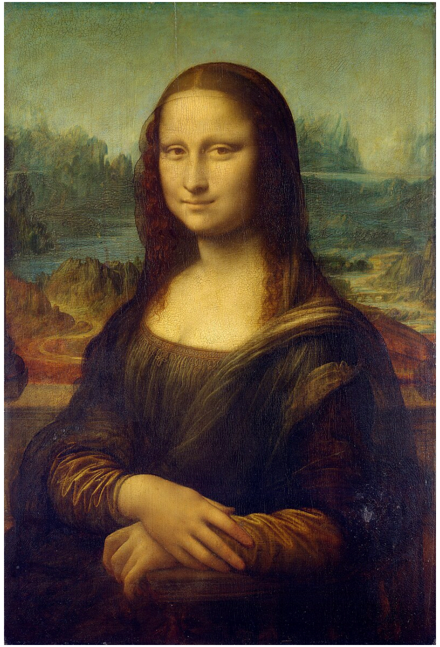
A Caccia di Parametri

Caso Studio: Posizionare la Gioconda al Louvre



Il problema

Il quadro più famoso del mondo deve essere appeso alla parete. A che altezza (h) posizioniamo il bordo inferiore?

Vincolo: il centro del dipinto deve trovarsi **56 cm sopra** l'altezza degli occhi del visitatore medio.

I dati disponibili

- Database: **10 milioni** di ingressi anonimi all'anno
- Variabile misurata: altezza dei visitatori
- Popolazione eterogenea: turisti da tutto il mondo, scolaresche, famiglie...

La domanda

Come estraiamo **un singolo numero** da milioni di misurazioni per prendere una decisione concreta?

A Caccia di Parametri — La Soluzione

1. I Dati (Input)

Database: 10 milioni di ingressi anonimi all'anno.

Variabile: altezza dei visitatori.

In AI questo è il nostro **Dataset di Addestramento**.

2. Il Peso (w)

Calcoliamo la media delle altezze:

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 175 \text{ cm}$$

Se i dati cambiano, il valore m cambia.

In AI questo è il **Peso** (w): il valore numerico imparato dai dati.

3. Il Modello

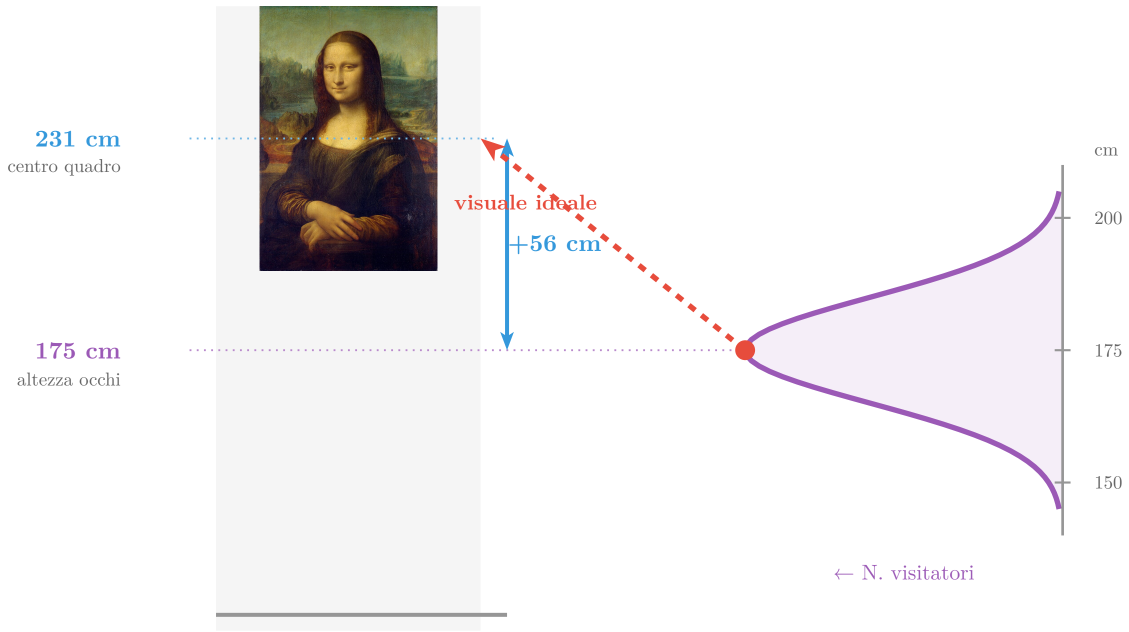
La formula: $h = m + 56$

È la struttura fissa. Non cambia al variare dei visitatori, ma ospita il peso per produrre il risultato.

