教学模块3 计算机控制系统数学描述与性能分析

教学单元3 计算机控制系统的稳定性分析

东北大学 · 关守平
guanshouping@ise.neu.edu.cn

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

稳定性分析策略：

映射

*s*平面上稳定性分析 → *z*平面上稳定性分析

$$z = e^{sT}$$

3.1 离散系统的稳定性条件

连续系统闭环传递函数为：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

假设 $r(t) = 1(t)$

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s^1 + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s + p_n}$$

$$y(t) = A_0 + A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} + \cdots + A_n e^{-p_n t}$$

$$= A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-p_i t}$$

若系统稳定 $t \to \infty,\quad \lim_{t \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-p_i t} \to 0$

结论：

极点具有负实部，即极点均分布在s平面的左半平面。

离散系统闭环传递函数为：

$$\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z^1+b_m}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}$$

假设 $r(t)=1(t)$

$$Y(z)=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z^1+b_m}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{A_0z}{z-1}+\frac{A_1z}{z+p_1}+\frac{A_2z}{z+p_2}+\cdots+\frac{A_nz}{z+p_n}$$

$$Y(z)=\frac{A_0 z}{z-1}+\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{z}{z+p_i} \qquad y(k)=A_0 1(k)+\sum_{i=1}^{n} A_i z_i^k$$

若系统稳定 $k\to\infty,\quad \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_i z_i^k \to 0$

结论： $|z_i|<1$

即：闭环脉冲传递函数的全部极点位于z平面上以原点为圆心的单位圆内。

3.2 *s*平面与*z*平面的映射分析

复变量 **s** 与 **z** 的关系为：$z = e^{sT}$，***T***为采样周期。

当 $s = \sigma + j\omega$ 时，$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$，

