Ejercicio 2

Sea $X \in \mathbb{R}^p$ una muestra para dos clases con distribución normal multivariada con matrices de covarianza Σ_1 y Σ_2 diferentes, y medias μ_1 y μ_2. Sean f_1 y f_2 las funciones de densidad de las distribuciones $N_p(\mu_1, \Sigma_1)$ y $N_p(\mu_2, \Sigma_2)$ respectivamente, a continuación construimos un cociente de las funciones de densidad Q para obtener un discriminante cuadrático:

$$
\begin{aligned}
Q(X) &= \log\left(\frac{f_1(X)}{f_2(X)}\right) \\
&= \log\left(\frac{(2\pi)^{-\frac{p}{2}}\left|\Sigma_1\right|^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2}\big(X-\mu_1\big)^t\Sigma_1^{-1}\big(X-\mu_1\big)}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}}\left|\Sigma_2\right|^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2}\big(X-\mu_2\big)^t\Sigma_2^{-1}\big(X-\mu_2\big)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\left|\Sigma_2\right|}{\left|\Sigma_1\right|}\right) + \log\left(\exp\Big(-\frac{1}{2}\big(X-\mu_1\big)^t\Sigma_1^{-1}\big(X-\mu_1\big) + \frac{1}{2}\big(X-\mu_2\big)^t\Sigma_2^{-1}\big(X-\mu_2\big)\Big)\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\left|\Sigma_2\right|}{\left|\Sigma_1\right|}\right) + \frac{1}{2}\big(X-\mu_2\big)^t\Sigma_2^{-1}\big(X-\mu_2\big) - \frac{1}{2}\big(X-\mu_1\big)^t\Sigma_1^{-1}\big(X-\mu_1\big) \\
Q(X) &= \frac{1}{2}\Bigg(\big(X-\mu_2\big)^t\Sigma_2^{-1}\big(X-\mu_2\big) - \frac{1}{2}\big(X-\mu_1\big)^t\Sigma_1^{-1}\big(X-\mu_1\big)\Bigg) + \frac{1}{2}\Bigg(\log\left|\Sigma_2\right| - \log\left|\Sigma_1\right|\Bigg)
\end{aligned}
$$