Inhalt

1.Versuchsziel
2.Physikalische Grundlagen
2.1.Auf- und Entladevorgänge von Kondensatoren
2.1.1.Aufladen
2.1.2.Entladen
2.2.Gedämpfte Schwingungen
2.3.Gekoppelte Schwingungen
3. Charakterisierung des Widerstandes und des Kondensators
3.1.Versuchsaufbau4
3.2.Ablauf des Experiments
3.3.Durchführung der Messung5
3.3.1.Charakterisierung des Widerstandes5
3.3.2.Auf-/Entladevorgang des Kondensators
3.4.Auswertung6
3.4.1.Charakterisierung des Widerstandes
3.4.2.Auf-/Entladevorgang des Kondensators
4.Gekoppelte Schwingkreise
4.1.Versuchsaufbau9
4.2.Ablauf des Experiments9
4.3. Durchführung der Messung
4.4.Auswertung
4.4.1.Gleichsinnige Anregung
4.4.2.Gegensinnige Anregung
4.4.3.Schwebung
5.Zusammenfassung

1. Versuchsziel

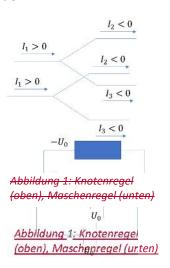
Das Ziel des Versuchs ist die Herbeiführung der induktiven Kopplung zweier Schwingkreise. Dabei werden die Fälle der Schwebung und der gleich- und gegensinnigen Anregungen der einzelnen Schwingkreise herbeigeführt. Um die Schwingkreise besser charakterisieren zu können soll vor Beginn des Hauptversuches der Kondensator in zwei Vorversuchen charakterisiert werden.

2.Physikalische Grundlagen

Wichtig für die Herleitung der Gleichungen, die den Schwingkreis beschreiben, ist das Ohmsche Gesetz

$$U = I \cdot R$$

Außerdem werden die Kirchhoffschen Regeln benötigt: Zum einen die Knotenregel, $\sum I_i=0$, die besagt, dass sich der Strom an jedem Knoten so aufteilt, dass die Ladung erhalten ist. Zum anderen ist die Maschenregel wichtig, welche aussagt, dass Spannung sich an Maschen genauso verhält wie Strom an Knoten: $\sum U_i=0$ (vgl. Abb.1).



2.1. Auf- und Entladevorgänge von Kondensatoren

2.1.1.Aufladen

Zum Zeitpunkt t=0 fließt der maximale Strom $I_0=\frac{U_0}{R}$. Wird der Kondensator aufgeladen, so baut sich eine Spannung U_C auf, die der Ladespannung U_0 entgegenwirkt. Sobald $U_C=U_0$, versiegt der Ladestrom, der Kondensator ist aufgeladen. Aus der Maschenregel ergibt sich:

$$U_0 - U_C(t) = I(t) \cdot R$$

Mit $C \cdot U_C = Q$ und $I = \frac{dQ}{dt}$ ergibt sich:

$$U_0 - U_C(t) = R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

Und durch Integration erhält man schließlich:

$$U_c(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$
 bzw. $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

mit $\tau = R \cdot C$ als Zeitkonstante des RC-Kreises.

2.1.2.Entladen

Überbrückt man die Spannungsquelle durch einen Leiter, sobald der Kondensator aufgeladen ist, so resultiert dies in einem Entladestrom, der vom Kondensator ausgeht. Aus der Maschenregel ergibt sich wieder:

$$R \cdot I(t) + U_C(t) = 0$$

Daraus folgt wiederum mit $Q = C \cdot U_C$ und $I = \frac{dQ}{dt}$:

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t) = 0$$

Analog zum Ladevorgang kann man aus dieser Differentialgleichung durch Integration mit Randbedingungen Strom und Spannung bestimmen:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$
 bzw. $I(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$,

wobei $\tau = R \cdot C$.

2.2.Gedämpfte Schwingungen

Für einen Schwingkreis, der aus einer Serienschaltung von R, L und C besteht, kann man die Schwingungsgleichung wieder aus der Maschenregel herleiten: $U_0 = U_R + U_L + U_C$.

Insgesamt ergibt sich dann als inhomogene Differentialgleichung:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{U_0}{L}$$

mit
$$\delta = \frac{R}{2L}$$
 und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Die genaue Lösung der Differentialgleichung soll an dieser Stelle nicht diskutiert werden, da sie für die durchgeführten Teile des Versuches nicht relevant ist. Generell kann man folgende Fälle beobachten (vgl. Abb.2):



- Aperiodischer Grenzfall ($\delta = \omega_0$)
- Schwingfall ($\delta < \omega_0$)

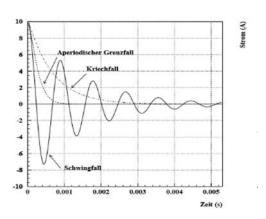


Abbildung 2:Schwingungsfälle mit Dämpfung

2.3. Gekoppelte Schwingungen

Man kann zwei (identische) Schwingkreise induktiv miteinander koppeln. Für das gekoppelte System ergibt sich:

$$I_1 + k \cdot I_2 + \frac{I_1}{L \cdot C} = 0$$

$$I_2 + k \cdot I_1 + \frac{I_2}{L \cdot C} = 0$$

Hier wurde der Einfachheit halber der Dämpfungsterm weggelassen. Aus diesem System lassen sich die Kopplung k (0 < k < 1) und die Eigenfrequenzen ω_+ und ω_- wie folgt berechnen:

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} = \omega_+ < \omega_0 < \omega_- = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}$$

 ω_+ ist die beobachtete Schwingungsfrequenz, wenn die Schwingkreise derart aufgeladen werden, dass in der Spule I_1 und I_2 in dieselbe Richtung fließen. Dieser Fall wird "gleichsinnige Anregung" genannt. Fließen I_1 und I_2 in entgegengesetzter Richtung, so spricht man von "gegensinniger Anregung", die charakterisierende Schwingungsfrequenz ist in diesem Fall ω_- . Aus den Frequenzen dieser beiden Fälle kann man den Wert der Kopplung bestimmen:

$$k = \frac{f_{-}^{2} - f_{+}^{2}}{f_{-}^{2} + f_{+}^{2}}$$

Die Frequenz der gekoppelten Schwingung ist dann: $f_k = \frac{f_- + f_+}{2}$.

Eine weitere Möglichkeit ist die Aufladung nur eines Kondensators. Die sich einstellende Spannung hat die Form einer Schwebung mit der Frequenz $f_{schw} = \frac{f_- - f_+}{2}$.

3. Charakterisierung des Widerstandes und des Kondensators

3.1. Versuchsaufbau

Zur Charakterisierung des im Ladevorgang des Kondensators verwendeten Widerstands wird ein Schaltkreis nach dem nebenstehenden Schaltbild aufgebaut (Abb.3). Dabei wird das Sensor-CASSY sowohl als Spannungsquelle, als auch als Messgerät für Strom und Spannung verwendet. Der verwendete Widerstand soll laut Hersteller $R=100\Omega$ sein.

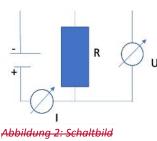


Abbildung 2: Schaltbild Widerstandscharakterisierung

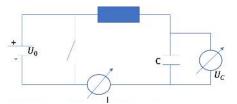


Abbildung 3: Schaltbild Laden des Kondensators

Nach der Charakterisierung des Widerstandes kann mit der Bestimmung der Zeitkonstanten $\tau=R\cdot C$ begonnen werden. Dazu wird ein Schaltkreis mit Kondensator aufgebaut (Abb. 4) unter Verwendung des zuvor charakterisierten Widerstandes. Der eingebaute Kondensator habe nach Herstellerangaben eine Kapazität von $C=10\mu F$. Wichtig an diesem Aufbau ist

