知识点Z4.29

周期信号的傅里叶变换

主要内容：

1.正、余弦函数的傅里叶变换

2.一般周期信号的傅里叶变换

基本要求：

1.掌握正、余弦函数的傅里叶变换

2.掌握一般周期信号傅里叶变换的计算方法

周期信号：

$f(t) \leftrightarrow$ 傅里叶级数F_n　　　离散谱

非周期信号：

$f(t) \leftrightarrow$ 傅里叶变换$F(j\omega)$　　　连续谱

思考问题：

* 周期信号的傅里叶变换如何求取？
* 周期信号傅里叶变换与傅里叶级数的关系？
* 统一的分析方法------傅里叶变换？

Z4.29周期信号的傅里叶变换

1. 正、余弦信号的傅里叶变换

已知 $1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

由频移性质 $e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

由欧拉公式和线性性质

$$\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t)=\frac{1}{2j}\left(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}\right) \longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

2. 一般周期信号的傅里叶变换

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$ 指数形式的傅里叶级数

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t$$ 复傅里叶系数

$$\mathcal{F}\left[f_T(t)\right]=\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{jn\Omega t}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n 2\pi\delta(\omega-n\Omega)$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega)$$

4.7周期信号的傅里叶变换

公式1： $f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}\leftrightarrow \boxed{F_T(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega)}$

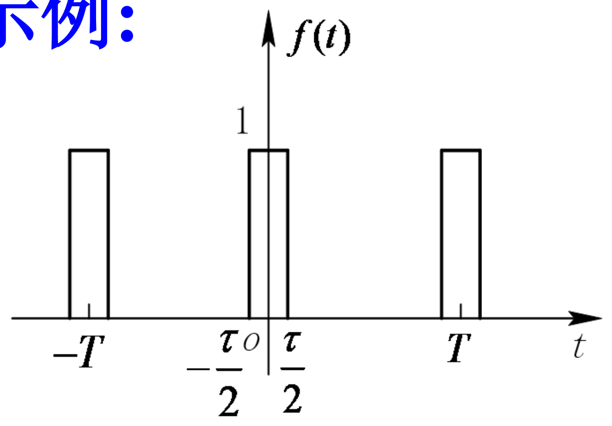
结论：

- 周期信号$f_T(t)$的频谱由冲激序列组成：

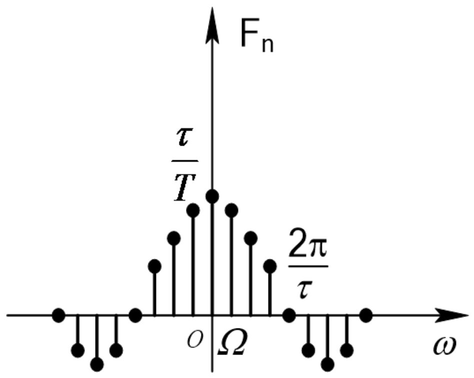
位置： $\omega=n\Omega$ (谐波频率)

强度： $2\pi F_n$ (离散谱)

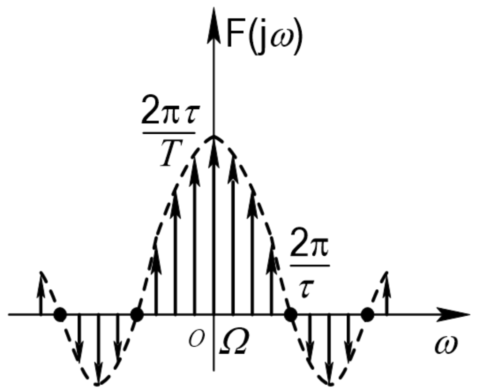
示例：



(a)周期矩形脉冲信号



(b)傅里叶级数



(c)傅里叶变换

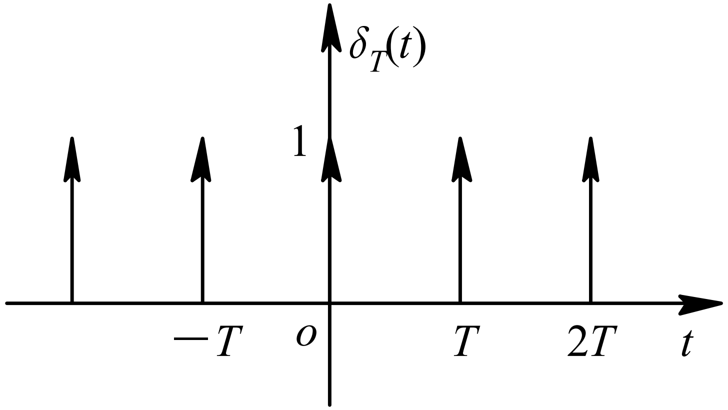
4.5傅里叶变换的性质

例1： 周期为T的单位冲激周期函数$\delta_T(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$

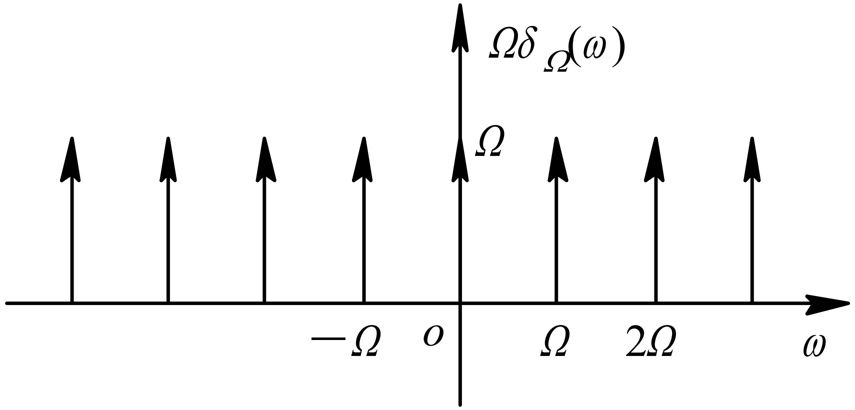
解：

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt=\frac{1}{T}$$

$$\delta_T(t)\longleftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\delta(\omega-n\Omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)=\Omega\delta_\Omega(\omega)$$

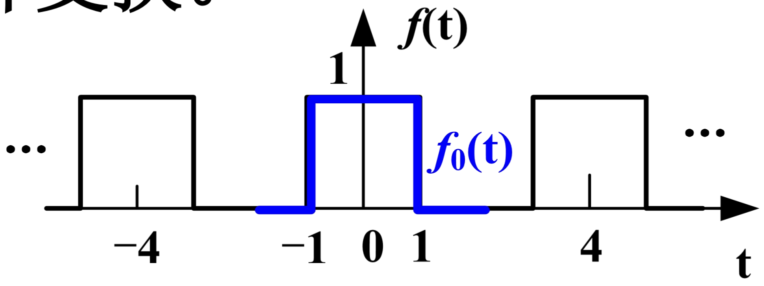


(a)



(b)

例2： 周期信号如图，求其傅里叶变换。



解： 周期信号f(t)也可看作一时限非周期信号$f_0(t)$的周期拓展。

即 $f_T(t)=\delta_T(t)*f_0(t)$

公式2：

$$\boxed{F_T(j\omega)=\Omega\delta_\Omega(\omega)F_0(j\omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_0(jn\Omega)\delta(\omega-n\Omega)}$$

本题 $f_0(t)=g_2(t)\longleftrightarrow 2Sa(\omega)$ $\quad \Omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}$

$$F(j\omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\,\mathrm{Sa}(n\Omega)\delta(\omega-n\Omega)=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\pi}{2})\delta(\omega-\frac{n\pi}{2})$$