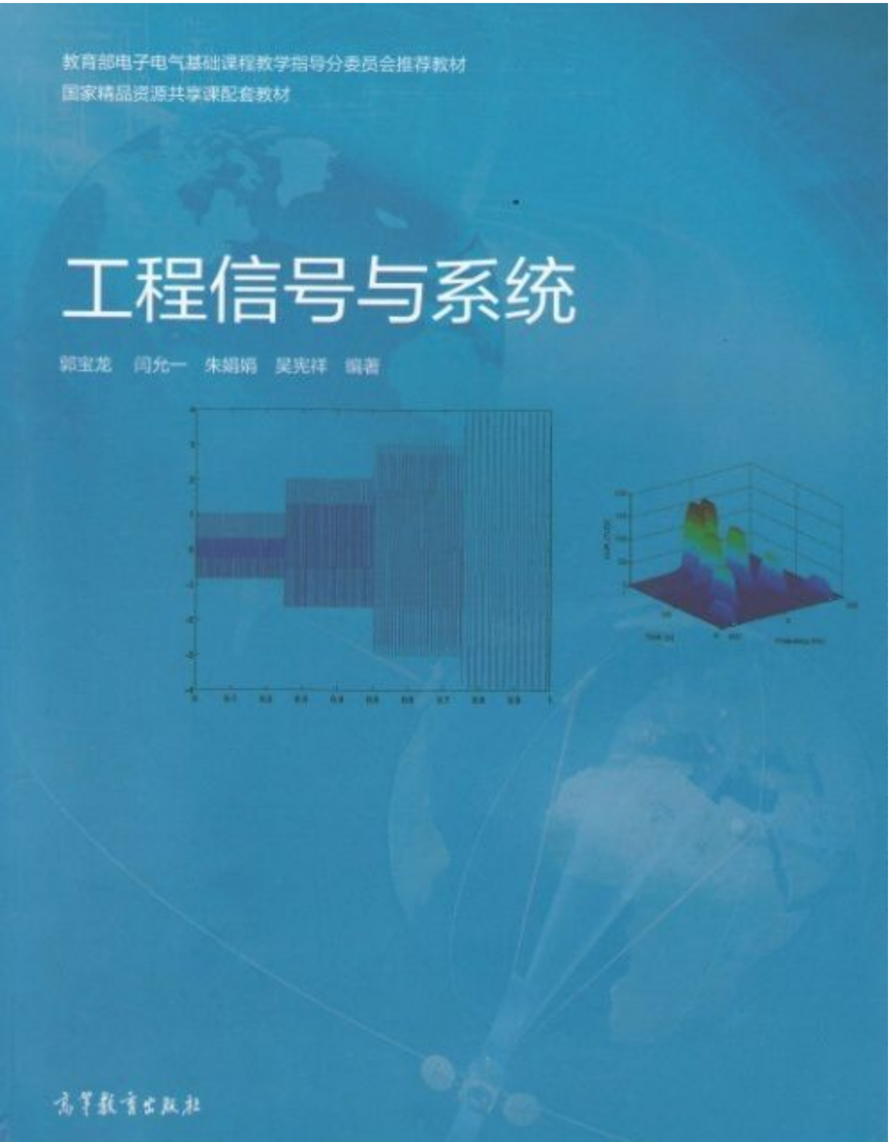

工程信号与系统

西安电子科技大学
Xidian University, Xi’an China

Part 3 系统的状态空间分析

K3.01-连续系统状态方程与输出方程
K3.02-连续系统状态方程的建立-由RLC电路
K3.03-连续系统状态方程的建立-由微分方程
K3.04-连续系统状态方程的建立-由框图流图
K3.05-离散系统状态方程和输出方程
K3.06-离散系统状态方程的建立
K3.07-系统状态方程的变换域求解
K3.08-利用MATLAB求解系统状态方程
K3.09-系统函数矩阵与系统稳定性分析
K3.10-线性系统的可控性和可观性

一、系统的状态空间分析法基本概念

1、系统的状态空间描述

状态空间：状态方程+输出方程 。

状态方程：表示系统状态变量与输入之间的关系/方程。对n阶系统，状态方程是由n个一阶微分方程（差分方程）组成的方程组。

输出方程：表示系统输出与输入和状态变量之间的关系/方程。对n阶系统，若有q个输出，输出方程是由q个代数方程组成的方程组。

2、系统状态方程、输出方程的解

A.连续系统： (1)时域解， (2) s 域解；

B.离散系统： (1)时域解， (2) z 域解。

二、状态空间分析法优点

① 提供系统的内部信息，使人们能够比较容易地解决那些与系统内部情况有关的分析设计问题；

② 不仅适用于线性时不变、单输入单输出系统，也适用于非线性时变、随机、多输入多输出系统分析；

③ 规律性强，便于用计算机解决复杂系统的分析设计问题。

知识点K3.01

连续系统状态方程与输出方程

主要内容：

1.状态变量

2.状态方程

3.输出方程

基本要求：

掌握连续系统状态方程、输出方程的基本概念

K3.01 连续系统状态方程与输出方程

(1)初始状态:

定义：连续系统在t_0时刻的状态是最少数目的一组数，知道了这组数和区间$[t_0,t]$上的输入，就可以完全确定系统在t时刻的输出，这组数即为初始状态，表示如下：

$$x_1(t_0), x_2(t_0)\ldots\ldots, x_n(t_0)$$

说明:

(1)电路中，初始时刻t_0的状态通常指电容元件上电压$u_c(t_0)$和电感元件上电流$i_L(t_0)$;

(2)系统状态的数目是一定的, n阶系统有n个初始状态；但状态的选择不唯一。

(2) 状态变量： 表示状态随时间变化的一组变量。

初始状态：$x_1(t_0), x_2(t_0)\ldots\ldots, x_n(t_0)$

状态变量：$x_1(t), x_2(t)\ldots\ldots, x_n(t)$

(3)状态矢量、状态空间：

状态矢量： 由状态变量构成的列矢量$\boldsymbol{X}(t)$ 。

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

状态空间： 状态矢量$\boldsymbol{X}(t)$ 所在的空间。

(4)状态方程：

描述系统状态与输入关系的一阶微分方程组。

设*n*阶系统有*n*个状态：$x_1, x_2 \cdots, x_n$.

*p*个输入：$f_1, f_2 \cdots, f_p$.

则状态方程一般形式为：

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + \cdots + b_{1p}f_p \\
\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + \cdots + b_{2p}f_p \\
\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}f_1 + b_{n2}f_2 + \cdots + b_{np}f_p
\end{cases}
$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

令 $\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & \dot{x}_n \end{bmatrix}^T$ ，$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_p \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad , \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{n\times p}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{Bf}$$

(5)输出方程：描述系统输出、输入、状态之间关系的代数方程组。

设n阶系统有n个状态：$x_1, x_2 \cdots, x_n$.

p个输入：$f_1, f_2 \cdots, f_p$.

q个输出：$y_1, y_2 \cdots, y_q$.

则输出方程的一般形式为：

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}f_1 + d_{12}f_2 + \cdots + d_{1p}f_p \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}f_1 + d_{22}f_2 + \cdots + d_{2p}f_p \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_q = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots + c_{qn}x_n + d_{q1}f_1 + d_{q2}f_2 + \cdots + d_{qp}f_p \end{cases}$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

令 $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \cdots y_q \end{bmatrix}^T$ ， $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}_{q\times n}$ ， $D = \begin{bmatrix} d_{ij} \end{bmatrix}_{q\times p}$

则

$$\boldsymbol{Y = CX + Df}$$