

# Messung von elektrischen Schwingungen

Mate Farkas und Christine Falter

## Inhalt

1. Versuchsziel.....	2
2. physikalische Grundlagen.....	2
2.1 gedämpfter LC-Schwingkreis .....	2
2.2 gekoppelte LC-Schwingkreise .....	3
3. vorbereitende Messungen .....	3
3.1 Charakterisierung des Ohmschen Widerstandes.....	3
3.1.1 Aufbau und Durchführung.....	3
3.1.2 Auswertung .....	4
3.2 Auf-/Entladung eines Kondensators .....	5
3.2.1 Aufbau und Durchführung.....	5
3.2.2 Auswertung .....	5
4. Hauptversuche .....	6
4.1 gedämpfter Schwingkreis .....	6
4.1.1 Ziel des Versuches .....	6
4.1.2 Aufbau und Durchführung.....	7
4.1.3 Auswertung .....	7
4.2 gekoppelter Schwingkreis.....	8
4.2.1 Aufbau und Durchführung.....	8
4.2.2 Auswertung gleich-/gegensinnige Anregung .....	9
4.2.3 Auswertung Schwebung .....	10
5. Zusammenfassung.....	11

## 1. Versuchsziel

Der Versuch setzt sich zusammen aus insgesamt zwei Vor- und zwei Hauptversuchen, die der Charakterisierung von elektrischen Schwingungen dienen sollen. Insbesondere sollen im Folgenden die gedämpfte Schwingung eines LC-Schwingkreises sowie die Kopplung von zwei solcher Schwingkreise analysiert werden, indem unter Anderem der Widerstand des aperiodischen Grenzfalls, sowie der Kopplungsgrad berechnet werden.

## 2. physikalische Grundlagen

Um die verwendeten Schaltungen mathematisch zu beschreiben benötigt man die sog. Maschenregel, welche besagt, dass die Summe der anliegenden gleich der Summe der abfallenden Spannungen ist. Für die Spannungen der verwendeten Bauteile gilt:

- Für den **Kondensator** (Kapazität  $C$ ) gilt:  $U = \frac{Q}{C}$  mit  $Q = \frac{dI}{dt}$
- Der **Widerstand** wird durch das ohmsche Gesetz beschrieben:  $U = IR$
- Für die **Spule** (Induktivität  $L$ ) gilt mit dem Induktionsgesetz:  $U = L \frac{dI}{dt}$

### 2.1 gedämpfter LC-Schwingkreis

Ein elektrischer Schwingkreis besteht aus einem Kondensator sowie aus einer Spule, wobei der Kondensator periodisch auf- und entladen wird. Lädt man beispielsweise den Kondensator auf und schließt anschließend den Stromkreis, so beginnt sich dieser zu entladen. Dabei fließt ein Strom. Beginnt dieser abzunehmen, erzeugt er in der Spule eine Induktionsspannung, welche die Abnahme hemmt, bis der Kondensator wieder aufgeladen ist. Anders als bei einem idealen Schwingkreis wird im gedämpften Schwingkreis die Energie  $dE = I^2 R dt$  in Wärme umgewandelt, wobei  $R$  dem Gesamtwiderstand der Schaltung entspricht. Für die theoretische Beschreibung fasst man  $R$  in einem ohmschen Widerstand zusammen. Mit der Maschenregel gilt:

$$U_0 = U_R + U_L + U_C = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{U_0}{L} = \frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q$$

Mit  $\delta = \frac{R}{2L}$  und  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . In dieser Form ist die Ähnlichkeit zur mechanischen Schwingung offensichtlich. Im Schwingfall gilt vereinfacht:

$$I(t) = I_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi) \text{ und } U_C(t) = U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t) \text{ mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

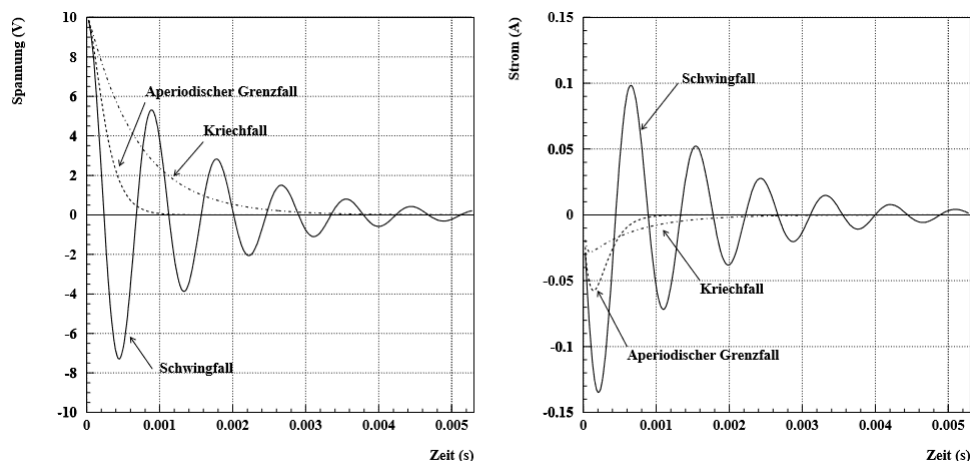


Abbildung 1: Spannungs-/Stromverlauf für den Kriechfall ( $\delta > \omega_0$ ), den aperiodischen Grenzfall ( $\delta = \omega_0$ ) und den Schwingfall ( $\delta < \omega_0$ )

Für den Grenzfall folgt:  $R_{ap} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

## 2.2 gekoppelte LC-Schwingkreise

Man kann zwei Schwingkreise induktiv mit einander koppeln. In diesem Versuch sollen sowohl die Schwebung, bei der die Schwingungsenergie zwischen den Kreisen hin und her pendelt, sowie die beiden Fundamentalschwingung, die bei gleich- bzw. gegensinniger Anregung der Kreise zu betrachten sind, ausgewertet werden.

