FACULDADE DE TECNOLOGIA DE JACAREÍ – Prof. Francisco de Moura

TECNOLOGIA EM DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE MULTIPLATAFORMA

ÁLGEBRA LINEAR

Rita von Randow

rita.randow@fatec.sp.gov.br

1º semestre 2025

ALGEBRA LINEAR

TECNOLOGIA EM DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE MULTIPLATAFORMA

FATEC/JACAREÍ

Rita von Randow

rita.randow@fatec.sp.gov.br

1º semestre 2025

02/04/2025
a
16/04/2025

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Aula 3

EQUAÇÕES LINEARES

Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$

Os números $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$, todos reais, são chamados *coeficientes* e b, também real é o *termo independente* da equação.

Exemplos

1º) $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5$

2º) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$

3º) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4$

4º) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$

Observemos que *não são lineares* as equações:

1º) $2x_1^2 + 4x_2 + x_3 = 0$

2º, $2x_1x_2 + x_3 + x_4 = 3$

3º) $x_1 + \sqrt{x_2} - x_3 = 4.$

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR

Dizemos que a seqüência ou ênupla ordenada de números reais

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$$

é uma solução da equação linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$$

se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Exemplos:

1º) Seja a equação linear

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

a seqüência $(1, 2, 3, -2)$ é solução, pois $2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) - (3) + (-2) = 3$ é sentença verdadeira, porém a seqüência $(1, 1, 2, 1)$ não é solução, pois $2 \cdot (1) + 3 \cdot (1) - (2) + (1) = 3$ é sentença falsa.

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR

Exemplos:

2º) Seja a equação linear

$$0x + 0y + 0z = 0$$

é fácil observar que qualquer tripla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução da equação.

3º) Seja a equação linear

$$0x + 0y + 0z + 0t = 2$$

é fácil observar que qualquer quádrupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ não satisfaz a equação, pois

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = 2$$

é sentença falsa $\forall \alpha_1, \forall \alpha_2, \forall \alpha_3, \forall \alpha_4$.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Na natureza, tudo está em constante mudança. O ser humano, para garantir sua sobrevivência e melhorar sua existência, precisa conhecer e dominar estes processos de mudança. Um dos métodos encontrados para se descrever estas transformações foi o de procurar nestas o que permanece constante durante a mudança.

Por exemplo:

Sabemos que o hidrogênio (H_2) reage com o oxigênio (O_2) para produzir água (H_2O).

- Quanto de hidrogênio e oxigênio precisamos?

$$xH_2 + yO_2 = zH_2O$$

- O que permanece constante nessa mudança? O número de átomos de cada elemento

- Assim: • para o hidrogênio temos: $2x = 2z$ • para o oxigênio temos: $2y = z$

Portanto, nossas incógnitas *x, y e z* devem satisfazer as equações:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se conseguirmos descobrir quais são os números x, y e z que satisfazem simultaneamente estas relações, teremos aprendido um pouco mais sobre como se comporta a natureza.

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

- USO DOS DETERMINANTES NA SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES 2X2 OU 3X3
- **REGRA DE CRAMER**

1. Sistemas Lineares com duas equações e duas incógnitas

A forma geral deste sistema é a seguinte:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Sendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a matriz dos coeficientes, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a matriz das incógnitas e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ a matriz dos termos independentes, esse sistema linear pode ser escrito na forma matricial: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

- Se o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero (D ≠ 0), então:
- Posso encontrar Dx , em que Dx é o determinante da matriz onde substituo os coeficientes de *x* pelos termos independentes.

$$D_x = b_1.a_{22} - b_2.a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

- Posso encontrar Dy , em que Dy é o determinante da matriz onde substituo os coeficientes de *x* pelos termos independentes.

$$D_y = b_2.a_{11} - b_1.a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Para um sistema linear com 2 equações e 2 incógnitas:

Se $D \neq 0$ então o **sistema** é **possível e determinado (SPD)** e a única solução do sistema é dada por:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{e} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Para um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas:

