教学模块6 基于状态空间模型的极点配置设计方法

教学单元2 离散系统状态空间函数模型的建立

东北大学 · 关守平

guanshouping@ise.neu.edu.cn

建立被控对象离散状态空间模型的方法：

- 由连续系统状态空间模型求取
- 由差分方程求取
- 由脉冲传递函数求取

$$\begin{array}{ccccc} \text{脉冲传递函数} & \longrightarrow & \text{离散系统状态空间模型} & \longleftarrow & \text{差分方程} \\ & & \uparrow & & \\ & & \text{连续系统状态空间模型} & & \end{array}$$

2.1 由连续状态空间模型建立离散状态空间模型

设连续控制对象的模型可用如下的状态空间表达式描述：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad (1)$$

其中设 ***x*** 为 ***n*** 维状态向量，***u*** 为 ***m*** 维控制向量，***y*** 为 ***r*** 维输出向量。

设在连续的对象前面有零阶保持器，即

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(k) \qquad kT \le t < (k+1)T \qquad (2)$$

将控制对象与保持器一起进行离散化处理，得到离散系统模型。

对式（1）求解：　$\dot{\mathbf{x}}(t) - A\mathbf{x}(t) = B\mathbf{u}(t)$

两边同乘 e^{-At} ，得到 $e^{-At}(\dot{\mathbf{x}}(t) - A\mathbf{x}(t)) = e^{-At}B\mathbf{u}(t)$

由于 $e^{-At}(\dot{\mathbf{x}}(t) - A\mathbf{x}(t)) = \dfrac{d}{dt}[e^{-At}\mathbf{x}(t)]$

于是 $\dfrac{d}{dt}[e^{-At}\mathbf{x}(t)] = e^{-At}B\mathbf{u}(t)$

两边积分，有：

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}[e^{-A\tau}\mathbf{x}(\tau)]d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad \textbf{(a)}$$

其中

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}[e^{-A\tau}\mathbf{x}(\tau)]d\tau = \int_{t_0}^{t} d\ [e^{-A\tau}\mathbf{x}(\tau)] = e^{-A\tau}\mathbf{x}(\tau)\Big|_{t_0}^{t} \qquad \textbf{(c)}$$

$$= e^{-At}\mathbf{x}(t) - e^{-At_0}\mathbf{x}(t_0)$$

因此，有：

$$e^{-At}\mathbf{x}(t)=e^{-At_0}\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

两边同乘 e^{At} ，有：

$$\mathbf{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad （3）$$

令 $t_0=kT$，$t=(k+1)T$ ，由（2）式，即考虑零阶保持器，得

$$\mathbf{x}(k+1)=e^{AT}\mathbf{x}(k)+\left[\int_{kT}^{(k+1)T}e^{A(kT+T-\tau)}d\tau\right]B\mathbf{u}(k) \qquad （4）$$

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}(k) \qquad kT\le t<(k+1)T$$

令 $t = kT + T - \tau$ ，（4）式化为：

$$\mathbf{x}(k+1) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k) \qquad (5)$$

其中 $F = e^{AT}$， $G = \int_0^T e^{At} dt B$ （6）

式（1）中，输出方程的离散形式为：

$$\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \qquad (7)$$

故连续模型等效离散状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad (8)$$

矩阵指数及其积分的计算

$$F = e^{AT}, \qquad G = \int_0^T e^{At} dtB \qquad (9)$$

拉氏变换法

可以证明：
$$e^{At} = L^{-1}(sI - A)^{-1} \qquad (10)$$

因此，求 ***F***、***G*** 的步骤如下：

（**1**）求得 $(sI - A)$ 的逆矩阵 $(sI - A)^{-1}$

（**2**）取其拉氏反变换，获得 e^{At}

（**3**）求 ***F*** 和 ***G***

幂级数计算法

e^{At} 的幂指数形式为

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots \qquad (11)$$

令

$$H = \int_0^T e^{At}dt = IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \frac{A^3T^4}{4!} + \cdots \qquad (12)$$

