知识点K2.19

LTI离散系统的频率响应

主要内容：

离散系统的频率响应

基本要求：

掌握离散系统的频率响应

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

K2.19 LTI离散系统的频率响应

若LTI因果离散系统的系统函数 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆，$(|z|>\alpha, \alpha<1)$，则 $H(e^{j\Omega T})$称为**频率响应**。

$$H(e^{j\Omega T}) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega T}}$$

$$H(e^{j\Omega T}) = |H(e^{j\Omega T})|\, e^{j\varphi(\Omega T)}$$

$|H(e^{j\Omega T})|$称为系统的**幅频响应**；

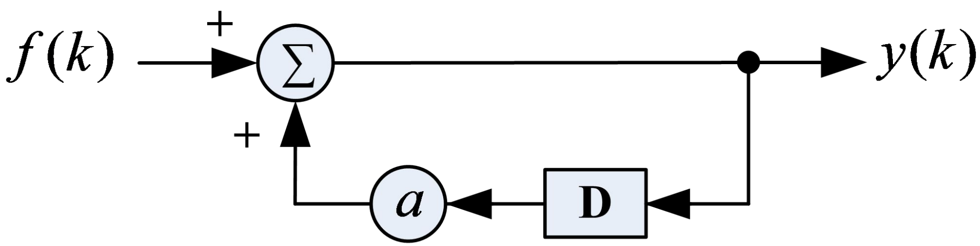
$\varphi(\Omega T)$称为系统的**相频响应**；

说明：$H(e^{j\Omega T})$表示系统对不同频率 ΩT 的正弦序列的稳态响应特性；**是 ΩT 的连续周期函数，周期为2π**。

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

LTI离散系统的频率响应

例1 如图系统，$f(k)$为因果信号，$0<\alpha<1$，求$H(e^{j\Omega T})$



解：系统差分方程为：

$$y(k)-ay(k-1)=f(k)$$

求出系统函数$H(z)$：

$$Y_{zs}(z)-az^{-1}Y_{zs}(z)=F(z)$$

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},\quad |z|>a$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

LTI离散系统的频率响应

$|z| > a, 0 < a < 1$ 收敛域含单位圆，系统的频率响应为：

$$H(e^{j\Omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega T}} = \frac{e^{j\Omega T}}{e^{j\Omega T} - a}$$

$$|H(e^{j\Omega T})| = \frac{1}{|e^{j\Omega T} - a|} = \frac{1}{|\cos\Omega T + j\sin\Omega T - a|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\cos\Omega T - a)^2 + \sin^2\Omega T}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+a^2) - 2a\cos\Omega T}}$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

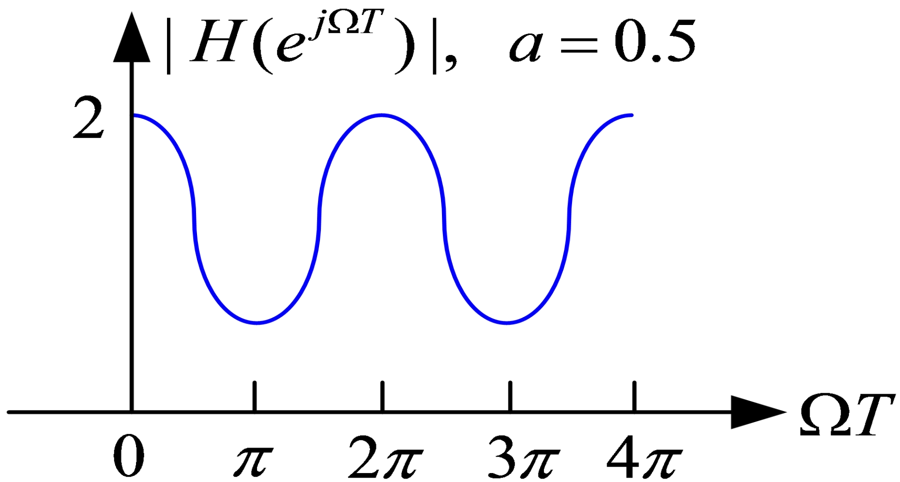
LTI离散系统的频率响应

幅频响应曲线：（ Ω *T*称为数字角频率，可记为θ）

$$\Omega T = 0,\quad |H(e^{j\Omega T})| = \frac{1}{1-a}$$

$$\Omega T = \pi,\quad |H(e^{j\Omega T})| = \frac{1}{1+a}$$

$$\Omega T = 2\pi,\quad |H(e^{j\Omega T})| = \frac{1}{1-a}$$



Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

例2 已知离散系统的输入 $f(k)$ 为

$$f(k)=9+9\cos(\frac{\pi}{4}k)+9\cos(\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{4}),\quad -\infty<k<\infty$$

系统函数为 $H(z)=\dfrac{1}{2z+1},\quad |z|>\dfrac{1}{2}$，求稳态响应 $y(k)$ 。

解: 因为 $|z|>\dfrac{1}{2}$，所以 $H(z)$ 收敛域包含单位圆。

$$H(e^{j\Omega T})=\frac{1}{2e^{j\Omega T}+1}$$

(1) 设 $f_1(k)=9=9\cos(\Omega Tk),\quad \Omega T=0$

$$H(e^{j0})=\frac{1}{3}\qquad y_1(k)=9\times\frac{1}{3}=3$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

(2) 设 $f_2(k) = 9\cos(\frac{\pi}{4}k),\quad \Omega T = \frac{\pi}{4}$

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{2e^{j\frac{\pi}{4}} + 1} = 0.36\angle -30.3^\circ$$

$$y_2(k) = 9\,|H(e^{j\Omega T})|\cos[\Omega Tk + \varphi(\Omega T)],\quad \Omega T = \frac{\pi}{4}$$

$$= 9 \times 0.36\cos(\frac{\pi}{4}k - 30.3^\circ)$$

$$= 3.24\cos(\frac{\pi}{4}k - 30.3)$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

(3) 设 $f_3(k)=9\cos(\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{4})$, $\Omega T=\frac{\pi}{2}$

$$H(e^{j\Omega T})=\frac{1}{2e^{j\frac{\pi}{2}}+1}=\frac{1}{1+j2}=0.45\angle-63.4^{\circ}$$

$$y_3(k)=9\,|H(e^{j\Omega T})|\cos[\Omega Tk+\frac{\pi}{4}+\varphi(\Omega T)],\quad \Omega T=\frac{\pi}{2},$$

$$=9\times0.45\cos(\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{4}-63.4^{\circ})$$

$$=4.05\cos(\frac{\pi}{2}k-18.4^{\circ})$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

(4) 系统对$f(k)$的响应为$y(k)$

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k) + y_3(k)$$

$$= 3 + 3.24\cos(\frac{\pi}{4}k - 30.3^\circ) + 4.05\cos(\frac{\pi}{2}k - 18.4^\circ)$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved