

Akustik – Elastizitätsmodul und Physik der Gitarre

Denise Köhn und Christine Falter

Inhalt

1	Schallgeschwindigkeit in Festkörpern	2
1.1	Physikalische Grundlagen	2
1.2	Versuchsdurchführung.....	2
1.3	Auswertung	3
2	Physik der Gitarre.....	7
2.1	Versuchsziel	7
2.2	Allgemeine Grundlagen.....	7
2.3	Versuchsaufbau	8
2.4	Schwebung	8
2.4.1	Physikalische Grundlagen.....	8
2.4.2	Versuchsdurchführung.....	8
2.4.3	Auswertung	8
2.5	Bestimmung der Saitenspannung.....	12
2.5.1	Physikalische Grundlagen.....	12
2.5.2	Versuchsdurchführung.....	12
2.5.3	Auswertung	13
2.6	Aufnahme des Frequenzspektrums	15
2.6.1	Physikalische Grundlagen.....	15
2.6.2	Versuchsdurchführung.....	15
2.6.3	Auswertung	15
3	Fazit.....	17
4	Anhang	18
5	Programme	21

Im Rahmen des Akustik Versuches wurde die Schallgeschwindigkeit in Luft und in Festkörpern, sowie einige Phänomene, die sich im Zusammenhang mit den Schwingungen einer Gitarrensaite beobachten lassen untersucht. Im Folgenden soll anhand der Schallgeschwindigkeit in Festkörpern das Elastizitätsmodul eben dieser bestimmt werden, sowie die Schwebung, die Saitenspannung und das Obertonspektrum einzelner Gitarrensaiten untersucht werden.

1 Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

1.1 Physikalische Grundlagen

Schallwellen können sich in Festkörpern durch die Kopplung der Atome ausbreiten, wobei in diesem speziellen Fall die longitudinale Anregung diskutiert werden soll. Die Geschwindigkeit hängt dabei vom Druck ρ sowie von dem Elastizitätsmodul E ab:

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1-1)$$

Das Elastizitätsmodul gibt an, wie sich das Material in Abhängigkeit der angelegten Zugspannung ausdehnt:

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L} \quad (1-2)$$

Regt man den Stab nun durch geeignetes Anschlagen zu seiner Grundschiwingung an, entsteht eine stehende Welle mit der Wellenlänge $\lambda_0 = 2L$. Misst man deren Frequenz f_0 , so folgt für das Elastizitätsmodul mit $v = \lambda f$:

$$E = 16f_0^2 LM \cdot \frac{1}{\pi D^2} \quad (1-3)$$

Wobei M die Masse des Stabes und D der Durchmesser desselben ist. Messbar ist die Anregung, da der Schwingende Stab die Luft ebenfalls in Schwingung versetzt, wodurch eine Schallwelle entsteht, welche man hören kann.

1.2 Versuchsdurchführung

Mithilfe dieses Zusammenhangs, von Grundschiwingung und Elastizitätsmodul, wurde für vier Materialien (Eisen, Messing, Aluminium und Kupfer) das Elastizitätsmodul bestimmt. Dazu wurde ein aus dem entsprechenden Material bestehende Stab mit einem Gummihammer zur Grundschiwingung angeregt, wobei darauf geachtet wurde, dass dieser nur an zwei Punkten Kontakt mit dem Aufbau hatte, so dass er möglichst frei schwingen konnte (Abb. 1).

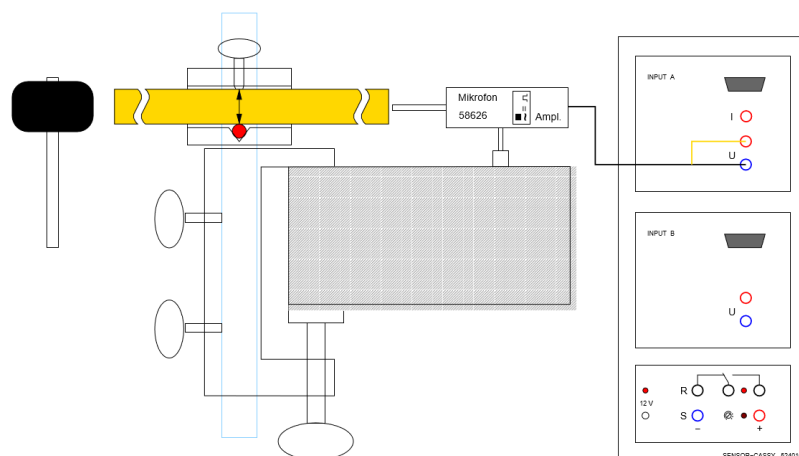


Abb. 1: Versuchsaufbau mit Gummihammer und Messwerterfassung durch CASSY

Nachdem der Stab zu einer möglichst sauberen Schwingung angeregt wurde, kann mit einem Mikrofon, welches in ca. 5mm Abstand zum anderen Stabende aufgestellt wurde die Schwingung aufgezeichnet und die Frequenz bestimmt werden. Folgende Messwerterfassungseinstellungen wurden verwendet:

Dauer der Messung [ms]	800
Intervall [μ s]	50
Anzahl	16000

Der Bereich, in dem die Spannungen gemessen wurde lag bei $\pm 3V$. Während der Messungen wurden die Frequenzen immer wieder durch eine Fast Fourier Transformation mit dem CASSY abgeschätzt, um die Qualität der durchgeführten Messungen abzuschätzen und Störeffekte durch unpassendes Anschlagen des Stabes, sowie Störungen durch andere im Raum durchgeführte Versuche zu minimieren. Außerdem müssen die Masse sowie die Länge und der Durchmesser des Stabes bestimmt werden. Wofür eine Waage, ein Maßband der Güteklasse II sowie eine Mikrometerschraube verwendet wurden.

1.3 Auswertung

Zunächst wurde der Durchmesser der Stäbe bestimmt, wobei an mehreren Stellen gemessen wurde, um eine evtl. Elliptizität der Stäbe zu berücksichtigen. Anschließend wurde der Mittelwert \bar{D} sowie die Standardabweichung σ_D gemäß den Formeln:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^N D_i}{N} \quad (1-4)$$

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N (D_i - \bar{D})^2 \right)} \quad (1-5)$$

Der Fehler auf den Mittelwert ergibt sich durch $\sigma_{\bar{D}} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{N}}$. Dabei ist N die Anzahl der Messwerte. Folgende Werte wurden so bestimmt:

	Aluminium	Kupfer	Messing	Stahl
Gem. Werte [mm]	11,91	11,96	11,98	12,00
	11,95	11,96	11,99	11,99
	12,01	11,96	11,98	11,99
	12,02	11,96	11,98	11,99
	11,89	11,95	12,01	12,09
Mittelwert [mm]	11,96	11,96	11,99	12,01
Std. Abweichung [mm]	0,0581	0,0045	0,0130	0,0438
Ergebnis ¹ [mm]	11,96 \pm 0,03	11,96 \pm 0,00	11,99 \pm 0,01	12,01 \pm 0,02

Außerdem wurden für alle Stäbe die Länge und das Gewicht bestimmt:

	Aluminium	Kupfer	Messing	Stahl
Länge [m]	1,300	1,299	1,299	1,500
Masse [kg]	0,4074	1,3015	1,2373	1,3249

Zur Bestimmung der Frequenz wurden jeweils mehrere Messreihen aufgenommen und dann mit einer Fast-Fourier-Transformation die Frequenz bestimmt. Die Grundfrequenz wurde dann anschließend mit der Peakschwerpunkt-Methode der Praktikumsbibliothek in Python bestimmt. Beispielhaft dargestellt ist diese Art der Analyse für eine Messung der Grundschiwingung des Kupferstabes in Abb. 2.

¹ Hier werden die Werte auf zwei Nachkommastellen genau angegeben, gerechnet wurde in den Programmen hingegen mit den vollständigen Werten

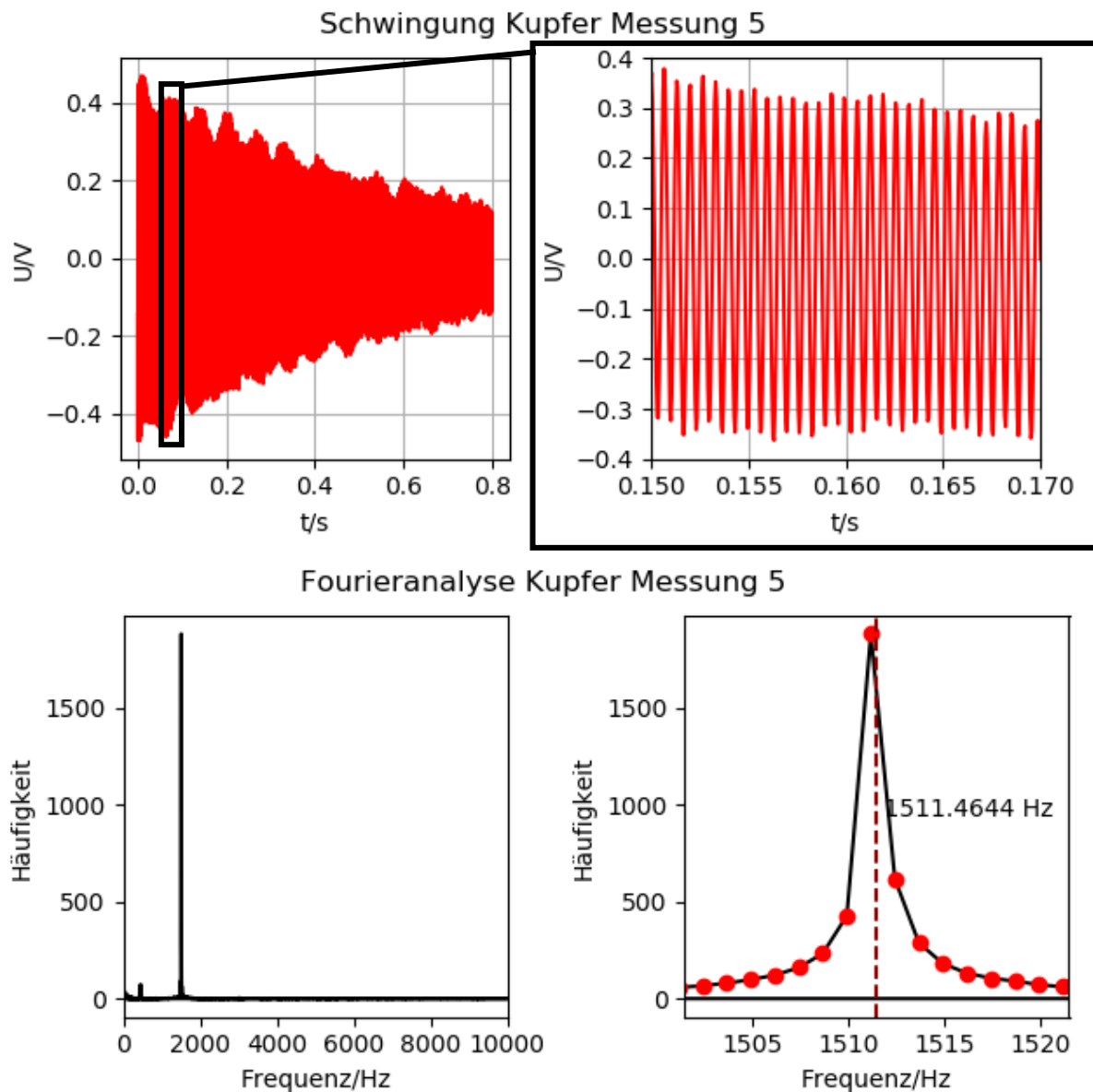


Abb. 2: Analyse der Schwingung des Kupferstabes. Dargestellt sind die Rohdaten einmal vollständig (oben links) und einmal vergrößert (oben rechts) sowie die vollständige Frequenzanalyse (unten links) sowie eine nähere Analyse mit Peakbestimmung der relevanten Grundschwingung (unten rechts)

Analog zu (1-4) und (1-5) können dann empirisch der Mittelwert und die Standardabweichung (bzw. daraus dann der statistische Fehler auf den Mittelwert) berechnet werden. Bei der Auswertung wurde Messung 6 der Messung mit Messing ausgespart, da sich hier eine deutliche Schwebung (wahrscheinlich durch Kollision mit Anschlag einer anderen Gruppe) zeigte und so von einer verfälschten Messung ausgegangen werden muss. Weitere Probleme entstanden bei Messung der Grundfrequenz des Eisenstabs, da es schwer war, diesen exakt so anzuschlagen, dass keine Obertöne entstehen.

