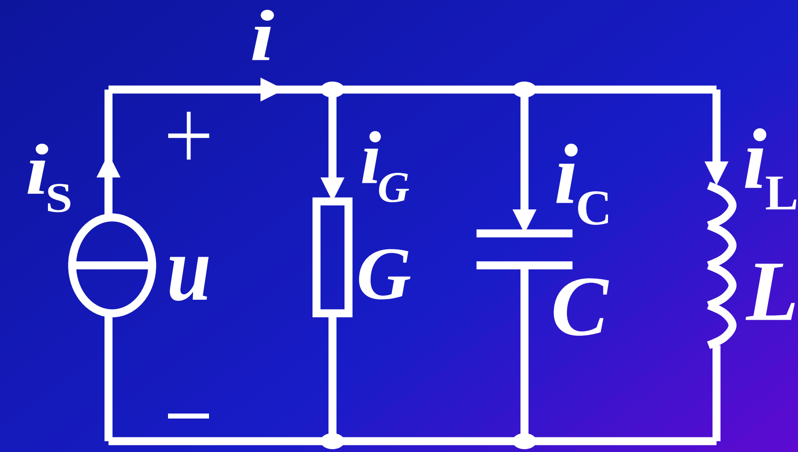
GCL并联谐振电路

串联谐振电路适用于信号源内阻较小的场合，当信号源内阻很大时，电路的品质因数将会变得很低，这时宜采用并联谐振电路。



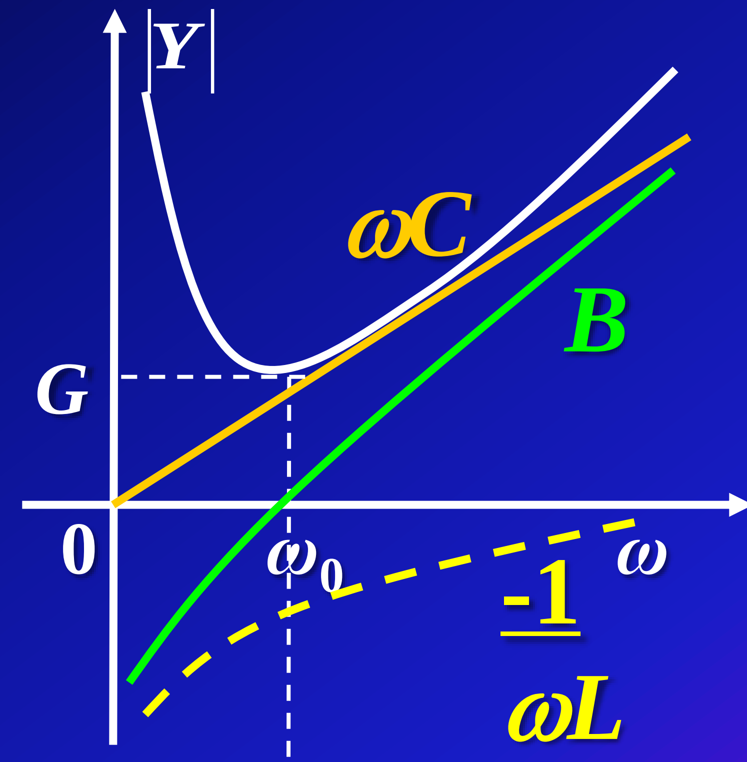
策动点导纳：

$$Y(\mathrm{j}\omega)=G+\mathrm{j}(\omega C-\frac{1}{\omega L})=G+\mathrm{j}B=|Y(\mathrm{j}\omega)|\angle\theta_Y(\omega)$$

$$|Y(j\omega)| = \sqrt{G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}$$

$$\theta_Y = \arctan\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right)$$

$$B = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$



$\omega < \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega > \omega_0$
B<0	B=0	B>0
感性	阻性	容性
电压超前电流源	电压与电流源同相	电压滞后电流源

谐振条件

当$\omega C-\frac{1}{\omega L}=0$时，电路发生谐振

$$\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

式中ω_0称为电路的固有谐振角频率，同样由电路的L，C参数决定。

GCL并联电路在谐振时的感纳和容纳在量值上相等。

特征参数

1、容纳和感纳

$$B_{\mathrm{C0}}=\omega_0 C=B_{\mathrm{L0}}=\frac{1}{\omega_0 L}=\sqrt{\frac{C}{L}}$$

2、GCL并联谐振电路的品质因数Q:

$$Q=\frac{\omega_0 C}{G}=\frac{1}{\omega_0 GL}=\frac{1/\rho}{G}=R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

电路特性

1 谐振时的输入导纳

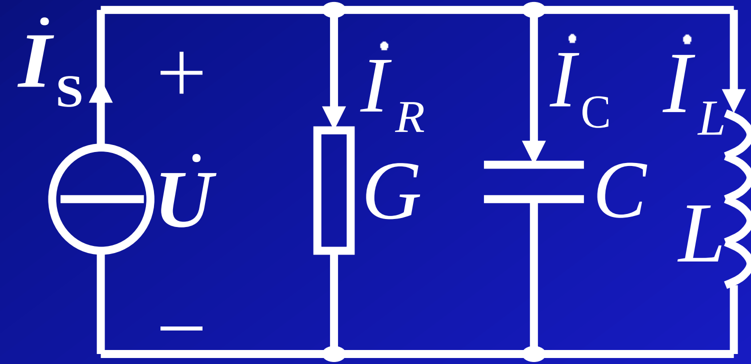
$Y(\mathrm{j}\omega_0)=Y_0=G$，输入导纳具有最小值，即：并联谐振时总阻抗值最大，且为纯电阻。

