

# Protokoll Elektrizitätslehre Physikalisches Grundpraktikum 2

Gruppe A2  
Julián Häck, Maria Spethmann

24. September 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Serienschwingkreis</b>	<b>3</b>
3.1	Physikalische Grundlagen . . . . .	3
3.2	Messbrücke . . . . .	4
3.3	Oszilloskop . . . . .	5
3.3.1	Versuchsaufbau und Durchführung . . . . .	5
3.3.2	Auswertung . . . . .	6
3.4	CASSY-Messung . . . . .	6
3.4.1	Versuchsaufbau- und Durchführung . . . . .	6
3.4.2	Auswertung . . . . .	7
3.5	Zusammenfassung . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Parallelschwingkreis</b>	<b>15</b>
4.1	Physikalische Grundlagen . . . . .	15
4.2	Messbrücke . . . . .	15
4.3	CASSY-Messung . . . . .	16
4.3.1	Aufbau und Durchführung . . . . .	16
4.3.2	Auswertung . . . . .	16
4.4	Zusammenfassung . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Anhang</b>	<b>23</b>

# 1 Einleitung

In diesem Versuch werden wir uns mit elektrischen Schwingkreisen beschäftigen. Dazu wird eine Wechselspannung an eine Serien- bzw. Parallelschaltung von je einer Spule, einem Kondensator und einem Widerstand angelegt. Das Ziel des Versuchs ist es, die Güte der Schwingkreise zu bestimmen.

## 2 Physikalische Grundlagen

Beim Wechselstrom gilt für Strom und Spannung im Allgemeinen:

$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad \text{und} \quad U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (1)$$

mit der Amplitude  $I_0$  bzw.  $U_0$  und der Phasendifferenz  $\phi$ . Für viele Anwendungen ist es sinnvoll die Effektivwerte zu definieren:

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

Beim Anlegen einer Wechselspannung an eine Spule oder einen Kondensator muss man beachten, dass diese einen Wechselstromwiderstand darstellen.

**Induktiver Widerstand** Für den Strom durch eine Spule der Induktivität  $L$  ergibt sich:

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (3)$$

und damit die sogenannte Induktanz:

$$X_L = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \omega \cdot L \quad (4)$$

**Kapazitiver Widerstand** Bei einem Kondensator mit Kapazität  $C$  existiert analog zur Induktanz die Kondensanz:

$$X_C = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (5)$$

## 3 Serienschwingkreis

### 3.1 Physikalische Grundlagen

Wir betrachten einen Schaltkreis, bei der ein Kondensator mit Kapazität  $C$ , eine Spule mit Induktivität  $L$  und ein Ohmscher Widerstand  $R$  in Reihe geschaltet sind und eine Wechselspannung anliegt. Nach Kirchhoff ist die angelegte Spannung gleich der Summe aller Spannungen, die über die Bauteile abfallen. Der Strom dagegen ist im gesamten Schaltkreis derselbe. Man erhält die Differentialgleichung einer erzwungenen, gedämpften Schwingung.

Wir betrachten die partikuläre Lösung nach dem Einschwingvorgang. Durch Einsetzen der Ansätze  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$  und  $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \phi)}$  erhält man die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung zu

$$\tan(\phi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (6)$$

und die Impedanz

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (7)$$

Das heißt, der Strom  $I_0 = \frac{U_0}{Z}$  wird maximal bei der Resonanzfrequenz

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (8)$$

Die Güte eines Schwingkreises ist ein Maß für den Energieverlust. Die Güte berechnet sich durch

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9)$$

wobei  $\Delta\omega$  die Frequenzbreite ist, bei der der Strom auf  $I_{max}/\sqrt{2}$  abgefallen ist. Die Phase ist bei Resonanzfrequenz  $\phi = 0$  und bei  $I_0 = I_{max}/\sqrt{2}$  ist die Phase  $\phi = \pm 45^\circ$ . Es lässt sich einfach zeigen, dass die Güte auch die Spannungsüberhöhung der Spulen- bzw. Kondensatorspannung zur angelegten Spannung bei der Resonanzfrequenz angibt:

$$\frac{U_L(\omega_0)}{U(\omega_0)} = \frac{U_C(\omega_0)}{U(\omega_0)} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad (10)$$

### 3.2 Messbrücke

Sind die genauen Werte für die Kapazität  $C$ , die Induktivität  $L$  und den Widerstand  $R$  im Serienschwingkreis bekannt, so erwartet man einen Gütefaktor gemäß Gl. (9). Während des Versuchs stehen uns eine Spule mit 500 Windungen, ein Kondensator mit Kapazität  $4.7\mu F$  und Widerstände mit Sollwerten  $1\Omega, 5\Omega, 10\Omega, 20\Omega, 47\Omega$  und  $100\Omega$  zur Verfügung. Die tatsächlichen Werte für  $C$ ,  $R$  und  $L$  unterliegen jedoch produktionsbedingten Schwankungen, sodass die Bauteile zunächst an einer Messbrücke ausgemessen werden. Die Messung wird in Tabelle 1 zusammengefasst.

	Sollwert	Messwert	Fehler (sys.)
Spule	500 Windungen	$L = 4.78mH$	0.25%
Spulenwiderstand	-	$R_L = 3.73\Omega$	0.25%
Kondensator	$C = 4.7\mu F$	$C = 4.72\mu F$	0.25%
Widerstand	$R = 1\Omega$	$R = 0.98\Omega$	0.25%
Widerstand	$R = 5\Omega$	$R = 5.20\Omega$	0.25%
Widerstand	$R = 10\Omega$	$R = 9.89\Omega$	0.25%
Widerstand	$R = 20\Omega$	$R = 19.75\Omega$	0.25%
Widerstand	$R = 47\Omega$	$R = 46.62\Omega$	0.25%
Widerstand	$R = 100\Omega$	-	-

Tabelle 1: Messbrücke Daten

Die Messbrücke misst die Werte mit einem systematischen Fehler von 0.25%. Der Widerstand mit Sollwert  $R = 100\Omega$  wurde nicht ausgemessen, weil wir das Bauteil erst nachträglich erhalten haben und die Messbrücke anschließend vergessen wurde. Wir benutzen daher den Sollwert  $R = 100\Omega$  für die weitere Berechnung und schätzen den Fehler ab, indem wir die relative Abweichung von Sollwert und Messwert der anderen Widerstände berechnen und den gemittelten Wert auch als relative Abweichung auf  $R = 100\Omega$  annehmen. Wir erhalten

$$R = 100\Omega \pm 1.83\Omega \quad (11)$$

Im weiteren Verlauf des Protokolls benennen wir Widerstände, Spulen und Kondensatoren nach ihren Sollwerten.

Die Güte berechnet sich nach Gl. (9), wobei der Spulenwiderstand mit berücksichtigt werden muss:

$$Q = \frac{1}{R + R_L} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (12)$$

Den Fehler pflanzen wir mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung fort:

$$\sigma_Q(sys.) = \sqrt{\left(\frac{dQ}{dR}\sigma_R\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dR_L}\sigma_{R_L}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dL}\sigma_L\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dC}\sigma_C\right)^2} \quad (13)$$

Damit erhalten wir folgende Werte für den Serienschwingkreis mit Widerständen  $R = 1\Omega$ ,  $R = 5\Omega$  und  $R = 10\Omega$ .

$R[\Omega]$	$Q$	$\sigma_Q(sys)$
1	6.757	0.018
5	3.564	0.009
10	2.337	0.006

Tabelle 2: Gütebestimmung über Messbrücke

Die Resonanzfrequenz berechnen wir zu

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1060Hz \pm 2Hz \quad (14)$$

### 3.3 Oszilloskop

#### 3.3.1 Versuchsaufbau und Durchführung

Wir bauen einen Serienschwingkreis mit Kondensator ( $C = 4.7\mu F$ ), Spule ( $N=500$ ) und Widerstand ( $R = 1\Omega$ ) wie in Abb. 1 auf.

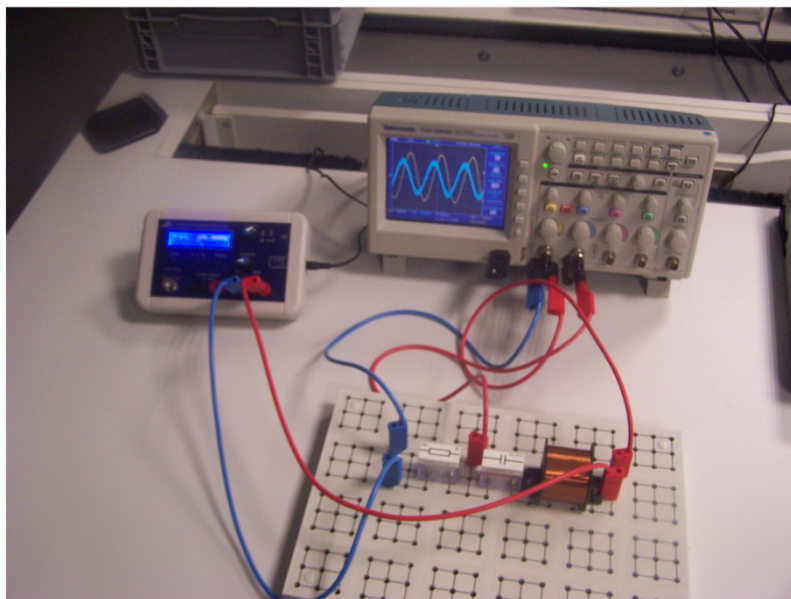


Abbildung 1: Versuchsaufbau Oszilloskop (Quelle:Praktikumsskript)

Mit dem Oszilloskop wird zum einen die Spannung über den Widerstand (Ch2) und zum anderen die Gesamtspannung (Ch1) abgegriffen. Dabei wird die Erde so platziert,

dass sie für beide Messungen benutzt werden kann.