其幅值为$|z| = e^{\sigma T}$ ：

（1）当 **s** 位于**s** 平面虚轴的左半部时，σ为负数，这时

$|z| < 1$ ；

（2）当 **s** 位于**s** 平面虚轴的右半部时，σ为正数，此时

$|z| > 1$ 。

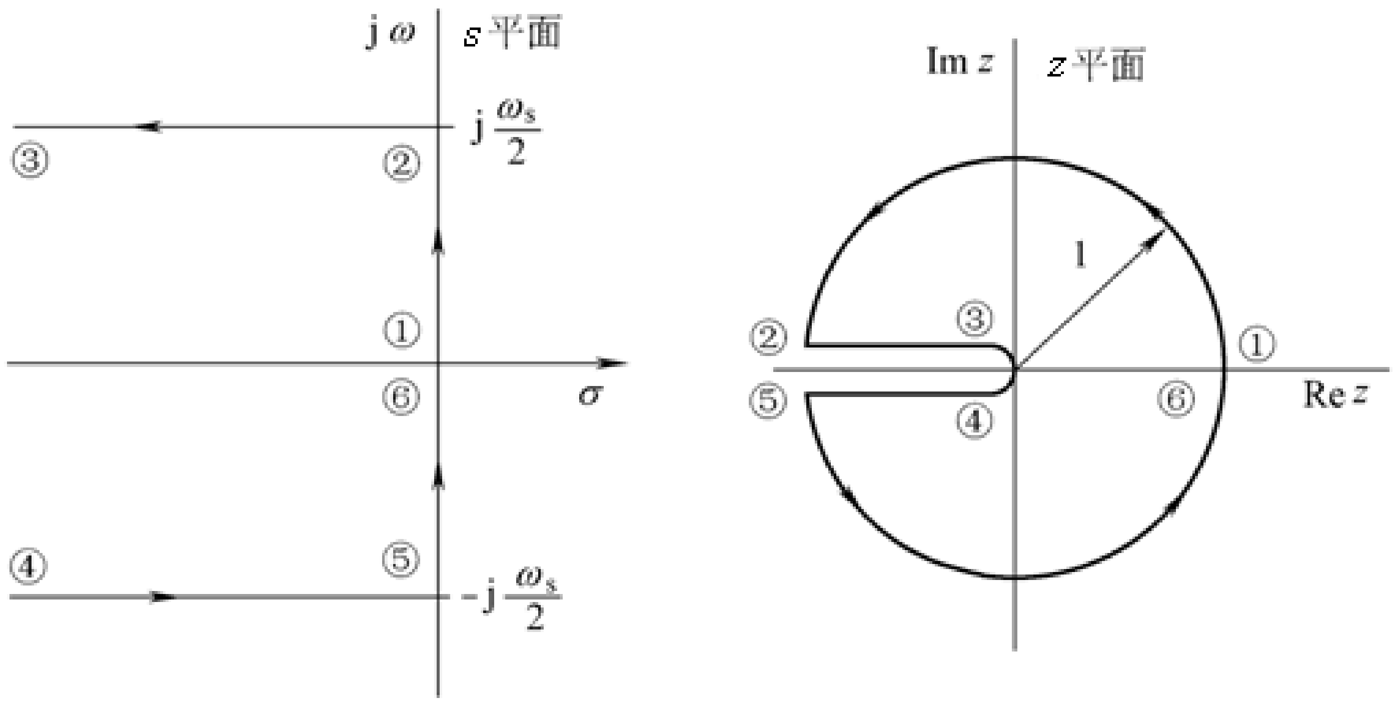


图3.1 *s*平面到*z*平面的映射

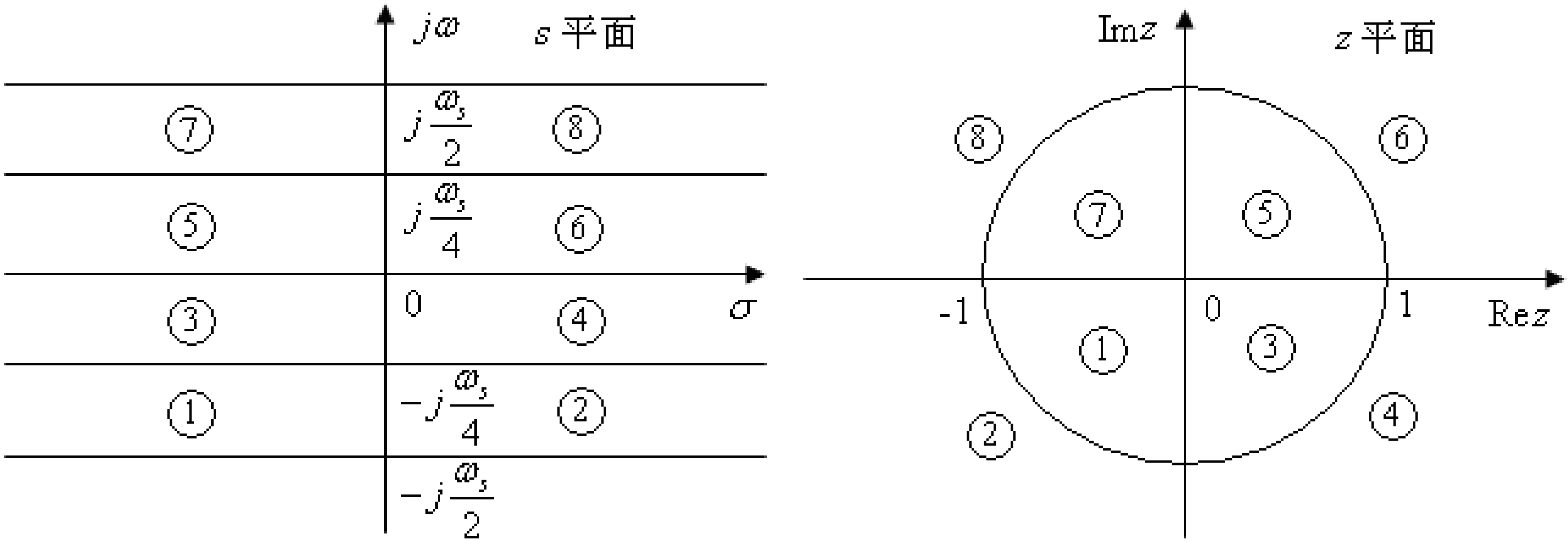
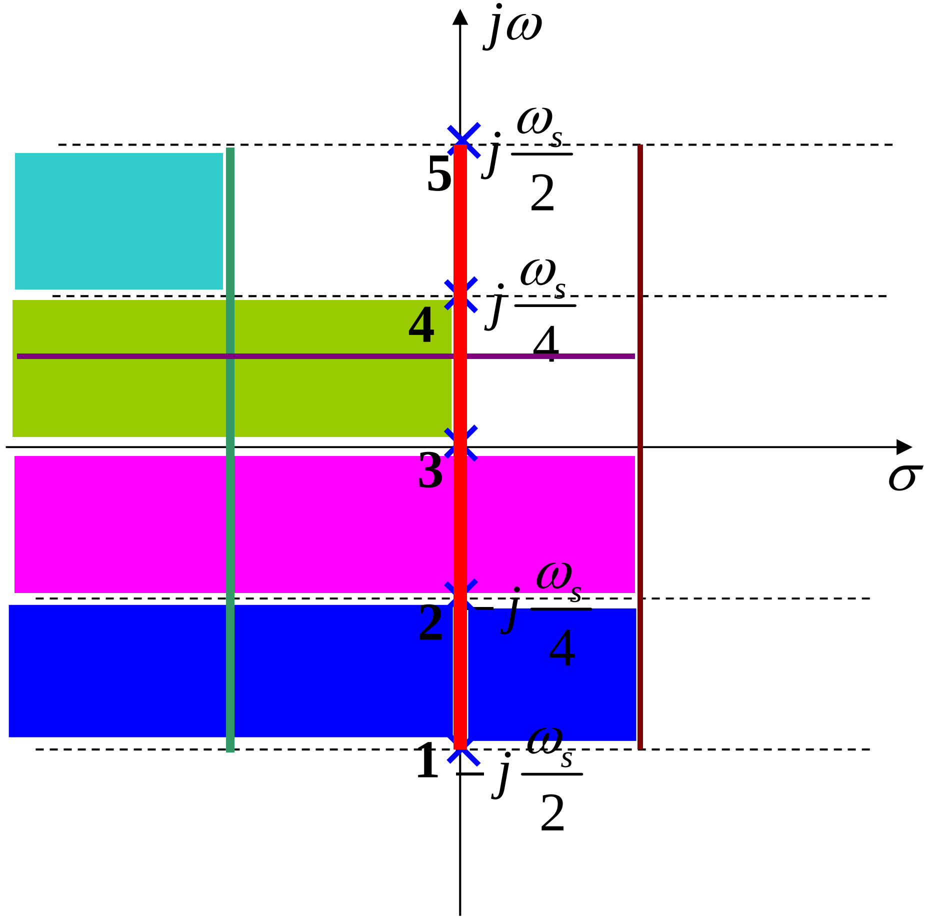


