当存在两个并行的队列，一起组成系统时两个MM1

排队系统中的平均顾客数
the average number in the queue system

两个MM1：L1+L2

MM2：L

每个服务器空闲的时间比例（平均）
the proportion of time each server is idle (on average)

两个MM1：1/2(Π0+Π0)

MM2：（Π0+1/2 Π1）

我们看到了将单服务器队列合并为双服务器队列的优势。

第二个系统的 L 显然比第一个系统的 (L1+L2) 要小得多。

第二个系统中的服务器平均没有更多的工作
（没有额外的顾客需要服务），
但我们避免了一个服务器前有顾客排队，
而另一个服务器空闲的情况。

这减少了系统中的平均等待时间(W)。

Appendix A

M/M/1 Queue with Arrival Rate λ and Service Rate μ:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$ 利用率

$$\pi_0 = 1-\rho$$ 空的概率（the proportion of time each server is idle

$$\pi_k = \rho^k(1-\rho), \qquad k \geq 1$$ k个顾客的概率

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$ 系统中的平均顾客数【带系统的都是L】
（the average number in the queue system

$$Q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$ 排队的平均顾客数

$$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$ 顾客在系统的平均时间

$$D = D = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$ 排队的平均等待时间

M/M/1/N Queue with Arrival Rate λ and Service Rate μ:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{N}\rho^k\right)^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$

$$\pi_k = \rho^k\pi_0 = \frac{\rho^k(1-\rho)}{1-\rho^{N+1}}, \qquad 0 \leq k \leq N$$

$$L = \frac{\rho[1-\rho^N - N\rho^N(1-\rho)]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

$$Q = \frac{\rho^2[1-\rho^N - N\rho^{N-1}(1-\rho)]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

$$W = \frac{1-\rho^N - N\rho^N(1-\rho)}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

$$D = \frac{\rho[1-\rho^N - N\rho^{N-1}(1-\rho)]}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

M/M/m Queue with Arrival Rate λ and Service Rate μ:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

$$\pi_0 = \left[\frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m\rho)^k}{k!}\right]^{-1}$$

$$\pi_k = \pi_0 \begin{cases} \dfrac{(m\rho)^k}{k!}, & 0 \le k \le m-1 \\ \dfrac{m^m \rho^k}{m!}, & k \ge m \end{cases}$$

是如果k小于等于m-1，
就用Π0乘以上面这一坨，
如果k大于等于m，
就用Π0乘以下面这一坨

$$L = \frac{\rho(m\rho)^m \pi_0}{m!(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

系统中的平均顾客数
【相比m个 MM1，减少】

$$Q = \sum_{k=m}^{\infty}(k-m)\pi_k = \frac{\rho(m\rho)^m \pi_0}{m!(1-\rho)^2}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho(m\rho)^m \pi_0}{m!\lambda(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}$$

$$D = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho(m\rho)^m \pi_0}{m!\lambda(1-\rho)^2}$$

M^b/M/1 Queue with Arrival Rate λ and Service Rate μ:

$$\rho = \frac{b\lambda}{\mu}$$

$$\pi_0 = 1-\rho$$

$$\pi_k = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^{k-1}\dfrac{\lambda}{\mu}\pi_0 & 1 \le k \le b \\ \dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\pi_{k-1} - \dfrac{\lambda}{\mu}\pi_{k-b-1} & k \ge b+1 \end{cases}$$