In AI questa è la **Funzione di Predizione**: l'architettura del modello.

Il **Modello** è la domanda che poniamo ai dati ($h = ... + 56$).
Il **Peso** è la risposta che i dati ci danno ($m = 175$) per agire nel mondo reale.

Perché la Media?



La media ($m = 175$ cm) è il valore con la **massima frequenza** di visitatori: il miglior compromesso per posizionare il quadro.

A Caccia di Parametri

Caso Studio: La Moto di Marco

La promessa

I genitori di Marco gli hanno promesso:
*«Se prendi **9** in fisica, ti compriamo la moto.»*

Il dilemma di Marco

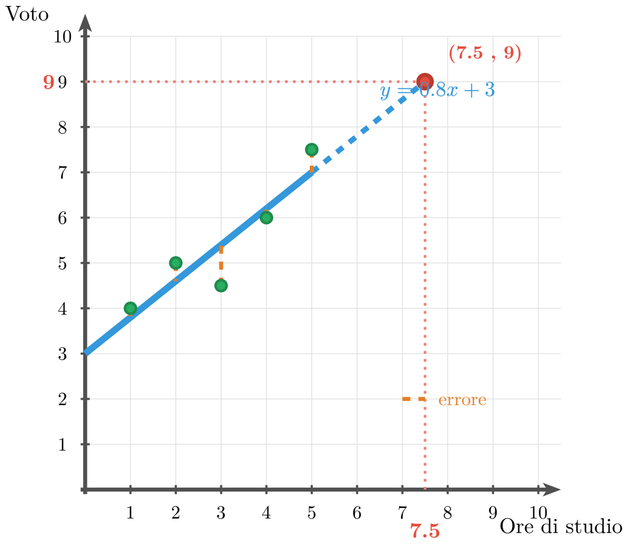
- Non vuole studiare **un minuto di meno** → rischierebbe la moto
- Non vuole studiare **un minuto di più** → efficienza!

Ha i voti dei compiti precedenti. Sa quante ore ha studiato per ciascuno.

La domanda

Quante ore deve studiare **esattamente** per prendere 9?

A Caccia di Parametri — La Moto di Marco



1. I Dati di Marco

	C1	C2	C3	C4	C5
Ore (x)	1	2	3	4	5
Voto (y)	4.0	5.0	4.5	6.0	7.5

2. Il Modello (2 parametri)

$$y = mx + q$$

Interpolazione lineare sui dati:

$m = 0.8$ (pendenza)
$q = 3.0$ (intercetta)

3. La Previsione

Per ottenere $y = 9$: $9 = 0.8x + 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{9-3}{0.8} = \mathbf{7.5}$ **ore**

In AI: l'**Inferenza**

Come Trovare m e q

Metodo analitico (troppo difficile per Marco!)

Passo 1 — Loss Errore $e_i = y_i - (mx_i + q)$. Minimizziamo:

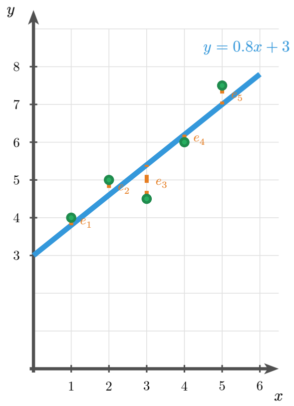
$$L(m,q) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - q)^2$$

Passo 2 — Derivate parziali = 0

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - mx_i - q) = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial m} = -2\sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - mx_i - q) = 0$$

Passo 3 — Soluzione

$$\boxed{m = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}} \qquad \boxed{q = \overline{y} - m\overline{x}}$$



Con i dati di Marco $N = 5, \quad \overline{x} = 3, \quad \overline{y} = 5.4 \quad \rightarrow \quad m = 0.8 \quad q = \overline{y} - m\overline{x} = 5.4 - 2.4 = 3.0$

