知识点K4.02

短时傅里叶变换

主要内容：

1.短时傅里叶变换的定义

2.短时傅里叶变换的缺陷

3.实际信号时频分析的需求

基本要求：

1. 理解短时傅里叶变换的定义
2. 了解STFT中窗函数的作用
3. 了解多分辨率分析的作用

1. 短时傅里叶变换的定义

很多实际的系统分析中，需要同时知道局部范围内的频率信息和时间信息，而不是全局或者整体的平均数值（恰恰这就是傅里叶变换所做的），比如：

（1） 在分析音乐或者语音信号的时候，关心的是某个音符是在什么时候出现的；

（2） 在对地震波的分析中，关心的是什么位置出现了特定频率的反射波；

（3） 在对图像的进行分析时，关心的是信号发生突变部分的具体位置。

当我们同时关心信号的某些频率分量及其作用时间的时候，傅里叶变换无法提供时频联合分析结果，也不合适于此类应用场合。

短时傅里叶变换

如果信号保持平稳的时间段很短，那么时间窗也要很窄才能用傅里叶分析来观察和分析信号，显然窗口要窄到从窗里看到的信号确实是平稳的。

定义： 对时域内平方可积信号 $x(t)\in L^2(R)$ 和窗函数 $W(t)$，定义

$$X(\tau,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)W(t-\tau)e^{-j\omega t}dt \qquad (9.2\text{-}3)$$

为 $x(t)$ 的短时傅里叶变换(Short Term Fourier Transform，STFT)，其中 $x(t)$ 是信号本身，$W(t-\tau)$ 是中心位于 τ 位置的时域窗函数。需要注意的是，一般而言 τ 落后于 t，并且其分辨率要低于 t，τ 往往是离散的几个点而不是像 t 一样是连续的。当窗函数为高斯函数时，该变换被称为 Gabor 变换。

STFT与傅里叶变换的不同在于，信号在时间域内被分为若干足够小的片段，每个片段都可以看成是平稳信号，短时傅里叶变换又被称为加窗傅里叶变换（Windowed Fourier Transform）。

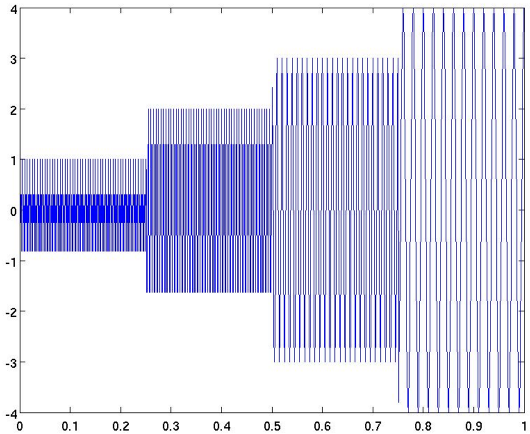
短时傅里叶变换

例 9.2-1 已知 $f_3(t)=\sum_{i=1}^{4} i\cos\left(2^{-i}\cdot\pi\cdot1600\cdot t_i\right), t_i\in(0.25i-0.25,0.25i]$，并且窗函数 $W(t)=e^{-1000t^2/2}$，试对该信号用短时傅里叶变换进行分析。

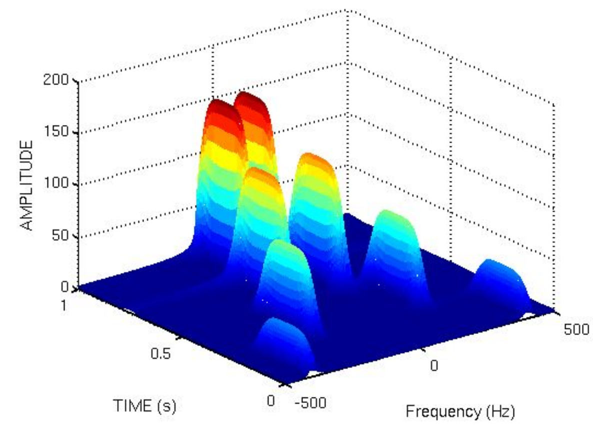
解：f_3 实际上是一个分段平稳的非平稳信号，其时域波形如图 9.2-1(a)所示，共四个频率分量，频率分别为 400Hz, 200Hz,100Hz 和 50Hz，振幅分别为 1,2,3 和 4，按照时间顺序各分量分别作用 0.25 秒。

因为短时傅里叶变换是关于时间和频率的函数，所以其变换结果是二维的，如果加上变换结果的幅度则是三维，用三维网格表示的该信号的 STFT 结果如图图 9.2-1(b)(见扩展资源 T9001.jpg)所示。

短时傅里叶变换



(a)非平稳信号



(b) STFT变换结果

图9.2-1 一个非平稳信号及其STFT变换结果

可以看到，STFT以频率中线为轴对称的。因为STFT只不过是加窗函数的傅里叶变换，故STFT结果也是对称的。四个波峰对应四个分量，这四个波峰在时间轴上对应着不同的位置，这意味着原始信号的四个频率分量也都出现在不同的时间段内。因此，我们得到的是原始信号的一个时-频联合表示，即不仅表明了信号中都有什么频率分量，还给出了各分量的作用时刻。