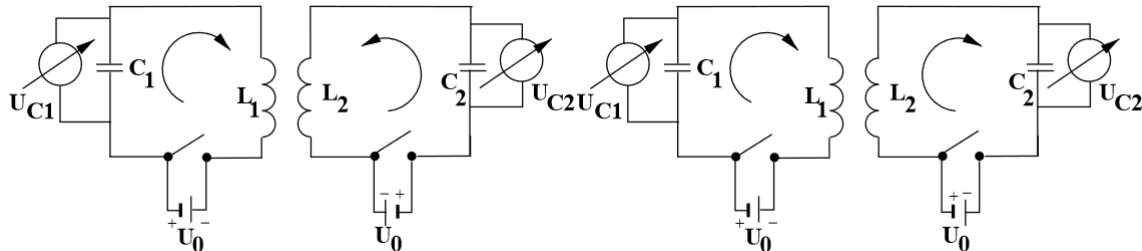


Abbildung 2: gleichsinnige (links) bzw. gegensinnige (rechts) Anregung von zwei gekoppelten Schwingkreisen

Für die Fundamentalschwingungen gilt:

$$\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{LC(1+k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \quad \omega_- = \frac{1}{\sqrt{LC(1-k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \Rightarrow k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2}$$

Im Fall der Schwebung gilt für die gekoppelten Schwingungen bzw. für die Schwebungsfrequenz:

$$f_k = \frac{f_- + f_+}{2} \approx f_0, \quad f_{schw} = \frac{f_- - f_+}{2}$$

## 3. vorbereitende Messungen

Bevor mit den Messungen der eigentlichen Schwingkreise begonnen werden konnte musste zunächst der verwendete Kondensator analysiert werden, wozu vorher eine Bestimmung des Widerstands nötig war.

### 3.1 Charakterisierung des Ohmschen Widerstandes

#### 3.1.1 Aufbau und Durchführung

Um den Betrag des Widerstands zu messen wird der Spannungsabfall  $U_R$  am Widerstand selbst und der im Kreis fließende Strom  $I$  gemessen (Abbildung 3).  $U_0$  wird durch die Gleichspannungsquelle  $S$  des Sensor Cassy geliefert. Es wurde immer eine Spannung eingestellt und dann über ein längeres Intervall eine Rauschmessung durchgeführt. Es wurden insgesamt 5 Messungen mit folgenden Messparameter durchgeführt:

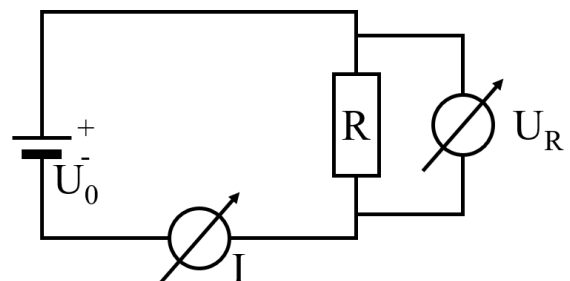


Abbildung 3: Schaltbild zur Aufnahme von Strom und Spannung am Widerstand

	Voltmeter (B)/Amperemeter (A)
Intervall [ $\mu s$ ]	10
Anzahl der Messpunkte	16000
Dauer der Messung [ms]	160

### 3.1.2 Auswertung

Die in den Rauschmessungen ermittelten Mittelwerte für Spannung und Stromstärke wurden gegeneinander geplottet, und unter Berücksichtigung der ermittelten statistischen Fehler eine lineare Regression durchgeführt (Abbildung 4), da der erwartete Zusammenhang linear ist ( $\rightarrow$  ohmsches Gesetz).

Nr.	Mittelwert		Standardabweichung		Fehler des Mittelwertes	
	Spannung [V]	Strom [mA]	Spannung [V]	Strom [mA]	Spannung [V]	Strom [mA]
1	1,2472	12,0684	0,0027	0,0780	0,000021	0,00062
2	2,2966	22,8296	0,0027	0,0692	0,000021	0,00055
3	3,7568	37,4328	0,0027	0,0819	0,000021	0,00065
4	4,7770	47,8212	0,0027	0,0790	0,000022	0,00062
5	6,0290	60,6658	0,0028	0,0927	0,000022	0,00073