Zunächst werden auf dem Oszilloskop die beiden Channel gegeneinander aufgetragen (XY-Darstellung), was in einer Lissajous-Figur resultiert. Wird nun die Eingangsfrequenz variiert, kann man diese Figur verändern. Im Resonanzfall sind Strom und Spannung in Phase, also ist die Lissajous-Figur eine Gerade. Diese Gerade wird nun eingestellt und die Resonanzfrequenz notiert. In den Displayeinstellungen wird wieder die zeitabhängige Amplitudenanzeige (X-t) gewählt, sodass die Spannung  $U_{max}$  am Widerstand (Ch1) mithilfe des Cursors abgelesen werden kann. Durch weitere Variation der Frequenz wird nun eine Spannung über den Widerstand (Ch1) von  $\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$  eingestellt. Da die Spannung am Widerstand proportional zum Strom ist, ist bei dieser Frequenz auch die Stromamplitude auf  $I_{max}/\sqrt{2}$  gefallen. Dies wird für je eine Frequenz oberhalb  $f_+$  und unterhalb  $f_-$  der Resonanzfrequenz gemacht und die Frequenzen notiert. Aus der Differenz von  $f_+$  und  $f_-$  ergibt sich die Breite der Stromkurve und damit die Güte des Schwingkreises.

### 3.3.2 Auswertung

Wir messen die Resonanzfrequenz bei  $f_0 = 1067Hz$  und die Frequenzen der Resonanzbreite zu  $f_- = 973Hz$  und  $f_+ = 1169Hz$ . Daraus berechnen wir die Güte zu

$$Q = \frac{f_0}{f_+ - f_-} = 5.44 \quad (15)$$

Für die Fehlerrechnung schätzen wir den Fehler auf  $f_0$  mit 1Hz ab, weil wir die Gerade der Lissajous-Figur auf ca. 1Hz genau einstellen konnten. Den Fehler auf  $f_-$  und  $f_+$  schätzen wir etwas größer mit 4Hz ab, weil sich der Cursor nur in 0.02V Schritten bewegen ließ und somit ein Ablesen bzw. Einstellen von Werten mit dem Cursor zu zusätzlichen Fehlerquellen führte. Es ergibt sich ein statistischer Fehler auf  $Q$  von

$$\sigma_Q(stat.) = Q \sqrt{\left(\frac{\sigma_{f_0}}{f_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{f_-}}{f_+ - f_-}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{f_+}}{f_+ - f_-}\right)^2} = 0.16 \quad (16)$$

Die mit dem Oszilloskop gemessene Güte ist deutlich kleiner als die vorhergesagte Güte durch die Komponenten des Schwingkreises (siehe Messbrücke) von  $Q_{erwartet} = 6.76 \pm 0.02$ . Wahrscheinlich liegt dieser Unterschied zum Teil daran, dass wir die Widerstände der Kabel nicht mit einberechnet haben. Damit erwartete Güte und durch das Oszilloskop gemessene Güte übereinstimmen, müssten die Kabelwiderstände allerdings bei

$$R_{Kabel} = \frac{1}{Q_{Osz.}} \sqrt{\frac{L}{C}} - (R + R_L) = 1.14\Omega \quad (17)$$

liegen. Das wäre ungewöhnlich hoch für unseren Versuchsaufbau, sodass noch andere Faktoren eine Rolle spielen müssen. Womöglich war die Messung mit dem Oszilloskop weniger präzise als erwartet.

## 3.4 CASSY-Messung

### 3.4.1 Versuchsaufbau- und Durchführung

Wir verwenden den gleichen Aufbau des Serienschwingkreises wie bei der Messung mit dem Oszilloskop. Allerdings verwenden wir als Generator das Power-CASSYGerät und nehmen Messwerte mithilfe eines CASSY-Sensors auf. Das Power-CASSY generiert eine Wechselspannung ( $U_3$ ) mit einer Amplitude von 0.5V und variiert die Frequenz von 0

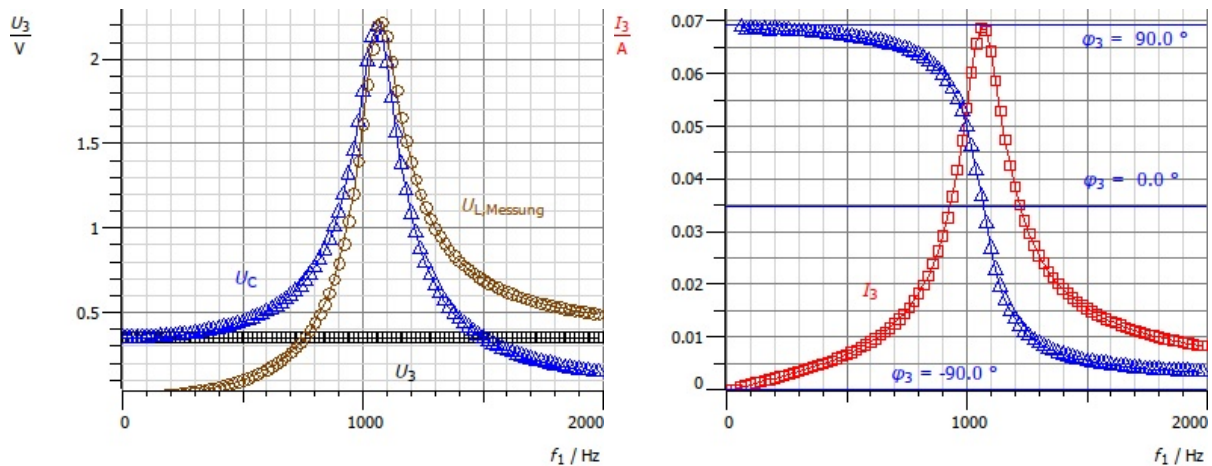
bis 2000Hz in 20Hz Schritten, wobei eine Einschwingzeit von 2s eingehalten wird. Außerdem misst das Power-CASSY den Gesamtstrom und die Phasenverschiebung  $\phi$ . Mit dem CASSY-Sensor werden die Effektivspannungen gemessen, die über Spule und Kondensator abfallen. Der Versuch wird jeweils mit den Widerständen  $R = 1\Omega$ ,  $R = 5\Omega$  und  $R = 10\Omega$  durchgeführt. In Tabelle 3 werden die Messparameter zusammengefasst.

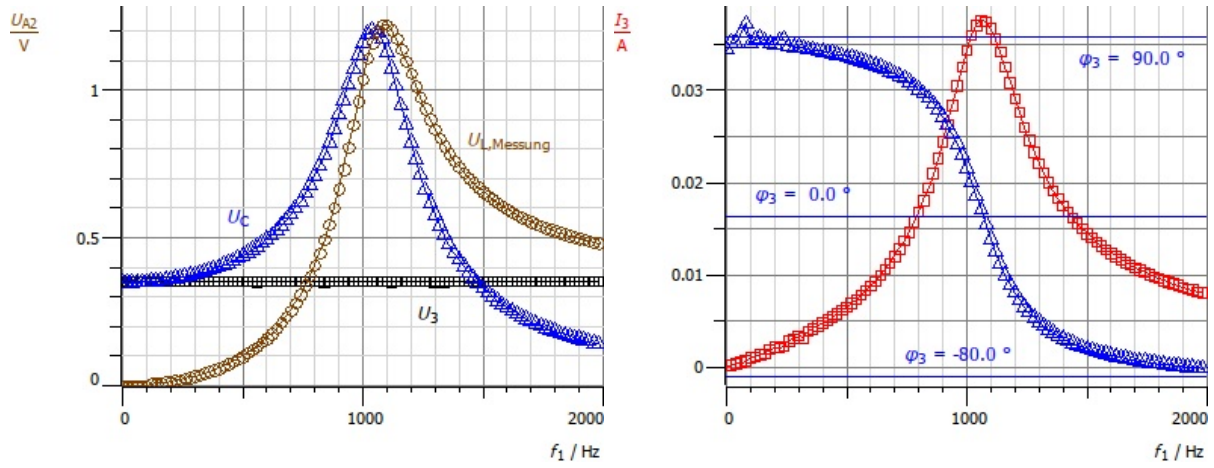
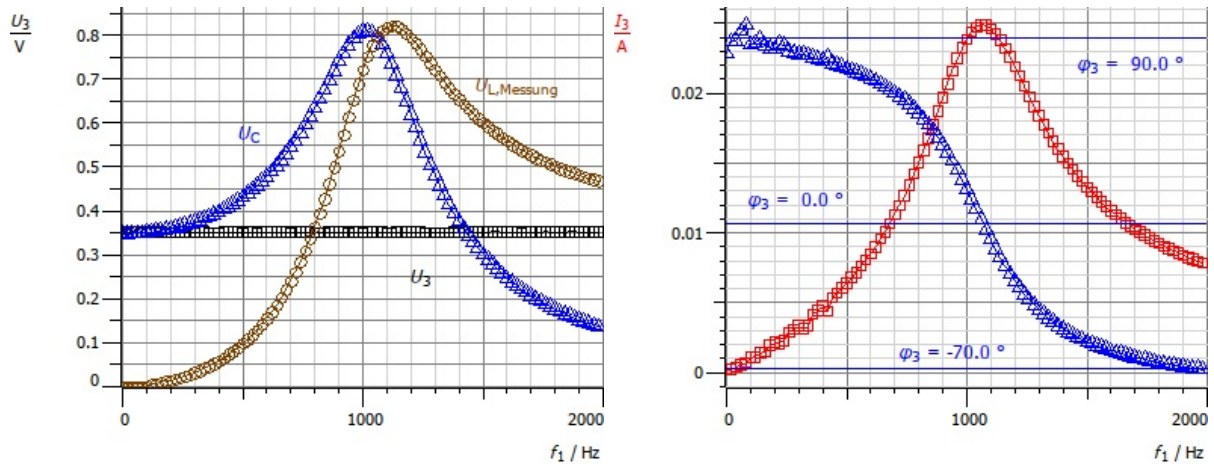
Messwertbereich $U_3$	0V .. 0.7V
Amplitude $U_3$	0.5V
Signalform	Sinusförmig, 50% Symmetrie
Messwertbereich $f_1$	0Hz .. 2000Hz
Formel $f_1$	$(n - 1) \cdot 20$
Messwertbereich $I_3$	0A .. 0.21A
Messwertbereich $U_{L,Messung}, U_C$	0V .. 7V
Messwerterfassung	Effektivwerte gemittelt über 100ms
Messbedingung	$f_1 < 2000$ and $\Delta t > 2$

Tabelle 3: Messwertparameter Serienschwingkreis

### 3.4.2 Auswertung

Abb. 2, 3 und 4 zeigen die Rohdaten unserer Messungen.

