Universidad Nacional Autónoma De México
Facultad De Ciencias, 2023-I
Análisis Multivariado

Tarea 1

Profesora:
Ruth Selene Fuentes García
Ayudante:
Guadalupe Jiménez Villanueva
Equipo:
Diego Armando Santillán Arriaga
Fernando Raúl Garay Araujo
Rafael Durán Santiago

$$R = (a,b) \times (c,d)$$
$$R_n = (a, b - \tfrac{1}{n}] \times (c, d - \tfrac{1}{n}]$$

$$R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$$

Sea $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ donde $\mu' = (1, -1, 2)$

y $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) X_1, X_2

Por definición de la distribución normal X_1 y X_2 son v.a. normales. Por definición de Σ tenemos que

$$\Sigma = \mathbb{E}[(X-\mu)(X-\mu)^T]$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) & Cov(X_3,X_1) \\ Cov(X_1,X_2) & Var(X_2) & Cov(X_3,X_2) \\ Cov(X_3,X_1) & Cov(X_3,X_2) & Var(X_3) \end{pmatrix}$$

Como $Cov(X_1, X_2) = 0$ por las prop. de la distribución normal X_1 y X_2 son independientes.

b) X_1, X_3

Como $Cov(X_1, X_3) = -1 \neq 0$, X_1 y X_3 no son independientes

c) X_2 y X_3

Como $Cov(X_2, X_3) = 0$ y por las propiedades de la normal X_2 y X_3 son normales, X_2 y X_3 son independientes.

d) $(X_1, X_3, X_2) = GX$ donde

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad G^t = G \text{ y}$$

$$GG^t = G^tG = GG = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$\therefore$ G es ortogonal.

Por los teoremas vistos en clase

$$(X_1, X_3, X_2) = GX \sim N_3(G\mu, G\Sigma G^t).$$

$$S = G\Sigma G^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$ Particionamos el vector

$Y = GX$ en $Y_1 = (X_1, X_3)$, $Y_2 = X_2$,

$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$. Como $S_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ por los resultados vistos en clase Y_1 y Y_2 son independientes

e) $\underbrace{(1 \ 0 \ 0)}_{A} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = X_1$

$\underbrace{(1 \ 3 \ -2)}_{B} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = X_1 + 3X_2 - 2X_3$

Por el teo. 3.2.2 del Mardia AX y BX son indep si y solo si $A\Sigma B^t = 0$ Como

$$A \Sigma B^t = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= (6 \ 0 \ 0)$$

$$A \Sigma B^t \neq 0$$

$AX = X_1$ y $BX = X_1 + 3X_2 - 2X_3$ no son indep.

2. Sea $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ $X = (X_1, X_2)'$ con $X_1 \in \mathbb{R}^q$ y $X_2 \in \mathbb{R}^r$, $q + r = p$

Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} O_{r \times q} & I_{r \times r} \\ I_{q \times q} & O_{q \times r} \end{pmatrix}$

Notamos que

$$Y = AX = \begin{pmatrix} O_{r\times q} & I_{r\times r} \\ I_{q\times q} & O_{q\times r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix}$$

Por los teoremas vistos en clase
$Y \sim N_p(A\mu,\ A\Sigma A^t)$, veamos que

$$A^t = \begin{pmatrix} O_{r\times q}^t & I_{q\times q}^t \\ I_{r\times r}^t & O_{q\times r}^t \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} O_{q\times r} & I_{q\times q} \\ I_{r\times r} & O_{r\times q} \end{pmatrix}$$

