



自动控制原理速成课

课时2 二阶系统与一阶系统的时域分析

考点解析:

★ 系统要求: 稳、准、快

1、稳 (稳态误差)、准 (稳态误差)、快 (^{t_s} 调节时间、 ^{t_p} 上升时间)

(填空、选择题 2-4分)

2、一阶系统时域分析 (填空、选择题 2-4分)

★ 3、二阶系统的时域分析 (填空、选择、大题 (4-10分))

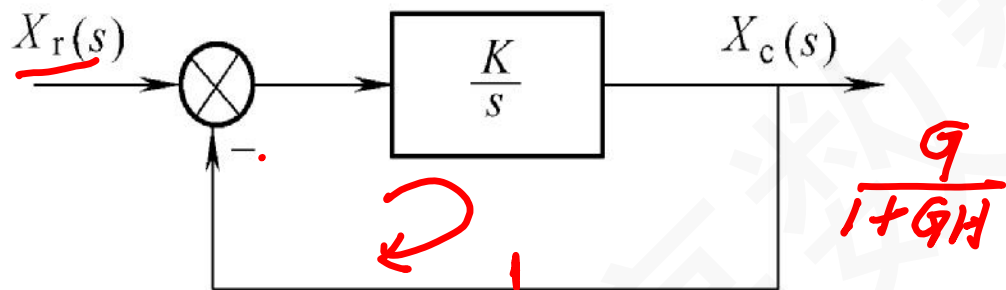
★ 这节课的公式需要强加背诵



视频讲解更清晰
仅5小时

课时2 二阶系统与一阶系统的时域分析

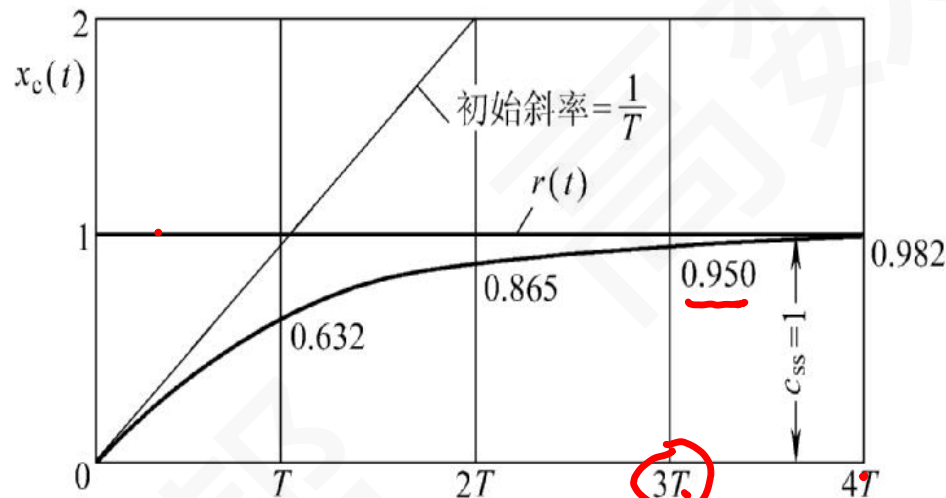
一阶系统的时域分析 $\frac{1}{Ts+1}$ s^2 2次 2阶



$$W_B(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{\frac{K}{s}}{\frac{K}{s} + 1} = \frac{K}{s + K} = \frac{1}{\frac{1}{K}s + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

题1. 已知系统的传递函数为 $\frac{1}{2s+1}$ ，则该系统的时间常数为 $T = \underline{2}$ ，则调节时间为（对应5%误差带）
 $\underline{6s}$ (2倍5%的误差带) $3T$