der parallel zur Stromquelle geschaltete Taster, um die Stromquelle

nach dem Aufladevorgang zu überbrücken. Auch in diesem Teil des Experiments wird das Sensor-CASSY sowohl als Stromquelle, als auch als Messgerät verwendet. Der Hersteller gibt Die systematischen Fehler auf \boldsymbol{U} und \boldsymbol{I} wie folgt an:

$$\sigma_{Ui,syst} = (0.01 \cdot U_i + 0.005 \cdot U_{Bereichsendwert}) / \sqrt{3}$$

$$\sigma_{Ii,syst} = (0.02 \cdot I_i + 0.005 \cdot I_{Bereichsendwert}) / \sqrt{3}$$

Zusätzlich werden die Messungen am Kondensator auch am Oszilloskop aufgezeichnet und ausgewertet.

3.2. Ablauf des Experiments

Um den Betrag des Ohmschen Widerstandes zu bestimmen, legt man eine Gleichspannung an, die im Laufe der Messung variiert wird, wobei der Spannungsabfall am Widerstand mit dem Sensor-CASSY gemessen wird. Durch lineare Regression lässt sich aus den Messungen von Strom und Spannung der eigentliche Widerstand R bestimmen. Für jeden eingestellten Wert von U wird eine längere Rauschmessung durchgeführt, um später den Fehler auf R besser abschätzen zu können.

Nachdem der Widerstand charakterisiert worden ist, wird mit dem Laden des Kondensators begonnen. Bei geöffnetem Schalter wird die Stromquelle eingeschaltet und die Ladekurve aufgezeichnet, bis der Kondensator mit der Spannung U_0 geladen ist. Danach wird die Spannungsquelle mithilfe des Tasters überbrückt, sodass der Kondensator sich wieder entlädt.

3.3. Durchführung der Messung

3.3.1.Charakterisierung des Widerstandes

Es wurden höhere Widerstände präferiert, da sie höhere Spannungen ohne Überlastung (Belastbarkeit 2W) aushalten ($P=\frac{U^2}{R}$). Zunächst wurde ein Widerstand von $R=1k\Omega$ gewählt, nach kurzer Diskussion wurde die Wahl jedoch auf $R=100\Omega$ geändert, da der gemessene Strom I nach dem Ohmschen Gesetz $U=I\cdot R$ sonst zu gering gewesen wäre. Die Messung wurde für fünf verschiedene Werte von U jeweils mit folgenden Messparametern durchgeführt:

INTERVALL	10 μs
ANZAHL MESSWERTE	16.000
DAUER DER MESSUNG	160 ms

Diese Einstellungen wurden für sämtliche Messungen verwendet. Durch die hohe Anzahl von Messwerten ist später eine Rauschmessung möglich, um die statistische Fluktuation der Messwerte zu bestimmen.

3.3.2.Auf-/Entladevorgang des Kondensators

Nachdem der Widerstand bestimmt worden ist, kann mit der Betrachtung des Kondensators fortgefahren werden. Zunächst wurde die Auswertung am Oszilloskop durchgeführt, anschließend wurde die Messung noch einmal wiederholt und mit Hilfe des Sensor-CASSY aufgezeichnet. In beiden Fällen ist es wichtig, geeignete Trigger zu wählen, damit die Messung zum richtigen Zeitpunkt gestartet wird. Bei einer angelegten Spannung von U = 5,09V wurden folgende Trigger gewählt:

Aufladevorgang	Entladevorgang
0, 05 <i>V</i>	5,07 <i>V</i>

Nachdem die Trigger eingestellt worden sind, kann mit der Aufzeichnung des Auf- und Entladevorgangs begonnen werden.