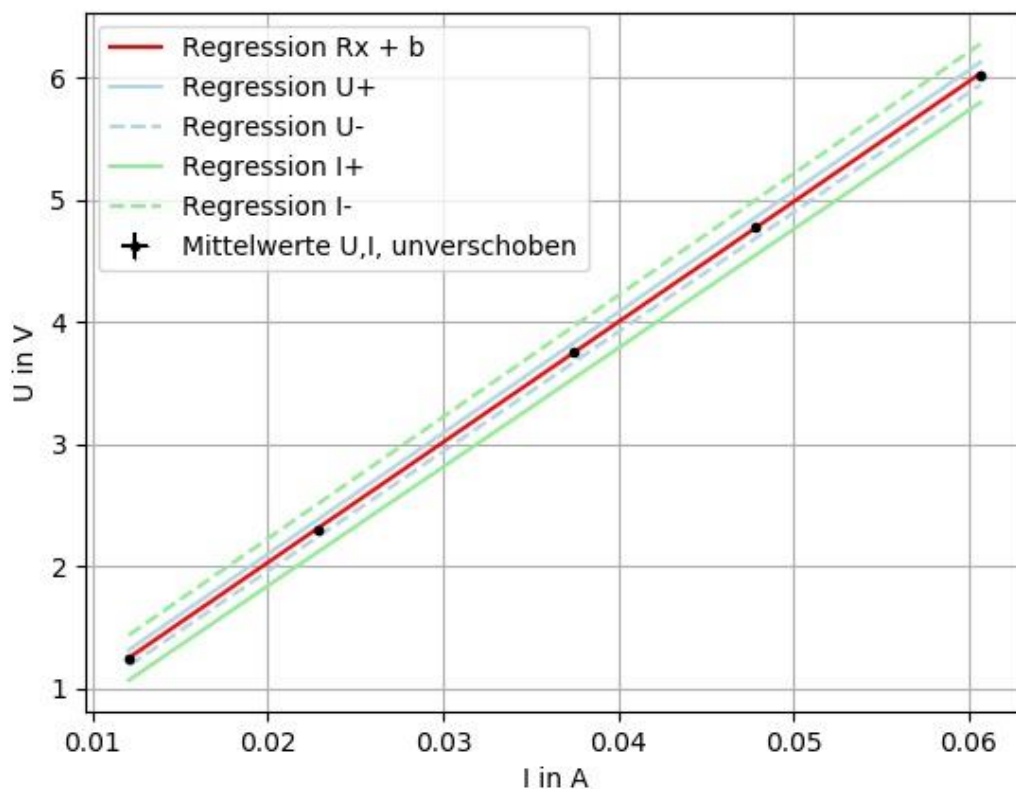


Abbildung 4: aus den Rauschmessungen ermittelte Werte (Tabelle) und lineare Regression auf die ermittelten Mittelwerte, sowie auf die, um den systematischen Fehler verschobenen Werte, zur Ermittlung von  $R$  sowie des systematischen Fehlers auf  $R$  (Graph)

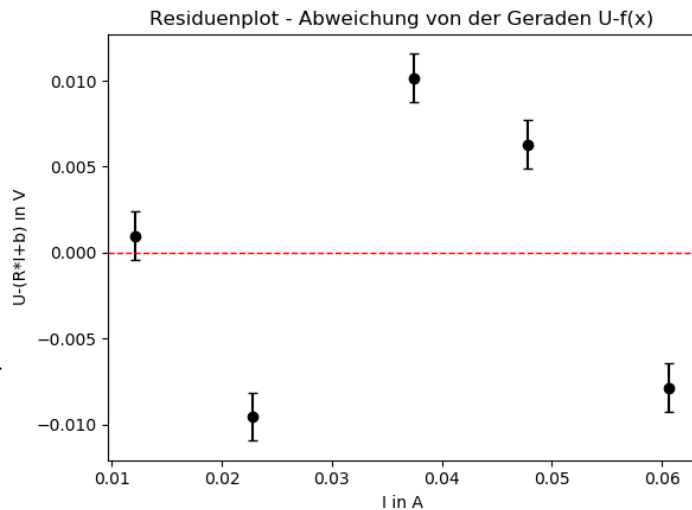
Die Standardabweichungen sind so klein, dass der Digitalisierungsfehler überwiegt, weshalb dieser stattdessen in die weiteren Berechnungen einfließt. Der so ermittelte Wert für  $R$  beträgt:

$$R = 98,58 \pm 0,11(\text{stat.}) \pm 1,27(\text{sys.})\Omega$$

Der vom Hersteller angegebene Wert liegt bei  $100\Omega$ . Zusätzlich wurde der Widerstand am Messtisch getestet, wobei ein Wert von  $99,48 \pm 0,25\Omega$  ermittelt wurde. Also passen die Werte im Rahmen der Messgenauigkeit überein. Der bei der Regression ermittelte Wert für die Chi-quadrat-Verteilung liegt bei  $\chi^2/\text{ndof} = 15,35/3 \approx 5,12$ , was auf Grund der kleinen Fehler etwas zu hoch ist.

Dieser Zusammenhang wird auch deutlich, wenn man den Residuen Plot (Abbildung 5) betrachtet. Die Werte streuen recht stark um die Nulllinie, weshalb der Chi-quadrat-Wert etwas höher als erwartet ist.

Abbildung 5: Residuen Plot der Streuung der gemessenen Spannungswerte um die angepasste Gerade



## 3.2 Auf-/Entladung eines Kondensators

### 3.2.1 Aufbau und Durchführung

Nach Bestimmung des Widerstands, wird der Kondensator charakterisiert, indem a) bei der Aufladung und b) nach dem Überbrücken der Spannungsquelle bei der Entladung, sowohl die Spannung am Kondensator als auch der fließende Strom gemessen werden. Die Messung wurde sowohl mit dem Oszilloskop als auch mit dem Sensor Cassy durchgeführt. Dabei wurden folgende Trigger verwendet:

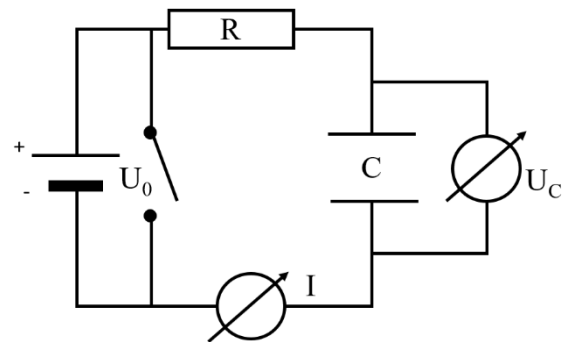


Abbildung 6: Schaltbild zur Bestimmung der Kapazität des Kondensators

Aufladung	Entladung
$U_C \geq 0,05 \text{ V}$	$U_C \leq 5,07 \text{ V}$

Der Wert für  $C$  soll anschließend aus der Zeitkonstante  $\tau = RC$  bestimmt werden.

