Computerphysik
Hausarbeit 2

Friedrich Hübner 2897111
Fiona Paulus 2909625

6. Juni 2017

Allgemeine Hinweise

Das Programm wurde unter Windows 10 mit "g++ -o abgabe2.exe -Wall -Wextra -std=c++0x -O2 -static abgabe2.cpp" kompiliert.

Aufgabe 1

Da $z = q \cdot a$ und sowohl $q \geq 0$ als auch $a > 0$ folgt: $z \geq 0$.
Weiterhin wird q maximal bei $E = 0$ mit $z_{max} = aq_{max} = a\frac{\sqrt{2m_e V_0}}{\hbar} = \xi$. Also ist $0 \leq z \leq \xi$.

Aufgabe 2

Da $\frac{\sqrt{\xi^2 - z^2}}{z} \geq 0$ müssen auch $\tan z$ bzw. $-\cot z$ positiv sein. Der Tangens ist nicht-negativ auf den Intervallen $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2})$, der negative Cotangens auf $[k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$.
Auf den angegebenen Intervallen sind beide Funktionen auch stetig und streng monoton steigend: $\tan' z = \frac{1}{\cos^2 z} > 0$, $-\cot' z = \frac{1}{\sin^2 z} > 0$.
Weiterhin ist $\frac{\sqrt{\xi^2 - z^2}}{z}' = -\frac{z\sqrt{\xi^2 - z^2} + \frac{z}{\sqrt{\xi^2 - z^2}}}{\xi^2 - z^2} < 0$ und somit ist $\frac{\sqrt{\xi^2 - z^2}}{z}$ streng monoton fallend.

gerader Fall: $g(z) = \tan z - \frac{\sqrt{\xi^2 - z^2}}{z}$

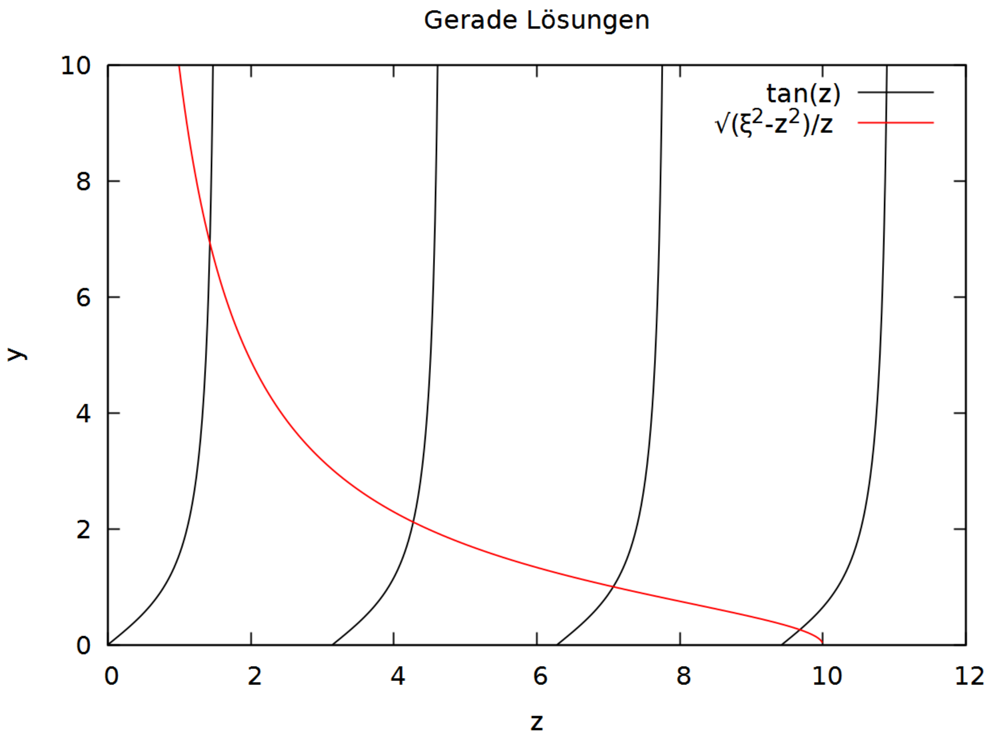

Abbildung 1: Gerader Fall $\xi = 10$

In dem Diagramm wurden sowohl $\tan z$ als auch $\frac{\sqrt{\xi^2 - z^2}}{z}$ eingezeichnet. Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung. Wie man gut erkennen kann, gibt es auf jedem Arm des Tangens einen Schnittpunkt.

Betrachte also ein Intervall $I_k = [k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2})$ auf dem die Funktion definiert ist, also $0 \leq k\pi + \frac{\pi}{2} < \xi$.
Es gilt $\lim\limits_{z \to k\pi^+} g(z) = \lim\limits_{z \to k\pi^+} 0 - \frac{\sqrt{\xi^2 - (k\pi)^2}}{k\pi} < 0$ und $\lim\limits_{z \to k\pi + \frac{\pi}{2}^-} g(z) = \infty > 0$. Da g(z) stetig und streng monoton steigend ist und an den Rändern verschiedene Vorzeichen hat, besitzt $g(z)$ in dem Intervall I_k genau eine Nullstelle.