2 谐振时的电压和电流

$$\dot{U}_0=\frac{\dot{I}_S}{G}=\dot{I}_S R$$

电路电压达到最大值，与电流源同相；

电阻、电感和电容的谐振电流为：

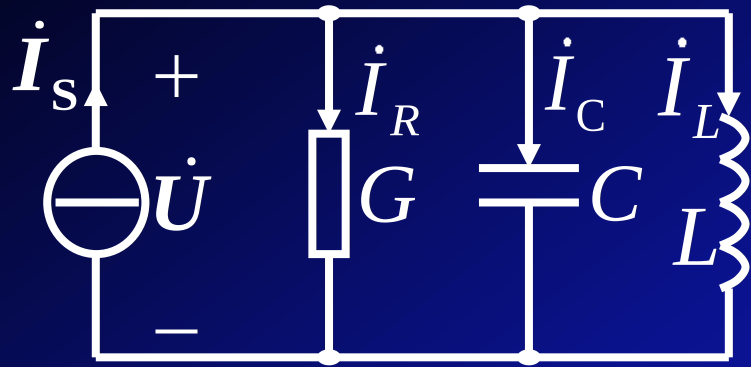


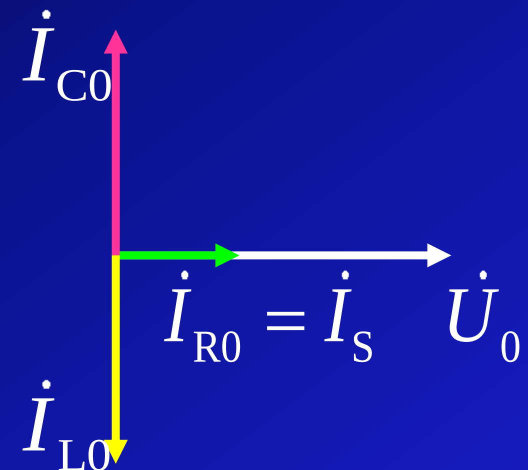
$$\dot{I}_{R0} = G\dot{U}_0 = \dot{I}_S$$

$$\dot{I}_{L0} = \frac{1}{j\omega_0 L}\dot{U}_0 = -j\frac{R}{\omega_0 L}\dot{I}_S = -jQ\dot{I}_S$$

$$\dot{I}_{C0} = j\omega_0 C\dot{U}_0 = j\omega_0 RC\dot{I}_S = jQ\dot{I}_S$$

并联谐振又称电流谐振





电感电流或电容电流的幅度为**电流源电流幅度的Q倍**，即：

$$I_{L0}=I_{C0}=QI_S=QI_{R0}$$

并联谐振时的相量图，且有：

$$\dot{I}_{B0}=\dot{I}_{L0}+\dot{I}_{C0}=0$$

结论：

并联谐振时

电导电流最大，与电流源电流相等；

电感电流和电容电流的幅度放大为电流源电流的**Q**倍，又称为电流谐振。

但反相，有 $\dot{I}_{C0}+\dot{I}_{L0}=0$ ，即：

并联谐振时，对外电路而言，**LC**并联部分相当于开路。

3 谐振时的功率和能量

设电流源$i_S(t)=I_{Sm}\cos\omega_0 t$，则：

$$u_0(t)=U_m\cos\omega_0 t=RI_{Sm}\cos\omega_0 t$$

$$i_{L0}(t)=-QI_{Sm}\cos(\omega_0 t+90^\circ)$$

$$i_{C0}(t)=QI_{Sm}\cos(\omega_0 t+90^\circ)$$

电感和电容吸收的瞬时功率分别为：

$$p_{L0}(t)=-QU_m I_{Sm}\cos\omega_0 t\cos(\omega_0 t+90^\circ)=QUI_S\sin 2\omega_0 t$$

$$p_{C0}(t)=-p_{L0}(t)=-QUI_S\sin 2\omega_0 t$$

由于$i_{L0}(t)+i_{C0}(t)=0$（相当于虚开路），

电感和电容的总瞬时功率为零

$$p_{L0}(t)+p_{C0}(t)=0$$

谐振时电感和电容的总能量保持常量：

$$w=w_{L0}+w_{C0}=LI_{L0}^{2}=CU_{C0}^{2}=CR^{2}I_{S}^{2}$$

电流源发出的功率全部被电阻吸收

$$p_{S}(t)=p_{R0}(t)。$$

能量在电感和电容间往复交换，形成电压和电流的正弦振荡。

4 GCL并联电路的频率特性

电路的阻抗函数：

$$Z(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}}{\dot{I}_S}=\frac{1}{G+\mathrm{j}\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)}=\frac{1/G}{1+\mathrm{j}\left(\omega_0 C/G-\dfrac{1/G}{\omega_0 L}\right)}$$

代入 $Q=\dfrac{\omega_0 C}{G}=\dfrac{1/G}{\omega_0 L}$

得：

$$Z(\mathrm{j}\omega)=\frac{Z_0}{1+\mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

由于 $\dot{U}_0 = Z_0 \dot{I}_S$，得：　　电路的传输函数：

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{U}_0} = \frac{Z}{Z_0} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

故，并联谐振电路的谐振函数式与串联谐振电路的完全相同，因此，二者的幅频特性曲线也相同，选择性和通带特性也相同。

带宽：

$$BW = \omega_{C2} - \omega_{C1} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{G}{C}(rad/s)$$

$$Bf = f_{C2} - f_{C1} = \frac{f_0}{Q} = \frac{G}{2\pi C}(Hz)$$

例5 *GCL*并联谐振电路中，已知 R=10kΩ, L=1H, C=1μF。试求电路的谐振角频率、品质因数和*BW*。

解：$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1\times10^{-6}}}\text{rad/s} = 10^3\text{rad/s}$$

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = R\omega_0 C = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 10$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 100\text{rad/s} \qquad \Delta f = \frac{100}{2\pi}\text{Hz} = 15.9\text{Hz}$$

并联谐振特性总结

对并联谐振电路，在谐振频率$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$处，输入导纳的虚部为0，$Q = \omega_0 C / G$反映了电路在一个周期内所存储的能量与其消耗的能量的比值。在两个半功率频率ω_{C1}和ω_{C2}处，导纳的幅度为最小幅度值的$\sqrt{2}$倍，也可认为在这两个频率处，电压响应为最大值的70.7%，而这两个频率的差称为半功率(3dB)带宽，且$BW = \omega_0 / Q$。

