i(t) = 2s(t) - 2s(t-1)\text{A}$$

(1) 先求单位阶跃响应s(t)



$$s(0^+)=s(0^-)=0$$

$$s(\infty)=1$$

$$\tau=L/R=0.5s$$

所以：$s(t)=(1-e^{-2t})\,\varepsilon(t)$

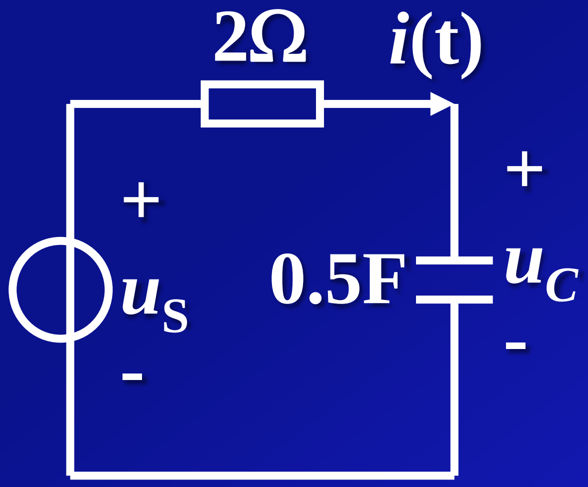
(2) 应用线性和时不变特性叠加

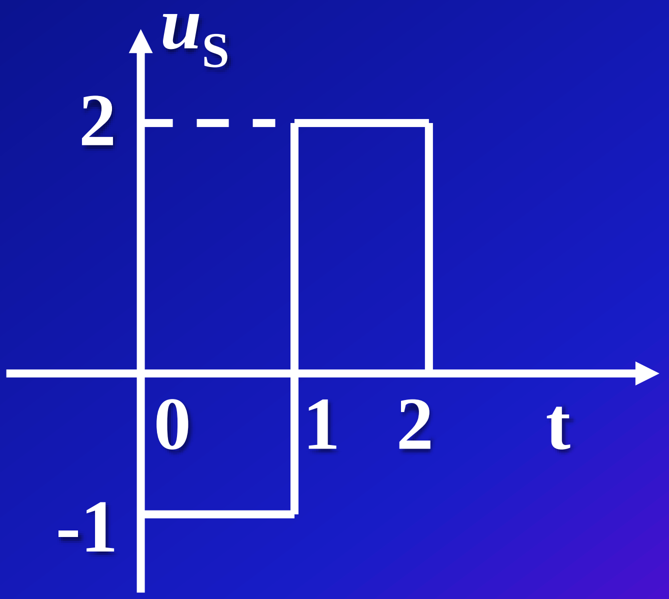
$2\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)$作用的零状态响应：

