

Protokoll Wellenlehre Physikalisches Grundpraktikum 2

Gruppe A2
Julián Häck, Maria Spethmann

6. September 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Allgemeiner Versuchsaufbau	5
3	Kalibrierung des Wegaufnehmers	7
3.1	Versuchsbeschreibung	7
3.2	Versuchsaufbau und Durchführung	7
3.3	Versuchsauswertung	7
4	Abstandsmessung	10
4.1	Versuchsbeschreibung	10
4.2	Versuchsaufbau und Durchführung	10
4.3	Versuchsauswertung	11
5	Stehende Welle	14
5.1	Versuchsbeschreibung	14
5.2	Versuchsaufbau und Durchführung	14
5.3	Versuchsauswertung	14
6	Polarisationsfilter	17
6.1	Versuchsbeschreibung	17
6.2	Versuchsaufbau und Durchführung	17
6.3	Versuchsauswertung	17
7	Winkelkalibrierung	21
7.1	Versuchsbeschreibung	21
7.2	Versuchsbeschreibung, Aufbau und Durchführung	21
7.3	Versuchsauswertung	21
8	Brechung am PE-Halbzylinder	24
8.1	Versuchsbeschreibung	24
8.2	Versuchsaufbau und Durchführung	24
8.3	Versuchsauswertung	24
9	Optischer Tunneleffekt	29
9.1	Versuchsbeschreibung	29
9.2	Versuchsaufbau und Durchführung	29
9.3	Versuchsauswertung	29

1 Theorie

Wellen

Wellen sind Störungen einer Feldgröße, die in Raum und Zeit fortschreiten und ungedämpft die Wellengleichung erfüllen.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} a(\vec{x}, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) a(\vec{x}, t) \quad (1)$$

Im Fall von Mikrowellen ist das elektrische Feld \vec{E} bzw. das magnetische Feld \vec{B} diese Feldgröße. Da die Amplitude dieser senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Wellen liegt, handelt es sich um transversale Wellen. Grundlage hierfür sind die Maxwellschen Gleichungen:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{j} \quad (5)$$

mit

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

mit ϵ_0 und μ_0 als Influenz- bzw. Induktionskonstante, Stromdichte \vec{j} , Ladungsdichte ρ , Magnetisierung \vec{M} und Polarisierung \vec{P} . Außerdem nehmen wir näherungsweise an, dass $\vec{P}, \vec{M}, \rho, \vec{j} = 0$.

Die Phasengeschwindigkeit c entspricht:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \quad (6)$$

mit der erneuten Näherung $\epsilon_r = 1 = \mu_r$. Eine spezielle Lösung der Wellengleichung ist die harmonische ebene Welle mit

$$a(x, t) = a_0 \cdot \sin(\omega t \pm kx + \phi), \quad \text{Kreisfrequenz } \omega = 2\pi f, \quad \text{Kreiswellenzahl } k = 2\pi/\lambda$$

Stehende Welle

Stehende Wellen sind die einfachste Form der Überlagerung. Trifft eine ebene, harmonische Welle senkrecht auf einen geeigneten Reflektor, so überlagern sich die Einfallende und Reflektierte zu einer stehenden Welle.

$$a(x, t) = 2a_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(kx)$$

Brechung

Beim Übergang von unterschiedlich dichten Medien werden Wellen nach dem Gesetz von Snellius gebrochen.

$$n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\beta), \quad (7)$$

wobei n_1 und α der Brechungsindex und der Brechungswinkel von Medium 1 sind und analog n_2 und β der Brechungsindex und Brechungswinkel von Medium 2.

Polarisation

Transversale Wellen können polarisiert werden. Dabei gibt es die Extremfälle der zirkularen und der linearen Polarisation. Im Fall der linearen Polarisation kann die Schwingungsebene durch einen Polarisationsfilter geändert werden. Dabei sinkt die Intensität gemäß dem Gesetz von Malus:

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \cos^2(\alpha) \quad (8)$$

mit dem Winkel α zwischen Polarisationssebene des Polarisationsfilter und der einfallenden Welle. Im unserem Experiment sind Sender und Empfänger parallele zueinander stehende Antennendipole, wodurch sich für die Intensität

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \cos^4(\alpha) \quad (9)$$

ergibt.

Optischer Tunneleffekt

Wird in einem kleinen Abstand D hinter einem Halbzylinder, das eine einfallende Welle unter dem Winkel der Totalreflexion reflektiert, ein weiterer Halbzylinder gestellt, kann man hinter dem zweiten Halbzylinder eine transmittierte Welle messen. Dieser Effekt wird als Analogon zur Quantenmechanik Optischer Tunneleffekt genannt. Die transmittierte Welle folgt dabei dem Intensitätsverlauf

$$I_T \sim \exp\left(\frac{-2\pi D}{\lambda}\right) \quad (10)$$

2 Allgemeiner Versuchsaufbau

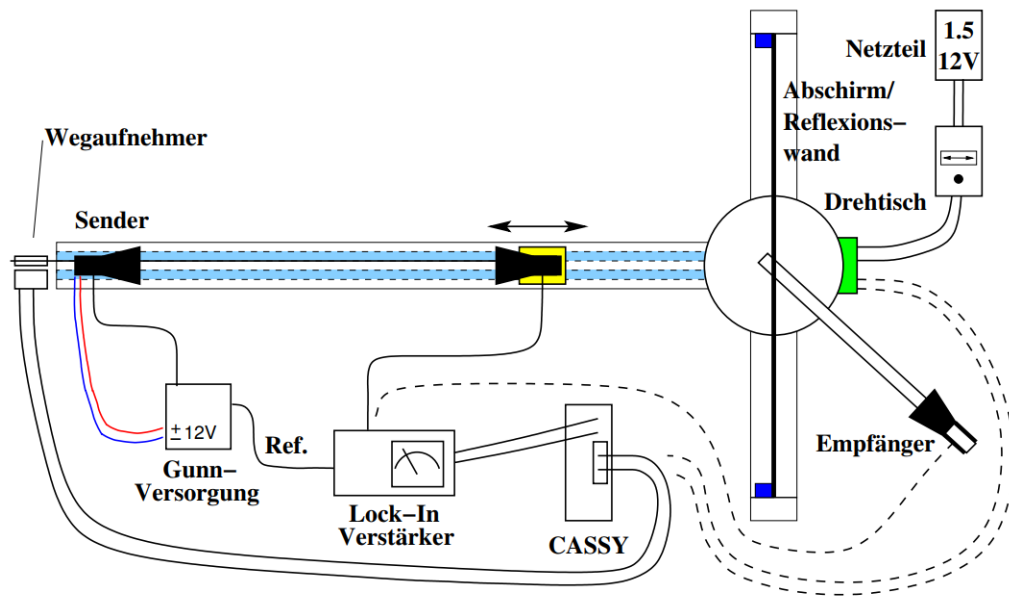


Abbildung 1: Prinzipieller Versuchsaufbau (Quelle: Versuchshandbuch)

Für die folgenden Versuche wird im Allgemeinen benötigt:

- Eine Gunn-Versorgung mit Modulator
- Ein Lock-In Messverstärker
- Ein Gunn Oszillator mit Hornstrahler
- Ein Empfänger mit Hornantenne
- Ein Sensor-CASSY mit Stromquellenbox LEYBOLD 542 031
- Ein Wegaufnehmer LEYBOLD 529 031 inklusive Faden und Gegengewicht
- Mehrere Kabel und Netzgeräte

Außerdem wird für bestimmte Versuche folgendes ergänzt:

- Ein Polarisationsfilter
- Zwei PE-Halbzyylinder
- Verschiedene Abstandsbleche
- Ein motorbetriebener Drehtisch

Wenn nicht anders beschrieben, erfolgt die Messwerterfassung der einzelnen Versuche unter folgenden Einstellungen (Tabelle 1).

Messbereich Spannung	-0.3 V .. 0.3 V
Messbereich Widerstand Wegaufnehmer	0 k Ω .. 10 k Ω
Messbereich Widerstand Winkelaufnehmer	0 k Ω .. 10 k Ω
Messwerterfassung Spannung	gemittelt über 200 ms
Messwerterfassung Widerstand Wegaufnehmer	gemittelt über 200 ms
Messwerterfassung Widerstand Winkelaufnehmer	gemittelt über 200 ms

Tabelle 1: Einstellungen der Messparameter

3 Kalibrierung des Wegaufnehmers

3.1 Versuchsbeschreibung

Die Vermessung stehender Wellen im späteren Teilversuch erfordert die Bestimmung der genauen Entfernung zwischen Empfänger und Reflexionswand. Dazu wird ein Mehrgang-Drehpotentiometer als Wegaufnehmer verwendet, den wir in diesem Vorversuch kalibrieren. Um nun aus dem gemessenen Widerstand die Strecke zu erhalten, benötigen wir den sich aus dem linearen Zusammenhang zwischen Widerstand und Strecke ergebenden Kalibrationsfaktor k :

$$S = k \cdot R + b$$

Dieser wird in diesem Versuch bestimmt.