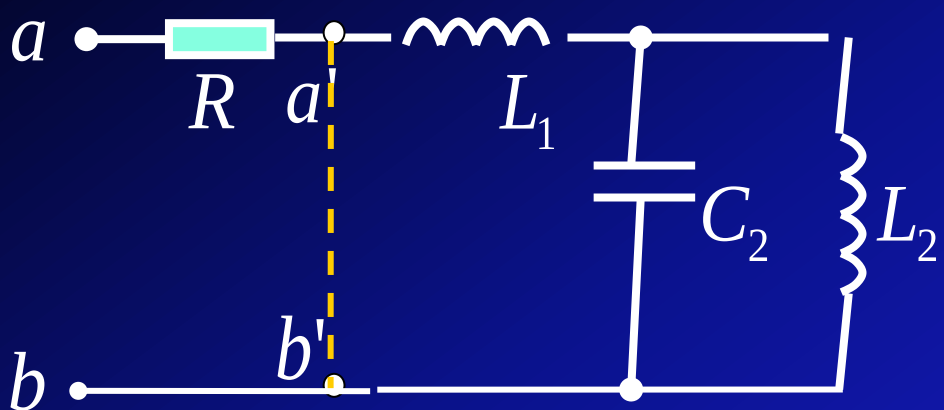
串、并联谐振电路的推广

当多个电抗元件组成谐振电路时：

策动点阻抗虚部为零时，电路发生串联谐振，相应的频率为串联谐振频率；

策动点导纳虚部为零时，电路发生并联谐振，相应的频率为并联谐振频率。

多个电抗元件组成的局部电路的串、并联谐振频率的计算：



一般方法：

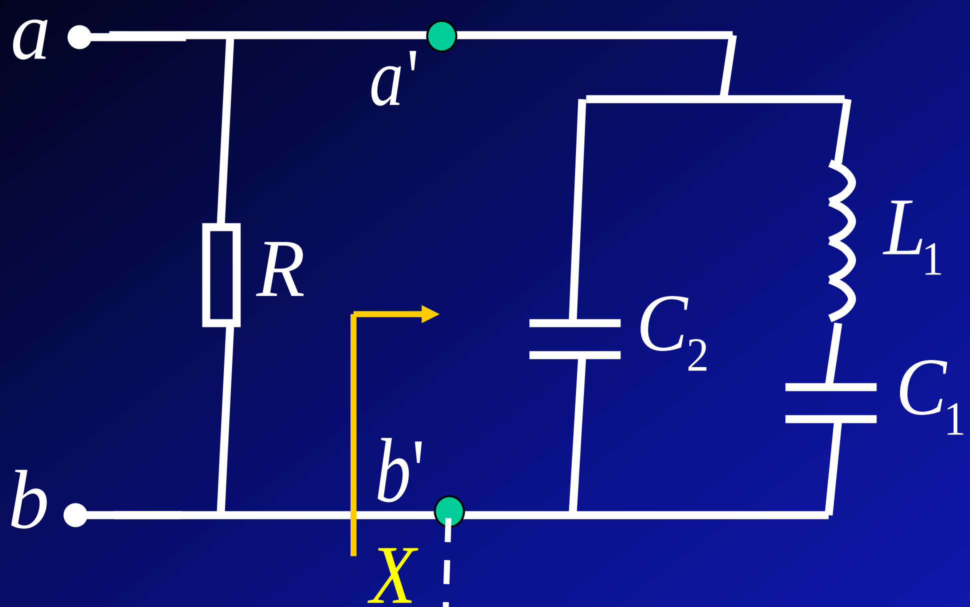
计算等效输入阻抗（串）或导纳（并），令其虚部=0来计算相应的谐振频率。

技巧方法：

串联谐振，　相当于a′b′短路，故 $\omega_{01}=\dfrac{1}{\sqrt{C_2(L_1//L_2)}}$

并联谐振，　相当于a′b′开路，故 $\omega_{02}=\dfrac{1}{\sqrt{C_2L_2}}$

例6：求电路的串、并联谐振频率。



解：串联谐振频率：

方法1：

计算电抗X，令X=0来计算相应的谐振频率。

方法2：将a′, b′短路，则：

$$\omega_{01}=\frac{1}{\sqrt{C_1L_1}}$$

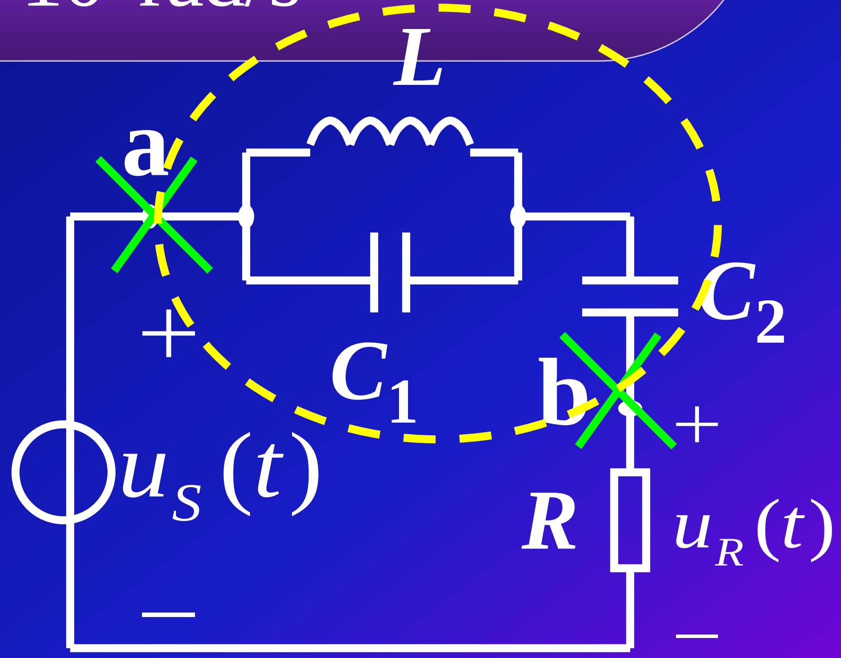
同样，并联谐振频率：将a’, b’开路，则，

$$\omega_{02}=\frac{1}{\sqrt{L_1\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}}}$$

例7 试求C_1 和C_2。已知：L=20mH,

$$u_S(t)=25\cos\omega t+10\cos(3\omega t+30^{\circ})\text{V},$$

$$u_R(t)=25\cos\omega t\text{V}\ ,\ \omega=10^3\text{rad/s}$$



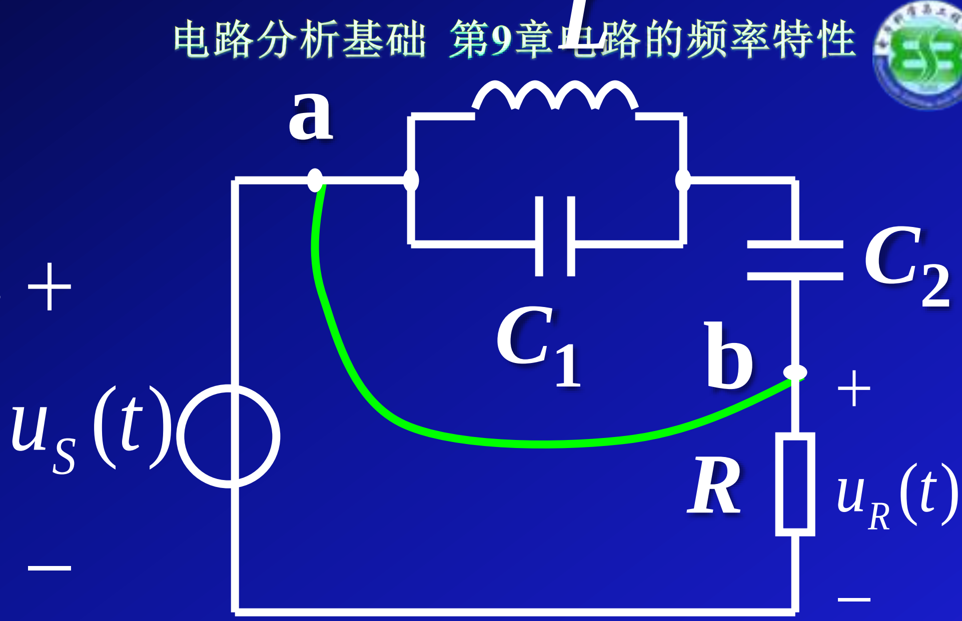
解：$u_S(t)$中3ω分量在R上无输出，a, b相当于开路，即在3ω时发生并联谐振。