题2. 系统的时间常数 T 越小，调节时间 t_s 越小，响应过程的快速性也越好。



记一阶系统的阶跃响应图 $x_c(t)$ 的图

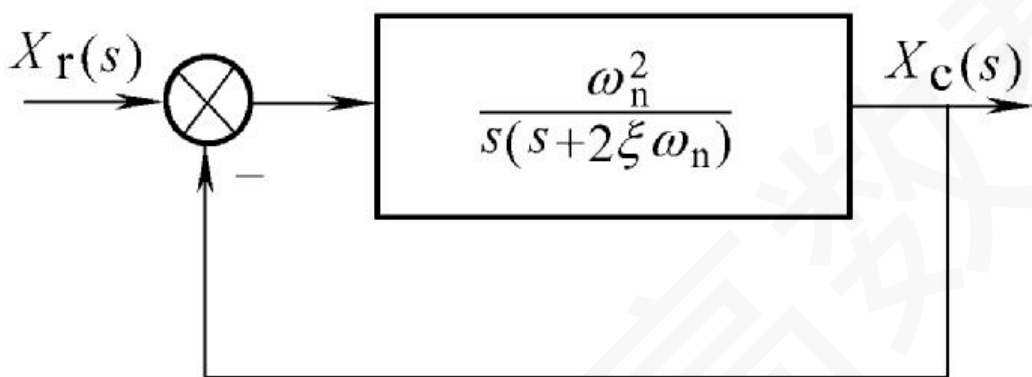
结论:

$t_s = 3T(s)$, (对应5%误差带)

$t_s = 4T(s)$, (对应2%误差带)

课时2 二阶系统与一阶系统的时域分析

二阶系统的时域分析



$$\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$
$$1 + \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

当输入量为单位阶跃函数时，系统的闭环传递函数：

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

系统的特征方程为 $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

其中 ξ : 系统的阻尼比 ω_n : 系统的振荡角频率

$$s^2 + 2 \cdot 0.1 \cdot 5s + 25 = 0 \quad \text{① } \omega_n = 5 \quad \text{② } \xi = 0.1$$



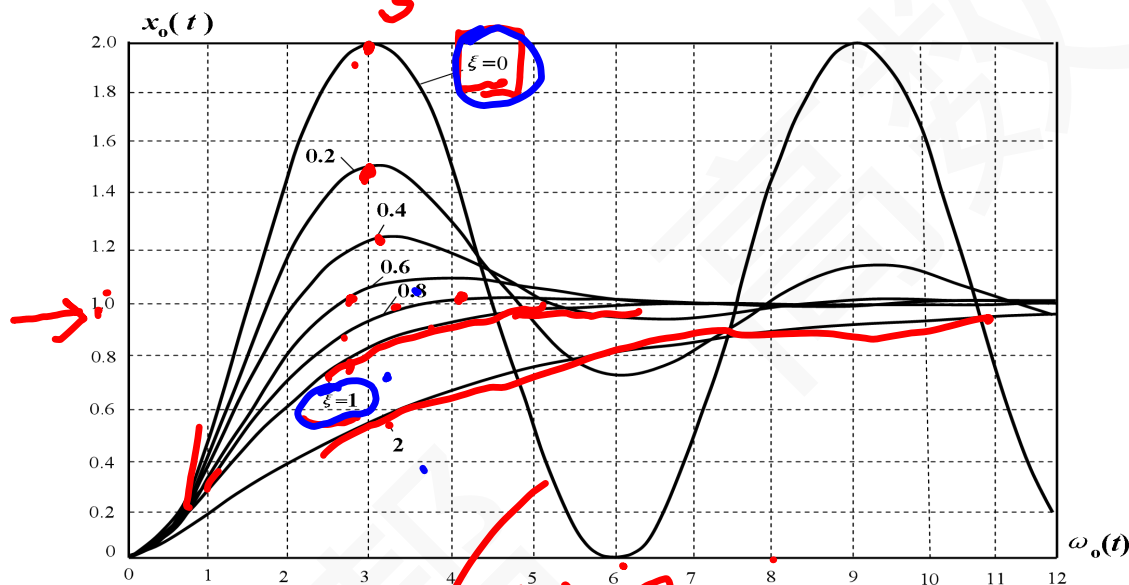
视频讲解更清晰
仅5小时

课时2 二阶系统与一阶系统的时域分析

二阶系统的时域分析

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

根据系统阻尼比的大小可以分为以下几种状态：



<u>ζ 阻尼比</u>	系统状态	
<u>$\zeta > 1$</u>	<u>过阻尼</u>	填空✓
★ <u>$0 < \zeta < 1$</u>	<u>欠阻尼</u>	填空、 <u>大题</u>
<u>$\zeta = 1$</u>	<u>临界阻尼</u>	填空
<u>$\zeta = 0$</u>	<u>零阻尼</u>	填空★