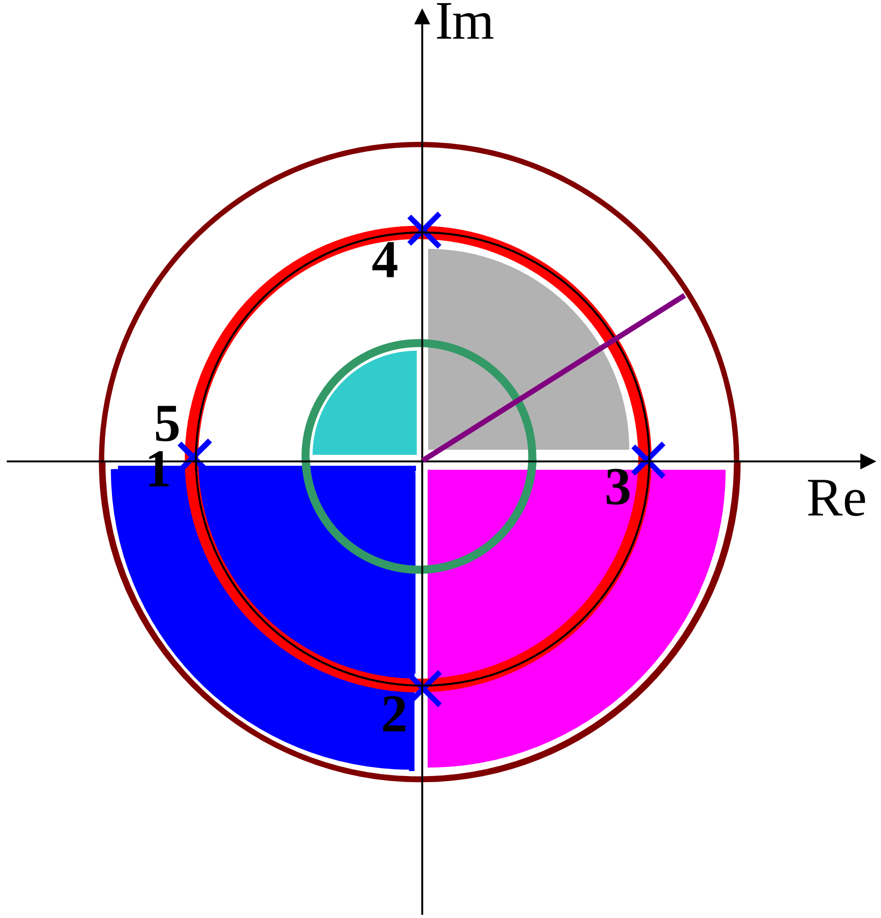
图3.2 *s*平面上的极点与*z*平面的对应关系

s平面上的极点与z平面的对应关系演示

$$z = e^{sT}$$

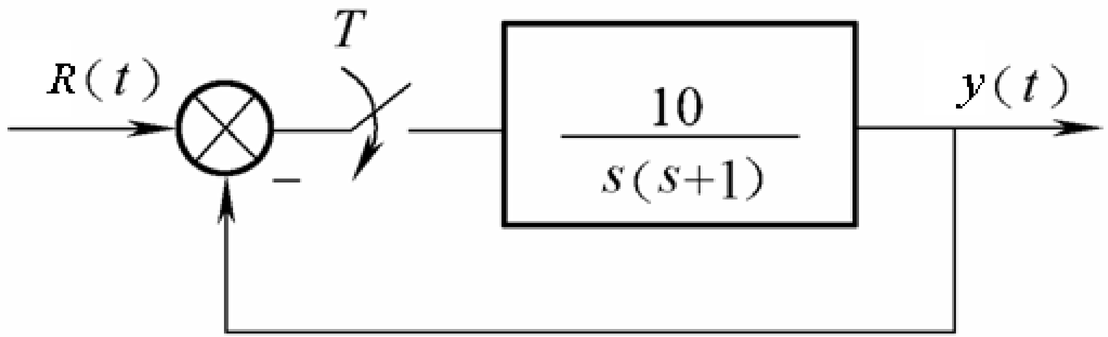


s平面



z平面

例 3.1 分析系统的稳定性 T=1s



解：
$$W_k(z) = Z\left[\frac{10}{s(s+1)}\right] = \frac{10z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