Abbildung 2: Rohdaten zum Serienschwingkreis mit Widerstand  $R = 1\Omega$

Abbildung 3: Rohdaten zum Serienschwingkreis mit Widerstand  $R = 5\Omega$ Abbildung 4: Rohdaten zum Serienschwingkreis mit Widerstand  $R = 10\Omega$ 

Wir bestimmen die Güte durch Ablesen der relevanten Daten aus den in CASSYlab produzierten Graphen. Die diskreten Messpunkte werden in CASSYlab mit einer Linie verbunden, sodass man beispielsweise auch innerhalb der Schrittweite von 20Hz Datenpunkte einfach aus den Graphen ablesen kann. Die Digitalisierungsfehler der CASSY-Geräte sind um Größenordnungen kleiner als die Ablesegenauigkeit und werden im Folgenden vernachlässigt. Die Ablesegenauigkeit schätzen wir ab, indem wir für jede aus dem Graphen ausgelesene Größe  $x$  ein Intervall  $[x - \sigma_-, x + \sigma_+]$  angeben, in dem wir die Größe vermuten. Aufgrund unterschiedlicher Verläufe der Graphen und Abstände der Messpunkte sind diese Intervalle unterschiedlich groß. Die Ableseungenauigkeit für einen Punkt bestimmen wir durch die gemittelte Differenz der Intervallgrenzen zum abgelesenen Wert, also  $\sigma_x = (\sigma_+ + \sigma_-)/2$ .

### Güteberechnung durch Breite des Strommaximums

Wir lesen die Frequenz  $f_0$  und die Höhe des Strommaximums  $I_0$  ab, anschließend die Frequenzen  $f_-$  und  $f_+$ , bei denen der Strom auf  $I_0/\sqrt{2}$  abgefallen ist. Die Güte berechnet sich durch

$$Q = \frac{f_0}{f_+ - f_-}. \quad (18)$$

Die statistischen Fehler auf  $f_0$ ,  $f_-$  und  $f_+$  berechnen wir wie beschrieben durch Abschätzen



eines Fehlerintervalls. Der statistische Fehler pflanzt sich auf  $Q$  fort:

$$\sigma_Q(\text{stat.}) = Q \sqrt{\left(\frac{\sigma_{f_0}}{f_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{f_-}}{f_+ - f_-}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{f_+}}{f_+ - f_-}\right)^2} \quad (19)$$

In Abb. 5 wird die Vorgehensweise beim Ablesen beispielhaft für den  $1\Omega$ -Widerstand dargestellt. Im Anhang finden sich entsprechende Graphen für  $R = 5\Omega$  und  $R = 10\Omega$ .

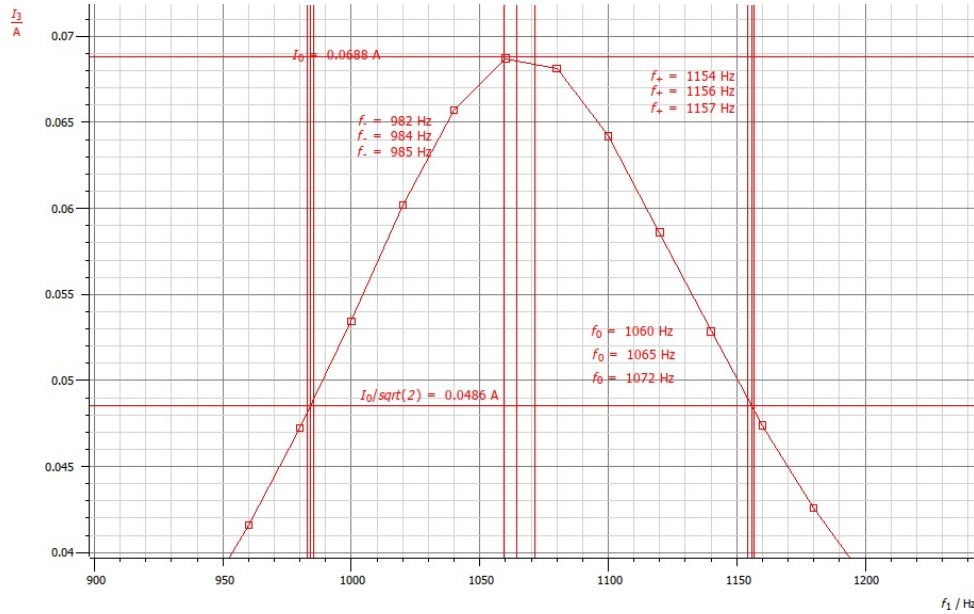


Abbildung 5: Güteberechnung durch Breite des Strommaximums für  $R = 1\Omega$ . Von den drei Werten, die einer Frequenz zugeordnet sind, stellen der größte und der kleinste die Intervallgrenzen dar.

Zur Berechnung des systematischen Fehlers wird die Verschiebemethode genutzt. Der Hersteller gibt einen systematischen Fehler an in Höhe von

$$\sigma_{I,sys} = (0.02 \cdot I_i + 0.005 \cdot I_{\text{Bereichsendwert}}) / \sqrt{3} \quad (20)$$

Der relative Anteil  $\frac{0.02}{\sqrt{3}} I_i$  beeinflusst die Werte für  $f_0$ ,  $f_-$  und  $f_+$  nicht. Der Offset-Anteil  $\frac{0.005}{\sqrt{3}} I_{\text{Bereichsendwert}}$  dagegen verschiebt die relative Lage von  $I_0/\sqrt{2}$  und führt damit zu unterschiedlichen Werten von  $f_-$  und  $f_+$ . Daher verschieben wir die Stromkurve um den genannten Offset nach oben und nach unten und bestimmen jeweils die Güte mit dieser Verschiebung. Wir berechnen den systematischen Fehler aus dem Mittelwert der Differenzen zwischen verschobener Güte und ursprünglich berechneter Güte. Die Vorgehensweise wird in Abb. 6 für einen Widerstand von  $R = 1\Omega$  dargestellt.

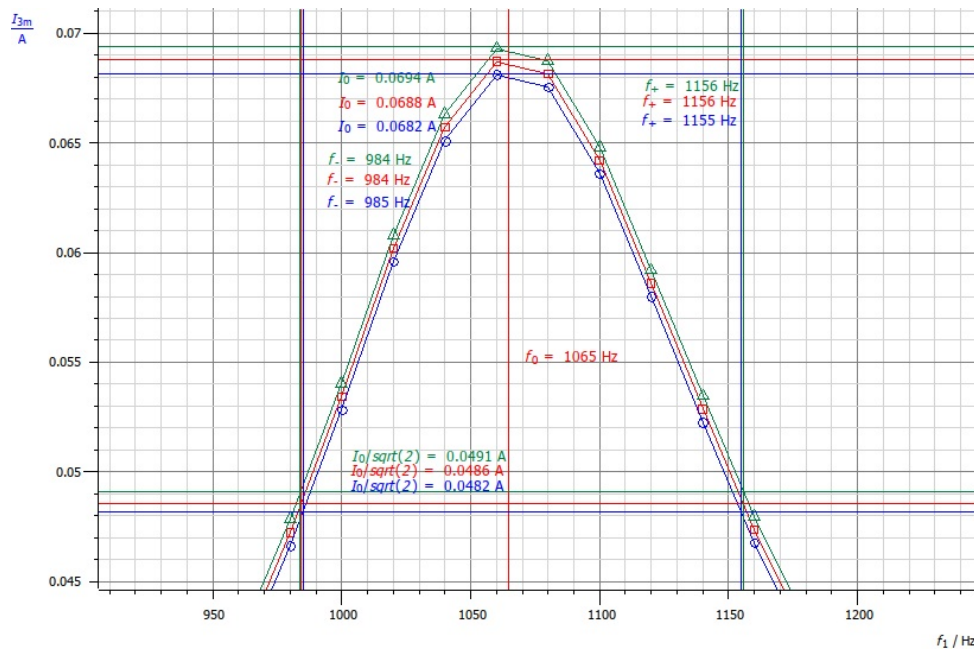


Abbildung 6: Verschiebemethode zur Berechnung des systematischen Fehlers

Die insgesamt erhaltenen Güten mit statistischen und systematischen Unsicherheiten für die drei unterschiedlichen Widerstände werden in Tabelle 4 präsentiert.

$R[\Omega]$	$f_0[Hz]$	$f_-[Hz]$	$f_+[Hz]$	$Q$	$\sigma_Q(stat.)$	$\sigma_Q(sys.)$
1	$1065 \pm 6$	$984 \pm 2$	$1156 \pm 2$	6.19	0.08	0.04
5	$1065 \pm 6$	$922 \pm 2$	$1234 \pm 2$	3.41	0.04	0.05
10	$1065 \pm 10$	$858 \pm 3$	$1324 \pm 3$	2.29	0.03	0.04

Tabelle 4: Güteberechnung durch Breite des Strommaximums

### Güteberechnung durch Quantifizierung der Spannungsüberhöhung

Als nächstes wir die Güte über die Spannungsüberhöhung berechnet. Dazu muss zunächst der Spannungsabfall, der an der Spule gemessen wurde, korrigiert werden, indem der Beitrag des Spulenwiderstandes  $R_L$  abgezogen wird.

$$U_L = \sqrt{U_{L,Messung}^2 - R_L^2 I^2} \quad (21)$$

Die Lage der Resonanzfrequenz  $f_0$  ist dort, wo sich die Spannungskurven der Spule und des Kondensators schneiden. Die Güte des Schwingkreises lässt sich berechnen durch

$$Q = \frac{U_L(f_0)}{U_0} = \frac{U_C(f_0)}{U_0} \quad (22)$$

mit Eingangsspannung  $U_0$ . Wir lesen  $U_L = U_C$  am Graphen ab und bestimmen wie zuvor ein Fehlerintervall zur Bestimmung des statistischen Fehlers. Der Graph von  $U_0$ ,  $U_L$  und  $U_C$  wird in Abb. 7 gezeigt.