y si:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11\,q\times q} & \Sigma_{12\,q\times r} \\ \Sigma_{21\,r\times q} & \Sigma_{22\,r\times r} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma A^t = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{q\times r} & I_{q\times q} \\ I_{r\times r} & O_{r\times q} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma A^t = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} O_{q\times r} + \overset{q\times r}{\Sigma_{12} I_{r\times r}} & \overset{q\times q}{\Sigma_{11} I_{q\times q}} + \Sigma_{12} O_{r\times q} \\ \Sigma_{21} O_{q\times r} + \underset{r\times r}{\Sigma_{22} I_{r\times r}} & \underset{r\times q}{\Sigma_{21} I_{q\times q}} + \Sigma_{22} O_{r\times q} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma A^t = \begin{pmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} & \Sigma_{21} \end{pmatrix}$$

$$A \Sigma A^t = \begin{pmatrix} O_{r \times q} & I_{r \times r} \\ I_{q \times q} & O_{q \times r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{12} & \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} & \Sigma_{21} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} O_{r \times q}\Sigma_{12} + I_{r \times r}\Sigma_{22} & O_{r \times q}\Sigma_{11} + I_{r \times r}\Sigma_{21} \\ I_{q \times q}\Sigma_{12} + O_{q \times r}\Sigma_{22} & I_{q \times q}\Sigma_{11} + O_{q \times r}\Sigma_{21} \end{pmatrix}$$

$$A \Sigma A^t = \begin{pmatrix} \Sigma_{22} & \Sigma_{21} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{11} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado si $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$

$$A \mu = \begin{pmatrix} O_{r \times q} & I_{r \times r} \\ I_{q \times q} & O_{q \times r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Particionamos $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$, con $Y_1 = X_2 \in \mathbb{R}^r$ y $Y_2 = X_1 \in \mathbb{R}^q$. Si $S = A \Sigma A^t$ consideremos que la partición de S correspondiente a $(Y_1 \; Y_2)^t$ es

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

Observemos que $S_{11} = \Sigma_{22}$, $S_{12} = \Sigma_{21}$, $S_{21} = \Sigma_{12}$ y $S_{22} = \Sigma_{11}$. También consideremos que $\mathbb{E}[Y] = \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ con y $\rho_2 = \mathbb{E}[Y_2]$, entonces $\rho_1 = \mu_2$ y $\rho_2 = \mu_1$.

Ahora por los teoremas vistos en clase tenemos que

$Y_{2.1} = Y_2 - S_{21} S_{11}^{-1} Y_1 = X_1 - S_{21} S_{11}^{-1} X_2$, y

$Y_1 = X_2$ son independientes y además

$$Y_1 \sim N_r(\rho_1, S_{11}), \quad \text{y}$$

$$Y_2 - S_{21} S_{11}^{-1} Y_1 \sim N_q(\rho_{2.1}, S_{2.1})$$

con $\rho_{2.1} = \rho_2 - S_{21} S_{11}^{-1} \rho_1$ y

$S_{2.1} = S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}$. Entonces dado $x_2 \in \mathbb{R}^r$ fijo

$$(Y_2 - S_{21} S_{11}^{-1} Y_1) \mid Y_1 = x_2 \sim N_q(\rho_{2.1}, S_{2.1}).$$

Pero $(Y_2 - S_{21} S_{11}^{-1} Y_1) \mid Y_1 = x_2 = (Y_2 - S_{21} S_{11}^{-1} x_2) \mid Y_1 = x_2$, por lo que $(Y_2 - S_{21} S_{11}^{-1} x_2) \mid Y_1 = x_2 \sim N_q(\rho_{2.1}, S_{2.1})$, y luego

$$Y_2 \mid Y_1 = x_2 = ((Y_2 - S_{21} S_{11}^{-1} x_2) + S_{21} S_{11}^{-1} x_2) \mid Y_1 = x_2$$

$$Y_2 \mid Y_1 = x_2 = (Y_2 - S_{21} S_{11}^{-1} x_2) \mid Y_1 = x_2 + (S_{21} S_{11}^{-1} x_2) \mid Y_1 = x_2$$

de manera que por las propiedades de la distribución normal multivariada, como $S_{21} S_{11}^{-1} x_2 \mid Y_1 = x_2$ es una constante

