Optimisation Simplex – Utilisation du complément "solveur" de Excel

Installer le complément "solveur" dans Excel

1. Lancez **Excel**.
2. Cliquez sur l'onglet **Fichier**, puis sur **Options** en bas à gauche.
3. Dans la fenêtre qui apparaît, sélectionnez le sous-menu **Compléments**.
4. Dans la liste déroulante **Gérer** tout en bas, sélectionnez **Complément Excel** et cliquez sur **Atteindre**.
5. Cochez **Complément Solveur** et appuyez sur **OK**.
6. Le solveur apparaît dans l'onglet **Données → Solveur** à la droite de la barre.

Exemple

On va résoudre l'exemple des diapositives :

- Variables : x, y
- Fonction objectif :
  - $P(x,y) = 0{,}2x + 0{,}3y$
- Contraintes :
  - $60x + 80y \leq 24\,000\,000$
  - $20x + 40y \leq 10\,000\,000$
  - $x, y \geq 0$

On commence par entrer les coefficients et bornes dans un nouveau classeur **Excel** de la manière suivante :

	A	B	C	D	E
	Variables	x	y		
	Coefficients de la fonction objectif :	0,2	0,3		bornes :
	Coefficients de contrainte 1	60	80		24000000
	Coefficients de contrainte 2	20	40		10000000

On réserve des cellules pour la solution (**B9**, **C9** dans cet exemple):

	A	B	C	D	E
1					
2	Variables :	x	y		
3					
4	Coefficients de la fonction objectif :	0,2	0,3		bornes :
5					
6	Coefficients de contrainte 1	60	80		24000000
7	Coefficients de contrainte 2	20	40		10000000
8					
9	Solution :				

Puis on entre une formule pour la fonction objectif dans **D4**, et des formule pour les contraintes dans les cellules, **D6**, **D7**:

1. Fonction objectif dans **D4** :
   `=SOMMEPROD(B4:C4;B$9:C$9)`
2. Contrainte 1 dans **D6** :
   `=SOMMEPROD(B6:C6;B$9:C$9)`
3. Contrainte 2 dans **D7** :
   `=SOMMEPROD(B7:C7;B$9:C$9)`

SOMME | =SOMMEPROD(B7:C7;B$9:C$9)

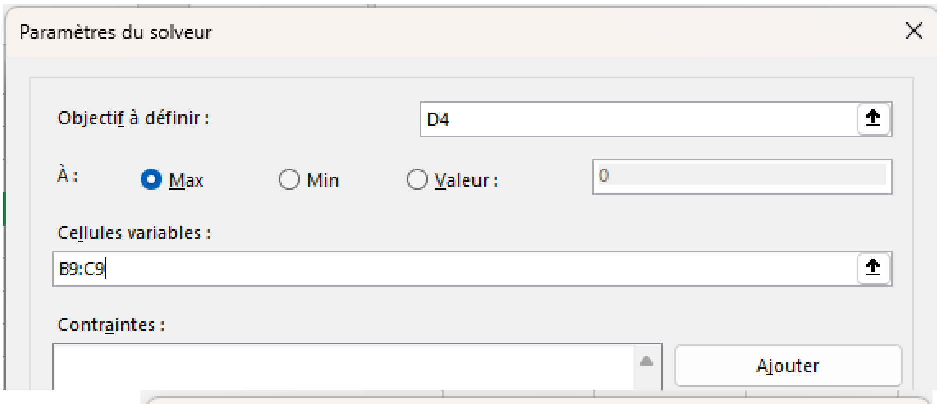
	A	B	C	D	E
1					
2	Variables :	x	y		
3					
4	Coefficients de la fonction objectif :	0,2	0,3	0	bornes :
5					
6	Coefficients de contrainte 1	60	80	0	24000000
7	Coefficients de contrainte 2	20	40	;B$9:C$9)	10000000
8					
9	Solution :				

Les symboles $ ne sont pas obligatoires – ils servent à transformer les références en **références absolues,** ce qui permet de "tirer" la formule dans la colonne avec la poignée de recopie.