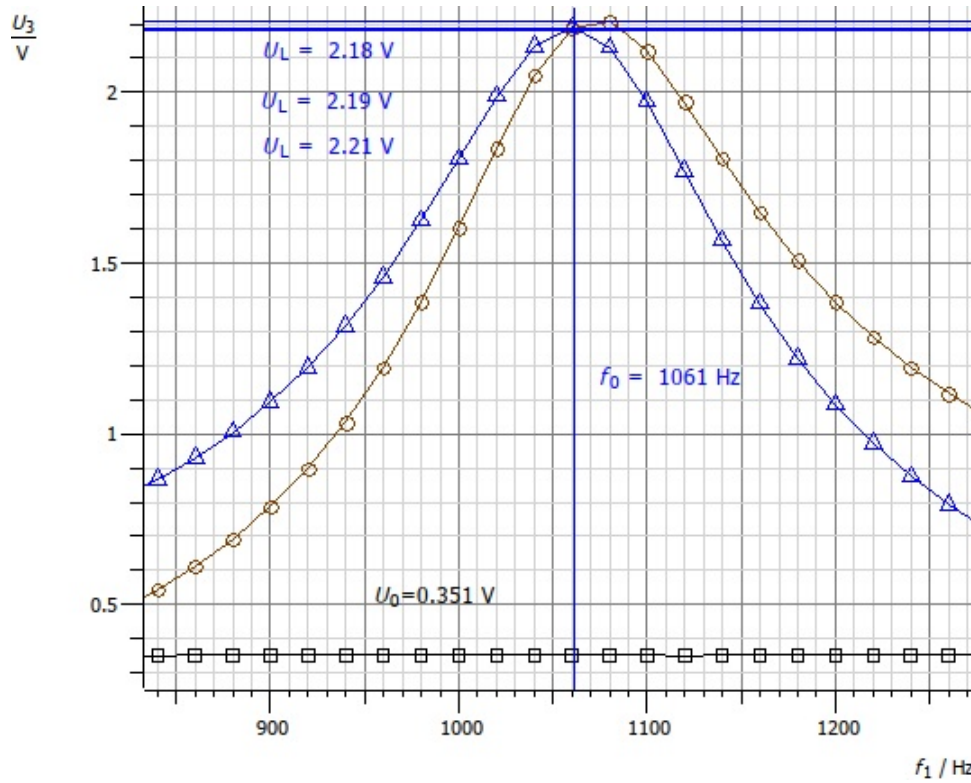


Abbildung 7: Güteberechnung durch Ablesen der Spannungsüberhöhung für  $R = 1\Omega$ .

Die Eingangsspannung am CASSY-Power wurde auf einen Effektivwert von 0.351 V eingestellt und schwankt um ca. 1V. Der statistische Fehler auf  $Q$  ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{Q(stat.)} = Q \sqrt{\left(\frac{U_0}{\sigma_{U_0}}\right)^2 + \left(\frac{U_L}{\sigma_{U_L}}\right)^2} \quad (23)$$

$U_L$  und  $U_C$  unterliegen einem systematischen Fehler von

$$\sigma_{U,sys} = (0.01 \cdot I_i + 0.005 \cdot U_{Bereichsendwert})/\sqrt{3} \quad (24)$$

Der sich dadurch ergebende Fehler auf  $Q$  ist dann am größten, wenn  $U_L$  und  $U_C$  in die gleiche Richtung verschoben werden. Daher berechnen wir die systematische Unsicherheit durch

$$\sigma_{Q(sys.)} = \frac{\sigma_{U_L(sys.)}}{U_0} \quad (25)$$

Insgesamt erhalten wir für die Güte für die benutzten Widerstände folgende Werte und Unsicherheiten (Tabelle 5):

$R[\Omega]$	$U_L = U_C[V]$	$U_0[V]$	$Q$	$\sigma_{Q(stat.)}$	$\sigma_{Q(sys.)}$
1	$2.190 \pm 0.015$	$0.315 \pm 0.001$	6.24	0.05	0.09
5	$1.194 \pm 0.003$	$0.315 \pm 0.001$	3.40	0.01	0.08
10	$0.797 \pm 0.001$	$0.315 \pm 0.001$	2.27	0.01	0.07

Tabelle 5: Güteberechnung durch Spannungsüberhöhung

### Gütebestimmung durch frequenzabhängige Phasenlage

Als letztes bestimmen wir die Güte über die Phase zwischen Strom und Eingangsspannung. Diese wird automatisch vom CASSY-Power erfasst und ausgegeben. Über die Phasenlage

lassen sich die Resonanzfrequenzen (bei  $\phi = 0$ ) und die Frequenzen der Resonanzbreite bestimmen (in diesem Fall  $\phi = -45^\circ$  für  $f_-$  und  $\phi = 45^\circ$  für  $f_+$ ). Die Güte berechnet sich nun ganz analog wie bei der Betrachtung des Strommaximums (Gl. (32)). Für die Fehler auf  $f_-$ ,  $f_0$  und  $f_+$  werden wieder Fehlerintervalle um den abgelesenen Wert auf dem von CASSYlab ausgegebenem Graphen abgeschätzt und die Unsicherheit auf  $Q$  mittels Fehlerfortpflanzung bestimmt (Gl. (19)). Die Berechnung wird in Abb. 8 illustriert.

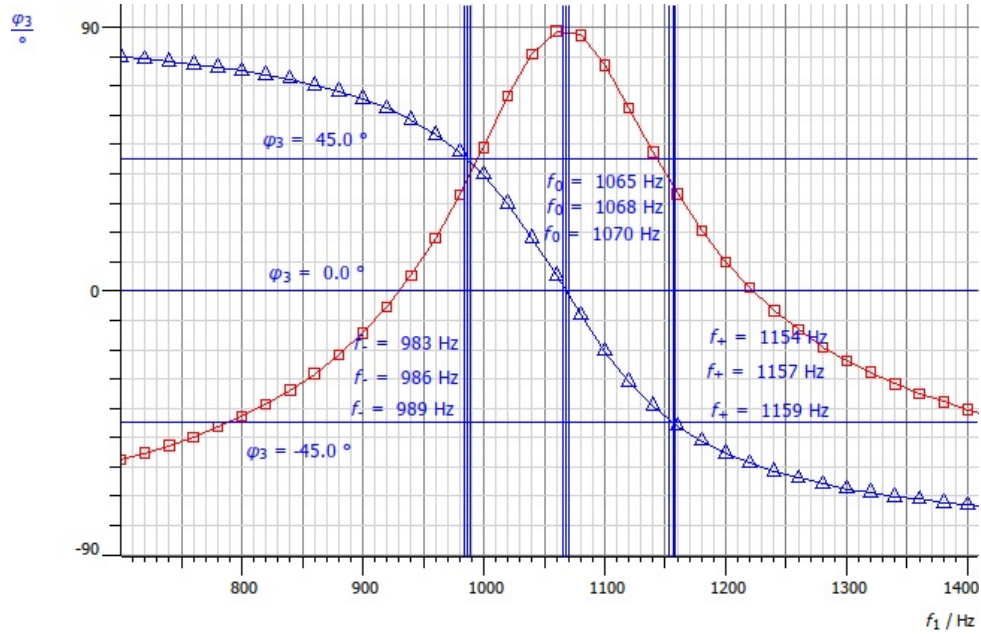


Abbildung 8: Güteberechnung durch Ablesen der Phasenlage

Ein systematischer Fehler kann nicht bestimmt werden, weil es vonseiten des Herstellers keine Angaben zum systematischen Fehler auf die Phase gibt. In Tabelle 6 werden die Zwischenergebnisse und die berechneten Güten aufgelistet.

$R[\Omega]$	$f_0[Hz]$	$f_-[Hz]$	$f_+[Hz]$	$Q$	$\sigma_Q(stat.)$
1	$1068 \pm 2$	$986 \pm 3$	$1157 \pm 2$	6.25	0.14
5	$1069 \pm 2$	$924 \pm 2$	$1238 \pm 2$	3.40	0.04
10	$1068 \pm 1$	$860 \pm 2$	$1335 \pm 2$	2.25	0.02

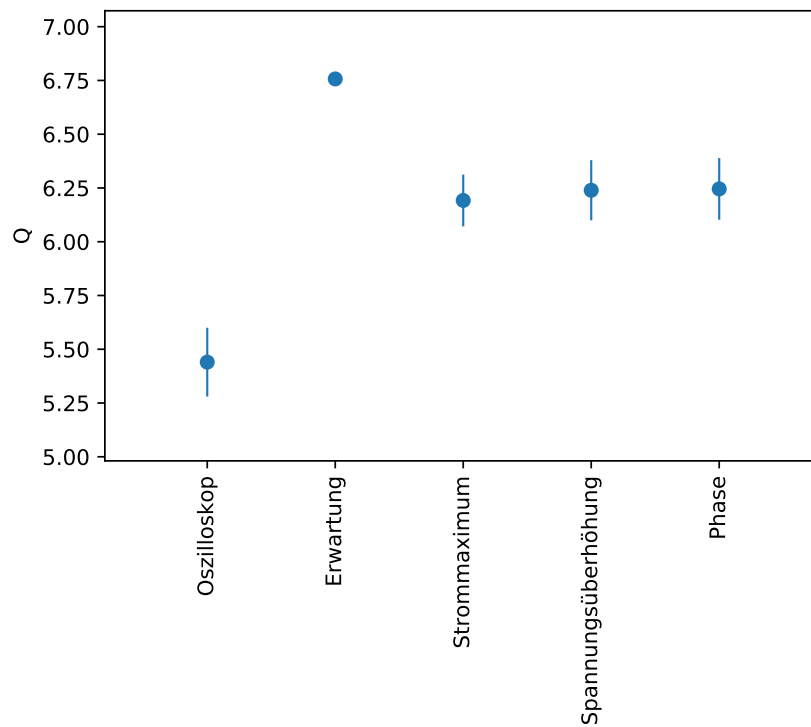
Tabelle 6: Güteberechnung durch Phasenlage

