知识点K3.10

Ch.8.5

线性系统的可控制性和可观测性

主要内容：

1.状态的可控制性和可观测性

2.系统的可控制性

3.可控性矩阵和可观测性矩阵

基本要求：

1.掌握可控性和可观性的基本概念

2.掌握判定方法

K3.10 线性系统的可控制性和可观测性

卫星发射过程中，在规定时间内，通过一定的激励，对卫星的初始状态不断调整，直至入轨、定位等，这就要求卫星的状态必须完全可控制的。

在调整过程中，需要确定位置、速度、加速度等状态，但实际只能观测到火箭在空间中的位置，而不能直接观测到速度和加速度。所以需要通过观测结果来推算出系统的状态。这就要求研究系统是否可以通过观测某些输出来确定状态。

线性系统的可控制性和可观测性

1.状态的可控制性

定义：如果系统在某种初始状态$x(0)= x_0$下，可以通过施加一定的激励信号$f(t)$控制，使得系统经过一段时间以后，在任意指定时刻T的状态为零状态，即$x(T)=0$，则称x_0为系统的可控制状态。

2.系统的可控制性

状态空间 $\begin{cases} \text{可控制状态空间（由所有可控制状态组成）} \\ \text{不可控制状态空间（由所有不可控制状态组成）} \end{cases}$

分类：完全可控制系统；部分可控制系统；完全不可控制系统。

系统的可控制性反映了状态可由输入控制的能力，在现代控制工程中，以状态方程来描述系统，目的就是控制系统状态，以达到理想的输出。

系统可控的含义：通过一定的激励，可以使得系统从任意的初始状态（不一定是零状态）过渡到任意的另一个状态。

系统可控的判定：对于比较复杂的系统，需要判断**可控性矩阵**来进行判定。

定义：可控性矩阵Mc

$$M_C = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$$

系统满足可控性的充要条件：可控性矩阵Mc满秩。

例1：系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + f(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + f(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$M_C = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Mc的行列式等于零，不是满秩阵，故系统不可控。

3. 系统的可观测性

定义：系统在给定控制后，对于任意初始时刻t_0，在有限时间$T>t_0$内，根据t_0到T的系统输出的测量值，能唯一确定系统在t_0时刻的状态，则称系统完全可观；若只能确定部分起始状态，则称系统不完全可观。

系统的可观性指的是系统的输出量对状态变量的反映能力，通过可观性矩阵来进行判定。

定义：可观测性矩阵Mo

$$M_O = [C, CA, CA^2, \ldots, CA^{n-1}]^T$$

系统满足可观性的充要条件：可观性矩阵Mo满秩。

例2： 判断系统的可观性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t)$$

解：

$$C = [1 \quad 2 \quad 3]$$

$$CA = [-7 \quad -10 \quad -3]$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 49 & 50 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & -10 & -3 \\ 49 & 50 & 3 \end{bmatrix}$$

M_O满秩阵，故系统是可观的。