

# Messung von elektrischen Schwingungen

Mate Farkas und Christine Falter

## Inhalt

1. Versuchsziel.....	2
2. physikalische Grundlagen.....	2
2.1 gedämpfter LC-Schwingkreis .....	2
2.2 gekoppelte LC-Schwingkreise .....	3
3. vorbereitende Messungen .....	3
3.1 Charakterisierung der Ohmschen Widerstände .....	3
3.1.1 Aufbau und Durchführung.....	3
3.1.2 Auswertung .....	4
3.2 Auf-/Entladung eines Kondensators .....	5
3.2.1 Aufbau und Durchführung.....	5
3.2.2 Auswertung .....	5
4. Hauptversuche .....	6
4.1 gedämpfter Schwingkreis .....	6
4.1.1 Ziel des Versuches .....	6
4.1.2 Aufbau und Durchführung.....	7
4.1.3 Auswertung .....	7
4.2 gekoppelter Schwingkreis.....	8

## 1. Versuchsziel

Der Versuch setzt sich zusammen aus insgesamt zwei Vor- und zwei Hauptversuchen, die der Charakterisierung von elektrischen Schwingungen dienen sollen. Insbesondere sollen im Folgenden die gedämpfte Schwingung eines LC-Schwingkreises sowie die Kopplung von zwei solcher Schwingkreise analysiert werden, indem unter Anderem der Widerstand des aperiodischen Grenzfalls, sowie der Kopplungsgrad berechnet werden.

## 2. physikalische Grundlagen

Um die verwendeten Schaltungen mathematisch zu beschreiben benötigt man die sog. Maschenregel, welche besagt, dass die Summe der anliegenden gleich der Summe der abfallenden Spannungen ist. Für die Spannungen der verwendeten Bauteile gilt:

- Für den **Kondensator** (Kapazität  $C$ ) gilt:  $U = \frac{Q}{C}$  mit  $Q = \frac{dI}{dt}$
- Der **Widerstand** wird durch das ohmsche Gesetz beschrieben:  $U = IR$
- Für die **Spule** (Induktivität  $L$ ) gilt mit dem Induktionsgesetz:  $U = L \frac{dI}{dt}$

### 2.1 gedämpfter LC-Schwingkreis

Ein elektrischer Schwingkreis besteht aus einem Kondensator sowie aus einer Spule, wobei der Kondensator periodisch auf- und entladen wird. Lädt man beispielsweise den Kondensator auf und schließt anschließend den Stromkreis, so beginnt sich dieser zu entladen. Dabei fließt ein Strom. Beginnt dieser abzunehmen, erzeugt er in der Spule eine Induktionsspannung, welche die Abnahme hemmt, bis der Kondensator wieder aufgeladen ist. Anders als bei einem idealen Schwingkreis wird im gedämpften Schwingkreis die Energie  $dE = I^2 R dt$  in Wärme umgewandelt, wobei  $R$  dem Gesamtwiderstand der Schaltung entspricht. Für die theoretische Beschreibung fasst man  $R$  in einem ohmschen Widerstand zusammen. Mit der Maschenregel gilt:

$$U_0 = U_R + U_L + U_C = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{U_0}{L} = \frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q$$

Mit  $\delta = \frac{R}{2L}$  und  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . In dieser Form ist die Ähnlichkeit zur mechanischen Schwingung offensichtlich. Im Schwingfall gilt vereinfacht:

$$I(t) = I_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi) \text{ und } U_C(t) = U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t) \text{ mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

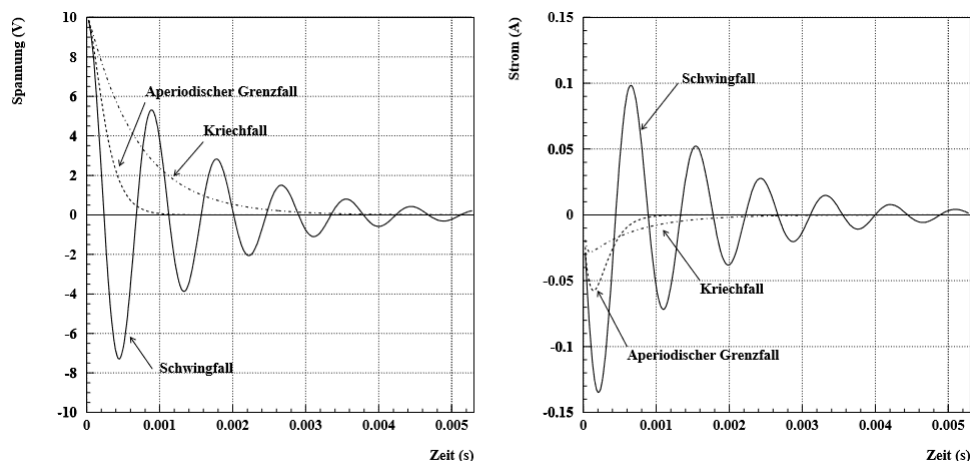


Abbildung 1: Spannungs-/Stromverlauf für den Kriechfall ( $\delta > \omega_0$ ), den aperiodischen Grenzfall ( $\delta = \omega_0$ ) und den Schwingfall ( $\delta < \omega_0$ )

Für den Grenzfall folgt:  $R_{ap} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

## 2.2 gekoppelte LC-Schwingkreise

Man kann zwei Schwingkreise induktiv mit einander koppeln. In diesem Versuch sollen sowohl die Schwebung, bei der die Schwingungsenergie zwischen den Kreisen hin und her pendelt, sowie die beiden Fundamentalschwingung, die bei gleich- bzw. gegensinniger Anregung der Kreise zu betrachten sind, ausgewertet werden.

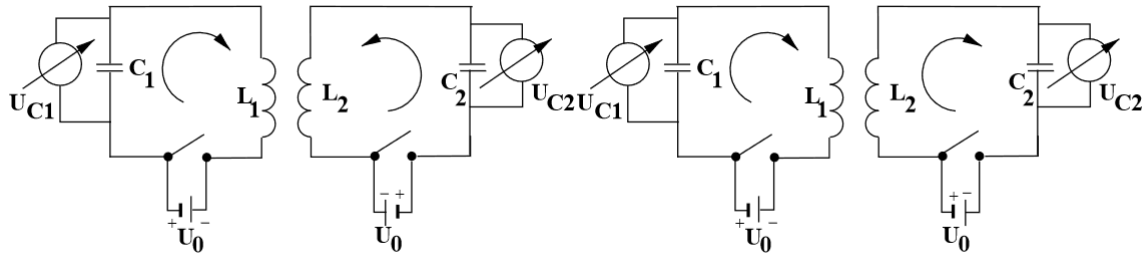


Abbildung 2: gleichsinnige (links) bzw. gegensinnige (rechts) Anregung von zwei gekoppelten Schwingkreisen

Für die Fundamentalschwingungen gilt:

$$\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{LC(1+k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \quad \omega_- = \frac{1}{\sqrt{LC(1-k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \Rightarrow k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2}$$

Im Fall der Schwebung gilt für die gekoppelten Schwingungen bzw. für die Schwebungsfrequenz:

$$f_k = \frac{f_- + f_+}{2} \approx f_0, \quad f_{schw} = \frac{f_- - f_+}{2}$$

## 3. vorbereitende Messungen

Bevor mit den Messungen der eigentlichen Schwingkreise begonnen werden konnte musste zunächst der verwendete Kondensator analysiert werden, wozu vorher eine Bestimmung des Widerstands nötig war.

### 3.1 Charakterisierung des Ohmschen Widerstandes

#### 3.1.1 Aufbau und Durchführung

Um den Betrag des Widerstands zu messen wird der Spannungsabfall  $U_R$  am Widerstand selbst und der im Kreis fließende Strom  $I$  gemessen (Abbildung 3).  $U_0$  wird durch die Gleichspannungsquelle  $S$  des Sensor Cassy geliefert. Es wurde immer eine Spannung eingestellt und dann über ein längeres Intervall eine Rauschmessung durchgeführt. Es wurden insgesamt 5 Messungen mit folgenden Messparameter durchgeführt:

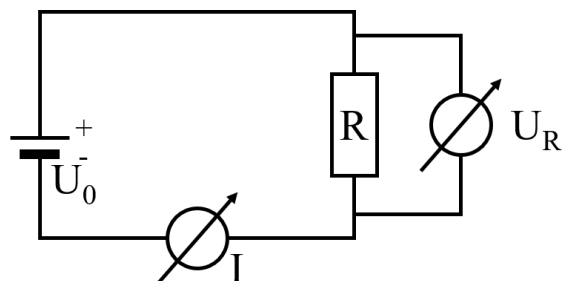


Abbildung 3: Schaltbild zur Aufnahme von Strom und Spannung am Widerstand

	Voltmeter (B)/Amperemeter (A)
Intervall [ $\mu s$ ]	10
Anzahl der Messpunkte	16000
Dauer der Messung [ms]	160

### 3.1.2 Auswertung

Die in den Rauschmessungen ermittelten Mittelwerte für Spannung und Stromstärke wurden gegeneinander geplottet, und unter Berücksichtigung der ermittelten statistischen Fehler eine lineare Regression durchgeführt (Abbildung 4), da der erwartete Zusammenhang linear ist ( $\rightarrow$  ohmsches Gesetz).

Nr.	Mittelwert		Standardabweichung		Fehler des Mittelwertes	
	Spannung [V]	Strom [mA]	Spannung [V]	Strom [mA]	Spannung [V]	Strom [mA]
1	1,2472	12,0684	0,0027	0,0780	0,000021	0,00062
2	2,2966	22,8296	0,0027	0,0692	0,000021	0,00055
3	3,7568	37,4328	0,0027	0,0819	0,000021	0,00065
4	4,7770	47,8212	0,0027	0,0790	0,000022	0,00062
5	6,0290	60,6658	0,0028	0,0927	0,000022	0,00073

