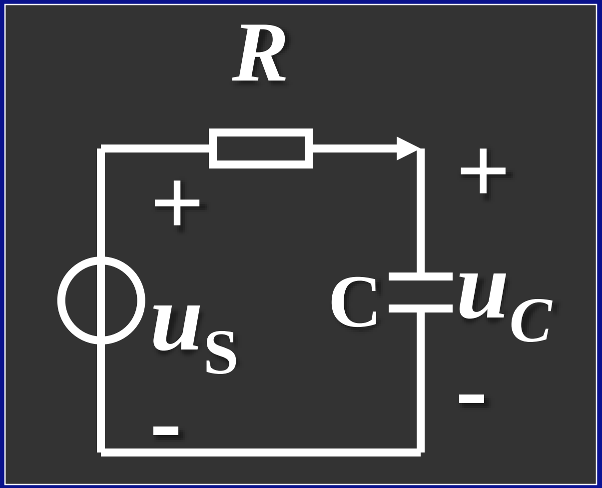
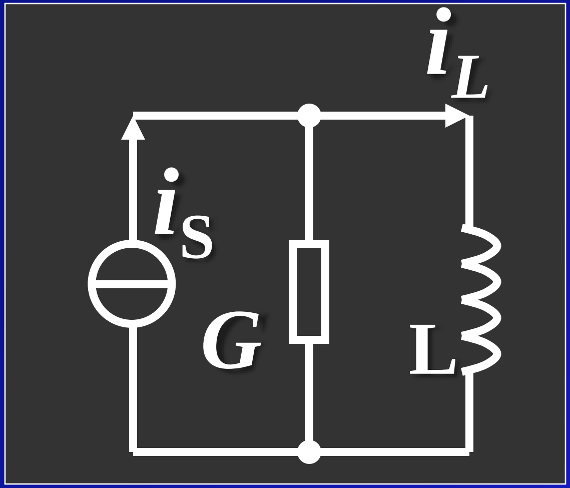
一阶电路的三要素法



$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=u_S \quad (t\geq 0) \\ u_C(0^+)=U_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} GL\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t)=i_S \quad (t\geq 0) \\ i_L(0^+)=I_0 \end{cases}$$

在线性非时变一阶电路中，若用$r(t)$来表示换路后的任一响应，则该响应与激励间的微分方程可表示为统一形式：

$$\begin{cases} \tau \dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + r(t) = w(t) \qquad (t > 0) \\ r(0^+) \end{cases}$$

响应的完全解为 $r(t) = r_{\mathrm{h}}(t) + r_{\mathrm{p}}(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + r_p(t)$

t=0⁺代入，得： $A = r(0^+) - r_p(0^+)$

➢一阶电路任意激励下任一全响应为:

$$r(t)=r_p(t)+[r(0^+)-r_p(0^+)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},t>0$$

（P150式6-55）

➢ 直流激励的情况下，$t\to\infty$时，$r_h(t)\to 0$；$r_p(t)$为常数即响应的稳态值，则有：

$$r_p(t)=r(\infty)=r_p(0^+)$$

三要素公式

恒定激励下一阶电路的任一全响应为：

$$r(t)=r(\infty)+[r(0^+)-r(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau},\ t>0$$

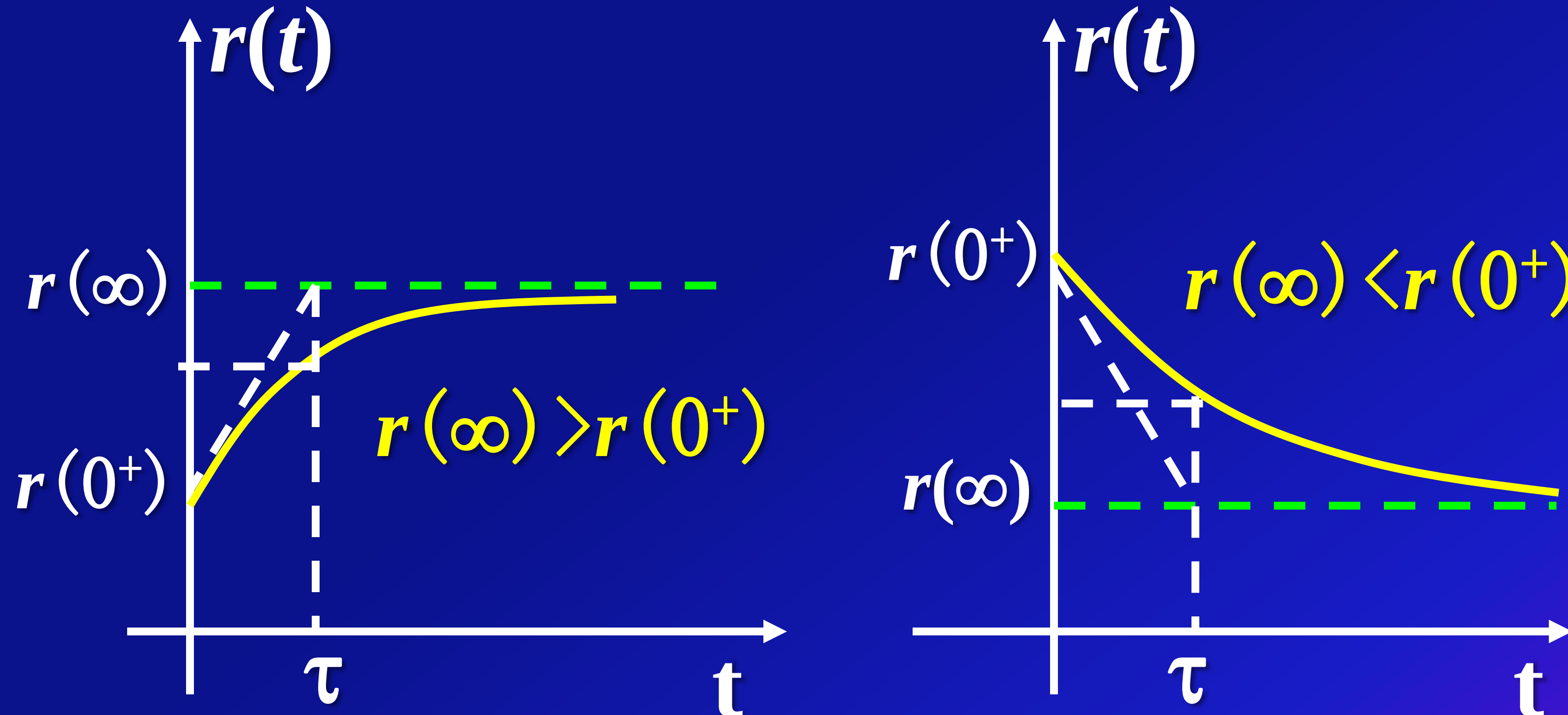
（P150式6-56）

① $r(0^+)$：响应的初始值

② $r(\infty)$：响应的终值（稳态值）

③ τ：时间常数, $\tau=RC$或$\tau=L/R$

三要素公式的全响应波形曲线



直流激励下一阶电路中任一响应总是从初始值 $r(0^+)$ 开始，以指数规律增长或衰减到稳态值$r(\infty)$，响应的快慢取决于时间常数τ。

注意：

（1）三要素法只适用于一阶电路；第一种形式（P150式6-55）的激励可以是常数、正弦函数、单位阶跃函数、指数函数、冲激函数等，但第二种形式（P150式6-56）只适用于直流激励；

（2）适用于一阶电路任一电压或电流的全响应；

（3）适用于求零输入响应和零状态响应。

三要素法求直流激励下响应的步骤：

1. 计算初始值$r(0^+)$(换路前电路已稳定)：

(1) 画t=0^-图，求初始状态$u_C(0^-)$或$i_L(0^-)$；

(2) 由换路定则，确定$u_C(0^+)$和$i_L(0^+)$；

(3) 画t=0+图，求响应初始值$r(0^+)$：用数值为$u_C(0^+)$的电压源替代电容或用$i_L(0^+)$的电流源替代电感，得直流电阻电路再计算$r(0^+)$；

2. 计算稳态值$r(\infty)$（画t=∞图）

根据t>0电路达到新的稳态，将电容用开路或电感用短路代替，得一个直流电阻电路，再对该稳态图进行直流稳态分析确定稳态值$r(\infty)$。

3. 计算时间常数τ（换路后令所有独立电源置0后的电路图）

先计算与动态元件连接的电阻单口网络的输出电阻R_o，然后用$\tau=R_oC$或$\tau=L/R_o$计算时间常数。

4. 将$r(0^+)$, $r(\infty)$和 τ 代入三要素公式得到恒定激励下的全响应的一般表达式：

$$r(t)=r(\infty)+[r(0^+)-r(\infty)]e^{-t/\tau},\quad t>0$$

注意： 三要素公式可以计算全响应、零输入响应分量和零状态响应分量。

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0^+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=u_C(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}+u_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$=\underbrace{U_0e^{-\frac{t}{\tau}}}_{u_{czi}(t)}+\underbrace{U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}_{u_{czs}(t)}$$

但千万不要认为能推广到一般得出结论：即所有的响应都满足：

$$r_{zi}(t)=r(0^{+})e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

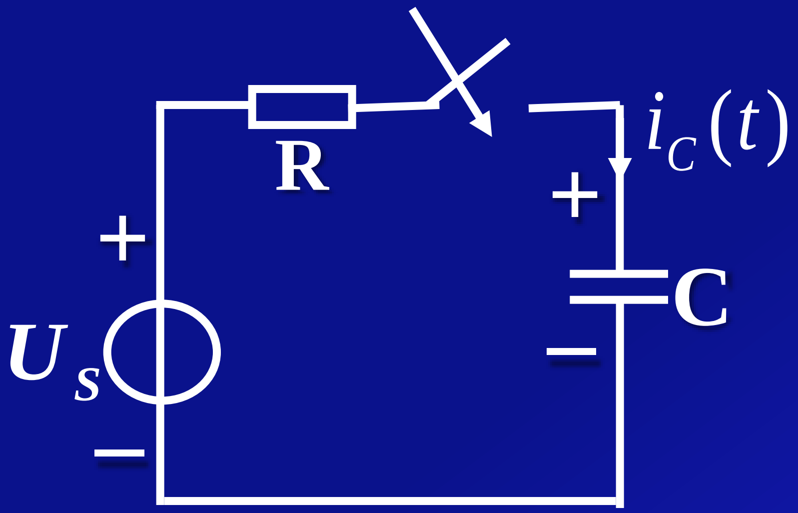
$$r_{zs}(t)=r(\infty)(1-e^{-\frac{1}{\tau}t})$$

应该是：

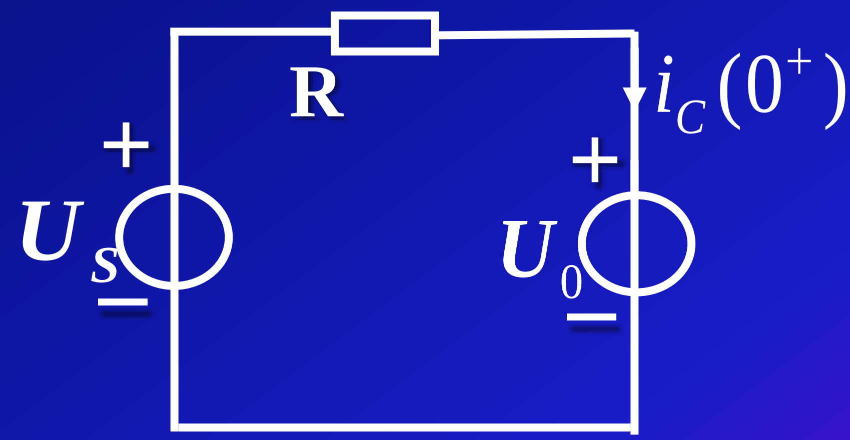
$$r_{zi}(t)=r_{zi}(0^{+})e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

$$r_{zs}(t)=r(\infty)+[r_{zs}(0^{+})-r(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