$$L = \frac{\rho(1+b)}{2(1-\rho)}$$

$$Q = L - \rho = \frac{\rho(b-1+2\rho)}{2(1-\rho)}$$

$$W = \frac{L}{\lambda b} = \frac{1+b}{2\mu(1-\rho)}$$

$$D = W - \frac{1}{\mu} = \frac{b+2\rho-1}{2\mu(1-\rho)}$$

SIMPLEX方法 2

1.写出目标函数 和 subject to

小于：松弛变量

大于：剩余变量

等于和大于：人工变量

无界：两变量相减

右侧b负数：变号

人工变量

2.最小值矩阵

	x^T	
x_0	A	B
	$C^T - C_0^T A$	$- C_0^T B$

两阶段法：
分两行
常数行
和M行

最大值矩阵

	x^T	
x_0	A	B
	$-C^T + C_0^T A$	$C_0^T B$

3.底部行，最大负数，工作列

4.工作列的，大于零的，系数，b÷系数，最小比率

5.主元素1，其余0，换基本变量集

6.最后一行中没有负数

7.最优解是左右对应

8.目标函数的最优值，
对于最大化程序来说是最后一行和最后一列的数字，
但是对于最小化程序来说是这个数字的负数

5.2若M行非负，则判断

若人工变量x仍然是基本变量

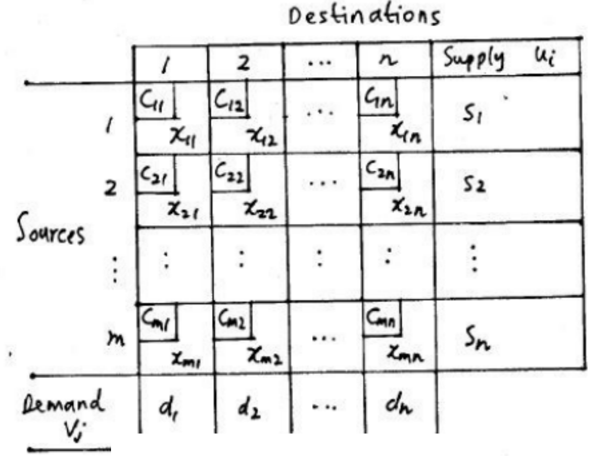
则无解

若左边没有人工变量

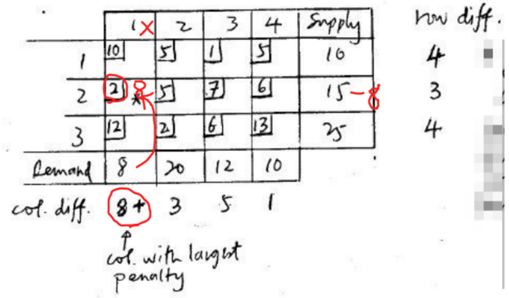
则删去M行

运输模型 2

1.画出 运输模型图，写出总运费
左来源
上目的地
虚拟源：运输成本被视为零



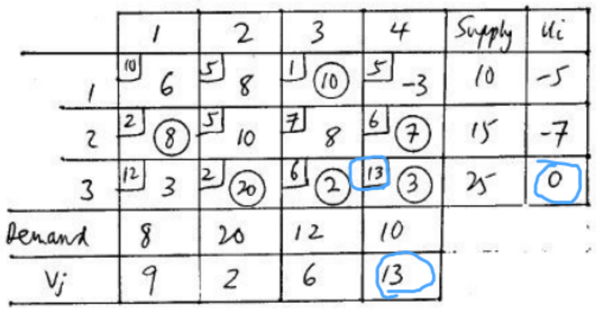
2.求初始基本解



最大插入最小

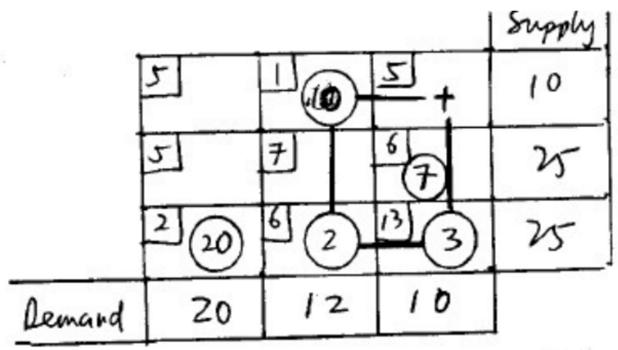
第一步：每行找出最小的两个相减得到row diff
第二步：每列出最小的两个相减得到col diff
第三步：找到最大的值row和col diff中最大的值
第四步：找到其对应的行或者列的最小代价值，标记上*
第五步：将供给和需求的最小值填进去*，然后供给和需求都减去最小值，并删除为0的行

3.测试最优



1.开始先找基本元素（圆圈）最多的行或者列，设为0
2.算圆圈cost=u+v
3.空白数为cost-u-v
4.如果空白出现负数，则非最优

4.获得最优解



1.找到最负的元素
2.用圆圈构成loop
3.从起始位置沿着环标上1234等
4.找到2468等最小值
5.奇数位置加，偶数位置减
6.减为0的取消圆圈，负数部分加圆圈