### 3.2.2 Auswertung

a) Für die Aufladung wurde Folgendes ermittelt:

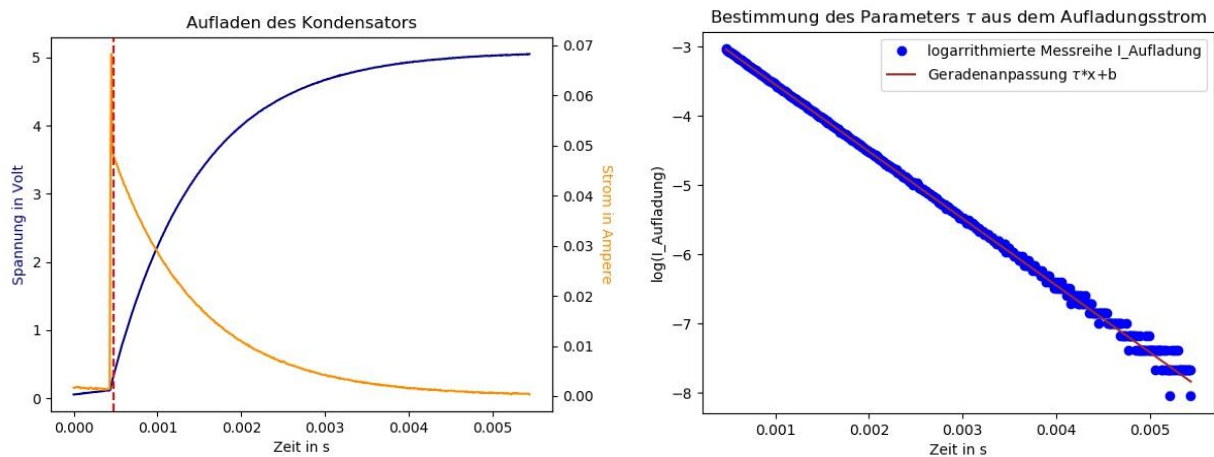


Abbildung 7: Aufladung des Kondensators mit Spannungs-/Stromkurve (links) sowie der Regression zur Bestimmung von  $\tau$  (rechts), wobei  $\tau$  hier dem Wert  $-\frac{1}{\tau}$  entspricht

Für  $\tau$  gilt:  $-\frac{1}{\tau} = -966,13 \pm 0,44 \frac{1}{s}$  mit ein Chi-quadrat-Wert von  $\chi^2/ndof \approx 1,11$

b) Für die Entladung wurde Folgendes ermittelt:

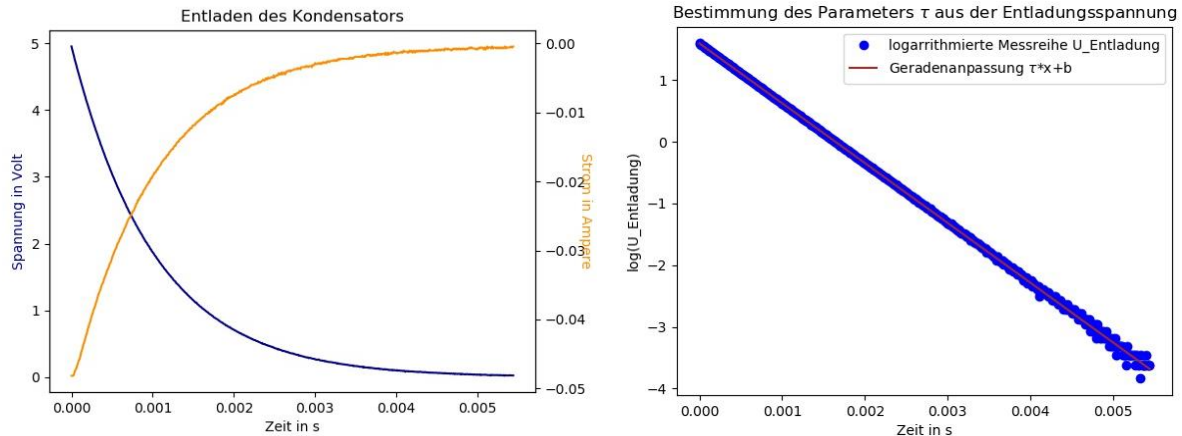


Abbildung 8: Entladung des Kondensators mit Spannungs-/Stromkurve (links) sowie der Regression zur Bestimmung von  $\tau$  (rechts), wobei  $\tau$  hier dem Wert  $-\frac{1}{\tau}$  entspricht

Für  $\tau$  gilt:  $-\frac{1}{\tau} = -971,02 \pm 0,15 \frac{1}{s}$  mit ein Chi-quadrat-Wert von  $\chi^2/ndof \approx 1,28$

An den Residuen Plots (Abbildung 9) kann man erkennen das der Offset genug korrigiert wurde. Auch die Werte, die die Chi-quadrat-Verteilung liefert deuten auf eine zuverlässige Anpassung hin.