3.4. Auswertung

3.4.1.Charakterisierung des Widerstandes

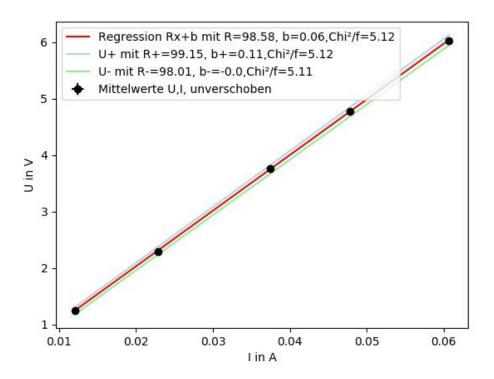


Abbildung 5: Regression zur Bestimmung des Widerstandes

Von den fünf gemessenen Spannungen zu je 16000 Messpaaren wird jeweils der Mittelwert, die Standardabweichung und der statistische Fehler des Mittelwerts gebildet. Beispielhistogramme finden sich in Abb.6. Aus den Standardabweichungen wird wiederum der Mittelwert gebildet, um ihn als statistischen Fehler für folgenden Einzelmessungen zu verwenden.

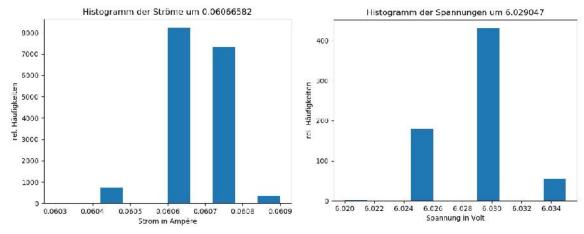


Abbildung 6: Beispielhistogramme Stat. Fluktuation

Mit den fünf Punkten, deren Fehler allesamt von der Digitalisierung beschränkt waren, wird eine lineare Regression einer Auftragung von U gegen I durchgeführt mit einem (zu großen) χ^2 pro Freiheitsgrad von 5,12 (vgl. Abb.5). Sie ergibt eine Steigung von $R=98,58\pm0,11~\Omega$ und einen y-Achsenabschnitt von $b=0,06\pm0,0046~V$, der für den Widerstand aber nicht von Bedeutung ist.

Der Residuenplot dazu (vgl. Abb.7) weist auch darauf hin, dass die Fehler zu gering sind, aber es ist unklar, warum. Um den systematischen Fehler von U und I auf R fortzupflanzen, wird die maximale Steigungsänderung der Anpassung jeweils bei einer Addition, beziehungsweise einer Subtraktion des systematischen Fehlers auf U und I ermittelt und der Durchschnitt der beiden gemäß

$$\Delta R_{syst,U} = \left(\begin{array}{cccc} R_{U,-} - R + R_{U,+} - R \end{array} \right) / 2 \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{cccc} R_{syst,U}^2 + R_{syst,I}^2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccc} R_{syst,I} - R_{syst,I} \end{array} \right) / 2 = \left(\begin{array}{cccc} R_{syst,U} - R_{syst,I} - R_{syst,I} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccc} R_{syst,U} - R_{syst,I} - R_{syst$$

Insgesamt erhält man $R = 98,58 \pm 0,11 \pm 1,27$

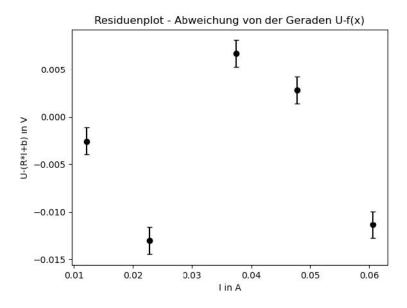


Abbildung 7:Residuenplot für Wiederstand

3.4.2. Auf-/Entladevorgang des Kondensators

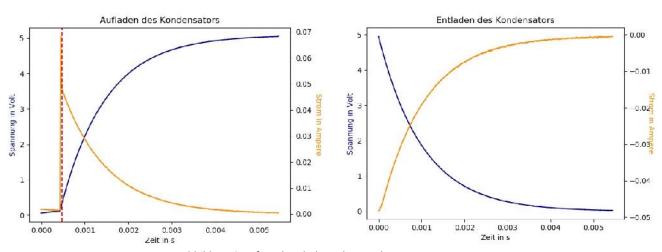


Abbildung 8:Auf- und Entladung des Kondensators

Die gemessenen Aufladungs- und Entladungskurven des Kondensators über den nun bekannten Widerstand finden sich in Abb.8. Für den Aufladestrom wird nur der Bereich hinter dem roten Strich verwendet. Eine Offsetkorrektur wird nach bestem Vermögen über die minimal gemessenen Ströme, bzw. Spannungen versucht. Weiterhin werden nur noch der Aufladestrom und die Entladungsspannung betrachtet, um zunächst die Zeitkonstante τ zu bestimmen.