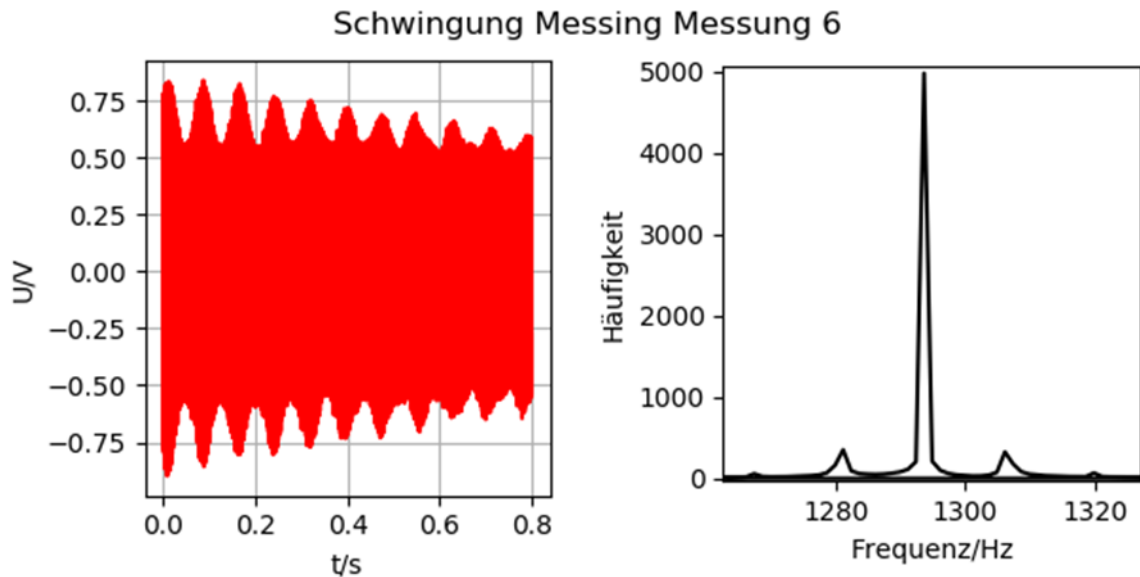


Abb. 3: Messung Messing mit Rohdaten (links) und Frequenzspektrum (rechts)

Folgende Frequenzen konnten gemessen werden:

	Aluminium	Kupfer	Messing	Stahl
Einzelwerte [Hz]	1967,4407	1511,6354	1293,7112	1728,2410
	1967,5455	1511,6020	1293,8400	1728,1691
	1967,5600	1511,5214	1293,7041	1728,1929
	1967,5553	1511,5023	1293,8590	1728,1218
	1967,5071	1511,4644	1293,7201	1728,2574
	---	---	1293,8135	1728,2431
Ergebnis [Hz]	$1967,5217 \pm 0,0223$	$1511,5451 \pm 0,0318$	$1293,7746 \pm 0,0288$	$1728,2203 \pm 0,0685$

Um den wahren Frequenzwert besser zu ermitteln wurde außerdem der Betrag der Fouriertransformierten explizit in einem Intervall von $\pm 1\text{Hz}$ mit einer Schrittweite von $0,1\text{Hz}$ um den durch die FFT ermittelten Wert berechnet, wobei folgende Formel verwendet wurde:

$$|a(f)| \sim \sqrt{\left[\sum_{i=1}^n u_i \cdot \cos(2\pi f t_i) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n u_i \cdot \sin(2\pi f t_i) \right]^2} \quad (1-6)$$

Man kann nun die so ermittelten Werte ebenfalls mit Python grafisch auswerten, in dem man den Maximalwert der Transformierten bestimmt. Aus diesen kann dann ebenfalls der Mittelwert zzgl. Fehler gebildet werden. Allerdings muss darauf geachtet werden, dass die Fehler nicht kleiner als die Digitalisierung werden, was bei der Messung für Stahl der Fall war. Hier wurde also als Fehler der Digitalisierungsfehler mit $\sigma_{dig} = \frac{\Delta d}{\sqrt{12}} \approx 0,029\text{Hz}$ angenommen, wobei von einer Gleichverteilung der tatsächlichen Frequenzwerte innerhalb des Intervalls ausgegangen wurde. Es ergaben sich die folgenden, angepassten Werte:

	Aluminium	Kupfer	Messing	Stahl
Ergebnis [Hz]	$1967,2017 \pm 0,0363$	$1511,4851 \pm 0,0556$	$1293,5855 \pm 0,0347$	$1727,9370 \pm 0,0289$

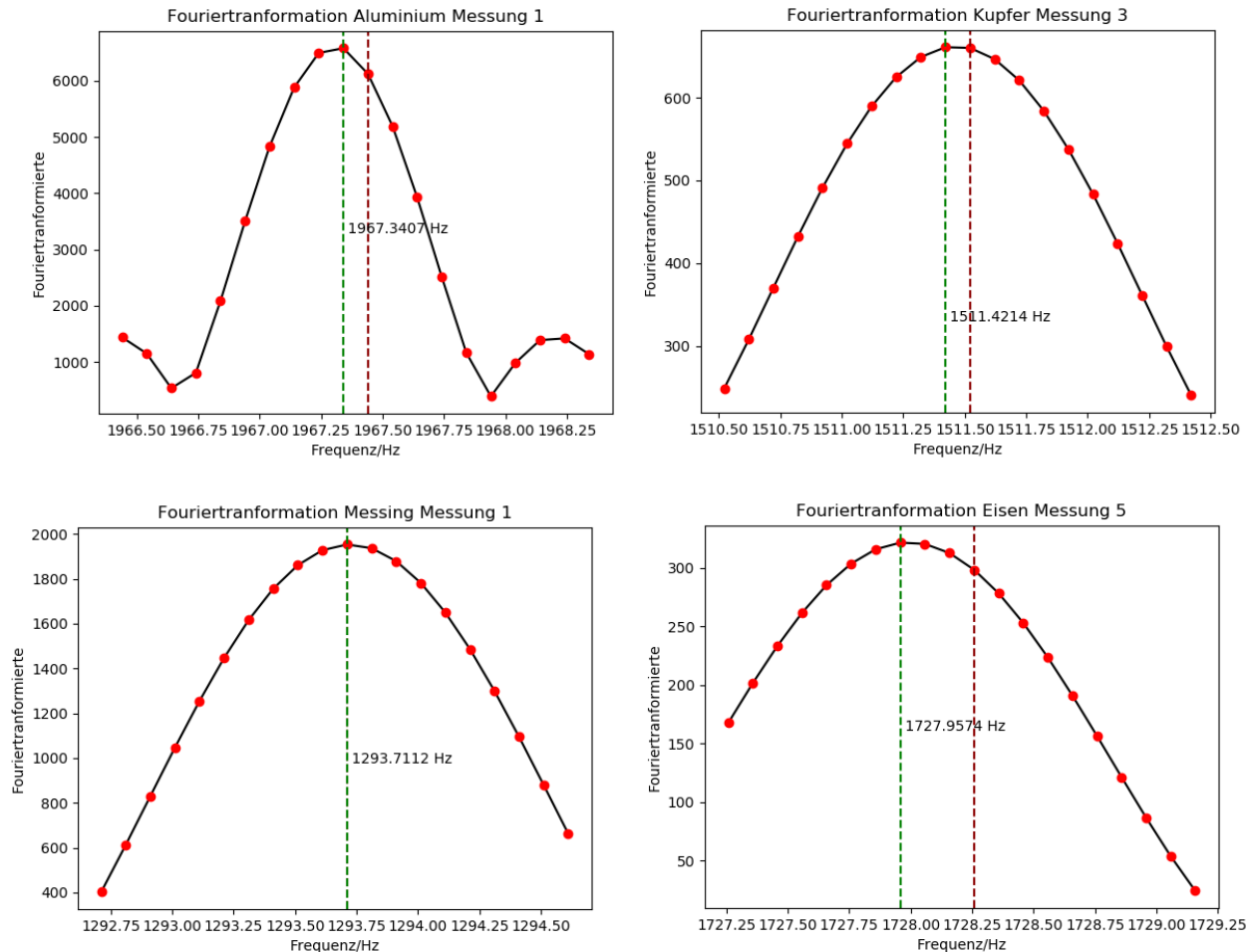


Abb. 4: Vier beispielhafte Analysen der explizit berechneten Fouriertransformaten, wobei in Rot jeweils der durch die FFT ermittelte Frequenzwert dargestellt ist und in grün das Maximum der Transformaten mit dem entsprechenden Wert

Außerdem wurden sowohl die Schallgeschwindigkeit in dem jeweiligen Material, sowie das Elastizitätsmodul gemäß (1-3) berechnet:

	Aluminium	Kupfer	Messing	Stahl
Schallgeschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$	$5114,72 \pm 1,14$	$3926,84 \pm 0,88$	$3201,11 \pm 0,75$	$5183,81 \pm 1,00$
Literaturwert ² $\left[\frac{m}{s}\right]$	5110	3800	3500	5100
Elastizitätsmodul $[10^{11} \text{ Pa}]$	$0,7302 \pm 0,0032$	$1,3757 \pm 0,0006$	$0,9528 \pm 0,0016$	$2,0951 \pm 0,0069$
Literaturwert ³ $[10^{11} \text{ Pa}]$	0,7	1,0-1,3	0,8-1,2	2,1

Die Fehler auf die Werte wurden durch Gaußsche-Fehlerfortpflanzung berechnet, wobei ausgenutzt wurde, dass gilt:

$$\left(\frac{\sigma_{a^n \cdot b^m}}{a^n \cdot b^m}\right)^2 = \left(n \frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(m \frac{\sigma_b}{b}\right)^2 \quad (1-7)$$

Als Fehler auf die Längen- und die Gewichtsmessung wurde das kleinste Messintervall angenommen, sowie eine Gleichverteilung des tatsächlichen Wertes innerhalb dieses. Betrachtet man die relativen

² <https://www.ld-didactic.de/software/524221de/Content/ExperimentExamples/Physics/Mechanics/VelocitySoundSolids.htm>

³ https://de.wikipedia.org/wiki/Elastizitätsmodul#Typische_Zahlenwerte

Fehler auf die einzelnen Werte, so erkennt man, dass der relative Fehler auf den Durchmesser den größten Einfluss auf die Messung hat:

	σ_L/L	σ_D/D	σ_f/f	σ_m/m
Aluminium	0,000222	0,002175	0,000018	0,000709
Kupfer	0,000222	0,000167	0,000037	0,000222
Messing	0,000222	0,000834	0,000028	0,000834
Stahl	0,000192	0,001632	0,000017	0,000218

Wobei die Fehler so gerundet wurden, dass der kleinste noch zwei signifikante Nachkommastellen hat. Der relative Fehler auf D und f gehen doppelt in den Fehler auf E ein, daher fällt besonders der Fehler auf D ins Gewicht. Auch der Fehler auf m scheint signifikanten Einfluss zu haben, während der Fehler auf die Frequenz sehr klein ist und nur minimal Einfluss auf das Ergebnis hat.