考题：

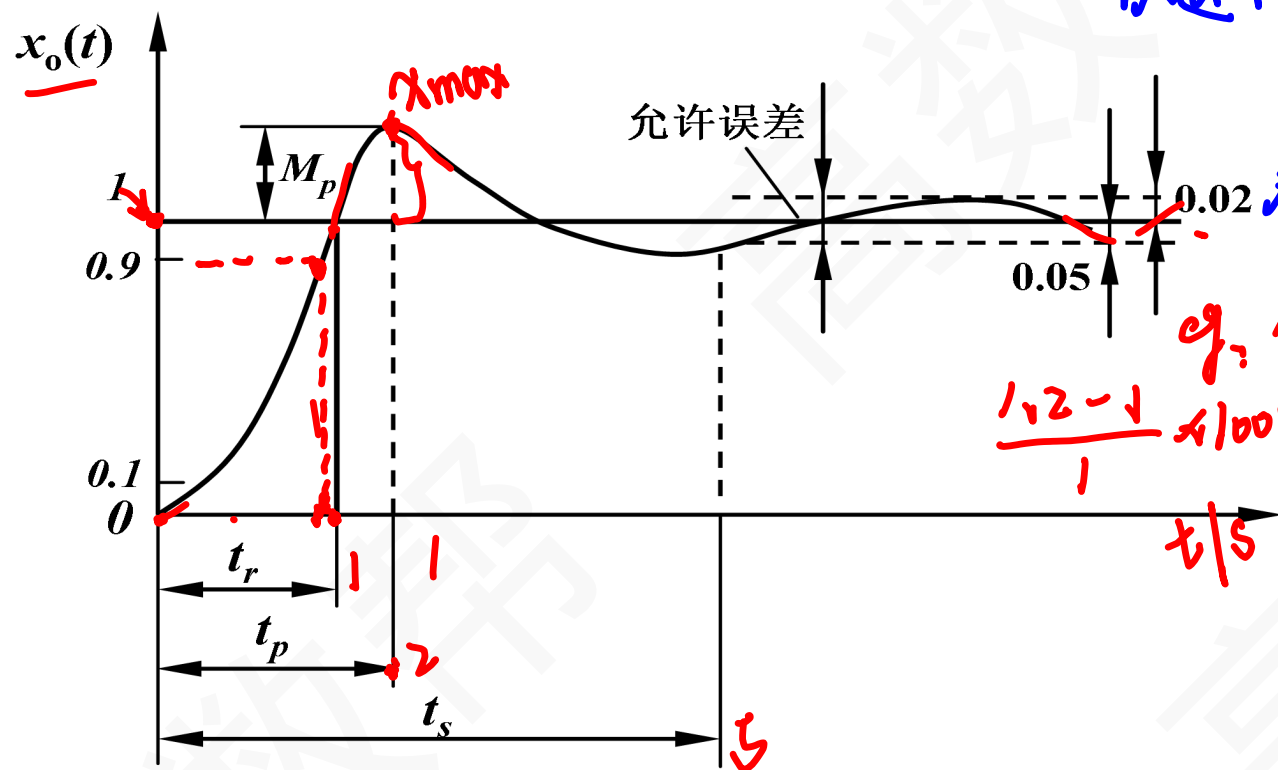
1. 阻尼比 > 1 称为 过阻尼，阶跃响应特点是 无超调 ✓★

2. 阻尼比 $= 0$ 称为 无阻尼状态，阶跃响应特点是 等幅震荡 $\sin \cdot \cos$ ★

课时2 二阶系统与一阶系统的时域分析

二阶系统的时域分析 **稳准快**

☆ 欠阻尼 ($0 < \xi < 1$)



