知识点Z4.26

能量谱

主要内容：

1.信号能量的定义

2.帕斯瓦尔能量方程

3.能量密度谱的定义

基本要求：

1.了解信号的能量和能量密度谱的基本概念

2.掌握利用帕斯瓦尔能量方程计算信号能量的方法

Z4.26能量谱

1. 信号能量

信号(电压或电流)$f(t)$在1Ω电阻上的瞬时功率为$|f(t)|^2$，在区间(-T, T)的能量为

$$\int_{-T}^{T} \left| f(t) \right|^2 \mathrm{d}\, t$$

定义：时间(-∞, ∞)区间上信号的能量。

$$E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \left| f(t) \right|^2 \mathrm{d}\, t$$

如果信号能量有限，即0<E<∞，称为能量有限信号，简称能量信号。例如门函数，三角形脉冲，单边或双边指数衰减信号等。

2. 帕斯瓦尔方程（能量方程）

$$\boxed{E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}$$

证明：

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f^*(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega)F(j\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

3. 能量密度谱$E(\omega)$

定义：单位频率的信号能量。

物理意义：为了表征能量在频域中的分布情况而定义的能量密度函数，简称为能量频谱或能量谱。

在频带df内信号的能量为 $E(\omega)\,df$，因而信号在整个频率区间（-∞, ∞）的总能量为：

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)\,\mathrm{d}f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

上式与帕斯瓦尔能量方程进行比较可知，

$$E(\omega)=\left|F(j\omega)\right|^{2}$$

由相关定理：

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}(\omega) &= \mathcal{F}[R(\tau)] \\ R(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{E}(\omega)] \end{aligned}\right\}$$

$$R(\tau) \longleftrightarrow \mathcal{E}(\omega)$$

结论：能量有限信号的能量谱$\mathcal{E}(\omega)$与自相关函数$R(\tau)$是一对傅里叶变换。

$$\boxed{R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)\,\mathrm{d}t} \longleftrightarrow \boxed{\mathcal{E}(\omega)=\left|F(j\omega)\right|^2}$$

信号的能量谱$\mathcal{E}(\omega)$是ω的偶函数，它只取决于频谱函数的模量，而与相位无关。单位：J·s。

例1： 计算信号 $f(t)=2\cos(997t)\dfrac{\sin 5t}{\pi t}$ 的能量。

解: $\dfrac{\sin 5t}{\pi t} \leftrightarrow g_{10}(\omega)$

$$2\cos(997t)\frac{\sin 5t}{\pi t} \leftrightarrow g_{10}(\omega-997)+g_{10}(\omega+997)$$

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}(10+10)$$

$$=\frac{10}{\pi}$$