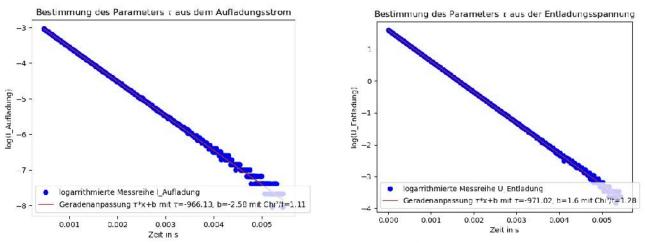


Abbildung 9: lineare Regression zu Bestimmung von au

Die beiden Messreihen werden logarithmiert und eine lineare Regression durchgeführt, mit der $-\frac{1}{\tau}$ bestimmt wird (siehe Abb.9). Es ergibt sich:

Für die Aufladung:
$$-\frac{1}{\tau} = -966,13 \pm 0,44 \frac{1}{s}$$

Für die Entladung:
$$-\frac{1}{\tau} = -971,02 \pm 0,15 \frac{1}{s}$$

An den Residuenplots kann man nun anhand der Verteilung erkennen, ob der Offset genug korrigiert wurde und diesen gegebenenfalls noch einmal anpassen. Das endgültige Ergebnis findet sich in Abb.10. Die beiden Ergebnisse werden nach der Methode des gewichteten Mittelwerts zusammengefasst. Daraus wird dann die Kapazität C des Kondensators $C = \frac{1}{\tau \cdot R}$ bestimmt und die statistischen Fehler der Zeitkonstanten darauf fortgepflanzt. Die Fehler auf R aus der Widerstandscharakterisierung werden quadratisch addiert und als systematische Fehler auf C fortgepflanzt.

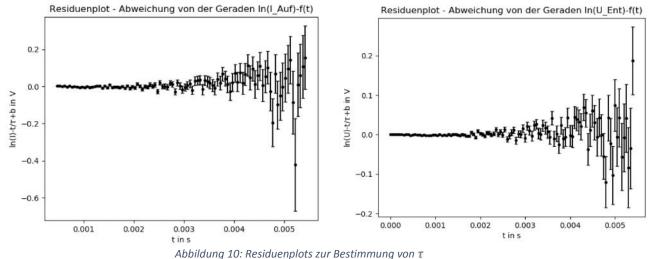


Abbildung 10. Residuenplots zur Bestimmung von

Insgesamt erhält man aus der Messung für C:

 $C = 1,045 \cdot 10^{-5} \pm 1,5 \cdot 10^{-9} \pm 1,35 \cdot 10^{-7} F$ (zum Vergleich: nach Hersteller 10 μF)

4. Gekoppelte Schwingkreise

4.1. Versuchsaufbau

Es werden zwei identische L-C-Schwingkreise wie in Abb. 11 gezeigt aufgebaut und über die Spulen induktiv gekoppelt. Als Kondensatoren werden die im Vorversuch charakterisierten Kondensatoren mit einer Kapazität von $C=10\mu F$ eingebaut. Der Innenwiderstand der Spule ist vom Hersteller gegeben zu R=0.6 . Zwischen den Schwingkreisen wird außerdem ein Schalter installiert (vgl. Abb.12), der das

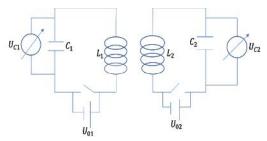
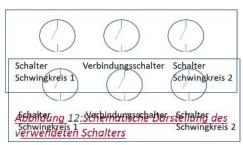