$$3\omega=\frac{1}{\sqrt{LC_1}}$$

$$C_1=\frac{1}{(3\omega)^2L}=\frac{1}{(3\times10^3)^2\times20\times10^{-3}}=5.56\mu F$$

$$u_S(t) = 25\cos\omega t + 10\cos(3\omega t + 30^\circ)\text{V}$$

$$u_R(t) = 25\cos\omega t\text{V}$$



$u_S(t)$ 中ω分量在R上全部输出，ω时发生串联谐振，a, b相当于短路, 。

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}$$

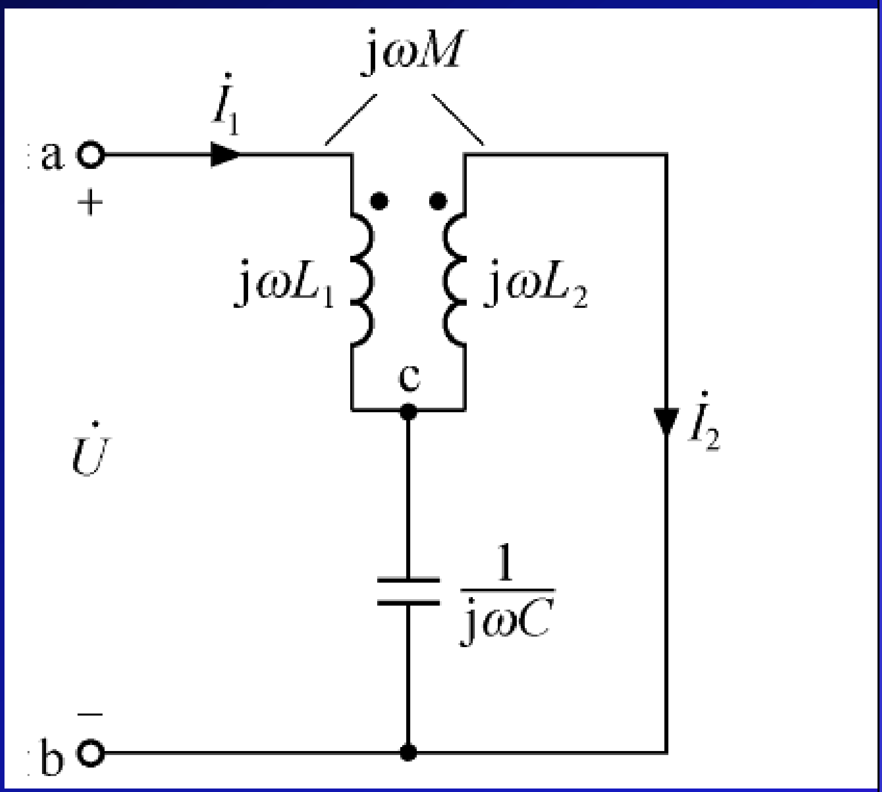
$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L} - C_1 = 50 - 5.56\,\mu\text{F} = 44.44\,\mu\text{F}$$