Betrachte nun das letzte Intervall $I = [k\pi, \xi)$, mit $z \leq \xi < k\pi + \frac{\pi}{2}$. Die linke Intervallgrenze hat wieder einen negativen Funktionswert, die rechte einen positiven: $\lim\limits_{z \to \xi-} g(z) = \tan \xi - 0 > 0$. Also gibt es auch in diesem Intervall eine Nullstelle.

Insgesamt gibt es somit also $n = \lfloor \frac{\xi}{\pi} \rfloor + 1$ Nullstellen.

ungerader Fall: $h(z) = -\cot z - \frac{\sqrt{\xi^2 - z^2}}{z}$

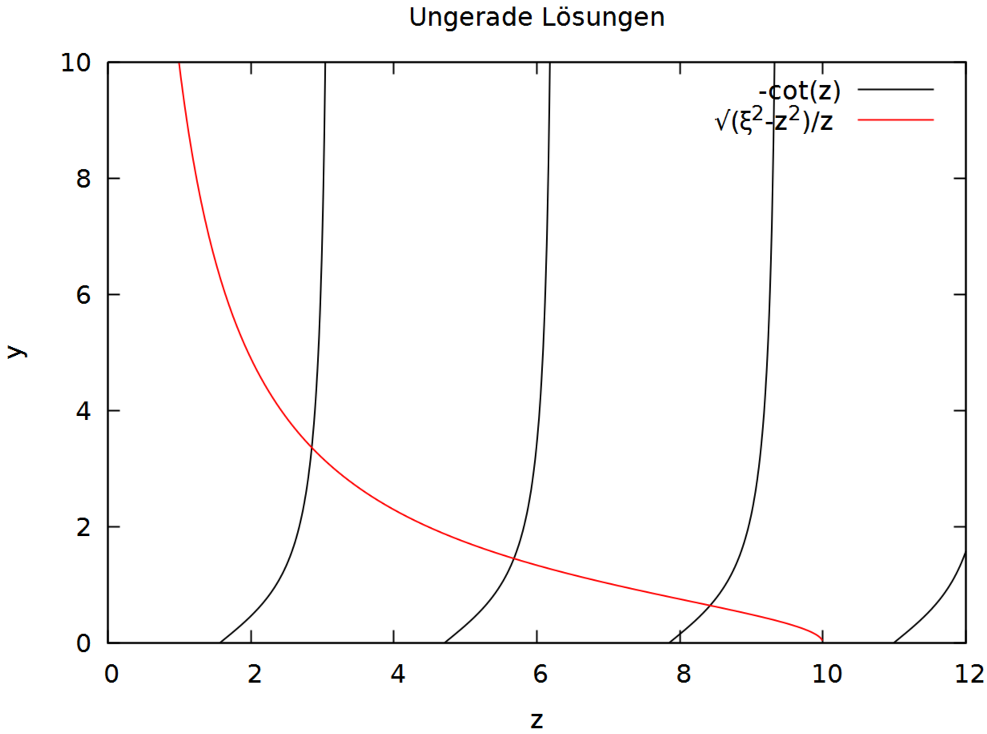

Abbildung 2: Gerader Fall $\xi = 10$

In dem Diagramm wurden sowohl $-\cot z$ als auch $\frac{\sqrt{\xi^2-z^2}}{z}$ eingezeichnet. Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung. Wie man gut erkennen kann, gibt es auf jedem Arm des negativen Cotangens einen Schnittpunkt.

Betrachte also ein Intervall $J_k = [k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi)$ auf dem die Funktion definiert ist, also $0 \leq (k+1)\pi < \xi$.
Es gilt $\lim\limits_{z \to k\pi + \frac{\pi}{2}+} h(z) = \lim\limits_{z \to k\pi+} 0 - \frac{\sqrt{\xi^2 - (k\pi + \frac{\pi}{2})^2}}{k\pi + \frac{\pi}{2}} < 0$ und $\lim\limits_{z \to (k+1)\pi-} h(z) = \infty > 0$. Da h(z) stetig und streng monoton steigend ist und an den Rändern verschiedene Vorzeichen hat, besitzt $h(z)$ in dem Intervall J_k genau eine Nullstelle.

Betrachte nun das letzte Intervall $J = [k\pi + \frac{\pi}{2}, \xi)$, mit $z \leq \xi < (k+1)\pi$. Die linke Intervallgrenze hat wieder einen negativen Funktionswert, die rechte einen positiven: $\lim\limits_{z \to \xi-} h(z) = -\cot \xi - 0 > 0$. Also gibt es auch in diesem Intervall eine Nullstelle.

Insgesamt gibt es somit also $n = \lfloor \frac{\xi}{\pi} - \frac{1}{2} \rfloor + 1$ Nullstellen.

Sonstige Abgegebene Dateien

output.txt

Ausgabedatei der Simulation, die für das Plotten verwendet wurde.