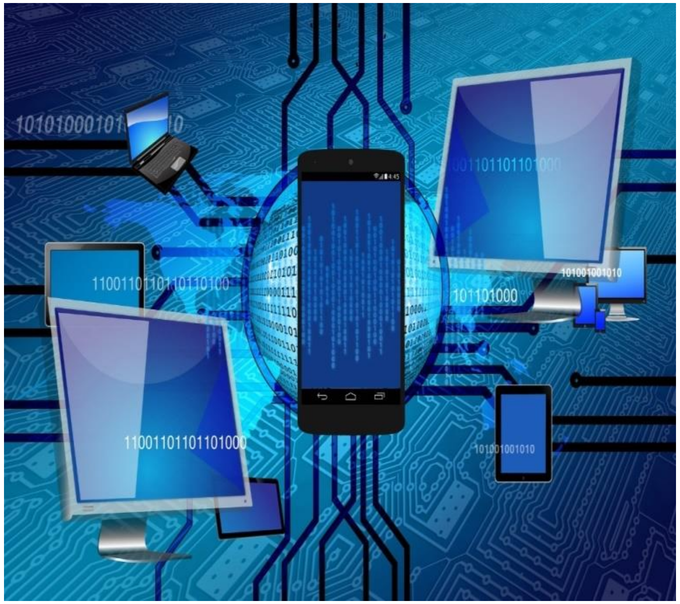
FACULDADE DE TECNOLOGIA DE JACAREÍ – Prof. Francisco de Moura

TECNOLOGIA EM DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE MULTIPLATAFORMA

ÁLGEBRA LINEAR



Rita von Randow

rita.randow@fatec.sp.gov.br

1º semestre 2025

MATRIZ INVERSA

Aula 4

Matriz Inversa – Dada uma matriz A quadrada de ordem n, chamamos de inversa de A a matriz B, que é única, tal que **A.B = B.A = I_n.** Escrevemos A^{-1} para a inversa de A.

Ou seja: Seja A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, tal que B seja a inversa de A, então temos:

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{I_{2x2}}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = B.A$$

Nesta aula vamos aprender 3 métodos de calcular inversa de uma matriz, quando ela existir.

1° Método - Resolução de Sistemas

2° Método – Teorema da adjunta de A

3° Método – Redução à matriz identidade

1° Método - Resolução de Sistemas

Exemplo 1: Dada a matriz A abaixo. Como seria sua inversa?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Faça $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que A.B = B.A = I_2

Resposta: $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ * Esse é o método de resolução por sistemas de equações lineares

Então, para A = $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

Exemplo 2: Sejam as matrizes A e B abaixo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B é a inversa de A?

Resposta: Sim! A.B = B.A = I

2° Método – Teorema da adjunta de A

Dada uma matriz A, lembremos que o cofator C_{ij} (ou A_{ij} ou Δ_{ij}) do elemento a_{ij} é o número $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Com esses cofatores podemos formar um nova matriz $\overline{A}$, denominada matriz dos cofatores de A.

<u>Matriz dos Cofatores de A.</u> – É a matriz $\overline{A}$ formada pela matriz dos cofatores da matriz A.

<u>Matriz adjunta</u> – Seja uma matriz A. A matriz adjunta de A é transposta da matriz dos cofatores de A, que podemos detonar por $adjA = \overline{A}'$

Exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19, \ldots \text{ etc.}$$

$$\text{Então, } \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Quem é a adjunta de A?

$$\Rightarrow \quad \text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Por que a adjunta interessa para nós?

Teorema: $\mathrm{A} \cdot \bar{A}' = A \cdot (adjA) = (det\ A) \cdot I_n$

$$\Downarrow$$

Teorema: Uma matriz quadrada A admite inversa, se e somente se <u>det A ≠ 0.</u>

Neste caso: $A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot (adjA)$

** Este resultado nos fornece um novo método de calcular a inversa de uma matriz.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$

det A = 2 ≠ 0, portanto existe inversa de A. Calculemos $\bar{A}'$ = adj A

adj A = $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot (adjA)$= $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Observações:

- A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas invertíveis (isto é, existem A^{-1} e B^{-1}), então A.B é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- Se A é uma matriz quadrada e existe uma matriz B tal que BA = I, então A é invertível, ou seja, existe A^{-1} e além disso, $B = A^{-1}$ e será único.
- Nem toda matriz tem inversa.