上升时间 t_r : 输出第一次达到稳态值/90%的时间
快速性

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (1s)$$

相对稳定性
最大超调量: $\delta\% = \frac{x_{\max} - x_c(\infty)}{x_c(\infty)} \times 100\%$

eg: $x_{\max} = 1.2$
 $\frac{1.2 - 1}{1} \times 100\%$

$$\delta\% = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$

峰值时间: $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2s)$
快

调节时间: $t_s = 3.5 / \xi \omega_n = \frac{3.5}{\xi \omega_n}$
快

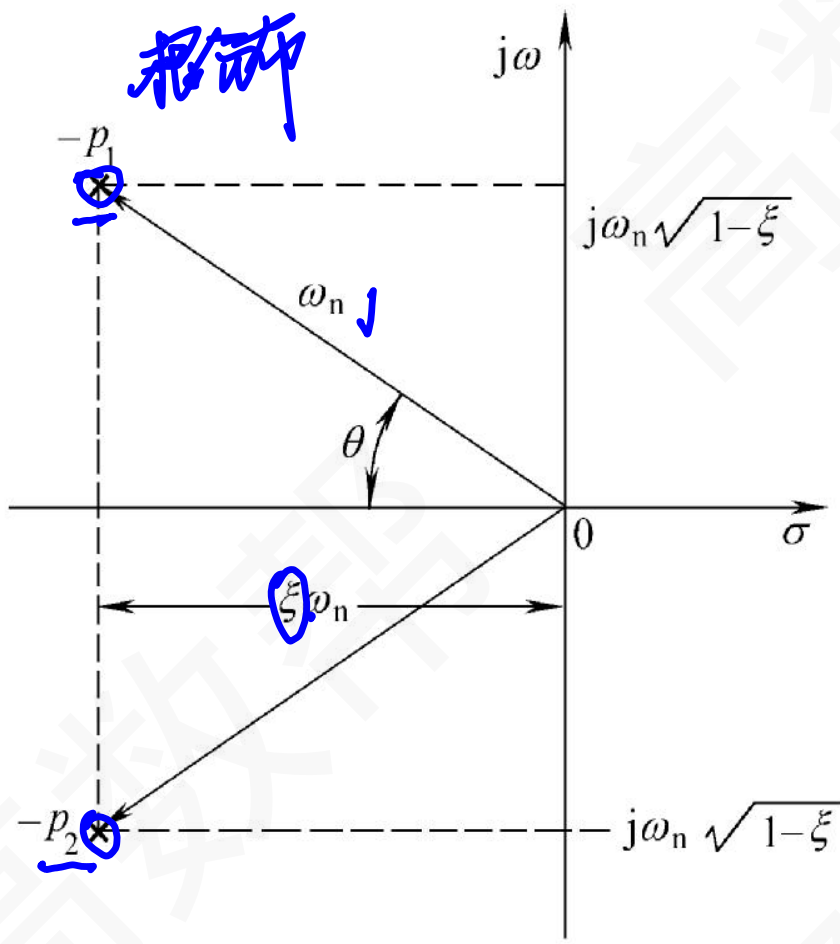
课时2 二阶系统与一阶系统的时域分析

二阶系统的时域分析

欠阻尼 ($0 < \xi < 1$)

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \quad (\text{具有负实部的共轭复根})$$



考题:

1. 欠阻尼情况下, 振荡程度与 ξ 有关:

ξ 越小, 超调量越大, 振荡越剧烈。

2. 当 ω_n 一定时, 阻尼比越大, 峰值时间 t_p 越长。

3. 当阻尼比 ξ 一定时, ω_n 越大, t_p 越短。

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta\% = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$