如：已知 $u_C(0^-)=U_0$ ，求全响应 $i_C(t)$ ：



t=0⁺图



$$r(0^+)=i_C(0^+)=i_{Czi}(0^+)+i_{Czs}(0^+)=\frac{U_S-U_0}{R}$$

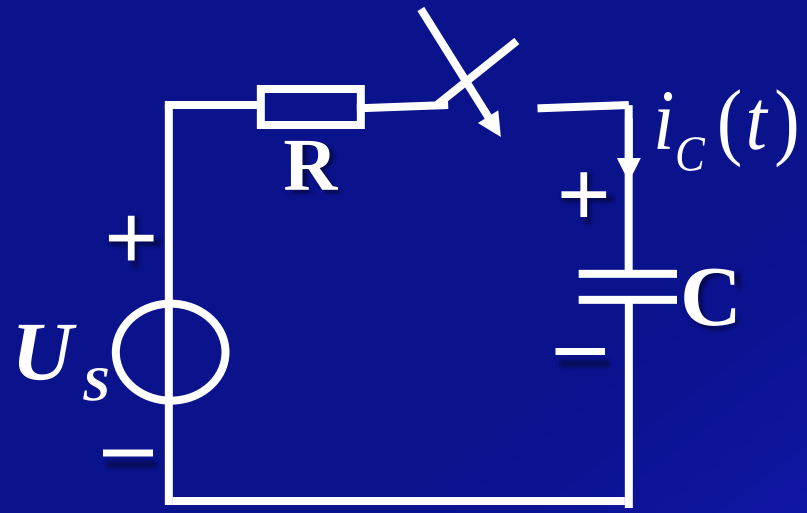
内激励引起

$=-U_0/R$

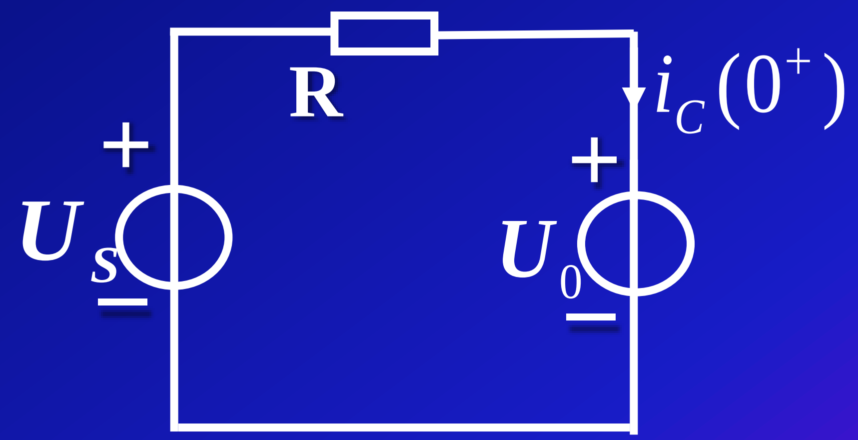
外激励引起

$=U_S/R$

如：已知 $u_C(0^-)=U_0$ ， 求全响应 $i_C(t)$ ：

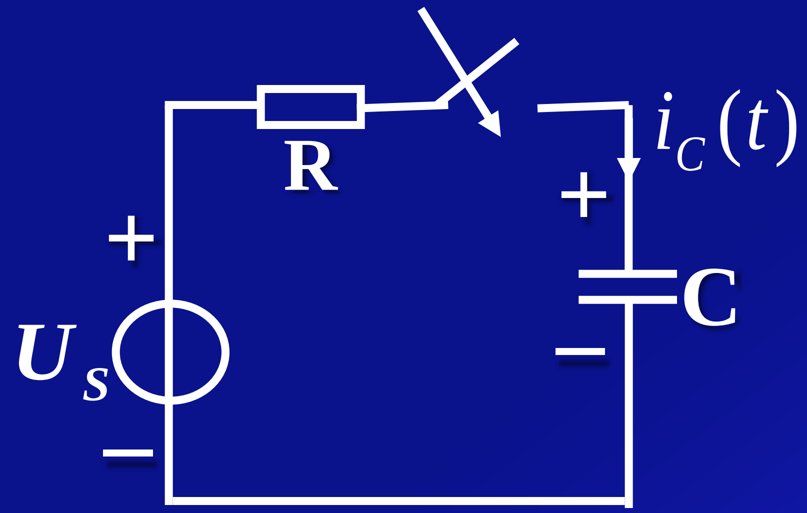


t=0⁺图

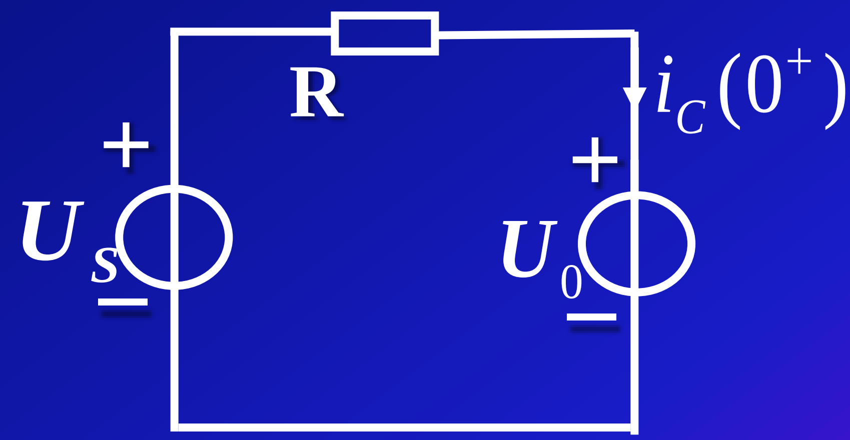


$$i_{Czi}(t)=i_{Czi}(0^+)e^{-\frac{1}{\tau}t}=-\frac{U_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

如：已知 $u_C(0^-)=U_0$ ， 求全响应$i_C(t)$：



t=0⁺图



$$i_{Czs}(t)=i_{Czs}(\infty)+[i_{Czs}(0^+)-i_{Czs}(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

$$=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

从另一个角度说：

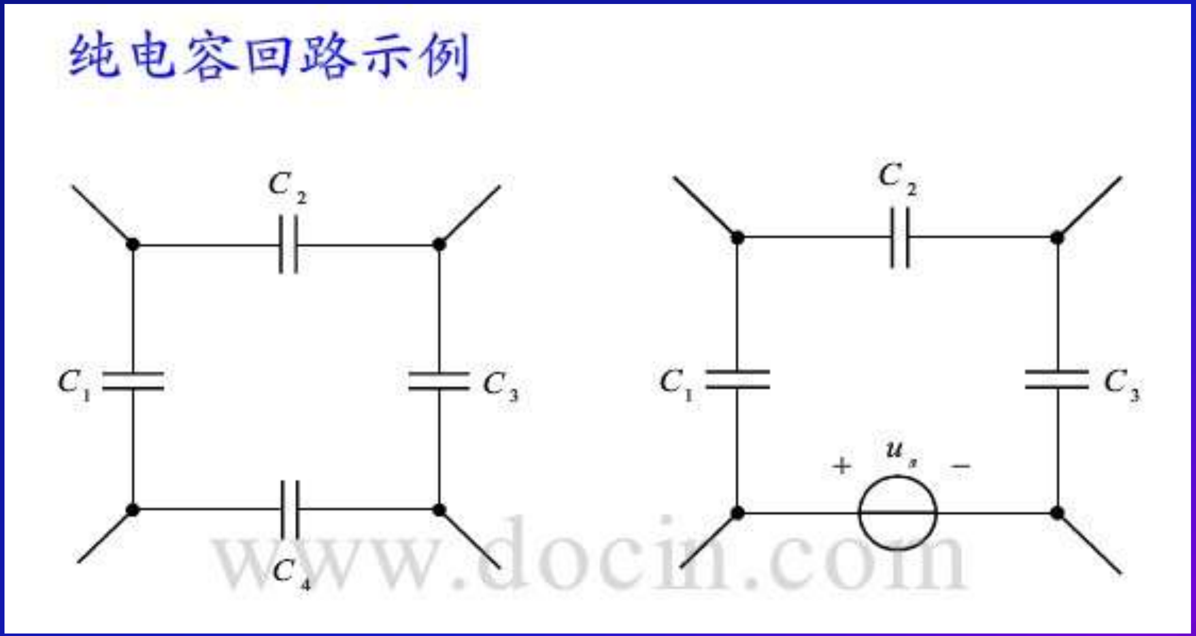
对电容电压和电感电流，只要知道全响应表达式，就可以把它分成零输入响应(分量)和零状态响应(分量）。

而对其他响应，在仅知道全响应的表达式时，无法将零输入响应(分量)和零状态响应(分量）分开。非要知道电路，画出零输入的 0^+图或零状态的 0^+图，求出零输入响应或零状态响应来才行。

