Sureté de fonctionnement

- Fiabilité des systèmes -

Franck RICHARD
Université de Poitiers

Introduction

- Apparition dans les années 1950 dans les secteurs aéronautique, militaire, spatiale, nucléaire, télécommunication et transport
- ***La sureté de fonctionnement*** (Sdf) est ***un moyen*** de ***« maitrise des risques »***
- La Sdf permet de placer dans un système étudié une ***confiance justifiée*** et ***partageable***.
- La Sdf n'est que du ***bon sens organisé*** et ***systématisé***

Maitriser les risques est une attitude naturelle que chacun pratique, mettre en œuvre la Sdf c'est professionnaliser cette attitude (systématiser, optimiser, expliciter)

➡ Se limiter à quelques questions posées systématiquement

➡ Mobiliser des méthodes et modèles mathématiques complexes

Introduction

Etapes de la maitrise des risques :

- ***Identification des risques***

Recensement des situations dangereuses, événements redoutés (ER)

➡ Nécessite la connaissance du fonctionnement du système

- ***Evaluation des risques***

Associer à chaque ER une probabilité d'occurrence et une gravité des conséquences

➡ L'évaluation de la probabilité s'appuie sur des calculs probabilistes ou sur l'évaluation de la vraisemblance de l'ER (approche comparative)

➡ L'évaluation de la gravité s'appuie sur la connaissance du système afin d'identifier les effets des événements étudiés

Introduction

Etapes de la maitrise des risques :

- ***Réduction des risques (acceptation)***

Comparaison des évaluations avec des critères d'acceptation

Mise en place d'un plan d'action visant à la réduction des risques « inacceptables »

- ***Maitrise des risques***

S'assurer que « la réalité » et les conclusions de l'étude coïncideront

Prendre en compte l'ensemble des conséquences des mesures prises en raison d'un plan de réduction des risques

➡ Perturbation du système (fonctionnement normal)

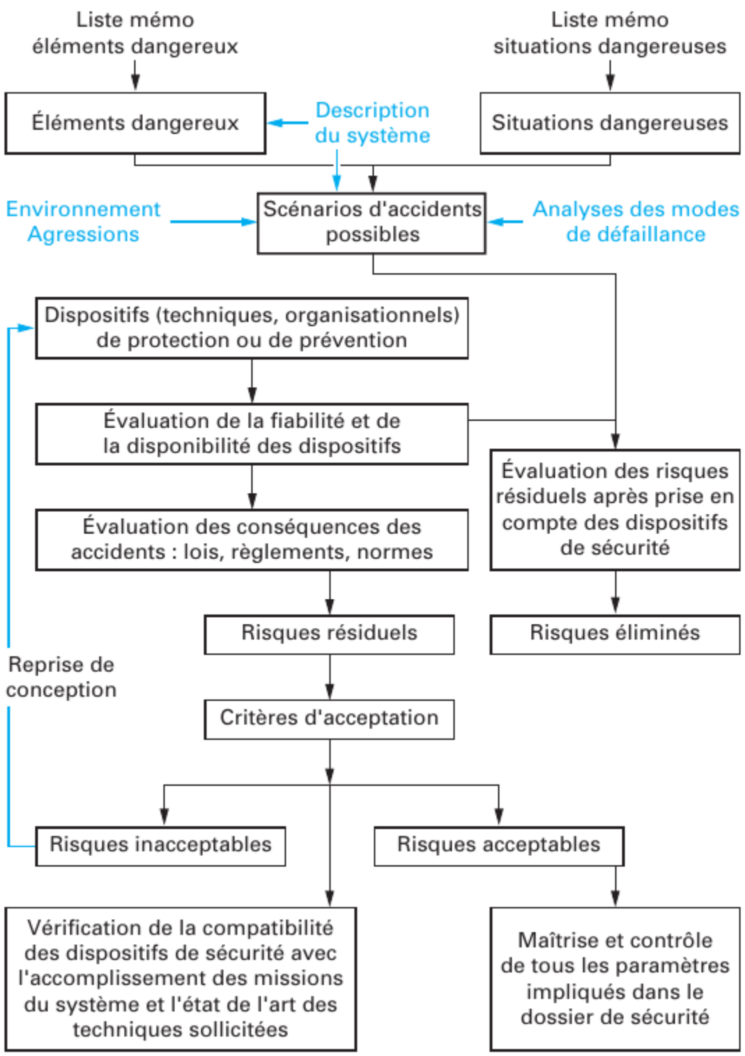
« Au sens large, la Sureté de fonctionnement est considérée comme la science des défaillances »

La Sdf est souvent définie par l'intermédiaire de 4 notions :

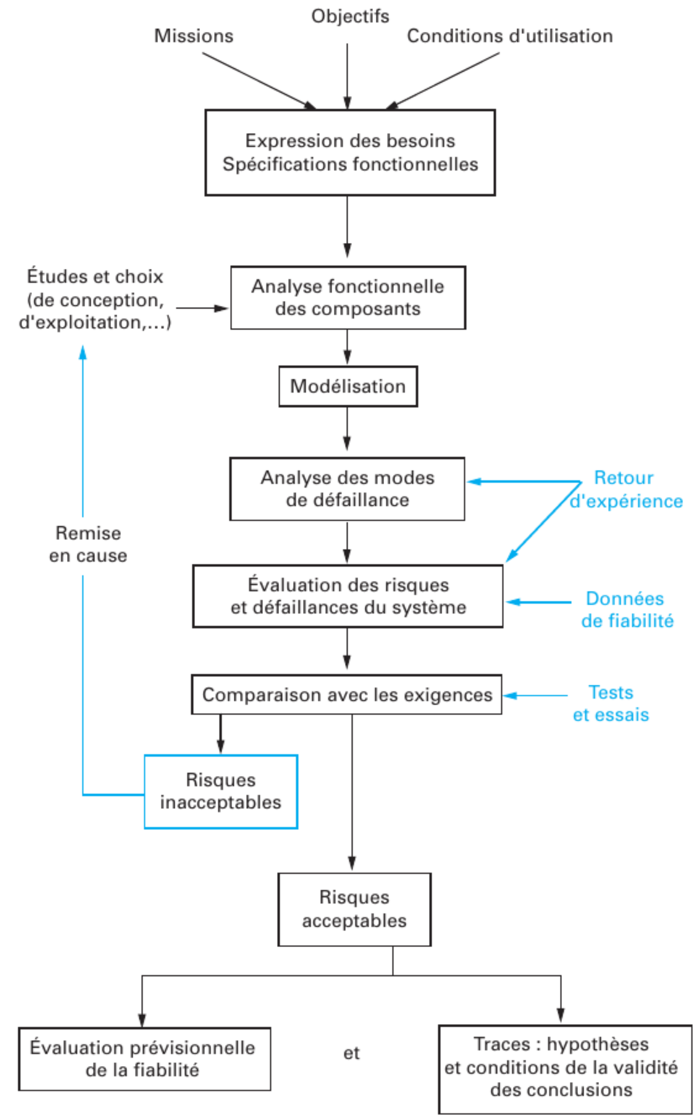
- La fiabilité
- La disponibilité
- La Maintenabilité
- La Sécurité

Quelques exemples d'application:

Introduction



Démarche de Sdf orientée sécurité



Démarche de Sdf orientée fiabilité

Notion de système

« Ensemble déterminé d'éléments discrets (composants, constituants) interconnectés ou en interaction »
(Vesely & al. 1981)

« Formé **d'éléments en interaction dynamique**, un système correspond à une portion d'entités réelles, définie par une frontière établie en fonction d'un **objectif** procédant à des échanges avec son environnement »
(Walliser - 1977)

Un système peut être considéré de 2 façons :

- Depuis son environnement comme élément spécifique (type boite noire) avec des entrées et des sorties

Notion de système

- De l'intérieur par la mise en évidence :

  - ✓ De ses caractéristiques physiques (par décomposition en sous systèmes et composants)
  - ✓ De ses modes d'organisation (relationnelles, hiérarchiques,…)
  - ✓ De ses propriétés (autonomie, robustesse, vulnérabilité,…)
  - ✓ De son comportement (dynamique d'évolution, productivité,…)

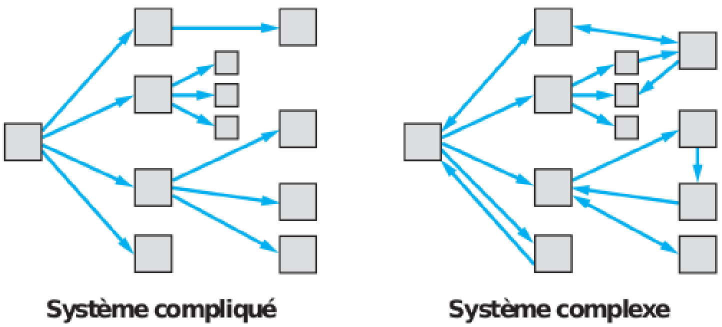
- Nombreuses classification existantes…

  ➡ Système complexe

  ➡ Système compliqué

Notion de système

- ***Système Compliqué***



Les relations entre les composants sont simples, type arborescence. Le système est donc décomposable en éléments plus simples pouvant être analysés séparément pour comprendre le système globale

- ***Système complexe***

Les relations entre les composants comportent des « boucles », le système est non décomposable

On distingue la complexité liée à ***l'architecture*** du système de celle propre aux ***interactions*** entre composants (ou avec l'environnement)

Le système est donc considéré sous 2 aspects

- Structurel & temporel -

Performance d’un système

« La ***performance*** d’un ***système*** est souvent définit par son ***efficacité*** et son ***efficience*** »

- **Efficacité**
  - ✓ Adéquation entre les objectifs fixés et les résultats obtenus
  - ✓ L’efficacité est orientée vers la qualité de la prestation fournie
- **Efficience**
  - ✓ Adéquation entre les moyens mobilisés et les résultats obtenus
  - ✓ L’efficience ajoute la notion de moindre effort ou de temps minimal pour atteindre le résultat
  - ✓ L’efficience est orientée vers la productivité

Performance d'un système

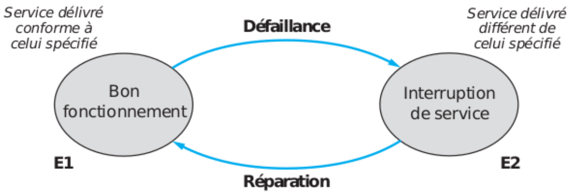
2 niveaux d'évaluation de la performance d'un système :

- ***Evaluation globale (ou statique)***

  ✓ Performance intrinsèque du système basée sur une longue période d'observation

- ***Evaluation dynamique (ou temps réel, locale)***

  ✓ Performance du système à 1 instant t



Suivi temporel de la performance d'un système

➡ pilotage

La Sdf permet d'évaluer les **2 niveaux** de performance d'un système

➡ Suivi en temps réel de l'état du système

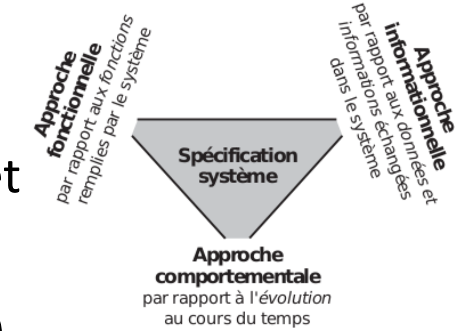
- Si les états d'un système sont caractérisés par 1 état de bon fonctionnement et un état de défaillance

- Analyse globale : statistiques

Méthodes d’analyse technique & fonctionnelle

« L’évaluation de la performance d’un système passe par l’analyse et la modélisation du système d’un point de vue technique & fonctionnelle »

- ***Méthodes fonctionnelles***



Basées sur une approche structurée, hiérarchique descendante et modulaire, elles sont souvent graphiques

APTE
FAST (Function Analysis Technique)
SADT (Structured Analysis and Design Technique)
SART (Structured Analysis and Real Time)

FBS (Function Breakdown)
PBS (Product Breakdown Structure)
WBS (Work Breakdown Structure)

Approche UML (Unified Modeling Language)
Représentation des systèmes à base d’objets

Méthodes spécifiques :
Merise (traitement des systèmes d’informations)
Grai (traitement des systèmes décisionnels)