$$Y_2 \mid Y_1 = x_2 \sim N_q\left(\mu_{2.1} + S_{21}S_{11}^{-1}x_2,\ S_{2.1}\right)$$

y sustituyendo $Y_1 = X_2$, $Y_2 = X_1$, $\mu_1 = \mu_2$, $\mu_2 = \mu_1$, $S_{21} = \Sigma_{12}$, $S_{12} = \Sigma_{21}$, $S_{11} = \Sigma_{22}$ y $S_{22} = \Sigma_{11}$:

$$X_1 \mid X_2 = x_2 \sim N_q\left(\begin{matrix}\mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu_2 \\ + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}x_2\end{matrix},\ \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right)$$

$\blacksquare$

3. Como AX y BX se distribuyen normal multivariadas por lo visto en clase AX y BX son independientes si y solo si $Cov(AX, BX) = 0$. Luego por las propiedades de la covarianza

$$Cov(AX, BX) = A\ Cov(X, BX)$$
$$= A\ Cov(X, X)\ B^t$$
$$Cov(AX, BX) = A\Sigma B^t$$

Ahora

$$\Sigma B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y $A\Sigma B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\therefore$ $Cov(AX, BX) = A\Sigma B^t = 0$ y

AX y BX son independientes $\blacksquare$

1.- Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, veamos que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \begin{pmatrix} x_1 - \overline{x} \\ x_2 - \overline{x} \\ \vdots \\ x_n - \overline{x} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_1 - \overline{x} \\ x_2 - \overline{x} \\ \vdots \\ x_n - \overline{x} \end{pmatrix}$$

y si $\mathbb{1}$ es una matriz de $n \times n$ tal que $\mathbb{1}_{ij} = 1 \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n\}$, es decir,

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 - \overline{x} \\ \vdots \\ x_n - \overline{x} \end{pmatrix} = x - \frac{1}{n} \mathbb{1} x$$, por lo que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \left(x - \frac{1}{n} \mathbb{1} x\right)^t \left(x - \frac{1}{n} \mathbb{1} x\right)$$

$$= \left(I_{n \times n} x - \frac{1}{n} \mathbb{1} x\right)^t \left(I_{n \times n} x - \frac{1}{n} \mathbb{1} x\right)$$ donde $I_{n \times n}$ es la matriz identidad de $n \times n$

$$= \left(x^t I_{n \times n}^t - x^t \left(\frac{1}{n} \mathbb{1}\right)^t\right)\left(I_{n \times n} x - \frac{1}{n} \mathbb{1} x\right)$$

$$= \left(x^t I_{n \times n} - x^t \left(\frac{1}{n} \mathbb{1}\right)\right)\left(I_{n \times n} x - \frac{1}{n} \mathbb{1} x\right)$$ porque $\mathbb{1}^t = \mathbb{1}$

$$= x^t \left(I_{n \times n} - \frac{1}{n} \mathbb{1}\right)\left(I_{n \times n} - \frac{1}{n} \mathbb{1}\right) x$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = x^t \left(I_{n \times n} - \frac{1}{n} \mathbb{1}\right)^2 x.$$

Por lo tanto la matriz buscada es $\left(I_{n \times n} - \frac{1}{n} \mathbb{1}\right)^2$

Ejercicio 5

Asumiendo que las muestras provienen de una distribución normal bivariada, querríamos contrastar la hipótesis

$$H_0 : \mu = (0.3804, 0.3758)^T$$

Bajo H_0 podemos utilizar la estadística de prueba

$$\frac{n-p}{p}(\bar{X}-\mu)^T S^{-1}(\bar{X}-\mu) \sim F_{(p,\ n-p)}$$

Y la rechazamos cuando la estadística sea mayor al quantil del 95%, es decir, cuando

