知识点K2.25

双线性变换法设计IIR滤波器

主要内容：

双线性变换法设计*IIR*滤波器

基本要求：

掌握双线性变换法设计*IIR*滤波器

K2.25 双线性变换法设计IIR滤波器

冲激响应不变法s域和z域的映射具有多值性，出现频谱混叠，只适用于低通或带限的高通、带通情况。

双线性变换法的基本思路：将连续系统微分方程通过数值积分近似，导出相近的差分方程，从而完成离散系统的设计。

假设一个连续的一阶系统，其微分方程是

$$y'(t)+ay(t)=bf(t)$$

则其系统函数为 $$H_a(s)=\frac{b}{s+a}$$

双线性变换法设计IIR滤波器

将$y(t)$用 $y'(t)$ 的积分表示

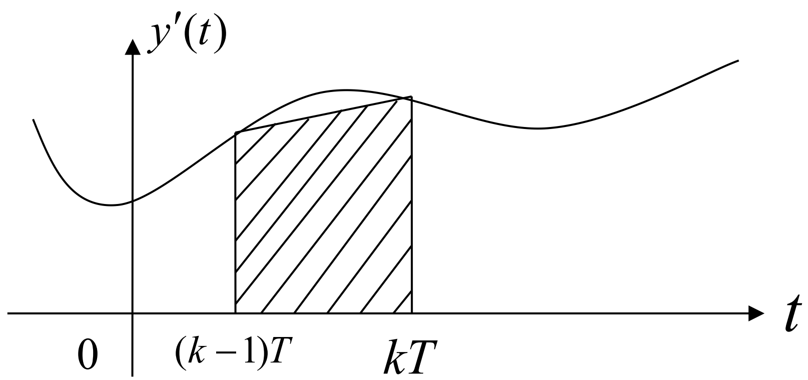
$$y(t)=\int_{t_0}^{t} y'(\tau)d\tau+y(t_0)$$

令数值采样步长为 T，$t=kT$， $t_0=(k-1)T$，代入上式:

$$y(kT)=\int_{(k-1)T}^{kT} y'(\tau)d\tau+y[(k-1)T]$$

假设T很小，上式用梯形法逼近积分项 (面积):

$$y(kT)=\frac{T}{2}\{y'[(k-1)T]+y'(kT)\}+y[(k-1)T]$$



双线性变换法设计IIR滤波器

$$y(kT)=\frac{T}{2}\{y'[(k-1)T]+y'(kT)\}+y[(k-1)T]$$

根据微分方程 ***y'(t)+ay(t)=bf(t)*：**

$$y'[(k-1)T]=bf[(k-1)T]-ay[(k-1)T]$$
$$y'(kT)=bf(kT)-ay(kT)$$

代入，可得：

$$y(kT)=\frac{T}{2}\{bf[(k-1)T]-ay[(k-1)T]+bf(kT)-ay(kT)]\}+y[(k-1)T]$$

$$y(kT)-y[(k-1)T]+\frac{aT}{2}\{y[(k-1)T]+y(kT)\}$$
$$=\frac{T}{2}\{bf[(k-1)T]]+bf(kT)]\}$$

双线性变换法设计IIR滤波器

该式是个一阶差分方程，两边取z变换：

$$Y(z)(1-z^{-1})+\frac{aT}{2}Y(z)(1+z^{-1})=\frac{bT}{2}F(z)(1+z^{-1})$$

可得系统函数：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{\frac{bT}{2}(z+1)}{z-1+\frac{aT}{2}(z+1)}=\frac{b}{\frac{2}{T}(\frac{z-1}{z+1})+a}$$

与连续系统函数对比 $H_a(s)=\dfrac{b}{s+a}$

$$s=\frac{2}{T}(\frac{z-1}{z+1}),\quad z=\frac{1+sT/2}{1-sT/2}$$

双线性变换法设计IIR滤波器

双线性变换法：通过s和z的映射关系，可以直接由模拟滤波器的系统函数$H_a(s)$得到数字滤波器的系统函数$H(z)$。这种映射关系属于双线性变换映射。

进一步研究，令 $s=j\Omega$，$z=e^{j\omega T}$ ，可以得到：

$$j\Omega=\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}=\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}+e^{-j\omega T/2}}=\frac{2}{T}\frac{j\sin(\frac{\omega T}{2})}{\cos(\frac{\omega T}{2})}=j\frac{2}{T}\tan(\frac{\omega T}{2})$$

故

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan(\frac{\omega T}{2}),\quad \omega=\frac{2}{T}\arctan(\frac{\Omega T}{2})$$

表明，s平面的虚轴映射到z平面的单位圆，而且 $\Omega=\pm\infty$映射为 $\omega=\pm\pi$，可以避免混叠。