Abbildung 5: Schaltbild induktiv gekoppelte Schwingkreise

gleich- und gegensinnige Aufladen der beiden Kondensatoren ermöglicht sowie das Herbeiführen einer Schwebung. Zusätzlich zu diesem Aufbau ist noch ein Weicheisenkern vorhanden, welchen man bei Bedarf benutzen kann, um eine stärkere Kopplung hervorzurufen. Der Spannungsverlauf in den Schwingkreisen wurde mit zwei Sensor-CASSYs gemessen, die gleichzeitig als Messgerät und als Spannungsquelle dienen.

4.2. Ablauf des Experiments

Nachdem die beiden Schwingkreise aufgebaut sind, kann mit der Messung begonnen werden. Zunächst wird nur der Fall der Schwebung betrachtet. Hierzu wird nur einer der Schwingkreise an die Spannungsquelle angeschlossen, so dass der Kondensator des einen Schwingkreises aufgeladen wird, der des Anderen aber unaufgeladen bleibt. Überbrückt man nun die Spannungsquelle und



schiebt man die Schwingkreise zusammen, so stellt sich eine Schwebung der Spannung in den beiden Schwingkreisen ein, die mit dem Sensor-CASSY gemessen wird.

Für gleich- und gegensinnige Anregung müssen zunächst beide Schwingkreisschalter geöffnet sein, damit die Kondensatoren mit der jeweiligen Orientierung aufgeladen werden können. Der Verbindungsschalter bleibt hierbei geschlossen. Sobald die

Aufladung abgeschlossen ist, werden die beiden

Abbildung 6:Schematische Darstellung des Verwendeten Schalters

Schwingkreisschalter geschlossen, um die Spannungsquelle zu überbrücken, und der Verbindungsschalter wird geöffnet, damit die gleich- bzw. gegensinnige Anregung aufgezeichnet werden kann.

4.3. Durchführung der Messung

Zunächst wurden Spulen mit 500 Windungen verwendet, allerdings hatten diese einen zu großen Widerstand, sodass die Dämpfung zu groß wurde und keine wirkliche Schwingung mehr zu erkennen war. Aus diesem Grund wurden im Folgenden Spulen mit 250 Windungen verwendet.

Bei der Schwebung wurde eine Ausgangsspannung von $U_0 = 7.5V$ an den ersten Schwingkreis angelegt. Der Trigger für die Messung des Sensor-CASSY wurde zu $U_{trig} = 7V$ gewählt. Im Anschluss an diese Messung wurde unter Verwendung des Eisenkerns eine stärkere Kopplung herbeigeführt und eine erneute Messung gestartet.

Für die gegen- und gleichsinnige Anregung wurde eine Anfangsspannung von $U_{01}=\pm U_{02}=6.7~V$ gewählt, der Trigger für das Sensor-CASSY wurde auf $U_{trig}=6.5~V$ festgesetzt. Auch hier wurde die Messung unter Zuhilfenahme eines Eisenkerns wiederholt, um die Kopplung zu verstärken.

4.4. Auswertung

In der folgenden Auswertung wird nur auf die Messungen mit Weicheisenkern eingegangen, die Auswertung für Schwingkreise ohne Weicheisenkern erfolgt analog und liefert die Ergebnisse:

$$f_{-} = 1096 \pm 4.09 Hz$$

 $f_{+} = 999.81 \pm 0.1 Hz$
 $k = 0.0923 \pm 0.0037$

Hier ist die Kopplung deutlich geringer als mit Weicheisenkern.

Die Fehler auf f_- und f_+ ergeben sich aus der Standardabweichung. Da man zwei Schwingkreise hat, ergeben sich auch zwei Fehler.

