教学模块2 信号转换与z变换

教学单元3 z变换与z反变换

东北大学 · 关守平
guanshouping@ise.neu.edu.cn

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

3.1 z 变换的定义

$f(t)$ 的拉普拉斯变换式为 $F(s)=L[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

$f(t)$的采样信号为 $f^*(t)$ $f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$ ← 时域

其拉普拉斯变换式为 $F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}$ ← s 域

引入一个新的复变量 $z=e^{sT}$

$$Z[f(t)]=Z[f^*(t)]=F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$ ← z 域

时间序列
(信号幅值信息)

序列时刻(时间信息)：
单位延迟因子

关于z变换过程：

$$f(t) \xRightarrow{} f^*(t) \overset{s\text{变换}}{\Leftrightarrow} F^*(s) \overset{z\text{ 变换}}{\Leftrightarrow} F(z)$$

s 变换 $\Updownarrow$

$$F(s)$$

$$\boxed{z = e^{sT}} \Longleftrightarrow \boxed{s = \frac{1}{T}\ln z}$$

$$F(s) \xrightarrow{s \neq \frac{1}{T}\ln z} F(z)$$

$$F^*(s) \xrightarrow{s = \frac{1}{T}\ln z} F(z)$$

注：$F(z)$ 与 $f(t)$ 不是一一对应关系，一个 $F(z)$ 可有无穷多个 $f(t)$ 与之对应。

3.2 z 变换方法

1、级数求和法

将离散函数 $f^*(t)$ 展开如下

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

$$=f(0)\delta(t)+f(T)\delta(t-T)+\cdots+f(kT)\delta(t-kT)+\cdots\cdots$$

然后利用公式直接展开

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

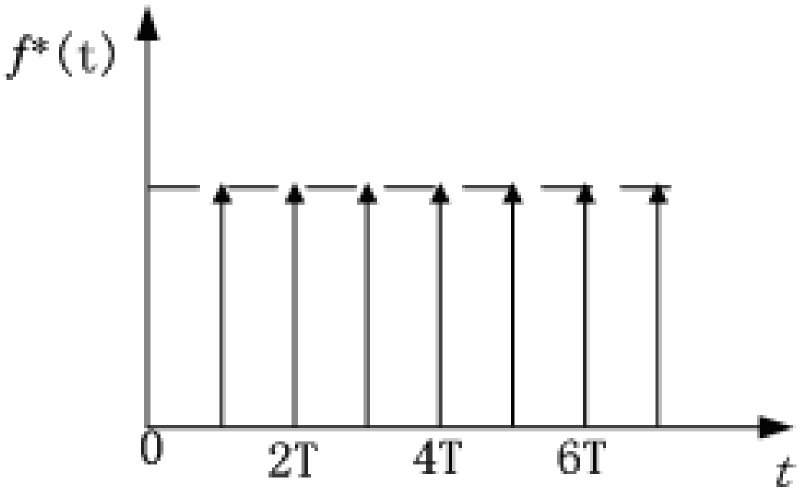
（1）

$$=f(0)\cdot 1+f(T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+\cdots+f(kT)z^{-k}+\cdots\cdots$$

例2.1 求单位阶跃函数 **1(*t*)** 的 ***z*** 变换

解： 单位阶跃函数 **1(*t*)** 在任何采样时刻的值均为**1**

$$f(kT) = 1(kT) = 1,\ k = 0, 1, 2\cdots$$



代入式（1）中，得：

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}=1z^{0}+1z^{-1}+1z^{-2}+\cdots+1z^{-k}+\cdots \qquad (2)$$

将式（2）两边乘以 z^{-1} ，有：

$$z^{-1}F(z)=z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-k}+\cdots \qquad (3)$$

上两式相减，得：

$$F(z)-z^{-1}F(z)=1$$

所以

$$F(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

2、部分分式法

设连续函数 $f(t)$ 的拉氏变换为有理函数，具体形式如下：

$$F(s)=\frac{M(s)}{N(s)}$$

式中，$M(s)$ 与 $N(s)$ 都是复变量**s**的多项式。

通常无重极点的 $F(s)$ 能够分解成如下的部分分式形式：

$$F(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s+a_i} \qquad \text{其中：} \quad A_i=(s+a_i)F(s)|_{s=-a_i}$$

$$\updownarrow$$

$$A_i e^{-a_i t} \longrightarrow \frac{A_i}{1-e^{-a_i T}z^{-1}}$$

衰减指数函数

于是有： $$Z(F(s))=F(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{1-e^{-a_i T}z^{-1}}$$

例2.2 求 $F(s)=\dfrac{a}{s(s+a)}$ 的 z 变换

解：

$$F(s)=\frac{a}{s(s+a)}=\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+a}$$