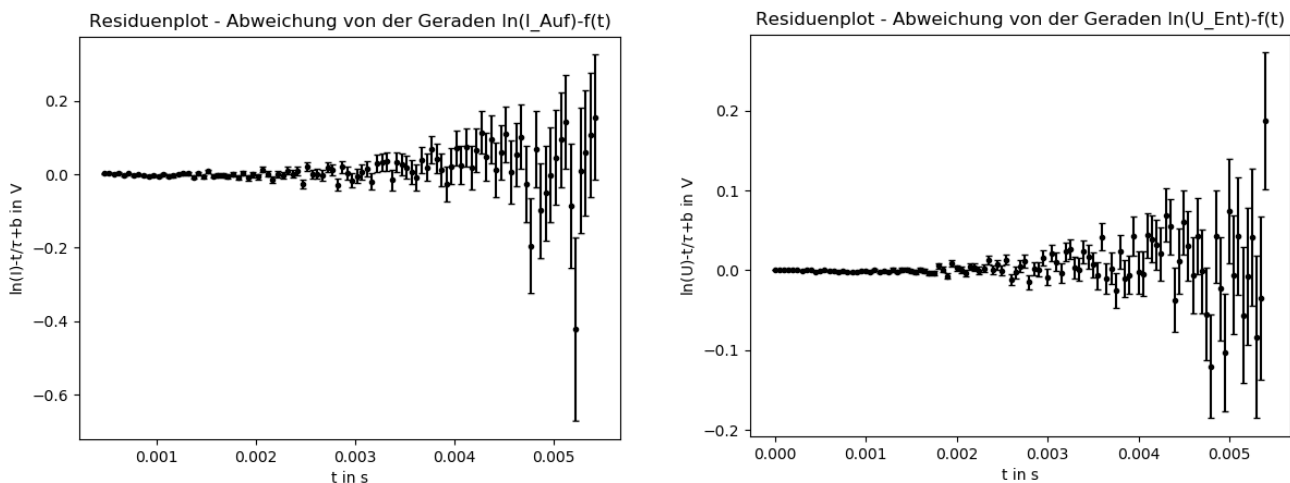


Abbildung 9: Residuen Plots für die Aufladung (links) bzw. die Entladung (rechts) des Kondensators

Die Ergebnisse werden als gewichtetes Mittel zusammengefasst und so die Kapazität, sowie deren Fehler bestimmt, wobei sich der systematische aus den Fehlern auf den Widerstand ergibt:

$$C = \frac{1}{\tau R} = 1,045 \cdot 10^{-5} \pm 1,5 \cdot 10^{-9}(\text{stat.}) \pm 1,35 \cdot 10^{-7}(\text{sys.})F$$

## 4. Hauptversuche

### 4.1 gedämpfter Schwingkreis

#### 4.1.1 Ziel des Versuches

Im Folgenden werden wir die Eigenschaften eines solchen Schwingkreises studieren und anhand der Messung die charakteristischen Größen berechnen. Unser Ziel ist es, die Dämpfungskonstante  $\delta$ , die Induktivität  $L$  der Spule und ihren inneren Widerstand abzuschätzen.

#### 4.1.2 Aufbau und Durchführung

Der Aufbau erfolgt wie in Abbildung 10 dargestellt. Durch Drücken des Tasters entlädt sich der (vorher aufgeladene) Kondensator, dessen Spannung mit Cassy und mit einem Oszilloskop gemessen wurde, wobei die mit dem Oszilloskop ermittelten Daten für Abschätzungen während der Messung verwendet wurden. Da beide Datensätze denselben Prozess beschreiben, beschränken wir uns nur auf die durch Cassy-System aufgenommenen Größen. Die für die Messungen verwendeten Bauteile wurden mit dem Messtisch charakterisiert:

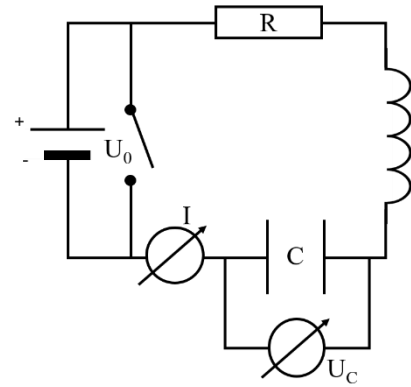


Abbildung 10: Schaltbild gedämpfter Schwingkreis

Widerstände R	$5.1 \, \Omega \pm 0.01 \, \Omega$ $46.6 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$ $100 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$ $208 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$ $173 \, \Omega \pm 1 \, \Omega$ $137.3 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$ $100.6 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$ $115.4 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$
Induktivität I der Spule	$9.02 \, \text{mH} \pm 0.01 \, \text{mH}$
Kapazität C des Kondensators	$2.24 \, \mu\text{F} \pm 0.01 \, \mu\text{F}$

Das verwendete Messintervall betrug  $10 \, \mu\text{s}$ . Zudem wurden in Abhängigkeit des geschalteten Widerstandes unterschiedliche Trigger verwendet, um den Entladevorgang automatisch aufzuzeichnen.

#### 4.1.3 Auswertung

Nach dem eine Offset-Korrektur durchgeführt wurde, wurden Frequenz  $f$  sowie die Dämpfungskonstante  $\delta$  aus den Amplituden bzw. der Einhüllenden ermittelt (Abbildung 11).

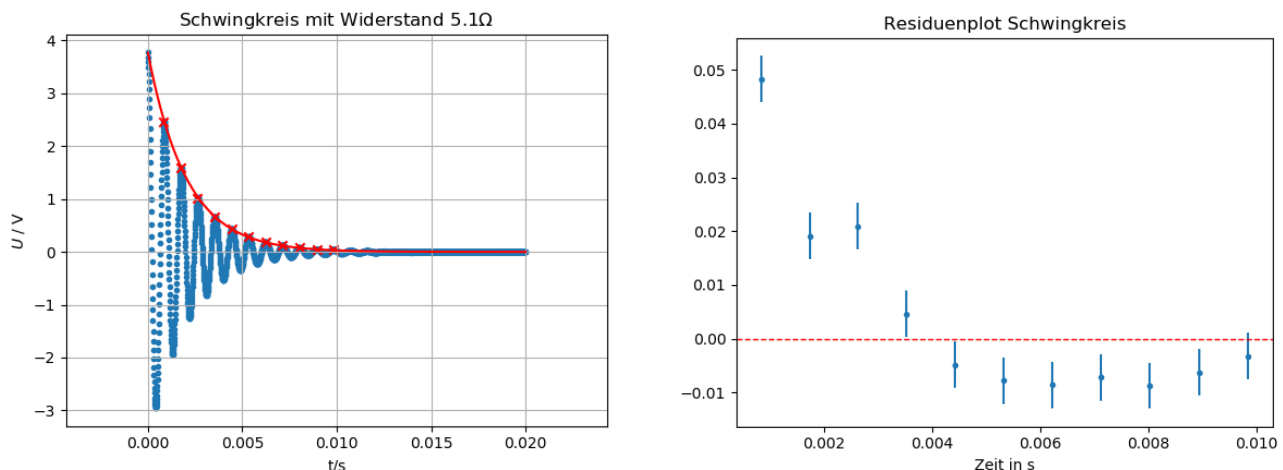


Abbildung 11: Rohdaten mit Peaks und Einhüllender (links) Residuen Plot der Einhüllenden und den Peaks (rechts)

