DM1 MT11

Léo Eugène, Mathieu Poveda, Sacha Hénaff

Exercice 1

1) On cherche de développement limité de cos(x) à l'ordre 4 en 0. On a :

$$cos(x) = cos(0) - xsin(0) - \frac{x^2}{2}cos(0) + \frac{x^2}{6}sin(0) + \frac{x^4}{24}cos(0) + x^4\epsilon(x)$$

Donc :

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$$

On cherche le développement limité de $(1 - cos(x))^2$. On a :

$$1 - cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$$

De plus, on sait que le DL de $x^2 = x^2$. Donc par composition, on a :

$$(1 - cos(x))^2 = (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^2 + x^4\epsilon(x)$$

En ne gardant que les termes d'ordres 4 maximum, on obtient :

$$(1 - cos(x))^2 = \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon(x)$$

On cherche le DL de $cos(x)^2$. On a :

$$cos(x)^2 = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^2 + x^4\epsilon(x)$$

En développant cette expression et en ne gardant que les termes d'ordres 4 maximum, on a :

$$cos(x)^2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$$

$$cos(x)^2 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4\epsilon(x)$$

De plus, on a :

$$(1 - cos(x)^2) = 1 - 2cos(x) + cos(x)^2 = 1 - (2 - x^2 + \frac{x^4}{12}) + 1 - x^2 + \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$$

On obtient finalement que le DL de : $(1 - cos(x))^2$ est :

$$(1 - cos(x))^2 = \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon$$

On retrouve bien le même résultat que précédemment.

2) a. On cherche à exprimer le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 au voisinnage de $\frac{\pi}{4}$ de cos(x) :

$$\begin{aligned} cos(x) = cos(\frac{\pi}{4}) + (x - \frac{\pi}{4})cos'(\frac{\pi}{4}) + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2}cos''(\frac{\pi}{4}) \\ + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!}cos'''(\frac{\pi}{4}) + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^4}{4!}cos''''(\frac{\pi}{4}) + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^5}{5!}cos'''''(\frac{\pi}{4} + \theta h) \end{aligned}$$

On a donc :

$$cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - (x - \frac{\pi}{4})sin(\frac{\pi}{4}) - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2}cos(\frac{\pi}{4}) + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!}sin(\frac{\pi}{4}) + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^4}{4!}cos(\frac{\pi}{4}) + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^5}{5!}sin(\frac{\pi}{4} + \theta h)$$

On a finalement :

$$cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}(x - \frac{\pi}{4})^4 + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^5}{5!}sin(\frac{\pi}{4} + \theta h)$$

On retrouve bien le même résultat que précédemment

b) On cherche le développement de Taylor-Young de cos(x) à l'ordre 4 en $\frac{\pi}{4}$. On, sait que les parties régulières des développement de Taylor-Young et Taylor-Lagrange sont les mêmes, seuls les restes varient. On a donc :

$$cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}(x - \frac{\pi}{4})^4 + (x - \frac{\pi}{4})^4\epsilon(x - \frac{\pi}{4})$$

c) On réalise un changement de variable, on pose $x = h + \frac{\pi}{4}$. On sait que :

$$cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$$

Donc :

$$cos(x) = cos(h + \frac{\pi}{4}) = cos(h)cos(\frac{\pi}{4}) - sin(h)sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}cos(h) - \frac{\sqrt{2}}{2}sin(h)$$

d)

On pose : $x = h + \frac{\pi}{4} h = x - \frac{\pi}{4}$ On a :

$$sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + h^4\epsilon(h)$$

Et :

$$cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + h^4\epsilon(h)$$

On remplce h par son expression, on obtient :

$$sin(h) = (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!} + x^4\epsilon(x)$$

Et :

$$cos(x) = 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2} + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^4}{24} + x^4\epsilon(x)$$

On remplace les expressions de sin et cos dans l'expression de la question c). On obtient :

$$cos(h + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2} + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^4}{24} - (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!}) + x^4\epsilon(x)$$

En développant, on a :

$$cos(h+\frac{\pi}{4}) = cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}(x - \frac{\pi}{4})^2}{4} + \frac{\sqrt{2}(x - \frac{\pi}{4})^3}{24} + \frac{\sqrt{2}(x - \frac{\pi}{4})^4}{48} + (x - \frac{\pi}{4})^4\epsilon(x)$$

On retrouve bien l'expression de la question b.

Exercice 2

On cherche $\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)}{sin(x)}$, qui n'est pas une forme indéterminée puis cos(x) tend vers 1 en 0 et sin(x) tend vers 0 en 0. On a donc : $\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)}{sin(x)} = +\infty$.

