教学模块5 数字控制器的直接设计方法

教学单元2 最小拍控制器的设计方法

东北大学 · 关守平
guanshouping@ise.neu.edu.cn

最小拍控制器定义：

最小拍控制为时间最优控制，即闭环控制系统在最少的采样周期内达到稳定，且系统在采样点上的输出能够准确地跟踪输入信号，不存在稳态误差。

2.1 简单对象最小拍控制器设计

广义对象的脉冲传递函数$W_d(z)$：最小相位系统

（1）系统是稳定的，即在单位圆上或圆外没有极点

（2）逆系统是稳定的，即在单位圆上或圆外没有零点

（3）不含有纯滞后环节

控制器设计思想：

根据稳态误差为零，且拍数最小的原则给定$W_e(z)=1-W_B(z)$，从而确定控制器$D(z)$。

典型输入的通用表达式可以写成：

- $$R(z)=\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^{m}} \qquad (1)$$

（1）单位阶跃输入：

$$r(t)=1(t), \quad R(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

（2）单位速度输入：

$$r(t)=t,\quad R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

（3）加速度输入：

$$r(t)=\frac{1}{2}t^2,\quad R(z)=\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

于是得到系统误差为：

$$E(z)=W_e(z)R(z)=W_e(z)\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m}=[1-W_B(z)]\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} \qquad (2)$$

系统稳态误差为：

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})[1-W_B(z)]\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} \qquad (3)$$

于是得到：

$$1-W_B(z)=W_e(z)=(1-z^{-1})^M F(z) \quad (4)$$

其中： $M \geq m$

为实现时间最优的最小拍控制，取

$$M=m, \quad F(z)=1$$

于是得到：

$$1-W_B(z)=W_e(z)=(1-z^{-1})^m \qquad W_B(z)=1-(1-z^{-1})^m \quad (5)$$

所以最小拍控制是与输入有关的时间最优控制。

表2.1 三种典型输入的最小拍系统

$r(t)$	$1-W_B(z)$	$W_B(z)$	$D(z)$	t_s
$1(t)$	$1-z^{-1}$	z^{-1}	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})W_d(z)}$	T
t	$(1-z^{-1})^2$	$2z^{-1}-z^{-2}$	$\dfrac{2z^{-1}-z^{-2}}{(1-z^{-1})^2 W_d(z)}$	2T
$\dfrac{t^2}{2}$	$(1-z^{-1})^3$	$3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}$	$\dfrac{3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}}{(1-z^{-1})^3 W_d(z)}$	3T

最小拍控制系统数字控制器的设计步骤：

(1) 根据被控对象的数学模型求出广义对象的脉冲传递函$W_d(z)$。

(2) 根据输入信号类型，查上表确定偏差脉冲传递函数$1-W_B(z)$。

(3) 将$W_d(z)$、$1-W_B(z)$ 代入

$$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)[1-W_B(z)]} \qquad (6)$$

进行变换运算，即可求出数字控制器的脉冲传递函数。

(4) 根据结果，求出输出序列及画出其响应曲线等。

例题讲解

例2.1：被控对象的传递函数

- $$W(s) = \frac{2}{s(1+0.5s)}$$

采样周期 $T=0.5s$ ，采用零阶保持器，试设计在单位速度输入时的最小拍数字控制器。

解：根据解题步骤：

(1) 写出该系统的广义对象脉冲传递函数

$$W_d(z)=Z[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{2}{s(1+0.5s)}]=Z[(1-e^{-Ts})\frac{4}{s^2(s+2)}]$$

$$=(1-z^{-1})[\frac{2Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}}]$$

- $$=\frac{0.368z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

(2) 输入 $r(t)=t$，查表2.1得到：

$$1-W_B(z)=(1-z^{-1})^2 \qquad W_B(z)=2z^{-1}-z^{-2}$$

(3) 控制器的脉冲传递函数

- $$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)[1-W_B(z)]}=\frac{5.435(1-0.5z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.718z^{-1})}$$

(4) 当输入为单位速度信号时，系统输出序列的变换

$$Y(z)=W_B(z)R(z)=(2z^{-1}-z^{-2})\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$
$$=z^{-2}+1.5z^{-3}+2z^{-4}+2.5z^{-5}+\cdots$$