于是得到： $a_1=0, A_1=1$

$a_2=a, A_2=-1$

$$\boxed{F(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s+a_i}}$$

从而得到：

$$F(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{-1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$$

$$\boxed{F(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{1-e^{-a_iT}z^{-1}}}$$

3、留数计算法

若已知连续时间函数 $f(t)$ 的拉氏变换式及全部极点，则 $f(t)$ 的z 变换可由下面留数计算公式求得：

$$F(z)=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}\left[F(s_i)\frac{z}{z-e^{s_iT}}\right]$$

其中：

$$\mathrm{Res}\left[F(s_i)\frac{z}{z-e^{s_iT}}\right]=\frac{1}{(n_i-1)!}\frac{d^{n_i-1}}{ds^{n_i-1}}\left[(s-s_i)^{n_i}F(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]_{s=s_i}$$

$0!=1$

其中 m ---不同极点个数

n_i--- s_i 的阶数

T---采样周期

例2.3 求 $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}$ 的 z 变换。

解：由$F(s)$表达式得到：

$$m=2, s_1=-1,\ n_1=1, s_2=-3,\ n_2=1$$

于是得到：

$$F(z)=[(s+1)\frac{1}{(s+1)(s+3)}\frac{z}{z-e^{sT}}]_{s=-1}+[(s+3)\frac{1}{(s+1)(s+3)}\frac{z}{z-e^{sT}}]_{s=-3}$$

$$=\frac{z}{2z(z-e^{-T})}+\frac{z}{(-2)(z-e^{-3T})}$$

$$=\frac{z(e^{-T}-e^{-3T})}{2(z-e^{-T})(z-e^{-3T})}$$

例2.4 求 $F(s)=\dfrac{1}{(s+a)^2}$ 的 z 变换。

解： 上式有**1**个二重极点, 于是

$$m=1, s_1=-a, n_1=2$$

从而得到：

$$F(z)=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}\left[(s+a)^2\frac{1}{(s+a)^2}\frac{z}{z-e^{sT}}\right]_{s=-a}=\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$$

3.3 z 变换的基本定理

1、线性定理

线性函数满足齐次性和迭加性，若

$$Z[f_1(t)] = F_1(z) \qquad Z[f_2(t)] = F_2(z)$$

a、b 为任意常数， $f(t) = af_1(t) \pm bf_2(t)$

则

$$F(z) = aF_1(z) \pm bF_2(z)$$

2、滞后定理

$$Z\left[f(t-nT)\right]=z^{-n}F(z)+z^{-n}\sum_{j=-1}^{-n}f(jT)z^{-j}$$

如果 $t<0, f(t)=0$ ，则

$$Z\left[f(t-nT)\right]=z^{-n}F(z)$$

3、超前定理

$$Z\left[f(t+nT)\right]=z^{n}F(z)-z^{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(jT)z^{-j}$$

如果 $f(0T)=f(T)=\cdots=f\left[(n-1)T\right]=0$

则 $Z\left[f(t+nT)\right]=z^{n}F(z)$

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

4、初值定理

如果 $f(t)$ 的**z** 变换为 $F(z)$ ，而 $\lim\limits_{z\to\infty} F(z)$ 存在，则

$$f(0)=\lim_{z\to\infty} F(z)$$

5、终值定理

如果 $f(t)$ 的**z** 变换为 $F(z)$ ， 而 $(1-z^{-1})F(z)$ 在**z** 平面以原点为圆心的单位圆上或圆外没有极点，则

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{k\to\infty} f(kT)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{z}F(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

6、求和定理

7、复域位移定理

8、复域微分定理

9、复域积分定理

10、卷积定理

3.4 z 反变换定义及方法

定义：

从z变换 $F(z)$ 求出的采样函数 $f^*(t)$，称为z反变换，表示为

$$Z^{-1}[F(z)] = f^*(t)$$

$$\boxed{f(t) \Rightarrow f^*(t) \Leftrightarrow F^*(s) \Leftrightarrow F(z)}$$

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) \longleftarrow \text{时域}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \longleftarrow z\text{域}$$

1、长除法

$$F(z)=\frac{K(z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m)}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n} \qquad m\le n$$

用$F(z)$表达式的分子除以分母，得到 z^{-k} 升幂排列的级数展开式，即：

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}=f(0)+f(1T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+\cdots+f(kT)z^{-k}+\cdots$$

$$f^*(t)=f(0)+f(1T)\delta(t-T)+f(2T)\delta(t-2T)+\cdots$$
$$+f(kT)\delta(t-kT)+\cdots$$

$$\boxed{f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)}$$

例2.5 求 $F(z)=\dfrac{5z}{z^2-3z+2}$ 的 z 反变换。

解： 首先按 z^{-1} 的升幂排列 $F(z)$ 的分子和分母，即 $F(z)=\dfrac{5z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$