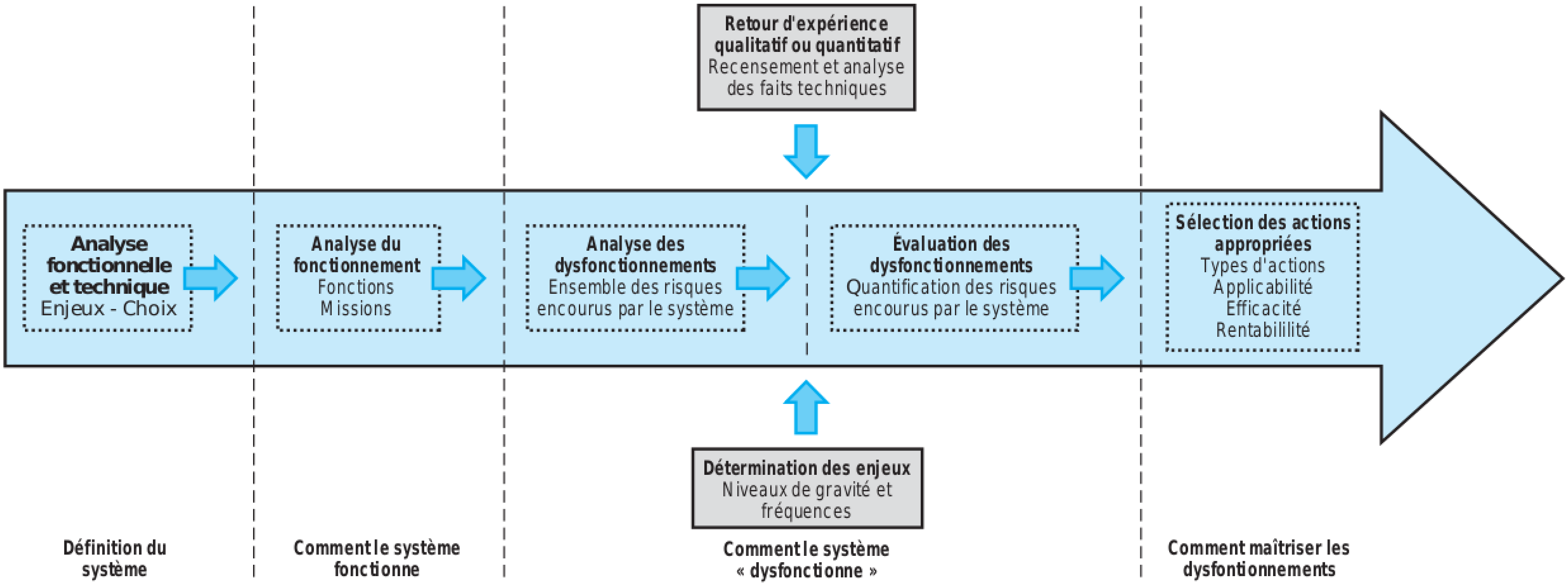
- ***Méthodes statistiques***

Basées sur l’observation d’événements, ces méthodes visent à établir des modèles mathématiques afin de faire de la prédiction

Méthodes d'évaluation de la Sdf

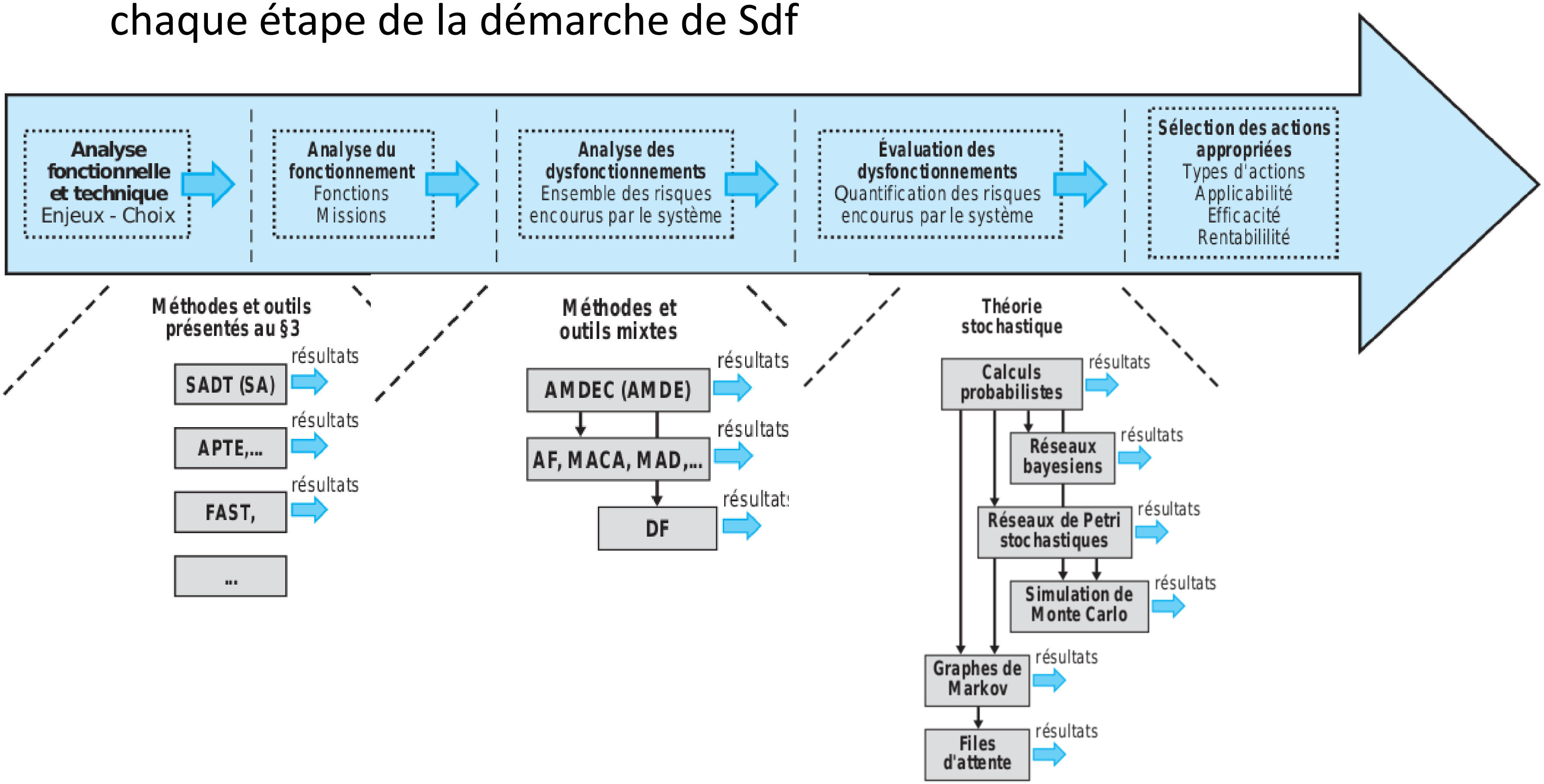
Les caractéristiques de Sdf ou le comportement FMDS (Fiabilité, Maintenabilité, Disponibilité, Sécurité) influent sur les performances du système

Démarche d'analyse de Sdf :



Méthodes d'évaluation de la Sdf

- Des méthodes & outils d'analyse ont été développés afin de répondre à chaque étape de la démarche de Sdf



Parmi ces méthodes, on distingue 3 approches (logique d'analyse) différentes

Méthodes d'évaluation de la Sdf

- ***Approches qualitatives / quantitatives***

  ✓ ***Approche qualitative***

  Les résultats renseignent sur les caractéristiques du système (points faibles, scénarios d'accident, chemins critiques,…)

  ✓ ***Approche quantitative***

  Les résultats sont ceux du calcul de fiabilité, disponibilité,…
  (ex. probabilité d'occurrence d'une combinaison d'événement)

- ***Approches inductives / déductives***

  ✓ ***Approche inductive***

  Approche ascendante, on part d'un événement initiateur (défaillance,…) et on cherche à caractériser les conséquences de cet événement sur le système (niveau n+1)

✓ ***Approche déductive***

Approche descendante, on part d'un événement redouté (ER) (le plus souvent niveau système) et on cherche à caractériser toutes les causes (niveau n-1) qui peuvent engendrer cet ER

- ***Approches statiques / dynamiques***

✓ ***Approche statique***

Analyse du système d'un point de vue structurel sans tenir compte des évolutions dans le temps, s'appuie au plus sur 1 modèle booléen donnant les scénarios d'1 ER

✓ ***Approche dynamique***

Prise en compte des aspects **comportemental** et **temporel**

Les données d'entrées sont de 2 ordres :

- Connaissance du système résultant d'une étude fonctionnelle

- Données de nature événementielle (états, historique, lois mathématiques décrivant les fonctions de distribution des événements)

Les résultats en sortie sont :

- Des modèles de comportement du système (vis-à-vis des défaillances, des réparations,…)
- Des grandeurs statistiques issues des modèles de Sdf (probabilité d'états ou d'occurrence d'événements)
- Des éléments stratégiques de gestion (fréquence de maintenance, gestion du risque,…)

Méthodes d'évaluation de la Sdf

Quelques méthodes d'analyse…

- **Analyse des dysfonctionnements**

✓ AMDEC (Analyse des Modes de Défaillances des Effets et de la Criticité

L'AMDEC est une méthode ascendante qui à partir de l'identification des modes de défaillances des composants permet d'évaluer les effets (conséquences) sur le système.

statique	✓	inductif	✓	qualitatif	✓
dynamique		déductif		quantitatif	✓

✓ Arbre des défaillances (AD)

L'AD est une méthode descendante qui consiste à décrire graphiquement au moyen d'une structure arborescente un enchainement causal depuis un ER unique

L'arbre est formé de niveaux successifs tels que chaque événement résulte d'événements des niveaux inférieurs liés par des relations logiques

statique	✓	inductif		qualitatif	✓
dynamique		déductif	✓	quantitatif	✓

Université de Poitiers

- ✓ L’arbre des conséquences (MACQ)

Cette méthode distingue les situations de succès et d’échec consécutives à un événement indésirable

L’objectif est d’identifier les différentes séquences d’1 événement conduisant à 1 accident

statique	✓	inductif	✓	qualitatif	✓
dynamique		déductif		quantitatif	✓

- ✓ Diagramme de fiabilité (DF)

Le DF permet de déterminer la fiabilité globale d’un système et présente l’intérêt de modéliser directement la vue fonctionnelle du système

statique	✓	inductif		qualitatif	✓
dynamique		déductif	✓	quantitatif	✓

Université de Poitiers

- **Outils de la théorie stochastique**

Ces méthodes sont quantitatives et dynamiques; elles traitent des problèmes stochastiques, càd de problèmes dans lesquels le hasard intervient

✓ Outils de calculs probabilistes

Ensemble d'outils utilisant les théorèmes généraux du calcul des probabilités (totales, composées, conditionnelles,…)

Ces outils permettent d'établir l'occurrence d'événements et les moyens de caractérisation des variables aléatoires afin de simuler des lois de processus stochastiques

statique	✓	inductif		qualitatif	
dynamique	✓	déductif	✓	quantitatif	✓

✓ Réseaux BAYESIENS (RB)

Basé sur les probabilités conditionnelles et dérivé du théorème de Baye, cet outil permet d'établir une prévision du futur à partir des données du passé

statique		inductif		qualitatif	
dynamique	✓	déductif	✓	quantitatif	✓

Méthodes d'évaluation de la Sdf

Université de Poitiers

- ✓ Réseaux de Petri stochastiques (RdPS)

Outil d'analyse de la structure et du comportement des systèmes dynamiques à événements discrets basé sur la description des relations entre les conditions et les événements intervenant sur le système

Les RdPS sont une extension des RdP pour lesquels est associée à chaque transition une variable aléatoire temporelle avec sa fonction de densité de probabilité

statique		inductif		qualitatif	✓
dynamique	✓	déductif	✓	quantitatif	✓

- ✓ Graphe de Markov (GM)

Représentation du système permettant de prendre en compte son comportement en tenant compte des dépendances entre les éléments constitutifs du système

Le résultat est quantitatif : probabilité d'occurrence

statique		inductif		qualitatif	
dynamique	✓	déductif	✓	quantitatif	✓

Méthodes d'évaluation de la Sdf

- ✓ File d'attente (FA)

  Les FA sont une forme de représentation et de traitement de problèmes stochastiques concernant les phénomènes d'attente

- ✓ Simulation de Monte Carlo (MC)

  La méthode est basée sur la simulation informatique de variable aléatoires

  L'approche consiste à créer un grand nombre de scénarios puis d'effectuer un traitement statistique des résultats (calcul de moyenne, dispersion,…)

Fonction

« Action d'un produit ou de l'un de ces constituants exprimée exclusivement en terme de finalité. Une fonction est formulée par un verbe à l'infinitif suivi d'un complément » (Afnor)

Défaillance

« C'est la cessation de l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise »

- La défaillance d'un système est une caractéristique qui n'est pas prévisible avec certitude (semble dépendre du hasard) et peut donc être modélisée par une variable aléatoire (VA)

Fiabilité (Reliability : R(t))

« C'est la probabilité qu'un système soit non défaillant dans l'intervalle de temps [0;t] »

Mathématiques de la Sdf

Université de Poitiers

- ✓ Considérons un système non réparable
- ✓ On parlera de date de panne, d'instant de défaillance
- ✓ On définit la « durée de vie d'un système » (durée de bon fonctionnement)

➡ La « ***durée de vie »*** est 1 variable aléatoire X (réel positif donc)

X : VA de loi de probabilité définie par :

- *Fonction de répartition* :

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$$

- *Densité de probabilité*:

$$\boxed{f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}}$$

- *Le **taux de défaillance** est définie par* :

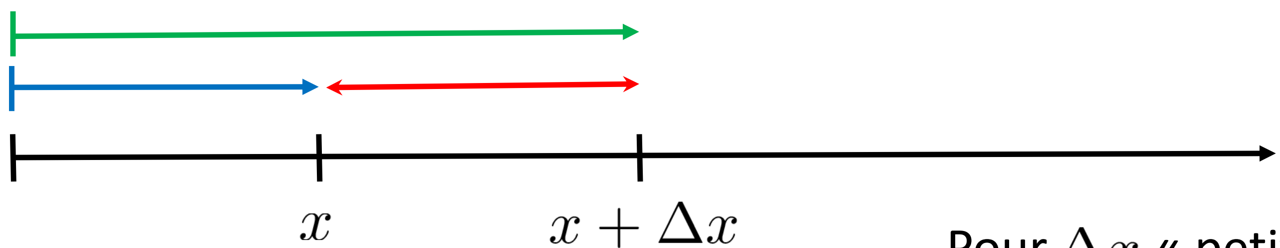
$$\boxed{\lambda(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} P\left(x < X \leq x + \Delta x \mid X > x\right)}$$

x : temps (durée de vie)

Mathématiques de la Sdf

- **Interprétation de** $\lambda(x)$

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big(P(X \leq x + \Delta x) - P(X \leq x)\Big)$$



Pour Δx « petit » :

$$\boxed{f(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\Big(P(x < X \leq x + \Delta x)\Big)} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)\Delta x \approx P(x < X \leq x + \Delta x) \\ \lambda(x)\Delta x \approx P(x < X \leq x + \Delta x \mid X > x) \end{array}$$

$f(x)\Delta x$: Probabilité de défaillance Juste après l'instant *x*

$\lambda(x)\Delta x$: Probabilité de défaillance juste après l'instant *x* sachant que le syst. n'est pas tombé en panne avant *x*

- **Exemple :**

✓ P1 qu'un homme meurt entre 100 et 101 ans ? Faible car on a beaucoup de chance de mourir avant 100 ans

✓ P2 qu'un homme meurt entre 100 et 101 ans sachant qu'on est en vie a 100 ans ? Forte

P1 est liée à la densité de probabilité et P2 au taux de défaillance

- Le taux de défaillance est donc une fonction mathématique qui caractérise le vieillissement d'un système

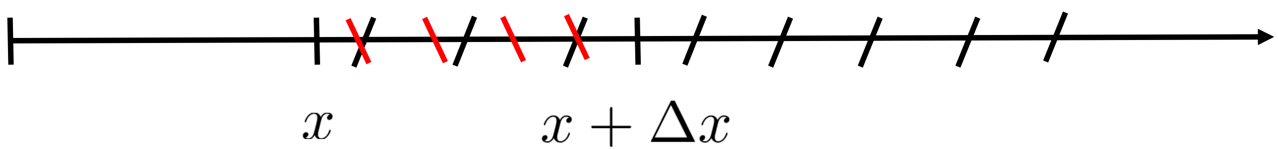
- **Lien taux de défaillance / Fiabilité:**

$$\lambda(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} P\big(x < X \leq x + \Delta x \mid X > x\big)$$

Mathématiques de la Sdf

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\lambda(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x \cap X > x)}{P(X > x)}$$



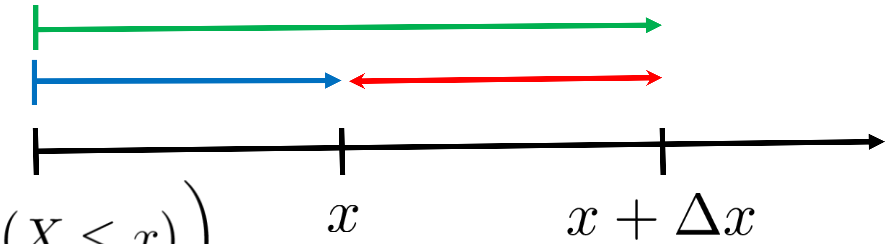
$$\lambda(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{P(X > x)}$$

R(x) = « Probabilité que le système soit non défaillant sur [0;t] » = « Probabilité que le système soit en vie à t »

$$R(x) = P(X > x)$$

Mathématiques de la Sdf

$$\lambda(x) = \frac{1}{R(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} P(x < X \leq x + \Delta x)$$



$$= \frac{1}{R(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \Big(P(X \leq x + \Delta x) - P(X \leq x) \Big)$$

$$= \frac{1}{R(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \Big(F(x + \Delta x) - F(x) \Big)$$

$$= \frac{1}{R(x)} F'(x)$$

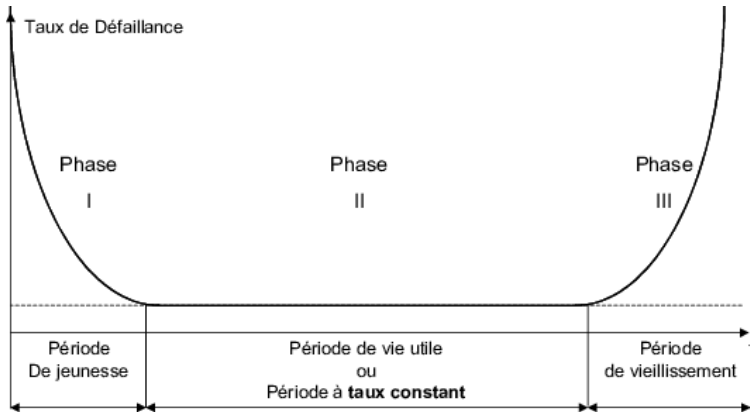
$$\boxed{\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{-R(x)}{R(x)}}$$

« Le taux de défaillance est le nombre de défaillances survenues entre rapporté au nombre en état de fonctionnement à l'instant t »

$$\lambda(t) \approx \frac{n(t; t + \Delta t)}{N(t)}$$

Le taux de défaillance correspond à un nombre de défaillance par unité de temps

- De nombreuses études ont montré que la forme de la fonction du taux de défaillance est pratiquement toujours celle d'une ***courbe en baignoire***



- Les relations établies sont valables quelque soit le type de loi de probabilité
- L'évolution du taux de défaillance au cours du temps conduit au choix de modèle de fiabilité
- Le choix du modèle de fiabilité est lié au mode de défaillance et donc au type de composant

- **Il existe 2 grandes familles de composants :**
  - ✓ Les composants ***électroniques*** : taux de défaillance constant (loi exponentielle)
  - ✓ Les composants ***mécaniques*** : taux de défaillance croissant en période de maturité (loi de Weibull)

Exemple : Composants électroniques

Le taux de défaillance est considéré constant du à l'absence d'usure, de corrosion,…

$$\lambda(x) = \lambda$$

$$R(x) = e^{-\lambda x}$$

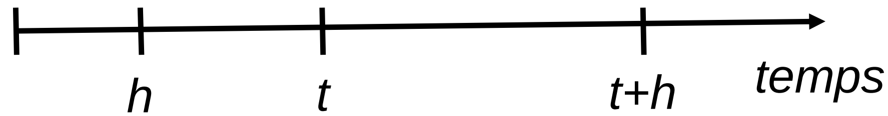
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda(x) = \frac{-R'(x)}{R(x)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda$$

Mathématiques de la Sdf

- **Propriété de non vieillissement :**



$$P(X \geq t+h | X \geq t) = \frac{P(X \geq t+h \cap X \geq t)}{P(X \geq t)}$$

$$P(X \geq t+h | X \geq t) = \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)}$$

✓ Le non vieillissement entre *t* et *t+h* s'écrit :

$$P(X \geq t+h | X \geq t) = P(X \geq h)$$

$$P(X \geq h) = \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)}$$

$$P(X \geq t+h) = P(X \geq h) P(X \geq t)$$

- **Retour sur la loi exponentielle :**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Université de Poitiers

- ✓ La loi exponentielle vérifie la propriété de non vieillissement :

$$P(X \geq t+h | X \geq t) = \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} = \frac{1 - P(X < t+h)}{1 - P(X < t)}$$

$$P(X \geq t+h | X \geq t) = \frac{1 - F(t+h)}{1 - F(t)} = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t+h)})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})}$$

$$P(X \geq t+h | X \geq t) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{(-\lambda t - \lambda h + \lambda t)}$$

$$P(X \geq t+h | X \geq t) = e^{-\lambda h}$$

$$P(X \geq h) = 1 - P(X < h) = 1 - F(h)$$

$$P(X \geq h) = 1 - (1 - e^{-\lambda h})$$

$$P(X \geq h) = e^{-\lambda h}$$

- **Estimateurs moyens**

MTTF (Mean Time To Failaure) : Durée moyenne de bon fonctionnement d'un système non réparable

$$MTTF = E(x) = \int_0^{\infty} x f(x) dx$$

$$MTTF = -\int_0^{\infty} x R'(x) dx = [-xR(x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(x) dx$$

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(x) dx$$

On a vue que :

$$R(x) = P(X > x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$R(x) + F(x) = 1$$

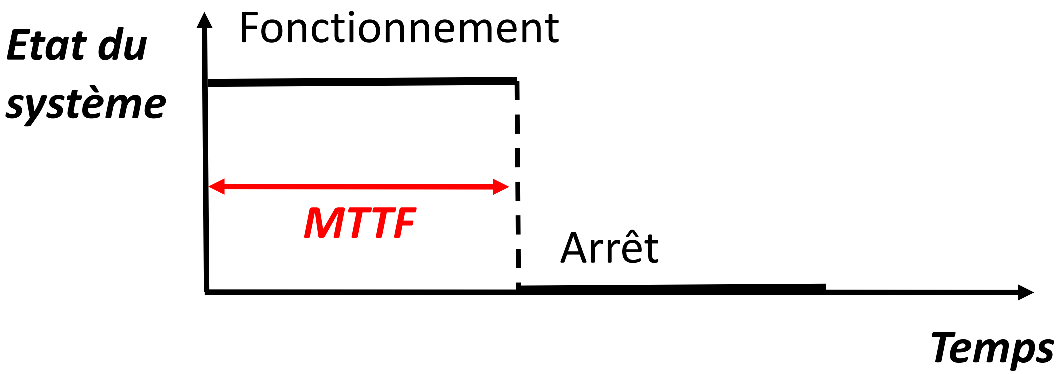
$$\Rightarrow \quad R(x) = 1 - F(x)$$

$$f(x) = -R'(x)$$

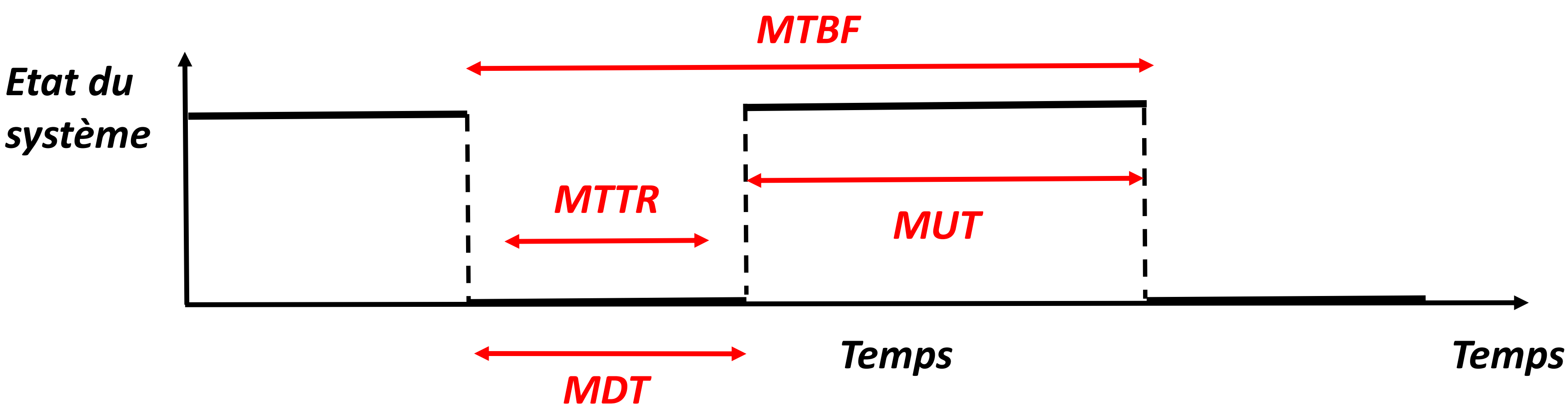
Rappel : intégration par parties

$$\int_a^b = u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

- ✓ **Système non réparable**



- ✓ **Système réparable**



Mathématiques de la Sdf

- ✓ ***MTTF (Mean Time To Failure)***

  Durée moyenne de bon fonctionnement d'un système non réparable de l'instant 0 à à la première défaillance

