

# Computerphysik

## Hausarbeit 2

Friedrich Hübner 2897111

Fiona Paulus 2909625

2. Juni 2017

## 1 Allgemeine Hinweise

Das Programm wurde unter Windows 10 mit "g++ -o abgabe2.exe -Wall -Wextra -std=c++0x abgabe2.cpp" kompiliert.

## 2 Aufgabe 1

Da  $z = q \cdot a$  und sowohl  $q \geq 0$  als auch  $a > 0$  folgt:  $z \geq 0$ .

Weiterhin wird  $q$  maximal bei  $E = 0$  mit  $z_{max} = a q_{max} = a \frac{\sqrt{2m_e V_0}}{\hbar} = \xi$ . Also ist  $0 \leq z \leq \xi$ .

## 3 Aufgabe 2

Da  $\frac{\sqrt{\xi^2 - z^2}}{z} \geq 0$  müssen auch  $\tan z$  bzw.  $-\cot z$  positiv sein. Der Tangens ist nicht-negativ auf den Intervallen  $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2})$ , der negative Cotangens auf  $[k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Auf den angegebenen Intervallen sind beide Funktionen auch stetig und streng monoton steigend:  $\tan' z = \frac{1}{\cos^2 z} > 0$ ,  $-\cot' z = \frac{1}{\sin^2 z} > 0$ .

Weiterhin ist  $\frac{\sqrt{\xi^2 - z^2}'}{z} = -\frac{z\sqrt{\xi^2 - z^2} + \frac{z}{\sqrt{\xi^2 - z^2}}}{\xi^2 - z^2} < 0$  und somit ist  $\frac{\sqrt{\xi^2 - z^2}}{z}$  streng monoton fallend.

### 3.1 gerader Fall: $g(z) = \tan z - \frac{\sqrt{\xi^2 - z^2}}{z}$

Betrachte ein Intervall  $I_k = [k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2})$  auf dem die Funktion definiert ist, also  $0 \leq k\pi + \frac{\pi}{2} < \xi$ .

Es gilt  $\lim_{z \rightarrow k\pi^+} g(z) = \lim_{z \rightarrow k\pi^+} 0 - \frac{\sqrt{\xi^2 - (k\pi)^2}}{k\pi} < 0$  und  $\lim_{z \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}^-} g(z) = \infty > 0$ . Da  $g(z)$  stetig und streng monoton steigend ist und an den Rändern verschiedene Vorzeichen hat, besitzt  $g(z)$  in dem Intervall  $I_k$  genau eine Nullstelle.

Betrachte nun das letzte Intervall  $I = [k\pi, \xi)$ , mit  $z \leq \xi < k\pi + \frac{\pi}{2}$ . Die linke Intervallgrenze hat wieder einen negativen Funktionswert, die rechte einen positiven:  $\lim_{z \rightarrow \xi^-} g(z) = \lim_{z \rightarrow \xi^-} \tan z - 0 > 0$ . Also gibt es auch in diesem Intervall eine Nullstelle.

Insgesamt gibt es somit also  $n = \lfloor \frac{\xi}{\pi} \rfloor + 1$  Nullstellen.

TODO: Graphiken

### 3.2 ungerader Fall: $h(z) = -\cot z - \frac{\sqrt{\xi^2 - z^2}}{z}$

Betrachte ein Intervall  $J_k = [k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi)$  auf dem die Funktion definiert ist, also  $0 \leq (k+1)\pi < \xi$ .

Es gilt  $\lim_{z \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}^+} h(z) = \lim_{z \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}^+} 0 - \frac{\sqrt{\xi^2 - (k\pi + \frac{\pi}{2})^2}}{k\pi + \frac{\pi}{2}} < 0$  und  $\lim_{z \rightarrow (k+1)\pi^-} h(z) = \infty > 0$ . Da  $h(z)$  stetig und streng monoton steigend ist und an den Rändern verschiedene Vorzeichen hat, besitzt  $h(z)$  in dem Intervall  $J_k$  genau eine Nullstelle.

Betrachte nun das letzte Intervall  $J = [k\pi + \frac{\pi}{2}, \xi)$ , mit  $z \leq \xi < (k+1)\pi$ . Die linke Intervallgrenze hat wieder einen negativen Funktionswert, die rechte einen positiven:  $\lim_{z \rightarrow \xi^-} h(z) = \lim_{z \rightarrow \xi^-} -\cot z - 0 > 0$ . Also gibt es auch in diesem Intervall eine Nullstelle.

Insgesamt gibt es somit also  $n = \lfloor \frac{\xi}{\pi} - \frac{1}{2} \rfloor + 1$  Nullstellen.

TODO: Graphiken

## 4 Sonstige Abgegebene Dateien

### 4.1 output.txt

Ausgabedatei der Simulation, die für das Plotten verwendet wurde.