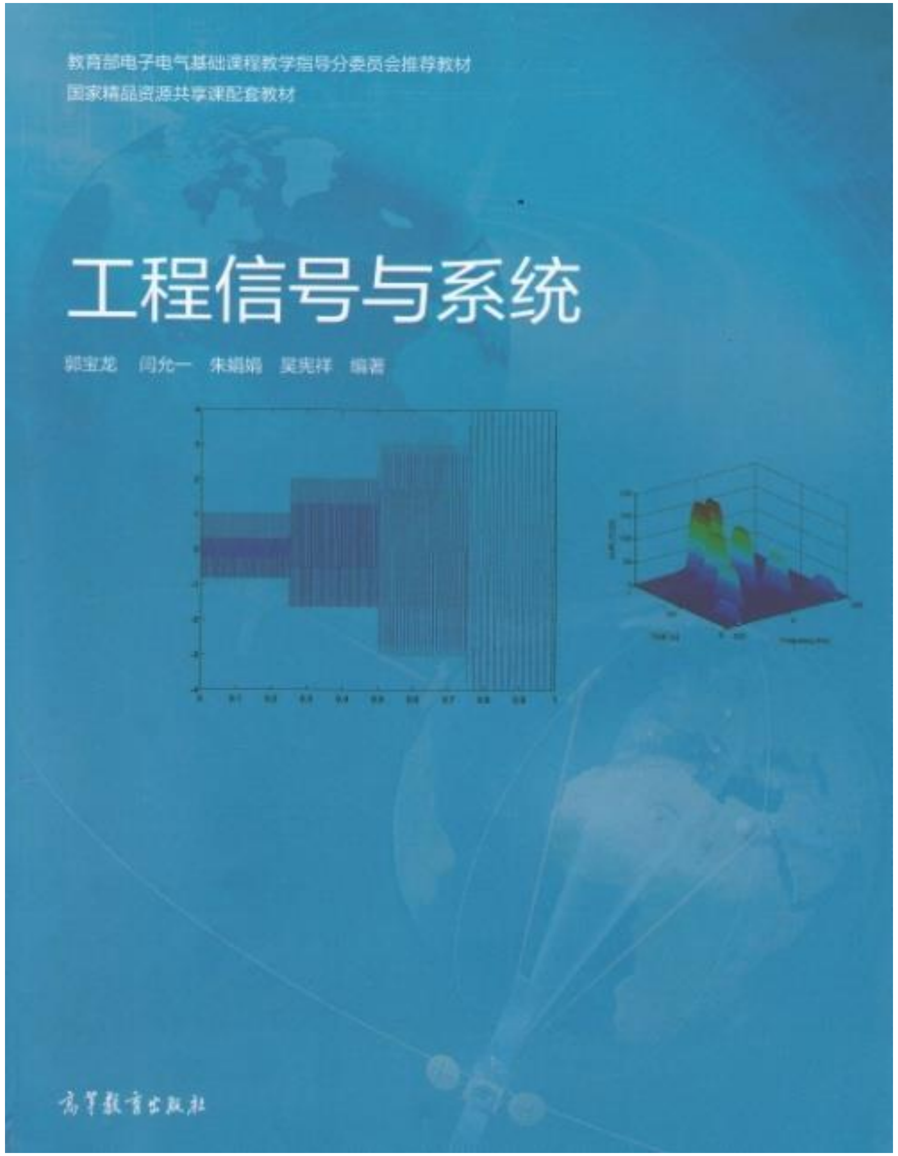

信号与系统

Signals and Systems

西安电子科技大学
Xidian University, Xi’an China

第五章 离散傅里叶变换

5.1连续变换到离散变换的演化	Z5.1 傅里叶变换中连续到离散的演化
	Z5.2 五种傅里叶变换的比较
5.2 离散傅里叶变换(DFT)	Z5.3 离散傅里叶变换定义
	Z5.4 快速傅里叶变换（FFT）
5.3 离散傅里叶级数 (DFS)	Z5.5 主值区间
	Z5.6 离散傅里叶级数
5.4 离散时间傅里叶变换(DTFT)	Z5.7 DTFT的定义
	Z5.8 从DFS到DTFT的演化
5.5 三种离散变换之间的关系	Z5.9 DFT与DFS的关系
	Z5.10DTFT与DFS的关系
	Z5.11 DTFT与DFT的关系

