

Problem 4.1

Q: prove $E(X) = \lambda t$

Solution $p(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$

$$E(X(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} k p(X(t) = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!}$$

-1的阶乘无意义

$$\text{let } n = k-1 \quad = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t} (\lambda t) e^{\lambda t}$$

泰勒展开式

$$= \lambda t$$