$$\frac{n-p}{p}(\bar{X}-\mu)^T S^{-1}(\bar{X}-\mu) > F_{(p,\ n-p)}^{(0.95)}$$

Calculemos todos los valores que vamos a necesitar con el siguiente bloque de código

```
n <- 20
p <- 2
Xbar <- matrix(t(c(0.3745, 0.3719)))
XbarT <- matrix(Xbar, nrow = 1, ncol = 2)
mu <- matrix(t(c(0.3804, 0.3758)))
muT <- matrix(mu, nrow = 1, ncol = 2)
S <- 10^(-5) * matrix(c(1.843, 1.799,
                        1.799, 1.836), nrow = 2, ncol = 2, byrow = TRUE)
qf(0.95, p, n-p)
```

```
## [1] 3.554557
```

```
((n-p) / p) * ((XbarT - muT) %*% solve(S) %*% (Xbar - mu))
```

```
##          [,1]
## [1,] 55.90809
```

Como nuestra estadística tuvo un valor de 55.9, y el quantil de la distribución F es 3.55, podemos rechazar la hipótesis nula porque la estadística cayó en la región de rechazo con $\alpha = 0.05$. Por lo tanto tenemos evidencia en contra de que la media sea la sugerida por la comisión.

Ejercicio 6

Leamos primero los datos

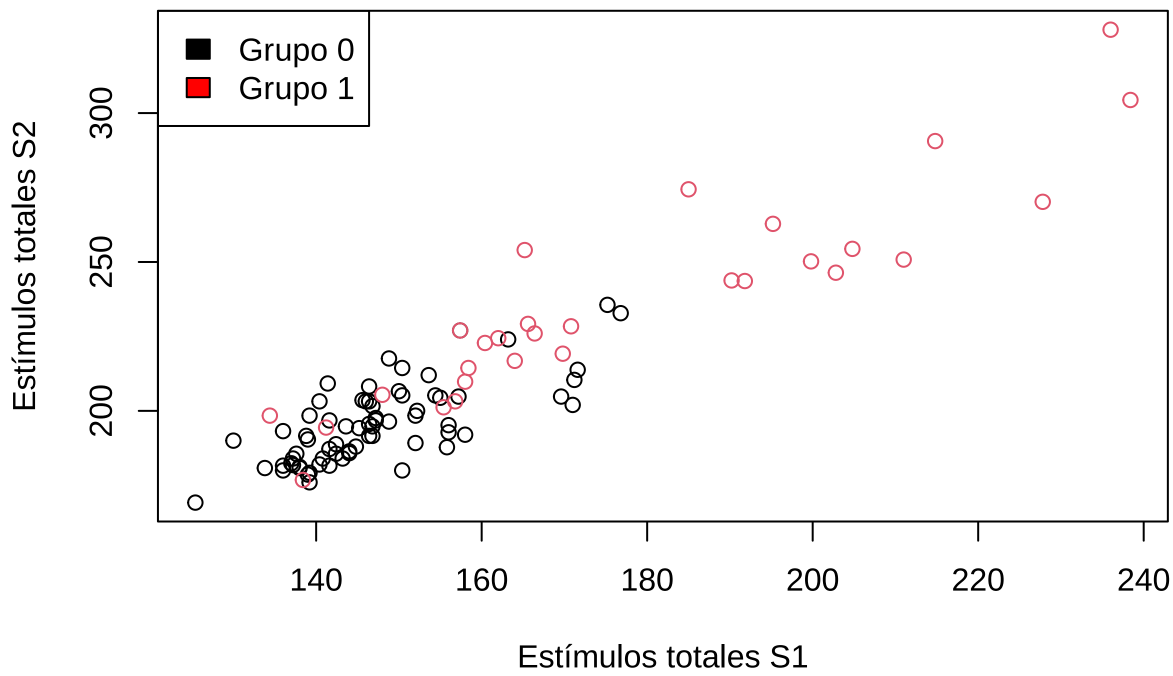
```
data <- read.delim("T1-6.txt", sep = "", header = F,
                   col.names = c("Edad", "S1tot", "S1dif", "S2tot", "S2dif", "Grupo"))
data$Grupo <- as.factor(data$Grupo)
Grupo0 <- data[1:69,1:5]
Grupo1 <- data[70:98,1:5]
```

a)