5.6 离散傅里叶变换的性质	Z5.12 DTFT基本性质
	Z5.13 DFT与DFS的性质
5.7 离散余弦变换(DCT)	Z5.14 离散余弦变换的定义
	Z5.15 JPEG中的DCT

5.1连续变换到离散变换的演化

取样

连续 离散

还原(有条件)

思考问题：

* 为什么要对信号进行离散化？
* 离散信号该如何进行频谱分析？

知识点Z5.1

傅里叶变换中连续到离散的演化

主要内容：

1.时域离散化

2.频域离散化

3.DTFT、DFT、DFS

基本要求：

1.掌握时域频域离散化的基本概念

2.掌握DTFT、DFT和DFS的变换式

Z5.1傅里叶变换中连续到离散的演化

1. 由FT演化出DTFT

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

问题：上述傅里叶变换式中，不论在时域还是在频域，信号都是连续的。但以计算机为代表的数字处理系统只能存储和处理有限长度的离散数字信号，且无法直接进行连续积分运算。 需要对信号离散化。

由采样定理知，序列可以看作在满足采样定理的条件下对连续信号进行采样得到，则有：

$$X(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n\cdot\Delta t]e^{-j\omega n\Delta t}\Delta t$$

5.1连续变换到离散变换的演化

将时域间隔单位归一化后，得到：

$$X(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

上式是将连续傅里叶变换中的时域信号进行离散化后得到，称离散时间傅里叶变换（DTFT－Discrete-time Fourier Transform）。

分析：DTFT仍未达到便于数字系统处理的目的。

（1）时域序列的长度仍然是无限长的。

（2）信号在频域仍然是连续的。

因此，还需要对频域信号进行离散化。

2. 演化出DFT

实际上，对**DTFT**而言，其频域变换结果是以**2π**为周期的连续周期函数。为此，对时限信号在频域内以 $\frac{2\pi}{N}$ 为间隔对**DFTF**的变换结果进行频域取样，有：

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\qquad k=0,\ldots,N-1$$

显然上式在频域内也是离散且有限的，这非常适合于计算机等数字信号处理系统来进行处理。该式实际上给出的是非周期离散序列的离散傅里叶变换 (**DFT- Discrete Fourier Transform**)。

3. 演化出DFS

对周期为 T 的连续信号 $\tilde{x}(t)$而言，其傅里叶级数为:

$$X(jk\Omega)=\frac{1}{T}\int_0^T \tilde{x}(t)e^{-jk\Omega t}dt$$

其中 $\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$，它也是频域中两条相邻谱线的间隔。

若要将周期信号在时域内进行离散化，只需以恰当的采样率进行采样，即可得到对应的周期序列。

对周期为 N 的周期离散序列 $\tilde{x}(n)$ 而言，时域积分演变为离散求和，因此有

$$\tilde{X}(jk\Omega)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-jk\Omega n}$$

上式即离散傅里叶级数（**DFS- Discrete Fourier Series**）。

5.1连续变换到离散变换的演化

若离散周期序列 $\tilde{x}(n)$的一个周期取出来，记作 $x(n)$ 并且将DFS变换结果中的一个周期取出来，记作 $X(jk\Omega)$ 则有：

$$X(jk\Omega)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega n},\quad k=0\ldots N-1$$

上式本质上与离散傅里叶变换（DFT）相同。由此可见，离散傅里叶变换(DFT)可以从DTFT延伸而来，也可以认为是从DFS演变得到。

需要说明的是，在常见的信号处理应用中，离散傅里叶变换占据主导地位。