Se $D \neq 0$, então o sistema é possível e determinado e a única solução é dada por

$$x = \frac{D_x}{D}, \; y = \frac{D_y}{D} \; \text{ e } \; z = \frac{D_z}{D}.$$

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

REGRA DE CRAMER

Se $A\,.\,X = B$ é a forma matricial de um sistema linear com n equações e n incógnitas (representadas por $x_1, x_2, \dots, x_n$) tal que $D = detA \neq 0$, então o sistema tem uma única solução (é possível e determinado). Essa solução é:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} \;,\; x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \quad \dots \quad , x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$$

em que D_{x_i} é o determinante da matriz da incógnita x_i, ou seja, da matriz obtida substituindo a coluna i da matriz A pela coluna dos termos independentes (elementos da matriz B).

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

- Resolva os seguintes sistemas lineares pelo Método de Crammer:

a) $\begin{cases} x - y = 9 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + y = 2 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

Respostas: a) S = { (10,1)}   b) {(2, -8)}

c) S = {(1,2,3)}

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Na natureza, tudo está em constante mudança. O ser humano, para garantir sua sobrevivência e melhorar sua existência, precisa conhecer e dominar estes processos de mudança. Um dos métodos encontrados para se descrever estas transformações foi o de procurar nestas o que permanece constante durante a mudança.

Por exemplo:

Sabemos que o hidrogênio (H_2) reage com o oxigênio (O_2) para produzir água (H_2O).

- Quanto de hidrogênio e oxigênio precisamos?

$$xH_2 + yO_2 = zH_2O$$

- O que permanece constante nessa mudança? O número de átomos de cada elemento

- Assim: • para o hidrogênio temos: $2x = 2z$ • para o oxigênio temos: $2y = z$

Portanto, nossas incógnitas *x, y e z* devem satisfazer as equações:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se conseguirmos descobrir quais são os números x, y e z que satisfazem simultaneamente estas relações, teremos aprendido um pouco mais sobre como se comporta a natureza.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Este procedimento leva a um sistema de equações lineares
- Quando o número de equações se torna muito grande ou há menos equações do que incógnitas, podem surgir muitas dúvidas
- O objetivo dessa parte do curso é apresentar um método para a resolução de sistemas lineares em geral.
- Essa técnica pode não ser a melhor para sistemas muito simples, mas tem a vantagem de poder ser aplicada sempre e de ser mecanizada facilmente.
- O método consiste em substituir o sistema inicial por sistemas cada vez mais simples, sempre equivalentes ao original.

OPERAÇÕES ELEMENTARES

- No cálculo de determinantes, ao utilizar o Teorema de Jacobi, vimos que adicionando a uma fila de uma matriz M, de ordem n, uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, o determinante da matriz resultante não difere da matriz anterior.

- São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz que poderão ser aplicadas à resolução de sistemas:

i. Multiplicar uma linha por um número diferente de zero

ii. Adicionar uma linha a outra

Existe ainda uma outra operação que às vezes precisaremos efetuar neste procedimento, e ela também é reversível

iii. Permutar duas linhas

OPERAÇÕES ELEMENTARES

- Como foi dito, são três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

i) Permuta das *i*-ésima e *j*-ésima linhas ($L_i \leftrightarrow L_j$)

Alunos, façam:

Exemplo: $L_2 \longrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

OPERAÇÕES ELEMENTARES

ii) Multiplicação da *i*-ésima linha por um escalar não nulo *k*. (L_i →KL_i)

Alunos, façam:

Exemplo: $L_2 \longrightarrow -3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

iii) Substituição da *i*-ésima linha pela *i*-ésima linha mais *K* vezes a *j*-ésima linha ($L_i \rightarrow L_i + kL_j$)

Exemplo: $L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

L3 =	-3	4
2*L1 =	2	0
L3' =	-1	4

+

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

OPERAÇÕES ELEMENTARES

- Se **A** e **B** são matrizes m x n, dizemos que **B** é linha equivalente a **A**, se **B** for obtida de **A** através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de **A**. Notações: **A→B** ou **A ~B**

Exemplo: Mostre que Alunos!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é linha equivalente a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Já mencionamos que as operações com linhas de um sistema produzem outro sistema equivalente ao inicial. Em termos de matrizes, podemos enunciar este resultado da seguinte forma:

Teorema: Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Por exemplo, no sistema:

$$\begin{cases} \quad\quad\; x_2 + 3x_3 = 5 & (1) \\ x_1 + 3x_2 + \;\; x_3 = 2 & (2) \\ 2x_1 + 4x_2 - \;\; x_3 = 1 & (3) \end{cases}$$

Nosso primeiro passo seria permutar as equações (1) e (2) para obter o coeficiente de x_1 diferente de zero na primeira equação.