（与P298例9-3类似 另：习题9-14）

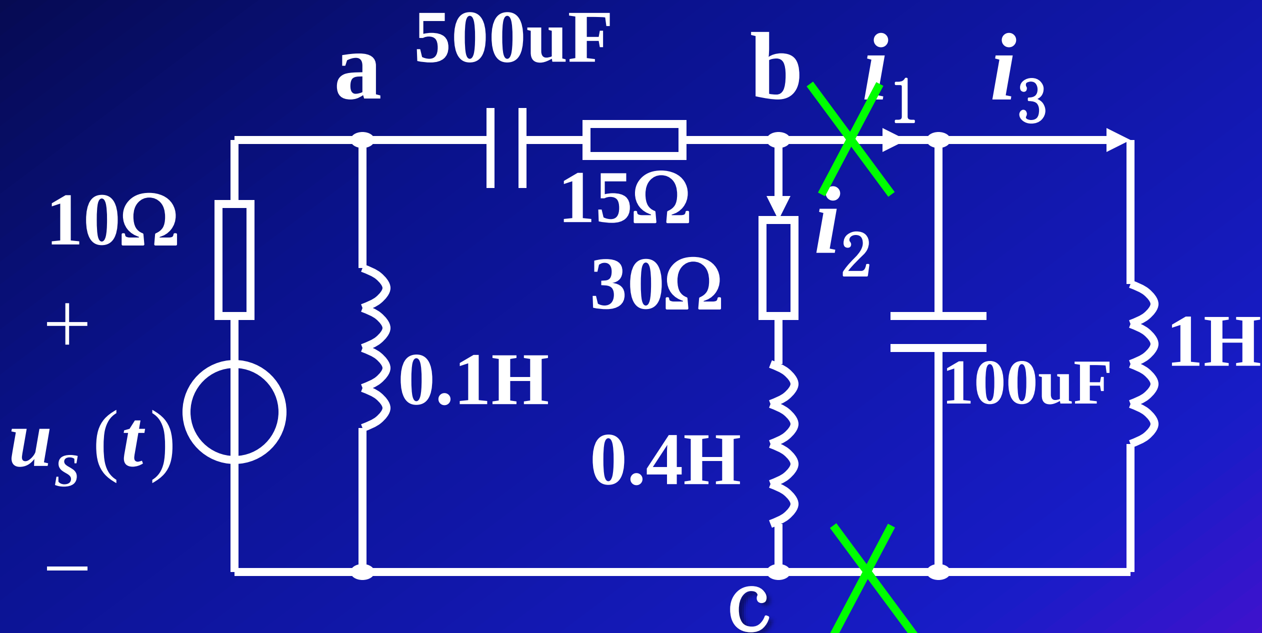
例8（P299例9-4）试求C为何值时 $\dot{I}_1=0$

$\dot{U}=110\angle 0^0 V, \omega L_1=\omega L_2=10\Omega, \omega M=6\Omega$

$\omega=10^6 rad/s$, 此时$\dot{I}_2=?$



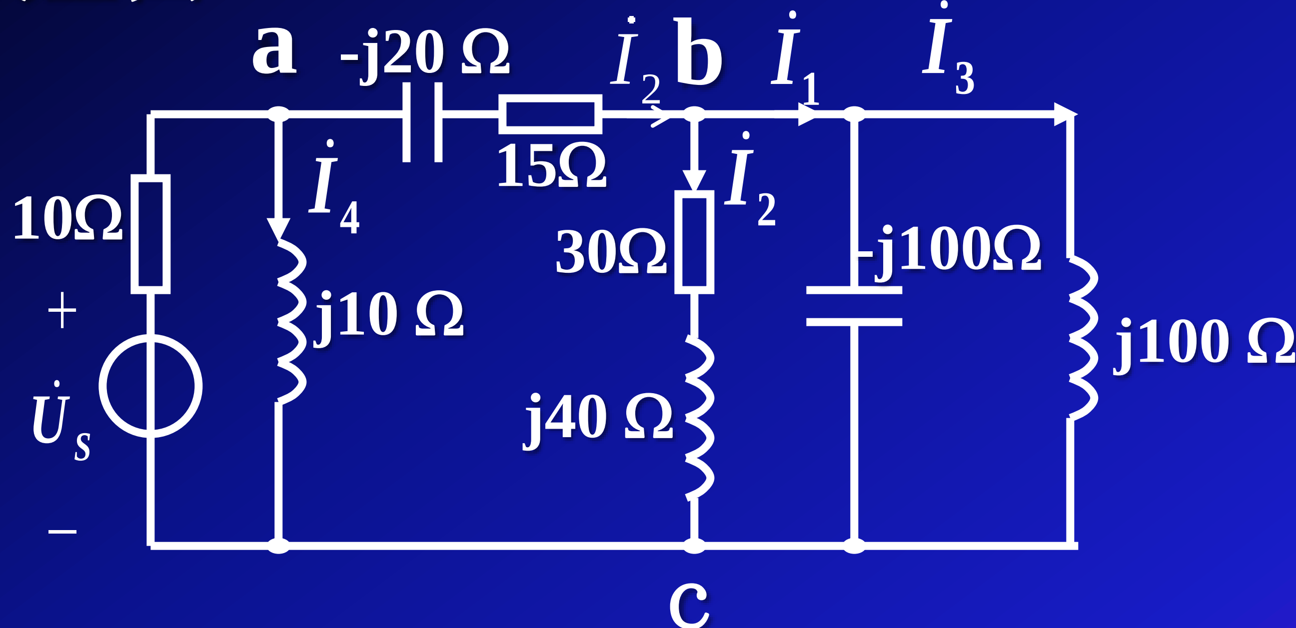
例9 调节电源频率时发现：当电流i_1为零时，i_3为最大，其有效值I_3=1A。试求此时电源电压$u_S(t)$。



解：i_1为零，相当于开路，发生并联谐振。

$$\omega = 1/\sqrt{1\times 100\times 10^{-6}} = 100\text{rad/s}$$

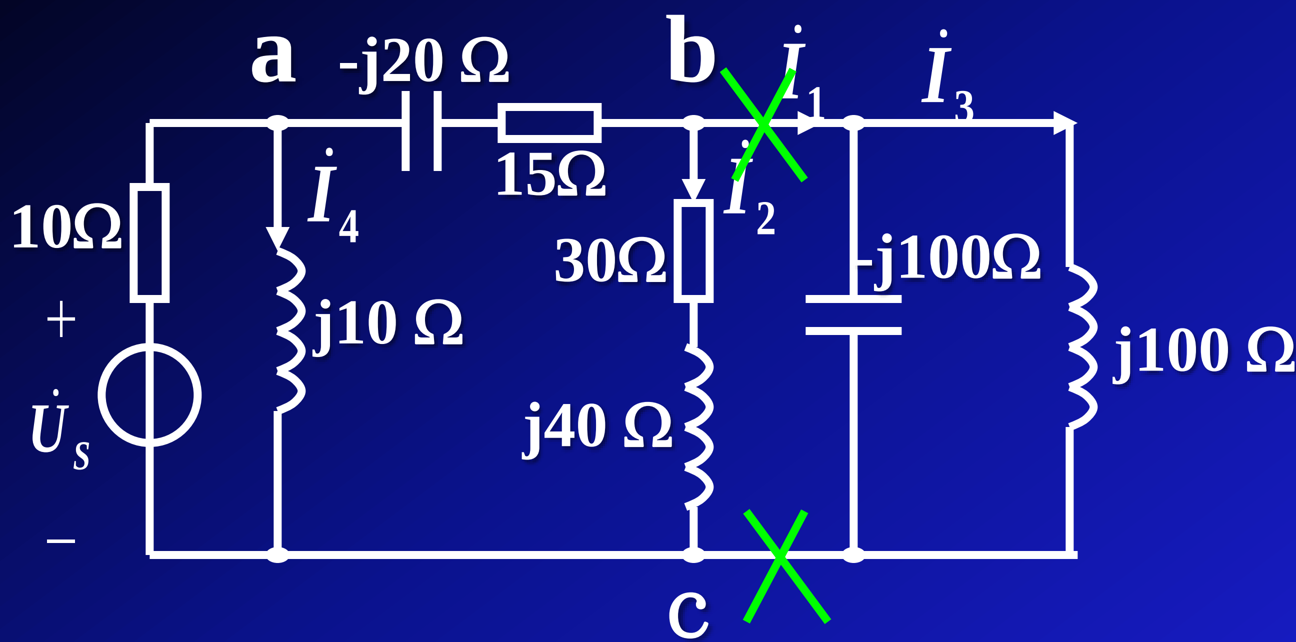
作相量模型图:



设参考相量: $\dot{I}_3 = 1\angle 0^\circ$

则: $\dot{U}_{bc} = \text{j}100\text{V}$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{bc}}{30+\text{j}40} = 2\angle 36.9^\circ \approx 1.6 + \text{j}1.2$$