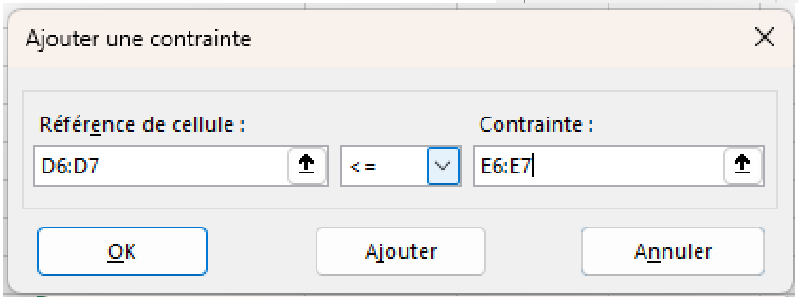
Pour résoudre le problème dans Excel on lance le solveur en cliquant sur **Solveur** au groupe **Analyse** à droite du ruban **Données**.

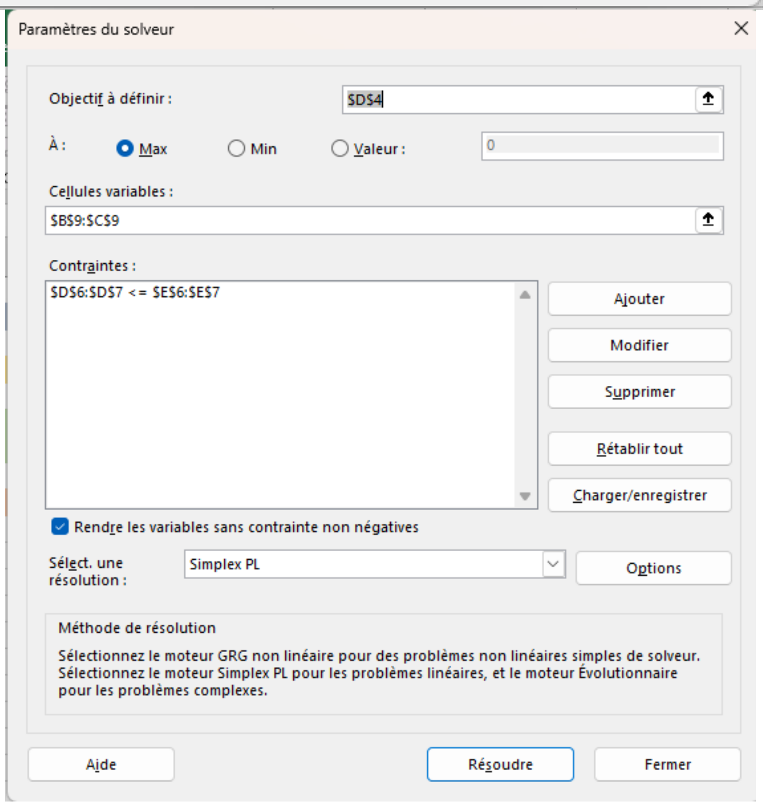
La fenêtre **Paramètres du solveur** s'ouvre.

On insère la référence **D4** de la cellule avec la fonction objectif au champ **Objectif à définir** (avec ou sans les '$'), et la plage **B9:C9** qu'on a désigné pour la solution au champ **Cellules variables**.



On clique sur **Ajouter** à droite du champ **Contraintes** pour ajouter les contraintes. Dans la boîte de dialogue qui apparaît, on entre la plage **D6:D7** avec les formules de contraintes dans **Référence de cellule**, et la plage **E6:E7** avec les bornes dans **Contrainte**, puis on clique sur **OK**.

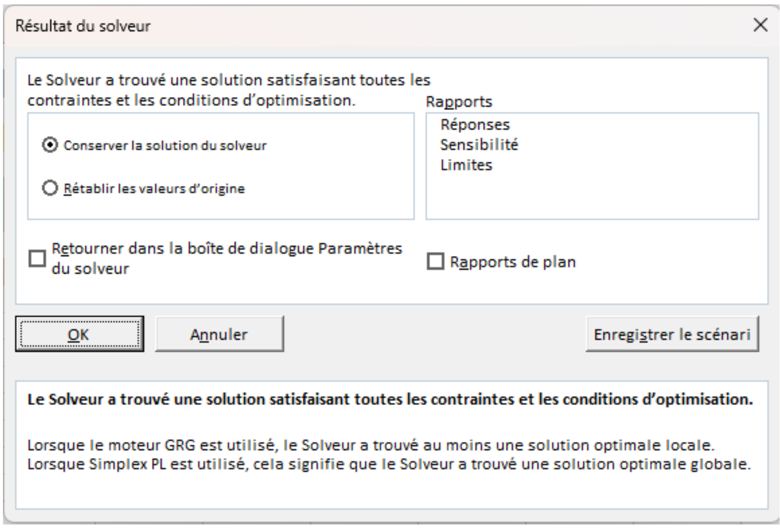




On coche la case "**Rendre les variables sans contrainte non négatives". →**

Dans le menu déroulant "**Sélect. une résolution" →** on choisit "**Simplex PL**", puis on clique sur "**Résoudre**".