任务分配问题

匈牙利方法
Hungarian method

1

1

1.用M替换-，-代表不能做的工作

虚拟设置一个工作，代价为0

2.找到每行最小元素

3.所有减它

4.每列最小元素

5.所有减它

6.用最少数量的线盖住所有的0

7.所有非盖住的数字减去最小数a

8.两条线交点处的元素加最小数a

9.给四个人分配cost为0的工作

10.分配完后0变为0*

正定性测试

3

正定性测试（Test for Positive-Definiteness）

为了测试一个矩阵 A 是否正定，使用主子式（principal minors）的方法。假设 $A = [a_{ij}]$ 是一个 $n \times n$ 对称矩阵，定义如下的行列式：

$$A_1 = |a_{11}|, A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, A_n = |A|$$

positive definite

- **正定矩阵的条件**：如果 $A_1 > 0, A_2 > 0, \ldots, A_n > 0$，则矩阵 A 为正定矩阵。

positive semi-definite

- **正半定矩阵（positive semi-definite）**：如果 $A_1 \geq 0, A_2 \geq 0, \ldots, A_n \geq 0$，则矩阵 A 为正半定矩阵。
- **负定矩阵的条件**：如果 $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \ldots$ 交替符号，则矩阵 A 为负定矩阵。

negative-definite

negative semi-definite

PPT45

indefinite

等式拉格朗日法 3 1

1.判断NLP：目标函数可能不是线性函数，或者某些约束可能不是线性约束。

2.写出题目要求，和约束，标准形式

3.写出拉格朗日函数 L

$$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(X)$$

4.对x求偏导

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n) \text{ or } \nabla_x L = 0$$

对λ求偏导

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, m) \text{ or } \nabla_\lambda L = 0$$

5.求出X*和λ*

6.选择非零的λ对应的h-列向量 $h(X)$

7.约束条件对x求偏导 $\nabla h(X)$

8.得到约束式子，y列向量 $\nabla h(X)^T Y$

9.写出Hessian矩阵，证明正定

$$\nabla_{xx}^2 L = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

10.求Y^T H T大于零，

任意的y不等于0

就是最小值

验证答案有没有算错，把x和λ带回等式中，查看是不是为0

不等式拉格朗日法 2 1

1.判断NLP：目标函数可能不是线性函数，

或者某些约束可能不是线性约束。

Minimize: f(X)

Subject to: $g_j(X) \le 0,\ j = 1, 2, \ldots, p$

2.写出题目要求，和约束，标准形式

3.写出拉格朗日函数 L $\quad L(X, \mu) = f(X) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(X)$

4.写出KT定理(充分条件)

(1) 对x求偏导

(2) 约束小于等于0

(3) μx约束=0

(4) μ大于等于0

(1) $\nabla_x L(X^*, \mu^*) = 0$

(2) $g(X^*) \le 0$

(3) $\mu_j^* g_j(X^*) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, p$

(4) $\mu^* \ge 0$

(5) $Y^T \nabla_{xx}^2 L(X^*, \mu^*) Y > 0$ on $M' = \{Y: \nabla g_j(X^*)^T Y = 0$ for all $j \in J\}$ where $J = \{j: g_j(X^*) = 0, \mu_j^* > 0\}$.

5.按照μ1 和μ2 分类讨论,求出X*和μ*

μ1 = μ2 =0

μ1 = 0, μ2 > 0

μ1 > 0, μ2 = 0

μ1 > 0, μ2 > 0

6.21-S1-Q2

According to PPT 45, $\nabla_{xx}^2 L(x,\mu)$ is a positive definite ⇒ the function L is a convex function.

According to PPT 45, A linear function is also convex

⇒ $g_1 = x_1 - 2$, $g_2 = x_2 - 2$ are linea function

⇒ So g_1 g_2 are also convex

According to PPT 46. KT sufficient theorem, f(x) is convex, the inequality constrains $g_i(x)$ are all convex functions and equality constraints $h_i(x)$ be linear. If the exists a solution $(X^*\ \lambda^*\ \mu^*)$ that satisfies the K-T conditions, then X^* is an optimal solution to the NLP problem.

