知识点Z4.38

理想低通滤波器

主要内容：

1.理想低通滤波器的频域特性

2.理想低通滤波器的冲激响应和阶跃响应

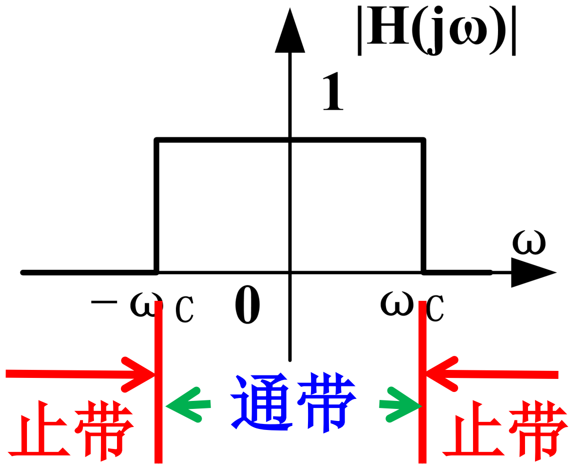
基本要求：

1.掌握理想低通滤波器的频域特性

2.掌握理想低通滤波器的冲激响应和阶跃响应

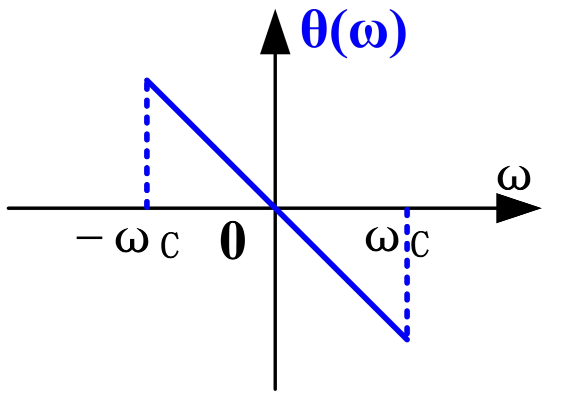
Z4.38理想低通滤波器

1.定义： 具有如图所示矩形幅频特性、线性相频特性的系统称为**理想低通滤波器**。ω_c称为**截止角频率**。



理想低通滤波器的频率响应可写为：

$$H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega t_d}, & |\omega|<\omega_C\\ 0, & |\omega|>\omega_C\end{cases}=g_{2\omega_C}(\omega)e^{-j\omega t_d}$$



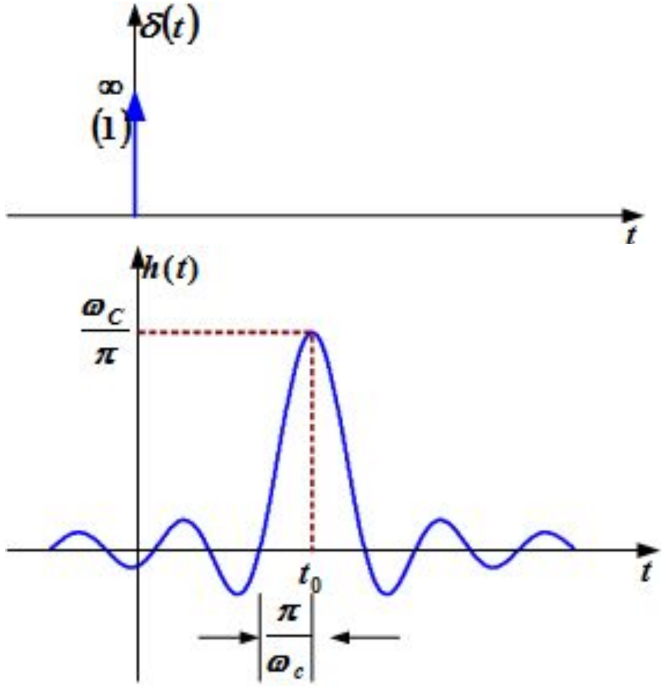
即：$$|H(j\omega)|=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$\varphi(\omega)=-j\omega t_d$$

2.冲激响应

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[g_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}\right]$$

$$= \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_d)]$$



结论：

(1)比较输入输出，可见严重失真；

原因：　δ(t)↔1信号频带无限宽，理想低通滤波器通频带是有限的，ω_C以上的频率成分截止。

(2)理想低通滤波器是物理不可实现的非因果系统；

（为什么？）

3.阶跃响应

$$g(t)=h(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(\tau-t_d)]}{\omega_c(\tau-t_d)}\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(\tau-t_d)]}{\omega_c(\tau-t_d)}\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{t}\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(\tau-t_d)]}{\omega_c(\tau-t_d)}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_c(t-t_d)}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_C(t-t_d)]$$