闭环特征方程 $1+W_k(z)=0$

$$(z-1)(z-e^{-T})+10z(1-e^{-T})=0$$

解方程 $z_1=-0.076, \quad z_2=-4.87$

由于 $|z_2|>1$ 所以系统是不稳定的。

3.3 采样周期与系统稳定性关系

采样周期

零阶保持器

闭环系统极点分布

越小越好

闭环系统的稳定性

例3.2 判断图3.3所示系统在采样周期T=1s和T=4s时的稳定性，图中取K=1。

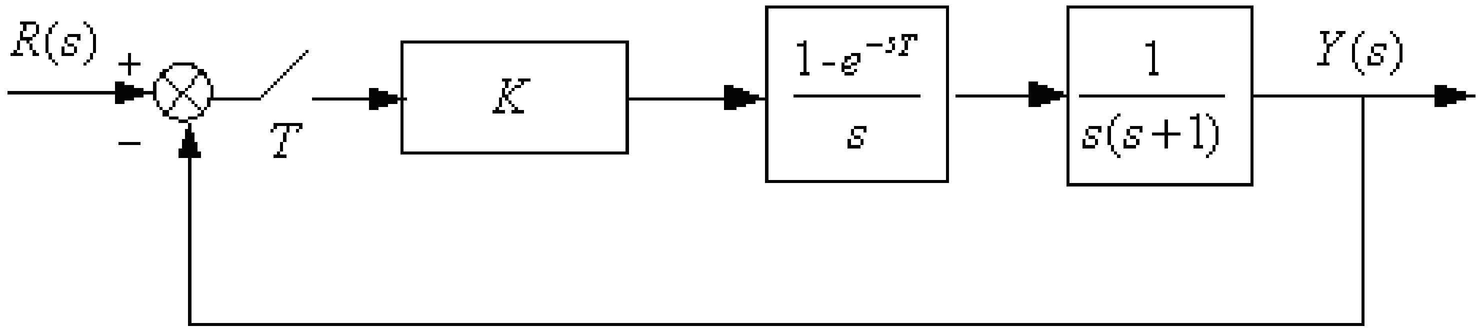


图3.3 计算机控制系统结构

解：考虑零阶保持器时对象的传递函数模型为：

$$W_d(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot\frac{1}{s(s+1)}$$

其脉冲传递函数模型为：

$$W_d(z)=Z\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot\frac{1}{s(s+1)}\right]=\frac{(e^{-T}+T-1)z+(1-e^{-T}-Te^{-T})}{z^2-(1+e^{-T})z+e^{-T}}$$

则系统的闭环脉冲传递函数为：

$$W_B(z)=\frac{KW_d(z)}{1+KW_d(z)}=\frac{W_d(z)}{1+W_d(z)}$$

其特征方程为： $1+W_d(z)=0$

即： $z^2+(T-2)z+(1-Te^{-T})=0$

（1）***T*=1s**时，系统的特征方程为：

$$z^2 - z + 0.6321 = 0$$

特征根为：$z_1 = 0.5 + j0.6181,\ \ z_2 = 0.5 - j0.6181$

由于 $|z_1| = |z_2| < 1$

因此采样周期***T*=1s**时，系统是稳定的。

（2）***T*=4s**时，系统的特征方程为：

$$z^2 + 2z + 0.9267 = 0$$

特征根为： $z_1 = -0.7293,\ \ z_2 = -1.2707$

由于 $|z_2| > 1$

因此采样周期***T*=4s**时，系统是不稳定的。

不考虑零阶保持器的影响

对象的离散化传递函数模型为：

$$W(z)=Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]=\frac{z(1-e^{-T})}{z^2-(1+e^{-T})z+e^{-T}}$$

特征方程为： $z^2-2e^{-T}z+e^{-T}=0$

特征根为： $z_{1,2}=e^{-T}\pm je^{-T}\sqrt{e^{T}-1}$

由于 $|z_{1,2}|=e^{-T/2}<1$

因此无论采样周期取何值，系统总是稳定的。

3.4 计算机控制系统的代数稳定性判据

直接求解特征方程求解很麻烦

⬇

间接判别离散系统稳定性的代数判据

劳斯（Routh）稳定性判据　　朱利（Jury）稳定性判据

⬆

根据系统特征方程的系数判断系统的稳定性

3.4.1 劳斯（Routh）稳定性判据

劳斯稳定判据 → 连续系统*s*平面的特征根位置

性质近似

离散系统 *z* 平面的特征根位置

*w*变换

双线性变换

连续系统*w*平面的特征根位置

劳斯稳定判据

离散系统劳斯稳定判据

w变换定义：

$$z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$$

其反变换为：

$$w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

频域关系为：

$$w|_{jv}=jv=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\bigg|_{z=e^{j\omega T}}=\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}=\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}+e^{-j\omega T/2}}=j\frac{2}{T}tg(\frac{\omega T}{2})$$