3.2 Versuchsaufbau und Durchführung

Der Schlitten des Empfängers wird mit dem Faden verbunden und dieser dann über die Rolle des Wegaufnehmers gelegt. Auf der anderen Seite des Fadens wird das Gegengewicht befestigt um den Faden gespannt zu halten. Dabei ist darauf zu achten, dass der Faden parallel zu der Führungsschiene des Schlittens läuft um Fehler durch eine Parallaxe zu vermeiden. Als Reflexionswand verwenden wir einen Polarisationsfilter, der senkrecht zur Polarisationssebene der ausgesendeten Wellen ausgerichtet ist, und somit die Welle vollständig reflektiert.

Nun wird der Abstand zwischen Empfänger und Reflexionswand gegen den Widerstand des Wegaufnehmers gemessen. Dazu wird der Schlitten des Empfängers in äquidistanten Abständen $\Delta S = 5 \text{ cm}$ verschoben. Nach jeder Verschiebung wird der Widerstand des Wegaufnehmers über 200ms gemittelt aufgezeichnet. Die Strecken werden manuell mit einem Maßband mit Millimeterskala abgelesen.

3.3 Versuchsauswertung

Abb. 2 zeigt die Rohdaten unserer Messung. Mit Hilfe der linearen Regression wird nun eine Ausgleichsgerade durch die Messpunkte gelegt und deren Steigung bestimmt. Um die Korrelation zwischen der Steigung k und dem y-Achsenabschnitt b zu minimieren, werden die Messwerte zunächst um ihren Mittelwert verschoben. Letztendlich erhält man die Strecke S als Funktion des Widerstandes als

$$S - \bar{S} = k \cdot (R - \bar{R}) + b \quad (11)$$

wobei \bar{S} und \bar{R} die Mittelwerte der gemessenen Orte bzw. Widerstände sind. Dabei wurde angenommen, dass sowohl die Wegmessung mit dem Maßband als auch die Widerstandsmessung fehlerbehaftet sind mit den konstanten Unsicherheiten:

$$\sigma_S = \frac{1 \text{ mm}}{\sqrt{12}} \quad (12)$$

$$\sigma_R = \frac{10 \text{ k}\Omega}{4096 \cdot \sqrt{12}} \quad (13)$$

Der Fehler auf S ist auf die Genauigkeit des Maßbandes und der Fehler auf R auf die Digitalisierung der Widerstandsmessung mit dem Sensor Cassy zurückzuführen. Wir nehmen eine Gleichverteilung innerhalb der kleinsten Skalenbreite an.

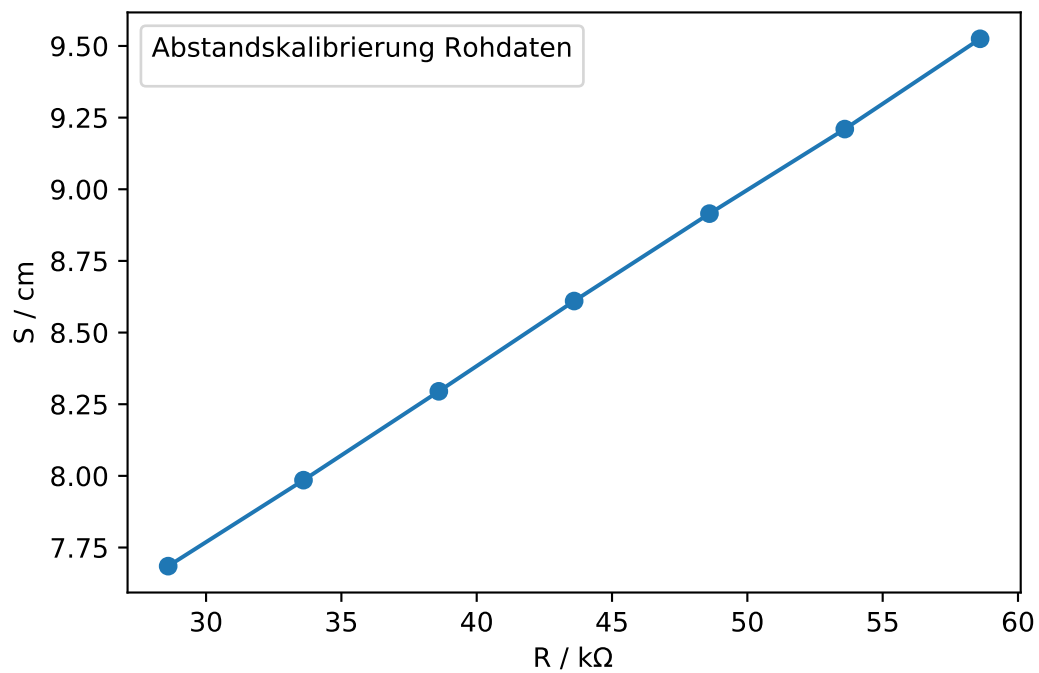


Abbildung 2: Abstand des Empfängers zur Reflexionswand als Funktion der gemessenen Widerstände des Wegaufnehmers

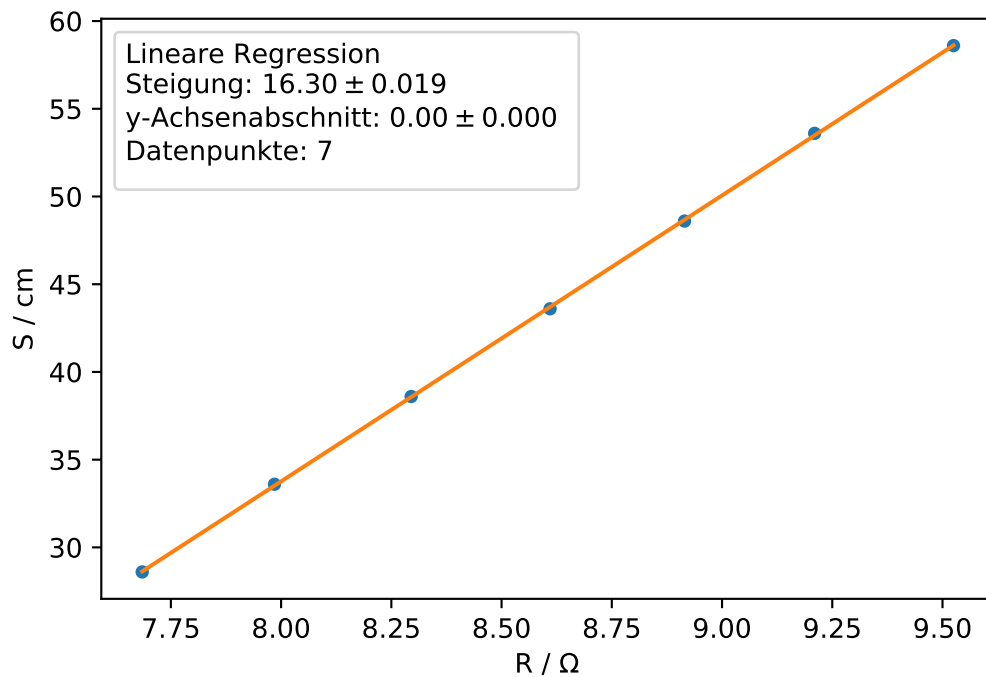


Abbildung 3: Lineare Regression der Abstandskalibrierung

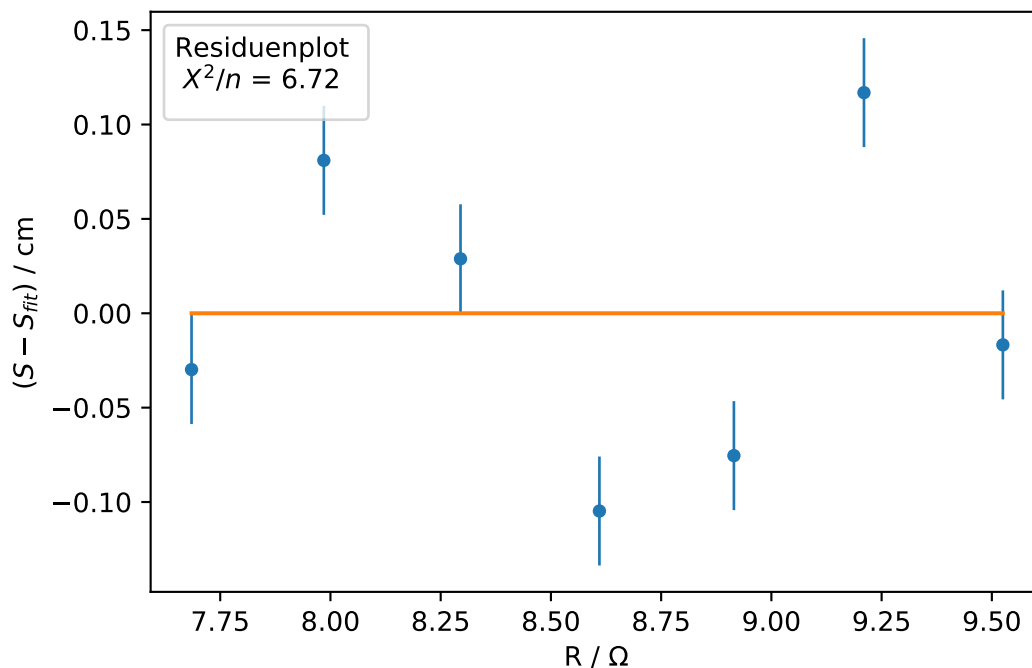


Abbildung 4: Residuenplot der Abstandskalibrierung

Abb. 3 zeigt das Ergebnis der linearen Regression:

$$k = 16.30 \pm 0.019 \frac{\text{cm}}{\Omega} \quad (14)$$

$$\frac{\chi^2}{n} = 6.72 \quad (15)$$

Der Wert für χ^2/n ist mit 6.72 sehr groß - ein Zeichen dafür, dass unsere Fehlerabschätzung zu klein ist. Schwer zu quantisierbare Fehlerquellen, die nicht mit in die Auswertung eingeflossen sind, waren unter anderem, dass der Faden des Wegaufnehmers möglicherweise nicht ganz parallel zur Schiene stand und durch das ruckelige Fortbewegen des Empfängerschlittens teilweise an der Rolle verrutscht. Die Bedeutung des χ^2/n wird dadurch abgeschwächt, dass nur 7 Messpunkte in den Fit einfließen. Der Residuenplot zeigt keine Außergewöhnlichkeiten, außer der Tatsache, dass die Fehlerbalken nur selten die Nulllinie schneiden, wie bei einem großen χ^2/n zu erwarten ist.

4 Abstandsmessung

4.1 Versuchsbeschreibung

Für die späteren Versuche benötigen wir die Abhängigkeit der Intensität von der gemessenen Spannung am Empfänger. Dabei wird ausgenutzt, dass die Intensität einer Kugelwelle mit $I \sim \frac{1}{r^2}$ abnimmt. Bei dem Versuch nutzen wir eine Tunneldiode als Empfänger, die das Signal quadratisch weiterleitet, also

$$U \sim E^{-a} \sim \frac{1}{r^{-a}} = r^a, \quad (16)$$

mit Erwartung $a = -2$. Die Intensität hängt quadratisch von dem E-Feld ab $I \sim E^2$ und somit

$$I \sim U^{\frac{2}{-a}}. \quad (17)$$

Durch die Messung der Signalspannung U in Abhängigkeit des Abstands r (Gl. (16)) zwischen Sender und Empfänger wird in diesem Versuch nun der Parameter a bestimmt.

4.2 Versuchsaufbau und Durchführung

Wie bei der Abstandskalibrierung wird der Schlitten, auf dem nun der Empfänger montiert ist, auf der Schiene verschoben. Dabei beginnen wir nahe am Sender und führen eine automatische Messung mit CASSYLab durch, indem wir den Empfänger langsam und gleichmäßig von dem Sender entfernen. Um nun a zu bestimmen, tragen wir U gegen S doppellogarithmisch auf:

$$\log(U) = b - a \cdot \log(S),$$

Die Strecke S entspricht hier dem Radius der Kugelwelle r und wird wieder über den Widerstand des Wegaufnehmers gemessen, wobei diesmal eine Schnellkalibrierung über zwei Referenzpunkte in CASSYlab vorgenommen wurde.

4.3 Versuchsauswertung

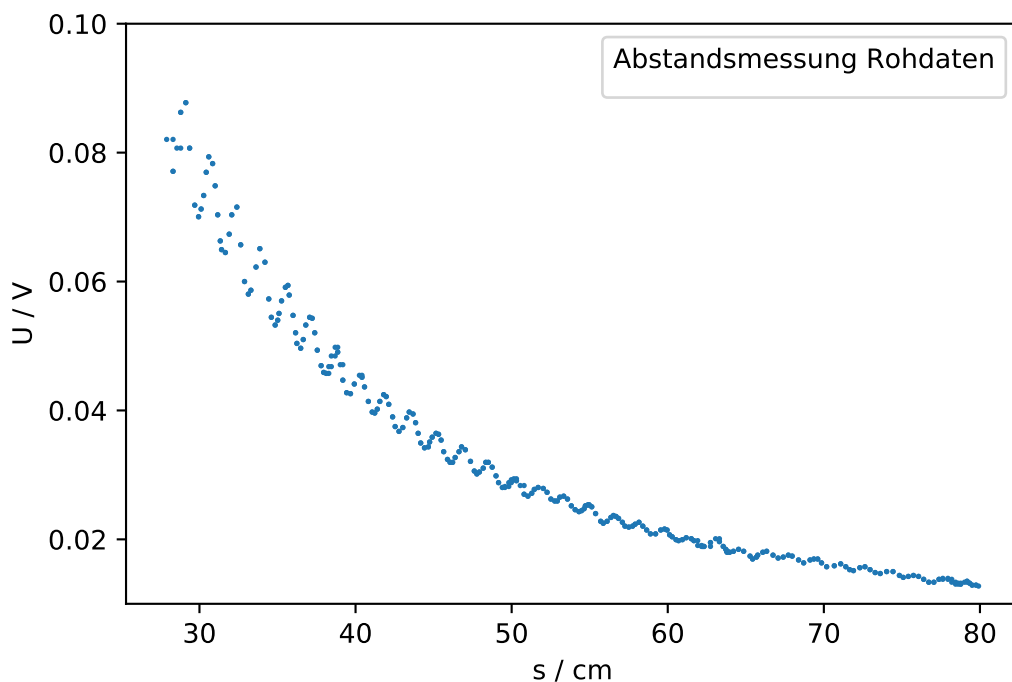


Abbildung 5: Gemessene Spannung als Funktion des Abstandes zwischen Sender und Empfänger

Wir analysieren die Messwerte, indem wir Weg und Spannung doppellogarithmisch auftragen und eine lineare Regression vornehmen. Der Parameter a ergibt sich nun aus der Steigung. Es wurden folgende Unsicherheiten auf die Messwerte angenommen

$$\sigma_S = \frac{0.5\text{cm}}{\sqrt{12}} \quad (18)$$

$$\sigma_U = 0.002\text{ V}. \quad (19)$$

Die recht große Unsicherheit auf die Strecke ergibt sich dadurch, dass sich die genaue Position des Senders und des Empfängers innerhalb der Hornantennen nicht genau bestimmen lässt. Außerdem ist die Schnellkalibrierung durch CASSYlab fehleranfällig, weil nur zwei Messwerte verwendet werden. Wir schätzen unsere Messskala deshalb mit einer kleinsten Skalenbreite von 0.5cm ab und nehmen eine Gleichverteilung innerhalb dieser an.

Bei Betrachtung der Rohdaten stellen wir fest, dass die Mikrowellen anscheinend an umliegenden Gegenständen, Personen oder Raumwänden reflektiert wurden und sich stehende Wellen ausbilden. Die Knoten und Bäuche der stehenden Welle sind im Spannungsverlauf deutlich zu erkennen. Um die Messwerte trotzdem linear annähern zu können, schätzen wir den Fehler auf die Spannung auf ca. 1/3 der durchschnittlichen Spannungsdifferenz zwischen nebeneinanderliegenden Knoten und Bäuchen ab, was einen Wert von 0.002 V ergibt. Dieser Fehler ist deutlich größer als der Digitalisierungsfehler des CASSY-Geräts von $\frac{0.6\text{kV}}{4096 \cdot \sqrt{12}}$, sodass letzteres vernachlässigt wird. Für die Fehler auf den Logarithmus nutzen wir Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma(\log(S)) = \frac{\sigma_S}{S} \quad (20)$$

$$\sigma(\log(U)) = \frac{\sigma_U}{U} \quad (21)$$

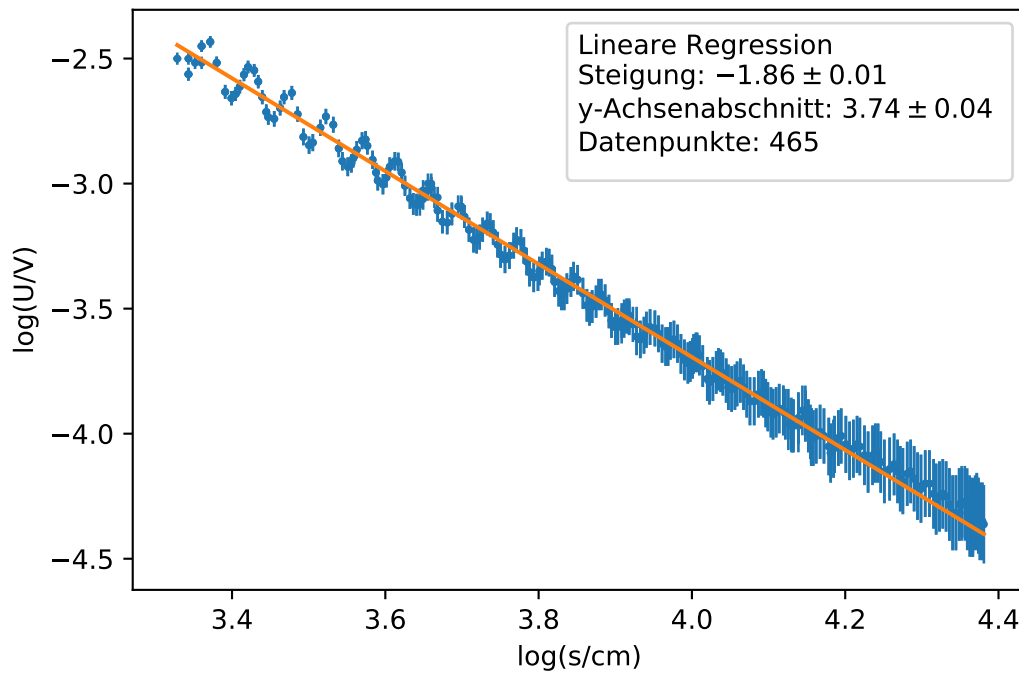


Abbildung 6: Lineare Regression der Abstandsmessung

Abb. 6 stellt die Ergebnisse der Linearen Regression dar. Die Messdaten werden insgesamt gut durch die genäherte Gerade beschrieben und der Residuenplot zeigt keine Auffälligkeiten. Das χ^2/n ist nur geringfügig kleiner als 1. Wir erhalten einen Wert $a = -1.86$, was etwas kleiner ist als der erwartete Wert von $a = -2$. Ein Grund könnte sein, dass die Tunnelodiode das Signal nicht quadratisch umsetzt. Außerdem sendet die Hornantenne keine idealen Kugelwellen aus und die gemessene Spannung wird durch die Reflexion an umliegenden Gegenständen verstärkt.

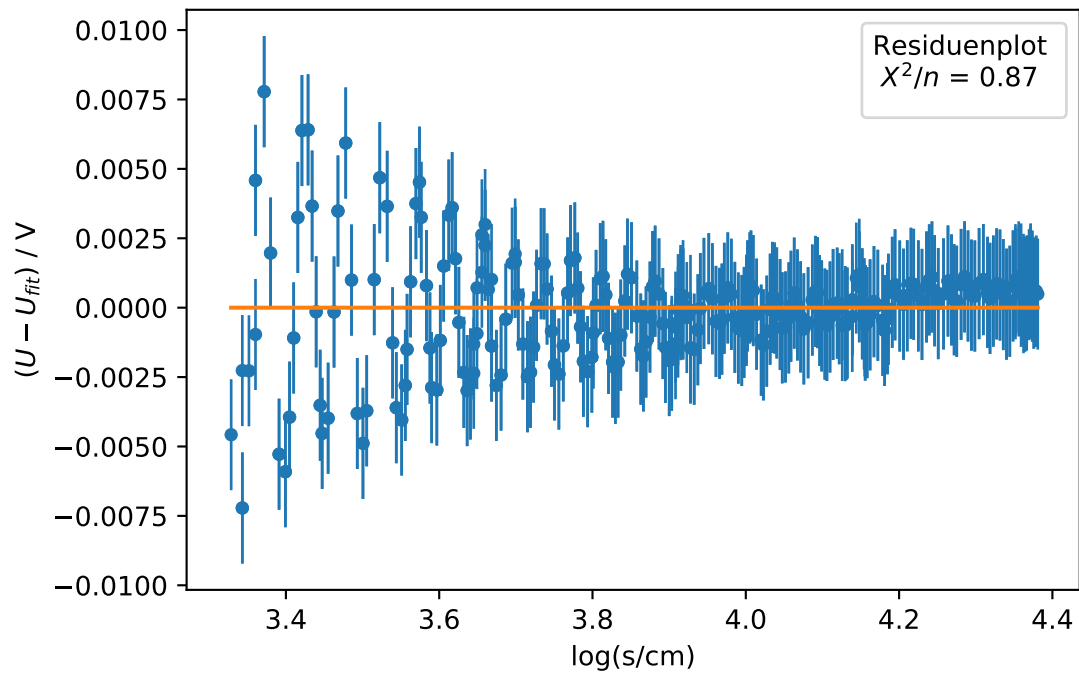


Abbildung 7: Residuenplot der Abstandsmessung

5 Stehende Welle

5.1 Versuchsbeschreibung

Mit Hilfe einer Reflexionswand gegenüber des Senders wird eine stehende Welle erzeugt. Einfallende und reflektierte Welle überlagern sich und ergeben eine stehende Welle, bei der die räumlichen und zeitlichen Oszillationen entkoppelt sind. Es entstehen Knoten in Abständen einer halben Wellenlänge, bei der die Intensität der Welle immer annähernd null ist. Dazwischen liegen Bäuche, die im zeitlichen Mittel eine positive Intensität liefern. In diesem Versuch wird der Empfänger zwischen Sender und Reflexionswand verschoben und die Spannung gegen den Ort aufgezeichnet. Anhand der gemessenen Maxima, die einem Bauch entsprechen, kann die Wellenlänge bestimmt werden: Zwischen n Bäuchen liegen $n/2$ Wellenlängen (Zählung bei null beginnend).

5.2 Versuchsaufbau und Durchführung

Für die Vermessung der stehenden Welle wird ein Polarisationsfilter als Reflexionswand verwendet. Dazu wird dessen Polarisationsebene um 90° zum Sender gedreht. Der Empfänger befindet sich auf der Schiene zwischen Sender und Reflexionswand, wobei die Hornantenne auf den Polarisationsfilter gerichtet ist. Der Empfänger wird für die Messung nah beim Polarisationsfilter beginnend in Richtung Sender langsam verschoben. Die Verschiebung wird durch den Wegaufnehmer als Widerstand aufgezeichnet. Mithilfe der Abstandskalibrierung aus dem ersten Versuchsteil kann der Widerstand in eine Strecke umgerechnet werden.

5.3 Versuchsauswertung

Abb. 8 stellt die gemessene Spannung als Funktion des Widerstandes des Wegaufnehmers dar. Wie erwartet sind viele Knoten in Form von Minima und Bäuche in Form von Maxima zu erkennen. Von ausgewählten Peaks wurde mit dem Programm CASSYlab der Peakschwerpunkt und die darauf liegende Unsicherheit berechnet, siehe Tabelle 2.

i	$R_i \pm \sigma_{R_i}$ in $k\Omega$
0	5.904 ± 0.008
4	6.313 ± 0.015
8	6.713 ± 0.016
14	7.298 ± 0.018
19	7.802 ± 0.016
25	8.398 ± 0.021
29	8.797 ± 0.011
33	9.187 ± 0.015

Tabelle 2: Positionen der Peaks und ihre Unsicherheit

Aus den Messdaten bestimmen wir die Wellenlänge auf zwei unterschiedliche Arten. Zum einen wird der Abstand $\Delta R = R_{33} - R_0$ zwischen dem Peak bei $R_0 = 5.90 k\Omega$ und dem Peak bei $R_{33} = 9.19 k\Omega$ berechnet, die Anzahl n dazwischen liegender Bäuche gezählt und daraus die Wellenlänge mit