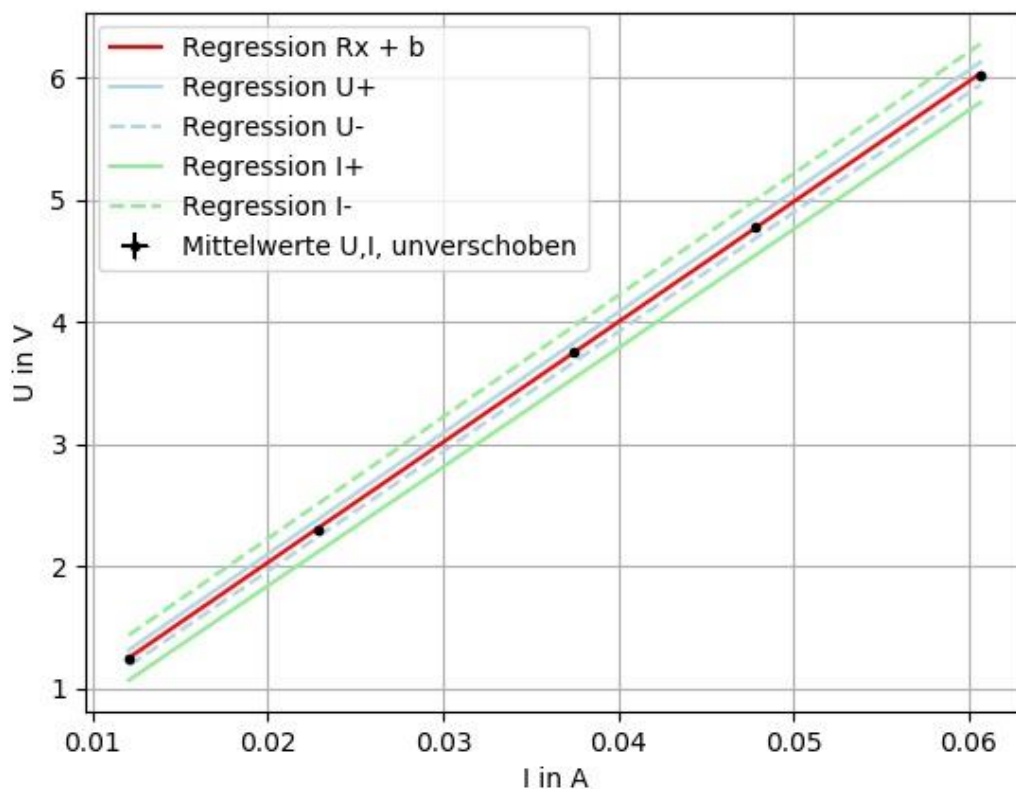


Abbildung 4: aus den Rauschmessungen ermittelte Werte (Tabelle) und lineare Regression auf die ermittelten Mittelwerte, sowie auf die, um den systematischen Fehler verschobenen Werte, zur Ermittlung von  $R$  sowie des systematischen Fehlers auf  $R$  (Graph)

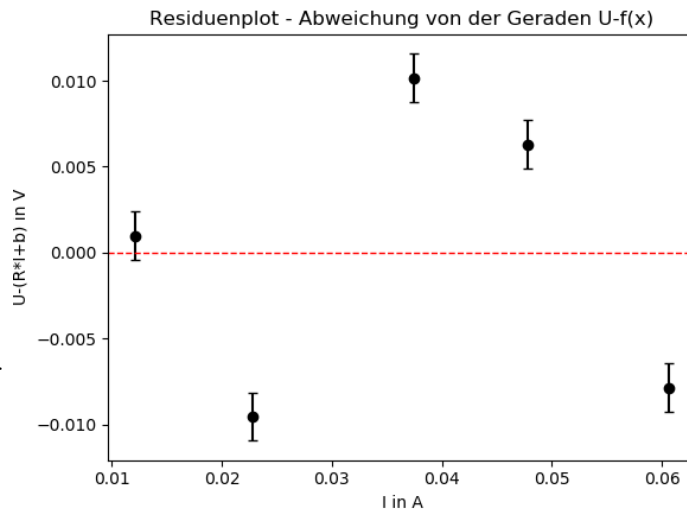
Die Standardabweichungen sind so klein, dass der Digitalisierungsfehler überwiegt, weshalb dieser stattdessen in die weiteren Berechnungen einfließt. Der so ermittelte Wert für  $R$  beträgt:

$$R = 98,58 \pm 0,11(\text{stat.}) \pm 1,27(\text{sys.}) \Omega$$

Der vom Hersteller angegebene Wert liegt bei  $100 \Omega$ . Zusätzlich wurde der Widerstand am Messtisch getestet, wobei ein Wert von  $99,48 \pm 0,25 \Omega$  ermittelt wurde. Also passen die Werte im Rahmen der Messgenauigkeit überein. Der bei der Regression ermittelte Wert für die Chi-quadrat-Verteilung liegt bei  $\chi^2/\text{ndof} = 15,35/3 \approx 5,12$ , was auf Grund der kleinen Fehler etwas zu hoch ist.

Dieser Zusammenhang wird auch deutlich, wenn man den Residuen Plot (Abbildung 5) betrachtet. Die Werte streuen recht stark um die Nulllinie, weshalb der Chi-quadrat-Wert etwas höher als erwartet ist.

Abbildung 5: Residuen Plot der Streuung der gemessenen Spannungswerte um die angepasste Gerade



## 3.2 Auf-/Entladung eines Kondensators

### 3.2.1 Aufbau und Durchführung

Nach Bestimmung des Widerstands, wird der Kondensator charakterisiert, indem a) bei der Aufladung und b) nach dem Überbrücken der Spannungsquelle bei der Entladung, sowohl die Spannung am Kondensator als auch der fließende Strom gemessen werden. Die Messung wurde sowohl mit dem Oszilloskop als auch mit dem Sensor Cassy durchgeführt. Dabei wurden folgende Trigger verwendet:

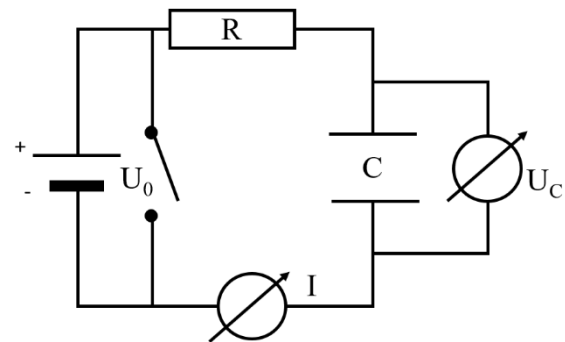


Abbildung 6: Schaltbild zur Bestimmung der Kapazität des Kondensators

Aufladung	Entladung
$U_C \geq 0,05 \text{ V}$	$U_C \leq 5,07 \text{ V}$

Der Wert für  $C$  soll anschließend aus der Zeitkonstante  $\tau = RC$  bestimmt werden.

### 3.2.2 Auswertung

a) Für die Aufladung wurde Folgendes ermittelt:

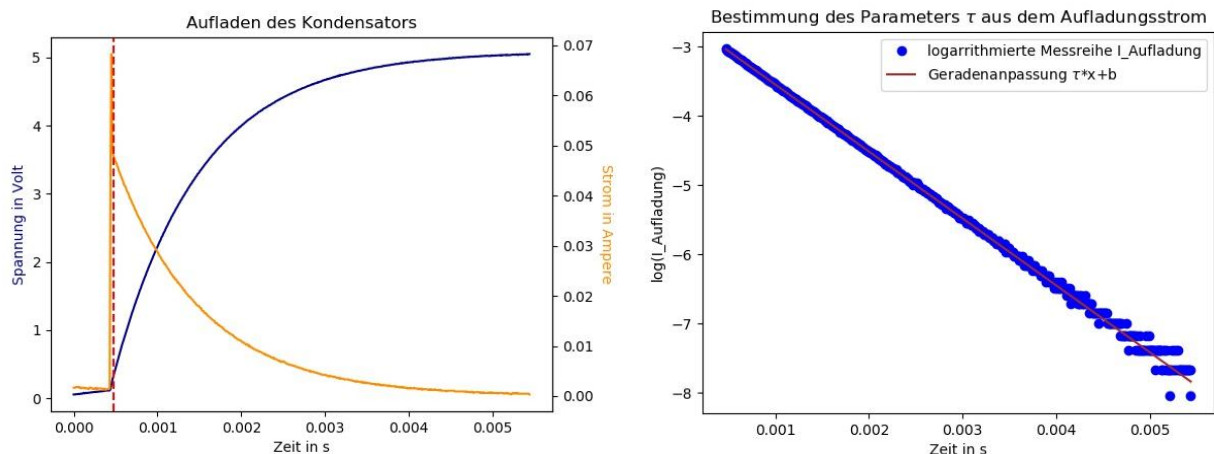


Abbildung 7: Aufladung des Kondensators mit Spannungs-/Stromkurve (links) sowie der Regression zur Bestimmung von  $\tau$  (rechts), wobei  $\tau$  hier dem Wert  $-\frac{1}{\tau}$  entspricht

Für  $\tau$  gilt:  $-\frac{1}{\tau} = -966,13 \pm 0,44 \frac{1}{s}$  mit ein Chi-quadrat-Wert von  $\chi^2/ndof \approx 1,11$

b) Für die Entladung wurde Folgendes ermittelt:

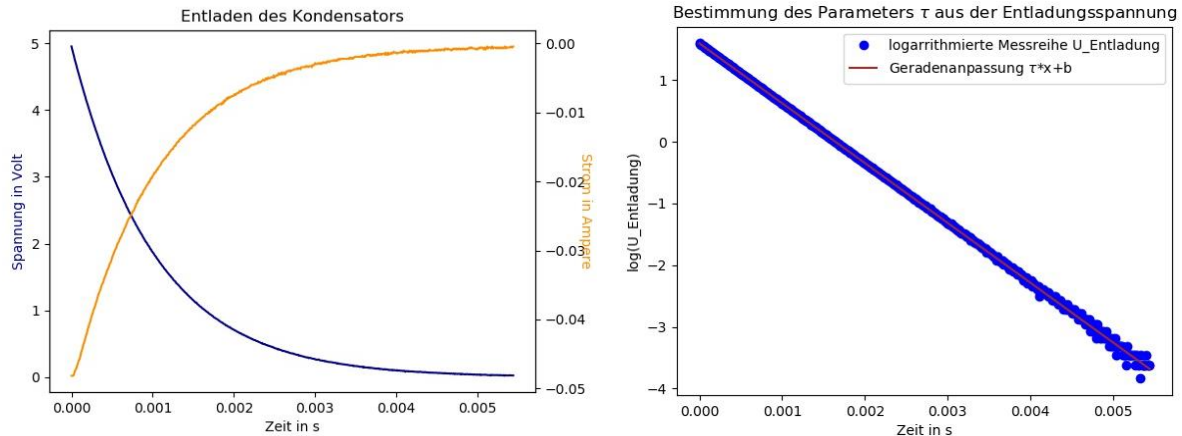


Abbildung 8: Entladung des Kondensators mit Spannungs-/Stromkurve (links) sowie der Regression zur Bestimmung von  $\tau$  (rechts), wobei  $\tau$  hier dem Wert  $-\frac{1}{\tau}$  entspricht

Für  $\tau$  gilt:  $-\frac{1}{\tau} = -971,02 \pm 0,15 \frac{1}{s}$  mit ein Chi-quadrat-Wert von  $\chi^2/ndof \approx 1,28$

An den Residuen Plots (Abbildung 9) kann man erkennen das der Offset genug korrigiert wurde. Auch die Werte, die die Chi-quadrat-Verteilung liefert deuten auf eine zuverlässige Anpassung hin.

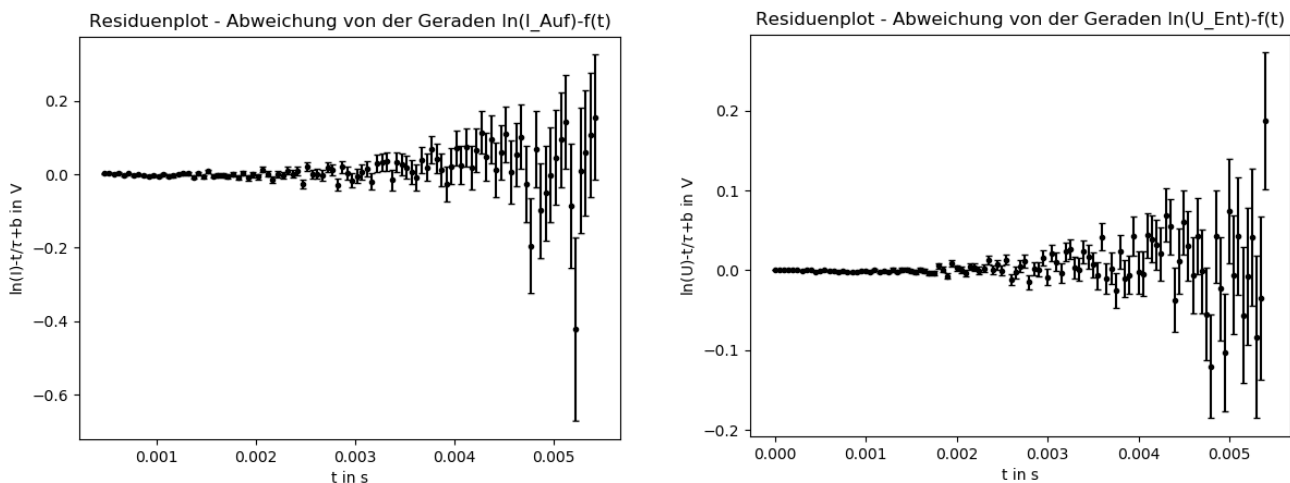


Abbildung 9: Residuen Plots für die Aufladung (links) bzw. die Entladung (rechts) des Kondensators

Die Ergebnisse werden als gewichtetes Mittel zusammengefasst und so die Kapazität, sowie deren Fehler bestimmt, wobei sich der systematische aus den Fehlern auf den Widerstand ergibt:

$$C = \frac{1}{\tau R} = 1,045 \cdot 10^{-5} \pm 1,5 \cdot 10^{-9}(\text{stat.}) \pm 1,35 \cdot 10^{-7}(\text{sys.})F$$

## 4. Hauptversuche

### 4.1 gedämpfter Schwingkreis

#### 4.1.1 Ziel des Versuches

Im Folgenden werden wir die Eigenschaften eines solchen Schwingkreises studieren und anhand der Messung die charakteristischen Größen berechnen. Unser Ziel ist es, die Dämpfungskonstante  $\delta$ , die Induktivität  $L$  der Spule und ihren inneren Widerstand abzuschätzen.

