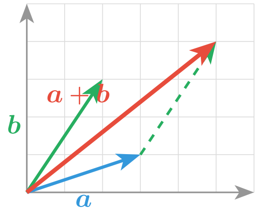
Ripasso Vettori

Le due operazioni fondamentali: **Somma** e **Scalatura**

ADD — Somma di vettori

Dati $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}$

Si sommano le componenti una per una. Vale in qualsiasi dimensione.



Sommare $\boldsymbol{b}$ ad $\boldsymbol{a}$: spostare la punta di $\boldsymbol{a}$ nella direzione e verso di $\boldsymbol{b}$, per la sua lunghezza.

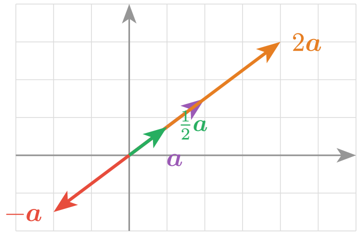
Sottrarre $\boldsymbol{b}$ ad $\boldsymbol{a}$: spostare la punta di $\boldsymbol{a}$ nella direzione e verso opposto di $\boldsymbol{b}$, per la sua lunghezza.

Es.: $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

SCALE — Scalatura (prodotto per scalare)

Dato $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{bmatrix}$

Si moltiplica ogni componente per lo stesso numero. Cambia lunghezza (e verso se $\lambda < 0$).



Stessa direzione, lunghezza diversa. Se $\lambda < 0$ il verso si inverte.

Es.: $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $2\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ $-\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

ADD e SCALE

scegliendo opportunamente un insieme di vettori, ci permettono di costruire qualsiasi altro vettore dello spazio.

Prodotto Scalare / Dot Product

Un'operazione tra due vettori che restituisce **uno scalare**

Formula — moltiplicazione componenti

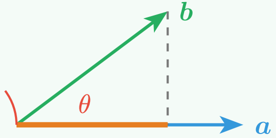
Dati $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

In n dimensioni: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Si moltiplicano le componenti corrispondenti e si sommano. Il risultato è uno **scalare**, non un vettore.

Significato geometrico

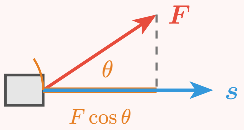
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cdot \cos\theta$$



proiezione di $\boldsymbol{b}$ su $\boldsymbol{a}$

Prodotto della proiezione di $\boldsymbol{a}$ su $\boldsymbol{b}$ per $\|\boldsymbol{b}\|$. Se $\theta = 90°$ (perpendicolari) $\rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Significato fisico — Lavoro



$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = \|\boldsymbol{F}\| \cdot \|\boldsymbol{s}\| \cdot \cos\theta$$

Solo la componente della forza **nella direzione dello spostamento** compie lavoro.

Media pesata

Dati i voti $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ e i pesi $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ con $\sum w_i = 1$:

$$\text{media pesata} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Es.: voti $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ con pesi $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$: $\quad 8 \cdot 0.5 + 6 \cdot 0.3 + 7 \cdot 0.2 = 7.2$

Cosine Similarity

Misura quanto due vettori sono **collineari**: un numero da -1 a $+1$

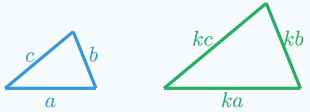
Formula

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|} = \cos(\theta)$$

Dot product **normalizzato** per le lunghezze: elimina la scala, misura solo la direzione.

Come per i triangoli simili...

Se due vettori hanno cos similarity massima ($\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} = 1$) allora:



Le componenti corrispondenti sono proporzionali con rapporto k: $\quad b_i = ka_i$

Casistiche

$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} = 1$ stessa direzione ($\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a},\ k > 0$)

$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} = 0$ perpendicolari (nessuna relazione)

$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} = -1$ verso opposto ($\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a},\ k < 0$)

Esempio — Voti di 4 studenti

Voti in 4 materie STEM. Quali studenti hanno un profilo **simile**?

	Mat	**Fis**	**Inf**	**Sci**
Alice	6	5	4	6
Bruno	9	7.5	6	9
Carla	8	5	9	7
Dario	5	7	8	4

Trasformazioni Lineari e Affini

Funzioni che trasformano vettori in vettori

Definizioni

Lineare: $f(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$

Rispetta ADD e SCALE.

Affine: $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$

Lineare + traslazione.

Esempi lineari: rotazione, riflessione, scalatura, proiezione, shear

Esempi affini: traslazione, rototraslazione, qualsiasi lineare + traslazione

Matrici

Fissata una base, ogni trasformazione lineare corrisponde a **una e una sola matrice** (e viceversa).

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Trasformazioni lineari $\leftrightarrow$ matrici (isomorfismo).

Proprietà

Sia lineari che affini:

- Mandano **rette in rette**
- Conservano il **parallelismo**

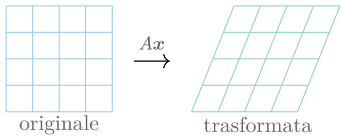
Solo lineari:

- Mandano sempre l'**origine in origine**: $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$

Chiusura

Somma di trasformazioni lineari/affini → lineare/affine

Composizione di trasformazioni lineari/affini → lineare/affine



Rette → rette, parallele → parallele