$$\lambda = \frac{2k\Delta R}{n} \quad (22)$$

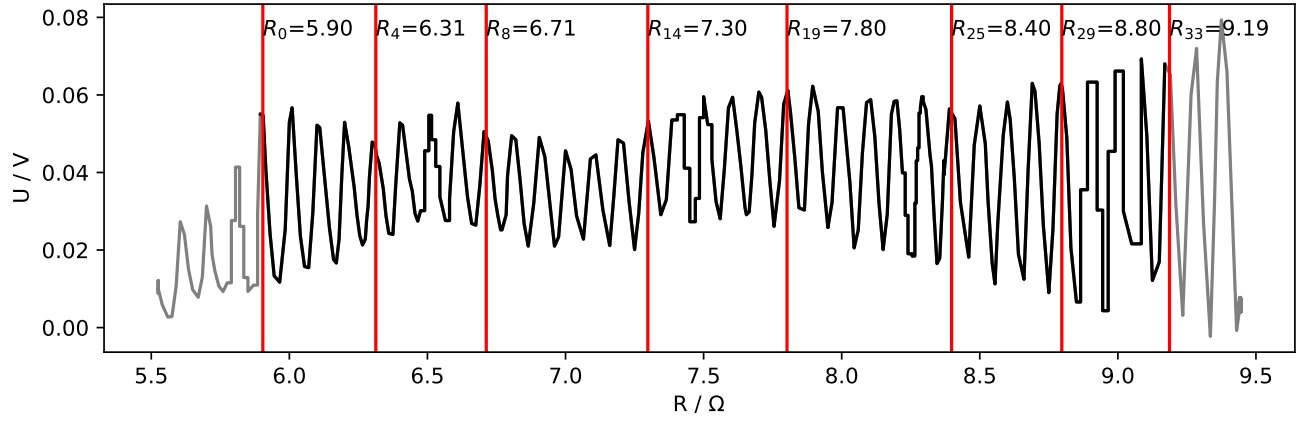


Abbildung 8: Gemessene Spannung am Empfänger als Funktion des Widerstandes des Wegaufnehmers und Markierung ausgewählter Maxima

berechnet, wobei k der Umrechnungsfaktor aus der Wegkalibrierung ist. Mit $n = 33$ ergibt sich eine Wellenlänge von $\lambda_1 = 3.243$ cm. Die statistische Unsicherheit wird mit der Gaußschen Fehlfortpflanzung berechnet:

$$\sigma_{\lambda, \text{stat}} = \frac{2k}{33} \sqrt{\sigma_{R_0}^2 + \sigma_{R_{33}}^2} = 0.017 \text{ cm} \quad (23)$$

Dazu kommt ein systematischer Fehler durch den Umrechnungsfaktor k , der auf folgende Weise abgeschätzt wird:

$$\sigma_{\lambda, \text{sys}} = \lambda(k + \sigma_k) - \lambda(k) = \frac{2\Delta R}{33} \sigma_k = 0.004 \text{ cm} \quad (24)$$

Insgesamt erhält man so

$$\lambda_1 = 3.243 \pm 0.017 \pm 0.004 \text{ cm}. \quad (25)$$

Als zweite Methode zur Berechnung der Wellenlänge werden die Positionen der Widerstandspeaks gegen die Nummerierung der Peaks aufgetragen und wir führen eine lineare Regression (Abb. 9) durch. Die Wellenlänge berechnet sich aus der Steigung m_{sw} durch

$$\lambda = 2km_{\text{sw}}. \quad (26)$$

Die Auswertung der linearen Regression ergibt ein χ^2/n von 0.17. Dieser Wert deutet an, dass die Unsicherheiten auf die Widerstandspeaks kleiner gewählt werden können. Die Steigung $m_{\text{sw}} = 0.0996 \pm 0.0004$ hat nur eine sehr kleine Unsicherheit, was dafür spricht, dass diese Methode zur Wellenlängenbestimmung zuverlässig ist. Der Residuenplot in Abb. 10 zeigt, dass die Messwerte gleichmäßig um die genäherte Gerade liegen. Die Wellenlänge ergibt sich zu 3.246 cm mit Unsicherheiten

$$\sigma_{\lambda, \text{stat}} = 2k\sigma_{m_{\text{sw}}} = 0.013 \text{ cm} \quad (27)$$

$$\sigma_{\lambda, \text{sys}} = 2m_{\text{sw}}\sigma_k = 0.004 \text{ cm} \quad (28)$$

Insgesamt also

$$\lambda_2 = 3.246 \pm 0.017 \pm 0.004 \text{ cm}. \quad (29)$$

Die Wellenlängen λ_1 und λ_2 liegen nah beieinander und überschneiden sich im Rahmen ihrer Unsicherheiten. Allerdings ist bei der Betrachtung zu berücksichtigen, dass sich die beiden vorgestellten Methoden in ihrer Herangehensweise ähneln und die beiden Werte der Wellenlänge voneinander abhängen.

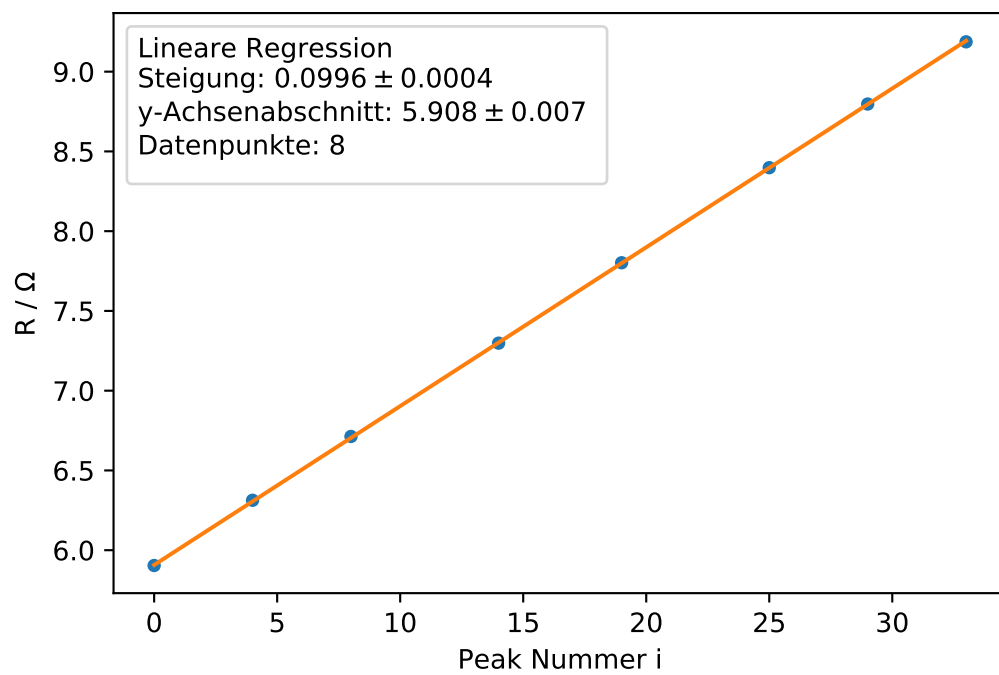


Abbildung 9: Lineare Regression der Spannungspeaks der stehenden Welle

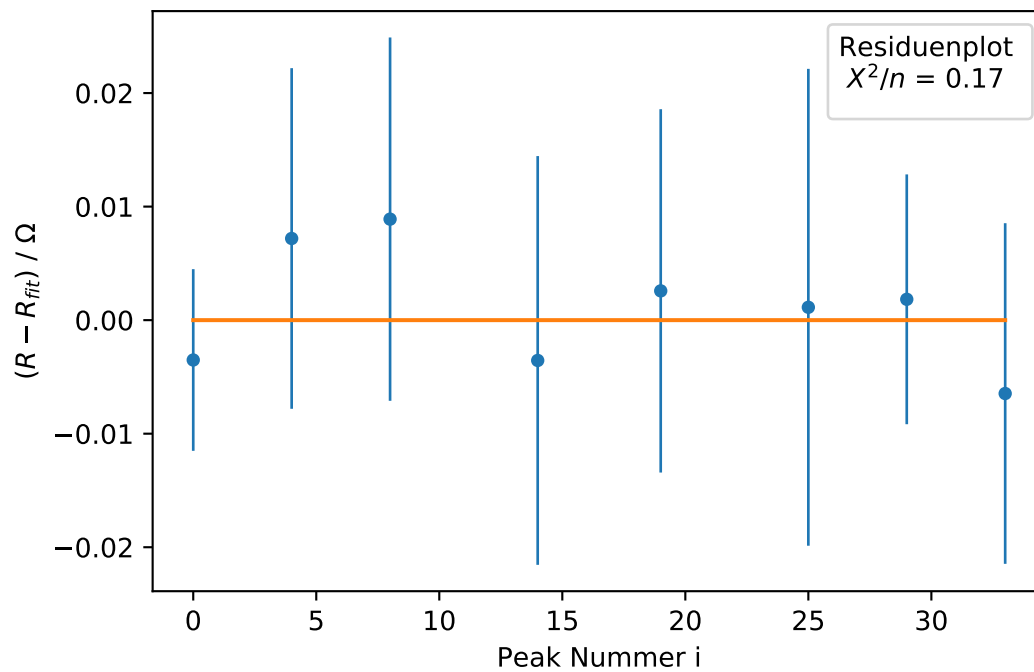


Abbildung 10: Residuenplot

6 Polarisationsfilter

6.1 Versuchsbeschreibung

In diesem Versuch wird das Gesetz von Malus veranschaulicht. Dieses besagt, dass linear polarisierte Wellen beim Passieren eines Polarisationsfilters ihre Schwingungsebene drehen und sich die Intensität auf

$$I = I_0 \cos^2 \phi \quad (30)$$

verringert, wobei ϕ der Winkel zwischen einfallender Polarisationssebene und Ausrichtung des Polarisators ist. In unserem Versuch werden Sender und Empfänger mit paralleler Ausrichtung der Dipole positioniert. Dazwischen befindet sich ein Polarisationsfilter mit drehbarer Polarisationsrichtung ϕ . Wir bestimmen die Intensität am Empfänger als Funktion von ϕ und erwarten eine Abhängigkeit

$$I = I_0 \cos^x \phi \quad (31)$$

mit $x = 4$, weil der Empfänger als Analysator ebenfalls polarisierend wirkt.