Essas operações em sistemas produzem sempre sistemas com mesmo conjunto-solução, como vimos no exemplo anterior.

SISTEMAS E MATRIZES

- Agora iremos usar matrizes para apresentar uma maneira organizada de resolver sistemas de equações, seguindo a ideia do exemplo anterior.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Ou **A** · **X** = **B** onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A é a matriz dos coeficientes X é a matriz das icógnitas B é a matriz dos termos independentes

SISTEMAS E MATRIZES

- Outra matriz que podemos associar ao sistema é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Que chamamos de ***matriz ampliada do sistema***. Cada linha desta matriz é simplesmente e uma representação abreviada da equação correspondente no sistema.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A é a matriz dos coeficientes X é a matriz das icógnitas B é a matriz dos termos independentes

SISTEMAS E MATRIZES

- No primeiro sistema que apresentamos, poderíamos ter escrito a matriz correspondente da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

A em forma matricial... $\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Em termos de matrizes ampliadas, na resolução do problema partimos de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Que é a matriz ampliada do sistema VI

FORMA ESCADA

E chegamos em:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Seja o seguinte sistema de equações:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3) \end{cases}$$

1º Passo: Eliminar x_1 das equações (2) e (3)

Como? Multiplico a equação (1) por -2 e somo na equação (2). Obtenho (2')

Multiplico a equação (1) por -1 e somo na equação (3). Obtenho (3')

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1') \\ 0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 & (2') \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = -4 & (3') \end{cases}$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

2º Passo: Tornamos o coeficiente de x_2 das equação (2’) igual a 1. Para isto, multiplicamos a equação (2’) por -1/3. Resulta em:

$$(III)\quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1'') \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2'') \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (3'') \end{cases}$$

3º Passo: Eliminar o x_2 das equações (1”) e (3”). Multiplicamos a equação (2”) por -4 e somamos a esta equação (1”). Multiplicamos a equação (2”) por 7 e somando a esta nova equação a equação (3”)

$$(IV)\quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1''') \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2''') \\ 0x_1 + 0x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (3''') \end{cases}$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

4º Passo: Tornamos o coeficiente de x_3 na equação (3’”) igual a 1. Para isto, multiplicamos a equação (3”’) por -3. Resulta em:

$$(\mathrm{V}) \quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1^{iv}) \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2^{iv}) \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 & (3^{iv}) \end{cases}$$

5º Passo: Eliminamos x_3 das duas primeiras equações do sistema (V) multiplicando a equação (3^{iv})e somamos esta nova equação a equação (1^{iv}). Da mesma forma, multiplicamos a equação (3^{iv}) por -2/3 e a esta nova equação somamos a equação (2^{iv}). Resultando:

FORMA ESCADA

$$(\mathrm{VI}) \quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -2 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Ou ainda: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Cada sistema foi obtido a partir do sistema anterior, por operações que preservaram as igualdades
- Cada terna (x_1, x_2, x_3) que é solução do sistema I, também será solução dos sistemas seguintes

- Nesse procedimento, as etapas são todas reversíveis

$$
\begin{aligned}
(1) &= (1') \\
(2) &= 2 \cdot (1') + (2') \\
(3) &= (1') + (3')
\end{aligned}
$$

O que isso quer dizer?