Aus dem Residuen Plot geht hervor, dass die Maxima für kleine  $t$  ungenauer bestimmt werden können (wofür vermutlich auch die geringere „Punktedichte“ für kleinere  $t$  mitverantwortlich ist), sodass diese Datenpunkte deutlich weiter von der Einhüllenden liegen. Folgende Werte wurden ermittelt:

$$\delta = 87.8 \, \text{Hz} \pm 0.5 \, \text{Hz}, \quad \bar{f} = \frac{1}{T} = 1109.88 \, \text{Hz} \pm 24.64 \, \text{Hz}$$

wobei auch hier die Digitalisierungsfehler beachtet wurden. Der Messfehler auf die Frequenz ergibt sich durch die abgeschätzte Ungenauigkeit bei der Peak-Bestimmung.

Mit  $\omega = 2\pi\bar{f}$  ergibt sich für die Induktivität:

$$L = \frac{1}{(\omega^2 + \delta^2) \cdot C} = 9.301 \pm 0.411 \text{ mH}$$

Dieser Wert stimmt sehr gut mit dem auf dem Messtisch ermittelten Wert überein. Zusätzlich wurde der innere Widerstand der Spule bestimmt:

$$R_{\text{Rest}} = \frac{2\delta}{(\omega^2 + \delta^2) \cdot C} - R \approx R_L = 3.97 \pm 0.4 \Omega$$

Man könnte noch den inneren Widerstand der Kabel grob abschätzen mit

$$R_k = \rho \frac{l}{A},$$

wobei  $\rho$  der spezifische Widerstand der Kabel,  $l$  ihre Länge und  $A$  ihre Oberfläche ist. Dies liefert mit  $\rho = 0.017 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ ,  $l = 8 \text{ m}$ ,  $A = 2\pi \text{ mm}^2$  einen ungefähren Wert von

$$R_k \approx 0.02 \Omega$$

was deutlich unterhalb des Auflösungsvermögens unserer Messung liegt, und dadurch vernachlässigbar ist.

Im aperiodischen Grenzfall ist  $\delta = \omega_0$ , sodass der Widerstand bei

$$R_{\text{ap}} = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 126.07 \pm 2.92 \Omega$$

liegt. Bei der Messung wurden keine Schwingung mehr ab einem Widerstandswert von  $111.3 \Omega$  gefunden, was von dem theoretischen Wert abweicht, da  $R_{\text{ap}} = 111.3 \Omega$  theoretisch  $R_L$  sein sollte. Dies kann an der Ableseungenauigkeit bei der experimentellen Bestimmung des Grenzfalles liegen, welche schwer zu quantifizieren ist, oder an einer fehlerhaften Messung des am Potentiometer eingestellten Widerstandes mit dem Digitalvoltmeter. Die Graphen der einzelnen Messungen sind in Abbildung 12 dargestellt.

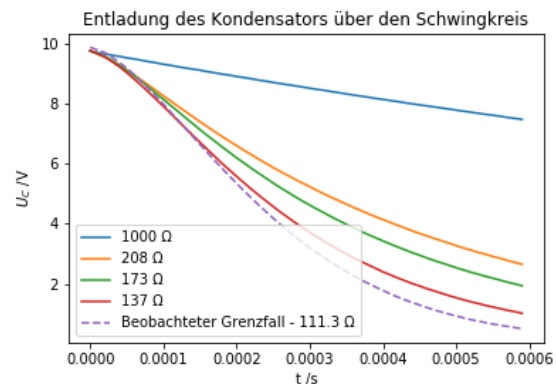


Abbildung 12: Plots der Messungen mit unterschiedlichen Messungen

## 4.2 gekoppelter Schwingkreis

### 4.2.1 Aufbau und Durchführung

Für die Analyse der induktiven Kopplung von Schwingkreisen (Abbildung 2) werden zwei identische L-C-Schwingkreise verwendet, wobei die in den Vorversuchen charakterisierten Bauteile verwendet werden. Die Spule mit 500 Windungen wies allerdings einen zu großen inneren Widerstand auf, sodass für die Messung, die mit 250 Windungen verwendet wurde. Zudem kann ein Weicheisenkern verwendet werden, um die Kopplung zu verstärken. Der Spannungsverlauf wurde mit zwei Sensor-Cassy's aufgezeichnet. Für die Aufzeichnung der Schwebung wird nur einer der beiden Kondensatoren geladen bevor die Spannungsquelle überbrückt wird, während bei der gleich-/gegenseitigen Anregung beide Kondensatoren geladen werden müssen. Zur Überbrückung der Spannungsquelle kann in diesem Fall ein Taster mit drei Schaltern verwendet werden, sodass die gegenseitige Anregung erst bei geöffnetem Verbindungsschalter beginnt. Folgende Einstellungen wurden verwendet:



	Anfangsspannung	Trigger
Schwebung	$U_0 = 7,5V$	$U_{trig} = 7V$
gleich-/gegensinnig	$U_{1/2} = \pm 6,7$	$U_{trig} = 6,5V$

#### 4.2.2 Auswertung gleich-/gegennnige Anregung

Aus der gegensinnigen Anregung kann  $f_-$  ermittelt werden. Dazu wurden zwei Methoden verwendet:

- Die Frequenz kann durch eine **Fast Fourier Transformation** bestimmt werden, die auf beide Schwingkreise angewendet wird um den Fehler abschätzen zu können (Abbildung 14).
- Außerdem kann die Frequenz aus der **Lage der Peaks** bestimmt werden. Auch diese Methode ist fehlerbehaftet, da die Peaks nicht immer exakt bestimmt werden können (Abbildung 13).