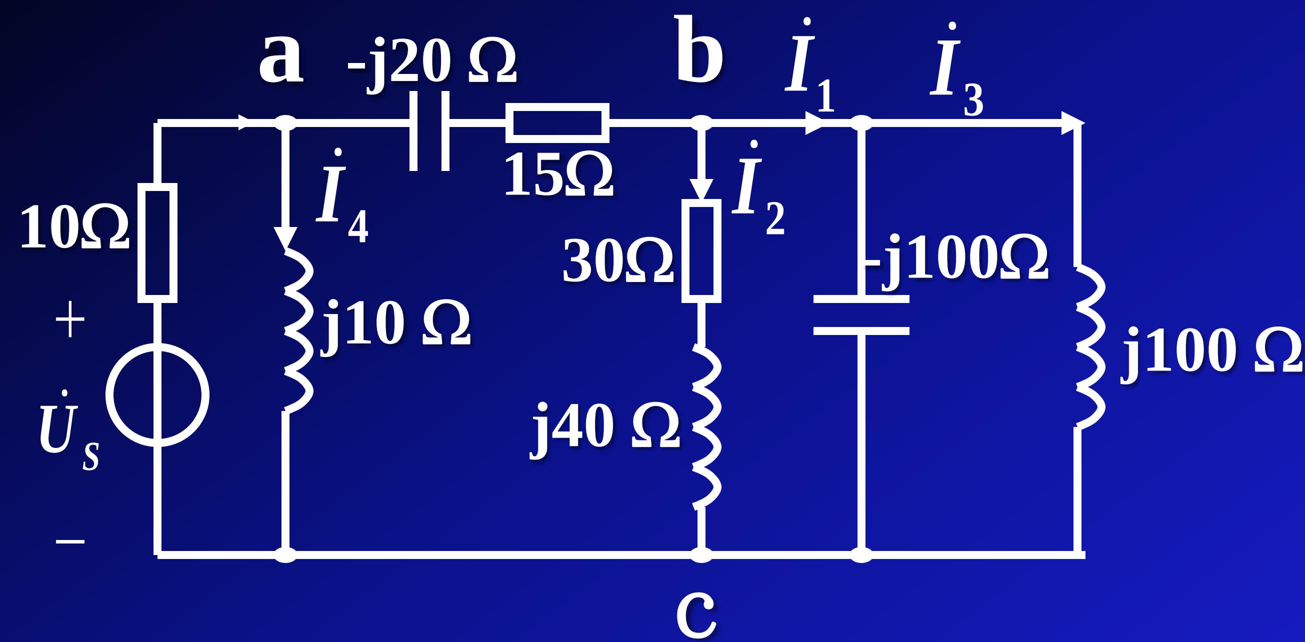


$$\dot U_{ac} = (15 - j20 + 30 + j40)\dot I_2$$

$$= 49.24\angle 23.96^\circ \times 2\angle 36.9^\circ$$

$$= 98.5\angle 60.9^\circ = 48 + j86.1$$

$$\dot I_4 = \frac{\dot U_{ac}}{j10} = 8.61 - j4.8$$



$$\dot{U}_S = (\dot{I}_2 + \dot{I}_4)10 + \dot{U}_{ac}$$

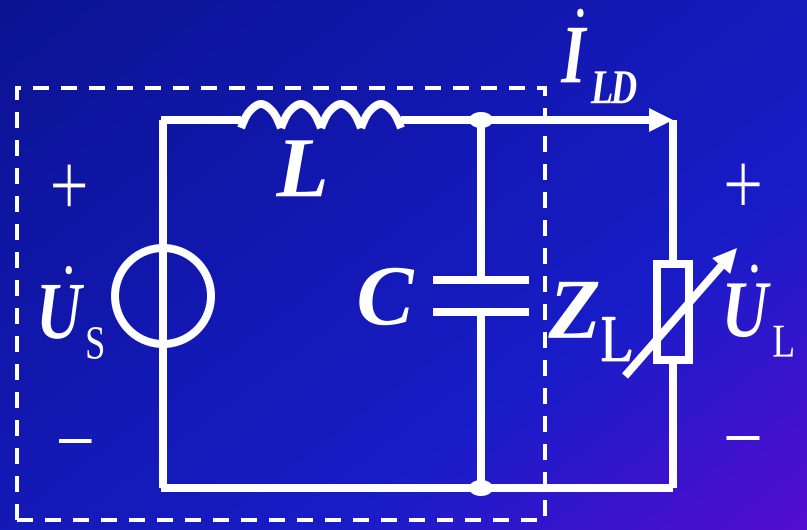
$$= (10.2 - j3.6)10 + 48 + j86.1$$

$$= 150 + j50 = 158.1\angle 18.4^{\circ}$$

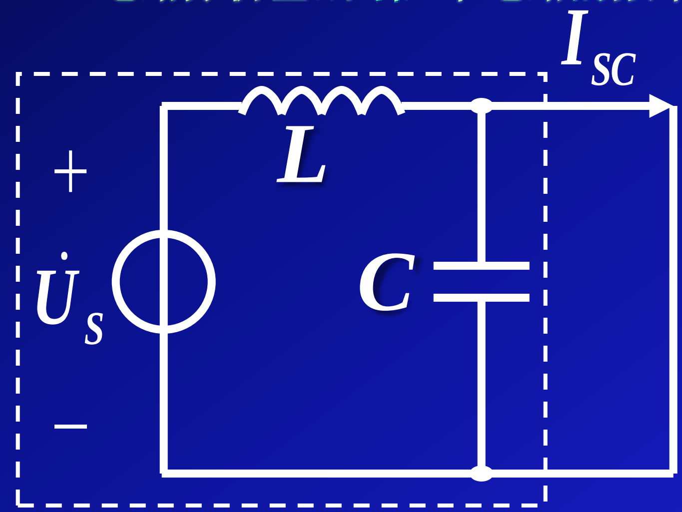
$$u_S(t) = 158.1\sqrt{2}\cos(100t + 18.4^{\circ})\text{V}$$

例10 U_S=220V，f=50Hz 。（1）调Z_L时发现：I_{LD}的有效值始终保持10A，试确定L和C。（2）当Z_L=11.7-j30.9Ω时，求$u_L(t)$