6.2 Versuchsaufbau und Durchführung

Die Hornantennen werden mit einem Abstand von ca. 40cm und zueinander ausgerichtet auf der Schiene befestigt. Dazwischen wird der Polarisationsfilter montiert, ein Gitter aus elektrisch leitenden Stäben. Die Polarisationsrichtung lässt sich manuell um 360° drehen, wobei die minimale Skalenbreite bei 1° liegt. Nun wird die Polarisationsrichtung in Abständen von 10° manuell verschoben, angefangen bei maximaler Auslöschung bei $\phi = -90^\circ$ bis zum Winkel $\phi = 270^\circ$, wobei nach jeder Drehung des Filters das Signal des Empfängers als Spannung aufgezeichnet wird.

6.3 Versuchsauswertung

Abb. 11 stellt den gemessenen Spannungsverlauf am Empfänger als Funktion der Polarisationsrichtung ϕ dar. Wie erwartet ist die Spannung und somit Intensität bei 0° und bei 180° maximal; bei -90° , 90° und 270° ist die Spannung dagegen nahezu bei 0. Die Werte liegen symmetrisch um 90° und somit ist keine weitere Anpassung der Gradskala notwendig. Um den Faktor x aus Gl. (31) zu erhalten, wird zunächst die Spannung mit $I = (U - U_0)^{-2/a}$ in die Intensität umgerechnet, wobei U_0 der kleinste gemessene Wert der Spannung ist (Abb. 12). Anschließend tragen wir $\log I/I_0$ gegen $\log |\cos \phi|$ auf, wobei I_0 der größte erhaltene Wert von I in unserer Berechnung ist, und führen eine lineare Regression durch. Die Steigung entspricht dem gesuchten Wert für x . Damit die logarithmischen Werte und die für die Regression benötigten Unsicherheiten endliche Werte ergeben, werden die Punkte mit $\phi = \{-90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$ nicht in die Berechnung mit einbezogen.

Die Unsicherheiten auf die Messgrößen werden folgendermaßen abgeschätzt:

$$\sigma_\phi = \frac{1^\circ}{\sqrt{12}}$$

$$\sigma_U = 0.0005 \text{ k}\Omega$$

Wie Wahl für σ_ϕ beruht auf der Annahme, dass die Messwerte innerhalb der kleinsten Skalenbreite gleichverteilt sind. Der Fehler auf U ergibt sich aus den Schwankungen der

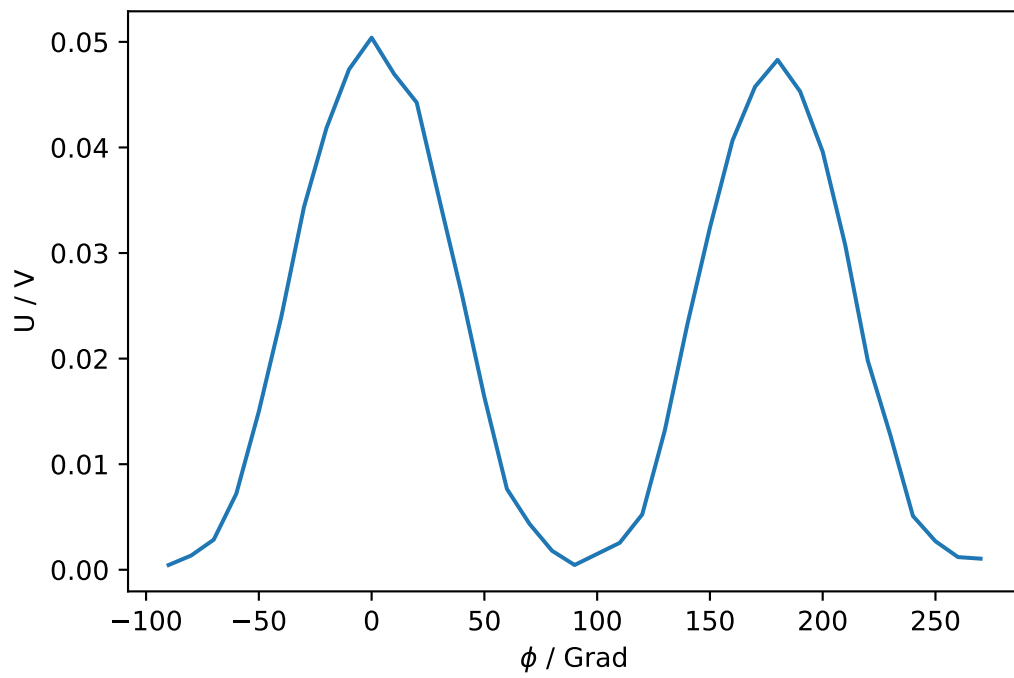


Abbildung 11: Spannungsverlauf in Abhängigkeit der Ausrichtung des Polarisationsfilters