So $X^* = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ is a mininum point

6.选择所有μ大于的，对应的g，$\quad g_j(X^*)$

7.让g=0对x求偏导， $\quad \nabla g_j(X^*)^T$

8.乘以Y=[y1 y2 y3]得到Y的式子 $\quad \nabla g_j(X^*)^T Y = 0$

9.写出Hessian矩阵，证明正定 $\quad [\nabla^2 f(X)]_{ij} = \frac{\partial 2\, f(X)}{\partial xi \partial xj}$

10.求Y^T H T大于零，就是最小值

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

灵敏度分析

$L_\lambda(X, \lambda) = f(X) + \lambda^T(AX - B)$

B+ΔB

目标函数的变换=约束条件B变化 x 拉格朗日乘子

Δz=ΔBi λ i

2

1

$$f(\bar{X}) \approx f(X^*) - \sum_{i=1}^{m} \Delta B_i \, \lambda_i{}^*$$

Or

$$\Delta f(X_*) = f(\bar{X}) - f(X^*) \approx - \sum_{i=1}^{m} \Delta B_i \, \lambda_i{}^*$$

随机过程公式总结

条件概率公式 $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

几何随机变量 $$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

几何随机变量 - 均值 $$E(X) = \frac{1}{p}$$

马尔可夫属性
无记忆属性 $$P(X = m + n \mid X > m) = P(X = n)$$

指数随机变量 $$X \sim EXP(\lambda)$$

指数随机变量 - 累积分布函数
$$P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \ge 0$$
$$P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

指数随机变量 - 均值 $$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

指数随机变量 - 概率密度函数
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

泊松随机变量公式 1
$$P(X(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

泊松随机变量 $$X(t) \sim P(\lambda t)$$
时间间隔[0，t]内事件

泊松随机变量 - 均值 $$\textbf{mean } \lambda t.$$

到达间隔时间 $$T \sim EXP(\lambda)$$

n个泊松过程的叠加 $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

DTMC	CTMC
1. $\{X_n : n \in N\}$ with state space $S = \{0, 1, \cdots\}$	$\{X(t) : t \geq 0\}$ with state space $S = \{0, 1, \cdots\}$
2. Markov property $P(X_n = j \mid X_{n-1} = i,\ X_{n-2} = i_2,\ \cdots,\ X_0 = i_n)$ $= P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$	$P(X(t) = j \mid X(s) = i,\ X(u) = x(u)),\ \ u \leq s \leq t$ $= P(X(t) = j \mid X(s) = i)$
3. Sojourn time T_i of state i T_i is a geometric r.v. with mean $E(T_i) = \frac{1}{1-p_{ii}}$	$T_i \sim EXP(\lambda_i)$ $P(T_i > x) = e^{-\lambda_i x}$

1.定义

2.
马尔可夫性质

3.
状态i的逗留时间Ti

4.
转移概率

5.
转移概率矩阵

TPM

DTMC	CTMC
4. Transition probability	
$p_{ij}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$	$p_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$
$\sum_j p_{ij}(n) = 1$	$\sum_j p_{ij}(t) = 1$
5. Transition probability matrix	
$P(n) = [p_{ij}(n)]$	$H(t) = [p_{ij}(t)]$
On-step TPM, $P = [p_{ij}]$	
$P(m+n) = P(m)P(n)$	$H(s+t) = H(s)H(t)$
$P(n) = P^n$	$H(t) = \exp(Qt)$ $= I + Qt + Q^2 \frac{t^2}{2!} + Q^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots$

过渡率矩阵

TRM

DTMC	CTMC
	Transition rate matrix $Q = [q_{ij}]$ 过渡率矩阵 q_{ij} **is the rate at which the CTMC moves from state i to state j** gij是CTMC从状态i移动到状态j的速率 $$\sum_j q_{ij} = 0$$ **i.e., sum of each row of Q is zero**

6.
状态概率

DTMC	CTMC
6. State probability	
$p_j(n) = P(X_n = j)$	$p_j(t) = P(X(t) = j)$
$\sum_j p_j(n) = 1$	$\sum_j p_j(t) = 1$
$\pi(n) = [p_0(n) \;\; p_1(n) \;\; p_2(n) \;\; \cdots \;]$	$\pi(t) = [p_0(t) \;\; p_1(t) \;\; p_2(t) \;\; \cdots \;]$
$\pi(n)$ is the pmf of $X(n)$	$\pi(t)$ is the pmf of $X(t)$
$\pi(n) = \pi(0)P(n) = \pi(0)P^n$	$\pi(t) = \pi(0)H(t) = \pi(0)\exp(Qt)$

