知识点Z4.6

指数形式的傅里叶级数

主要内容：

1.指数形式的傅里叶级数

2.复傅里叶系数

基本要求：

1.掌握傅里叶级数的指数形式展开式

2.掌握复傅里叶系数的基本概念

Z4.6指数形式的傅里叶级数

三角形式的傅里叶级数，含义比较明确，但运算常感不便，因而经常采用指数形式的傅里叶级数。

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

三角形式傅里叶级数

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2}[\mathrm{e}^{j(n\Omega t+\varphi_n)}+\mathrm{e}^{-j(n\Omega t+\varphi_n)}]$$

利用欧拉公式

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n}\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{-j\varphi_n}\,\mathrm{e}^{-jn\Omega t}$$

-n→n

$A_{-n}=A_n$

$\varphi_{-n}=-\varphi_n$

$$\boxed{=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{j\phi_n}\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}}\qquad +\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n}\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n}\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

令复数 $\frac{1}{2}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n}=|F_n|\mathrm{e}^{j\varphi_n}=F_n$

称为复傅里叶系数，简称傅里叶系数。

$$F_n=\frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n}=\frac{1}{2}(A_n\cos\varphi_n+jA_n\sin\varphi_n)=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t-j\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

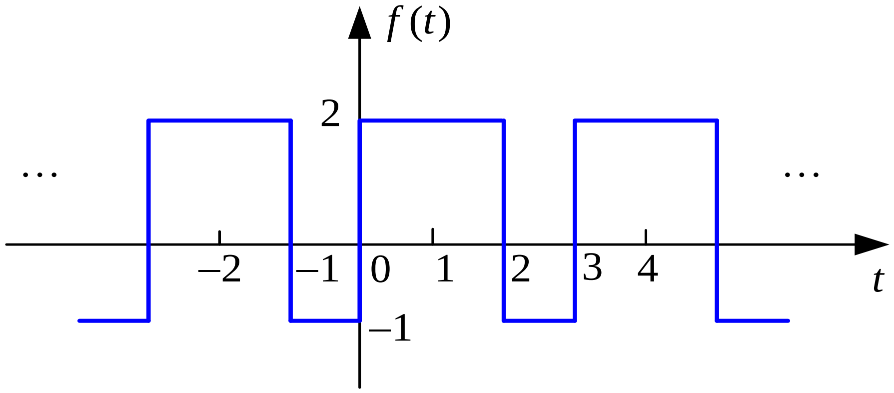
指数形式的傅里叶级数

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

复傅里叶系数

表明：任意周期信号$f(t)$可分解为许多不同频率的虚指数信号之和。 F_n是频率为$n\Omega$的分量的系数，$F_0 = A_0/2$为直流分量。

例：求如图所示周期信号的指数形式的傅里叶级数。



解：$f(t)$为$T=3, \Omega=2\pi/T=2\pi/3$的周期信号，指数型傅里叶系数为

$$F_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\Omega t}dt=\frac{1}{3}[\int_0^2 2e^{-jn\Omega t}dt-\int_2^3 e^{-jn\Omega t}dt]$$

$$=\frac{2}{3}\frac{1}{-jn\Omega}e^{-jn\Omega t}\Big|_0^2-\frac{1}{3}\frac{1}{-jn\Omega}e^{-jn\Omega t}\Big|_2^3$$

$$=\frac{2}{j3n\Omega}[1-e^{-j2n\Omega}]+\frac{1}{j3n\Omega}[e^{-j3n\Omega}-e^{-j2n\Omega}]$$

$$=\frac{2}{j3n\Omega}[1-e^{-j2n\Omega}]+\frac{1}{j3n\Omega}[e^{-j3n\Omega}-e^{-j2n\Omega}]$$

$$=\frac{2-3e^{-j2n\Omega}+e^{-j3n\Omega}}{j3n\Omega}$$

$$=\frac{2-3e^{-j\frac{4\pi}{3}n}+e^{-j2\pi n}}{j2\pi n}$$

$$=\frac{3}{j2\pi n}(1-e^{-j\frac{4\pi}{3}n})$$

指数形式的傅里叶级数为：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{3}{j2\pi n}(1-e^{-j\frac{4\pi}{3}n})e^{jn\Omega t}$$