Grafiquemos el diagrama de dispersión

```
plot(
  data$S1tot,
  data$S2tot,
  col = data$Grupo,
  xlab = "Estímulos totales S1",
  ylab = "Estímulos totales S2"
)
```

```r
legend(
  x = "topleft",
  legend = c("Grupo 0", "Grupo 1"),
  fill = c("black", "red")
)
```



Observando el gráfico es muy claro y evidente que los grupos tienen comportamientos muy diferentes. El Grupo 0 parece tener muchos menos estímulos totales que el Grupo 1 en general, tanto para los estímulos del tipo S1 como los del S2.
Podemos esperar con mucha certeza que estos dos grupos tengan propiedades y comportamientos diferentes.

b)

Calculemos primero los vectores de medias para ambos grupos

```r
mu_0 <- matrix(t(colMeans(Grupo0)))
mu_1 <- matrix(t(colMeans(Grupo1)))
mu_0
```

```
##            [,1]
## [1,]  37.985507
## [2,] 147.289855
## [3,]   1.562319
## [4,] 195.602899
## [5,]   1.620290
```

```r
mu_1
```

```
##           [,1]
## [1,]  42.06897
## [2,] 178.26897
## [3,]  12.27586
## [4,] 236.93103
## [5,]  13.08276
```

Ahora las matrices de covarianza estimadas:

```
n0 = length(Grupo0[,1])
n1 = length(Grupo1[,1])
((n0 - 1)/n0) * cov(Grupo0)
```

```
##             Edad      S1tot     S1dif      S2tot     S2dif
## Edad  273.608486  94.015795 5.2835119 102.220332 3.1944970
## S1tot  94.015795 110.667288 1.7407771 105.237421 2.0126696
## S1dif   5.283512   1.740777 1.7788700   2.202428 0.4940979
## S2tot 102.220332 105.237421 2.2024281 182.544339 2.3170426
## S2dif   3.194497   2.012670 0.4940979   2.317043 2.3213275
```

```
((n0 - 1)/n0) * cov(Grupo1)
```

```
##            Edad     S1tot     S1dif      S2tot     S2dif
## Edad  119.38231  52.02993 -19.92667   67.14606 -29.38802
## S1tot  52.02993 832.43904 240.92021  899.19152 105.21678
## S1dif -19.92667 240.92021 312.66601  228.99780 293.01024
## S2tot  67.14606 899.19152 228.99780 1162.93030  79.92202
## S2dif -29.38802 105.21678 293.01024   79.92202 345.95955
```

Finalmente las matrices de correlación

```
cor(Grupo0)
```

```
##            Edad     S1tot     S1dif     S2tot     S2dif
## Edad  1.0000000 0.5402894 0.2394891 0.4573917 0.1267563
## S1tot 0.5402894 1.0000000 0.1240685 0.7404170 0.1255725
## S1dif 0.2394891 0.1240685 1.0000000 0.1222209 0.2431491
## S2tot 0.4573917 0.7404170 0.1222209 1.0000000 0.1125594
## S2dif 0.1267563 0.1255725 0.2431491 0.1125594 1.0000000
```

```
cor(Grupo1)
```

```
##             Edad     S1tot      S1dif     S2tot      S2dif
## Edad   1.0000000 0.1650468 -0.1031393 0.1802078 -0.1446065
## S1tot  0.1650468 1.0000000  0.4722334 0.9139010  0.1960632
## S1dif -0.1031393 0.4722334  1.0000000 0.3797643  0.8909017
## S2tot  0.1802078 0.9139010  0.3797643 1.0000000  0.1260019
## S2dif -0.1446065 0.1960632  0.8909017 0.1260019  1.0000000
```

c)