于是

$$F = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \frac{A^3T^3}{3!} + \cdots$$

$$= I + A\left(IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \cdots \right)$$

$$= I + A\int_0^T e^{At}dt = I + AH \qquad \text{(13)}$$

$$G = \left(\int_0^T e^{At}dt \right) B = HB \qquad \text{(14)}$$

$$H = \int_0^T e^{At}dt = IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \frac{A^3T^4}{4!} + \cdots$$

例题讲解

例2.1 设连续系统的状态空间模型为

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \qquad (15)$$

求其离散化状态空间模型。

解：根据状态空间模型得到

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

离散系统状态空间模型为：

$$\begin{cases}\mathbf{x}(k+1)=F\mathbf{x}(k)+G\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k)=C\mathbf{x}(k)\end{cases} \qquad \text{（16）}$$

$$F=e^{AT}, \qquad G=\int_0^T e^{At}dtB$$

$$(sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{s(s+1)}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

$$e^{At}=L^{-1}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{s(s+1)} & \dfrac{1}{s} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1-e^{-t} & 1 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

$$F = e^{AT} = \begin{pmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1-e^{-T} & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} G &= \int_0^T e^{At} dt B = \int_0^T \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1-e^{-t} & 1 \end{pmatrix} dt \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-e^{-T} & 0 \\ T-1+e^{-T} & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-e^{-T} \\ T-1+e^{-T} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

2.2 由差分方程建立离散状态空间模型

对于单输入单输出线性离散系统，可用 **n** 阶差分方程描述：

$$
\begin{aligned}
&y(k+n)+a_1 y(k+n-1)+\cdots+a_n y(k) \\
&\qquad = b_0 u(k+n)+b_1 u(k+n-1)+\cdots+b_n u(k)
\end{aligned}
\quad \textbf{(1)}
$$

选择状态变量：

$$
\begin{cases}
x_1(k)=y(k)-h_0 u(k) \\
x_2(k)=x_1(k+1)-h_1 u(k) \\
x_3(k)=x_2(k+1)-h_2 u(k) \\
\quad \vdots \\
x_n(k)=x_{n-1}(k+1)-h_{n-1} u(k)
\end{cases}
\quad \textbf{(2)}
$$

进而得到:

$$x_{n+1}(k) = x_n(k+1) - h_n u(k) \qquad (3)$$

式中:

$$\begin{cases} h_0 = b_0 \\ h_1 = b_1 - a_1 h_0 \\ h_2 = b_2 - a_1 h_1 - a_2 h_0 \\ \quad \vdots \\ h_n = b_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \cdots - a_n h_0 \end{cases} \qquad (4)$$

于是得到一阶差分方程组：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + h_1 u(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) + h_2 u(k) \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) + h_{n-1} u(k) \\ x_n(k+1) = x_{n+1}(k) + h_n u(k) = \\ \qquad -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \cdots - a_2 x_{n-1}(k) - a_1 x_n(k) + h_n u(k) \end{cases} \tag{5}$$

从而得到状态空间模型为：
$$\begin{cases}\mathbf{x}(k+1)=F\mathbf{x}(k)+G\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k)=C\mathbf{x}(k)+D\mathbf{u}(k)\end{cases}$$

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix} \qquad G=\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ \vdots\\ h_{n-1}\\ h_n\end{bmatrix} \qquad \textbf{(6)}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}h_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_0\end{bmatrix}$$

由前述（4）式计算

$$\begin{aligned}&y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\cdots+a_ny(k)\\ &\qquad=b_0u(k+n)+b_1u(k+n-1)+\cdots+b_nu(k)\end{aligned}$$