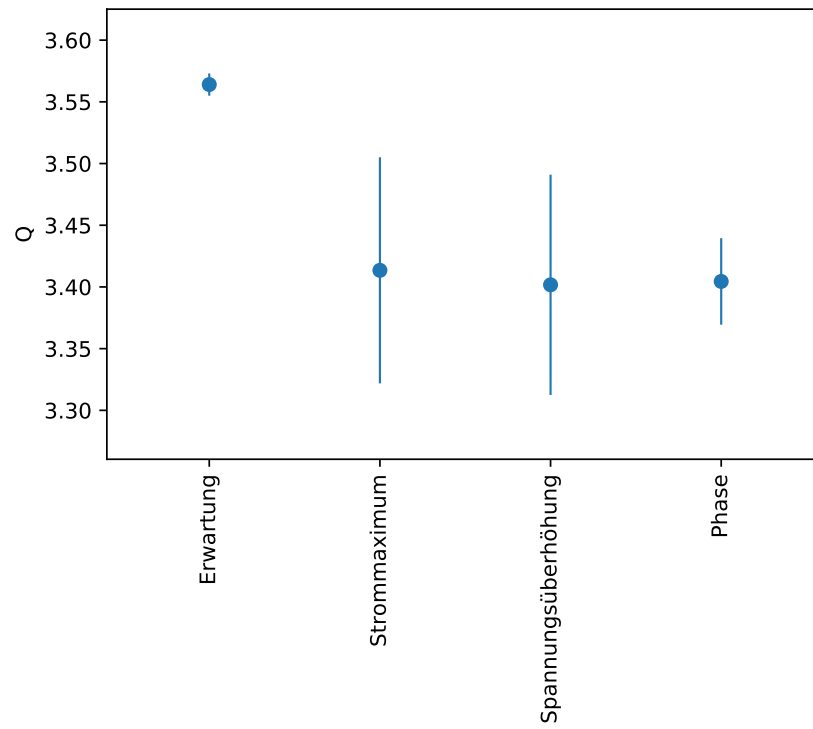
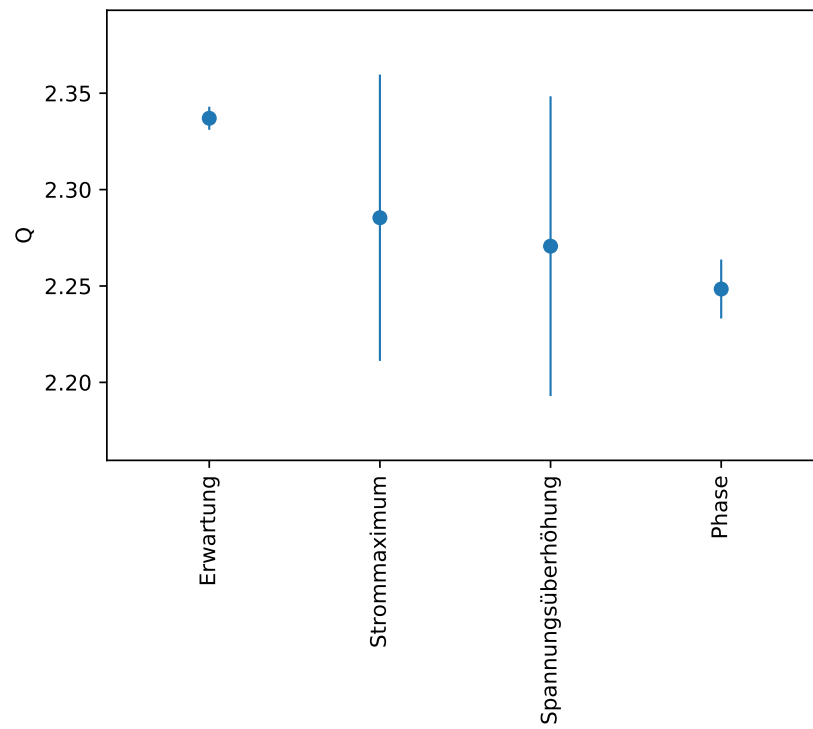
### 3.5 Zusammenfassung

Wir fassen unsere Ergebnisse in Abb. 9, 10, 11 und Tabelle 7 zusammen. Es fällt auf, dass die erwartete Güte, die wir aus dem Vermessen der Bauteile erhalten haben, größer ist als die Güten, die wir bei der Auswertung mit CASSY berechnet haben. Wahrscheinlich liegt das daran, dass wir mögliche Kabelwiderstände im Schaltkreis nicht in unsere Berechnung mit einbezogen haben. Die Gütewerte der CASSY-Messung stimmen untereinander besser überein (schneiden sich im  $1\sigma$ -Intervall). Bei der Betrachtung ist zu beachten, dass beispielsweise bei der Gütebestimmung mithilfe der Phasendifferenz kein systematischer Fehler berechnet werden konnte. Schließlich werden die Güten wie erwartet kleiner für größer gewählte Widerstände.

	$R = 1\Omega$	$R = 5\Omega$	$R = 0\Omega$
Erwartung/Messbrücke	$6.757 \pm 0.018(sys.)$	$3.564 \pm 0.009(sys.)$	$2.337 \pm 0.006(sys.)$
Strommaximum	$6.19 \pm 0.08 \pm 0.04$	$3.14 \pm 0.04 \pm 0.05$	$2.29 \pm 0.03 \pm 0.04$
Spannungsüberhöhung	$6.24 \pm 0.05 \pm 0.09$	$3.40 \pm 0.01 \pm 0.08$	$2.27 \pm 0.01 \pm 0.07$
Phase	$6.25 \pm 0.14(stat.)$	$3.40 \pm 0.04(stat.)$	$2.25 \pm 0.02(stat.)$
Oszilloskop	$5.44 \pm 0.16(stat)$		

Tabelle 7: Zusammenfassung Serienschwingkreis

Abbildung 9: Güteberechnung für  $R = 1\Omega$

Abbildung 10: Güteberechnung für  $R = 5\Omega$ Abbildung 11: Güteberechnung für  $R = 10\Omega$

## 4 Parallelschwingkreis

### 4.1 Physikalische Grundlagen

Bei einem Parallelschwingkreis bestehend aus einem Widerstand  $R$ , einer Spule mit Induktivität  $L$  und einem Kondensator mit Kapazität  $C$  besagen die Kirchhoffschen Regeln, dass der Gesamtstrom gleich der Summe der Ströme durch die einzelnen Bauteile ist.

$$I = I_R + I_C + I_L \quad (26)$$

Gleichzeitig fällt über alle Bauteile die gleiche Spannung ab, nämlich die angelegte Spannung. Bei einer Parallelschaltung addieren sich die inversen Impedanzen:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \quad (27)$$

Die Schwierigkeit beim Parallelschwingkreis ist, dass der Spulenwiderstand  $R_L$  bei realen Bauteilen getrennt betrachtet werden muss und nicht wie beim Serienschwingkreis einfach zum Ohmschen Widerstand des Schaltkreises dazuaddiert werden kann. Nach einiger Rechnung erhält man, dass der Gesamtstrom bei der Resonanzfrequenz  $f_0$  minimal wird, wobei

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \frac{C}{L} R_L^2}{LC}} \quad (28)$$

Die Güte im Schwingkreis findet man durch mit  $Q = f_0/\Delta f$ , wobei die Breite  $\Delta f$  als Differenz der Frequenzen berechnet wird, bei der der Strom auf  $\sqrt{2}I_{min}$  gestiegen ist. Außerdem lässt sich die Güte (bei  $R_L > 0$  näherungsweise) über die Stromerhöhung des über Spule und Kondensator abfallenden Stroms im Verhältnis zum Gesamtstrom berechnen:

$$\frac{(I_L)_0}{I_0} = \frac{(I_C)_0}{I_0} = Q \quad (29)$$

Schließlich lässt sich die Güte auch direkt über die Werte von  $R$ ,  $R_L$ ,  $C$  und  $L$  bestimmen als

$$Q = \frac{R\sqrt{\frac{C}{L}}}{1 + R \cdot R_L \cdot \frac{C}{L}} \quad (30)$$

### 4.2 Messbrücke

Wir verwenden die gleichen Bauteile, die wir für den Serienschwingkreis bereits ausgemessen hatten. Somit lassen sich die Messwerte für  $R$ ,  $R_L$ ,  $L$  und  $C$  aus Tabelle 1 auslesen. Aus diesen Werten lässt sich mit Gl. (30) die Güte des Schaltkreises berechnen. Der Fehler auf die Güte wird durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\sigma_Q(sys.) = \sqrt{\left(\frac{dQ}{dR}\sigma_R\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dR_L}\sigma_{R_L}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dL}\sigma_L\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dC}\sigma_C\right)^2} \quad (31)$$

Insgesamt erhalten wir folgende Werte für die Widerstände  $R = 47\Omega$ ,  $R = 100\Omega$  und  $R = \infty$  (Tabelle 8):

$R[\Omega]$	$Q$	$\sigma_Q(sys)$
47	1.250	0.003
100	2.297	0.006
$\infty$	8.532	0.026

Tabelle 8: Gütebestimmung über Messbrücke

### 4.3 CASSY-Messung

#### 4.3.1 Aufbau und Durchführung

Wir bauen den Parallelschwingkreis wie in Abb. 12 dargestellt auf. Wir verwenden die gleiche Spule und den gleichen Kondensator wie im Serienschwingkreis und führen den Versuch einmal mit dem Widerstand  $R = 47\Omega$ , einmal mit dem Widerstand  $R = 100\Omega$  und einmal mit geöffneter Schaltung ( $R = \infty$ ) durch. Das Power-CASSY generiert eine Wechselspannung mit variierenden Frequenzen, im Bereich von 0 bis 2000Hz in Abständen von 20Hz nach einer Einschwingzeit von 2s. Außerdem misst das Power-Cassy den Gesamtstrom. Mithilfe von zwei CASSY-Sensoren werden der Strom durch die Spule und den Kondensator als Effektivwerte gemessen. Die Messwertparameter sind in Tabelle 9 zusammengefasst.