解：（1）调Z_L时I_{LD}不变，虚线框中**等效恒流源**。



用诺顿定理求，设：$\dot{U}_S = 220\angle 0^\circ$



$$\dot{I}_{SC}=\frac{\dot{U}_S}{j\omega L}=-j\frac{\dot{U}_S}{\omega L}$$

$$I_{SC}=\frac{U_S}{\omega L}=I_{LD}=10A$$

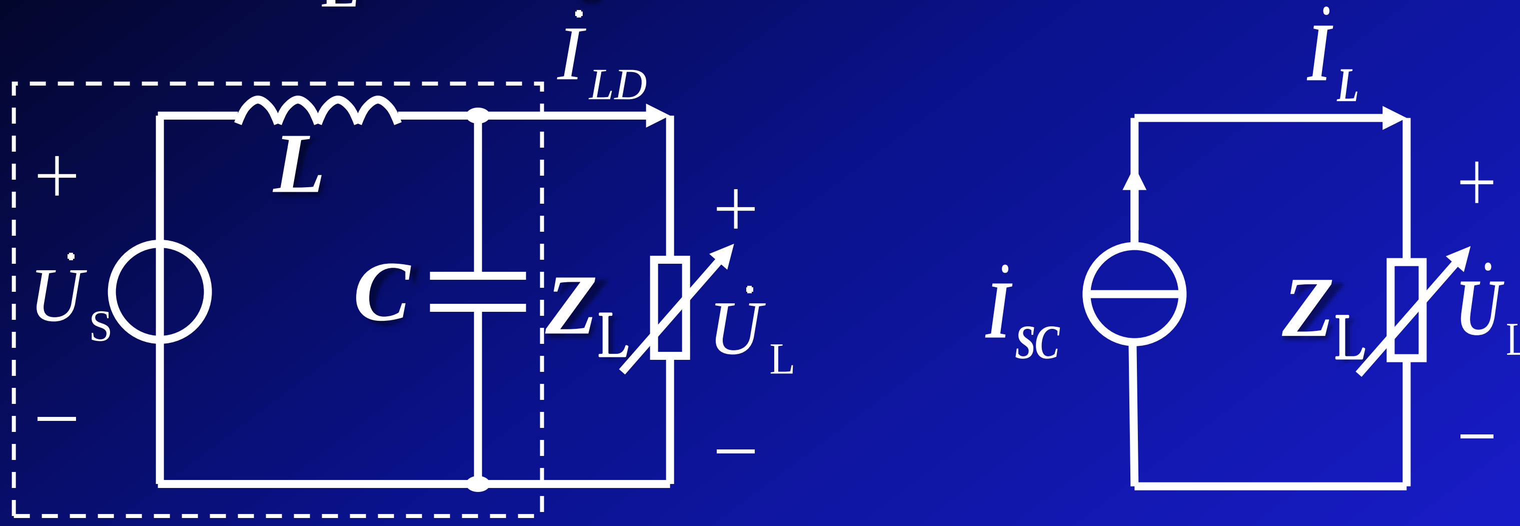
所以 $$L=\frac{U_S}{2\pi f\times 10}=\frac{220}{20\pi\times 50}=0.07H$$

输入导纳:

$$Y_0=\frac{1}{j\omega L}+j\omega C=0\Rightarrow\frac{1}{\omega L}=\omega C$$

$$C=\frac{1}{\omega^2 L}=144.9\mu F$$

（2）当Z_L=11.7-j30.9Ω时



$$\dot{U}_L = \dot{I}_{SC} Z_L = -j10 \times 33\angle -69^\circ$$

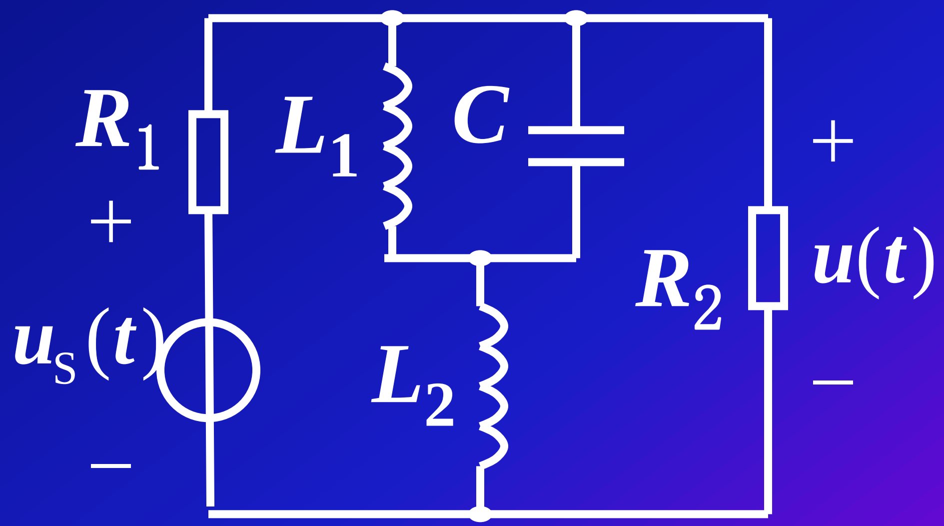
$$= 330\angle -159^\circ$$

时域表达式：

$$u_L(t) = 330\sqrt{2}\cos(314t - 159^\circ)\,\mathrm{V}$$

例11 $u_S(t)=5+10\cos(10t)+15\cos(30t)$V，$R_1=R_2=5\Omega$，$L_1=0.4$H，$L_2=0.05$H，$C=0.025$F，求 $u(t)$ 。