上式中各项系数即为***y(t)***在各个采样时刻的数值。

$y(0)=0$， $y(T)=0$， $y(2T)=1$ ， $y(3T)=1.5$ ， $\cdots$

思考：

输入为单位速度信号时，控制信号输出序列***U(z)*.**

$$U(z)=u(0)+u(1)z^{-1}+u(2)z^{-2}+u(3)z^{-3}+\cdots$$

求$U(z)$：

$$U(z)=\frac{Y(z)}{W_d(z)}=\frac{W_B(z)}{W_d(z)}R(z)$$

$$W_B(z)=2z^{-1}-z^{-2}$$

$$W_d(z)=\frac{0.368z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

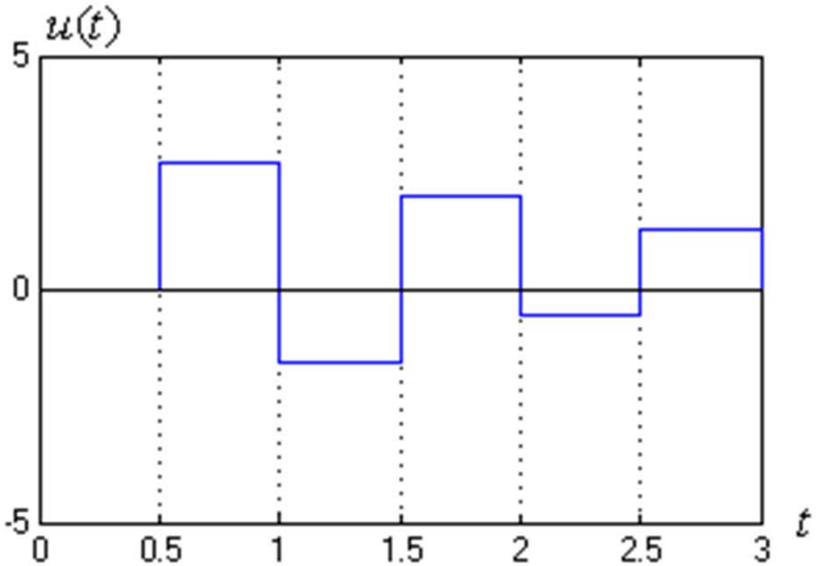
$$R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

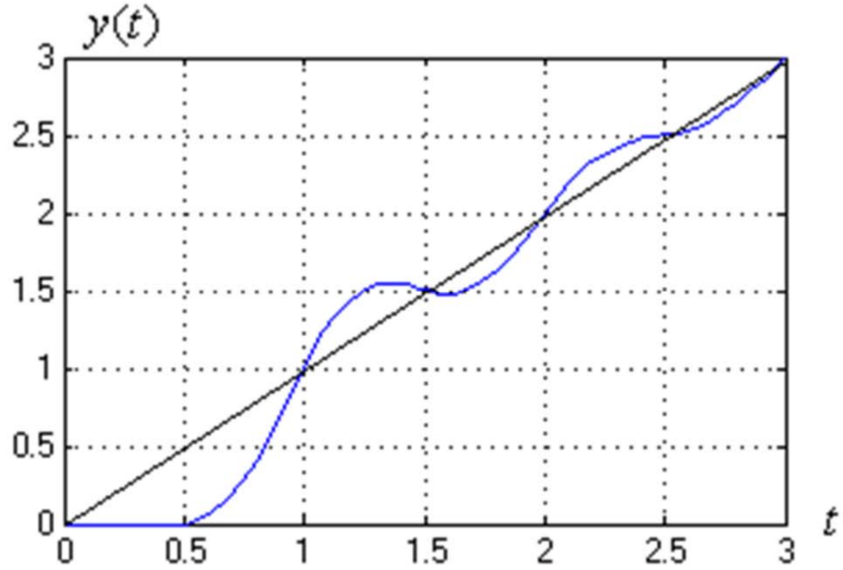
$$U(z)=\frac{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})(2z^{-1}-z^{-2})}{0.368z^{-1}(1+0.718z^{-1})}\cdot\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}$$