4.4.1. Gleichsinnige Anregung

Lädt man die beiden Kondensatoren genau gleich auf, so kann man eine gleichsinnige Anregung beobachten. Aus der Messung der Spannung an beiden Schwingkreisen erhält man die folgenden Daten:

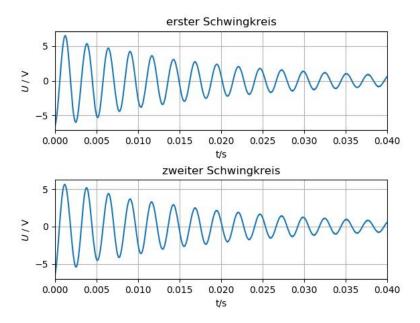


Abbildung 13: Rohdaten Gegensinnige Anregung

Aus diesen Rohdaten kann man mithilfe von FastFourier \mathbf{T} ransformation (FFT) die Schwingfrequenz f_+ herausfinden:

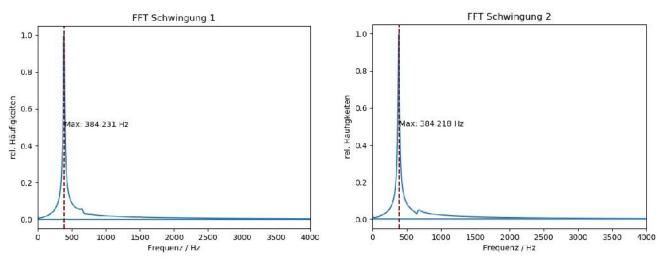


Abbildung 14:links: FFT von Schwingkreis 1, rechts: FFT von Schwingkreis 2

 $f_{+FFT} = 384,2247 \pm 0,0092 Hz$

Außerdem ist es möglich, f_+ mit der Peakanalyse zu bestimmen. Bildet man den Mittelwert aus den Abständen der Peaks, so erhält man:

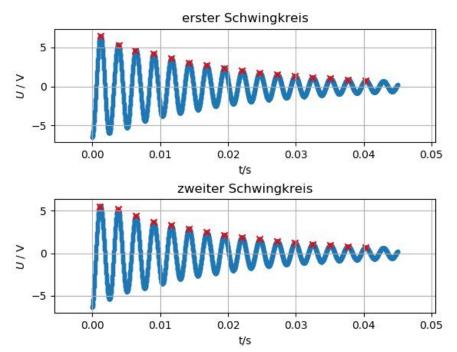


Abbildung 15:Peakanalyse Gleichsinnige Anregung

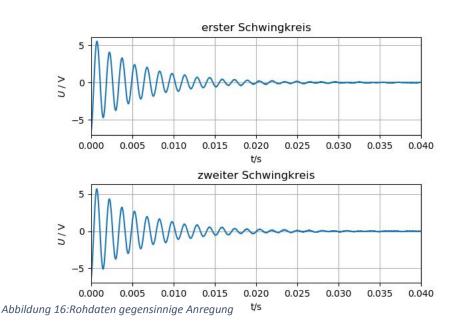
$$f_{+peak} = 383,479 \pm 2,08 Hz$$

Kombiniert man die Ergebnisse beider Methoden, so erhält man insgesamt für f_+ :

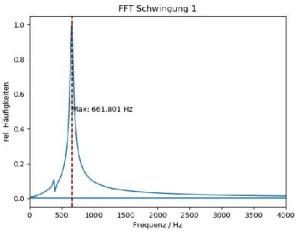
$$f_{+} = 384,2247 \pm 0,0092 Hz$$

4.4.2.Gegensinnige Anregung

Lädt man die Kondensatoren genau entgegengesetzt zueinander auf, so führt man das genaue Gegenteil der gleichsinnigen Anregung herbei: Die gegensinnige Anregung. Die gemessenen Daten sehen dann wie folgt aus:



Über die FFT dieser Daten lässt sich f_- bestimmen zu:



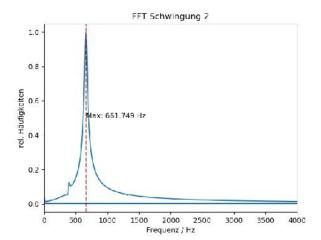


Abbildung 17: FFT für gegensinnige Anregung

$$f_{-FFT} = 661,775 \pm 0,037 Hz$$

Man kann f_{-} auch durch Peakanalyse bestimmen und erhält:

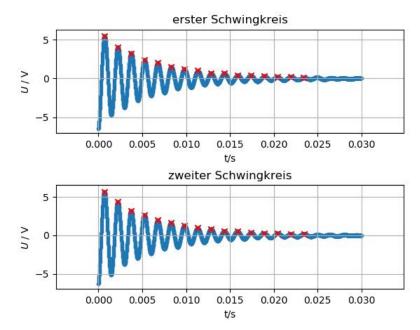


Abbildung 18: Peakanalyse gegensinnige Anregung

$$f_{-peak} = 659,19 \pm 6,15 Hz$$

In Kombination erhält man aus beiden Methoden folgendes Ergebnis für f_{-} :

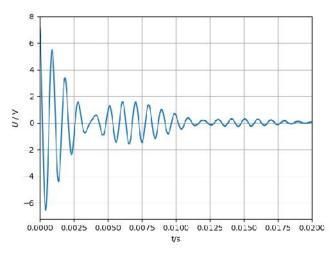
$$f_{-} = 661,775 \pm 0,037 Hz$$

Aus den soeben bestimmten Werten für f_- und f_+ kann man nun die Stärke der Kopplung berechnen:

$$k = \frac{f_{-}^2 - f_{+}^2}{f_{-}^2 + f_{+}^2} = 0.495782 \pm 4.5 \cdot 10^{-5}$$

Dies entspricht in etwa dem erwarteten Wert von k=0.5 für gekoppelte Schwingkreise mit Weicheisenkern.

4.4.3.Schwebung



die Schwebungsfrequenz berechnen: $f_{schw} = \frac{f_- - f_+}{2}$.

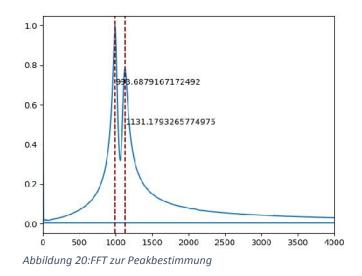
Die Messung sieht man in Abb.19.
Betrachtet wird die Messung ohne
Weicheisenkern. Prinzipiell funktioniert
die Auswertung des Schwebungsfalls
ähnlich wie die der beiden bereits
besprochenen Fälle. Mit Hilfe von FFT
werden die beiden benötigten
Frequenzen bestimmt. Im Fall einer
Schwebung gibt die FFT zwei Peaks aus,
aus denen man die Frequenzen ablesen
kann (vgl. Abb.20).

Hat man die Frequenzen, so kann man

Abbildung 19: Rohdaten Schwebung

Diese Berechnung stellt sich

vorliegenden Fall als sehr schwer dar, da der Versuch wie im Skript dargestellt aufgebaut wurde, der Aufbau aus dem Skript misst jedoch nicht die Spannung des zweiten Schwingkreises. Ohne diese zweite Spannungsmessung ist eine Auswertung (insbesondere der Phasenverschiebung) nur sehr erschwert möglich.



Aus der Messung erhält man:

$$f_{+} = 993,69 \pm 6,25 Hz$$

$$f_{-} = 1131,18 \pm 6,25 Hz$$

Daraus folgt: $f_{schw} = 68,745 \pm 4,42 \, Hz$

5.Zusammenfassung

Zusammenfassend kann man sagen, dass die bestimmten Charakteristika des Widerstandes und des Kondensators sehr genau mit den Herstellerangaben übereinstimmen. Die aus den Messungen der gekoppelten Schwingkreise bestimmten Kopplungsgrade sind ebenfalls sehr nah an den erwarteten Werten, sodass man sagen kann, dass der Messdurchlauf recht erfolgreich war.

Einzig die Fehler auf den Widerstand sind als problematisch anzusehen, sie sind zu gering, weswegen der Residuenplot keine optimale Form aufweist. Der Grund für den zu geringen Fehler ist leider nicht zu erkennen.