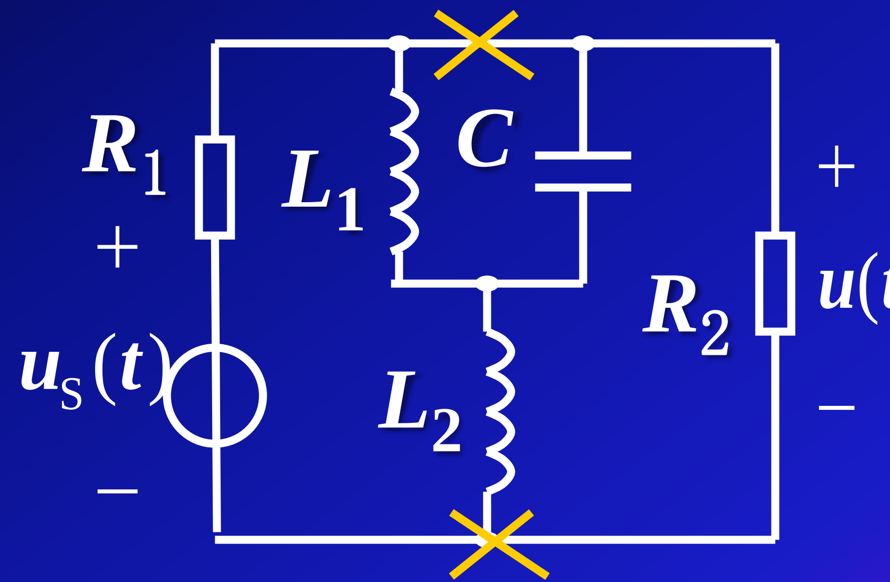
解：用叠加定理求解：



5V单独作用时：电感视为短路，电容视为开路，得：

$$u_1(t)=0$$

$u_{S2}(t)=10\cos(10t)$单独作用时：



方法1：相量分析法计算$u_2(t)$；

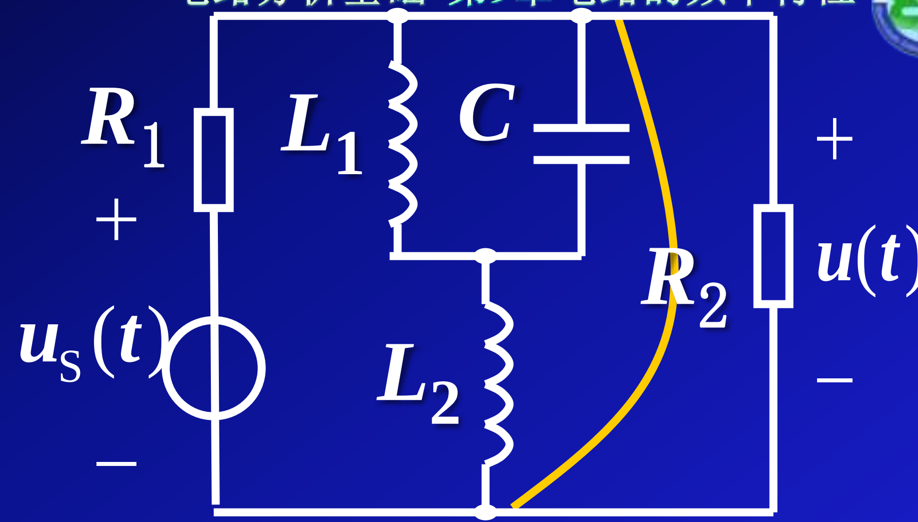
方法2：

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 C}}=\frac{1}{\sqrt{0.4\times0.025}}=10\text{rad/s}$$

L_1，C对电源$u_{S2}(t)$发生并联谐振，故可将电抗支路视为开路，

$$u_2(t)=0.5u_{S2}(t)=5\cos(10t)\text{V}$$

$u_{S3}(t)=15\cos(30t)$ 单独作用时：



$$j\omega L_1 // \frac{1}{j\omega C}$$

$$=(j30\times 0.4)//\frac{1}{j30\times 0.025}=-j1.5\Omega$$

$$j\omega L_2=j30\times 0.05=j1.5\Omega$$

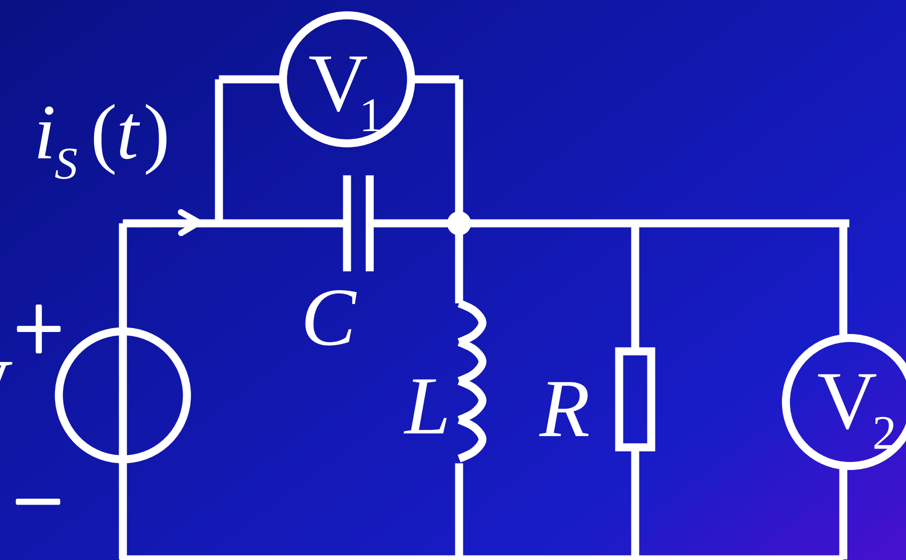
电抗支路等效阻抗为零，故，电抗支路对电源$u_{S3}(t)$发生串联谐振，可视为短路，则：

$u_3(t)=0$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)=5\cos(10t)\text{V}$$

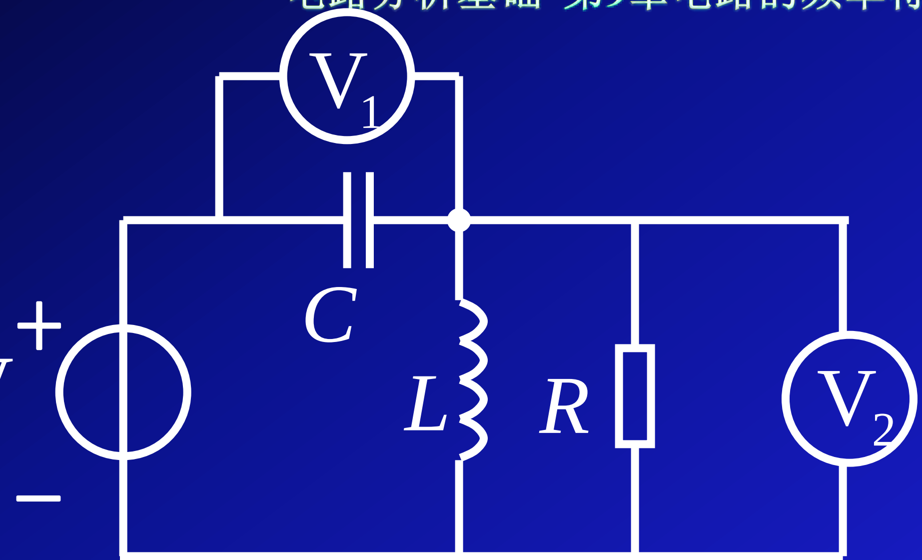
例12：已知电路发生了串联谐振，电压表1读数为3V，试求：电压表2的读数和Q值。

$$u_S(t) = 4\sqrt{2}\cos\omega t\,\mathrm{V}$$



（另：习题9-9）

$$u_S(t) = 4\sqrt{2}\cos\omega t\,\mathrm{V}$$



关键：1) 利用串联谐振时电流与电压源同相；2) 掌握谐振时各量间的相位关系。

解：画相量图：$U_2 = \sqrt{4^2+3^2} = 5V$

$$Q = \frac{U_{C0}}{U_S} = \frac{V_1}{U_S} = \frac{3}{4} = 0.75$$