Insgesamt konnten die Literaturwerte bestätigt werden, wobei beachtet werden muss, dass der Vergleich nur begrenzt möglich ist, da die Literaturwerte zum einen bei 20 °C angegeben sind, außerdem lassen sich sehr unterschiedliche Werte finden was einen sinnvollen Vergleich zusätzlich erschwert.

2 Physik der Gitarre

2.1 Versuchsziel

Ziel der Versuchsreihe an der Gitarre ist es, physikalische Tatsachen aus dem Bereich der Akustik anschaulich an einem Gegenstand des Alltags zu beobachten. Dabei wird ein besonderer Fokus auf die Beobachtung der Schwebung, das Aufschlüsseln des Frequenzspektrums einer Saite und die Berechnung der Saitenspannung der Saiten gelegt.

2.2 Allgemeine Grundlagen

Zum besseren Verständnis der Versuchsdurchführung ist noch einmal der Aufbau einer Gitarre dargestellt (Abb. 5). Eine Gitarre besitzt sechs Nylonsaiten, wobei die drei tiefsten Saiten noch einmal mit Metallfäden umwickelt sind:

Saite / Ton	Frequenz (Hz)
e'	329,63
b	246,94
g	196,00
d	146,83
A	110,00
E	82,41

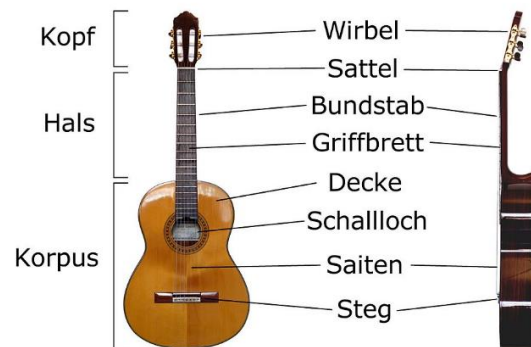


Abb. 5: Aufbau einer Gitarre mit Beschriftungen

Schlägt man eine Saite an, so ergibt sich eine stehende Welle, da beide Enden der Saite fest eingespannt sind. Dabei ist aber nicht nur die Grundschiwingung zu beobachten, sondern auch die verschiedenen Oberschwingungen lassen sich in einem Frequenzspektrum deutlich erkennen. Für die Wellenlängen gilt:

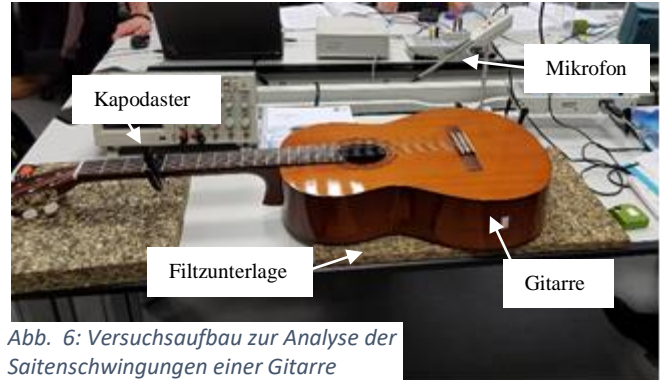
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (2-1)$$

Wobei $n = 1$ die Grundschiwingung charakterisiert und $n \geq 2$ die Oberschwingungen. Die Schwingung einer Saite lässt sich durch die Summe ihrer Moden darstellen:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x) \quad (2-2)$$

2.3 Versuchsaufbau

Für die Messung wird eine Akustikgitarre auf eine Filzunterlage gelegt, um Interferenz mit dem Tisch zu vermeiden. Über dem Schallloch wird ein Schalldruckempfänger der Marke LEYBOLD DIDACTIC GmbH platziert, welches auf Amplitudenmodus gestellt wird. Dabei wird die Empfindlichkeit geeignet gewählt. Das Mikrofon wird an das Sensor-CASSY angeschlossen, um stellvertretend für den Schall die Spannung aufzuzeichnen.



Zwischen jeder Messung wird die Gitarre mit einem Stimmgerät nachgestimmt, um das Ergebnis der Messung besser beurteilen zu können.

2.4 Schwebung

2.4.1 Physikalische Grundlagen

Durch das Anzupfen zweier Saiten lässt sich eine sogenannte Schwebung mit den Frequenzen

$$\omega_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \text{ und } \omega_{res} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \quad (2-3)$$

erzeugen.

2.4.2 Versuchsdurchführung

Zuerst wird das Instrument komplett gestimmt. Dann werden zwei Saiten gleichzeitig angeschlagen, wobei eine der Saiten vorher leicht verstimmt wird, um eine Schwebung zu erzeugen. Die tiefere der beiden Saiten wird vor dem Anschlagen im 5. Bund gegriffen, sodass, wäre die eine Saite nicht verstimmt, derselbe Ton erklingen würde. Sobald die Schwebung aufgezeichnet wurde, wird die Stimmmechanik ein wenig zurückgedreht und die Messung wiederholt. Im Anschluss werden die aufgezeichneten Schwebungen anhand einer FFT schon einmal grob ausgewertet. Folgende Messungen wurden durchgeführt:

Messung	Saiten		Messwerterfassungseinstellungen		
	Freie	5. Bund	Dauer der Messung [ms]	Intervall [μ s]	Anzahl
1	g	d	800	50	16000
2	g	d	1600	100	16000
3	g	d	1600	100	16000
4	d	a	1600	100	16000
5	d	a	3200	200	16000
6	d	a	3200	200	16000
7	d	a	8000	500	16000

Wobei längere Messungen durchgeführt wurden, um eine bessere Auflösung der Frequenzspektren zu erreichen.

2.4.3 Auswertung

Zur Auswertung wurde mithilfe von Python eine Fast-Fourier-Transformation der Rohdaten durchgeführt und graphisch dargestellt. Schon in der Darstellung der Rohdaten ist das Phänomen der Schwebung, also sowohl die Schwebungsbäuche und -knoten der Einhüllenden sowie die höhere Frequenz im Inneren dieser, deutlich erkennbar. Auch im Frequenzspektrum sieht man immer zwei leicht verschobene Peaks nebeneinander, dies sind die Fundamentalfrequenzen ω_1 und ω_2 . Auch mehrere Ordnungen dieser sind erkennbar (Abb. 7). In den Messungen 1 und 2 sind aufgrund der niedrigen Auflösung des Frequenzspektrums erst in der dritten Ordnung zwei diskrete Peaks erkennbar, weshalb für diese Messungen die dritte Ordnung ausgewertet wurde (Abb. 8). Für eine quantitative

Analyse wurden, die zu den Peaks im Frequenzspektrum gehörigen Frequenzen mithilfe der Schwerpunktmethode der Praktikumsbibliothek ermittelt. Folgende Frequenzen ergaben sich dabei:

Messung	Frequenzen aus Fast-Fourier-Transformation	
	Frequenz 1 [Hz]	Frequenz 2 [Hz]
1	192,5652	195,6893
2	193,6054	195,4683
3	191,8243	195,4656
4	143,9027	146,9542
5	143,9361	146,6137
6	145,1118	146,6282
7	145,1621	146,4024

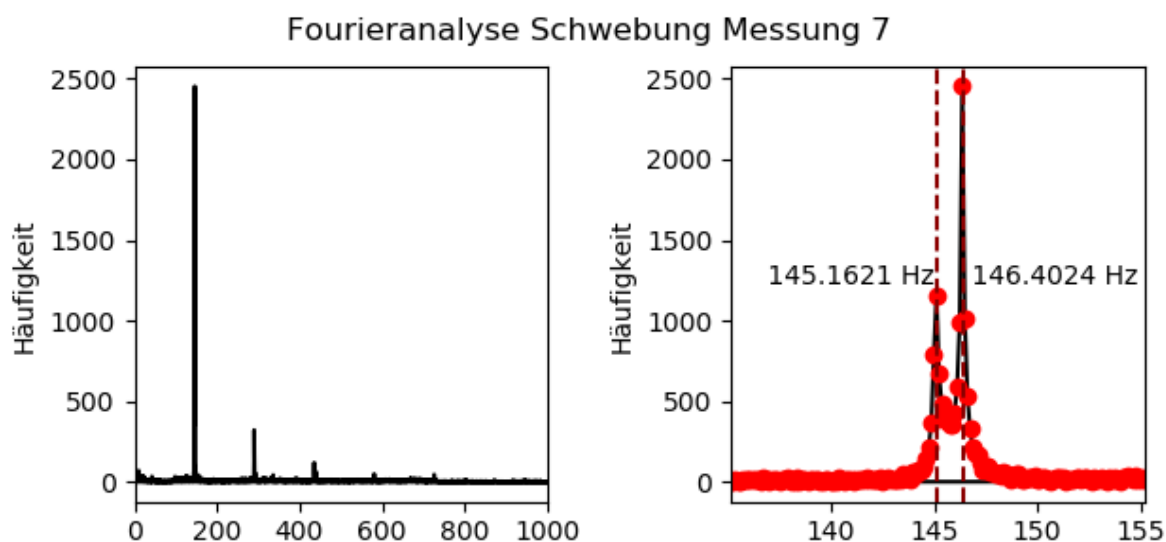
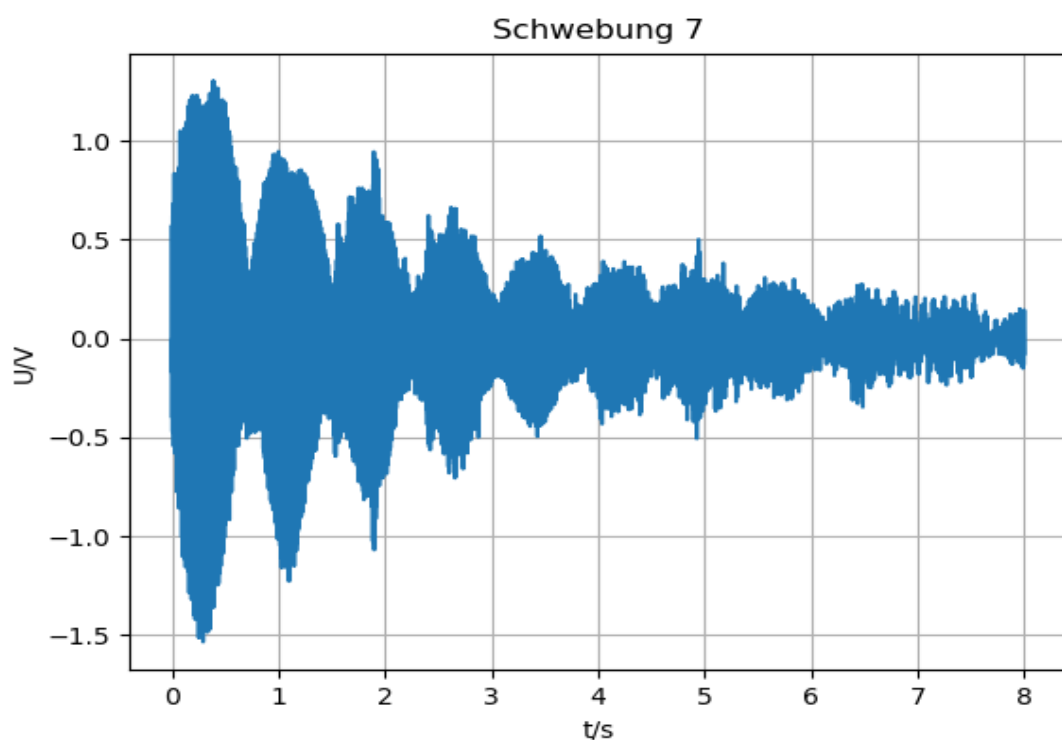


Abb. 7: Rohdatenplot einer Schwebung (oben) und das vollständige Frequenzspektrum (unten links) sowie eine größere Ansicht mit Peakbestimmung (unten rechts)

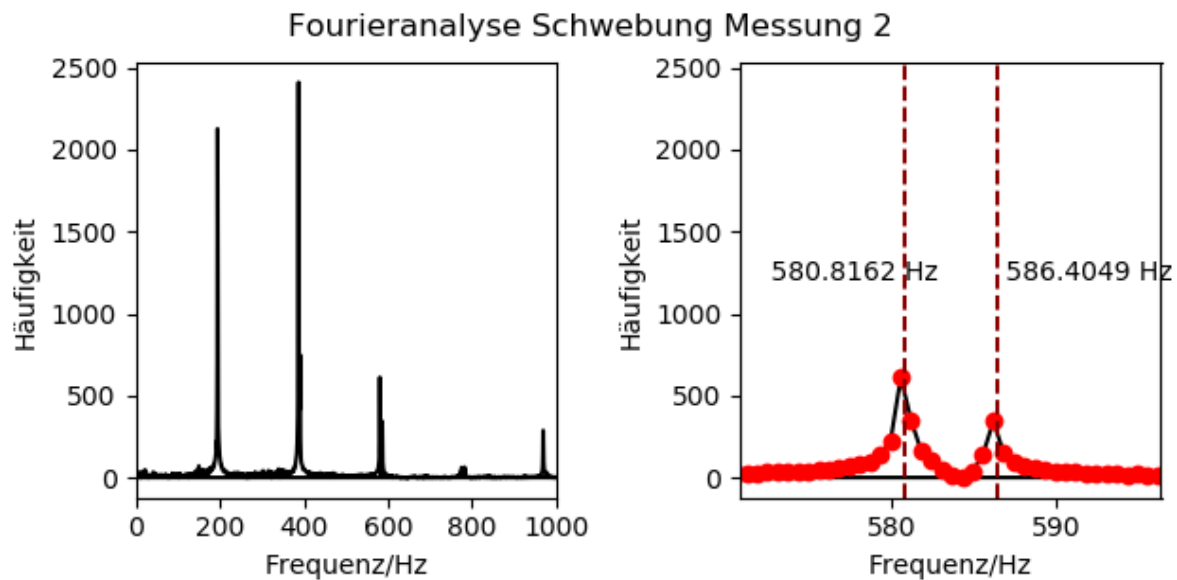


Abb. 8: Beispielhafte Fourieranalyse einer Schwebung anhand der 2. Messung mit vollständigem Frequenzspektrum (links) und vergrößerter Darstellung der 3. Ordnung mit Peakbestimmung

Eine weitere interessante Beobachtung ließ sich bei Messung 1 machen. In dieser Messung konnte man zusätzlich zu den erwarteten Peaks um 196 Hz noch weitere um 147 Hz beobachten. Es wurde also zeitgleich eine Messung einer anderen Gruppe aufgezeichnet, welche eine Schwebung mit der d-Saite erzeugt haben (Abb. 9).

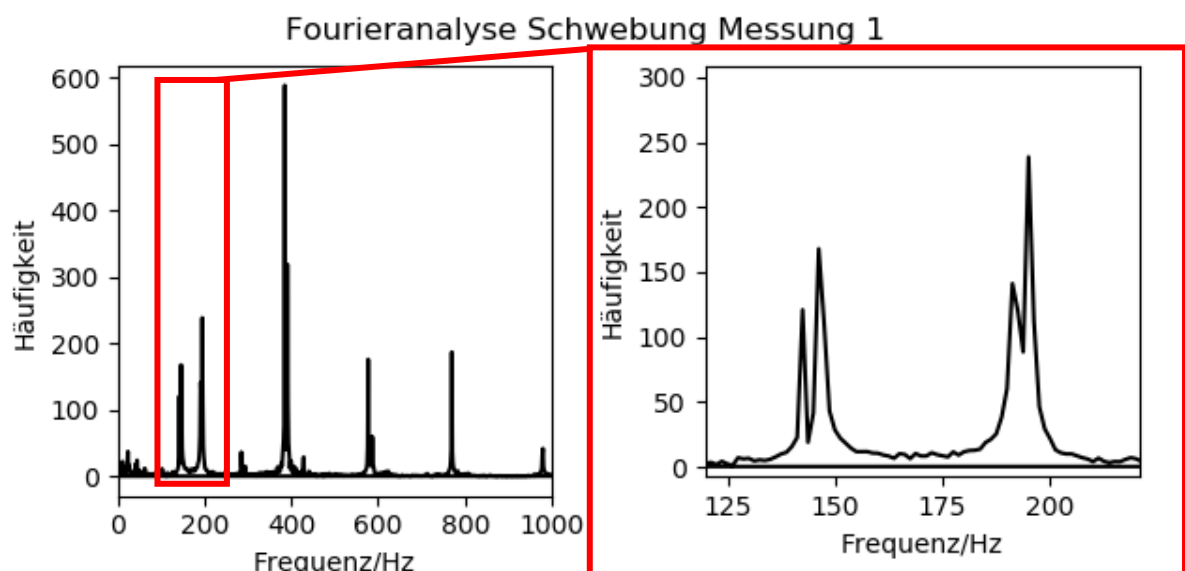
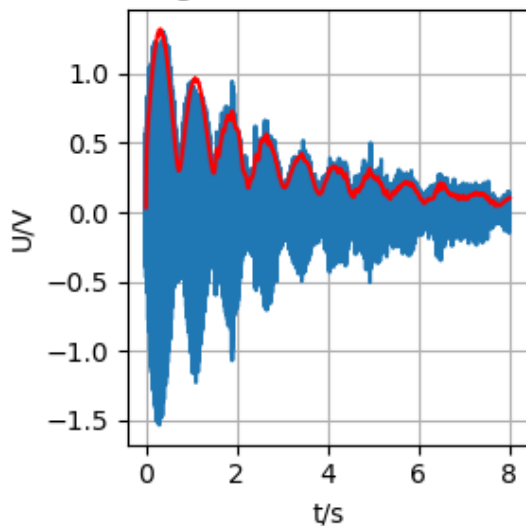


Abb. 9: Vollständiges Frequenzspektrum der 1. Messung in dem beide Schwebungen erkennbar sind (links) sowie vergrößerte Ansicht der 1. Ordnung beider Schwebungen (rechts)

Aus den Frequenzen des Fourierspektrums kann man gemäß (2-3) die Schwebungs- und die resultierende Frequenz berechnen. Um zu überprüfen ob diese, aus dem Fourierspektrum berechneten Frequenzen mit dem aufgezeichneten Bild der Schwingung übereinstimmen kann man mithilfe von Python so etwas wie eine Einhüllende um die Schwingung legen und aus dem Ort der Peaks die Periodendauer und somit die Frequenz der Schwebung berechnen (Abb. 10).

Schwebung mit Einhüllender Messung 7



Peakbestimmung

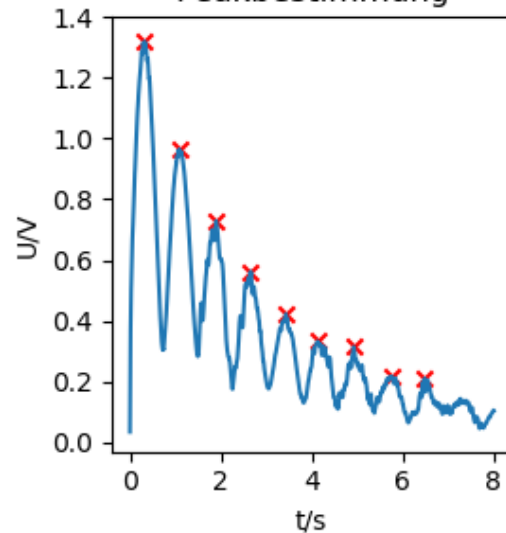


Abb. 10: Einhüllendenanpassung an die Rohdaten der Schwebung (links) und Bestimmung der Peaks dieser zur Ermittlung der Position der Schwebungsbüuche

Will man aus den Messdaten außerdem die resultierende Frequenz ermitteln so kann man die einzelnen Peaks bestimmen und daraus wieder die Frequenz berechnen (Abb. 11). Für Messung 1 war dies aufgrund der starken Störung der Messung durch die 2. Schwebung der anderen Gruppe nicht möglich.

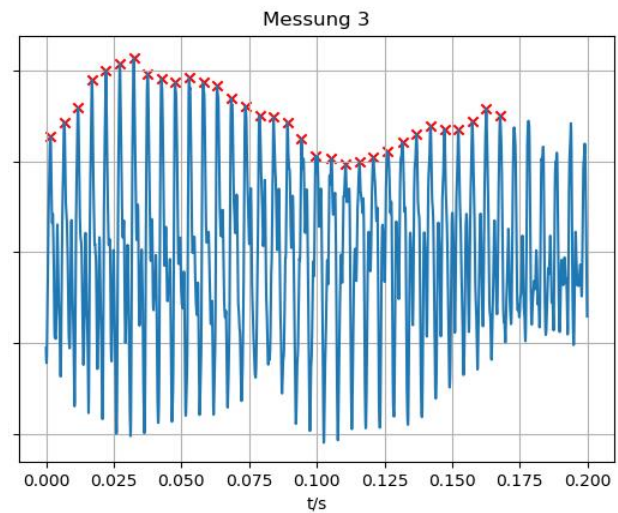
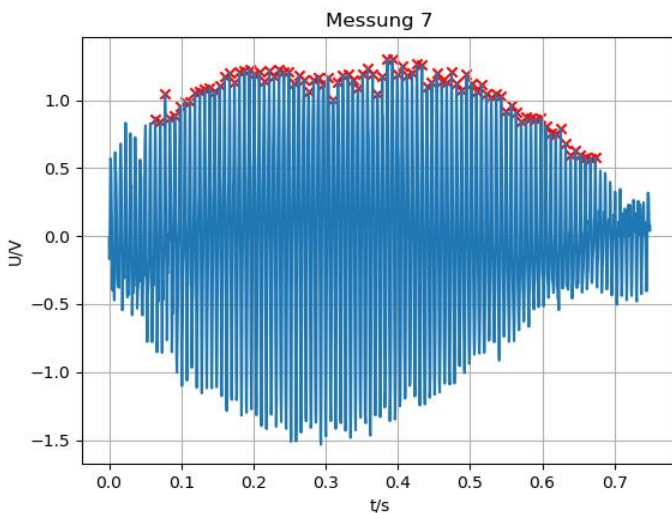


Abb. 11: Peakbestimmung der Rohdaten zur Berechnung der resultierenden Frequenz. Zum einen Messung 7, bei der die Bestimmung der Peaks einwandfrei möglich war (links) und zum anderen Messung 3, bei der die einzelnen Peaks Zacken aufweisen und es starke Störungen durch kleinere Peaks gab (rechts)

Folgende Frequenzen ergaben sich so:

Messung	Schwebungsfrequenz [Hz]		Resultierende Frequenz [Hz]	
	aus FFT	aus Peaks	aus FFT	aus Peaks
1	$1,5621 \pm 0,0601$	$3,1387 \pm 0,6869$	$194,1273 \pm 0,0601$	---
2	$0,9315 \pm 0,0301$	$1,8664 \pm 0,0217$	$194,5368 \pm 0,0301$	$193,7173 \pm 0,5800$
3	$1,8207 \pm 0,0301$	$1,8123 \pm 0,7534$	$193,6450 \pm 0,0301$	$192,5391 \pm 1,0482$
4	$1,5257 \pm 0,0902$	$1,5487 \pm 0,0207$	$145,4285 \pm 0,0902$	$146,1039 \pm 0,6188$
5	$1,3388 \pm 0,0451$	$1,3099 \pm 0,0513$	$145,2749 \pm 0,0451$	$145,5133 \pm 0,8827$
6	$0,7582 \pm 0,0451$	$0,7478 \pm 0,0706$	$145,8700 \pm 0,0451$	$145,8157 \pm 0,8588$
7	$0,6201 \pm 0,0180$	$0,6455 \pm 0,0240$	$145,7822 \pm 0,0180$	$146,0213 \pm 0,5966$

