知识点Z4.22

卷积定理

主要内容：

1.时域卷积定理

2.频域卷积定理

基本要求：

1.掌握傅里叶变换卷积定理的基本概念

2.掌握通信中的调制、解调的分析方法

Z4.22卷积定理

时域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$， $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega) F_2(j\omega)$

频域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$， $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $f_1(t) f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$

证明：

$$\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}\tau$$

由时移特性：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=F_2(j\omega)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}$$

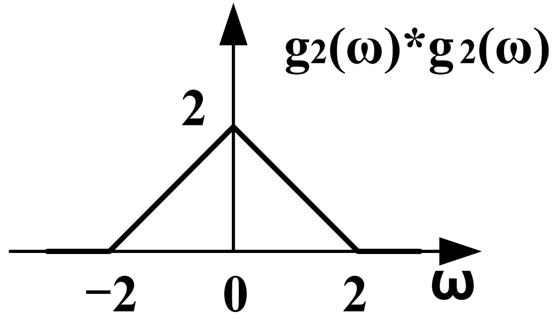
代入得，

$$\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)F_2(j\omega)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=F_2(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

例1 $f(t)=\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 \longleftrightarrow F(j\omega)=?$

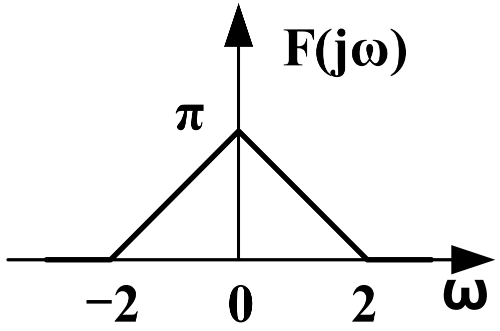


解: $g_2(t)\longleftrightarrow 2\,\mathrm{Sa}(\omega)$

根据对称性，

$$2\,\mathrm{Sa}(t)\longleftrightarrow 2\pi\ g_2(-\omega)$$

$$\mathrm{Sa}(t)\longleftrightarrow \pi\ g_2(\omega)$$



根据频域卷积定理，

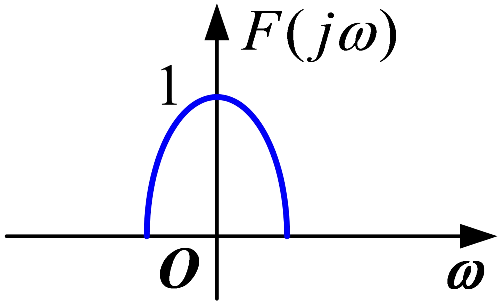
$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}[\pi\ g_2(\omega)]*[\pi\ g_2(\omega)]=\frac{\pi}{2}g_2(\omega)*g_2(\omega)$$

例2 $f(t)\cos\omega_0 t \longleftrightarrow ?$

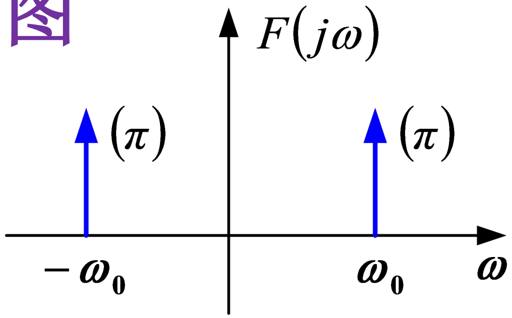
解: $f(t)\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(j\omega) * \left[\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$

$$=\frac{1}{2}F\left[j(\omega-\omega_0)\right]+\frac{1}{2}F\left[j(\omega+\omega_0)\right]$$

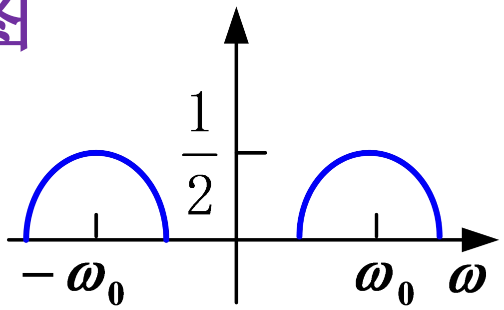
f(t)频谱图



cos(ω$_0$t)频谱图



f(t)cos(ω$_0$t)频谱图



思考：如何解调？