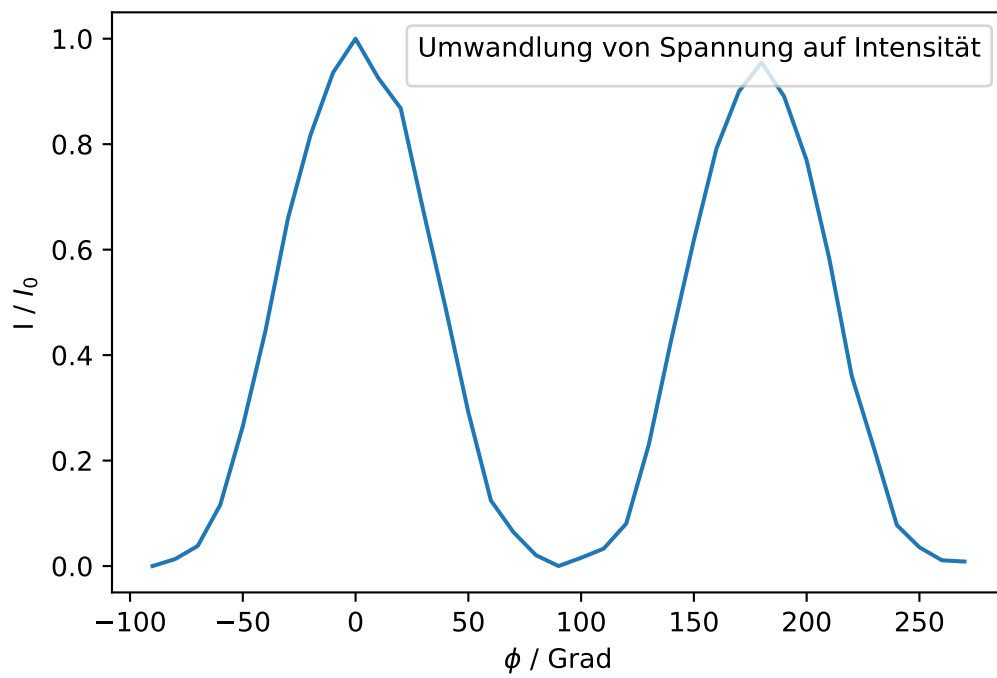


Abbildung 12: Intensität Polarisation

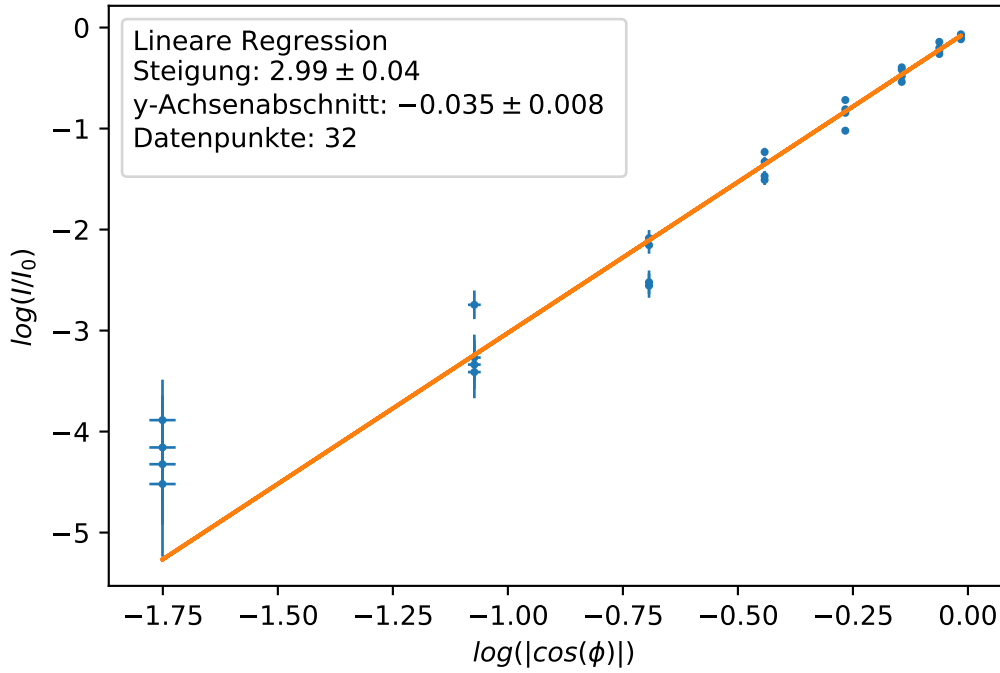


Abbildung 13: Lineare Regression zum Gesetz von Malus

Spannungswerte im stationären Zustand, wie aus unseren Messungen herauszulesen ist. Dieser ist um eine Größenordnung größer als der Digitalisierungsfehler des CASSY Sensors. Die Fehler auf $\log I/I_0$ und $\log |\cos \phi|$ werden durch Fehlerfortpflanzung berechnet. Eigentlich müsste die systematische Unsicherheit auf a getrennt betrachtet werden. Weil die für das Praktikum zur Verfügung stehenden Python-Funktionen für die lineare Regression keine Trennung von statistischen und systematischen Fehlern vorsieht, nehmen wir vereinfachend an, σ_a sei ein statistischer Fehler und nehmen ihn bei der Gaußschen Fehlerfortpflanzung mit auf. Damit ergibt sich

$$\log \frac{I}{I_0} = -\frac{2}{a} \log(U - U_0) - \log(I_0) \quad (32)$$

$$\Rightarrow \sigma(\log \frac{I}{I_0}) = \sqrt{\left(\frac{2\sigma_a}{a^2} \log(U - U_0)\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_U}{a(U - U_0)}\right)^2} \quad (33)$$

$$\sigma(\log |\cos \phi|) = \left| \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \right| \sigma_\phi \quad (34)$$

Die lineare Regression ist in Abb. 13 dargestellt und gibt einen Wert für x von $x = 2.99 \pm 0.04$. Somit ist der gemessene Wert deutlich kleiner als die Erwartung $x = 4$. Das χ^2/n ist mit 5.12 zu groß, ein Zeichen dafür, dass unsere Fehler zu klein gewählt wurden oder die Messdaten nicht gut durch eine Gerade dargestellt werden. Letzere Vermutung wird dadurch bekräftigt, dass für kleine Werte von $|\cos \phi|$ die Ausgleichsgerade der linearen Regression deutlich unterhalb der gemessenen Werte liegt, wie im Residuenplot in Abb. 14 zu erkennen. Nicht berücksichtigte Fehlerquellen sind wieder die Reflexion der Wellen an umliegenden Gegenständen und ein fehlerbehafteter Polarisationsfilter, der möglicherweise auch die Intensität der Mikrowellen abschwächt, wenn die Gitterstäbe senkrecht zur Dipolausrichtung stehen.

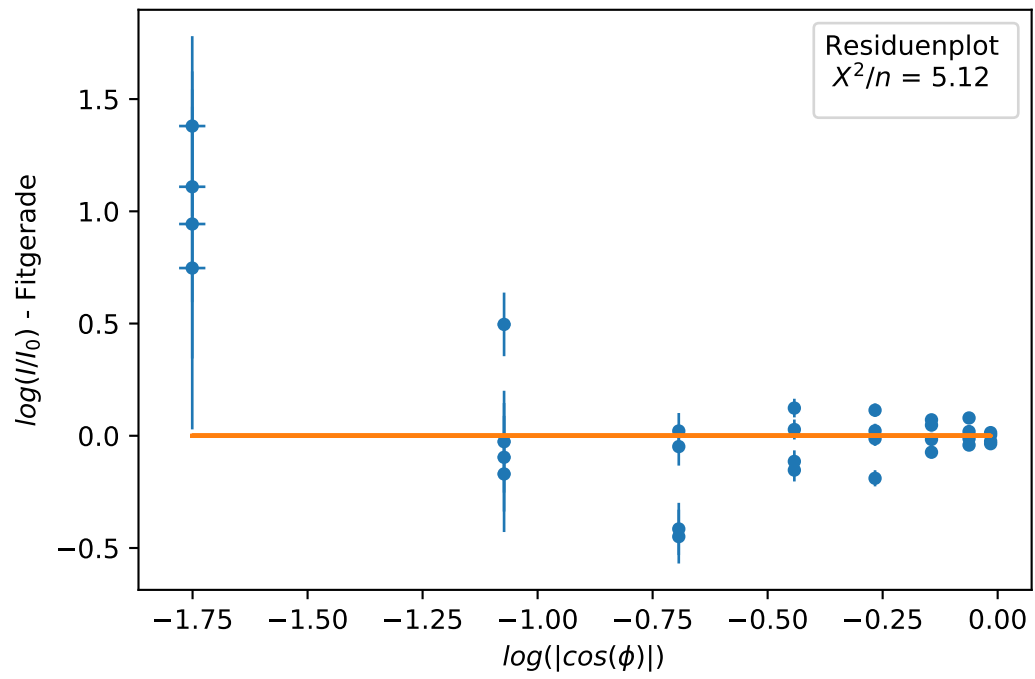


Abbildung 14: Residuenplot zum Gesetz von Malus

7 Winkelkalibrierung

7.1 Versuchsbeschreibung

In diesem Vorversuch wird der Winkelaufnehmer am Drehtisch kalibriert, um in den folgenden Versuchen den gemessenen Widerstand in einen Winkel umrechnen zu können. Die Vorgehensweise ist analog zur Kalibrierung des Wegaufnehmers.

7.2 Versuchsbeschreibung, Aufbau und Durchführung

Bei den Versuchen zur Brechung und zur Frustrierten Totalen Internen Reflexion (FTIR) wird der Empfänger an den Schwenkarm des motorbetriebenen Drehtisches befestigt. Die Reflexionswand wird abgebaut. Die Hornantenne befindet sich auf einem Radius von etwa 30cm und auf gleicher Höhe wie der Sender. Ähnlich wie beim Wegaufnehmer erfolgt die Winkelmessung mit einem Drehpotentiometer, der am Drehtisch verbaut ist und einen Widerstand in Abhängigkeit des Dreharmwinkels ausgibt. Dieser Winkelaufnehmer wird in diesem Vorversuch kalibriert. Dazu werden die am Drehtisch manuell abgelesenen Winkel γ in äquidistanten Schritten von 10° im Messwertbereich von -90° bis 90° gegen den Widerstand aufgetragen. Wie bereits in Tabelle 1 zusammengefasst, werden die Widerstandswerte über 200ms gemittelt und der Messbereich des Winkelaufnehmers auf $0..10k\Omega$ gesetzt. Die Skalenbreite zur Winkelablesung am Drehtisch beträgt 5° .

7.3 Versuchsauswertung

Die gemessenen Winkel γ werden in Abb. 15 gegen den Widerstand des Winkelaufnehmers aufgetragen. Ähnlich wie bei der Kalibrierung des Wegaufnehmers werden die Winkel und Widerstände zunächst zu ihren Mittelwerten $\bar{\gamma}, \bar{R}$ verschoben, bevor die lineare Regression durchgeführt wird. Der Grund für die Verschiebung ist, dass die Korrelation zwischen Steigung und y-Achsenabschnitt minimiert wird.

$$\gamma - \bar{\gamma} = k_\gamma \cdot (R - \bar{R}) + b_\gamma \quad (35)$$

Für die Unsicherheit auf den Widerstand wird der Digitalisierungsfehler des CASSY Sensors angenommen:

$$\sigma_R = \frac{10k\Omega}{4096 \cdot \sqrt{12}} \quad (36)$$

Der Fehler auf γ wird mit der kleinsten Skalenbreite abgeschätzt unter Annahme einer Gleichverteilung:

$$\sigma_\gamma = \frac{5^\circ}{\sqrt{12}} \quad (37)$$

Die lineare Regression erzeugt eine Ausgleichsgerade mit Steigung $k_\gamma = -0.68 \pm 0.05$. Der y-Achsenabschnitt b_γ ist null aufgrund der Verschiebung der Messwerte zu ihren Mittelwerten. Das χ^2/n ist mit 0.03 sehr klein, was darauf hinweist, dass die Unsicherheiten zu groß gewählt wurden. Diese Vermutung bestätigt sich im Residuenplot (Abb. 17), wo zu erkennen ist, dass die Fehlerbalken aller Messpunkte die Regressionsgerade schneiden. Vor allem der Fehler auf γ wird in Realität kleiner sein als in der linearen Regression angenommen, weil sich die Winkel trotz fehlender Skalenstriche deutlich genauer am Drehteller ablesen lassen.

