## 知识点Z2.9

# 冲激响应的定义和求法

**主要内容：**

1. 冲激响应的定义
2. 冲激响应的求法

**基本要求：**

1. 掌握冲激响应的定义
2. 掌握冲激响应的求法

## Z2.9 冲激响应的定义和求法

### 1.定义

冲激响应是由单位冲激函数 $\delta(t)$所引起的零状态响应，记为$h(t)$。

$h(t)$隐含的条件：

$$f(t)=\delta(t)$$

$$h(0_-)=h'(0_-)=0 \text{ (对二阶系统)}$$

基本信号：冲激函数 $\delta(t)$

基本响应：冲激响应$h(t)$

## 2. 求法

描述二阶LTI系统的微分方程的一般形式为：

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 f''(t) + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$$

求解系统的冲激响应 可分两步进行：

(1)选新变量$h_1(t)$，使它满足

$$h_1''(t) + a_1 h_1'(t) + a_0 h_1(t) = \delta(t)$$

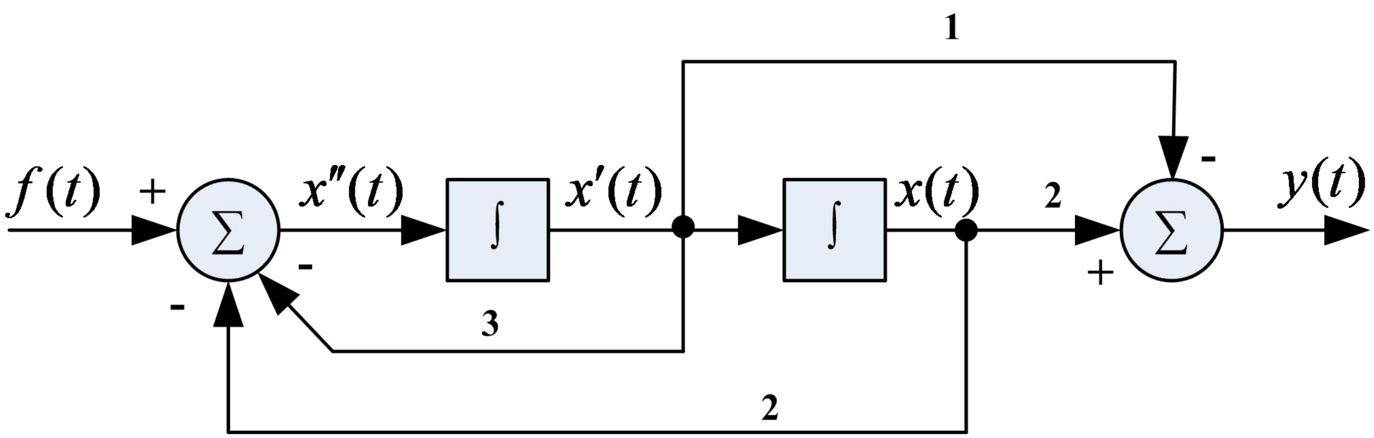
$$h_1(0_-) = h_1'(0_-) = 0$$

采用经典法求解$h_1(t)$；

(2)根据LTI系统零状态响应的线性性质和微分特性，则冲激响应：

$$h(t) = b_2 h_1''(t) + b_1 h_1'(t) + b_0 h_1(t)$$

**例1** 如图所示LTI系统，求其冲激响应。




**解：(1)先列写系统的微分方程**

积分器的输出为$x(t)$，列出左端加法器的方程：

$$x''(t) = -3x'(t) - 2x(t) + f(t) \qquad x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = f(t)$$

右端加法器方程：$y(t) = -x'(t) + 2x(t)$

合并整理：$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = -f'(t) + 2f(t)$

**(2)求$h_1(t)$，满足如下方程**

$$\begin{cases} h_1''(t)+3h_1'(t)+2h_1(t)=\delta(t) \\ h_1(0_-)=h_1'(0_-)=0 \end{cases}$$

由系数匹配法：

$$h_1(0_+) = h_1(0_-) = 0$$

$$h_1'(0_+) - h_1'(0_-) = 1,\ 即：h_1'(0_+) = 1$$

其特征根为-1和-2，特解为0，设定解为：

$$h_1(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}, t\ge 0$$

代入初始值可求得：

$$h_1(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

(3)求$h(t)$，满足如下方程

$$h(t) = -h_1'(t) + 2h_1(t)$$

计算$h_1'(t)$：

$$h_1'(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\delta(t) + (-e^{-t} + 2e^{-2t})\varepsilon(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})\varepsilon(t)$$

求得冲激响应为：

$$h(t) = -h_1'(t) + 2h_1(t) = (3e^{-t} - 4e^{-2t})\varepsilon(t)$$

说明：结合零状态响应的线性性质和微分性质，来简化求解过程；若直接进行求解，方程右端将会出现冲激函数的各阶导数。