- ✓ ***MTBF (Mean Time Between Failure)***

  Durée moyenne séparant 2 défaillances successives (définie que pour des systèmes réparables)

- ✓ ***MUT (Mean Up Time)***

Temps moyen de disponibilité après réparation

- ✓ ***MTTR (Mean Time To repair)***

Temps moyen de réparation

- ✓ ***MDT (Mean Down Time)***

Temps moyen d'indisponibilité

Mathématiques de la Sdf

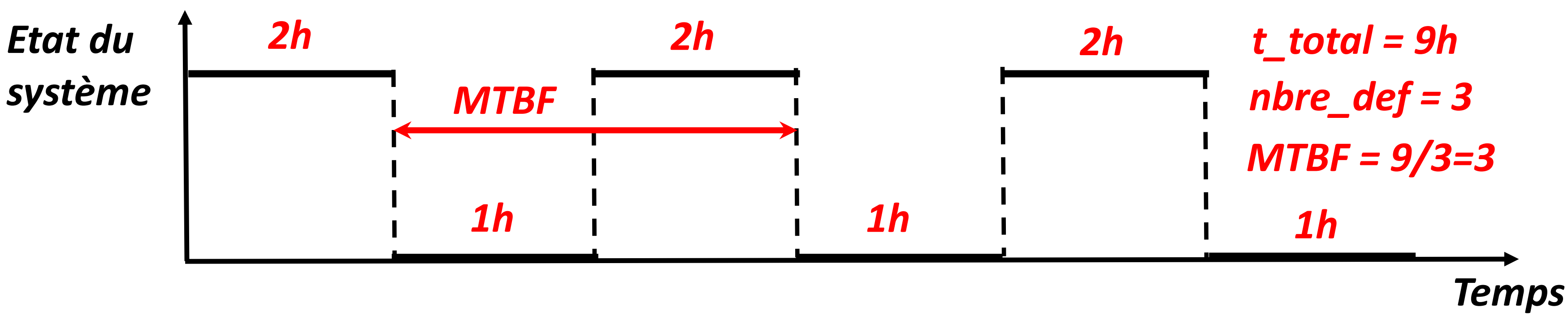
✓ **Cas des système à taux de défaillance constant**

$$MTTF = \int_0^\infty R(x)dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$R(x) = e^{-\lambda x}$$



- MTBF correspond au temps total de fonctionnement sur le nombre de défaillances

$$MTBF = \frac{temps\ total\ de\ fonctionnement}{nombre\ de\ defaillances}$$

- Le taux de défaillance s'exprime en nombre de défaillances par unité de temps, il y a donc un lien avec MTBF

- ***Pour un système à taux de défaillance constant on a :***

$$MTTF = MTBF = \frac{1}{\lambda}$$

$$R(MTBF) = e^{-\lambda.MTBF} = e^{-1} = 0.37$$

La fiabilité à *t=MTBF* est de 0,37. Cela signifie qu'après un temps *t=MTBF* environ 63% des composants en état de fonctionnement tomberont en panne

Diagrammes de fiabilité

- La méthode du diagramme de fiabilité (Reliability block Diagram Method) ou Blocs Diagramme de Fiabilité (BDF) est une méthode permettant l'analyse de la fiabilité d'un système
- Les BDF est la 1ère méthode utilisée, sont venues ensuite les méthodes de l'arbre des causes (MAC) et l'AMDE

Un diagramme de fiabilité décrit les liens logiques entres les composants d'un système indispensables à la réalisation de sa mission (fonctions)

- Description d'un système réalisée sous forme graphique décrivant le comportant fonctionnel du système par l'intermédiaire de « blocs fonctionnels »
- 2 type d'enchainement de blocs fonctionnels
  - ✓ Systèmes « séries »
  - ✓ Systèmes « parallèles »

- **Système en série**

« Un système composé de plusieurs sous-systèmes est dit en série si la défaillance d'un de ses composants entraîne la défaillance du système »

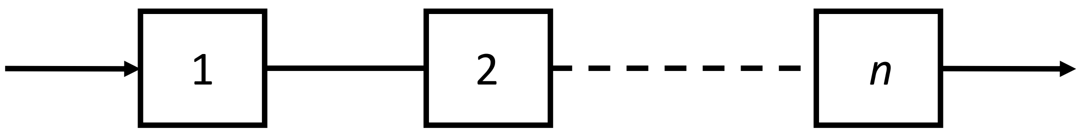


Diagramme en série

$$R(t) = P(E) = P(E_1.E_2...E_n) = P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n)$$

- Comme les sous-systèmes sont indépendants du point de vue de leur défaillances, on obtient :

$$R(t) = P(E) = P(E_1).P(E_2)...P(E_n)$$

$$R(t) = R_1(t).R_2(t)...R_n(t)$$

$$\boxed{R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)}$$

Mathématiques de la Sdf

- *Ri(t)* est la fiabilité du sous système *i*
- *On a R(t)<Ri(t), pour tout i*
- Si le taux de défaillance est constant pour chaque sous système alors la fiabilité du système est :

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \qquad R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$$

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} \qquad R(t) = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)t}$$

- Le taux de défaillance du système est donc :

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad MTTF = MTBF = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sum \lambda_i}$$

- **Système en parallèle**

« Un système composé de plusieurs sous-systèmes est dit en parallèle si le fonctionnement d'au moins 1 sous-système entraîne le fonctionnement du système »

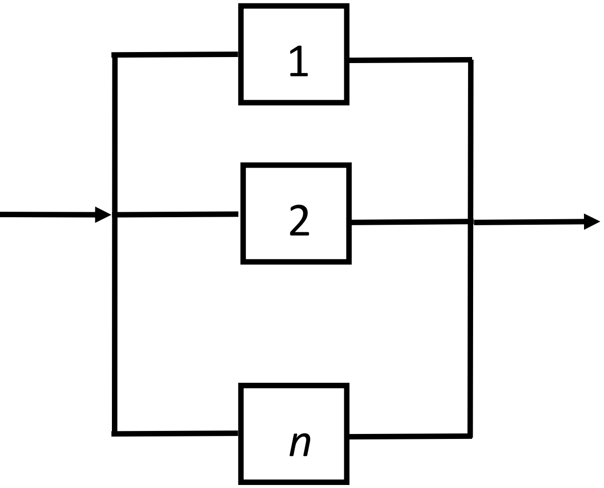


Diagramme en parallèle

- La défaillance du système s'écrit :

$$F(t) = 1 - R(t) = P(X \leq x)$$

$$F(t) = P(\overline{E}) = P(\overline{E_1}.\overline{E_2}\ldots\overline{E_n})$$

$$F(t) = P(\overline{E}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_n})$$