Si definimos μ_i como la media teórica de las variables aleatorias del Grupo i, nos gustaría usar la prueba de hipótesis

$$H_0 : \mu_0 = \mu_1$$

Desafortunadamente en este caso no sabemos nada acerca de las matrices de covarianzas de ambos grupos observados, por lo que haremos el siguiente procedimiento:
Dado que tenemos más muestras del grupo 0 que del grupo 1, tomaremos muestras aleatorias del grupo 0 y haremos pruebas pareadas sobre las medias de estas muestras reducidas del grupo 0 contrastadas con las

del grupo 1. Asumiremos covarianza $\neq 0$ en estas muestras pareadas ya que como tomamos subconjuntos aleatorios del grupo 0 y además por el contexto de la muestra es muy difícil que los estímulos visuales en un sujeto no puedan tener al menos una mínima correlación con las de algún otro, ya sea que tengan esclerosis múltiple o no. Es decir, entre dos pacientes sin MS es normal asumir que los estímulos de uno sean parecidos a los del otro. Lo mismo para dos pacientes con MS.
El caso en el que un paciente tenga MS y el otro no, podemos argumentar que quizás la correlación sea más baja, sin embargo descartaremos que sean 0 absoluto porque un paciente con MS debe tener estímulos muy parecidos a los de un paciente sano **más** (o multiplicados por) un factor. Es decir asumimos que los estímulos de un paciente con MS están en función de los estímulos visuales que tendría si no tuviera la MS.

Ahora, las pruebas que haremos con las muestras reducidas y las del grupo 1 serán usando la estadística de prueba

$$\frac{n-p}{p}(\bar{D}-\mu_d)^T S_d^{-1}(\bar{D}-\mu_d) \sim F_{(p,n-p)}$$

donde $n = 29,\ p = 5,\ D = Grupo_{0red} - Grupo_1$, y $\mu_d = \mu_0 - \mu_1$ (o sea bajo $H_0 : \mu_d = 0$)

Realicemos 100 veces el muestreo y la prueba y contemos cuántas veces rechazamos y cuántas no encontramos evidencia en contra de asumir que las medias son iguales, (rechazaremos cuando nuestro estadístico sea mayor al cuantil $F^{(0.95)}_{(5,\ 24)}$)

```
n=29
p=5
contador=0
quantil <- qf(0.95, 5, 24)
set.seed(1)
for (i in 1:100) {
  Xi <- Grupo0[sample(nrow(Grupo0), 29),]
  D <- Xi - Grupo1
  Sd <- ((n-1)/n) * cov(D)
  muD <- matrix(t(colMeans(D)))
  muDt <- t(muD)
  statistic <- ((n-p) / p) * muDt %*% solve(Sd) %*% muD
  if (statistic > quantil)
    contador = contador + 1
}
contador
```

```
## [1] 100
```

Las 100 veces que realizamos la prueba fue rechazada, por lo que podemos concluir que con $\alpha = 0.05$ rechazamos la idea de que el grupo 0 y el grupo 1 tengan el mismo vector de medias.

Si pudiéramos asumir igualdad en las matrices de covarianzas teóricas de ambos grupos, es decir $\Sigma_0 = \Sigma_1$, otra forma de encontrar evidencia en contra es usando la prueba T^2 de Hotteling:

```
#install.packages("DescTools")
library("DescTools")
HotellingsT2Test(Grupo0, Grupo1)
```

```
##
##  Hotelling's two sample T2-test
##
## data:  Grupo0 and Grupo1
## T.2 = 19.933, df1 = 5, df2 = 92, p-value = 2.051e-13
## alternative hypothesis: true location difference is not equal to c(0,0,0,0,0)
```

En este caso también rechazamos la hipótesis nula con un $p - value = 2.051 \times 10^{-13} < \alpha$.

Por lo que en efecto hay evidencia de que los grupos no tienen el mismo vector de medias.