Dans la prochaine boite de dialogue on clique **OK.**



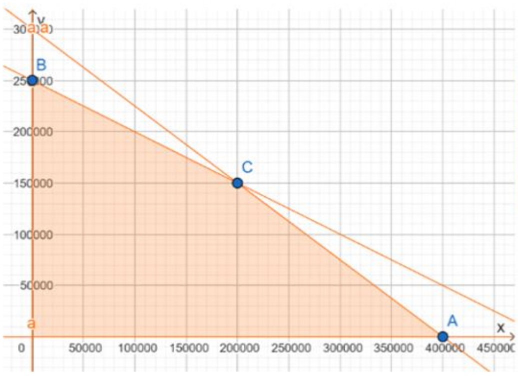
Les valeurs optimales des variables apparaissent dans la plage **B9:C9,** et la valeur de la fonction objectif dans **D4**. La plage **D6:D7** affiche l'utilisation des ressources ; on voit qu'elles sont totalement épuisées dans cet exemple.

On inclut un texte explicatif en bas →

	A	B	C	D	E
1					
2	Variables :	x	y		
3					
4	Coefficients de la fonction objectif :	0,2	0,3	85000	bornes :
5					
6	Coefficients de contrainte 1	60	80	24000000	24000000
7	Coefficients de contrainte 2	20	40	10000000	10000000
8				0	0
9	Solution :	200000	150000		
10					
11	Valeurs optimales des variables: x= 200000, y = 150000				
12	Valeur de la fonction objectif : 85000				
13	Les ressources sont épuisées.				

Comparaison avec la solution donnée dans la dernière séance :

Sommets



- Afin de maximiser le bénéfice, on cherche le point dans la zone admissible où la **fonction d'objectif**
  $Z(x, y) = 0{,}2x + 0{,}3y$
  atteint son maximum.
- Il suffit de tester les valeurs de Z sur les **sommets** de la zone admissible.

	x	y	$P(x, y)$
A	400 000	0	80 000
B	0	250 000	75 000
C	200 000	150 000	85 000

- Le maximum est atteint au sommet
  $C = (200\,000; 150\,000)$
  avec une valeur de
  $P(200\,000; 150\,000) = 85\,000$
- En d'autres termes, l'usine maximisera son bénéfice quotidien en, ce qui génèrera un bénéfice total de 85 000 €.

On peut changer les coefficients de la fonction objectif et recalculer la solution optimale. On voit qu'avec la fonction objectif

$$P(x,y) = 0{,}2x + 0{,}2y$$

les ressources ne sont **pas** épuisées ($8000000 < 10000000$).

Explication de la solution à inclure dans chaque exercice. →

	A	B	C	D	E
1					
2	Variables :	x	y		
3					
4	Coefficients de la fonction objectif :	0,2	0,2	80000	bornes :
5					
6	Coefficients de contrainte 1	60	80	24000000	24000000
7	Coefficients de contrainte 2	20	40	8000000	10000000
8				0	0
9	Solution :	400000	0		
10					
11	Valeurs optimales des variables: x= 400000, y = 0				
12	Valeur de la fonction objectif : 80000				
13	Les ressources ne sont pas épuisées (8 000 000 < 10 000 000).				

Contraintes actives et inactives

Le terme technique pour ce qu'on a appelé "ressources épuisées" avant est celui d'une **contrainte in/active.** Supposons un problème d'optimisation linéaire de la forme suivante.

- **Variables :** $x_1, x_2, x_3, \dots$
- **Fonction objectif :** $P(x_1, x_2, x_3, \dots) = U_1x_1 + U_2x_2 + U_3x_3 + \cdots$
- **Contraintes :**
  - **Contrainte 1 :** $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots \leq c_1$
  - **Contrainte 2 :** $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots \leq c_2$
  - **Contrainte 3 :** $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots \leq c_3$
  - …
  - **Contrainte n :** $a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots \leq c_n$
  - $x_1, x_2, x_3, \dots \geq 0$

Etant donné une solution $s_1, s_2, s_3, \dots$ et $1 \leq i \leq n$, on dit que la contrainte i est **active**, si

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + a_{i3}s_3 + \dots = c_n$$

--- la contrainte est satisfait **à égalité près**. Sinon on dit que la contrainte est **inactive**, et on appelle la différence **la marge**.