p0(n): n步后，变为 0 的概率

p1(n): n步后，变为 1 的概率

Π（n）：n步后，变为 0，1，2，3... 的概率的集合

p0(t): t时间后，变为 0 的概率

p1(t): t时间后，变为 1 的概率

Π（t）：t时间后，变为 0，1，2，3... 的概率的集合

7.
稳态概率

DTMC	CTMC

7. Steady state probability

DTMC

$$\begin{aligned} Y &= \lim_{n\to\infty} \pi(n) \\ &= [y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \cdots\ ] \end{aligned}$$

$$y_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$$

To calculate Y :

$$\begin{cases} Y = YP \\ \sum_j y_j = 1, \quad 0 \le y_j \le 1 \end{cases}$$

再怎么用状态转移矩阵（TPM）都不会变

所有状态之和概率要为1

CTMC

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{t\to\infty} \pi(t) \\ &= [\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \cdots\ ] \end{aligned}$$

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t) = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = j)$$

To calculate π :

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \quad \text{(rate balance equations)} \\ \sum_j \pi_j = 1, \quad 0 \le \pi_j \le 1 \end{cases}$$

y0：无穷n步后，变为 0 的概率

y1：无穷n步后，变为 1 的概率

Y：无穷n步后，变为 0，1，2，3... 的概率的集合

平均生产效率 R

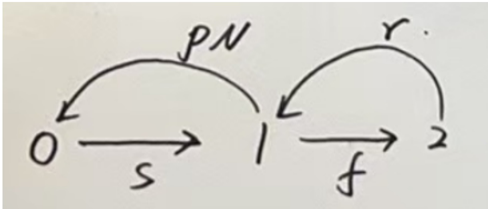
= 处于生产状态下的概率权重 x 生产速率

平均产量R

Average production rate R

$= $ no. of parts produced per hour 每小时生产的零件数量

$= \pi_1 p$



$R' = \pi_1' \cdot pN$

生产速率不同

稳态可用性

$$\text{Steady-state availability} = \left(1 + \frac{f}{r}\right)^{-1} \quad \textbf{(71)}$$

稳态可用性

Steady-state availability is the probability that the system is functioning in a productive way.

稳态可用性是系统以生产方式运行的可能性。64

平均完工时间

平均完工时间

Mean completion time

$$= \left(1 + \frac{f}{r}\right) \frac{1}{p}$$

$$= \frac{\text{mean processing time}}{\text{steady-state availability}}$$

平均处理时间

稳态可用性

层次分析法
Analytic Hierarchy Process

决策树分析

冯 · 诺伊曼-摩根斯坦方法

u(least favorable outcome) = 0

u(most favorable outcome) = 1

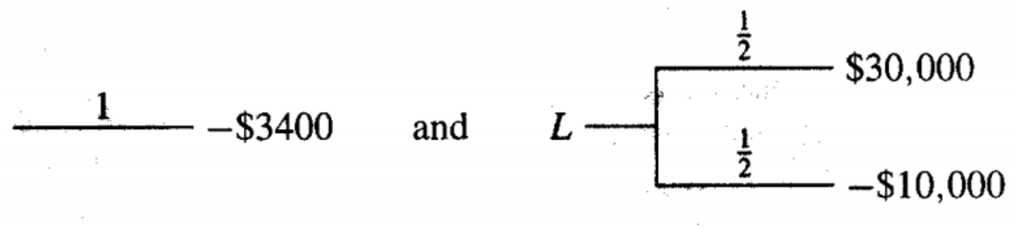
奖励ri的效用
utility of the reward ri

$$u(r_i) = q_i$$

期望效用
expected utility

$$E\,(U \text{ for } L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(r_i)$$

确定性当量CE(L)
certainty equivalent



$$CE(L) = -\$3400.$$

风险溢价RP(L)
risk premium

$$RP(L) = EV(L) - CE(L),$$ 确定性当量CE(L)

EV(L)是彩票结果的期望值

Risk-averse if $RP(L) > 0$

Risk-neutral if $RP(L) = 0$

Risk-seeking if $RP(L) < 0$

将风险纳入决策树分析

将每个最终资产位置x替换为其效用u(x)

信息的价值

EV(after test) – EV(without test)

样本信息期望值（EVSI）
Expected Value of Sample Information (EVSI)

信息的价值

样本信息 无成本 期望值（EVWSI）
Expected Value with Sample Information(EVWSI).

测试无成本

原始信息期望值（EVWOI）
Expected Value with Original Information(EVWOI).

测试不可用