### 4.1.2 Aufbau und Durchführung

Der Aufbau erfolgt wie in Abbildung 10 dargestellt. Durch Drücken des Tasters entlädt sich der (vorher aufgeladene) Kondensator, dessen Spannung mit Cassy und mit einem Oszilloskop gemessen wurde, wobei die mit dem Oszilloskop ermittelten Daten für Abschätzungen während der Messung verwendet wurden. Da beide Datensätze denselben Prozess beschreiben, beschränken wir uns nur auf die durch Cassy-System aufgenommenen Größen. Die für die Messungen verwendeten Bauteile wurden mit dem Messtisch charakterisiert:

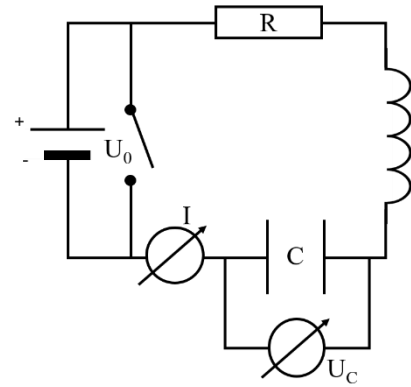


Abbildung 10: Schaltbild gedämpfter Schwingkreis

Widerstände R	$5.1 \, \Omega \pm 0.01 \, \Omega$ $46.6 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$ $100 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$ $208 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$ $173 \, \Omega \pm 1 \, \Omega$ $137.3 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$ $100.6 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$ $115.4 \, \Omega \pm 0.1 \, \Omega$
Induktivität I der Spule	$9.02 \, \text{mH} \pm 0.01 \, \text{mH}$
Kapazität C des Kondensators	$2.24 \, \mu\text{F} \pm 0.01 \, \mu\text{F}$

Das verwendete Messintervall betrug  $10 \, \mu\text{s}$ . Zudem wurden in Abhängigkeit des geschalteten Widerstandes unterschiedliche Trigger verwendet, um den Entladevorgang automatisch aufzuzeichnen.

### 4.1.3 Auswertung

Nach dem eine Offset-Korrektur durchgeführt wurde, wurden Frequenz  $f$  sowie die Dämpfungskonstante  $\delta$  aus den Amplituden bzw. der Einhüllenden ermittelt (Abbildung 11).