Come Trovare m e q

Metodo 2 — Massima Verosimiglianza

Ipotesi — Ogni voto è una gaussiana

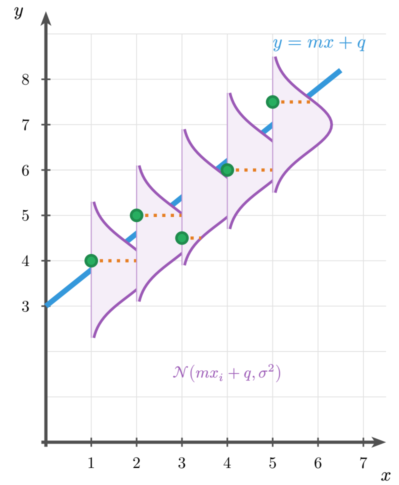
Marco non prende sempre lo stesso voto studiando le stesse ore: c'è variabilità naturale. Modelliamo ogni voto come una variabile casuale gaussiana centrata sulla retta:

$$y_i \sim \mathcal{N}\left(mx_i + q,\, \sigma^2\right)$$

- Il **valore atteso** del voto è sulla retta: $mx_i + q$
- La **varianza** σ^2 misura quanto i voti fluttuano attorno alla retta
- Ogni voto è la **realizzazione** di una gaussiana centrata sulla retta

La domanda chiave

Quali valori di m e q rendono **più probabile** aver osservato esattamente questi voti?



Massima Verosimiglianza — La Matematica

Passo 1 — Verosimiglianza (Likelihood)

I voti sono indipendenti, la probabilità congiunta è il **prodotto**:

$$\mathcal{L}(m,q) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_i - mx_i - q)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Passo 2 — Passaggio ai logaritmi

Il logaritmo trasforma il prodotto in somma:

$$\ln\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2)}_{\text{costante}} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - mx_i - q)^2$$

Massimizzare $\ln\mathcal{L}$ rispetto a m e q equivale a **minimizzare** il secondo termine.

Passo 3 — Conclusione

Massimizzare $\ln\mathcal{L}$ $\leftrightarrow$ **Minimizzare** $\boxed{\sum_{i=1}^{N}(y_i - mx_i - q)^2 = L(m,q)}$ $\rightarrow$ **Stessa Loss!**

L'ipotesi di **errori gaussiani** giustifica il metodo dei **minimi quadrati**. Le due strade portano allo stesso risultato.

Come Trovare m e q

Metodo 3 — L'Analogia delle Molle

L'esperimento mentale

Colleghiamo ogni punto alla retta con una **molla verticale**. La retta è libera di ruotare (m) e traslare (q). Si ferma nella posizione di **equilibrio**: energia totale minima.

La fisica: legge di Hooke

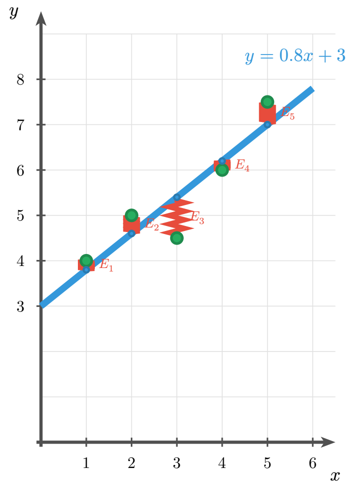
$$E_i = \frac{1}{2}k(\Delta y_i)^2 = \frac{1}{2}k(y_i - mx_i - q)^2$$

Il **quadrato** non è una scelta arbitraria: viene dalla fisica!

Energia totale = Loss

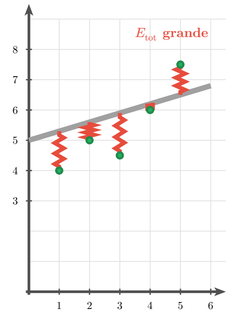
$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{N}(y_i - mx_i - q)^2 \quad \propto \quad L(m, q)$$

Minima energia ↔ Minimi quadrati

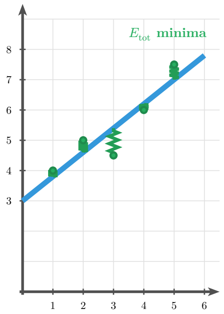


L'Analogia delle Molle — Equilibrio

Retta sbagliata: molle tese



Retta ottimale: equilibrio



Condizioni di equilibrio

La retta si ferma quando la **forza netta** è nulla in entrambe le direzioni:

Traslazione (regola q): la somma delle forze si annulla

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i - mx_i - q) = 0$$

Rotazione (regola m): la somma dei momenti si annulla

$$\sum_{i=1}^{N}x_i(y_i - mx_i - q) = 0$$

Soluzione

$$\boxed{m = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}} \qquad \boxed{q = \overline{y} - m\overline{x}}$$

Stesse formule dei metodi 1 e 2!