Exemple

Dans l'exemple précèdent, on ajoute une colonne **marge** pour afficher la différence entre les valeurs en colonnes **D** et **E**. Les contraintes **actives** sont celles où la marge est **0**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	Variables :	x	y						
3									
4	Coefficients de la fonction objectif :	0,2	0,2	80000	bornes	marge			
5									
6	Coefficients de contrainte 1 :	60	80	24000000	24000000	0	contrainte **active** (ressource épuisé)		
7	Coefficients de contrainte 2 :	20	40	8000000	10000000	2000000	contrainte **inactive** (ressource pas épuis		
8									
9	Solution:	400000	0						
10									

Exercices

Commencez par créer un nouveau classeur vide dans Excel, puis enregistrez-le sous le nom **prenom-NOM-optimisation.xlsx**. Pour chaque exercice, insérez une nouvelle feuille et nommez-la **exercice-n**, où **n** correspond au numéro de l'exercice. À la fin, déposez le classeur sur Teams.

Chaque feuille doit inclure une explication de la solution, comme dans l'exemple ci-dessus.

Exercice 1. Résoudre l'exercice "Atelier de tissage" de la dernière séance avec le solveur de Excel. Pour rappel, voici la formulation mathématique du problème :

- Variables : x, y
- Fonction objectif : $P(x, y) = 20x + 30y$
- Contraintes :
  - $x + 2y \leq 40$
  - $2x + y \leq 50$
  - $x, y \geq 0$

En bas, incluez une explication de la solution, comme dans l'exemple ci-dessus (de même dans les exercices suivants).

Exercice 2. Dupliquez la feuille de l'exercice 1 (Clic droit sur l'onglet → **Déplacer ou copier** → choisir **(en dernier)** et cocher **Créer une copie** → **OK**), puis renommez la copie en **exercice 2**. Modifiez les coefficients de la fonction objectif pour qu'ils correspondent à la fonction $P(x, y) = 10x + 30y$, et résolvez de nouveau le problème. N'oubliez pas de mettre à jour l'explication.

Exercice 3. Dupliquez de nouveau la feuille de l'exercice 1. (Pas celle de l'exercice 2 !) et résolvez le problème, cette fois-ci avec la contrainte $x + y \leq 27$ ajoutée. (C'est l'exercice 3 de la dernière séance, vous pouvez comparer la solution si vous voulez.)

Exercice 4. (C'est exercice 5 de la dernière séance.)
Une entreprise fabrique trois types de produits P, Q, R. Chaque produit nécessite un certain nombre d'heures de travail et de matières premières. L'objectif est de maximiser le profit total.
Les informations suivantes sont données :

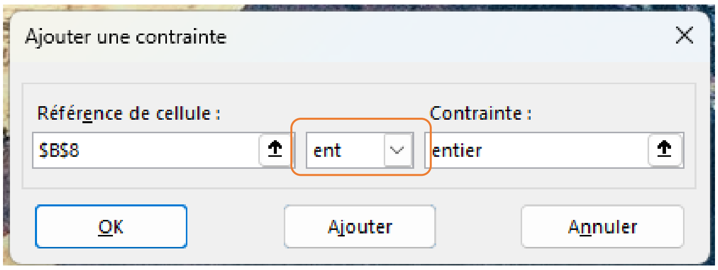
- Pour chaque unité de P, l'entreprise gagne 10 euros, Q rapporte 15 euros et R rapporte 20 euros.
- La fabrication de chaque produit nécessite les ressources suivantes :
  - P : 2 heures de travail et 3 unités de matière première.
  - Q : 3 heures de travail et 2 unités de matière première.
  - R : 4 heures de travail et 1 unité de matière première.

L'entreprise dispose de 100 heures de travail et de 150 unités de matière première.
Trouvez la formulation mathématique du problème et résolvez-le sur une nouvelle feuille de votre classeur.