说明（P177小结3）：

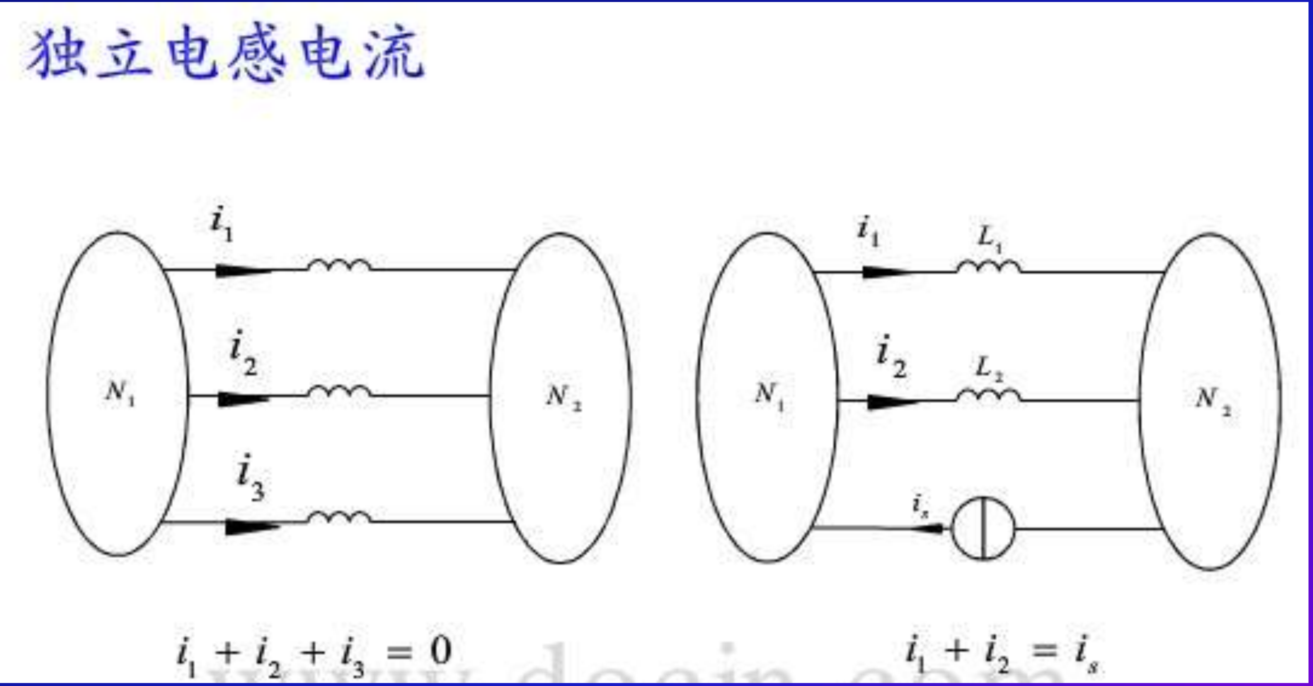
1、全电容回路：仅由电压源和电容组成的回路。

由于该回路必须满足KVL，所以电压的任何变化都无法由其他元件承担，只能由电压跳变来承担。

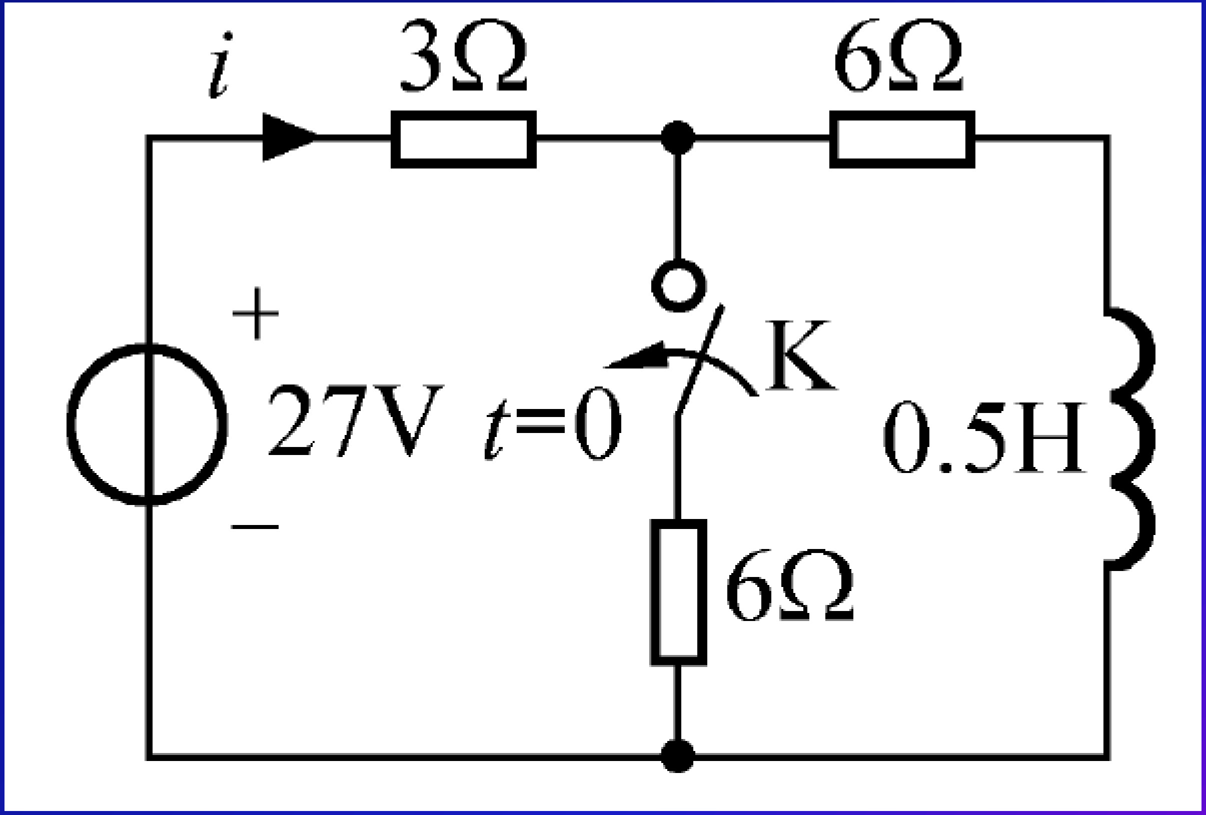


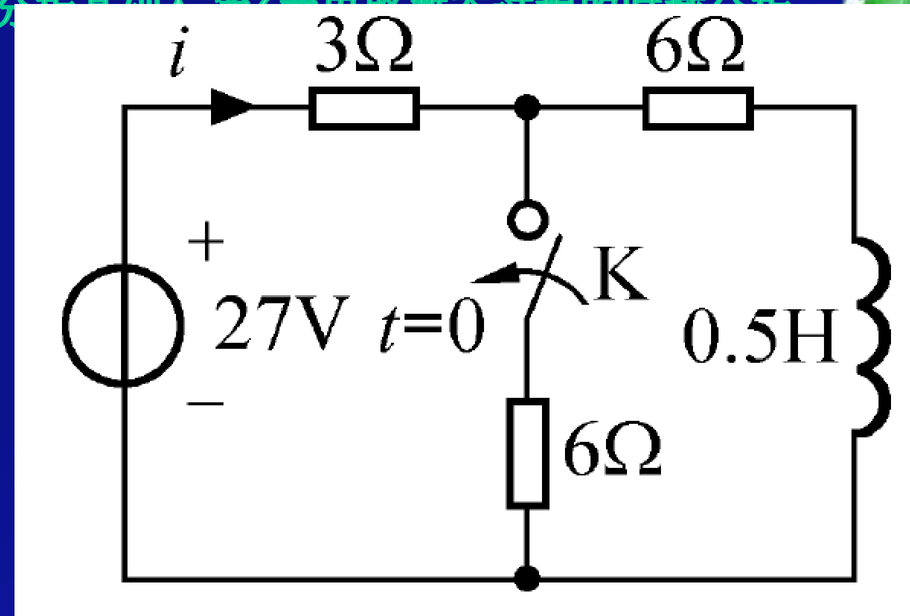
2、全电感割集：仅由电流源和电感组成的一组支路。

由于该割集必须满足KCL，所以电流的任何变化都无法由其他元件承担，只能由电流跳变来承担。



例17（P150例6-8）电路原处于稳定状态 t=0时开关K闭合，求t>0的和$i(t)$，并画波形图。





解：

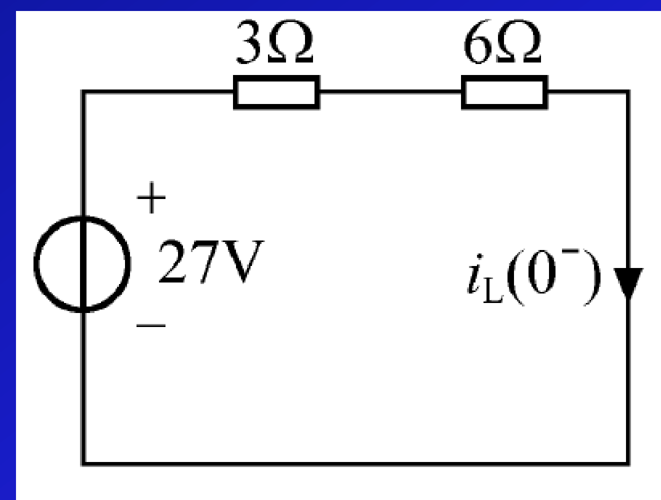
①计算初始值$i(0^+)$：

$$i_L(0^-)=27/(6+3)$$

$$=3A$$

换路定则：

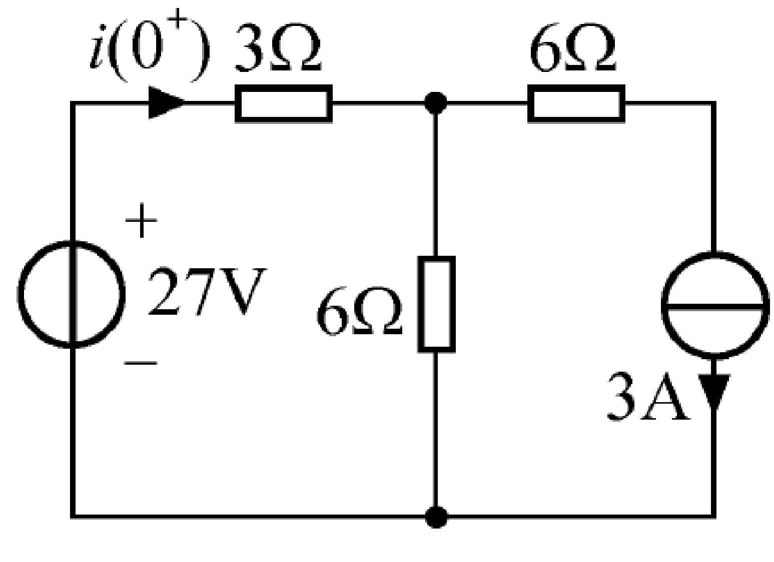
$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=3A$$



(b) $t=0^-$等效电路

画0^+图：

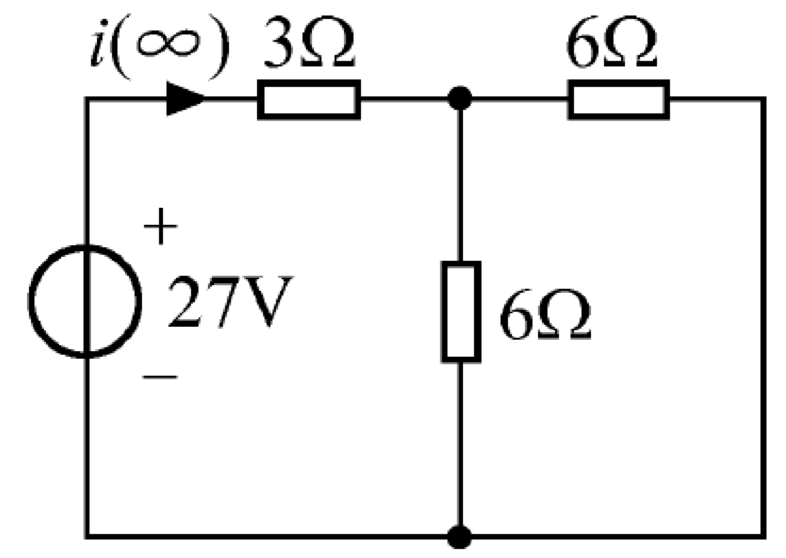
$$
\begin{aligned}
i(0^+) &= i(0^+)' + i(0^+)'' \\
&= 27/(3+6) \\
&\quad + 3\times 6/(3+6) \\
&= 5A
\end{aligned}
$$