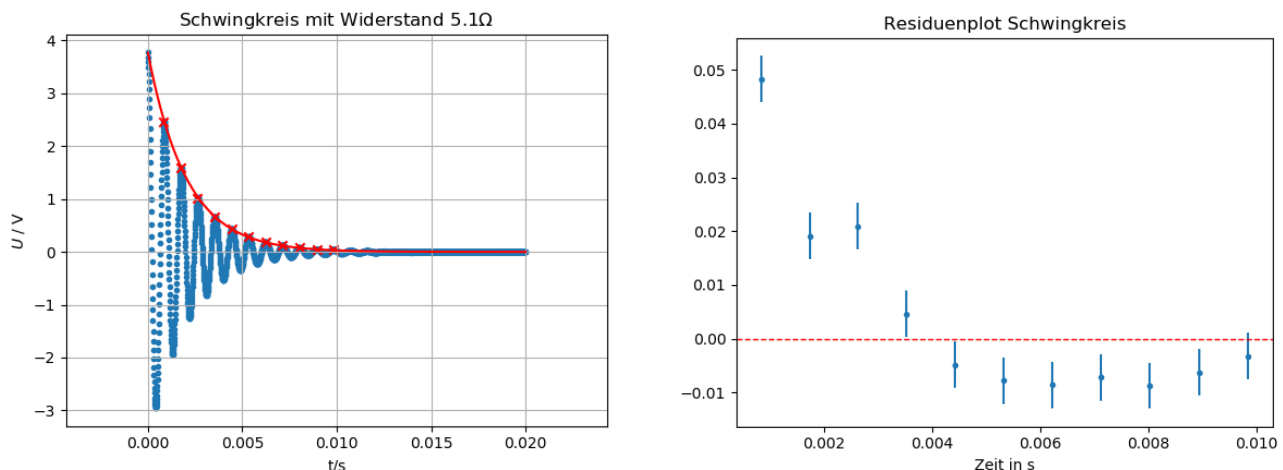


Abbildung 11: Rohdaten mit Peaks und Einhüllender (links) Residuen Plot der Einhüllenden und den Peaks (rechts)

Aus dem Residuen Plot geht hervor, dass die Maxima für kleine  $t$  ungenauer bestimmt werden können (wofür vermutlich auch die geringere „Punktedichte“ für kleinere  $t$  mitverantwortlich ist), sodass diese Datenpunkte deutlich weiter von der Einhüllenden liegen. Folgende Werte wurden ermittelt:

$$\delta = 87.8 \, \text{Hz} \pm 0.5 \, \text{Hz}, \quad \bar{f} = \frac{1}{\bar{T}} = 1109.88 \, \text{Hz} \pm 24.64 \, \text{Hz}$$

wobei auch hier die Digitalisierungsfehler beachtet wurden. Der Messfehler auf die Frequenz ergibt sich durch die abgeschätzte Ungenauigkeit bei der Peak-Bestimmung.

Mit  $\omega = 2\pi\bar{f}$  ergibt sich für die Induktivität:

$$L = \frac{1}{(\omega^2 + \delta^2) \cdot C} = 9.301 \pm 0.411 \text{ mH}$$

Dieser Wert stimmt sehr gut mit dem auf dem Messtisch ermittelten Wert überein. Zusätzlich wurde der innere Widerstand der Spule bestimmt:

$$R_L = \frac{2\delta}{(\omega^2 + \delta^2) \cdot C} - R = 3.97 \pm 0.4 \Omega$$

Man könnte noch den inneren Widerstand der Kabel grob abschätzen mit

$$R_k = \rho \frac{l}{A},$$

wobei  $\rho$  der spezifische Widerstand der Kabel,  $l$  ihre Länge und  $A$  ihre Oberfläche ist. Dies liefert mit  $\rho = 0.017 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ ,  $l = 8 \text{ m}$ ,  $A = 2\pi \text{ mm}^2$  einen ungefähren Wert von

$$R_k \approx 0.02 \Omega$$

was deutlich unterhalb des Auflösungsvermögens unserer Messung liegt, und dadurch vernachlässigbar ist.

Im aperiodischen Grenzfall sind  $\delta = \omega_0$ , sodass der Widerstand bei

$$R_{ap} = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 126.07 \pm 2.92 \Omega$$

liegt. Bei der Messung wurden keine Schwingung mehr bei einem Widerstandswert von  $111.3 \Omega$  gefunden, was von dem theoretischen Wert abweicht. Dies kann an der Ableseungenauigkeit bei der experimentellen Bestimmung des Grenzfalls liegen, welche schwer zu quantifizieren ist. Die Graphen der einzelnen Messungen sind in Abbildung 12 dargestellt.

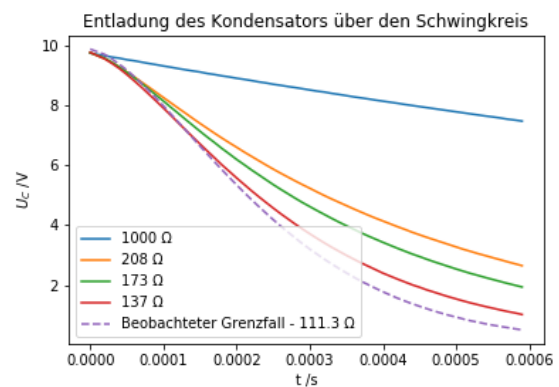


Abbildung 12: Plots der Messungen mit unterschiedlichen Messungen

## 4.2 gekoppelter Schwingkreis