Exercice 5. Résolvez le problème suivant à trois variables[i]:

- Variables x, y, z
- Fonction objectif $P(x, y, z) = 20x + 10y + 15z$
- Contraintes :
  1. $3x + 2y + 5z \leq 55$
  2. $2x + y + z \leq 26$
  3. $x + y + 3z \leq 30$
  4. $5x + 2y + 4z \leq 57$
  5. $x, y, z \geq 0$

Exercice 6. Souvent (mais pas toujours), on cherche des solutions optimales où les variables ont des valeurs **entières** : par exemple, une usine ne peut typiquement pas produire "une demie voiture".



Dans une copie de la feuille, résolvez de nouveau le problème de l'exercice 5, cette fois ci avec la contrainte supplémentaire que la valeur de x doit être un nombre entier. Pour ajouter cette contrainte dans le solveur, cliquez sur **Ajouter** à côté de la zone de contrainte dans la fenêtre du solveur, entrez la référence de la cellule de la variable, puis sélectionnez **ent** dans le menu déroulant au milieu.

Exercice 7. Résolvez le problème d'optimisation linéaire suivant, donné en forme matricielle.

- Variables : $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$
- Coefficients de la fonction objectif :

4	3	5	2	7	3	6	8	2	3

- Matrice de coefficients de contraintes :

2	3	1	0	0	1	2	0	1	2
1	4	2	2	1	0	0	3	0	1
0	3	4	1	3	2	1	2	0	3
3	1	0	5	2	1	1	1	2	0
2	1	3	0	4	2	1	3	0	2
1	3	2	2	0	2	3	0	1	1
4	0	3	2	1	1	0	1	0	2
5	2	1	0	0	3	0	1	2	1
2	0	1	4	1	2	3	0	2	1
3	2	0	3	1	1	2	1	1	1
0	1	2	3	1	1	3	1	2	0
4	1	3	1	1	2	0	3	2	1
1	3	4	2	2	0	1	0	3	1
2	1	0	3	4	3	1	2	0	2
0	2	3	1	0	1	2	1	3	0
1	1	2	3	2	0	3	1	0	2
2	3	1	0	1	0	4	3	1	0
5	2	1	2	0	2	1	0	1	1
1	4	2	0	3	1	2	1	2	0

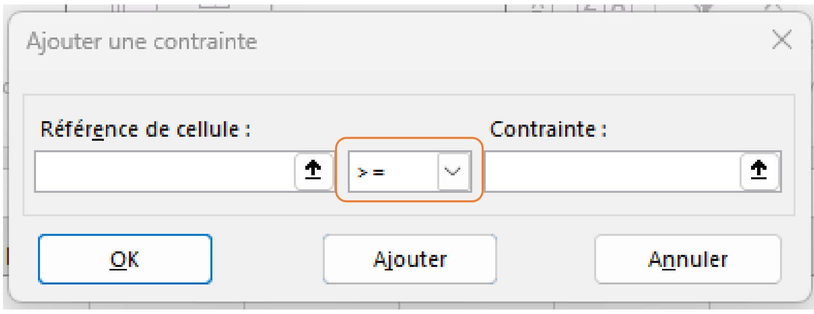
- Vecteur de bornes :

100	80	150	90	120	70	110	140	160	130	90	125	80	110	85	95	130	120	140

Astuces :

- Ouvrez le pdf dans **Chrome** pour copier-coller, puis collez avec **Clic droit → Collage spécial → Texte.**
- Dans cet exercice, incluez une colonne « marge » comme dans le dernier exemple sur page 4, au lieu de l'explication de la solution.

Exercice 8.



Même si la forme standard des problèmes d'optimisation linéaire utilise des contraintes de type "inférieur ou égal", il existe également des problèmes naturels où les contraintes sont de type "supérieur ou égal". Le solveur Excel est capable de gérer ces deux types de contraintes et de trouver des solutions optimales, quel que soit le type des inégalités. Pour entrer une contrainte de type "supérieur ou égal" dans le solveur, on choisit le symbole **>=** au milieu de la boite de dialogue **Ajouter une contrainte**.

Résolvez le problème d'optimisation linéaire suivant.

- Variables : x, y
- Fonction objectif : $P(x, y) = x + 3y$
- Contraintes :
    i. $2x + 3y \leq 8$
    ii. $x + y \geq 3$
    iii. $x, y \geq 0$

---

[i] Une solution "à la main" de ce problème se trouve ici : https://people.richland.edu/james/ictcm/2006/3dsimplex.html