(c) $t=0^+$等效电路

②计算稳态值$i(\infty)$

换路后一段时间，重新达到稳定，电感短路，终值图如右：

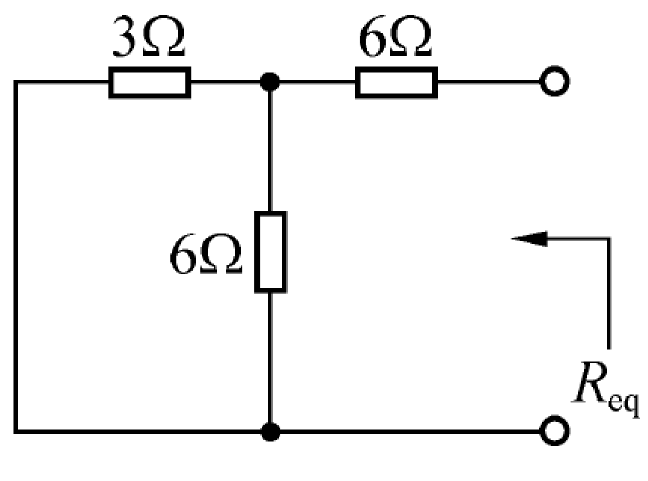


(d) $t\rightarrow\infty$等效电路

$$i(\infty)=\frac{27}{3+6\,\|\,6}=4.5\text{A}$$

③计算时间常数τ

计算从电感两端看进去的独立电源全部置0后的**电阻单口网络的输出电阻**：



(e) R_{eq}的求取

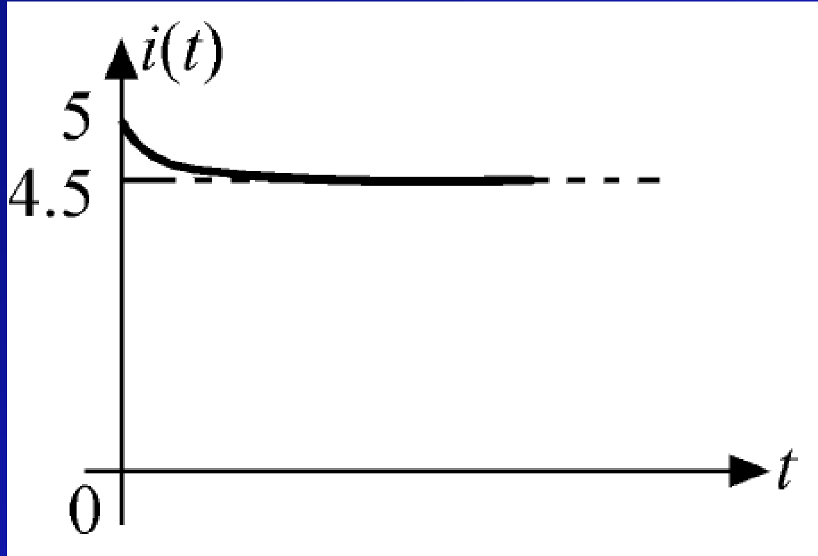
$$R_o = 3//6 + 6 = 8\Omega$$

$$\therefore \tau = L / R_o = 0.5/8 = \frac{1}{16}\text{s}$$

④代入三要素公式，得到响应表达式：

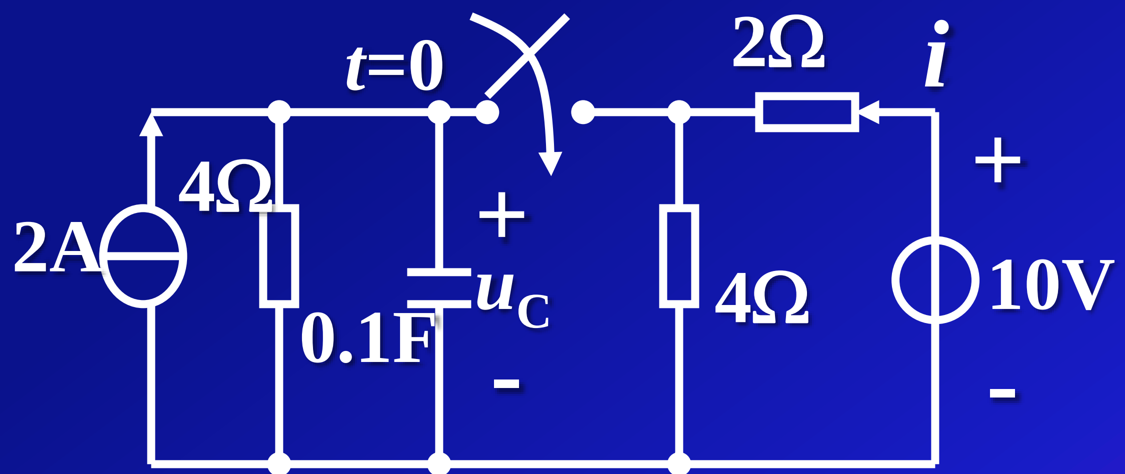
$$i(t) = 4.5 + (5 - 4.5)\mathrm{e}^{-16t} = 4.5 + 0.5\mathrm{e}^{-16t}\,\mathrm{A} \quad (t > 0)$$

响应过程——波形：

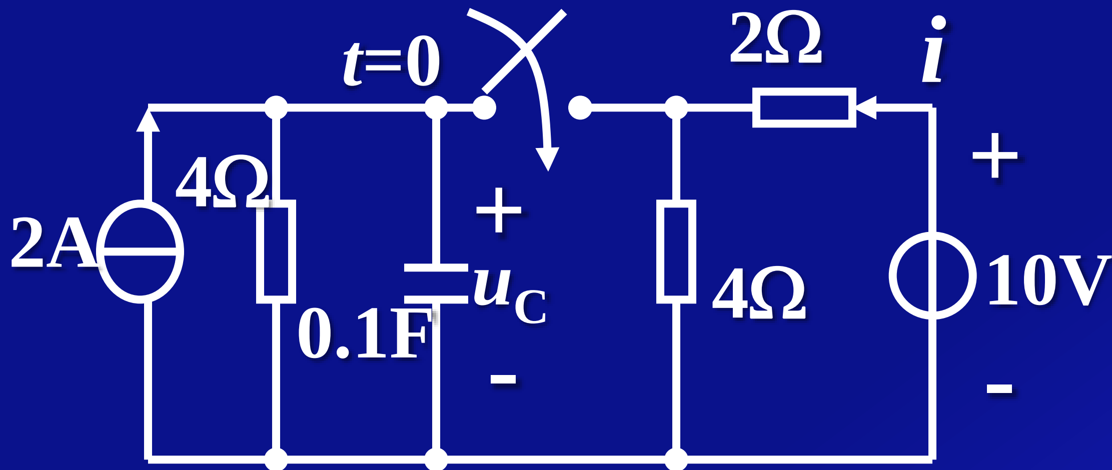


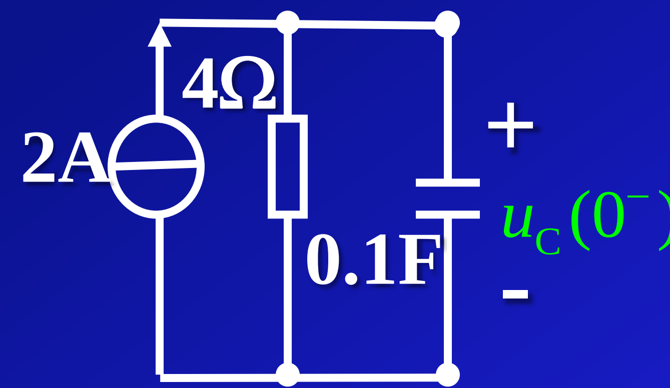
（f）$i(t)$波形

例18 电路原处于稳定状态。求$t \geq 0$的$u_C(t)$和$i(t)$，并画波形图。



t=0⁻图





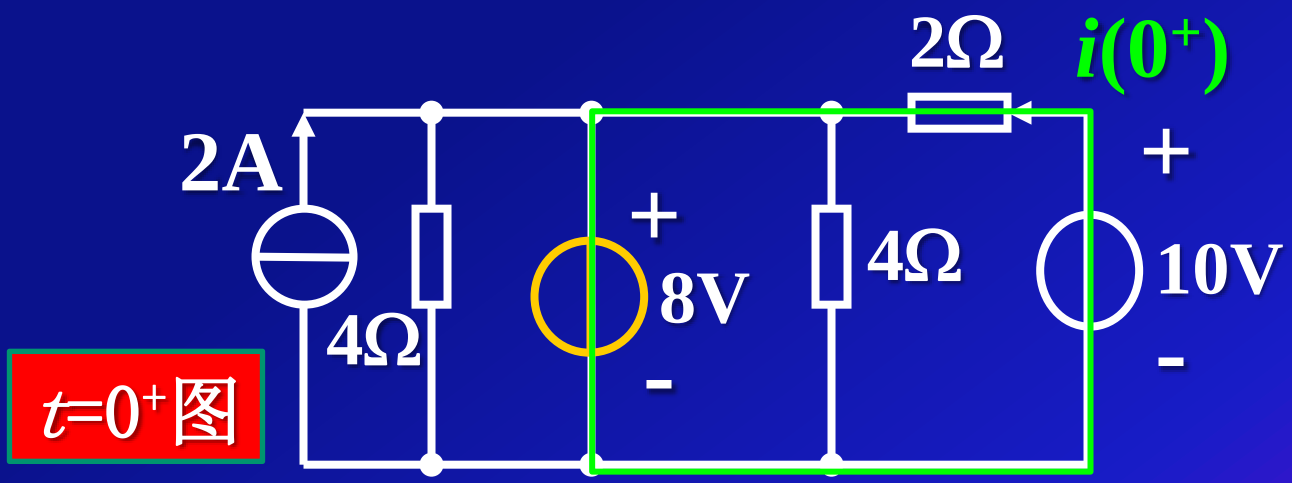
解：1、计算初始值$u_C(0^+)$、$i(0^+)$：

先确定$u_C(0^-)$：开关闭合前，电路已稳定，电容相当于开路，则：

$$u_C(0^-) = 4 \times 2 = 8\text{V}$$

由于开关转换时，电容电流有界，电容电压不能跃变，故

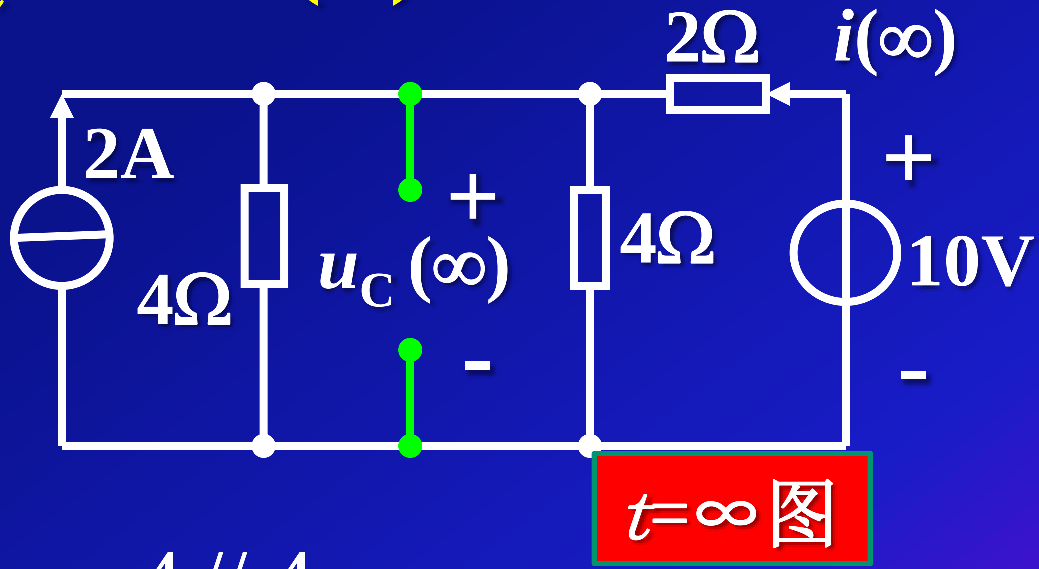
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 8\text{V}$$