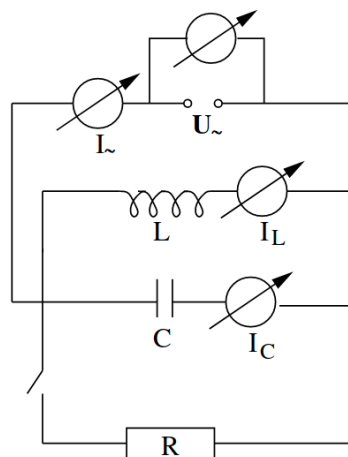


Abbildung 12: Aufbau Parallelschwingkreis (Quelle: Praktikumsskript)

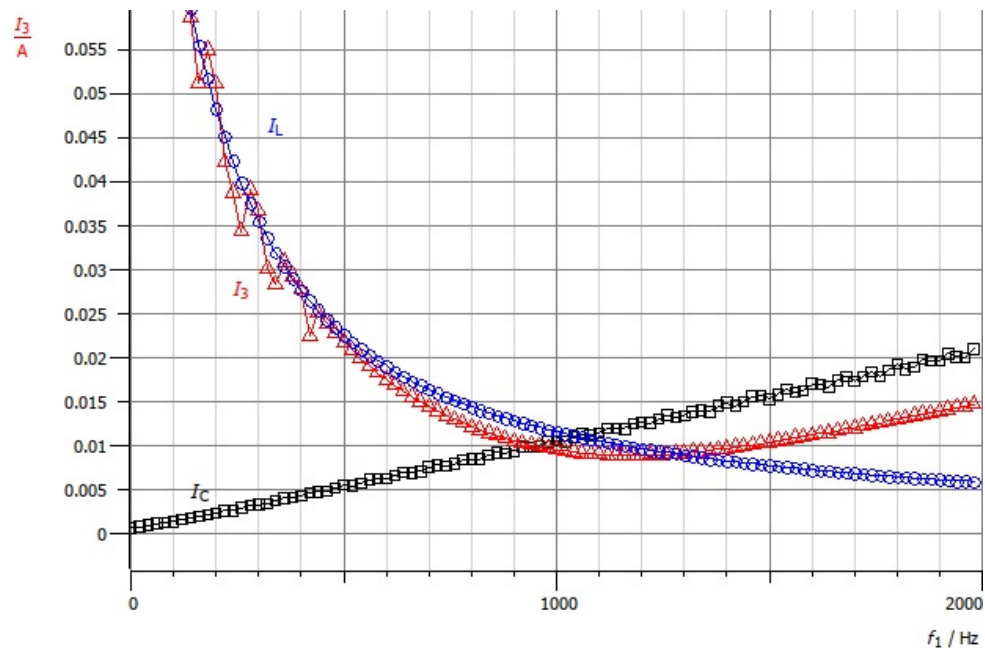
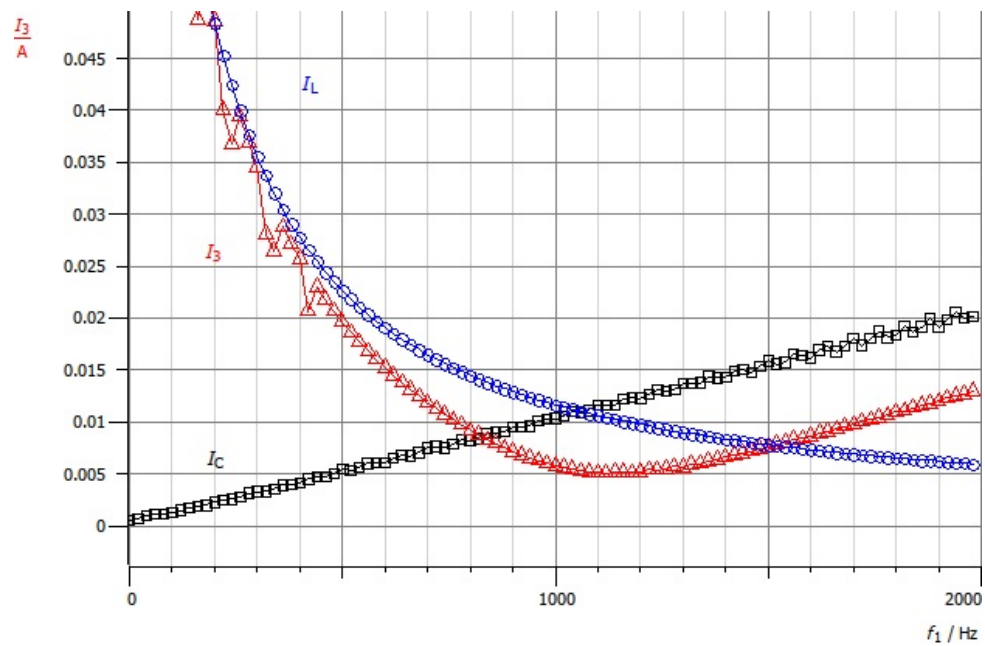
Messwertbereich $U_3$	0V .. 0.7V
Amplitude $U_3$	0.5V
Signalform	Sinusförmig, 50% Symmetrie
Messwertbereich $f_1$	0Hz .. 2000Hz
Formel $f_1$	$(n - 1) \cdot 20$
Messwertbereich $I_L, I_C, I_3$	0A .. 0.21A
Messwerterfassung	Effektivwerte gemittelt über 100ms
Messbedingung	$f_1 < 2000$ and $\Delta t > 2$

Tabelle 9: Messwertparameter Parallelschwingkreis

#### 4.3.2 Auswertung

Abb. 13, 14 und 15 zeigen die Rohdaten unserer Messungen.



Abbildung 13: Rohdaten zum Parallelschwingkreis mit  $R = 47\Omega$ Abbildung 14: Rohdaten zum Parallelschwingkreis mit  $R = 100\Omega$

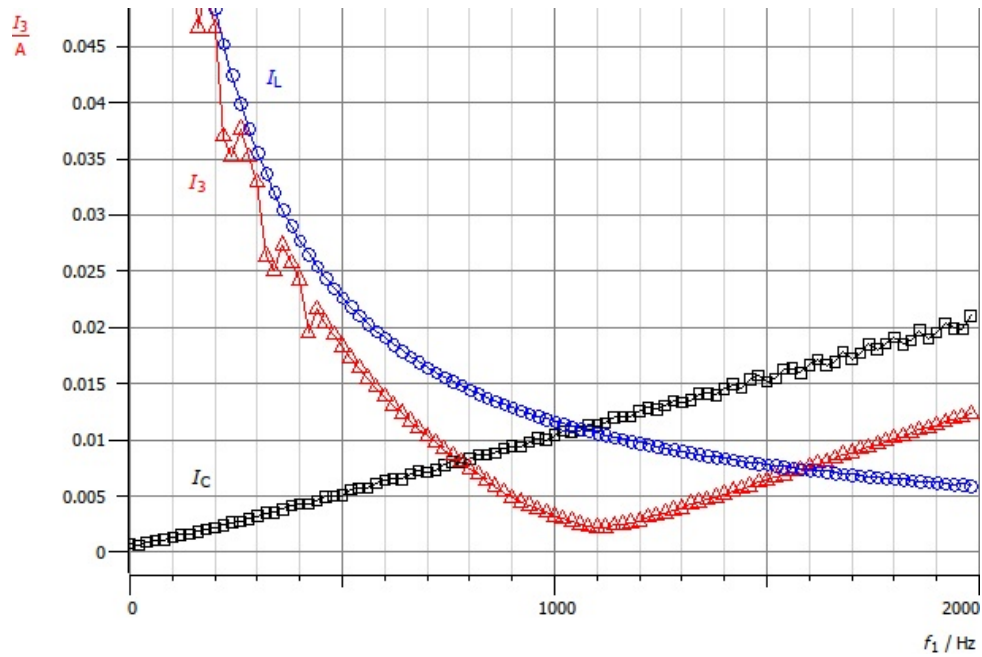


Abbildung 15: Rohdaten zum Parallelschwingkreis mit  $R = \infty$  (geöffnete Schaltung)

Die Auswertung der Messdaten erfolgt mit den gleichen Methoden wie bei den Versuchen zum Serienschwingkreis. Auch hier bestimmen wir die Güte des Systems durch Ablesen von Werten in den von CASSYlab produzierten Graphen. Die Ablesegenauigkeit wird wieder durch Abschätzen eines Fehlerintervalls bestimmt und ist größer als der Digitalisierungsfehler durch die CASSY-Geräte.

### Güteberechnung durch Breite des Stromminimums

Wir bestimmen die Resonanzfrequenz als die Frequenz  $f_0$ , bei der der in den Schwingkreis hineinfließende Strom minimal wird  $I_3 = I_0$ . Die Breite der Resonanzkurve ergibt sich als Differenz der Frequenzen  $f_+$  und  $f_-$ , bei denen der Strom auf  $\sqrt{2}I_0$  angestiegen ist. Die Güte berechnet sich damit zu

$$Q = \frac{f_0}{f_+ - f_-} \quad (32)$$

wie bei der Berechnung im Serienschwingkreis. In Abb. 16 sind die abgelesenen Werte für  $f_-$ ,  $f_0$  und  $f_+$  bei einem Widerstand von  $R = 1\Omega$  beispielhaft dargestellt.

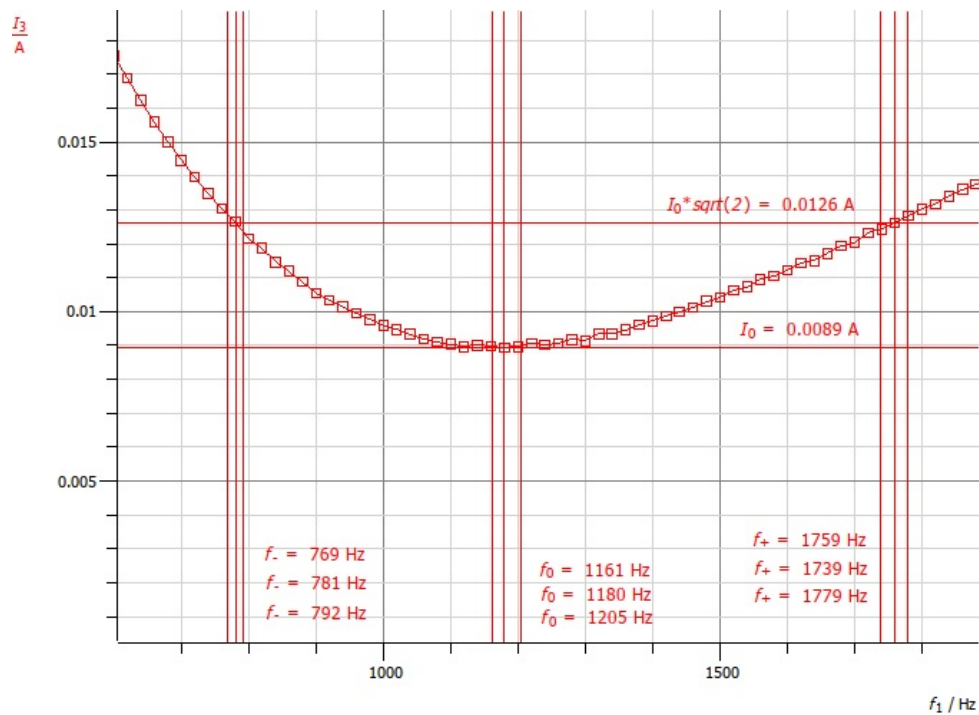


Abbildung 16: Güteberechnung durch Breite des Stromminimums

Ebenfalls wie im Serienschwingkreis schätzen wir die Unsicherheit auf  $f_-$ ,  $f_0$  und  $f_+$  durch Fehlerintervalle ab und pflanzen den Fehler auf die Güte fort, wo sie die relevante statistische Unsicherheit darstellt (Gl. (19)). Schließlich bestimmen wir auch den systematischen Fehler wie im Serienschwingkreis durch die Verschiebemethode. Wir verschieben den Strom um die vom Hersteller angegebene Offset-Unsicherheit von  $\frac{0.005}{\sqrt{3}} I_{\text{Berechsendwert}} = 0.0006$  A nach oben und nach unten und berechnen die Güte aus diesen verschobenen Stromkurven (siehe Abb. 17).