$$=5.435T\frac{z^{-1}-0.868z^{-2}+0.184z^{-3}}{1-0.282z^{-1}-0.718z^{-2}}$$

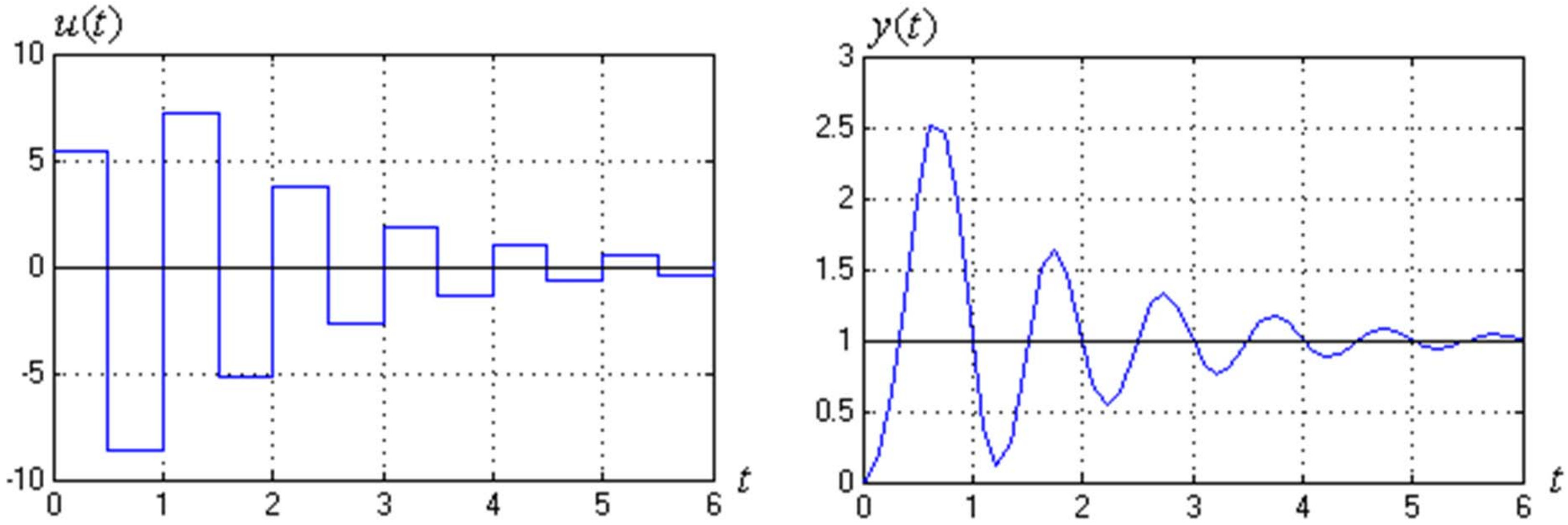
$$=2.717z^{-1}-1.593z^{-2}+2.00z^{-3}-0.579z^{-4}+1.275z^{-5}+\cdots$$