$$i(0^+) = \frac{10 - u_C(0^+)}{2} = \frac{10-8}{2} = 1\text{A}$$

2、计算稳态值$u_C(\infty)$、$i(\infty)$

换路后一段时间，重新达到稳定，即电容开路。

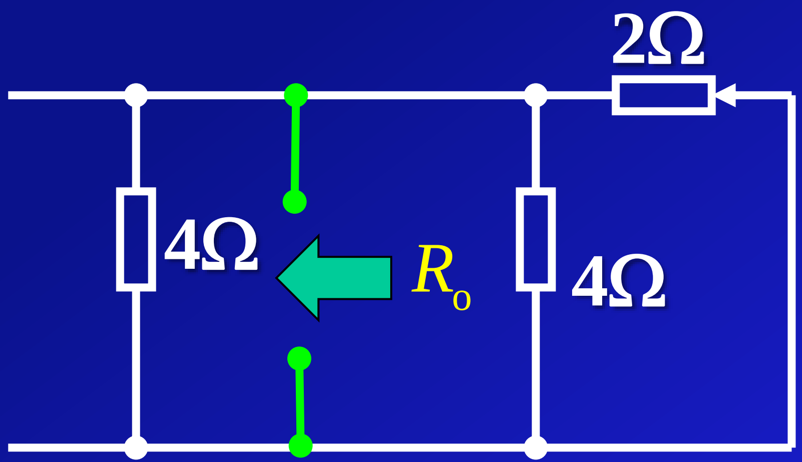


$$u_C(\infty)=(4\,//\,4\,//\,2)\times2+\frac{4\,//\,4}{2+4\,//\,4}\times10=2+5=7\text{V}$$

$$i(\infty)=\frac{10-u_C(\infty)}{2}=\frac{10-7}{2}=1.5\text{A}$$

3、计算时间常数τ

计算从电容两端看进去的独立电源全部置0后的电阻单口网络的输出电阻：



$$R_o = 4 // 4 // 2 = 1\Omega$$

$$\therefore \tau = R_o C = 1 \times 0.1 = 0.1\text{s}$$

$$u_C(0^+)=8\text{V} \qquad i(0^+)=1\text{A}$$

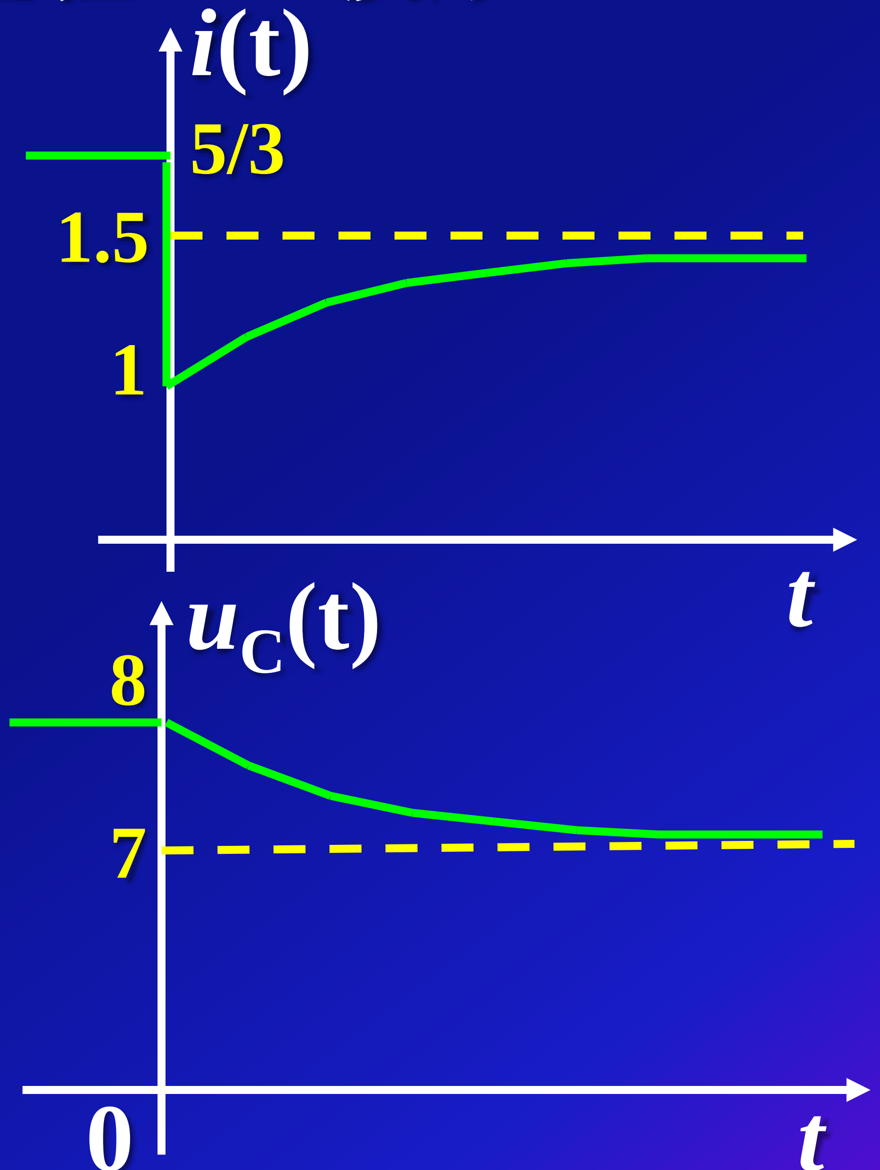
$$u_C(\infty)=7\text{V} \qquad i(\infty)=1.5\text{A}$$

4、将初始值、终值及时间常数代入三要素公式，得到响应表达式：

$$u_C(t)=7+(8-7)\text{e}^{-10t}=7+\text{e}^{-10t}\text{V} \quad (t>0)$$

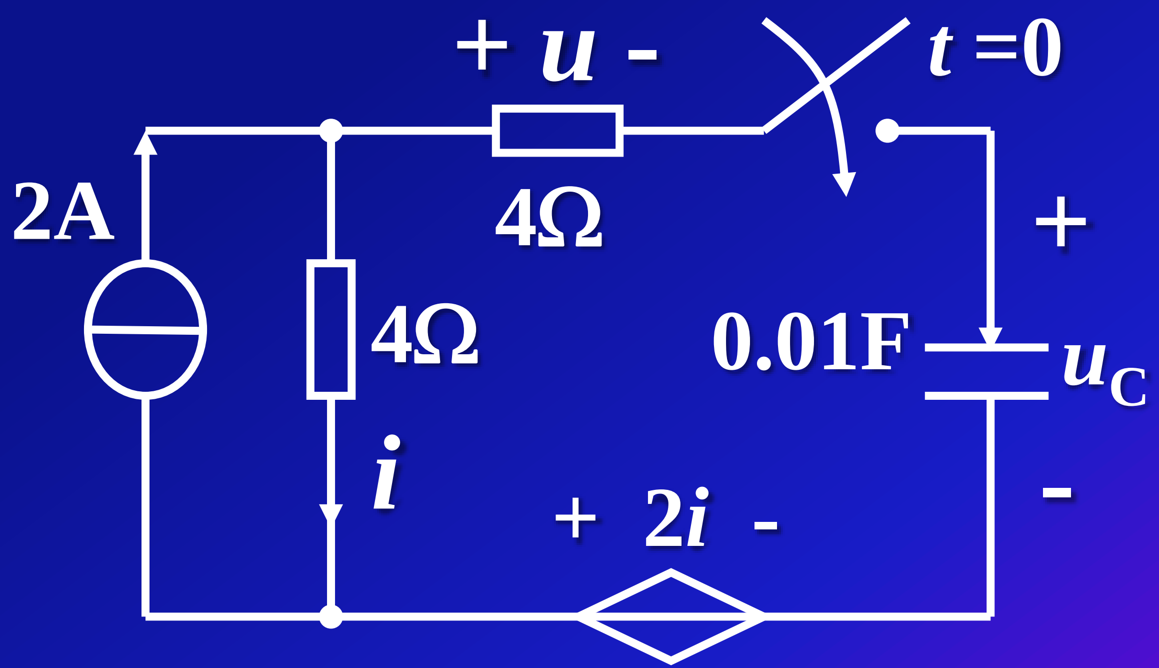
$$i(t)=1.5+(1-1.5)\text{e}^{-10t}=1.5-0.5\text{e}^{-10t}\text{A}\ (t>0)$$