$$v=\frac{2}{T}tg(\frac{\omega T}{2})\xrightarrow[\omega\to 0]{}v=\omega$$

信息科学与工程学院 COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

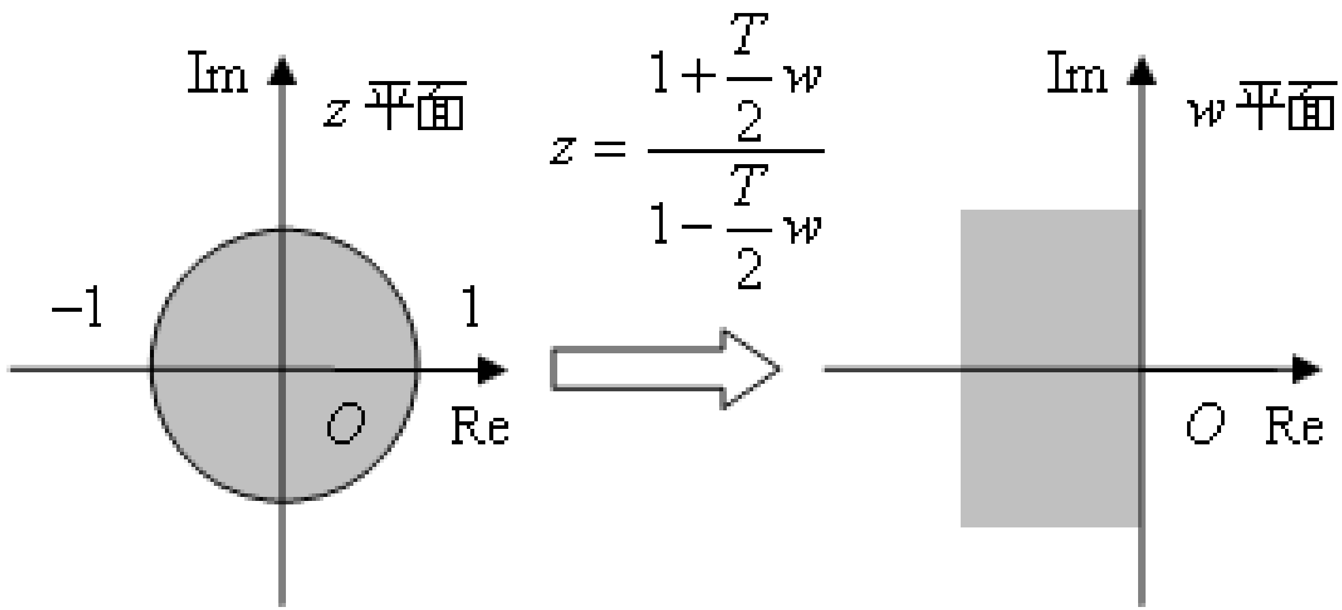


图3.4 *z*平面与*w*平面的映射关系

单从考察系统的稳定性角度来看，**w**变换也可以定义如下：

$$z=\frac{1+w}{1-w} \Rightarrow w=\frac{z-1}{z+1} \qquad \boxed{w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

好处：与采样周期***T***无关；

缺点：频率畸变增大

劳斯稳定性判据步骤：

① 根据特征方程写出劳斯阵列：

$$F(w)=b_n w^n+b_{n-1}w^{n-1}+\cdots+b_1 w+b_0=0$$

$$\begin{array}{lllll}
w^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots \\
w^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
w^{n-2} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
w^{n-3} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\
\vdots & & & & \\
w^1 & j_1 & & & \\
w^0 & k_1 & & &
\end{array}$$

② 阵列的前两行是由特征方程的系数得到的，其余行计算如下：

$$c_1 = \frac{b_{n-1}b_{n-2} - b_n b_{n-3}}{b_{n-1}} \qquad d_1 = \frac{c_1 b_{n-3} - b_{n-1}c_2}{c_1}$$

$$c_2 = \frac{b_{n-1}b_{n-4} - b_n b_{n-5}}{b_{n-1}} \qquad d_2 = \frac{c_1 b_{n-5} - b_{n-1}c_3}{c_1}$$