Hier wurden beide Methoden durchgeführt und als endgültige Frequenz der gewichtete Mittelwert gebildet.

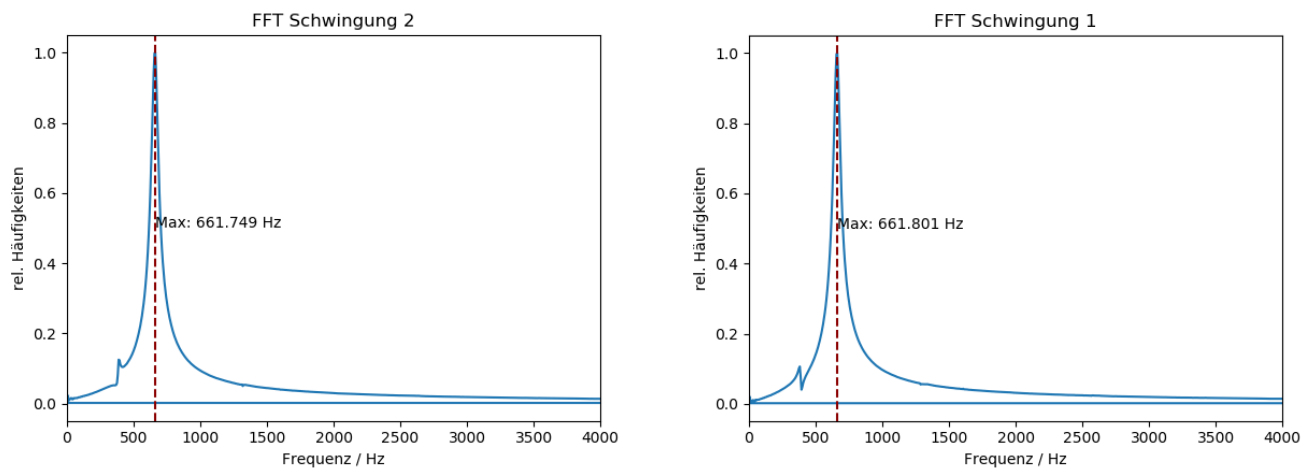


Abbildung 14: Analyse mit Fouriertransformation (oben) wobei in Rot die aus dem Peak-Schwerpunkt ermittelte Frequenz eingezeichnet ist

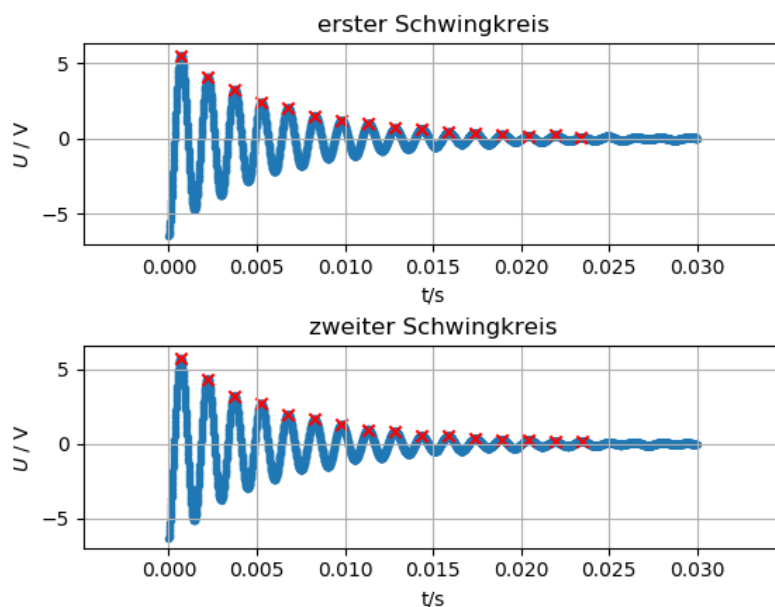


Abbildung 13: Analyse mit Peaks (links), wobei in Rot die mit scipy ermittelten Peaks eingezeichnet sind. Die Daten beziehen sich auf die mit dem Eisenkern gekoppelten Spulen.

Analog kann aus der gleichsinnigen Anregung  $f_+$  ermittelt werden. Folgende Werte wurden bestimmt:

$$f_{-FFT} 661,775 \pm 0,037 \text{ Hz}, \quad f_{-peak} = 659,19 \pm 6,15 \text{ Hz} \Rightarrow f_- = 661,775 \pm 0,037$$

$$f_{+FFT} 384,2247 \pm 0,0092 \text{ Hz}, \quad f_{+peak} = 384,479 \pm 2,08 \text{ Hz} \Rightarrow f_+ = 384,2247 \pm 0,0092$$

Aus den ermittelten Werten für die Frequenzen der Fundamentalschwingungen kann nun die Kopplung bestimmt werden:

$$k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2} = 0,495782 \pm 4,5 \cdot 10^{-5}$$

Dies entspricht ziemlich genau dem erwarteten Wert von  $k = 0,5$  für den Weicheisenkern.

Für die Messung ohne Weicheisenkern geht man analog vor und erhält:

$$f_- = 1096, \pm 4,09 \text{ Hz}, \quad f_+ = 999,81 \pm 0.1 \text{ Hz} \Rightarrow k = 0,0923 \pm 0,0037$$

Die Kopplung ist also deutlich schwächer.