响应过程——波形：

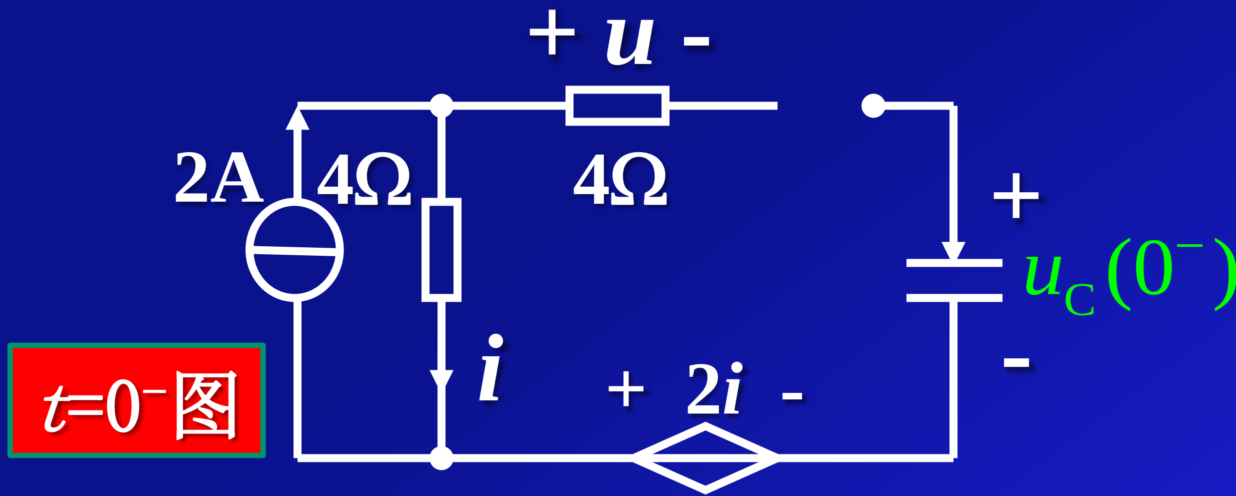


例19（P151例6–9） 求$u(t)$和$i(t)$。

已知：$u_C(0^-)=0$



解：1、计算初始值$u(0^+)$、$i(0^+)$

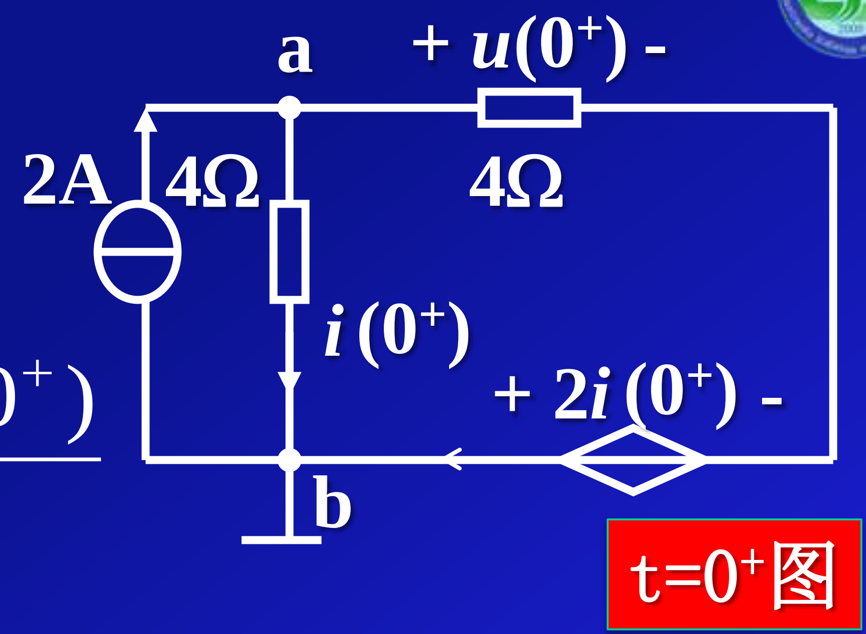


零状态电路，由换路定则得：

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

画0^+图：

列节点方程：



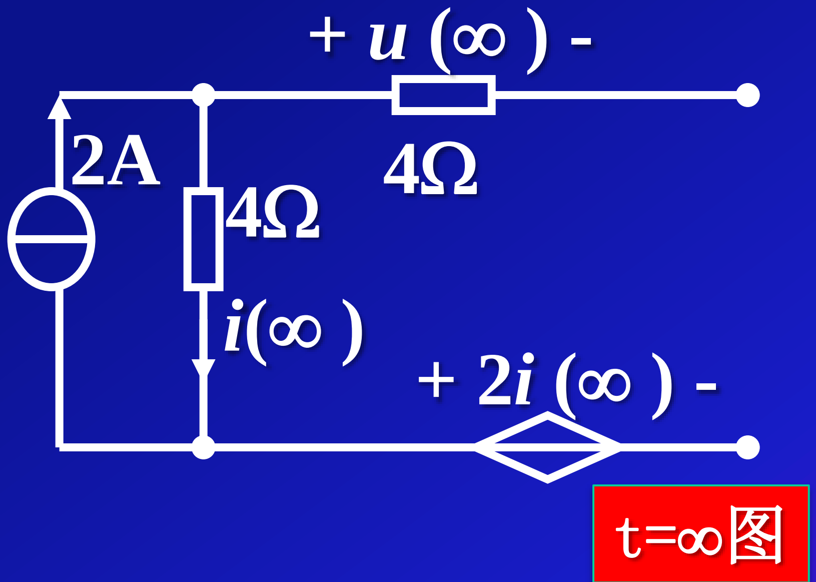
$$\begin{cases} u_{ab}(0^+)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=2-\frac{2i(0^+)}{4} \\ 4i(0^+)=u_{ab}(0^+) \end{cases}$$

解得： $i(0^+)=0.8\text{A}$ $u_{ab}(0^+)=3.2\text{V}$

则： $u(0^+)=(2-0.8)\times 4=4.8\text{V}$

2、计算稳态值$u(\infty)$、$i(\infty)$

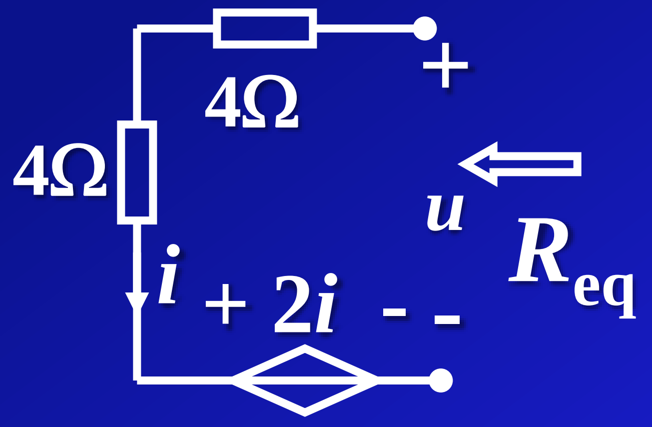
$t \to \infty$，电路重新达到稳定，电容开路，终值图如右，得：



$$u(\infty) = 0 \qquad i(\infty) = 2\text{A}$$

3、计算时间常数τ

电容相连接的电阻网络如右图，用加压求流法得：



$$u = 4i + 4i + 2i$$

$$R_{eq} = 10\Omega$$

时间常数为： $\tau = R_{eq}C = 0.1s$

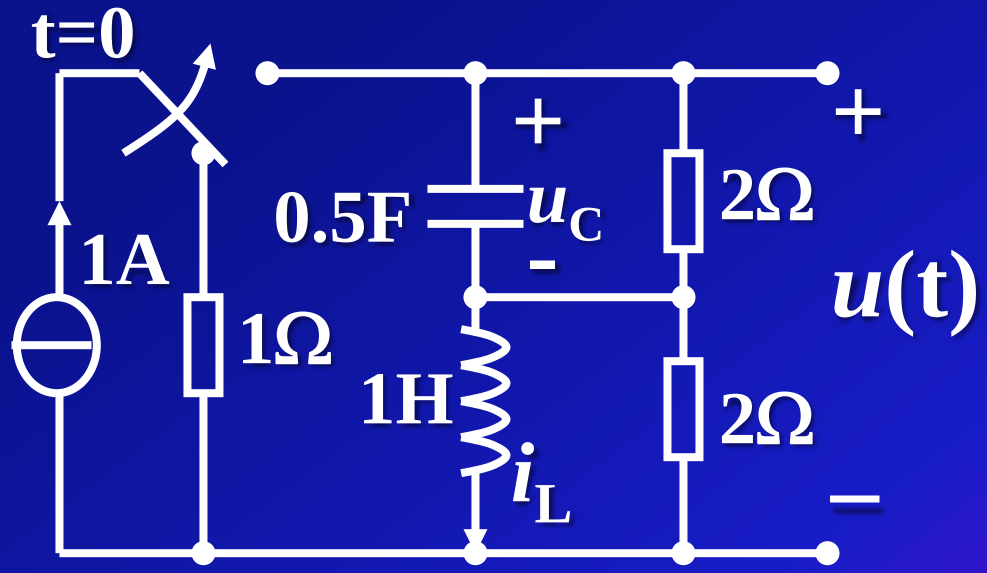
4、代入三要素公式：

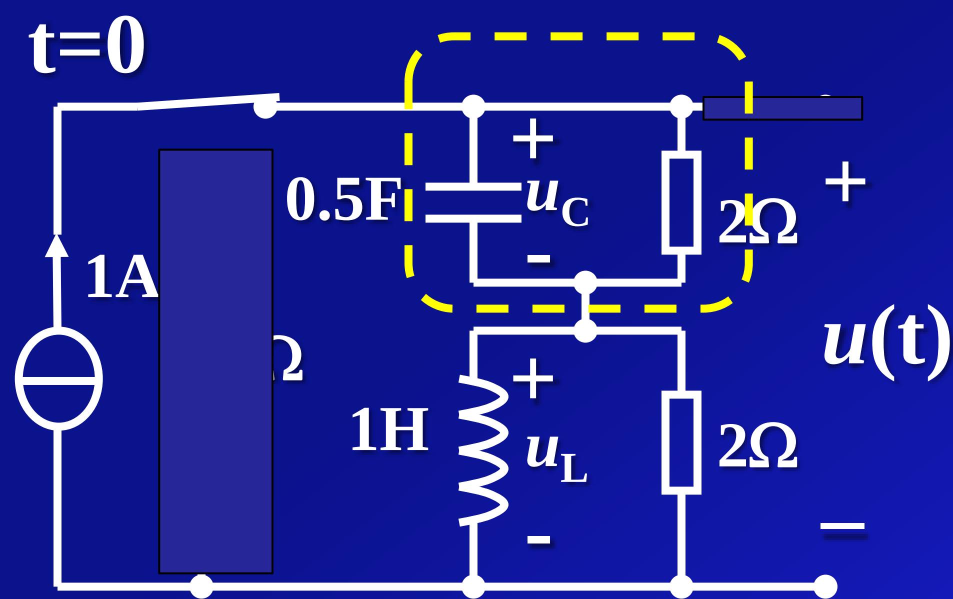
$$u(t) = 4.8e^{-10t}\text{V} \qquad (t > 0)$$

$$i(t) = 2 + (0.8 - 2)\mathrm{e}^{-10t} = 2 - 1.2\mathrm{e}^{-10t}\text{A} \quad (t > 0)$$