$$c_3 = \frac{b_{n-1}b_{n-6} - b_n b_{n-7}}{b_{n-1}} \qquad \vdots$$

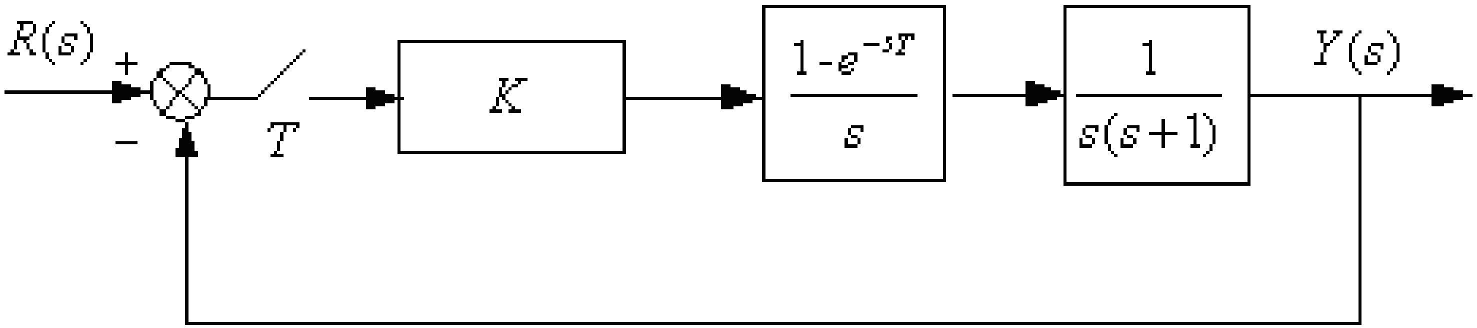
$$\vdots$$

③ 劳斯判据为：对于特征方程来说，具有正实部根的个数等于阵列中第一列系数符号改变的次数。

说明：劳斯阵列的特殊情况，如阵列第1列出现“0”的情况，参考《自动控制原理》内容。

例3.3 利用劳斯判据研究例3.2所示系统的稳定性。

例3.2:



判断系统在采样周期T=1s和T=4s时的稳定性，图中取K=1。

解： 由**例3.2**可知，***T*=1s**时，闭环系统的特征方程为：

$$z^2 - z + 0.6321 = 0$$

***w*变换后为：**

$$\left(\frac{1+0.5w}{1-0.5w}\right)^2 - \left(\frac{1+0.5w}{1-0.5w}\right) + 0.6321 = 0$$

即：

$$0.658w^2 + 0.3679w + 0.6321 = 0$$

劳斯阵列为：

$$
\begin{array}{lll}
w^2 & 0.658 & 0.6321 \\
w^1 & 0.3679 & \\
w^0 & 0.6321 &
\end{array}
$$

结论：阵列第**1**列，系数全部大于零，系统稳定。

同理，当T=4s时，系统的特征方程为：

$$z^2 + 2z + 0.9267 = 0$$

进行w变换后得到：

$$-0.2932w^2 + 0.0733w + 3.9267 = 0$$

劳斯阵列为：

$$\begin{array}{lll} w^2 & -0.2932 & 3.9267 \\ w^1 & 0.0733 & \\ w^0 & 3.9267 & \end{array}$$

结论：阵列第1列系数不全大于零，有1次符号的变化，因此特征方程的特征根有1个位于w平面的右半平面，系统是不稳定的

3.4.2 朱利（Jury）稳定性判据

朱利判据 ⇨

在z域直接进行

只能判断出系统是否稳定

劳斯判据 ⇨

在s域直接进行

可以判断系统的稳定性

可以判断出不稳定极点的个数

朱利稳定性准则:

设离散系统的特征方程为:

$$F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

其中 $a_n > 0$

朱利阵列:

z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^{n-k}	$\cdots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-k}	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-k}	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_{k-1}	$\cdots$	b_1	b_0	
c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-k}	$\cdots$	c_{n-2}		
c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\cdots$	c_{k-2}	$\cdots$	c_0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
l_0	l_1	l_2	l_3					
l_3	l_2	l_1	l_0					
m_0	m_1	m_2						

注意：

（1）表中最后一行包含3个元素，因此当特征方程的阶数 n=2时，只需要1行；

（2）当 n=3 时，只需要3行;

（3）前两行不需要计算，只是将 $F(z)$ 的原系数先倒排，然后顺排；

（4）从第三行开始，每一项用2行2列的行列式进行计算;

（5）阵列中偶数行的元素就是前一行元素反过来的顺序，如此计算到第 $2n$-3 行各项为止

（6）奇数行元素的定义为：

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-2$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-3$$

$$\vdots$$

$$m_0 = \begin{vmatrix} l_0 & l_3 \\ l_3 & l_0 \end{vmatrix}, \quad m_1 = \begin{vmatrix} l_0 & l_2 \\ l_3 & l_1 \end{vmatrix}, \quad m_2 = \begin{vmatrix} l_0 & l_1 \\ l_3 & l_2 \end{vmatrix}$$