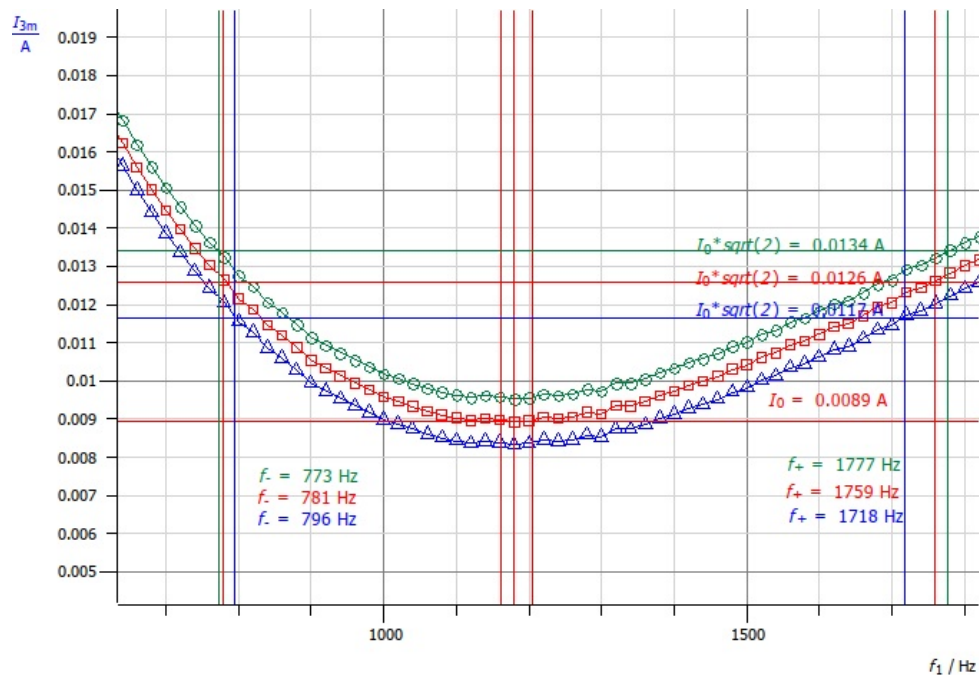


Abbildung 17: Verschiebemethode zur Berechnung des systematischen Fehlers

Die gemittelte Differenz zur ursprünglich bestimmten Güte entspricht dem systematischen Fehler. In Tabelle 10 werden die ausgelesenen Frequenzen und berechneten Güten

für die unterschiedlichen Widerstände präsentiert. Die Bezeichnung  $R = \infty$  stellt hier und im Folgenden den Schaltkreis mit geöffnetem Schalter statt Ohmschen Widerstand dar.

$R[\Omega]$	$f_0[\text{Hz}]$	$f_-[\text{Hz}]$	$f_+[\text{Hz}]$	$Q$	$\sigma_Q(\text{stat.})$	$\sigma_Q(\text{sys.})$
47	$1180 \pm 22$	$781 \pm 12$	$1759 \pm 20$	1.21	0.04	0.05
100	$1137 \pm 17$	$888 \pm 6$	$1475 \pm 6$	1.94	0.04	0.15
$\infty$	$1119 \pm 13$	$1006 \pm 4$	$1216 \pm 4$	5.33	0.16	1.05

Tabelle 10: Güteberechnung durch Breite des Stromminimums

### Güteberechnung durch Quantifizierung der Stromüberhöhung

Schließlich berechnen wir die Güte über die Stromüberhöhung. Bei (in etwa) der Resonanzfrequenz schneiden sich die Stromkurven der hyperbelförmigen Spulenstromkurve und der linear ansteigenden Stromkurve ( $I_L = I_C$ ). In unserer Messung zeigt die Kondensatorstromkurve eine wellenartige Schwankung um den linearen Anstieg, sodass wir zur einfacheren Auswertung mit CASSYlab eine Ursprungsgerade durch die Punkte legen. Wir verzichten auf eine ausführliche Fehlerdiskussion der Geradenanpassung und schätzen dafür den Kondensator- bzw Spulstrom mit etwas größeren Fehlern ab. Schließlich berechnen wir die Güte über

$$Q = \frac{I_L}{I_0^*} = \frac{I_L}{I_0^*} \quad (33)$$

wobei  $I_0^*$  der Gesamtstrom bei der Frequenz ist, bei der sich Kondensatorstrom und Spulenstrom schneiden. In Abb.18 werden die abgelesenen Werte für  $I_C = I_L$  und  $I_0^*$  für die Messung mit  $R = 47\Omega$  illustriert.

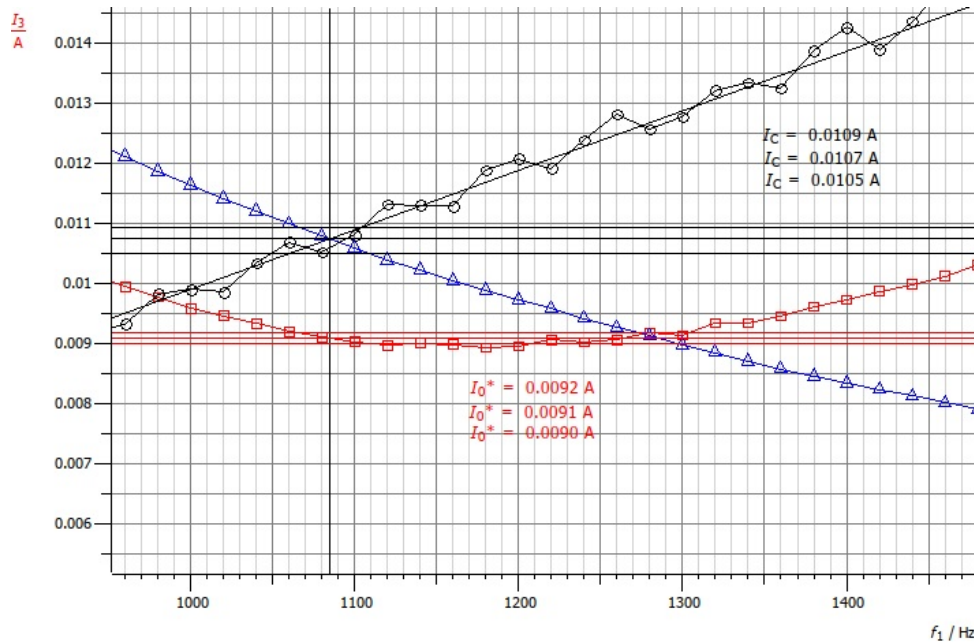


Abbildung 18: Güteberechnung durch Ablesen der Stromüberhöhung

Für die Bestimmung der statistischen Unsicherheit, schätzen wir die Fehler auf  $I_L = I_C$  und  $I_0^*$  mit Fehlerintervallen ab (Abb. 18) und pflanzen den Fehler auf  $Q$  fort:

$$\sigma_Q(\text{stat.}) = Q \sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_L}}{I_L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_0^*}}{I_0^*}\right)^2} \quad (34)$$

$I_L$ ,  $I_C$  und der einlaufende Strom unterliegen außerdem einem systematischen Fehler der Größe (laut Hersteller)

$$\sigma_{I,sys} = (0.02 \cdot I_i + 0.005 \cdot I_{Bereichsendwert})/\sqrt{3} \quad (35)$$

Wir berechnen den Fehler auf jeweils  $I_L = I_C$  und  $I_0^*$  und pflanzen den Fehler auf  $Q$  wie bei der statistischen Unsicherheit mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung fort.

$$\sigma_Q(sys.) = Q \sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_L(sys.)}}{I_L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_0^*(sys.)}}{I_0^*}\right)^2} \quad (36)$$

Die Ergebnisse für alle Widerstände sind in Tabelle 11 zusammengefasst.