例20（P152例5-10） 求$u(t)$。

已知 $u_C(0^-)=1V, i_L(0^-)=2A$

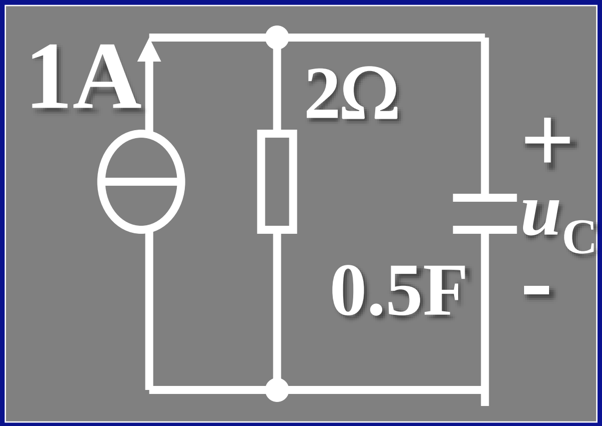


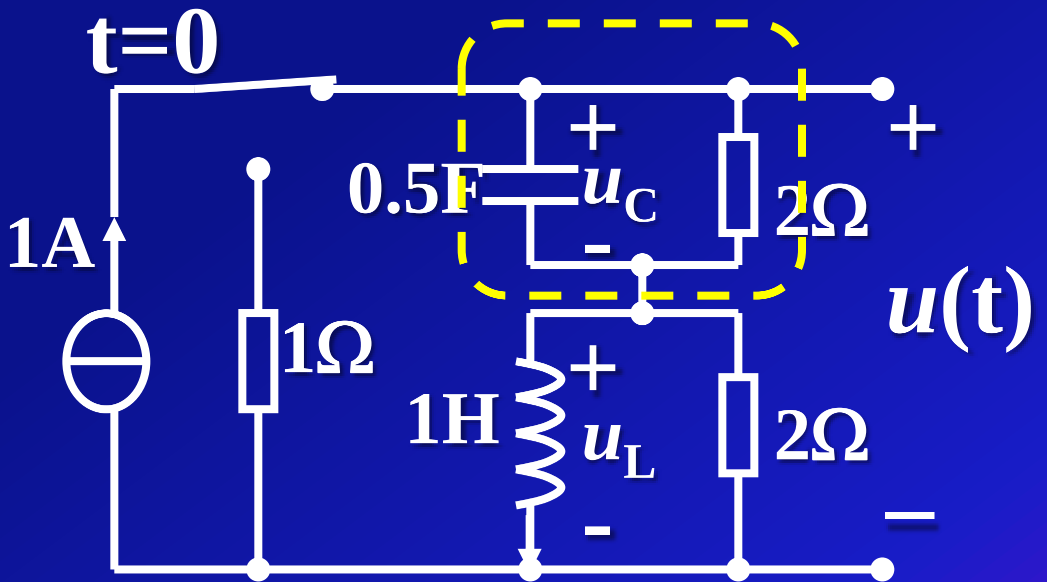


解：非一阶电路，但电路换路后可分成两部分分别求响应，然后叠加，即：

$$u(t)=u_C(t)+u_L(t)$$

RC部分：



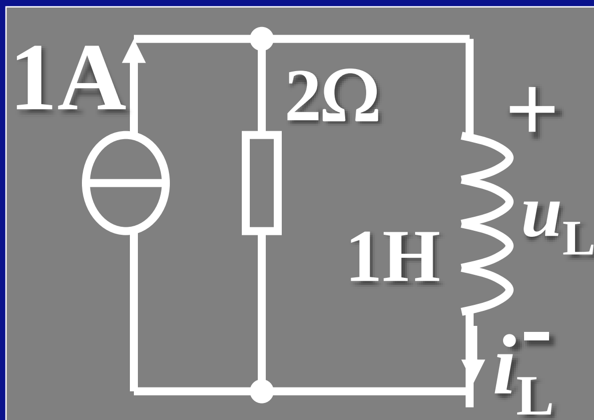


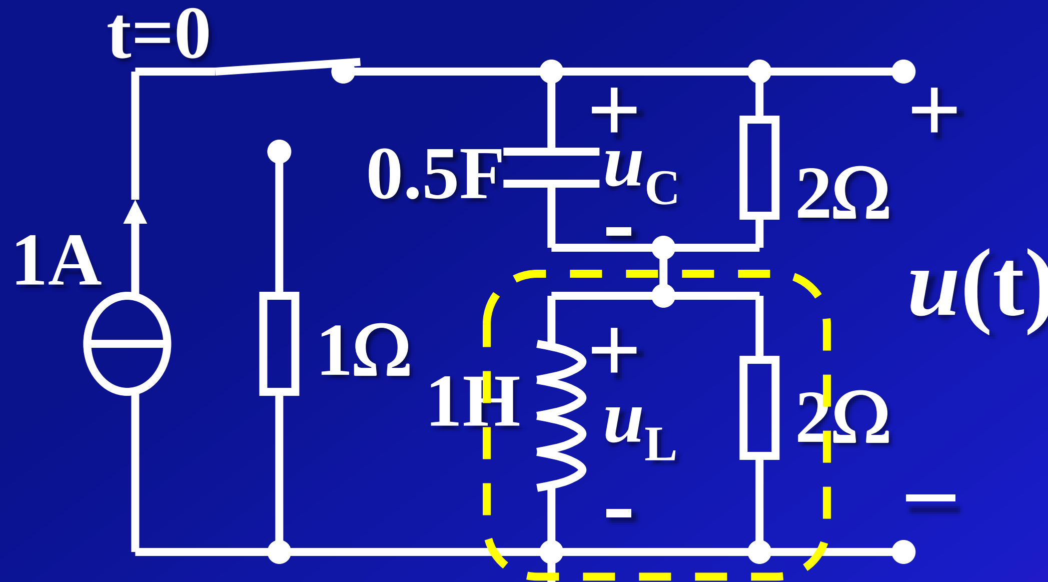
$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=1\,\mathrm{V} \qquad u_C(\infty)=2\,\mathrm{V}$$

$$R_0=2\Omega \qquad \therefore \tau_C=RC=1\mathrm{s}$$

故有： $u_C(t)=2-\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{V} \quad t\ge 0$

RL部分：





$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2\text{A}$ 故：

$u_L(0^+) = -2\,\text{V}$

$u_L(\infty) = 0$

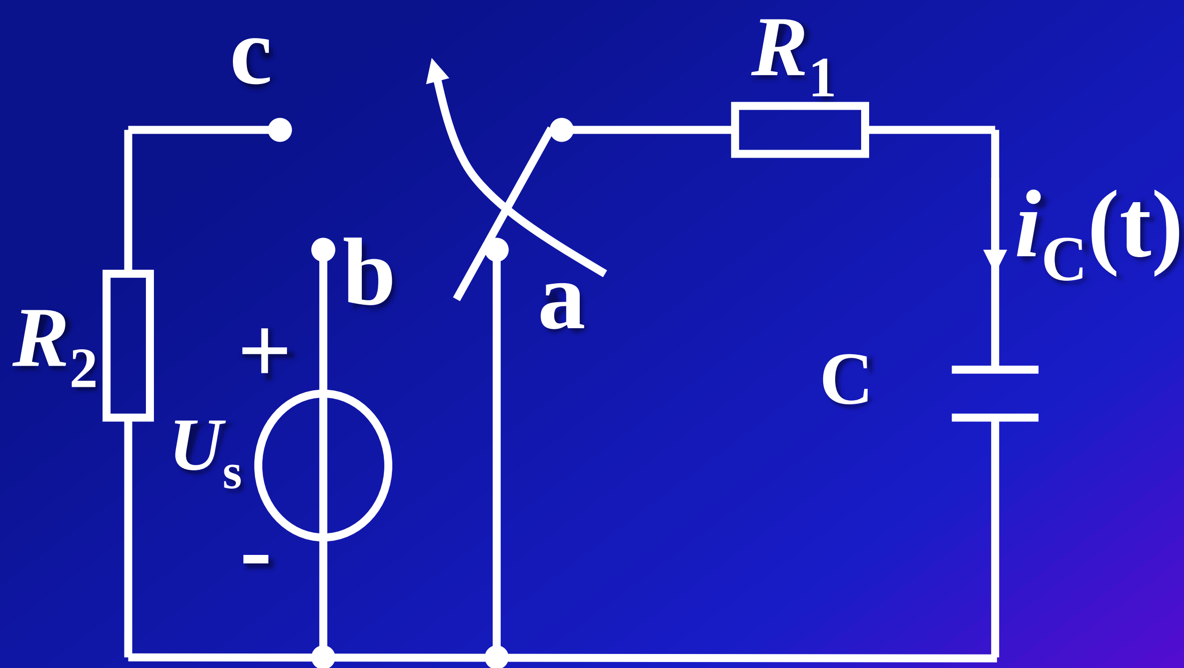
$\tau_L = L/R = \dfrac{1}{2}\text{s}$

$u_L(t) = -2\text{e}^{-2t}\ \text{V} \quad t > 0$

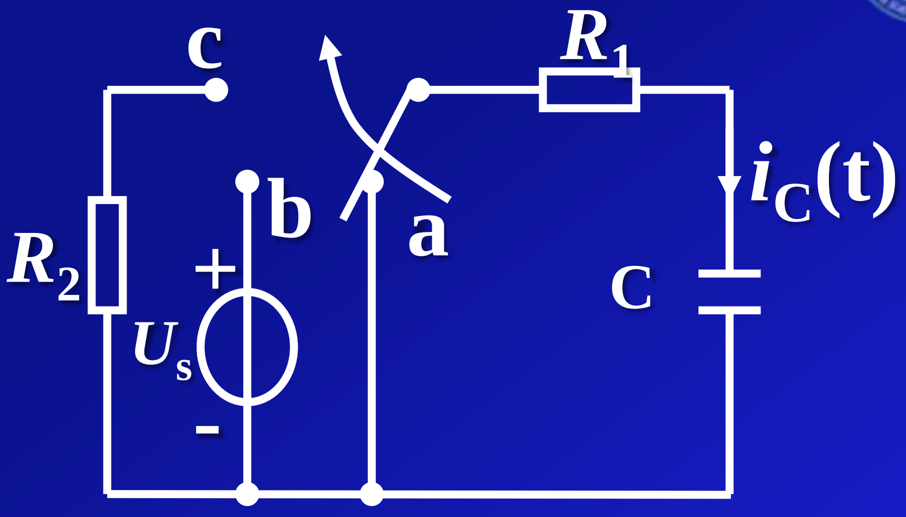
$$u(t) = u_C(t) + u_L(t)$$

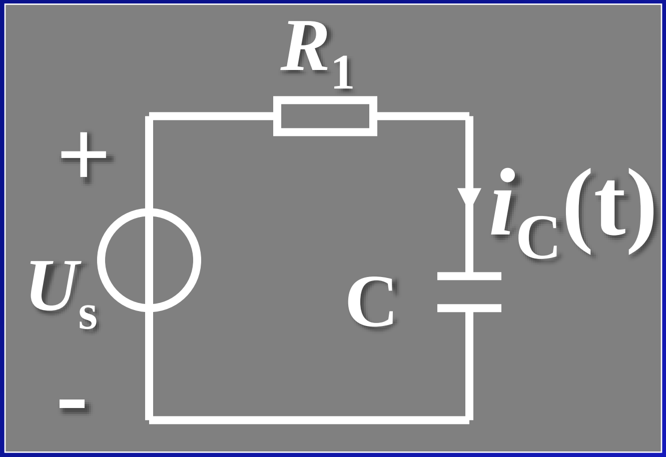
$$= 2 - \text{e}^{-t} - 2\text{e}^{-2t}\ \text{V} \quad t > 0$$

例21（P153例5-11）开关在a时电路已稳定。t=0倒向b, $t=R_1C$倒向c，求$t\geq0$的$i_C(t)$并画波形。



解： $t<0$ 时，$u_C(0^-)=0$。第一次换路由换路定则得：





$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$$

$$u_C(\infty)=U_S$$

$$\tau_1=R_1C$$

得到电容电压的零状态响应：

$$u_C(t)=U_S(1-e^{-\frac{t}{R_1C}})\quad 0<t<R_1C$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=\frac{U_S}{R_1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_1C}}\mathrm{A}\quad 0<t<R_1C$$

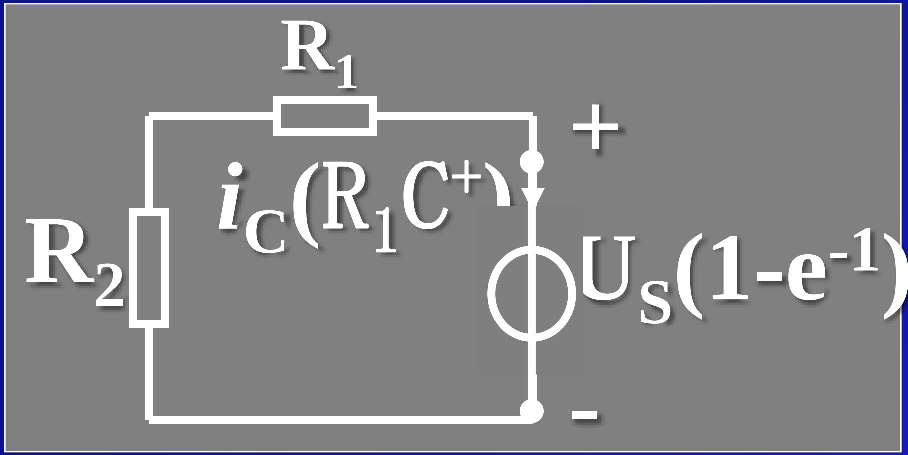
$$\boldsymbol{u}_C(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}^-)=\boldsymbol{U}_S(1-\boldsymbol{e}^{-1})$$