- Si les sous-systèmes sont mutuellement indépendants, la fiabilité du système est :

$$F(t) = P(\overline{E}) = P(\overline{E_1}).P(\overline{E_2})\ldots P(\overline{E_n})$$

$$On\ a\ P(\overline{E_i}) = 1 - P(E_i) = 1 - R_i(t)$$

$$d'ou\ F(t) = P(\overline{E}) = (1 - R_1(t)).(1 - R_2(t))\ldots(1 - R_n(t))$$

$$R(t) = 1 - \Pi_{i=1}^{n}\big(1 - R_i(t)\big)$$

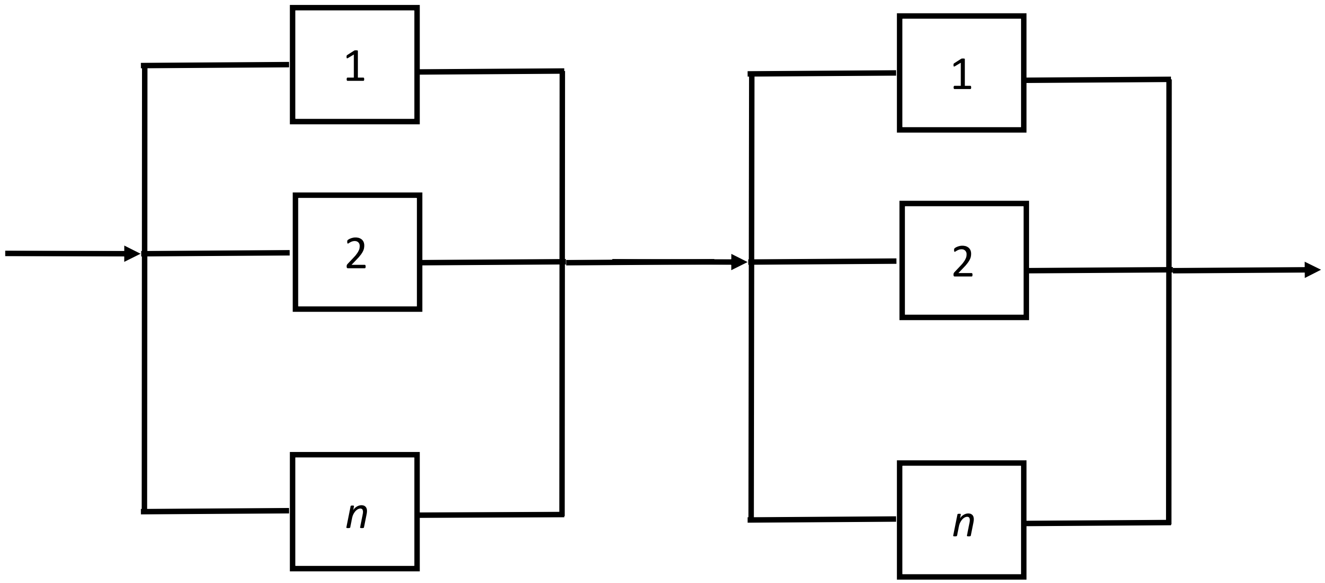
- Dans le cas ou le taux de défaillance est constant :

$$R(t) = 1 - \Pi_{i=1}^{n}\big(1 - e^{-\lambda_i t}\big)$$

- Si tous les sous-systèmes ont le même taux de défaillance, on obtient :

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

- **Systèmes mixtes : parallèle – série**



Ensemble 1 *Ensemble i*

- La fiabilité d'un ensemble j est donné par :

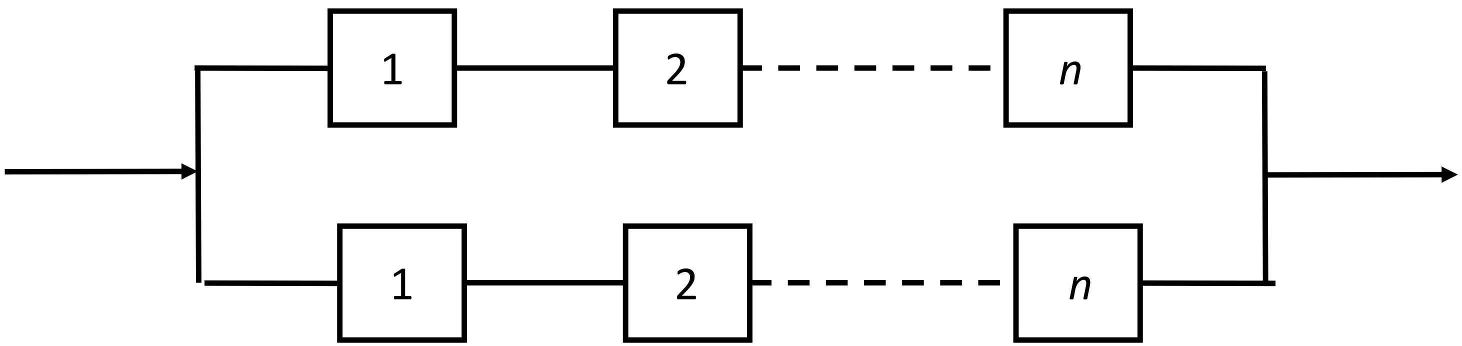
$$R_j(t) = 1 - \Pi_{i=1}^{n}\big(1 - R_{ij}(t)\big)$$

$R_{ij}(t)$ est la fiabilité de l'élément i du jème ensemble

- La fiabilité du système globale est :

$$R(t) = \Pi_{j=1}^{n}\left(1 - \Pi_{i=1}^{k}(1 - R_{ij}(t))\right)$$

- **Systèmes mixtes : série - parallèle**



- La fiabilité d'une branche série est :

$$R(t) = \Pi_{i=1}^{k} R_{ij}(t)$$

- La fiabilité du système est :

$$R(t) = 1 - \Pi_{i=1}^{k} \left(1 - \Pi_{i=1}^{k} R_{ij}(t) \right)$$

- **Systèmes complexes**

Pour les systèmes complexes, on utilise le théorème des probabilités totales