Die Fehler auf die aus den Peaks bestimmten Frequenzen ergeben sich durch Fortpflanzung von $\sigma_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}}$ auf f_{peaks} in Analogie zu (1-7). Diese variieren stark in ihrer Größe, da je nach Qualität der Messung nur eine begrenzte Zahl an Peaks ausgewertet werden konnte und die Peaks teilweise deutliche Zacken aufwiesen, sodass eine genaue Bestimmung nicht immer gut möglich war⁴. Die Fehler auf f_{FFT} wurden abgeschätzt indem die mittlere Intervallbreite, welche Abhängig von den gewählten Messwerterfassungseinstellungen ist berechnet wurde und dann von einer Gleichverteilung des tatsächlichen Wertes innerhalb dieses ausgegangen wurde, sodass gilt: $\sigma_{f_{FFT}} = \frac{\Delta f}{\sqrt{12}}$, dieser wurde ebenfalls fortgepflanzt. Im Allgemeinen stimmen die Frequenzen im Rahmen der möglichen Messgenauigkeit überein, allerdings fällt auf, dass für die Messungen 1 und 2 die aus den Peaks berechnete Frequenz (rot markiert) ungefähr doppelt so hoch ist, wie die, die die FFT liefert.

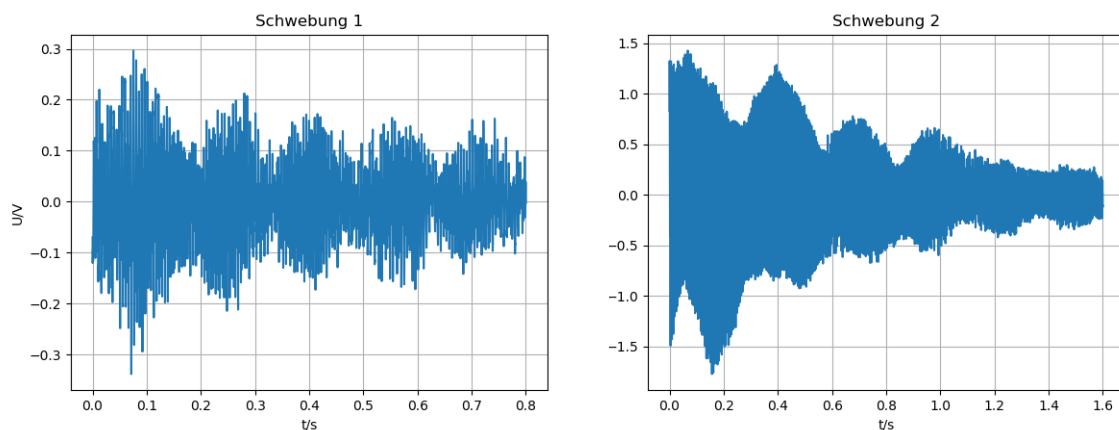


Abb. 12: Rohdaten der Messungen 1 (links) und 2 (rechts)

Bei Messung 1 ist die in den Rohdaten erkennbare Schwebungsfrequenz offensichtlich zu klein, was vermutlich an der Überlagerung der Messungen liegt. Außerdem treten in beiden Messungen auffällig viele zusätzliche, kürzere Peaks auf, welche teilweise sogar andere Schwebungsbäuche zu bilden scheinen, sodass von einer Störung der Messung ausgegangen werden muss (Abb. 12).

2.5 Bestimmung der Saitenspannung

2.5.1 Physikalische Grundlagen

Die Materialeigenschaften der Saite beeinflussen die Schwingung eben dieser. Analog zu (1-1) gilt für das Verhältnis von Saitenspannung T zum Massenbelag μ :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2-4)$$

Hieraus folgt mit (2-1):

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2-5)$$

2.5.2 Versuchsdurchführung

Zur Bestimmung der Saitenspannung werden für zwei verschiedene Saiten die Frequenzen sowohl der Leersaite als auch der in verschiedenen Bündeln gegriffenen Saite aufgezeichnet und ausgewertet. Dabei wird das Instrument nach jeder Messung nachgestimmt. Für diesen Versuch wurde ein

⁴ 2 weitere Anpassungen zu Messungen 3 und 4 mit Peakbestimmung sind in Anhang 1 zu finden

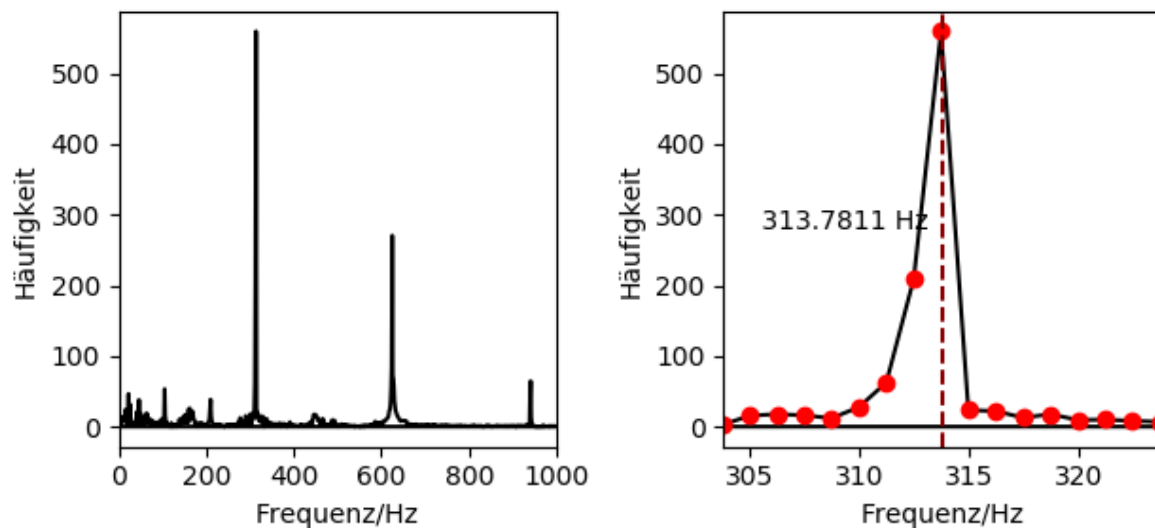
Messintervall von $\pm 3V$ gewählt. Gemessen wurde an der d-Saite und an der b-Saite. Zunächst wurde überprüft, dass die gemessenen Frequenzen der Leersaite mit dem Literaturwert übereinstimmen. Anschließend wurde, um die Aufzeichnung eines gleichmäßigen Tones zu gewährleisten ein Kapodaster der Marke Harley Benton jeweils im 2., 4., 6., 8. und 10. Bund angebracht. Gemessen wurde mit den folgenden Messwerterfassungseinstellungen:



Dauer der Messung [ms]		800
Intervall [μs]		50
Anzahl		16000

2.5.3 Auswertung

Fourieranalyse b Saite im Bund 4



Fourieranalyse d Saite im Bund 0

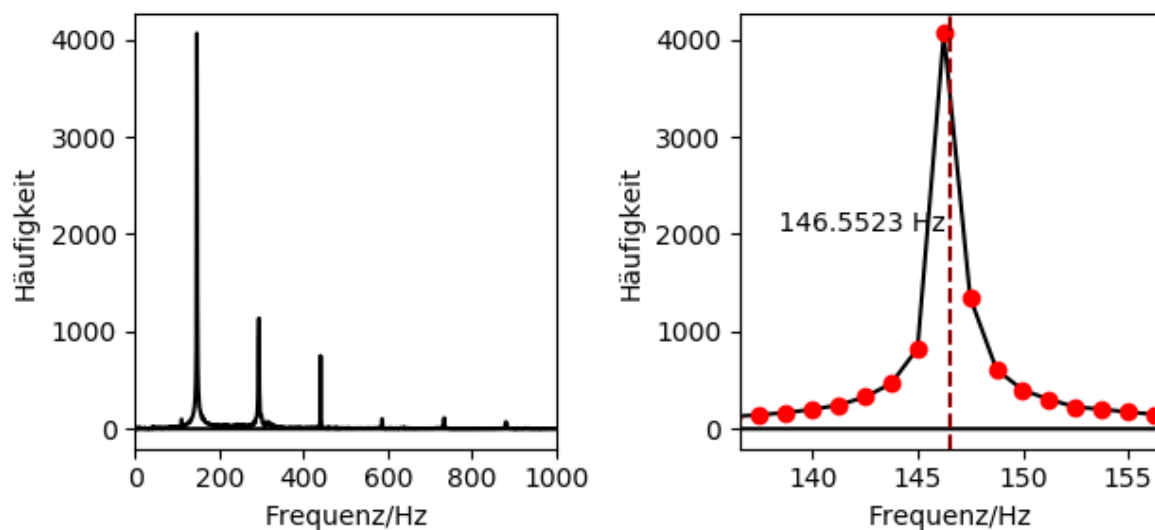


Abb. 13: Beispielhafte Auswertung des Fourierspektrums für die b Saite im 4. Bund (oben) sowie für die leere d Saite (unten)

Zunächst wurden wie auch in den vorherigen Versuchen mithilfe einer Fast Fourier Transformation die Frequenzen der 1. Ordnung berechnet (Abb. 13)⁵. Für die d-Saite wurde dabei die Messung mit der im

⁵ In Anhang 2 sind 2 Rohdatenplots zu finden

6. Bund gegriffenen Saite ausgespart, da hier die Messung zu stark gestört ist, um einen scharfen Peak in 1. Ordnung bestimmen zu können. Dabei ergaben sich die folgenden Werte:

	Frequenz b-Saite [Hz]	Frequenz d-Saite [Hz]
Leere Saite	246,7327	146,5523
2. Bund	279,0746	165,1425
4. Bund	313,7811	185,2926
6. Bund	352,1563	---
8. Bund	392,8532	235,1956
10. Bund	443,8842	265,7689

Außerdem wurde die Länge der schwingenden Saite gemessen:

	Gemessene Länge [m]
Leere Saite	0,650
2. Bund	0,580
4. Bund	0,517
6. Bund	0,461
8. Bund	0,410
10. Bund	0,366

Um nun hieraus die Saitenspannung pro Massebelag zu berechnen wurde gemäß (2-5) eine lineare Regression durchgeführt (Abb. 14 und Abb. 15), wobei $\frac{1}{2L}$ gegen die Frequenz f aufgetragen wurde.