课时2 二阶系统与一阶系统的时域分析

考题

4. 典型二阶系统的极点分布如图所示，

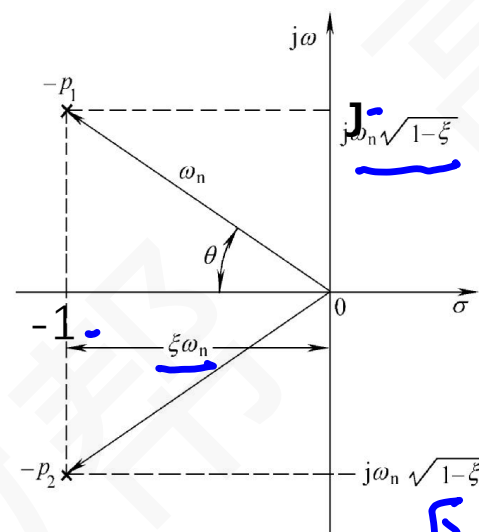
则系统的阻尼比为 (0.707)

自然震荡角频率为 ($\sqrt{2}$) rad/s

特征方程为: $s^2 + 2s + 2 = 0$

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

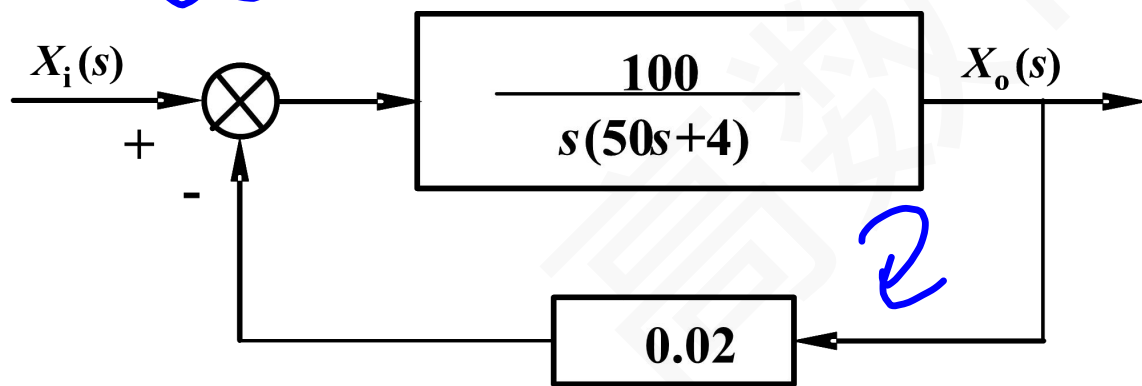
$$s^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} s + 2 = 0$$



$$\left. \begin{aligned} -\frac{\zeta}{\omega_n} &= -1 \\ \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \zeta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \omega_n &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

课时2 二阶系统与一阶系统的时域分析

题目：某系统如图3-12所示，试求其无阻尼固有频率 ω_n ，阻尼比 ξ ，超调量 M_p ，峰值时间 t_p 、调整时间 t_s ($\Delta = 0.05$)。



分析

- ① 闭环传递函数 $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G}{1+G H}$
- ② 特征方程 $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$
- ③ $\xi, \omega_n \Rightarrow M_p, t_p, t_s$

解 首先应求出其传递函数，化成标准形式（首项系数为1），然后可用公式求出各项特征量及瞬态响应指标。

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\frac{100}{s(50s+4)}}{1 + \frac{100}{s(50s+4)} \cdot 0.02} = \frac{100}{s(50s+4) + 2} = \frac{50}{5s^2 + 2 \times 0.2 \times 5s + 1} = \frac{2}{s^2 + \frac{2}{25}s + \frac{1}{25}}$$

$\xi = \frac{1}{5}$
 $\omega_n = \frac{1}{5}$

课时2 二阶系统与一阶系统的时域分析

$$\text{所以 } \omega_n = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ rad/s} \quad \xi = 0.2$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\frac{\pi \times 0.2}{\sqrt{1-0.2^2}}} \approx 0.527$$

$$e^{-\frac{\pi \cdot 0.2}{\sqrt{1-0.2^2}}} = e^{-\frac{\pi \cdot 0.2}{\sqrt{1-0.2^2}}} \times 100\%$$

$$t_r = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{0.2 \sqrt{1-0.2^2}} \approx 16.03\text{s}$$

$$t_s \approx \frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{3}{0.2 \times 0.2} \text{s} = 75\text{s}$$

$$\frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{3.5}{\xi \omega_n} \text{ 都不算错}$$



视频讲解更清晰
仅5小时