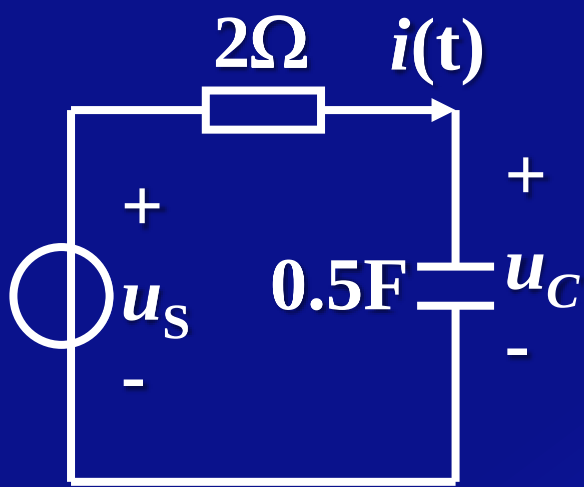
$$i_L(t)=2s(t)-2s(t-1)$$

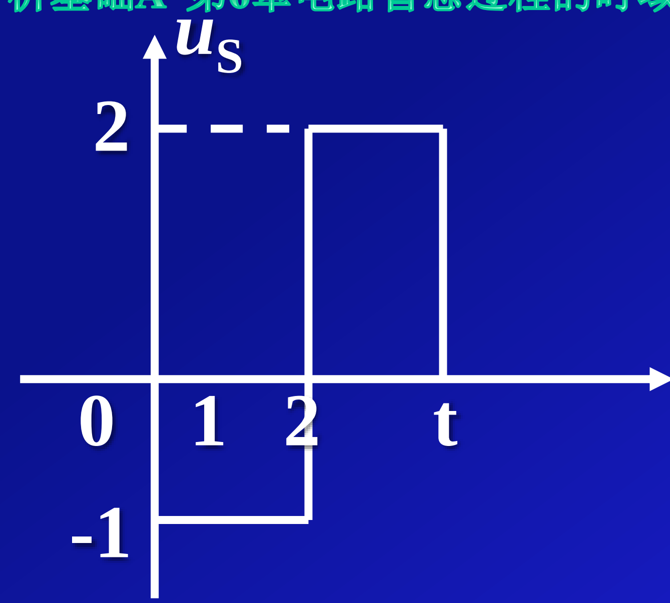
$$=2(1-e^{-2t})\varepsilon(t)-2[1-e^{-2(t-1)}]\varepsilon(t-1)\text{A}$$

例24（P157例6-13 ）求t>0时的i (t)
已知$u_C(0^-)$=2V









解：求零输入响应$i_{zi}(t)$：

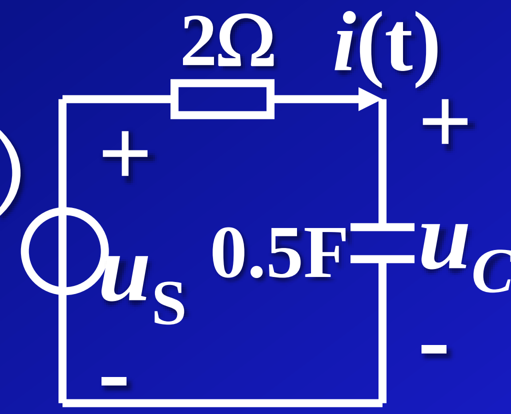
$$i_{zi}(0^+)=\frac{u_R(0^+)}{R}=-\frac{u_C(0^+)}{R}=-1\text{A},$$

时间常数$\tau=RC=1\text{s}$，

所以：$$i_{zi}(t)=-e^{-t}\text{A}\quad t>0$$

求零状态响应$i_{Czs}(t)$：

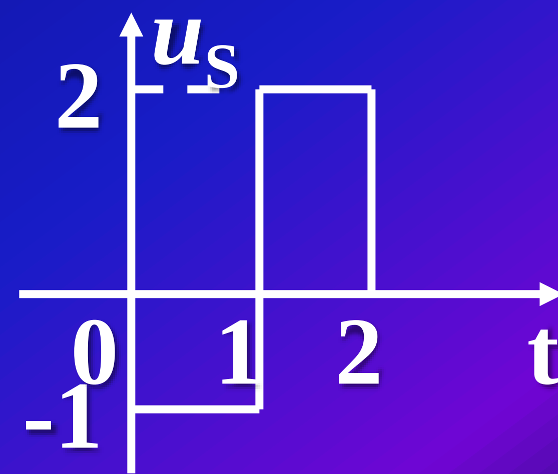
$u_S(t) = -\varepsilon(t) + 3\varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2)$



先求单位阶跃响应$s(t)$：

初始值 $u_C(0^+)=0$， $i_C(0^+)=0.5A$，

稳态值 $i_C(\infty) = 0A$



$\therefore s(t) = 0.5e^{-t}\varepsilon(t)$

$i_{zs}(t) = -s(t) + 3s(t-1) - 2s(t-2)$

故，零状态响应为：

$$i_{zs}(t) = -s(t) + 3s(t-1) - 2s(t-2)$$

$$= -0.5e^{-t}\varepsilon(t) + 1.5e^{-(t-1)}\varepsilon(t-1)$$

$$-e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)\mathrm{A}$$

（3）全响应 $i(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t)$

$$i(t) = -0.5e^{-t}\varepsilon(t) + 1.5e^{-(t-1)}\varepsilon(t-1)$$

$$-e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2) - e^{-t}\mathrm{A} \qquad t > 0$$