2. 短时傅里叶变换的缺陷

测不准原理最初是应用在移动粒子的动量和位置的测量上，也可以被用在信号的时频分析上。简单的说，这个原理表明在实际的物理系统中不能获取信号绝对精确的时频表示。也就是说，我们无法知道在某个瞬间上某个单一频率分量的确切信息，能够知道的仅仅是在一个时间窗内（而不是瞬间）的某个频率窗内（而不是某个单一频率）的分量信息。

在短时傅里叶变换中，时间窗口宽度不变，对于高频信号而言，其变换系数可能是很多周期的平均值，无法对局部特征进行刻画；若减小时间窗，高频信号能够被捕捉到，但此时将无法刻画低频信号，因为在一个很短的窗口内观察到的低频信号变化可能小到无法检测。因此，窗口宽度固定的短时傅里叶变换对于刻画频率随时间变换剧烈的信号不够灵活，不够准确。

短时傅里叶变换

关于短时傅里叶变换的窗函数，可以有如下结论：

（1）较窄的窗口=>较高的时间分辨率，较低的频率分辨率；

（2）较宽的窗口=>较高的频率分辨率，较低的时间分辨率。

例9.2-2 采用不同宽度的窗函数，对例9.2-1中的信号进行短时傅里叶变换，并验证窗口宽度与分辨率的关系。

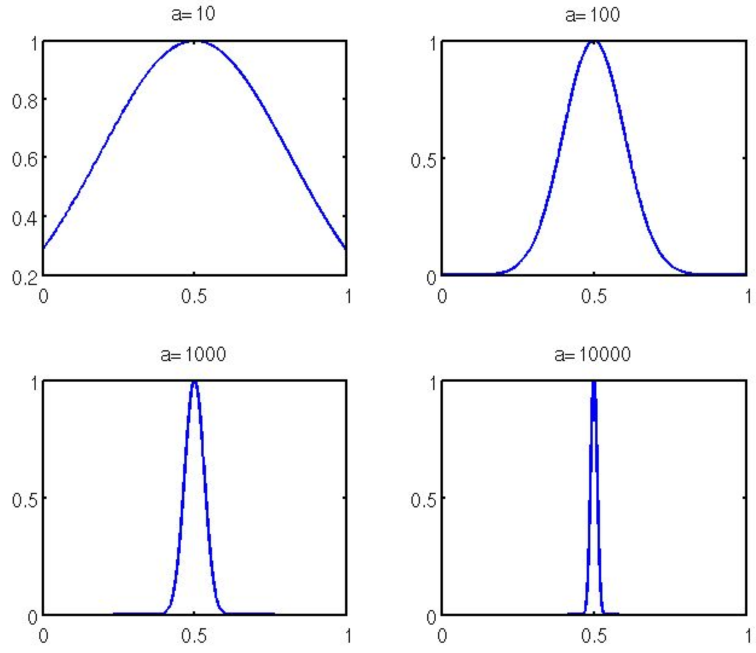


图9.2-2 不同宽度的窗函数

短时傅里叶变换

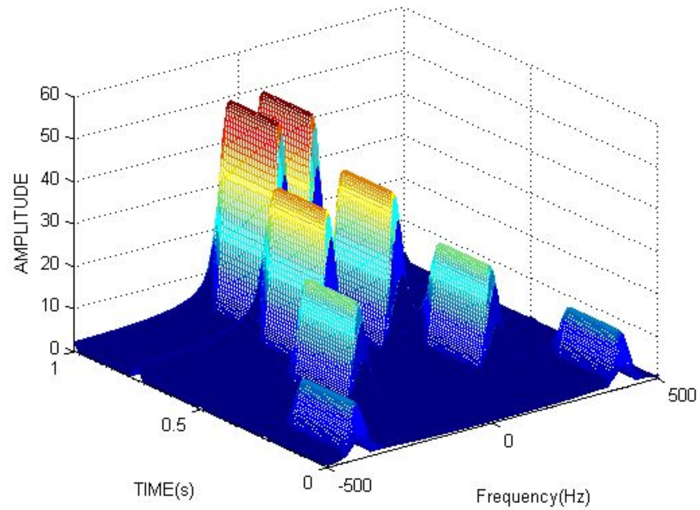


图9.2-3 a=10000 的STFT结果

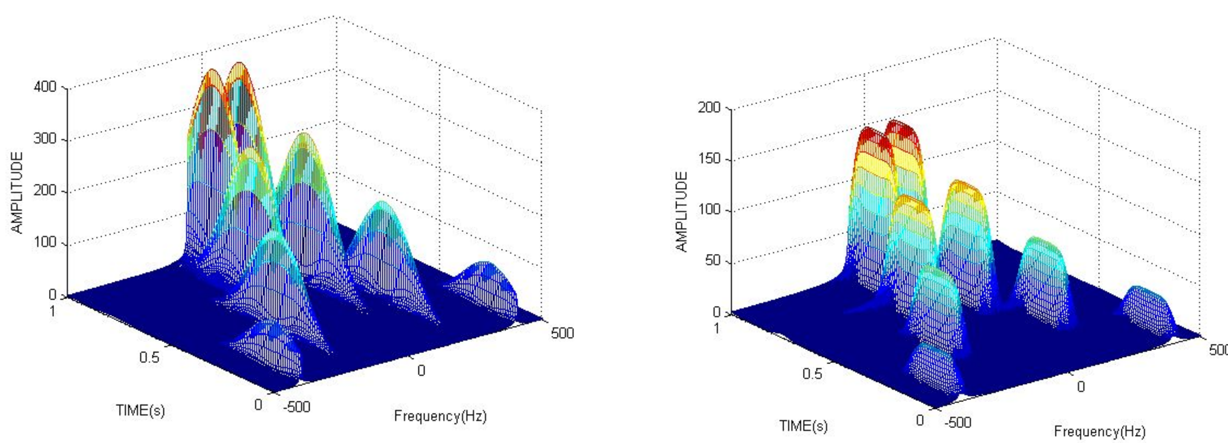


图 9.2-4 $a=100$ (左)和 $a=1000$ (右)时 STFT 的结果

短时傅里叶变换

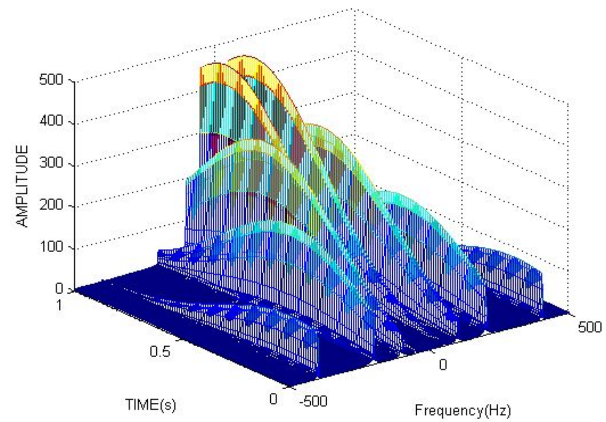


图9.2-5 *a*=10时的STFT结果

结论:

（1）对STFT而言，较窄的窗函数得到较高的时间分辨率，但频率分辨率较低；

（2）对STFT而言，较宽的窗函数得到较高的频率分辨率，但时间分辨率较低，并且过宽的窗函数不能保证窗口内的信号是平稳的；

（3）STFT的窗口宽度决定了整个STFT结果中能够获得的时间分辨率和频率分辨率。

短时傅里叶变换