On cherche $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{sin(x)}$. On connait les DL de cos(x) et sin(x), on peut donc aussi connaître le DL de 1-cos(x). On peut ainsi utiliser les parties principales des DL pour calculer la limite. On a :

$$1 - cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$$

Et :

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

Donc :

$$\frac{1 - cos(x)}{sin(x)} = \frac{\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)}{x + x\epsilon(x)} = \frac{x^2(\frac{1}{2} + \epsilon(x))}{x(1 + \epsilon(x))} = x\frac{\frac{1}{2} + \epsilon(x)}{1 + \epsilon(x)}$$

Ainsi, on voit que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(x)}{sin(x)} = 0$$

On a :

$$ln(1 + x) = x - \tfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \text{ et } sin(x) + x = 2x + x\epsilon(x)$$

Donc :

$$\frac{ln(1 + x)}{sin(x) + x} = \frac{x + \epsilon(x)}{2x + \epsilon(x)} = \frac{x(1 + \epsilon(x))}{x(2 + \epsilon(x))} = \frac{1 + \epsilon(x)}{2 + \epsilon(x)}$$

Donc :

$$lim_{x\to 0}\frac{ln(1 + x)}{sin(x) + x} = \frac{1}{2}$$

De même, on a : $sin(x) + x^3 = x + \frac{5x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$. Donc :

$$\frac{ln(1 + x)}{sin(x) + x^3} = \frac{x + \epsilon(x)}{x + \epsilon(x)} = \frac{x(1 + \epsilon(x))}{x(1 + \epsilon(x))} = \frac{1 + \epsilon(x)}{1 + \epsilon(x)}$$

Donc :

$$lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{sin(x)+x^3} = 1$$

De même, on a : $sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$. Ainsi :

$$\frac{ln(1+x)}{sin(x)-x} = \frac{x + x\epsilon(x)}{-\frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)} = \frac{x(1+\epsilon(x))}{x(-\frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x))} = -\frac{(1+\epsilon(x))}{(\frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x))}$$

On a donc :

$$lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{sin(x)-x} = -\infty$$

On sait que le DL de $x^n = x^n$. On a donc :

$$\frac{x^n}{sin(x)-x} = \frac{x + x\epsilon(x)}{-\frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)} = x^n\frac{1}{x^3(-\frac{1}{6} + \epsilon(x))} = x^{n-3}\frac{1}{-\frac{1}{6} + \epsilon(x)}$$

On doit donc distinguer 3 cas pour déterminer la limite de cette expression. Premièrement si n=3 :

$$lim_{x\to 0}\frac{x^n}{sin(x)-x} = -6$$

Si $n < 3$, on a :

$$lim_{x\to 0}\frac{x^n}{sin(x)-x} = -\infty$$

Enfin, si $n > 3$, on a :

$$lim_{x\to 0}\frac{x^n}{sin(x)-x} = 0$$

Exercice 3

On a : $f(x,y) = (x^2+y^2)^{3/2}$

1) On cherche $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{6x}{2}(x^2+y^2)^{1/2} = 3x(x^2+y^2)^{1/2}$$

Et donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = u'v+v'u = 3(x^2+y^2)^{1/2} + 3x^2(x^2+y^2)^{-1/2} = \frac{3(x^2+y^2)+3x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

2) On a : $g(r,\theta) = f(rcos(\theta), rsin(\theta))$

a. On a donc :

$$g(r,\theta) = f(rcos(\theta), rsin(\theta)) = ((rcos(\theta))^2 + rsin(\theta)^2)^{3/2} = (r^2(cos^2(\theta)+sin^2(\theta)^2))^{3/2} = r^{6/2} = r^3$$

On a donc :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = 3r^2$$

Et :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$$

On a :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -rsin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(rcos(\theta), rsin(\theta)) + rcos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(rcos(\theta), rsin(\theta))$$

Et :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(rcos(\theta), rsin(\theta)) + sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(rcos(\theta), rsin(\theta))$$

En utilisant la même méthode qu'en cours dans l'exercice A.2.15 en composant ces deux equations, on peut déterminer que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial r}(rcos(\theta), rsin(\theta)) - \frac{sin(\theta)}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(rcos(\theta), rsin(\theta))$$

Or, on sait que $\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$et : $\frac{\partial g}{\partial r} = 3r^2$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(rcos(\theta), rsin(\theta)) = g_1(r, \theta) = 3r^2 cos(\theta)$$

b. On a donc :

$$\frac{\partial g_1}{\partial r} = 6rcos(\theta)$$

Et :

$$\frac{\partial g_1}{\partial \theta} = -3r^2 sin(\theta)$$