- De forma análoga você pode obter o sistema V a partir do VI, IV a partir do V, III a partir do IV e II a partir do III

- Portanto, podemos dizer que os sistemas I, II, III, IV, V e VI possuem as mesmas soluções

  portanto, $x_1 = 3, x_2$ = -2 e $x_3 = 2$ que é solução de IV é a única solução do sistema inicial I.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Podemos afirmar que no exemplo anterior os sistemas I, II, III, IV, V e VI são ***equivalentes***

- As únicas operações que efetuamos no exemplo anterior foram:

i) Multiplicar uma equação por um número diferente de zero.
ii) Adicionar a equação a outra.

Existe ainda uma outra operação que às vezes precisaremos efetuar neste procedimento, e ela também é reversível.

iii) Permutar duas equações.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Podemos afirmar que no exemplo anterior os sistemas I, II, III, IV, V e VI são ***equivalentes***

- As únicas operações que efetuamos no exemplo anterior foram:

Usamos quando queremos que um número "vire" 1. Por exemplo: Temos 5 e multiplicamos por 1/5 5x(1/5) = 5/5 =1

i) Multiplicar uma equação por um número diferente de zero.
ii) Adicionar a equação a outra.

Usamos quando queremos zerar um número da coluna do "coringa". Multiplico a linha do "coringa" pelo oposto do nº que quero zerar e somo a linha multiplicada à linha do número que quero zerar

Existe ainda uma outra operação que às vezes precisaremos efetuar neste procedimento, e ela também é reversível.

iii) Permutar duas equações.

Usamos quando queremos trocar linhas de posição. Por exemplo, quando o 1º elemento não nulo está nas linhas debaixo ou queremos colocar um linha nula após todas as outras.

FORMA ESCADA

- DEFINIÇÃO: Uma matriz $m \times n$ é ***linha reduzida à forma escada*** se

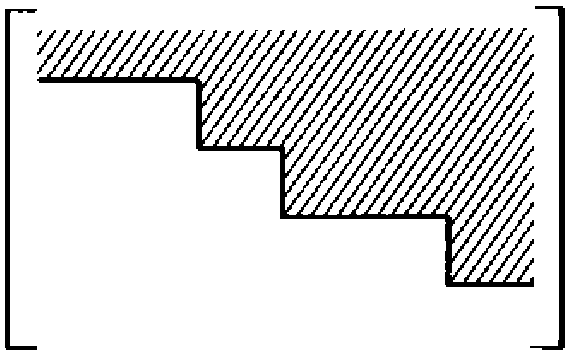
a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1

b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero

c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)

d) Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Esta última condição impõe a forma escada à matriz:



Isto é, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

FORMA ESCADA

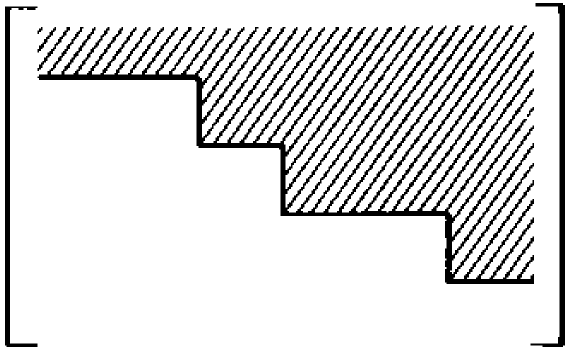
- <u>DEFINIÇÃO</u>: Uma matriz *m x n* é ***linha reduzida à forma escada*** se

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1

b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero

c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)

d) Se as linhas *1, ..., r* são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha *i* ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < ... < k_r$.



<u>Exemplos</u>:

Exemplo 1: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

FORMA ESCADA

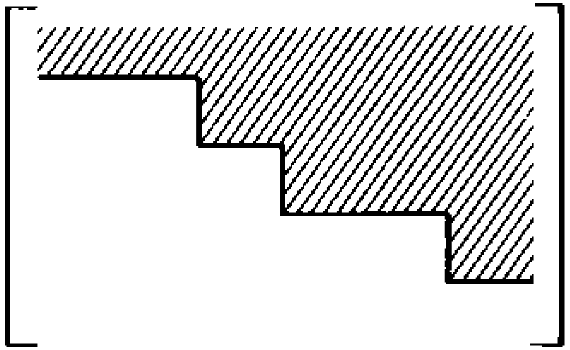
- DEFINIÇÃO: Uma matriz *m x n* é ***linha reduzida à forma escada*** se

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1

b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero

c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)

d) Se as linhas *1, ..., r* são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha *i* ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.



