知识点Z4.17

奇偶性

主要内容：

傅里叶变换的奇偶性

基本要求：

了解时间函数与其频谱的奇、偶、虚、实关系

Z4.17奇偶性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 则 $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$

证明： $\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} \mathrm{d}t = F(j\omega)$

$$\mathcal{F}\left[f(-t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) \mathrm{e}^{-j\omega t} \mathrm{d}t \overset{-t\to x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-j(-\omega)x} \mathrm{d}x = F(-j\omega)$$

下面具体研究时间函数与其频谱的奇偶虚实关系

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \left|F(j\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

显然：
$$\begin{cases} \left|F(j\omega)\right| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) = \arctan\left[\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)}\right] \end{cases}$$

(1) $f(t)$为实函数

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t \quad =\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$$

R(ω) X(ω)

显然：
$$\begin{cases} R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \\ X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

结论：

$R(\omega)= R(-\omega)$ 偶函数

$X(\omega) = -X(-\omega)$ 奇函数

$|F(j\omega)| = |F(-j\omega)|$ 偶函数

$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$ 奇函数

$F(-j\omega)=F^*(j\omega)$

4.5傅里叶变换的性质

- 若$f(t)$为实偶函数, F(jω)为实偶函数

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$F(j\omega) = R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$\boxed{g_\tau(t) \leftrightarrow \tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$

$$\boxed{1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

- 若$f(t)$为实奇函数, F(jω)为实奇函数

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$F(j\omega) = jX(\omega) = -j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -2j\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}}$$

$$\boxed{\delta'(t) \leftrightarrow j\omega}$$

4.5傅里叶变换的性质

(2) *f*(*t*)为虚函数*f*(*t*)=j*g*(*t*)

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \quad = j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t}_{X(\omega)}+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t}_{R(\omega)}$$

显然：

$$\begin{cases} R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \\ X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

* 请同学们自己参照实函数进行分析。