DM3 MT11

Léo Eugène, Mathieu Poveda, Sacha Hénaff

Exercice 1

On cherche :

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

On pose $u = 1 + x^2$ donc $du = 2x\,dx$ et ainsi : $dx = \frac{1}{2x}du$. On obtient donc :

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}2\sqrt{u} + C = \sqrt{u} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

On a :

$$\frac{1}{1+x^2}$$

On a donc :

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$$

De même, on a :

$$\frac{x}{1+x^2}$$

On remarque que cette fonction est de la forme $\frac{u'}{u}$ en mettant $\frac{1}{2}$ en facteur. On a donc :

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de mettre une valeur absolue car $x^2 + 1 > 0$

On cherche :

$$\int e^{6x}(x^2+3x+1)$$

En utilisant l'intégration par partie avec $u' = e^{6x}$ donc $u = \frac{1}{6}e^{6x}$ et $v = x^2 + 3x + 1$ et donc $v' = 2x + 3$, on obtient :

$$\int e^{6x}(x^2+3x+1) = \left[\frac{1}{6}e^{6x}(x^2+3x+1)\right] - \int \frac{1}{6}(2x+3)e^{6x}\,dx$$

Donc :

$$\int e^{6x}(x^2+3x+1) = \left[\frac{1}{6}e^{6x}(x^2+3x+1)\right] - \int \frac{e^{6x}}{2}\,dx - \int \frac{x}{3}e^{6x}\,dx$$

Et donc :

$$\int e^{6x}(x^2+3x+1) = \left[\frac{1}{6}e^{6x}(x^2+3x+1)\right] - \left[\frac{e^{6x}}{12}\right] - \int \frac{x}{3}e^{6x}\,dx$$

On doit faire une deuxième intégration par partie avec :$u' = e^{6x}$ donc $u = \frac{1}{6}e^{6x}$ et $v = \frac{x}{3}$ et donc $v' = \frac{1}{3}$. On obtient donc :

$$\int e^{6x}(x^2+3x+1) = \left[\frac{1}{6}e^{6x}(x^2+3x+1)\right] - \left[\frac{e^{6x}}{12}\right] - \left[e^{6x}\frac{x}{18}\right] + \int \frac{e^6x}{18}\,dx$$

Donc :

$$\int e^{6x}(x^2+3x+1) = \left[\frac{1}{6}e^{6x}(x^2+3x+1)\right] - \left[\frac{e^{6x}}{12}\right] - \left[e^{6x}\frac{x}{18}\right] + \left[\frac{e^{6x}}{108}\right] + C$$

En factorisant par $\frac{e^{6x}}{6}$, on obtient :

$$\int e^{6x}(x^2+3x+1) = \frac{e^{6x}}{6}\left(x^2+3x+1-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{1}{18}\right) + C$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\int e^{6x}(x^2+3x+1) = \frac{e^{6x}}{6}\left(x^2+\frac{8x}{3}+\frac{10}{18}\right) + C$$

Exercice 2

1) On a :

$$\frac{x+2}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$$

On cherche a et b qui vérifient cette égalité. On a donc :

$$a + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b}{x+1} = \frac{ax+a+b}{x+1}$$

On a donc par identification : $ax = x \Leftrightarrow a = 1$ et donc : $a+b=2 \Leftrightarrow b=1$ On a donc :

$$\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$

Ainsi :

$$\int \frac{x+2}{x+1}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x+1}\right)\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx = x + \ln(|x+1|) + C$$

2) On a :

$$\frac{x+2}{3x^2+x-2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-\frac{2}{3}} = \frac{a(x-\frac{2}{3})+b(x-1)}{(x+1)(x-\frac{2}{3})}$$

En développant le dénominateur, on a :

$$x^2 - \frac{2}{3}x + x - \frac{2}{3} = x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

On voit qu'il s'agit d'un tiers du dénominateur de la fonction de départ. Or pourpouvoir comparer les deux numératuers, il faut que les dénominateurs soient égaux. On a donc :

$$\frac{x+2}{3x^2+x-2} = \frac{x+2}{3(x+1)(x-\frac{2}{3})}$$

Et donc :

$$\frac{x+2}{3(x+1)(x-\frac{2}{3})} = \frac{a(x-\frac{2}{3})+b(x-1)}{(x+1)(x-\frac{2}{3})}$$

On a donc : $\frac{x+2}{3} = ax - \frac{2a}{3} + b$

Et en identifiant les termes en x et les autres on obtient :

$$\begin{cases} ax + bx = \frac{x}{3} \\ \frac{-2a}{3} + b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

On obtient donc : $a = -\frac{1}{5}$ et $b = \frac{8}{15}$

Ainsi, on a :

$$\frac{x+2}{3x^2+x-2} = \frac{\frac{-1}{5}}{x+1} + \frac{\frac{8}{15}}{x-\frac{2}{3}}$$

Donc :

$$\int \frac{x+2}{3x^2+x-2}\,dx = \frac{-1}{5}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{8}{15}\int \frac{1}{x-\frac{2}{3}}\,dx = -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{8}{15}\ln|x-\frac{2}{3}| + C$$

3) a. On a :

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \int \frac{1}{b^2}\frac{1}{(\frac{x-a}{b})^2+1}\,dx$$

On pose : $t = \frac{x-a}{b}$ donc $dt = \frac{1}{b}\,dx$ et donc $dx = b\,dt$

On obtient donc :

$$\int \left(\frac{1}{b^2}\frac{1}{(\frac{x-a}{b})^2+1}\right)dx = \int \left(\frac{1}{b^2}\frac{b}{t^2+1}\right)dt = \frac{1}{b}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{b}\arctan(t) + C$$

Ainsi, on a en remplaçant t par son expression :

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C$$

b. On cherche à calculer :

$$F_1(x) = \int \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx$$

En remarquand que le dénominateur est le début du dévloppement d'une identité ramarquable, on a :

$$\int \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^1+2}\,dx$$

En identifiant $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$. On obtient :

$$F_1(x) = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 3}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

c. On cherche à calculer :

$$F_2(x) = \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3}\, dx$$

On voit que cette intégrale est de la forme $\frac{u'}{u}$. Donc :

$$F_2(x) = \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3}\, dx = \ln|x^2 - 2x + 3| + C$$

d. On cherche à calculer :

$$F_3(x) = \int \frac{3x + 5}{x^2 - 2x + 3}\, dx$$

On cherche a et b tels que $a(2x - 2) + b = 3x + 5$. On obtient $a = \frac{3}{2}$ et $b = 8$. Donc :

$$F_3(x) = \int \frac{3x + 5}{x^2 - 2x + 3}\, dx = \frac{3}{2} F_2(x) + 8F_1(x) = \frac{3}{2} \ln|x^2 - 2x + 3| + \frac{8}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$