#### 4.2.3 Auswertung Schwebung

Die Schwebung kann prinzipiell ähnlich analysiert werden, wie auch die gekoppelten Schwingungen. Die Frequenzen wurden wieder durch die Fourier-Transformation bestimmt (Abbildung 15). Mit diesen erhält man die Frequenz der gekoppelten Schwingung sowie die der Schwebung:

$$f_k = 1062,43 \pm 4,42 \text{ Hz}, \quad f_{sch} = 68,75 \pm 4,42 \text{ Hz}$$

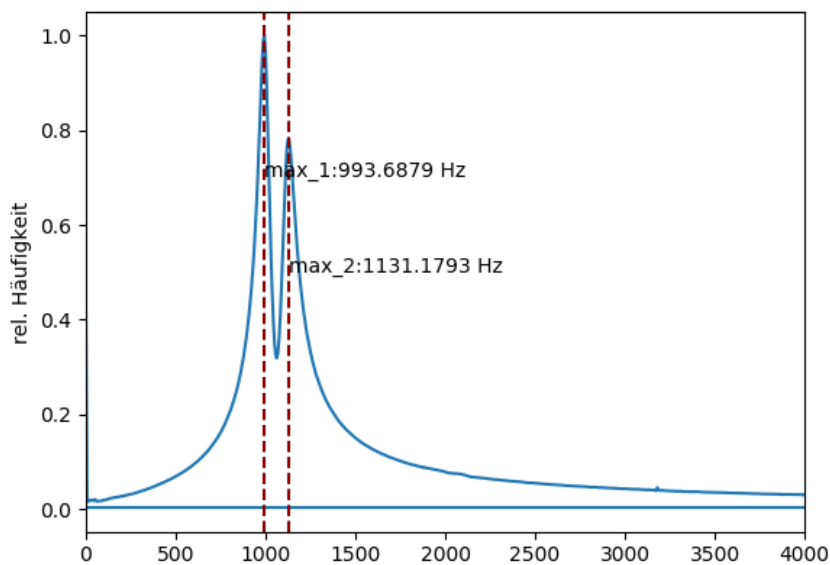


Abbildung 15: Frequenzanalyse der Schwebung wobei max\_1  $f_+$  und max\_2  $f_-$  markiert.

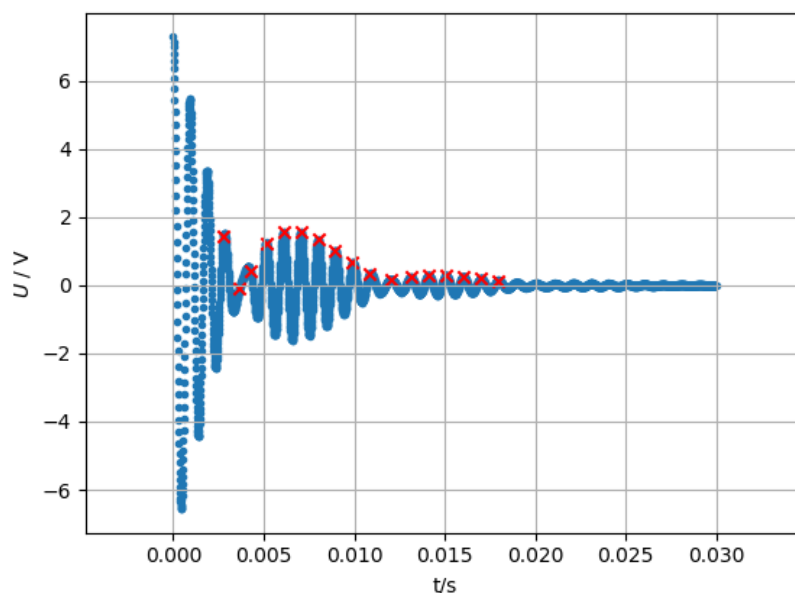


Abbildung 16: Rohdaten mit eingezeichneten Peaks

$f_k$  kann außerdem noch annähernd aus der Verteilung der Peaks bestimmt werden (Abbildung 16), wobei ersichtlich ist, dass die Peak-Bestimmung im Fall der Schwebung relativ stark fehlerbelastet ist:

$$f_{k\_peaks} = 1054,71 \pm 22,24 \text{ Hz}$$

Trotzdem stimmt dieser Wert ansatzweise mit dem aus der Fourier-Transformation berechneten überein. Die Frequenz der Schwebung lässt sich kaum auf andere Weise bestimmen, da die Dämpfung des Schwingkreises zu groß war. Eine Analyse der Verschiebung  $\Delta t$  zwischen den Spannungen der beiden Schwingkreise ist nicht möglich, da gemäß dem Versuchsaufbau in der Praktikumsmappe nur eine Spannung gemessen wurde.

## 5. Zusammenfassung

Insgesamt konnten sowohl die Werte für die verwendeten Bauteile, als auch die Kopplungsgrad der durch den Weicheisenkern gekoppelten Schwingkreise sehr gut im Rahmen der Herstellerangaben und Erwartungen bestimmt werden. Die Analyse der Peaks sowie die Messung des Aperiodischen Widerstandes hingegen sind verbesserungswürdig. Sollte der Versuch erneut durchgeführt werden ist außerdem darauf zu achten, dass im Fall der Schwebung die Spannung an beiden Schwingkreisen abgenommen wird.

## 6. Anhang

Folgende Programme wurden im Rahmen der Auswertung des Versuchs erstellt:

- Widerstand.py: Auswertung der Widerstandsmessung durch lineare Regressionen
- Kondensator.py: Analyse der Auf-/Entladung des Kondensators sowie der entsprechenden Residuen
- Charakterisierung\_Spule.py: Auswertung des Schwingfalles sowie Berechnung der Induktivität und des inneren Widerstands der Spule (bzw. Restwiderstand)
- Schwingkreis.py: Allgemeinere Auswertung des gedämpften Schwingkreises
- Schwebung.py: Analyse der Schwebung
- Gegen und Gleich.py: Analyse der gegen-/gleichsinnig gekoppelten Schwingkreise sowie Bestimmung der entsprechenden Frequenzen/Kopplungsgrade

### Anmerkung

Die Auswertung der Versuche erfolgte in Zusammenarbeit mit Patrick Schillings und Denise Köhn