单位速度输入时系统控制信号与响应信号

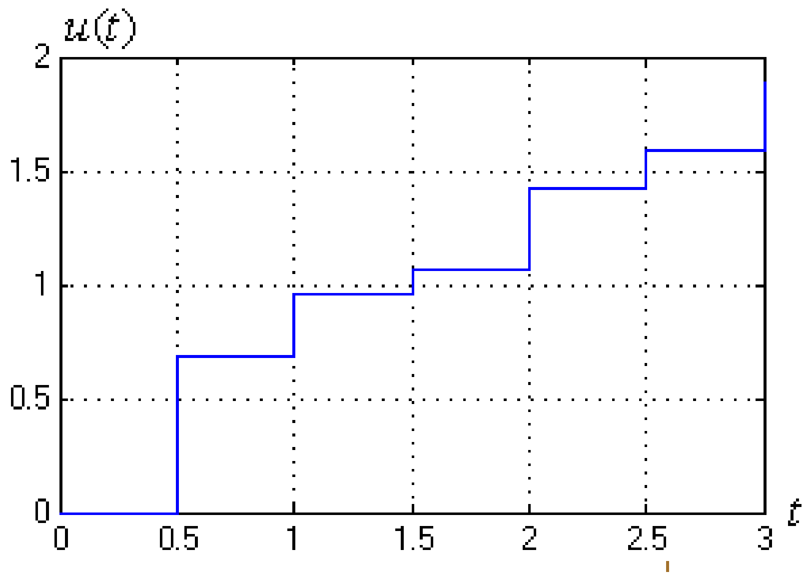


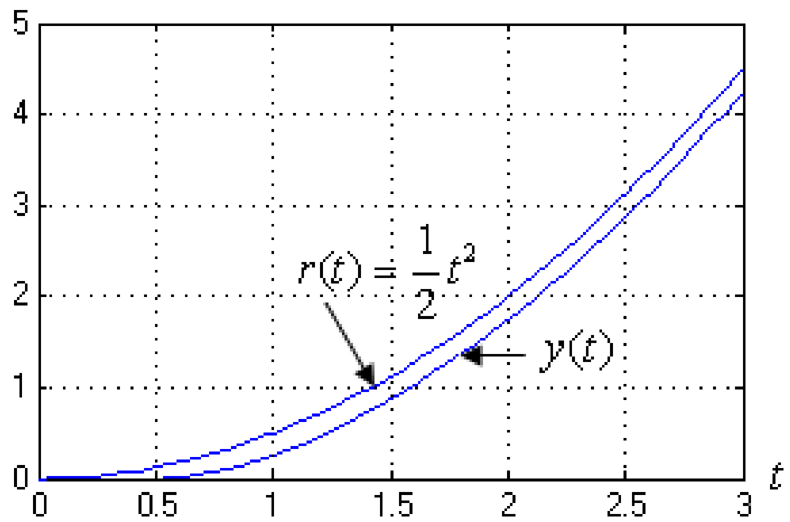


当输入为单位阶跃时：



当输入为单位加速度时：





结论：

- 当系统为单位速度输入时，经过两拍以后，输出量完全等于输入采样值，但在各采样点之间还存在着一定的偏差，即存在着一定的纹波。
- 按某种典型输入设计的最小拍系统，当输入形式改变时，系统的性能变坏，输出响应不一定理想，这说明最小拍系统对输入信号的变化适应性较差。

2.2 复杂对象最小拍控制器设计

广义对象的脉冲传递函数$W_d(z)$：非最小相位系统

（1）系统不稳定，即在单位圆上或圆外有极点

（2）逆系统不稳定，即在单位圆上或圆外有零点

（3）含有纯滞后环节

控制器思想：

根据可实现性、稳定性和稳态误差为零的要求给定$W_B(z)$，从而确定控制器$D(z)$.

由于 $$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)[1-W_B(z)]}$$

可以导出

$$W_B(z)=D(z)W_d(z)[1-W_B(z)]$$

令 $$D(z)=\frac{S(z)}{R(z)}$$

$$W_d(z)=z^{-L}\frac{B(z)}{A(z)}=z^{-L}\frac{B^{-}(z)B^{+}(z)}{A^{-}(z)A^{+}(z)}$$ L 为纯滞后时间

由前述可知： $$1-W_B(z)=W_e(z)=(1-z^{-1})^M F(z)$$

于是得到：

$$W_B(z) = \frac{S(z)}{R(z)} \cdot z^{-L} \frac{B^-(z)B^+(z)}{A^-(z)A^+(z)} \cdot \underbrace{(1-z^{-1})^M F(z)}_{W_e(z)}$$

分析：

1. 对象不稳定的极点 $A^-(z)$

2. 对象不稳定的零点 $B^-(z)$

3. 纯滞后因子 z^{-L}

于是，得到结论

（1）对象不稳定的极点由$F(z)$，即$W_e(z)=1-W_B(z)$来抵消；

（2）对象不稳定的零点和纯滞后因子，需包含在闭环系统传递函数$W_B(z)$中

现象：

控制器可以实现，系统稳定，但是系统调整时间延长。

假设广义对象 中有 ***p*** 个不稳定的极点，***q*** 个不稳定的零点，纯滞后时间为 ***L***，则系统闭环脉冲传递函数 $\boldsymbol{W_B(z)}$的一般形式为:

稳态误差的要求

$$W_B(z) = [\underbrace{f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots + f_m z^{-m} +}_{\text{输入典型函数决定}}$$

可实现性的要求

$$\underbrace{f_{m+1} z^{-(m+1)} + \cdots + f_{m+p} z^{-(m+p)}}_{\text{对象不稳定的极点个数 } p \text{ 决定}}]\underbrace{(1+\beta_1 z^{-1})\cdots(1+\beta_q z^{-1})}_{\text{对象不稳定的零点因子式}}\underbrace{z^{-L}}$$