  Se a equação matricial associada a A.B = I não tem solução isso significa que A não é invertível.

  Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 2c =1 e c=0 que é impossível

3° Método – Redução à matriz identidade

E quando temos matrizes de ordem maior que 3? O método dos determinantes fica muito laborioso. Então, poderemos utilizar o seguinte teorema:

Teorema: Se uma matriz A pode ser reduzida à matriz identidade por uma sequência de operações elementares com linhas, então A é invertível e a matriz inversa de A é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma sequência de operações com linhas.

Na prática: Faremos as operações simultaneamente:

$$(\mathbf{A} \ \vdots \ \mathbf{I}) \longrightarrow (\mathbf{I} \ \vdots \ \mathbf{A}^{-1})$$

Exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1) Troco as linhas 1 e 2

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2) Somo L1 à L4 e -2.L1 à L2

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Faça essa sequência:
L3’ = L3 + (-1) x L2
L3’ = (-1) x L3
L1’ = L1 + L3
L4’ = L4 + L3
L2’ = L2 + (-2) x L3
L1´= L1 + 2 x L4
L2´= L2+ (-4) x L4
L3’ = L3 + 3 x L4

Fazemos uma sequência de operações até obter:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

*** Este resultado nos fornece o terceiro método de calcular a inversa de uma matriz.

Propriedades da inversão de matrizes

I) $(A^{-1})^{-1} = A$

II) A matriz unidade é a sua própria inversa.

III) $(\alpha.A)^{-1} = (1/\alpha).\ A^{-1}$

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, temos:

IV) $(\alpha.A).B = A.(\alpha.B) = \alpha\,(A.B)$ onde $\alpha \in IR$

Aplicação da Matriz Inversa:

Sistema de Crammer

Veremos uma aplicação da inversão de matrizes em Sistemas de equações Lineares.

Sistema de Crammer

Seja o sistema:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Que pode ser escrito como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

O sistema de Crammer é um sistema linear de n equações e n incógnitas, cuja matriz dos coeficiente é invertível. Desta forma AX = B, então temos:

$$AX = B \Longleftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$$

Exemplo — A matriz dos coeficientes do sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

é a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabendo que sua inversa é:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Logo:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e a solução do sistema é (0, 1, 0).

Exercícios

Obtenha a matriz inversa da matriz abaixo, pelos 3 processos.

$$\mathbf{a)A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4}\end{bmatrix}$$

Exercícios

Obtenha a matriz inversa das matrizes abaixo, pelos 3 processos.

$$b)B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$c)C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d)D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

e) Sejam as matrizes A e sua inversa A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 7 & -5 & -2 \\ 19 & -13 & -5 \end{pmatrix}$$

Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ 3x - 4y + z = 0 \\ -4x - y + z = 11 \end{cases}$$

Respostas dos exercícios propostos

a) MÉTODO 1

$$A.A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . A^{-1} = I_2 \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$$

2 x 2 2 x 2 2 x 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+2y & z+2w \\ 3x+4y & 3z+4w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+2y & z+2w \\ 3x+4y & 3z+4w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x+4y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z+2w=0 \\ 3z+4w=1 \end{cases}$$

y = 3/2

x = –2

w = –1/2

z = 1

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

a) MÉTODO 2

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}.(M')^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.(A')^t$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.|4| = 4 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}.|3| = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}.|2| = -2 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}.|1| = 1$$

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A')^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}.\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

a) MÉTODO 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L1 = 2.L1 - L2} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L2 = L2 + 3.L1} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[L4 = L4 : 4]{L1 = -L1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Obtenha a matriz inversa das matrizes abaixo, pelos 3 processos.

$$b)B=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

B não é invertível pois detB = 0

$$c)C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ -9 & 6 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$d)D=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

D não é invertível pois det D = 0

$$e)\ x=-5;\ y=-8\ e\ z=-17 \qquad ou \qquad S=\{(-5,-8,17)\}$$