显而易见，在使用STFT之前首先面临的问题就是窗函数的选择问题。如果原始信号中的频率分量能被分离出来，或者能通过其他手段来估算频段构成，那么可以牺牲一定的频率分辨率，用一个较窄的窗来追求更高的时间分辨率；否则，若无法获得原始信号的频率信息，那么完全没有办法保证窗函数能够适于进行信号的时频分析。

短时傅里叶变换试图通过窗函数来兼顾时间和频率分辨率，但不幸的是，窗函数的选择与频率无关，并在整个变换过程中保持恒定，并且难以恰当地确定窗函数，本质上是一种分辨率单一且固定的分析方法。小波变换(**Wavelet Transform**)在一定程度上解决了短时傅里叶变换中的问题。

3. 实际信号时频分析的需求

在短时傅里叶变换中，选定了窗口函数以后，整个分析过程的时间分辨率和频率分辨率都保持恒定。但实际的信号分析却往往有如下的要求：

（1）信号高频成分对应的是时域中快速变化的细节，比如纹理边缘、边沿突变或者大幅度的脉冲等，分析时关心的是其出现的时刻，即对时域分辨率要求较高，而对频率分辨率要求较低，因为不需精确地知道造成这种变化的分量构成。

（2）信号低频成分对应着时域中缓慢变化的主体，并且这些分量包含了信号的主要能量，反应的是信号变化的大趋势，因此分析时对频率分辨率要求较高，希望能够比较精确地定位出频率成分，但对时域分辨率的要求较低，这是因为本身信号变化缓慢，时间变化对幅度的影响比较低。

短时傅里叶变换

因此，比较理想的分析方法应该是，依据实际情况局部而有针对性地选择分辨率，即：对于快速变化的高频信号时，采用高时间分辨率和低频率分辨率；而对变换缓慢的低频信号，则采用高频率分辨率和低时间分辨率。

采用不同的分辨率对不同的信号分量进行分析的方法一般被称作多分辨分析（**Multiple Resolution Analysis**，**MRA**）。多分辨分析不像**STFT**那样对所有频率分量采用相同的分辨率。本章所要介绍的重点内容小波变换，就是一种具备多分辨分析特性，具有良好的局部化能力的变换，故此得名"数学显微镜"。需要说明的是，多分辨分析方法在处理高频信号持续时间较短，低频信号持续时间较长时才有效。幸运的是，实际应用中遇到的大多数信号都满足这一点。