例题讲解

例2.2 线性定常离散系统的差分方程式为

$$y(k+3)+3y(k+2)+8y(k+1)+7y(k)=9u(k+1)+6u(k)$$

试求该系统的离散状态空间模型。

解：已知 $a_1=3, a_2=8, a_3=7, b_0=b_1=0, b_2=9, b_3=6$

由（4）式得到：

$$
\begin{aligned}
h_0 &= b_0 = 0 \\
h_1 &= b_1 - a_1 h_0 = 0 \\
h_2 &= b_2 - a_1 h_1 - a_2 h_0 = 9 \\
h_3 &= b_3 - a_1 h_2 - a_2 h_1 - a_3 h_0 = -21
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

于是最终得到状态空间模型为：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -21 \end{bmatrix} u(k) \quad \text{（8）}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad \text{（9）}$$

2.3 由脉冲传递函数建立离散状态空间模型

第一种形式：对象的 z 传递函数模型为：

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}} \qquad n\geq m \qquad (1)$$

于是有

$$\frac{Y(z)}{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}=\frac{U(z)}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}=\theta(z) \qquad (2)$$

于是有

$$Y(z)=b_1z^{-1}\theta(z)+b_2z^{-2}\theta(z)+\cdots+b_mz^{-m}\theta(z) \qquad (3)$$

$$U(z)=\theta(z)+a_1z^{-1}\theta(z)+a_2z^{-2}\theta(z)+\cdots+a_nz^{-n}\theta(z) \qquad (4)$$

即

$$\theta(z)=U(z)-a_1z^{-1}\theta(z)-a_2z^{-2}\theta(z)-\cdots-a_nz^{-n}\theta(z) \qquad (5)$$

选状态变量为：

$$\begin{cases} x_1(z)=z^{-1}\theta(z) \\ x_2(z)=z^{-2}\theta(z)=z^{-1}x_1(z) \\ \vdots \\ x_n(z)=z^{-n}\theta(z)=z^{-1}x_{n-1}(z) \end{cases} \tag{6}$$

代入（3）、（5）式得到

$$Y(z)=b_1z^{-1}\theta(z)+b_2z^{-2}\theta(z)+\cdots+b_mz^{-m}\theta(z)$$

$$Y(z)=b_1x_1(z)+b_2x_2(z)+\cdots+b_mx_m(z) \tag{7}$$

$$\theta(z)=U(z)-a_1z^{-1}\theta(z)-a_2z^{-2}\theta(z)-\cdots-a_nz^{-n}\theta(z)$$

$$\theta(z)=U(z)-a_1x_1(z)-a_2x_2(z)-\cdots-a_nx_n(z) \tag{8}$$

由(6)式得到：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \theta(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = x_{n-1}(k) \end{cases} \tag{9}$$

结合(7)、(8)式得到：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -a_1x_1(k) - a_2x_2(k) - \cdots - a_nx_n(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = x_{n-1}(k) \end{cases} \tag{10}$$

$$Y(k) = b_1x_1(k) + b_2x_2(k) + \cdots + b_mx_m(k) \tag{11}$$

于是得到

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad (12)$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m & \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{n\text{-}m个} \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

第二种形式：对象的z传递函数模型为：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = b_0 + \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} \qquad n=m \tag{13}$$

于是得到

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k) \end{cases} \tag{14}$$

其中

$$F=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad G=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n\end{bmatrix} \qquad D=b_0$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=b_0+\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

例题讲解

例2.3 对象 z 传递函数模型为

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{2z^2+5z+1}{z^2+3z+2} \tag{15}$$

写出对象的离散状态空间模型。

解：

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=2+\frac{-z-3}{z^2+3z+2}=2+\frac{-z^{-1}-3z^{-2}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} \tag{16}$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)}=b_0+\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}}$$

$$b_0=2, b_1=-1, b_2=-3, a_1=3, a_2=2$$

$$F=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}\qquad G=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n\end{bmatrix}\qquad D=b_0$$

$$F=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad G=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-1 & -3\end{bmatrix}\qquad D=2$$

练习题：

1、 $$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{5z+1}{z^2+3z+2}$$

2、 $$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{5z}{z^2+3z+2}$$

写出对象的离散状态空间模型。

·教学单元二结束·