Exemplos:

Exemplo 2: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

FORMA ESCADA

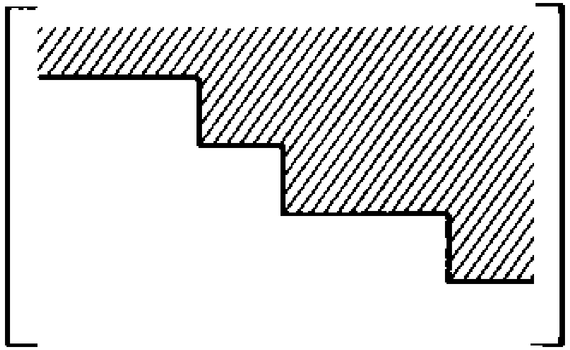
- DEFINIÇÃO: Uma matriz *m x n* é ***linha reduzida à forma escada*** se

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1

b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero

c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)

d) Se as linhas *1, ..., r* são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha *i* ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < ... < k_r$.



Exemplos:

Exemplo 3: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

FORMA ESCADA

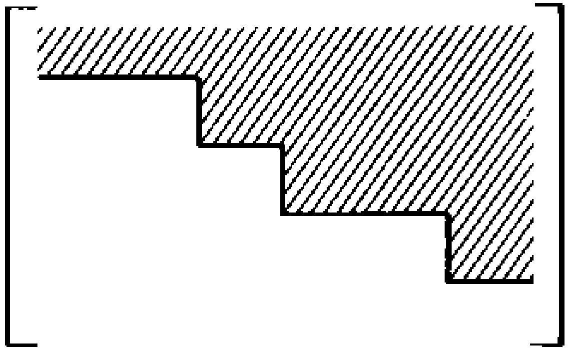
- <u>DEFINIÇÃO</u>: Uma matriz $m \times n$ é ***linha reduzida à forma escada*** se

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1

b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero

c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)

d) Se as linhas *1, ..., r* são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha *i* ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.



<u>Exemplos</u>:

Exemplo 4: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

OPERAÇÕES ELEMENTARES

Exemplos:

Exemplo 1: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Não é a forma escada pois a segunda condição não é satisfeita.

Exemplo 2: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não é a forma escada pois não satisfaz a primeira e a quarta condições.

Exemplo 3: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ Não satisfaz a primeira nem a terceira condição.

Exemplo 4: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ É a forma escada pois todas as condições são satisfeitas.

OPERAÇÕES ELEMENTARES

- Agora é com vocês!!!

- Seja o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

- Através da matriz ampliada desse sistema, reduza a matriz à forma escada reduzida por linhas e encontre a solução do sistema.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuamos as seguintes operações com matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

FORMA ESCADA

Se interpretarmos a matriz **A** como sendo a matriz ampliada de um sistema linear, teremos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

A matriz-linha reduzida à forma escada é linha equivalente à matriz A. Assim, o sistema que ela representa:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{8} \\ x_2 = -\frac{1}{4} \\ x_3 = \frac{11}{8} \end{cases}$$

É equivalente ao sistema inicial, possuindo a mesma solução que este.

<u>EXEMPLO 2</u>: Encontrar o posto e a nulidade da matriz B abaixo e em seguida o sistema de equações associado à matriz inicial

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

Reinterpretando a matriz acima como sistema de equações temos que:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \\ x - 5y = 1 \\ 4x + 16y = 8 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema de equações associado à matriz linha reduzida à forma escada

$$\begin{cases} x + 0y = \dfrac{14}{9} \\ 0x + y = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

Este é um caso de sistema com equações redundantes. A terceira e quarta equações (que se tornam nulas no final do processo) podem ser desprezadas. Isto significa que o sistema inicial é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

- No caso do **EXEMPLO 2** as duas primeiras equações são “independentes” e as demais são “dependentes” destas.