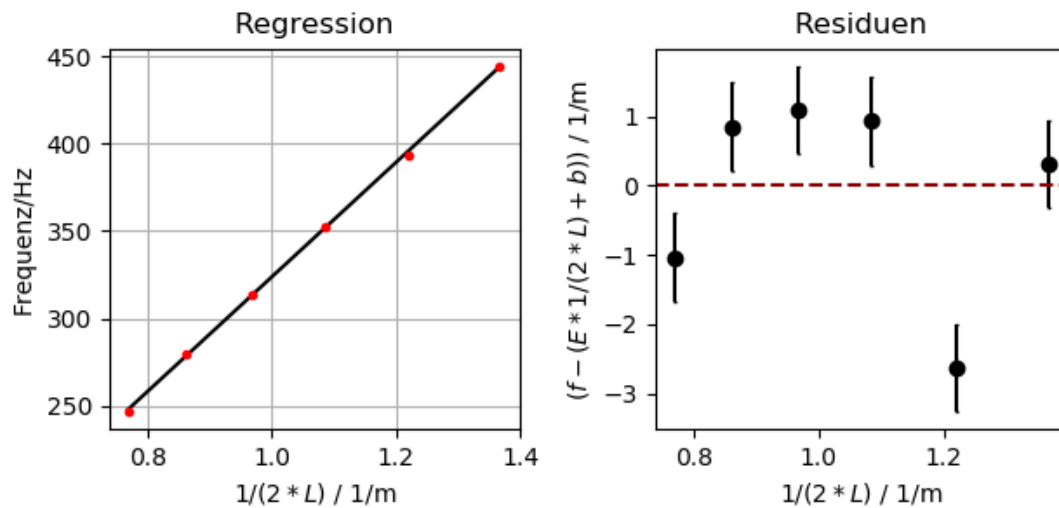


Abb. 14: lineare Regression (links) und Residuenplot (rechts) zur Bestimmung der Saitenspannung der b-Saite

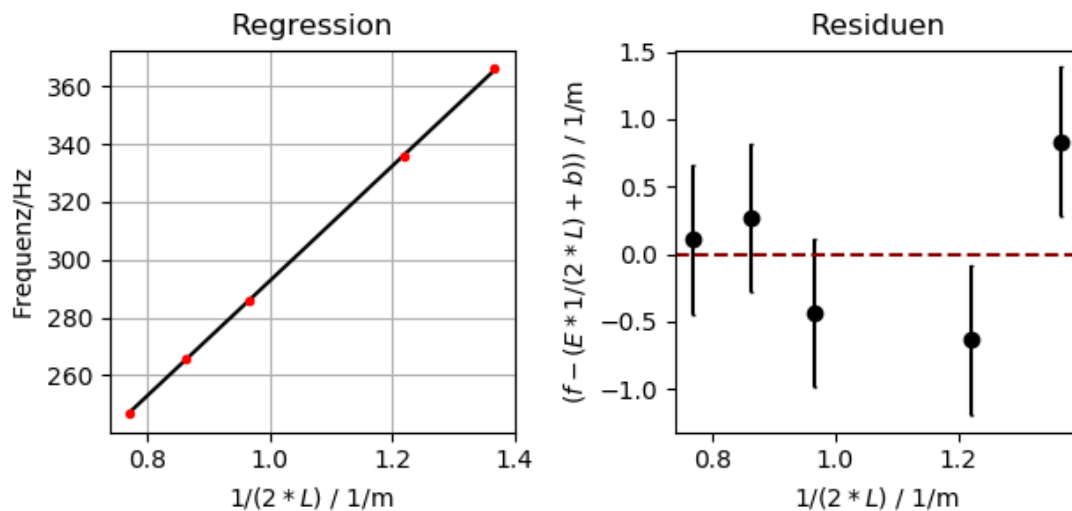


Abb. 15: lineare Regression (links) und Residuenplot (rechts) zur Bestimmung der Saitenspannung der d-Saite

Aus der Steigung der angepassten Geraden ergibt sich nun die Saitenspannung. Folgende Werte wurden so bestimmt:

	b-Saite	d-Saite
Messwert $\sqrt{T/\mu}$ [Nm/kg]	328,0510 \pm 1,8980	198,5150 \pm 1,4625
Literaturwert [Nm/kg]	317,0725	188,5204
$\chi^2/ndof$	12,9104/4 \approx 3,2276	2,2854/3 \approx 0,7618

Es fällt auf, dass die gemessenen Werte in beiden Fällen ca. $10 \frac{Nm}{kg}$ über den vom Hersteller angegebenen Werten liegen. An den Frequenzmessungen scheint dies nicht zu liegen, da auch eine explizite Berechnung der Fourieramplituden gemäß (1-6) in etwa die gleichen Werte liefert: 327,334 $\frac{Nm}{kg}$ für die b-Saite und 197,908 $\frac{Nm}{kg}$ für die d-Saite. Auch, dass beide Ergebnisse in etwa gleich stark von den Herstellerwerten abweichen ist ein starkes Indiz dafür, dass der Fehler in der Längenmessung liegt. Die χ^2 -Werte pro Freiheitsgrad sind zwar etwas zu hoch für die b-Saite bzw. etwas zu niedrig für die d-Saite, weichen aber nicht so stark von der Eins ab, dass von größeren Anpassungsfehlern ausgegangen werden müsste.

2.6 Aufnahme des Frequenzspektrums

2.6.1 Physikalische Grundlagen

Durch Variation des Anschlagspunktes der Saite kann man dafür sorgen, dass bestimmte Schwingungsmoden der Saite nicht auftreten. So fehlt z.B. jede fünfte Harmonische, wenn man die Saite bei einem Fünftel ihrer Länge anschlägt, statt sie in der Mitte anzuzupfen. Allgemein gilt: Im Abstand $d = \frac{l}{n}$ fehlen die n-fachen Vielfachen Harmonischen. Außerdem fällt die Ausprägung der Oberfrequenzen mit $\frac{1}{n}$, sodass eine logarithmische Auftragung geeignet ist.

2.6.2 Versuchsdurchführung

Um das Frequenzspektrum der Gitarre zu betrachten wird exemplarisch das Spektrum der A-Saite ausgewertet. Dafür wird die A-Saite senkrecht zum Steg mit Daumen- und Zeigefingernagel angezupft, wobei die Anschlaghöhe bei jeder Messung variiert wird. Die A-Saite wurde in folgenden Höhen angeschlagen:

Anschlaghöhe (von oben)	Anschlaghöhe/Gesamtlänge
32,5 cm	1/2
21,7 cm	1/3
13,0 cm	1/5
6,5 cm	1/10

Bei jeder Anschlaghöhe wurden mehrere Messungen durchgeführt. Die Gesamtlänge der Saite betrug dabei $l_0 = 65 \text{ cm}$. Für die Messung wurde ein Messintervall von $\pm 3V$ gewählt. Folgende Messwerterfassungseinstellung wurden zur Auflösung von Frequenzen bis zu 5000 Hz verwendet:

Dauer der Messung [ms]	1600
Intervall [μs]	100
Anzahl	16000

2.6.3 Auswertung

Um zu überprüfen, welche Schwingungsordnungen besonders stark und welche eher schwach im Frequenzspektrum auftreten wurde dieses zunächst mit Python durch eine FFT berechnet und dann einmal normal und einmal mit logarithmischer y-Achse geplottet (Abb. 16). Um die Amplituden besser vergleichen zu können wurden diese mit `scipy.signal.find_peaks` bestimmt, wobei ausgenutzt wurde, dass diese Funktion die Möglichkeit bietet den erwarteten Abstand der Peaks zu berücksichtigen, was im Fall der verwendeten A-Saite ca. 110Hz sind.

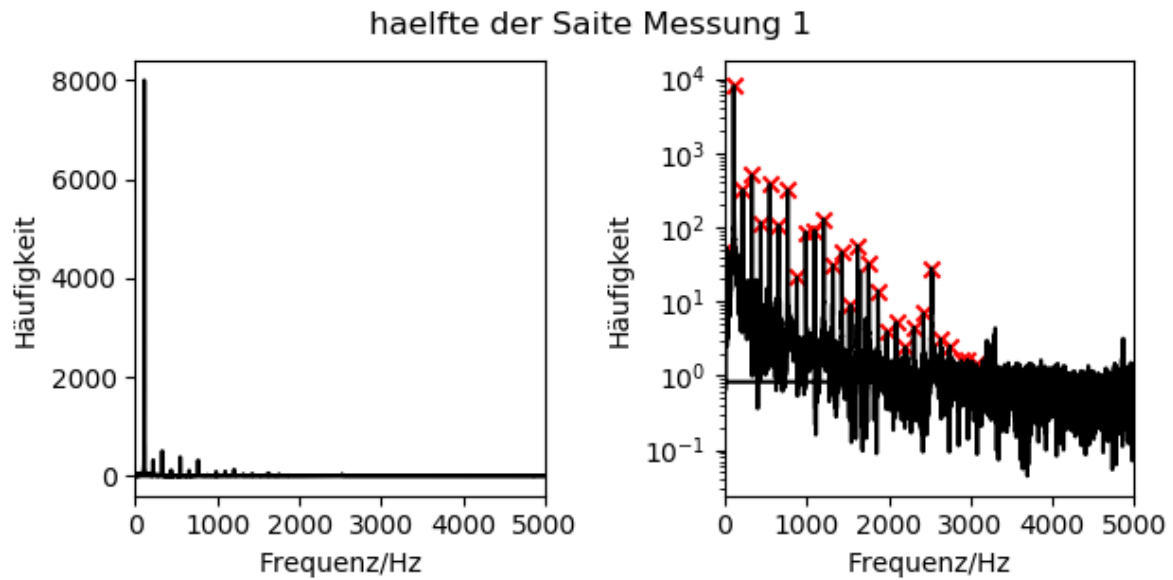


Abb. 16: Plot des Frequenzspektrums bei Anschlagpunkt 1/2 mit regulärer Achse (links) und mit logarithmischer Achse sowie Peakbestimmung (rechts)

Es wurde mehrmals gemessen da ungeeignetes Anschlagen, was schon am Höreindruck auffiel, sowie Störgeräusche die Messungen verfälschten. Im Folgenden ist je eine Messung pro Anschlagpunkt dargestellt⁶, wobei die Amplituden gegen ihre jeweilige Ordnung geplottet wurden (Abb. 17).

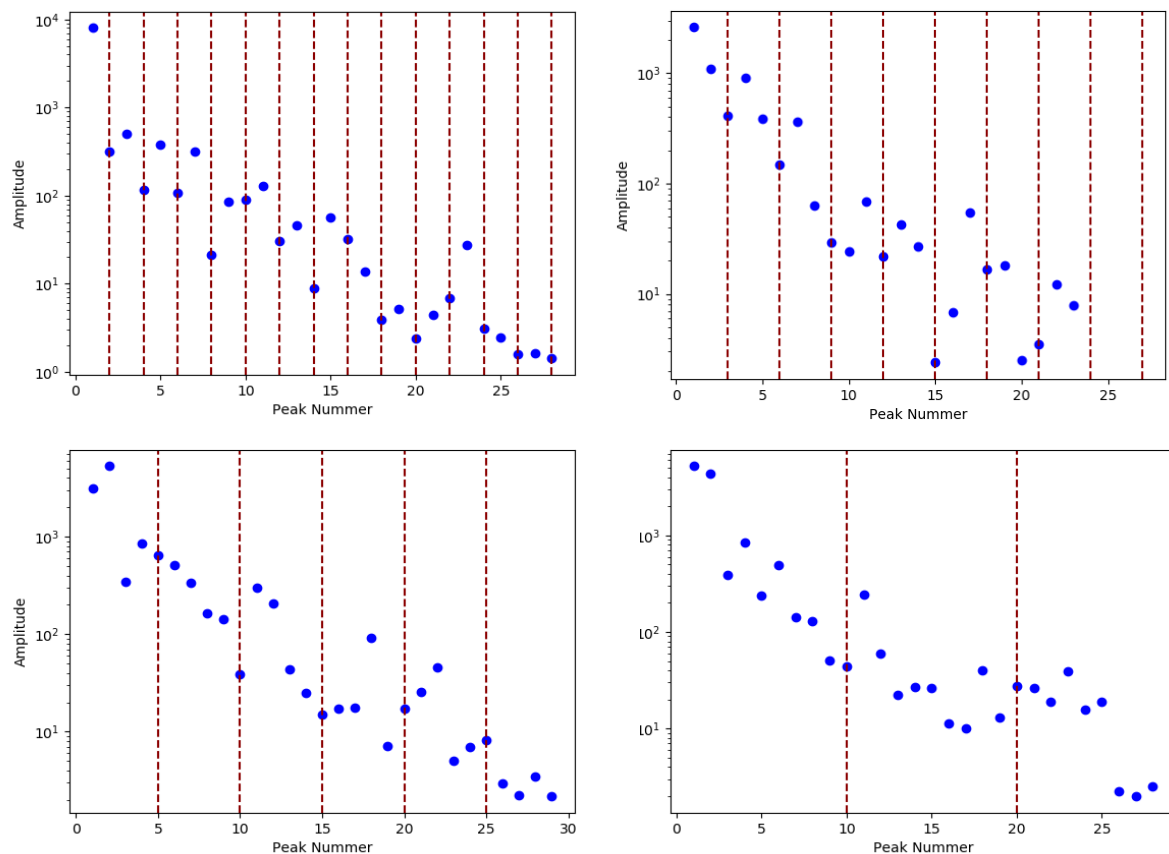


Abb. 17: Plots der Schwingungsordnungen, wobei in Rot die Ordnungen markiert sind, die laut Erwartung am niedrigsten sein sollten bei Anschlagpunkten 1/2 (oben links), 1/3 (oben rechts), 1/5 (unten links) sowie 1/10 (unten rechts)