另解：也可将电容作为电压源且 $u_C(0^+)=0$ ，代入三要素公式直接写出 $i_C(t)$ 的全响应。

其中：

$$i_C(0^+)=\frac{U_S}{R_1};i_C(\infty)=0$$

$t=R_1C$时，第二次换路，由换路定则得：



$$u_C(R_1C^+)=u_C(R_1C^-)=U_S(1-e^{-1})$$

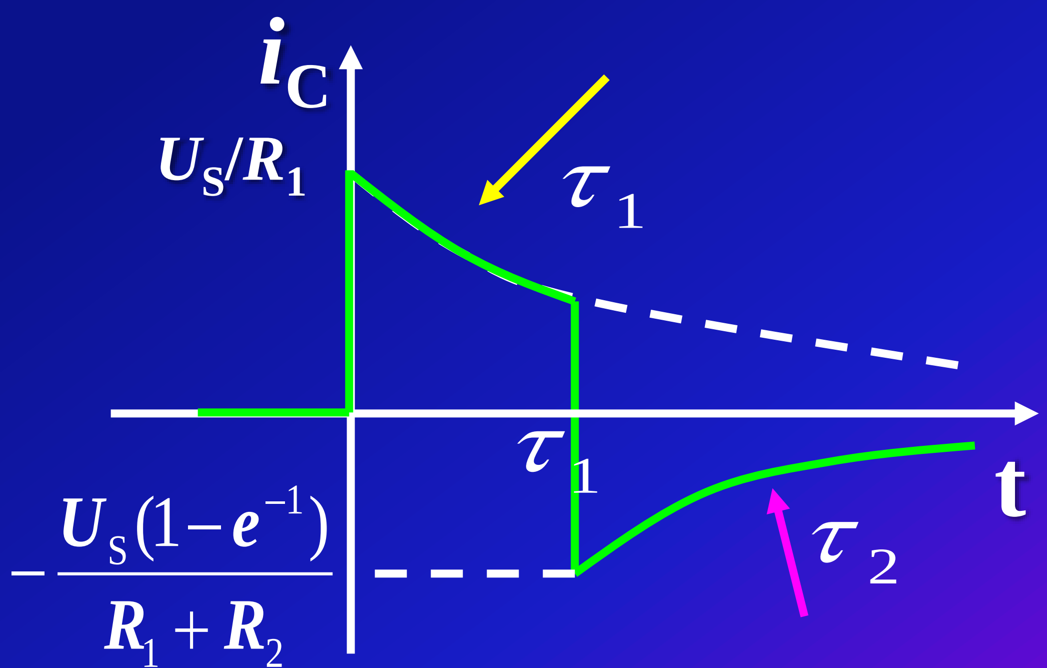
t=RC⁺图

$t=R_1C^+$图：$$i_C(R_1C^+)=-\frac{1}{R_1+R_2}U_S(1-e^{-1})$$

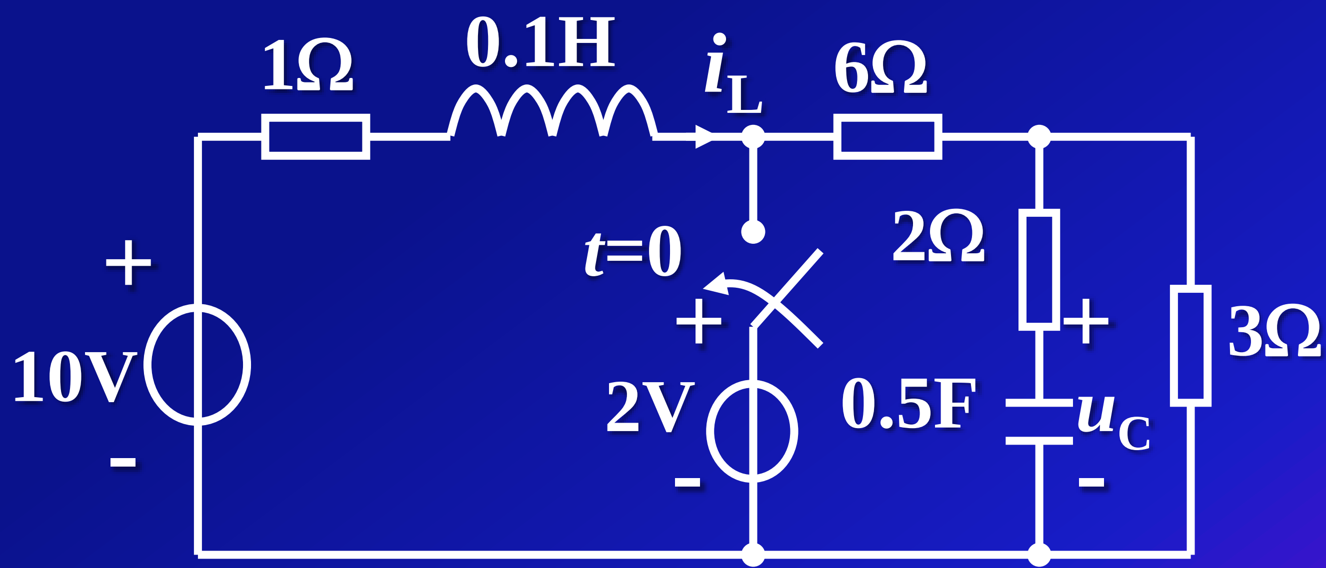
$$i_C(\infty)=0 \qquad \tau_2=(R_1+R_2)C$$

$$i_C(t)=-\frac{U_S(1-e^{-1})}{R_1+R_2}e^{-\frac{t-R_1C}{(R_1+R_2)C}} \qquad t>R_1C$$

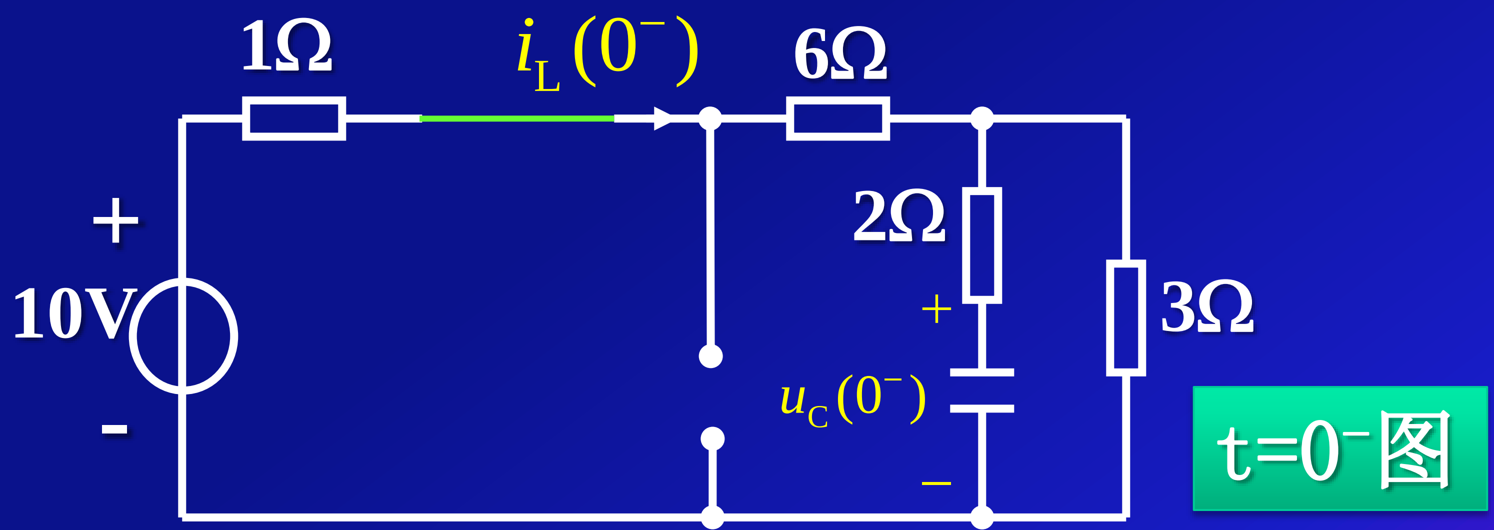
$$i_C(t)=\begin{cases}\dfrac{U_S}{R_1}e^{-\frac{1}{R_1C}t}\ \mathrm{A} & 0<t<R_1C\\[2ex] -\dfrac{U_S(1-e^{-1})}{R_1+R_2}e^{-\frac{t-R_1C}{(R_1+R_2)C}} & t>R_1C\end{cases}$$



例22原电路已稳定。求$t≥0$的$i_L(t)$和$u_C(t)$。



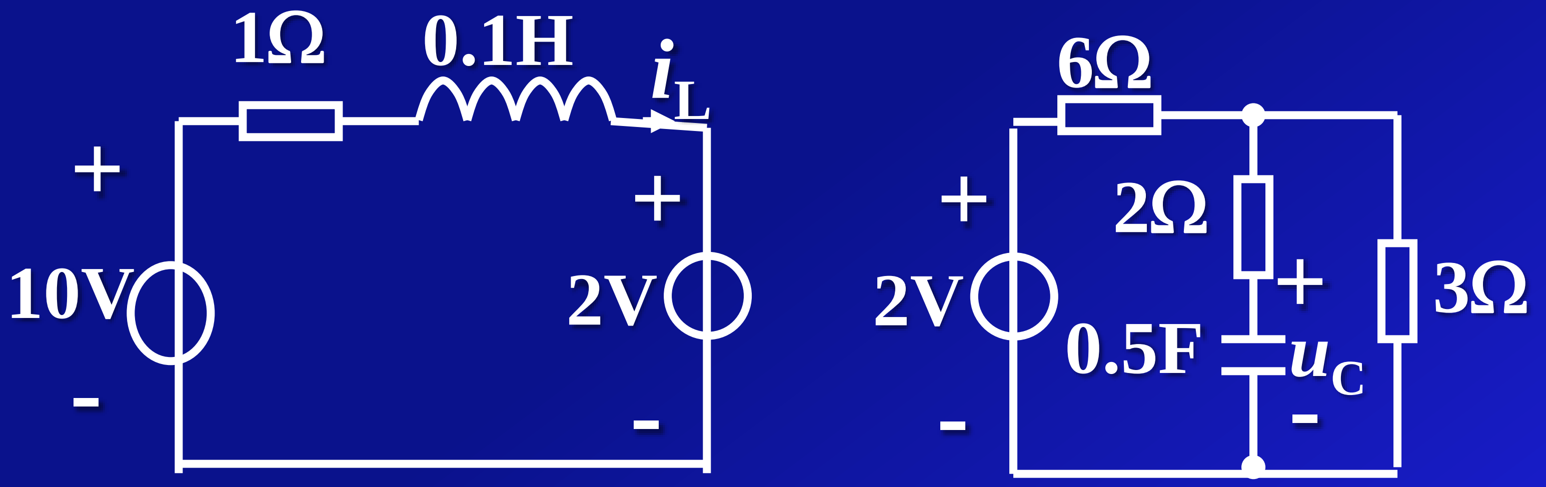
解：求换路前的初始状态：



电感L等效于短路，电容开路则：

$$i_L(0^-)=\frac{10}{1+6+3}=1\text{A};\quad u_C(0^-)=\frac{3}{1+6+3}\times 10=3\text{ V}$$

换路后，电路可分为两部分：



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1A \qquad u_C(0^+) = u_C(0^-) = 3V$$

$$i_L(\infty) = 8\ \text{A} \qquad u_C(\infty) = 2/3\ \text{V}$$

$$\tau_L = L/R = 0.1\,\text{s} \qquad \tau_C = RC$$

$$= (6 // 3 + 2) \times 0.5 = 2\ \text{s}$$

所以

$$i_{\mathrm{L}}(t)=8-7\mathrm{e}^{-10t}\ \mathrm{V}\quad t\geq 0$$

$$u_{\mathrm{C}}(t)=\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-0.5t}\ \mathrm{V}\quad t\geq 0$$