- Desta forma, denominamos **posto** de uma matriz ao número de linhas “independentes” desta.

- E **nulidade** da matriz, nul(A), é dada pela diferença entre o número de colunas e o seu posto (nul(A) = n – p(A))

- Uma linha será “dependente” de outras (será zero no final do processo de redução) se ela puder ser escrita como soma de produtos dessas outras linhas por constantes. Costumamos dizer que esta linha é uma *combinação linear* das outras.

Assim o posto da matriz ampliada de um sistema nos dá o número de equações independentes deste. E ele estará relacionado ao número de soluções de um sistema.

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

<u>Caso Geral:</u> Consideremos um sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_i são números reais ou complexos. Este sistema poderá ter:

i) Uma única solução $\begin{cases} x_1 = k_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ x_n = k_n \end{cases}$ que torna o sistema ***<u>possível</u>*** (compatível) e ***<u>determinado</u>***

ii) Infinitas soluções. Então o sistema é ***<u>possível</u>*** e ***<u>indeterminado</u>***

iii) Nenhuma solução. Então o sistema é ***<u>impossível</u>*** (incompatível)

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

TEOREMA:

i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

TEOREMA:

i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

TEOREMA:

i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

iii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

*Convém dizer que no caso iii que o ***grau de liberdade*** do sistema é *n* - *p*

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Usando a notação p_c = posto da matriz dos coeficientes

p_a = posto da matriz ampliada

$p_c = p_a$ denotamos simplesmente por p

Encontre p_c , p_a , e as soluções do sistema dos exemplos, dizendo se eles são S.P.D., S.P.I. ou S.I.:

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$p_c = p_a = 3$

$m = 3$, $n = 3$ e $p = 3$.

A solução é única e $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 2$

S.P.D

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$p_c = p_a = 2$

$m = 2$, $n = 3$ e $p = 2$.

Temos um grau de liberdade: $x_1 = -10 - 7\,x_3$ e $x_2 = -6 - 5x_3$

S.P.I.

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$p_c = 2$ e $p_a = 3$.

$m = 3$, $n = 3$

O sistema é impossível e, portanto, não existe solução

S.I.

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Exemplo 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$p_c = p_a = 2$

$m = 3$, $n = 4$

=> $n - p = 2$

Temos dois graus de liberdade: $x_1 = -10 + 10x_3 + 2x_4$ e $x_2 = 4 - 7x_3 - x_4$

S.P.I.

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

- Vimos como é possível resolver sistemas de equações lineares através de matrizes.
- Agora podemos voltar ao problema relativo à quantidade de hidrogênio e oxigênio necessária para formar a água.

Por exemplo:

Sabemos que $xH_2 + yO_2 \rightarrow zH_2O$

- Onde *x, y e z* devem satisfazer as equações:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

- A matriz ampliada, associada ao sistema é

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Que reduzida à forma escada dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja, z é uma variável livre

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

- Se tomarmos z = λ teremos: $\begin{cases} x - \lambda = 0 \\ y - 1/2\lambda = 0 \\ \mathrm{z} = \lambda \end{cases}$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- O significado de termos 1 grau de liberdade (n - p = 3 – 2):

- Temos apenas estabelecida a proporção com que os elementos entram na reação e para diferentes valores de λ, teremos quantidades diferentes de reagentes produzindo quantidades diferentes de água.

- EX: $\lambda = 2 \Rightarrow$ $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$

  $\lambda = 4 \Rightarrow$ $4H_2 + 2O_2 \rightarrow 4H_2O$

SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Algumas vantagens do **método do escalonamento** sobre a **Regra de Cramer** são:

- É um método que apresenta custo operacional (número de operações matemáticas), em geral, menor que a Regra de Cramer;
- Se aplica a sistemas lineares com qualquer número de equações e de incógnitas;
- Permite classificar o sistema linear com relação ao conjunto de soluções (em SPD, SPI ou SI) com "certa tranquilidade", uma vez que, num sistema linear , o sistema pode ser possível e indeterminado ou mesmo impossível.