⁶ Frequenzspektren zu den anderen 3 Messungen sind in Anhang 3 zu finden

Zu jeder Messung soll nun kurz zusammengefasst werden, inwiefern sich die Erwartungen bestätigt haben:

- Besonders gut sieht man den Effekt als die Saite an der Hälfte angeschlagen wurde. Bis zur 20. Ordnung sieht man, dass jede 2. Ordnung auffällig niedrig ist, wobei lediglich die 10. Ordnung eine Ausnahme bildet. Ab der 20. Ordnung lässt sich der Effekt allerdings nicht mehr beobachten.
- Auch als die Saite bei einem Drittel angeschlagen wurde ist bis zur 21. Ordnung die jeweils 3. Ordnung, bis auf die 9. immerhin niedriger als die darauffolgende.
- Als die Saite bei einem Fünftel ihrer Länge angeschlagen wurde ist der Effekt schon weniger deutlich. Die 5. Ordnung zeigt keinen nennenswerten Einbruch. Hingegen die 10. und die 15. schon und auch die 20. Ordnung ist niedriger als ihrer Nachfolger.
- Auch als die Saite bei einem Zehntel angeschlagen wurde zeigt sich, dass die 10. Ordnung einbricht. Für die 20. hingegen ist dies schon nicht mehr der Fall.

Die Erwartungen bezüglich der fehlenden Harmonischen haben sich also zumindest teilweise bestätigt. Gerade als die Saite an ihrem Mittelpunkt angeschlagen wurde konnte beobachtet werden, dass die entsprechenden Harmonischen deutlich schwächer ausgeprägt waren als die anderen Ordnungen. Auch fiel auf, dass der Höreindruck je nach Anschlagpunkt sehr unterschiedlich war, was auf die unterschiedliche Ausprägung der Obertöne zurückzuführen ist. So klang die Saite als sie bei 1/10 angeschlagen wurde eher schrill, da gerade die höheren Obertöne stärker vorhanden waren, während sie beim Anschlagen bei 1/3 ihrer Länge eher warm klang, da hier die tieferen Obertöne ausgeprägter waren.

3 Fazit

Bei einer Wiederholung des Experiments sollte mehr Zeit für die einzelnen Versuche eingeplant werden, sodass auch mehrere Messreihen aufgezeichnet werden können. Außerdem wäre eine ruhigere Umgebung gut, da sich in einigen Messungen Störungen durch die Umgebung zeigten. Zusammenfassend konnten die erwarteten Ergebnisse im Rahmen der Messgenauigkeit trotzdem bestätigt werden, wobei die Elastizitätsmodule bestimmt wurden zu:

- Aluminium: $(0,7302 \pm 0,0032) Pa$
- Messing: $(1,3757 \pm 0,0006) Pa$
- Kupfer: $(0,9528 \pm 0,0016) Pa$
- Stahl: $(2,0951 \pm 0,0069) Pa$

Auch die verschiedenen Phänomene an der Gitarre konnten beobachtet werden. Die Schwebungs- und resultierende Frequenz konnten bestimmt werden. Außerdem konnte die Wurzel aus Saitenspannung pro Massebelag für zwei Saiten bestimmt werden zu:

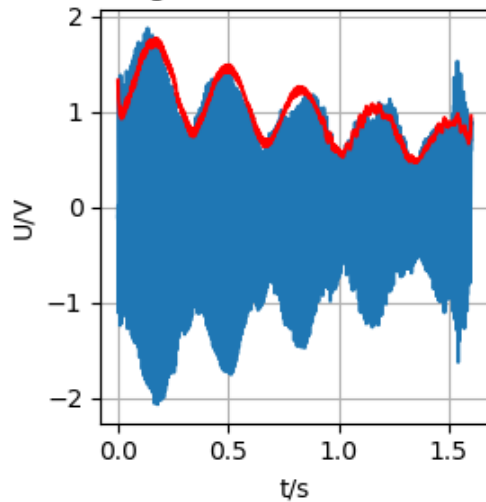
- b-Saite: $(328,0510 \pm 1,8980) \frac{Nm}{kg}$
- d-Saite: $(198,5150 \pm 1,4625) \frac{Nm}{kg}$

Schlussendlich konnte auch beobachtet werden, dass die Ausprägung der Obertöne einer Saite abhängig vom gewählten Anschlagpunkt ist und folglich dieser auch den Höreindruck verändert.

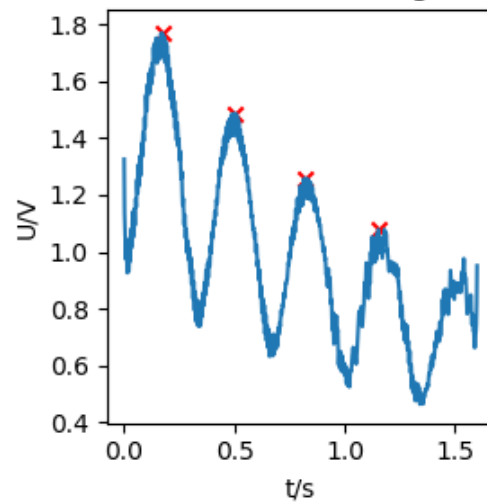
4 Anhang

Anhang 1: zwei weitere Messungen zur Bestimmung der Schwebung, wobei deutlich wird, warum die Anpassung für Messung 3 und 5 deutlich schwerer war als für Messung 4

