Example 9.1

Q Case 1 resume policy.

draw? TPM = ? π = ?

$$\begin{tikzcd} ⓪ \arrow[r, shift left, "s"] & ① \arrow[l, shift left, "p"] \arrow[r, shift left, "f"] & ② \arrow[l, shift left, "r"] \end{tikzcd}$$

$$TPM = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s & s & 0 \\ p & 1-p-f & f \\ 0 & r & -r \end{bmatrix}$$

牢记公式

$$\begin{cases} \pi = \cancel{\pi} Q \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$\pi Q = 0$

$$\begin{cases} -s\pi_1 + s\pi_2 = 0 \\ p\pi_1 + (1-p-f)\pi_2 + f\pi_3 = 0 \\ r\pi_2 - r\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = -s\pi_1 + s\pi_2 & (1) \\ \pi_2 = p\pi_1 + (1-p-f)\pi_2 + f\pi_3 & (2) \\ \pi_3 = r\pi_2 - r\pi_3 & (3) \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 & (4) \end{cases}$$

(1): $(1+s)\pi_1 - s\pi_2 = 0$

$$\pi_2 = \frac{1+s}{s}\pi_1$$

(3) $(1+r)\pi_3 = r\pi_2$

$$z_3 = \frac{r}{1+r} z_2 = \frac{r}{1+r}\cdot\frac{1+s}{s} z_1$$

(4) $$\left(1+\frac{1+s}{s}+\frac{r}{1+r}\cdot\frac{1+s}{s}\right) z_1 = 1$$

$$z_1 = \frac{1}{\dfrac{(1+r)s+(1+s)(1+r)+r(1+s)}{(1+r)s}}$$

$$= \frac{s(1+r)}{s+rs+1+r+s+sr+r+sr}$$

$$= \frac{s+sr}{3rs+2s+2r+1}$$

$[z_0\ z_1\ z_2]$

$[\cancel{z_1\ z_2\ z_3}]$ $\begin{bmatrix} -s & s & 0 \\ p & 1-p-f & f \\ 0 & r & -r \end{bmatrix}$ 不要乘错

$$\begin{cases} -s z_0 + p z_1 = 0 & (1) \\ s z_0 + (1-p-f) z_1 + r z_2 = 0 & (2) \\ f z_1 - r z_2 = 0 & (3) \\ z_0 + z_1 + z_2 = 1 & (4) \end{cases}$$

(1) : $z_1 = \frac{s}{p} z_0$

(3): $\pi_2 = \frac{f}{r}\pi_1$

(4): $\pi_0 + \frac{s}{p}\pi_0 + \frac{f}{r}\frac{s}{p}\pi_0 = 1$

$$\left(1+\frac{s}{p}+\frac{fs}{rp}\right)\pi_0 = 1$$

$$\frac{rp+rs+fs}{rp}\pi_0 = 1$$

$$\pi_0 = \frac{rp}{rp+rs+fs}$$

$$\pi_1 = \frac{s}{p}\frac{rp}{rp+rs+fs} = \frac{sr}{rp+rs+fs}$$

$$\pi_2 = \frac{f}{r}\frac{sr}{rp+rs+fs} = \frac{fs}{rp+rs+fs}$$

Q: $s = 20/h$ $p = 4/h$ $f = 0.05/h$ $r = 1/h$

$\pi = ?$ $R = ?$ steady-state availability = ?

Mean completion time

Solution $\pi = [\pi_0\ \pi_1\ \pi_2] = \left[\frac{4}{4+20+1}\quad \frac{20}{25}\quad \frac{1}{25}\right]$

$= [0.16\quad 0.8\quad 0.04]$

Average production rate $R = \pi_1 p$

$= 0.8 \times 4$

$= 3.2$

steady-state availability $= \left(1+\frac{f}{r}\right)^{-1}$

$= \left(1+\frac{0.05}{1}\right)^{-1}$

why it is not equal to $\pi(1)$ 0.8 ?

$= \frac{20}{21}$

$= 0.9524$

Solve

Mean completion time $= \left(1+\frac{f}{r}\right)\frac{1}{p}$

$= \left(1+\frac{0.05}{1}\right)\frac{1}{4}$

$= \frac{21}{80}$

$= 0.2625$

$= \frac{\text{mean processing time}}{\text{steady-state availability}}$

$\frac{21}{80} = \frac{t}{\frac{20}{21}}$ $t = \frac{1}{4}$ hour/个

稳态可用性（Steady-state availability）是指在长期运行条件下，一个系统处于可用状态的概率。它衡量的是系统在任何给定时刻能够正常运行并提供预期服务的可能性。公式中的主要变量为故障率 f 和修复率 r，公式如下：

$$A = \left(1 + \frac{f}{r}\right)^{-1}$$

- f 表示系统的故障率，也就是单位时间内发生故障的频率。
- r 表示系统的修复率，也就是单位时间内修复故障的能力。

简单例子说明：

假设某设备每100小时会出现一次故障，即故障率 $f = 1/100$ 次/小时。修复人员每次修理这个设备平均需要10小时，修复率 $r = 1/10$ 次/小时。

根据公式：

$$A = \left(1 + \frac{f}{r}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1/100}{1/10}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{-1} = (1.1)^{-1} \approx 0.909$$

在这个例子中，稳态可用性约为90.9%，意味着这个设备在长时间运行下，有90.9%的时间是正常运行的。

公式的推导基于系统的平均运行时间和平均修复时间之间的关系，它体现了系统正常运行与故障/修复状态之间的平衡。

你可以把稳态可用性理解为系统在长期条件下的健康状态，这个公式帮助我们定量地衡量一个系统在一段时间内能够正常运行的概率。