对象纯滞后环节

稳定性的要求

系数f_1~f_{m+p} 可由下列 $m+p$ 个方程联立求解得到：

$$
\left.
\begin{aligned}
&W_B(z)\Big|_{z=1}=1\\
&\left.\frac{dW_B(z)}{dz}\right|_{z=1}=0\\
&\vdots\\
&\left.\frac{d^{m-1}W_B(z)}{dz^{m-1}}\right|_{z=1}=0\\
&W_B(z)\Big|_{z=a_1}=1\\
&\vdots\\
&W_B(z)\Big|_{z=a_p}=1
\end{aligned}
\right\}
$$

$$1-W_B(z)=(1-z^{-1})^m F_1(z)$$

1-$W_B(z)$包含对象不稳定的极点：

$$1-W_B(z)=(1-a_1z^{-1})(1-a_2z^{-1})\cdots(1-a_pz^{-1})F_2(z)$$

例题讲解

例2.2： $W_d(z)=\dfrac{2.2z^{-1}}{1+1.2z^{-1}}$ 设计阶跃输入下的最小拍控制器。

解： （1）不考虑对象不稳定的极点时，对于单位阶跃输入，有

$$1-W_B(z)=W_e(z)=1-z^{-1} \qquad W_B(z)=1-W_e(z)=z^{-1}$$

于是 $$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)[1-W_B(z)]}=\frac{0.4545(1+1.2z^{-1})}{1-z^{-1}}$$

输出信号序列为

$$Y(z)=W_B(z)R(z)=z^{-1}+z^{-2}+\cdots$$

系统似乎稳定。

若对象产生漂移，变为

$$W_d^*(z)=\frac{2.2z^{-1}}{1+1.3z^{-1}}$$

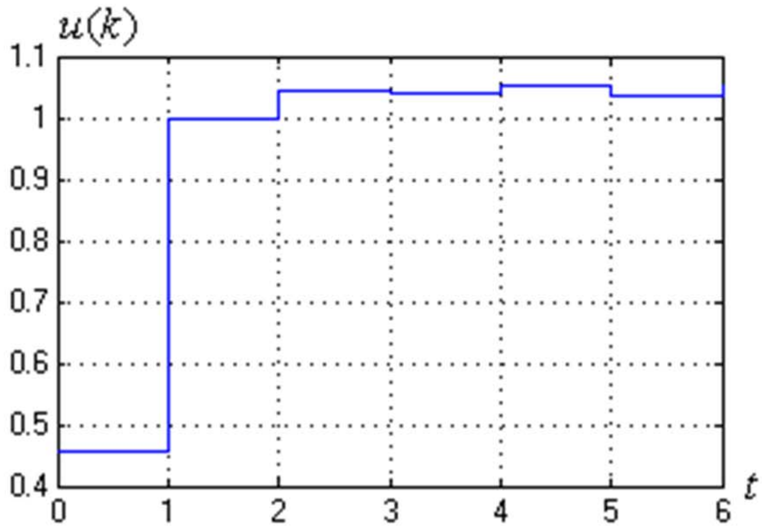
则在控制器不变的情况下，有

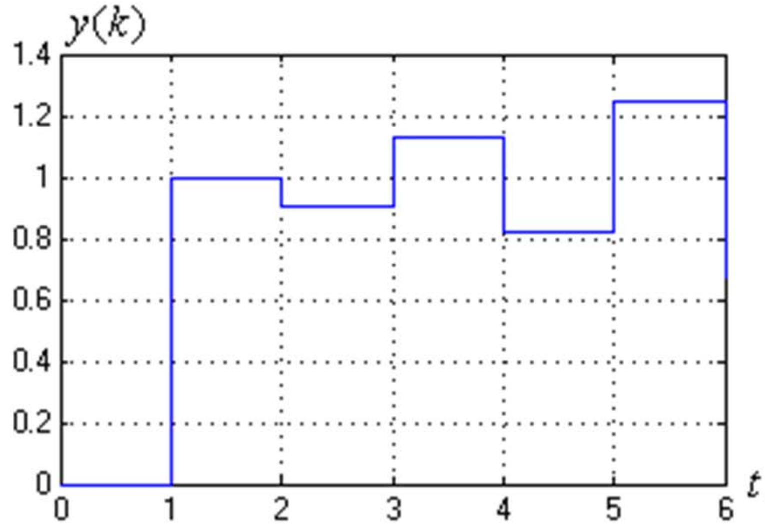
$$W_B^*(z)=\frac{W_d^*(z)D(z)}{1+W_d^*(z)D(z)}=\frac{z^{-1}(1+1.2z^{-1})}{1+1.3z^{-1}-0.1z^{-2}}$$

输出信号序列为

$$Y^*(z)=W_B^*(z)R(z)$$
$$=z^{-1}+0.9z^{-2}+1.13z^{-3}+0.821z^{-4}+1.246z^{-5}+\cdots$$