应用长除法

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5z^{-1}+15z^{-2}+35z^{-3}+\cdots \\
1-3z^{-1}+2z^{-2} & 5z^{-1} \\
 & \underline{5z^{-1}-15z^{-2}+10z^{-3}} \\
 & 15z^{-2}-10z^{-3} \\
 & \underline{15z^{-2}-45z^{-3}+30z^{-4}} \\
 & 35z^{-3}-30z^{-4} \\
 & \underline{35z^{-3}-105z^{-4}+70z^{-5}} \\
 & 75z^{-4}-70z^{-5} \\
 & \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

于是得到 $F(z)=5z^{-1}+15z^{-2}+35z^{-3}+\cdots$

相应的采样函数为 $f^*(t)=5\delta(t-T)+15\delta(t-2T)+35\delta(t-3T)+\cdots$

2、部分分式法

将 $F(z)$ 写成如下有理式标准形式：

$$F(z)=\frac{M(z)}{N(z)}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}$$

对 $F(z)$ 的分母进行因式分解，即

$$N(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$$

一般适合所有极点是互不相同的单极点的情况：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{A_n}{z-z_n} \qquad A_i=(z-z_i)\left.\frac{F(z)}{z}\right|_{z=z_i}$$

$$F(z)=\frac{A_1 z}{z-z_1}+\frac{A_2 z}{z-z_2}+\cdots+\frac{A_n z}{z-z_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i z}{z-z_i}$$

各个分式所对应的时间序列为通常熟悉的指数序列：

$$f_i(kT)=Z^{-1}\left[\frac{A_i z}{z-z_i}\right]=A_i z_i^k, \quad k\geq 0, \quad i=1,2,\cdots,n$$

$$f(kT)=\sum_{i=1}^{n} f_i(kT)$$

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

例2.6 求 $F(z)=\dfrac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)}$ 的 z 反变换

解： 将 $F(z)$除以z，并展开成部分分式，得 $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-0.5}$

上式两边乘以z，得 $F(z)=\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-0.5}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}-\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}$

于是得到 $f(kT)=1-(0.5)^k \quad k=0,1,2,\cdots$

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)=\sum_{k=0}^{\infty}[1-(0.5)^k]\delta(t-kT)$$

3、留数法

在留数法中，采样函数值 $f(kT)$ 等于 $F(z)z^{k-1}$ 各个极点上留数之和，即

$$f(kT)=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_i}$$

其中：

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_i}=\frac{1}{(n_i-1)!}\frac{d^{n_i-1}}{dz^{n_i-1}}[(z-z_i)^{n_i}F(z)z^{k-1}]_{z=z_i}$$

式中 m ---不同极点个数；$\boldsymbol{n_i}$ --- $\boldsymbol{z_i}$ 的阶数

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)$$

例2.7 求 $F(z)=\dfrac{5z}{z^2-3z+2}$ 的z反变换。

解：由*F*(*z*)的表达式得到：

$$m=2, z_1=2, n_1=1, z_2=1, n_2=1$$

（1）对于第1个极点 $z_1=2$

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_1}=[(z-z_1)F(z)z^{k-1}]_{z=z_1}$$

$$=\left[(z-2)\frac{5z}{(z-2)(z-1)}z^{k-1}\right]_{z=2}=5\times 2^k$$

（2）对于第2个极点 $z_2 = 1$

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_2} = \left[(z-1)\frac{5z}{(z-2)(z-1)}z^{k-1}\right]_{z=1} = -5\times 1^k = -5$$

于是有：

$$f(kT) = \sum_{i=1}^{2}\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_i} = 5\times 2^k - 5 = 5(2^k - 1)$$

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} 5(2^k-1)\delta(t-kT)$$

例2.8 求 $F(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z-1)^2}$ 的**z**反变换。

解: $F(z)$ 中有一个单极点和两个重极点：

$$m=2, z_1=2, n_1=1, z_2=1, n_2=2$$

（**1**）对于 $z_1=2$ ，有

$$\operatorname{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_1}=\left[(z-2)\frac{z}{(z-2)(z-1)^2}z^{k-1}\right]_{z=2}=2^k$$

信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

（2）对于 $z_2=1$，有

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_{2,3}}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z}{(z-2)(z-1)^2}z^{k-1}\right]_{z=1}$$

$$=\frac{d}{dz}\left[\frac{z^k}{(z-2)}\right]_{z=1}=\left[\frac{kz^{k-1}(z-2)-z^k}{(z-2)^2}\right]_{z=1}$$

$$=-k-1$$

于是有：　$f(kT)=2^k-k-1$

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(2^k-k-1)\delta(t-kT)$$

·教学单元三结束·