$R[\Omega]$	$I_L = I_C[A]$	$I_0^*[A]$	$Q$	$\sigma_Q(stat.)$	$\sigma_Q(sys.)$
1	$0.0107 \pm 0.0002$	$0.0091 \pm 0.0001$	1.18	0.03	0.12
5	$0.0107 \pm 0.0001$	$0.0051 \pm 0.0001$	2.10	0.05	0.31
10	$0.0109 \pm 0.0001$	$0.0022 \pm 0.0001$	4.95	0.13	1.46

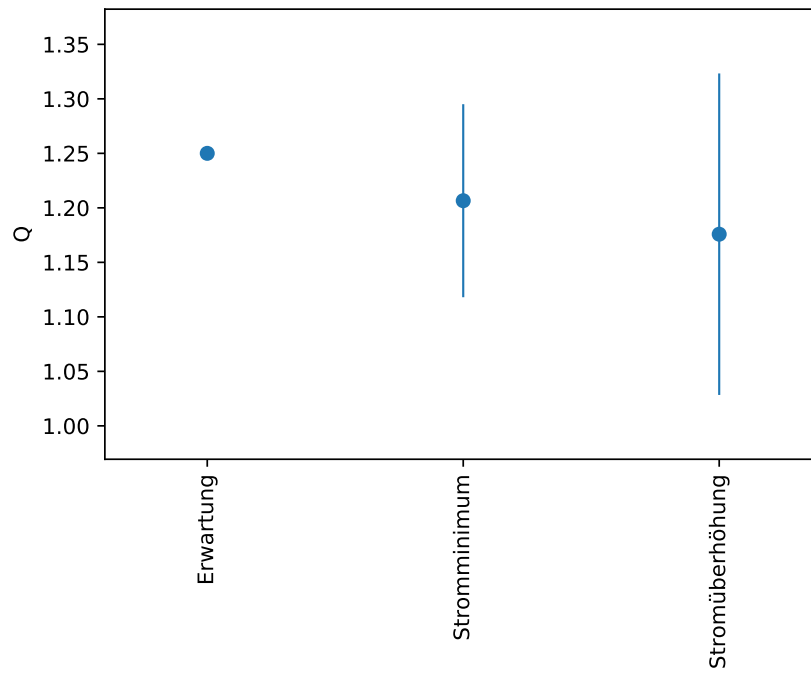
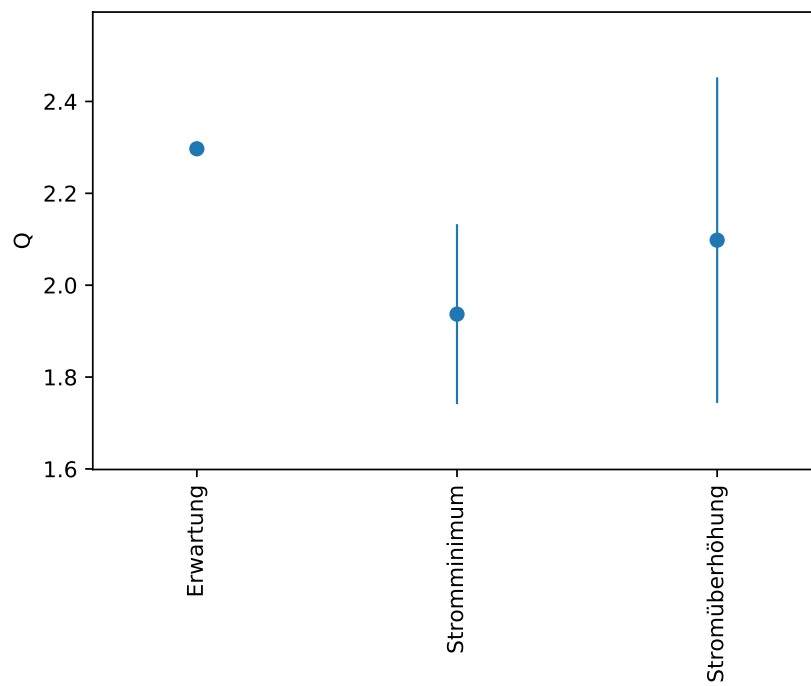
Tabelle 11: Güteberechnung durch Stromüberhöhung

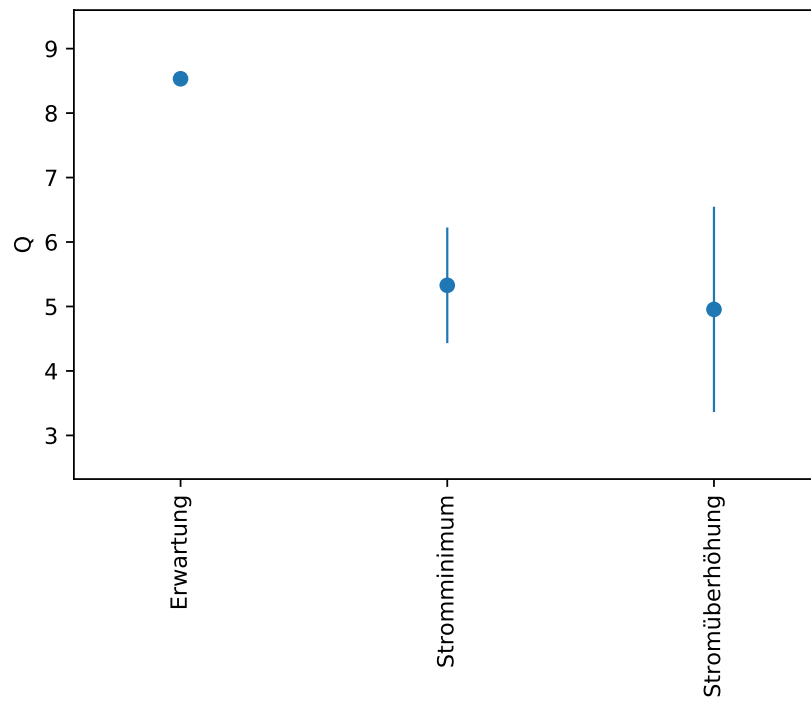
#### 4.4 Zusammenfassung

Wir fassen unsere Ergebnisse in Abb. 19, 20, 21 und Tabelle 12 zusammen. Die erwartete Güte aus der Vermessen der Bauteil ist größer als die mit CASSY berechneten Güten, was wieder an vernachlässigten Kabelwiderständen liegen könnte. Die Gütewerte der CASSY-Messung stimmen innerhalb ihrer  $1\sigma$ -Umgebung überein. Es fällt auf, dass die systematischen Unsicherheiten im Parallelschwingkreis deutlich größer sind als im Serienschwingkreis. Das liegt daran, dass sich der Offset-Fehler auf den Strom beim Minimalstromwert des Parallelschwingkreises stärker bemerkbar macht als bei den großen Maximalstromwerten im Serienschwingkreis. Schließlich lässt sich beobachten, dass die Güten wie erwartet größer werden für größer gewählte Widerstände.

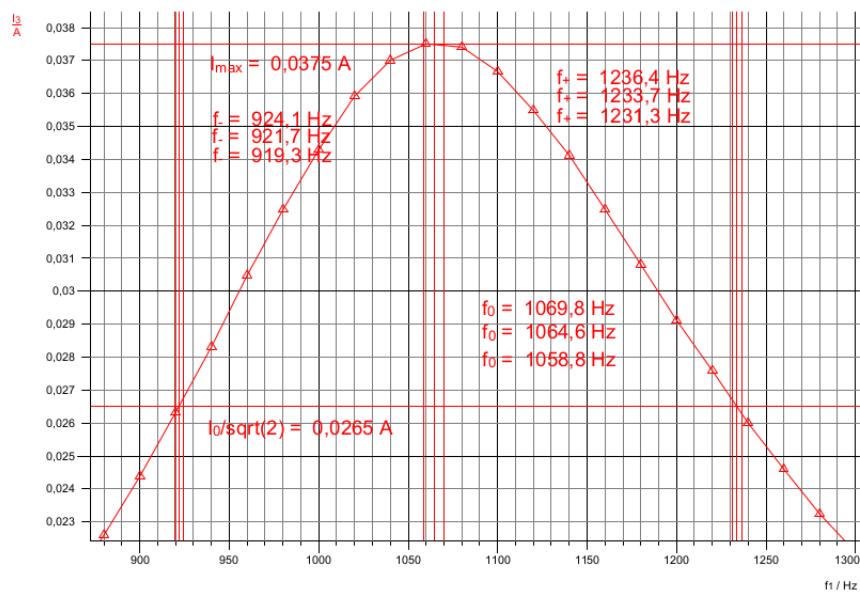
	$R = 47\Omega$	$R = 100\Omega$	$R = \infty$
Erwartung/Messbrücke	$1.250 \pm 0.003(sys.)$	$2.297 \pm 0.005(sys.)$	$8.532 \pm 0.026(sys.)$
Stromminimum	$1.21 \pm 0.04 \pm 0.05$	$1.94 \pm 0.04 \pm 0.15$	$5.33 \pm 0.16 \pm 1.05$
Stromüberhöhung	$1.18 \pm 0.03 \pm 0.12$	$2.10 \pm 0.05 \pm 0.31$	$4.95 \pm 0.13 \pm 1.46$

Tabelle 12: Zusammenfassung Parallelschwingkreis

Abbildung 19: Güteberechnung für  $R = 47\Omega$ Abbildung 20: Güteberechnung für  $R = 100\Omega$

Abbildung 21: Güteberechnung für  $R = \infty$ 

## 5 Anhang

Abbildung 22: Güteberechnung durch Breite des Strommaximums für  $R = 5\Omega$  beim Serienschwingkreis

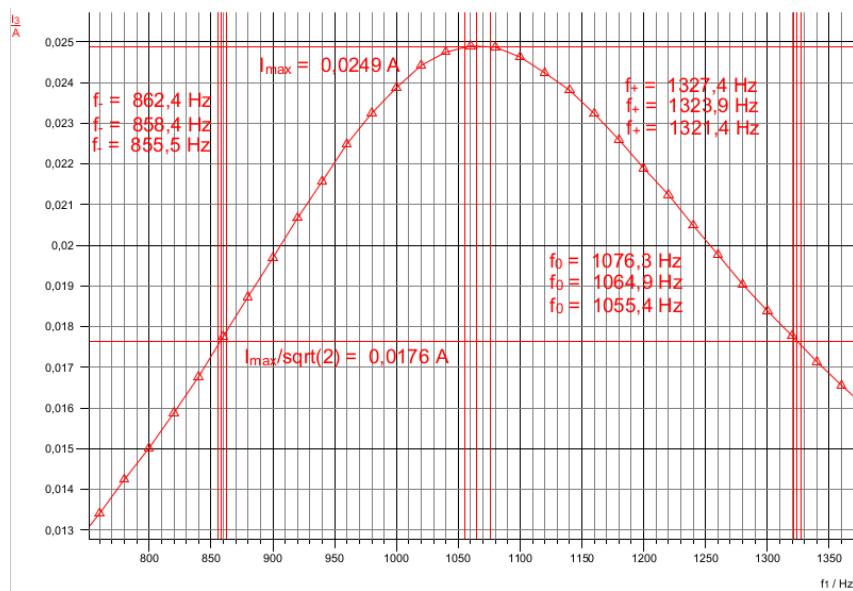


Abbildung 23: Güteberechnung durch Breite des Strommaximums für  $R = 10\Omega$  beim Serienschwingkreis