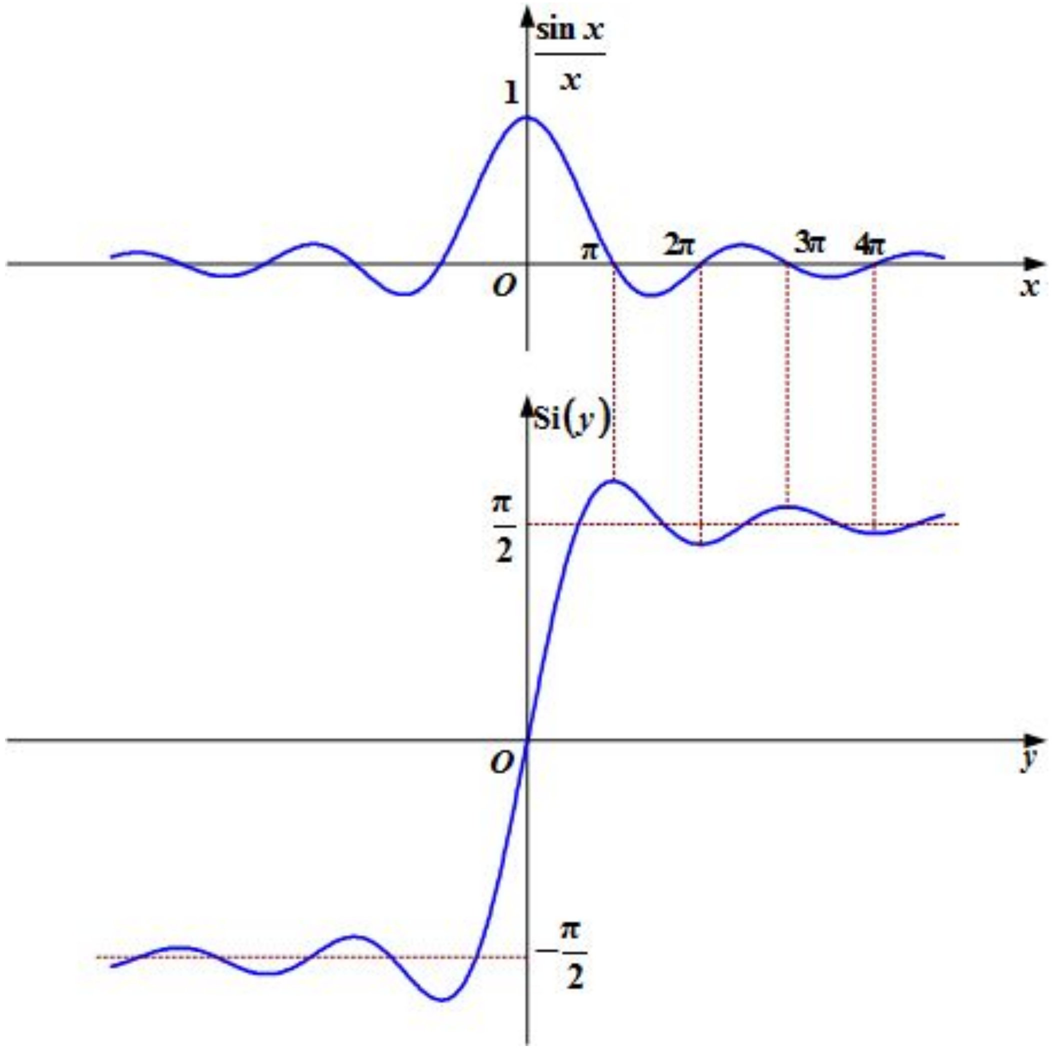
$$\mathrm{Si}(y)=\int_{0}^{y}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

正弦积分

4.8 LTI系统的频域分析

$$\mathrm{Si}(y)=\int_0^y \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

正弦积分



特点：

(1)奇函数；

(2)最大值Si(π),

位置:x= π ;

(3)最小值Si(- π),

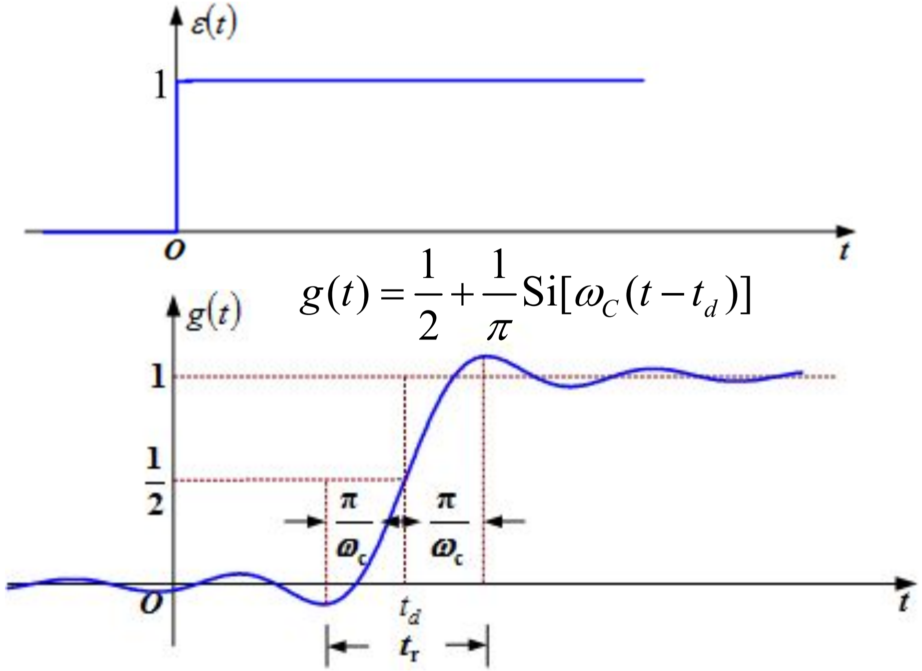
位置:x=- π ;

(4)稳态值Si(∞)= π /2

上升时间t_r：输出由最小值到最大值所经历的时间。

$$t_r = \frac{2\pi}{\omega_C} = \frac{1}{B}$$

可见：阶跃响应的上升时间t_r与滤波器带宽B成反比。



特点：有明显失真，只要$\omega_c<\infty$，则必有振荡，其过冲比稳态值高约9%。这一由频率截断效应引起的振荡现象称为**吉布斯现象**。

$$\boxed{g_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(\pi) \approx 1.0895}$$