Come Trovare m e q

Metodo 4 — Discesa del Gradiente

L'idea — Scendere nella valle

Invece di risolvere equazioni, partiamo da valori qualsiasi di m e q e li miglioriamo **passo dopo passo**, scendendo lungo la superficie della Loss:

$$L(m, q) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - q)^2$$

Il gradiente indica la direzione di salita

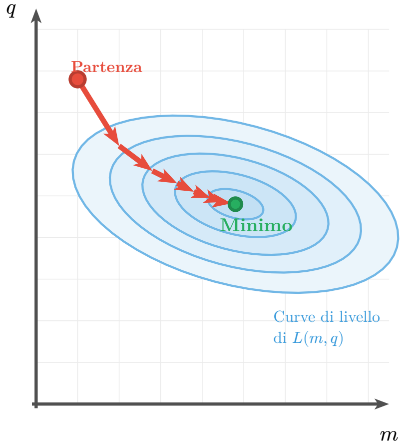
$$\frac{\partial L}{\partial m} = -2\sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - mx_i - q) \qquad \frac{\partial L}{\partial q} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - mx_i - q)$$

Il gradiente punta in salita → noi camminiamo in **direzione opposta**.

Regola di aggiornamento

$$\boxed{m \leftarrow m - \alpha\frac{\partial L}{\partial m}} \qquad \boxed{q \leftarrow q - \alpha\frac{\partial L}{\partial q}}$$

α = **learning rate** (dimensione del passo) — Ripetere fino a convergenza



A Caccia di Parametri

Che Cifra È?

Immagine 28 × 28 pixel

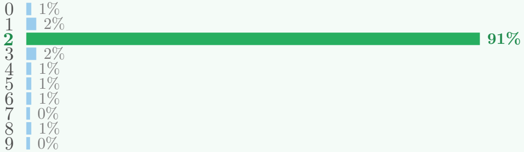
(784 numeri da 0 a 255)

Il problema

Ogni immagine è una griglia di pixel, ciascuno con un valore di grigio. Servono **parametri** e un **modello matematico** capace di predire di che cifra si tratta.

L'obiettivo — Assegnare probabilità

Il modello deve associare all'immagine una **probabilità** per ciascuna delle 10 cifre:



Riconoscere Cifre con Vettori e Cosine Similarity

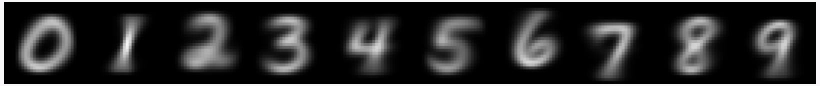
1. L'immagine è un vettore

Ogni immagine 28×28 viene **appiattita**: 784 pixel $\rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{784}$

2. I parametri: le 10 cifre medie

Per ogni cifra $d \in \{0, \ldots, 9\}$, calcoliamo la **media** di tutte le immagini di training di quella cifra:

$$\boldsymbol{\mu}_d = \frac{1}{N_d} \sum_{i:y_i=d} \boldsymbol{x}_i$$



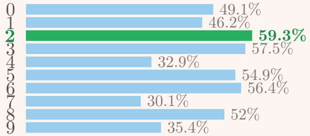
Le 10 cifre medie (parametri del modello): 10 × 784 = **7840 parametri**

3. Predizione:

calcoliamo $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{\mu}_d$ per ogni cifra e scegliamo la più alta: $\hat{y} = \text{argmax}_d(\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{\mu}_d)$

Esempio — Immagine di test

Confrontiamo con le 10 medie:



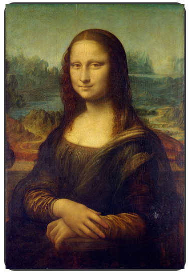
Predizione: 2 (cos similarity più alta: 59.3%)

Risultato

Accuratezza: 82.2%

8216 su 10000 immagini di test classificate correttamente, usando solo la **media** e la **cosine similarity** — nessuna rete neurale!

Riepilogo — A Caccia di Parametri



Dati

10 milioni di altezze dei visitatori

Parametri

1

La media m delle altezze

Modello

$$h = m + 56$$

Dati

5 coppie (ore studio, voto)

Parametri

2

Pendenza m e intercetta q

Modello

$$y = mx + q$$

Dati

60 000 immagini 28×28

Parametri

7 840

10 cifre medie $\times$ 784 pixel

Modello

$$\hat{y} = \mathrm{argmax}_d(\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{\mu}_d)$$