朱利稳定性准则：

特征方程式：

$$F(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0=0 \quad (a_n>0)$$

的根（极点）全部位于**z**平面单位圆内的充分必要条件是下列条件必须全部满足，此时系统稳定。

系统稳定必须满足的条件：

① $F(1) > 0$

② $(-1)^n F(-1) > 0$

③ $|a_0| < a_n$

④ $|b_0| > |b_{n-1}|$

⑤ $|c_0| > |c_{n-2}|$

⑥ $|d_0| > |d_{n-3}|$

……

$|m_0| > |m_2|$

常用低阶系统根据朱利阵列得到的稳定条件：

（1）一阶系统 $(n=1): F(z)=a_1 z+a_0=0, a_1>0$

稳定条件： $\left|\frac{a_0}{a_1}\right|<1$ $\boxed{|a_0|<a_n}$

（2）二阶系统 $(n=2): F(z)=a_2 z^2+a_1 z+a_0=0, a_2>0$

稳定条件：

$$a_2+a_1+a_0>0$$
$$a_2-a_1+a_0>0$$
$$|a_0|<a_2$$

$$F(1)>0$$
$$(-1)^n F(-1)>0$$
$$|a_0|<a_n$$

（3）三阶系统 $(n=3): F(z)=a_3 z^3+a_2 z^2+a_1 z+a_0=0, a_3>0$

稳定条件：

$$a_3+a_2+a_1+a_0>0$$
$$a_3-a_2+a_1-a_0>0$$
$$|a_0|<a_3$$
$$|a_0^2-a_3^2|>|a_0 a_2-a_1 a_3|$$

$$F(1)>0$$
$$(-1)^n F(-1)>0$$
$$|a_0|<a_n$$
$$|b_0|>|b_{n-1}|$$

例3.4 设某离散闭环系统的特征方程为

$$F(z) = z^3 - 3z^2 + 2.25z - 0.5 = 0$$

试用朱利稳定性准则，判定该系统是否稳定。

解： 在上述条件下，朱利阵列为

z^0	z^1	z^2	z^3
-0.5	2.25	-3	1
1	-3	2.25	-0.5
-0.75	1.875	-0.75	

最后一行计算如下：

$$b_0 = \begin{vmatrix} -0.5 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = -0.75$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} -0.5 & -3 \\ 1 & 2.25 \end{vmatrix} = 1.875$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} -0.5 & 2.25 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -0.75$$

① 条件 **F(1)>0** 不满足，因为

$$F(1)=1-3+2.25-0.5=-0.25<0$$

② 条件 $(-1)^n F(-1)>0$ 满足，因为

$$(-1)^3 F(-1)=1+3+2.25+0.5=6.75>0$$

③ $|a_0|<a_3$ 即 $|-0.5|<1$ 满足

④ $|b_0|>|b_{n-1}|$ 不满足，因为 $b_0=b_2=-0.75$

结论：系统是不稳定的。

例3.5 设某系统的特征方程为

$$z^2-\left[(1+e^{-T})-(1-e^{-T})(K_i+K_p)\right]z+e^{-T}-(1-e^{-T})K_p=0$$

其中，采样周期 $T=0.1s \quad K_i=100,\ T=10$

试确定出系统稳定时 $\boldsymbol{K_p}$ 的范围。

解： 将 $\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{K_i}$代入特征方程，得

$$z^2-(0.953-0.0952K_p)z+0.905-0.0952K_p=0$$

（1）$F(1)=1-0.953+0.0952K_P+0.905-0.0952K_P=0.952>0$

条件满足，且与 K_p 无关。

（2）$(-1)^2F(-1)=1+0.953-0.0952K_P+0.905-0.0952K_P>0$

求出 $K_p<15.01$

（3）$|a_0|<a_2$， $|0.905-0.0952K_P|<1$

由此求出 $-0.998<K_P<20.0$

结论：系统稳定时，K_p的取值范围为：

$$-0.998<K_P<15.01$$

·教学单元三结束·