Thought，持续 1m 27s

Answer to Part (a):对(a)部分的答复：

The Euclidean distance between the transformed vectors $\mathbf{y}_1$ and $\mathbf{y}_2$ is:

变换向量之间的欧几里德距离 $\mathbf{y}_1$ 和 $\mathbf{y}_2$ 是：

$$d_u(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_2 = \|\mathbf{W}^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|_2.$$

Expressed in terms of $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$, we have:表达为 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ ，我们有：

$$d_u(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \|\mathbf{W}^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|_2 = \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T \mathbf{W}\mathbf{W}^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}.$$

For the distances to be equal for any $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$, the following condition must hold:

对于任何距离都相等 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ ，必须满足以下条件：

$$d_u(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = d_u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T(\mathbf{W}\mathbf{W}^T - \mathbf{I})(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0.$$

Since this must hold for all $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, it follows that:因为这必须适用于所有人 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ，由此可知：

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{I}.$$

Therefore, the condition is that $\mathbf{W}$ must satisfy $\mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{I}$; that is, $\mathbf{W}$ must be a semi-orthogonal matrix with orthonormal rows.

因此，条件是 $\mathbf{W}$ 必须满足 $\mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{I}$;那是， $\mathbf{W}$ 必须是具有正交行的半正交矩阵。

Answer to Part (b):对(b)部分的答复：

First, note that the Mahalanobis distance between $\mathbf{y}_1$ and $\mathbf{y}_2$ is:

首先，请注意之间的马哈拉诺比斯距离 $\mathbf{y}_1$ 和 $\mathbf{y}_2$ 是：

$$d_m(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)^T \Sigma_y^{-1}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2),$$

where Σ_y is the covariance matrix of $\mathbf{y}$. Since $\mathbf{y} = \mathbf{W}^T\mathbf{x}$, the covariance matrix Σ_y is:

在哪里 Σ_y 是协方差矩阵 $\mathbf{y}$ 。自从 $\mathbf{y} = \mathbf{W}^T\mathbf{x}$ ，协方差矩阵 Σ_y 是：

$$\Sigma_y = \mathbf{W}^T \Sigma_x \mathbf{W}.$$

To express $d_m(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ in terms of $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$, we proceed as follows:

表达 $d_m(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ 按照 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ ，我们按如下方式进行：

$$\begin{aligned} d_m(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) &= (\mathbf{W}^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2))^T \Sigma_y^{-1}(\mathbf{W}^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) \\ &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T \mathbf{W}\Sigma_y^{-1}\mathbf{W}^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Since $\Sigma_y = \mathbf{W}^T\Sigma_x\mathbf{W}$, its inverse is:自从 $\Sigma_y = \mathbf{W}^T\Sigma_x\mathbf{W}$ ，其倒数为：

$$\Sigma_y^{-1} = (\mathbf{W}^T\Sigma_x\mathbf{W})^{-1} = \mathbf{W}^{-1}\Sigma_x^{-1}\mathbf{W}^{-T},$$

assuming $\mathbf{W}$ is invertible. Substituting back, we get:假设 $\mathbf{W}$ 是可逆的。代入回去，我们得到：

$$\begin{aligned} d_m(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T \mathbf{W}(\mathbf{W}^{-1}\Sigma_x^{-1}\mathbf{W}^{-T})\mathbf{W}^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T \Sigma_x^{-1}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = d_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Therefore, the condition under which $d_m(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = d_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ for any $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ is that $\mathbf{W}$ must be invertible.

因此，在该条件下 $d_m(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = d_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 对于任何 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 是那个 $\mathbf{W}$ 必须是可逆的。

Comparison with Part (a):与(a)部分的比较：

- In **Part (a)**, the Euclidean distance is preserved when $\mathbf{W}$ is a semi-orthogonal matrix satisfying $\mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{I}$, which means $\mathbf{W}$ has orthonormal rows but does not necessarily have to be square or invertible.

  在**(a)部分**中，当 $\mathbf{W}$ 是一个半正交矩阵，满足 $\mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{I}$ ，这意味着 $\mathbf{W}$ 具有正交行，但不一定必须是平方或可逆的。

- In **Part (b)**, the Mahalanobis distance is preserved when $\mathbf{W}$ is invertible, regardless of whether it is orthogonal or not.在**(b) 部分**中，当 $\mathbf{W}$ 是可逆的，无论是否正交。

Thus, the condition in part (b) (invertibility of $\mathbf{W}$) is less restrictive than in part (a), where $\mathbf{W}$ must be semi-orthogonal.

因此，(b)部分的条件 （ $\mathbf{W}$ ）的限制性小于 (a) 部分，其中 $\mathbf{W}$ 必须是半正交的。

Summary:概括：

(a) The Euclidean distance is preserved ($d_u(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = d_u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$) if and only if $\mathbf{W}$ satisfies $\mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{I}$.

(a) 欧氏距离保持不变（ $d_u(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = d_u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ）当且仅当 $\mathbf{W}$ 满足 $\mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{I}$ 。

(b) The Mahalanobis distance is preserved ($d_m(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = d_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$) if and only if $\mathbf{W}$ is invertible.(b) 马哈拉诺比斯距离保持不变（ $d_m(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = d_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ）当且仅当 $\mathbf{W}$ 是可逆的。

The condition in part (b) is less restrictive, allowing any invertible $\mathbf{W}$, whereas part (a) requires $\mathbf{W}$ to be semi-orthogonal.

(b)部分的条件限制较少，允许任何可逆的 $\mathbf{W}$ ，而 (a) 部分要求 $\mathbf{W}$ 为半正交。