

### 知识点Z2.3

# 微分方程的经典解法

#### 主要内容:

1. 齐次解的定义和解法
2. 特解的含义和全响应的求解

#### 基本要求:

1. 熟悉齐次解和特解的函数形式
2. 掌握微分方程的经典解法



### Z2.3 微分方程的经典解法

#### 1.经典解

$$\begin{aligned}y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) \\ = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \dots + b_1f^{(1)}(t) + b_0f(t)\end{aligned}$$

$$y(t)(\text{完全解}) = y_h(t)(\text{齐次解}) + y_p(t)(\text{特解})$$

齐次解是对应齐次微分方程的解：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = 0$$

特征根为  $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  的根  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )，由特征根可以得到齐次解的函数形式。

特解的函数形式与激励的函数形式有关。



# 2.1 LTI连续系统的响应

## 2.齐次解的常用函数形式(p.35)

表2-1 不同特征根所对应的齐次解

特征根 $\lambda$	齐次解 $y_h(t)$
单实根	$Ce^{\lambda t}$
2重实根	$(C_1t + C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C \cos(\beta t) + D \sin(\beta t)]$ 或 $Ae^{\alpha t} \cos(\beta t - \theta)$ , 其中 $Ae^{j\theta} = C + jD$

## 3.特解的常用函数形式(p.35)

表2-2 不同激励所对应的特解

激励 $f(t)$	特解 $y_p(t)$
$t$	$P_1t + P_0$ $t \cdot (P_1t + P_0)$ 所有的特征根均不等于0; 有1个等于0的特征根;
$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}$ $(P_1t + P_0)e^{\alpha t}$ $\alpha$ 不等于特征根; $\alpha$ 等于特征单根;
$\cos(\beta t)$ 或 $\sin(\beta t)$	$P \cos(\beta t) + Q \sin(\beta t)$ 或 $A \cos(\beta t - \theta)$ , 其中 $Ae^{j\theta} = P + jQ$ 所有的特征根均不等于 $\pm j\beta$



## 2.1 LTI连续系统的响应

**例1** 某系统的微分方程为  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$ , 求

(1) 当  $f(t) = 2e^{-t}, t \geq 0; y(0)=2, y'(0)=-1$  时的全解;

(2) 当  $f(t) = e^{-2t}, t \geq 0; y(0)=1, y'(0)=0$  时的全解。

**解:** (1) 特征方程:  $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ , 得:  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$

设定齐次解:  $y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$

设定特解:  $y_p(t) = Qe^{-t}$ , 代入微分方程:

$$Qe^{-t} + 5(-Qe^{-t}) + 6Qe^{-t} = 2e^{-t} \quad \text{解得: } Q=1$$

**全解:**  $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + e^{-t}$

$$y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 2$$

$$y'(0) = -2C_1 - 3C_2 - 1 = -1$$

$$\text{解得} \quad C_1 = 3, \quad C_2 = -2$$

**最后得全解**  $y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}, t \geq 0$



(2)齐次解:  $y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$  同上

特解:  $y_p(t) = (Q_0 + Q_1 t)e^{-2t}$  ( $f(t) = e^{-2t}$ , 注意形式)

代入微分方程:  $Q_1 e^{-2t} = e^{-2t}$  解得:  $Q_1 = 1$

全解:  $y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + t e^{-2t} + Q_0 e^{-2t}$   
 $= (C_1 + Q_0) e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + t e^{-2t}$

代入初始条件, 得:

$$y(0) = (C_1 + Q_0) + C_2 = 1, \quad y'(0) = -2(C_1 + Q_0) - 3C_2 + 1 = 0$$

解得  $C_1 + Q_0 = 2, C_2 = -1$

最后得全解:  $y(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t} + t e^{-2t}, t \geq 0$

讨论: 上式第一项系数  $C_1 + Q_0 = 2$ , 不能区分  $C_1$  和  $Q_0$ .