输出信号发散，系统不稳定。





（2）考虑对象不稳定的极点时，对于单位阶跃输入有

$$W_B(z) = f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2}$$

于是有：
$$\begin{cases} W_B(z)|_{z=1} = f_1 + f_2 = 1 \\ W_B(z)|_{z=-1.2} = -\dfrac{f_1}{1.2} + \dfrac{f_2}{1.44} = 1 \end{cases}$$

于是得到： $f_1 = -0.2 \qquad f_2 = 1.2$

于是 $$W_B(z) = -0.2z^{-1} + 1.2z^{-2}$$

$$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)\left[1-W_B(z)\right]}=\frac{-0.2z^{-1}+1.2z^{-2}}{\dfrac{2.2z^{-1}}{1+1.2z^{-1}}(1+1.2z^{-1})(1-z^{-1})}=-\frac{0.091(1-6z^{-1})}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=W_B(z)R(z)=\frac{-0.2z^{-1}+1.2z^{-2}}{1-z^{-1}}=-0.2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots$$

系统稳定。

若对象产生漂移，变为

$$W_d^*(z)=\frac{2.2z^{-1}}{1+1.3z^{-1}}$$

则在控制器不变的情况下，有

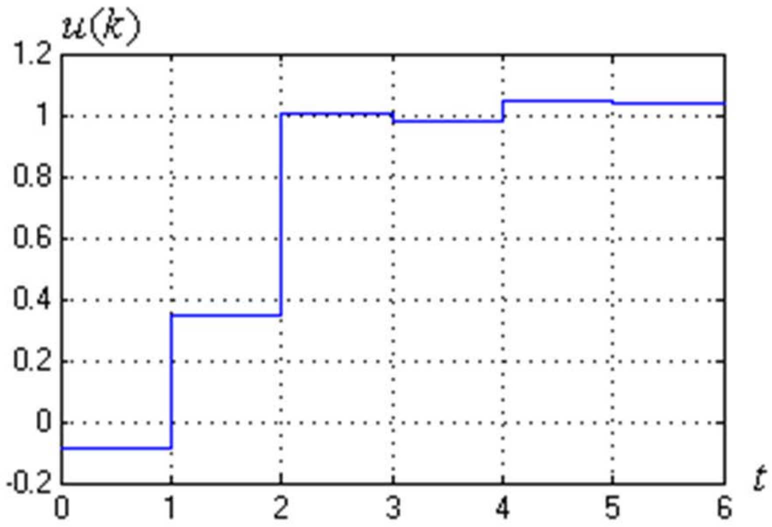
$$W_B^*(z)=\frac{D(z)W_d^*(z)}{1+D(z)W_d^*(z)}=-\frac{0.2z^{-1}(1-6z^{-1})}{1+0.1z^{-1}-0.1z^{-2}}$$

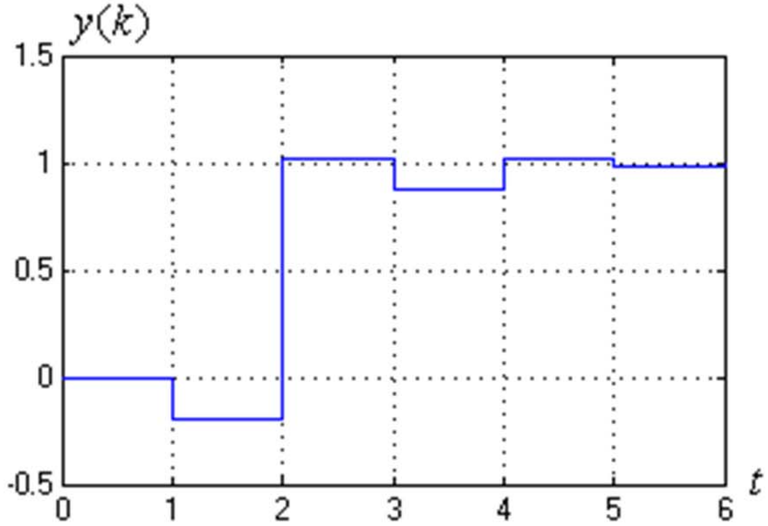
输出信号序列为

$$Y(z)=W_B^*(z)R(z)=\frac{-0.2z^{-1}(1-6z^{-1})}{(1+0.1z^{-1}-0.1z^{-2})(1-z^{-1})}$$

$$=-0.2z^{-1}+1.02z^{-2}+0.878z^{-3}+1.0142z^{-4}+\cdots$$

可知在被控对象参数变化后，闭环系统仍然稳定。





·教学单元二结束·