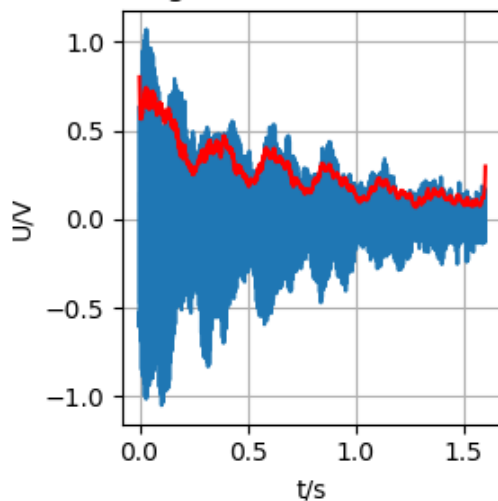
Schwebung mit Einhüllender Messung 4



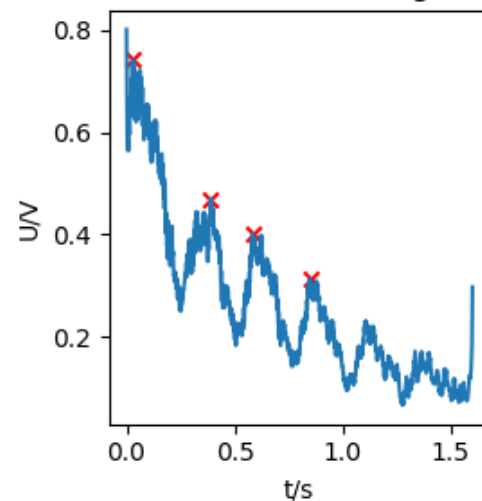
Peakbestimmung



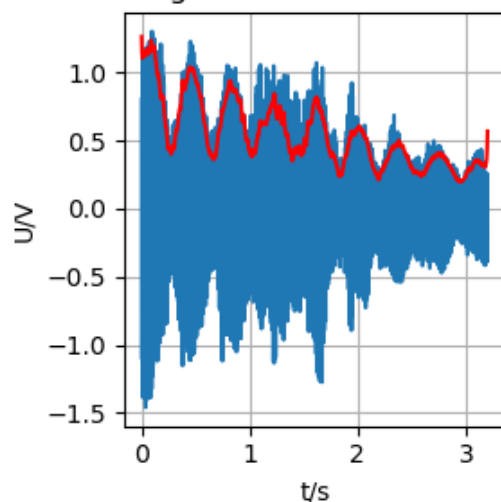
Schwebung mit Einhüllender Messung 3



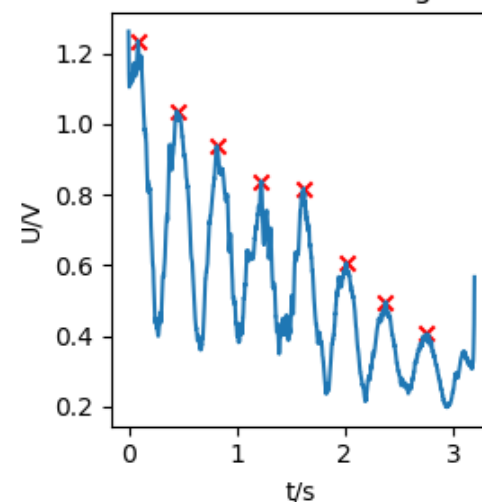
Peakbestimmung



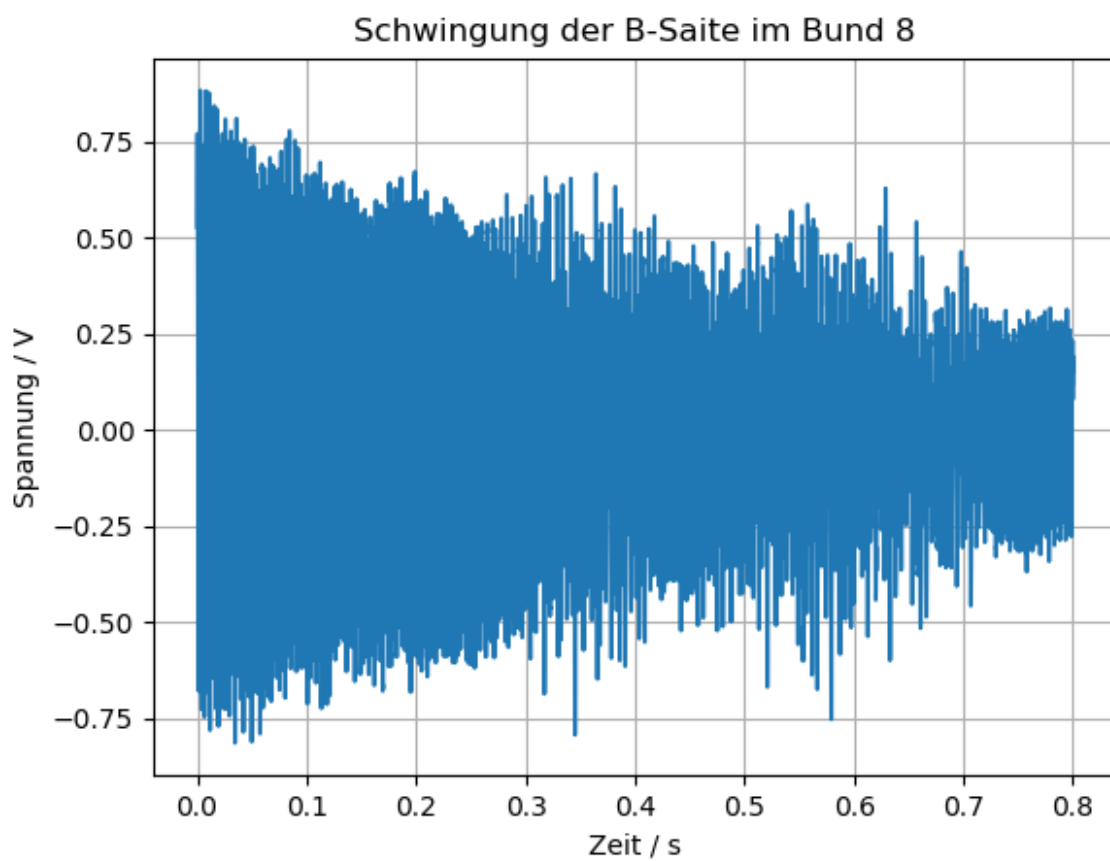
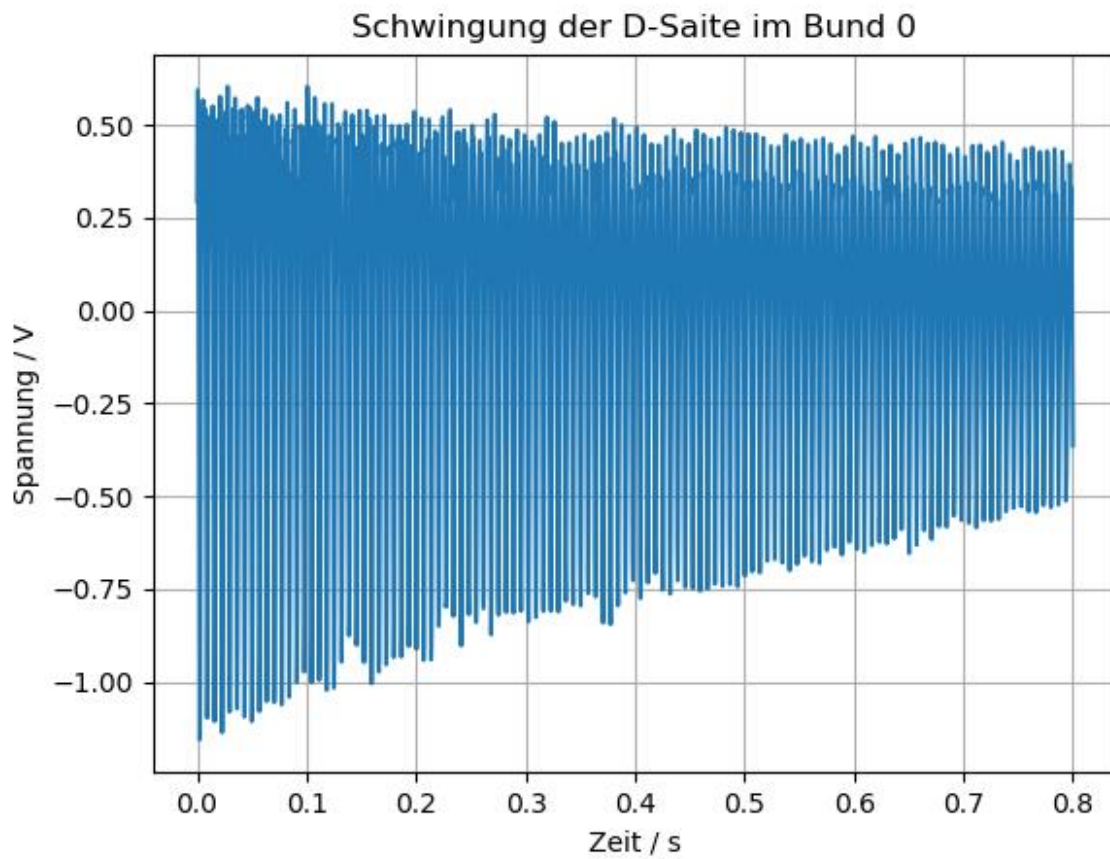
Schwebung mit Einhüllender Messung 5



Peakbestimmung

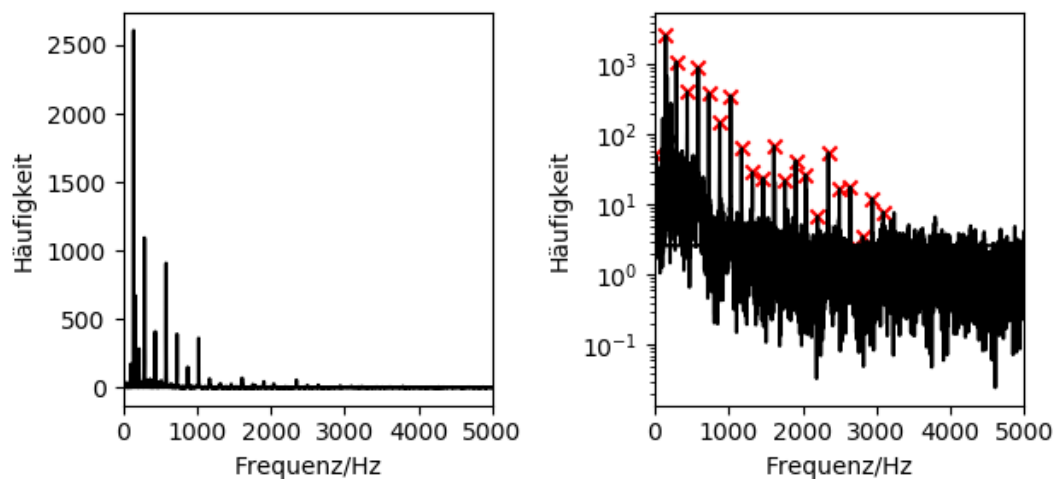


Anhang 2: beispielhafte Rohdaten zur Bestimmung der Saitenspannung

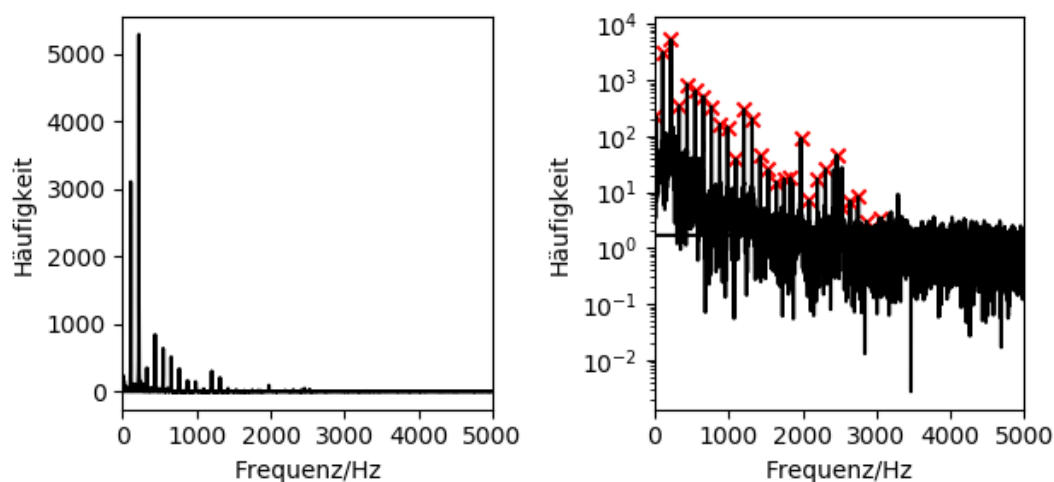


Anhang 3: Frequenzspektren der anderen 3 ausgewerteten Messungen

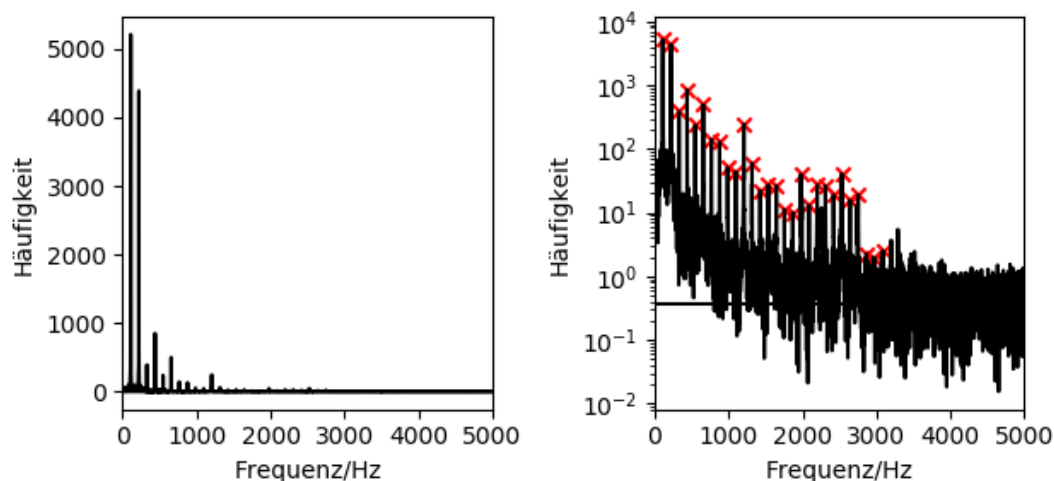
drittel der Saite Messung 3



fuenftel der Saite Messung 1



zehntel der Saite Messung 2



5 Programme

Folgende Programme wurden im Rahmen der Auswertung erstellt und sind auf dem USB-Stick beigefügt:

- Elastizitaet_Alu.py, Elastizitaet_Cu.py, Elastizitaet_Me.py und Elastizitaet_St.py: Durch ein-/auskommentieren der markierten Stellen werden die Messungen:
 - a. Mit einer Fast-Fourier-Transformation ausgewertet
 - b. Durch explizite Berechnung der Fourieramplituden ausgewertet

In der Konsole ausgegeben werden: die relativen Fehler, die mittlere Frequenz, die Schallgeschwindigkeit + Fehler sowie das Elastizitätsmodul + Fehler.

geplottet werden: Rohdaten + vergrößerte Darstellung, entsprechende Frequenzspektren

- Schwebung.py: Mit einer Fast-Fourier-Transformation werden ω_1 und ω_2 berechnet (durch Einkommentieren der entsprechenden Stellen auch die expliziten Amplituden).

In der Konsole ausgegeben werden: die Schwebungs- und resultierende Frequenz + Fehler

geplottet werden: Rohdatenplots, Frequenzspektren

- Schwebung_Baeuche.py: berechnet anhand der Schwingungsbäuche die Schwebungsfrequenz und anhand der Peaks die resultierende Frequenz.

In der Konsole ausgegeben werden: Schwebungs- und resultierende Frequenz + Fehler

geplottet werden (bei Bedarf): Rohdaten + Peaks, Rohdaten + „Einhüllende“ + Peaks

- Saitenspannung_b.py und Saitenspannung_d.py: Berechnet die Frequenzen durch FFT und anschließend die Saitenspannung durch lineare Regression.

In der Konsole ausgegeben werden: die Ergebnisse der linearen Regression

geplottet werden: Rohdatenplots, Frequenzspektren, lineare Regression

- Frequenzspektrum.py: Wertet die Messungen mit unterschiedlichen Anschlagpunkten mithilfe einer FFT aus.

geplottet werden: Frequenzspektren + logarithmische Darstellung, Plot der Amplituden zu den Ordnungen