Der Fehler auf k_γ wird in den Folgeversuchen als systematischer angenommen, weil er einen zusätzlichen Beitrag als Skalenfehler bei der Umrechnung vom Widerstand auf den Winkel liefert.

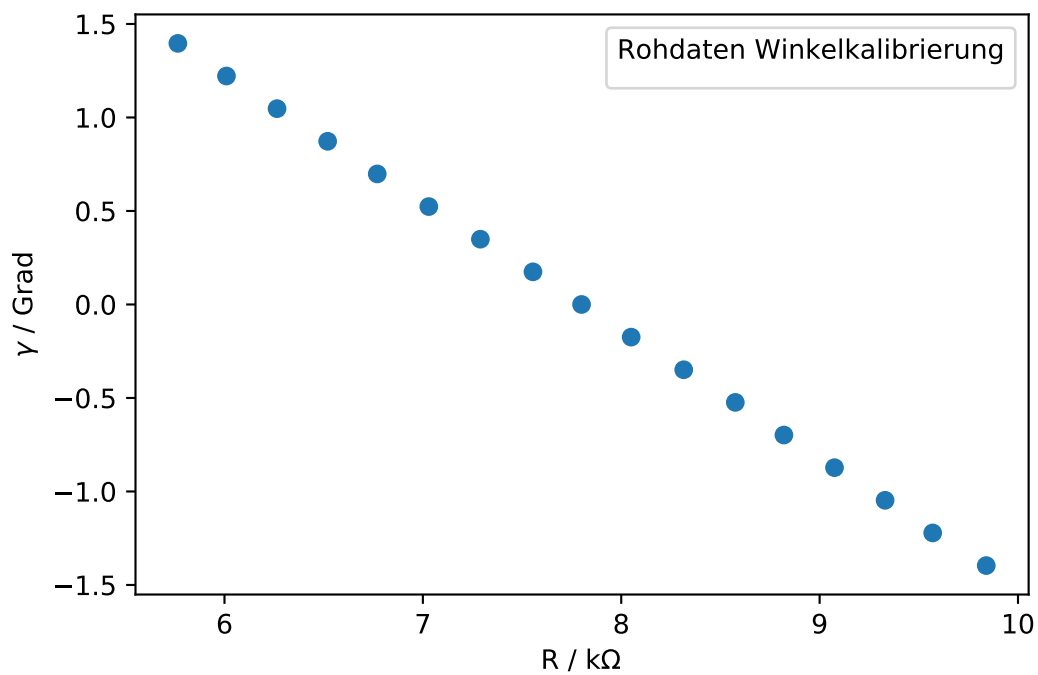


Abbildung 15: Gemessene Winkel γ am Drehtisch als Funktion des Widerstandes des Winkelaufnehmers

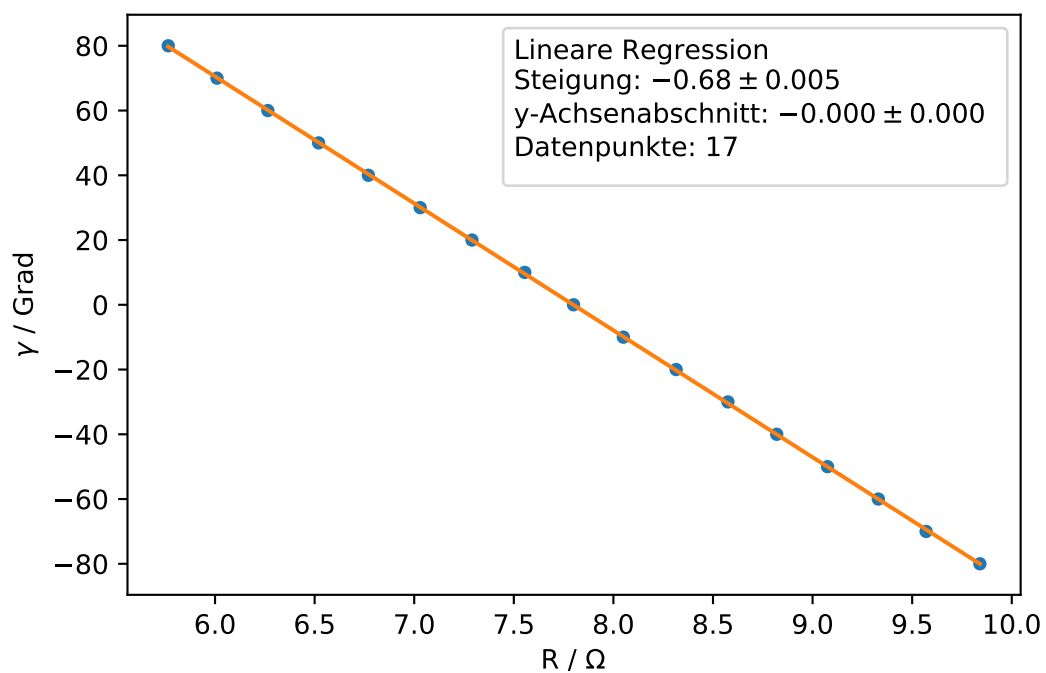


Abbildung 16: Lineare Regression der Winkelkalibrierung

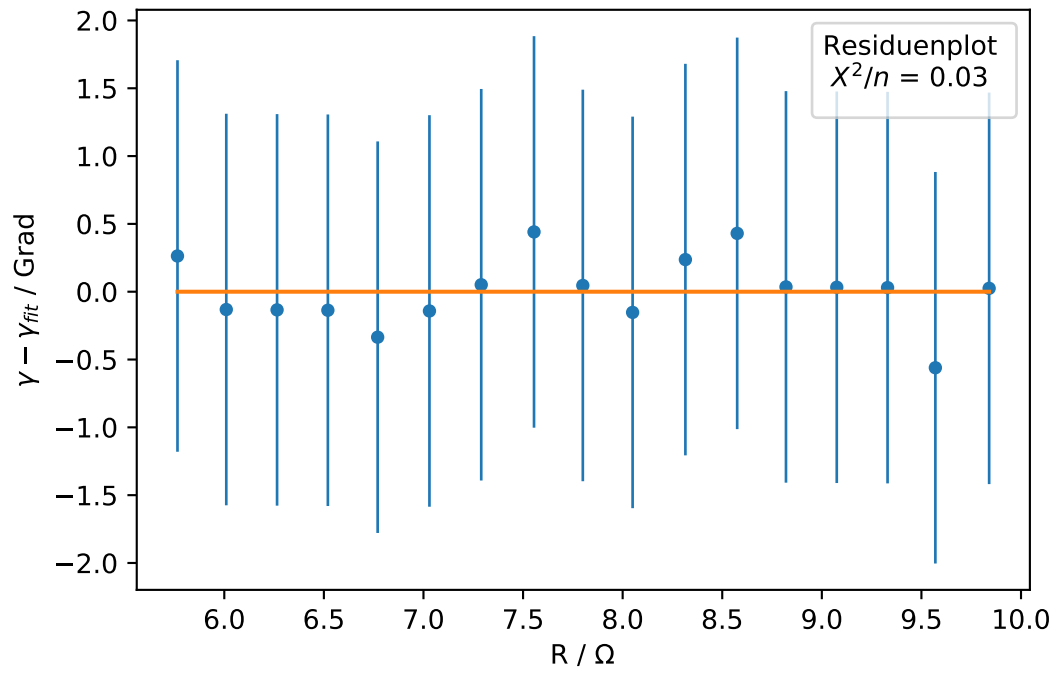


Abbildung 17: Residuenplot der Winkelkalibrierung

8 Brechung am PE-Halbzyylinder

8.1 Versuchsbeschreibung

In diesem Versuch wird die Brechung der Mikrowellen an der Grenzfläche von PE und Luft untersucht. Das Snelliussche Brechungsgesetz bezieht Einfallswinkel α , Brechungswinkel β und die Brechungsindexe des Mediums der einfallenden Welle n_1 und der transmittierten Wellen n_2 aufeinander:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (38)$$

Durch Variation der Einfallswinkel bei der Brechung an PE-Halbzyindern und das Messen der zugehörigen Ausfallswinkel, lässt sich der Brechungsindex von PE bestimmen.

8.2 Versuchsaufbau und Durchführung

Der Versuchsaufbau entspricht dem der Winkelkalibrierung mit folgenden Ergänzungen: Über dem Drehteller wird horizontal eine runde Platte mit Winkelskala montiert, die mittels eines U-Profils am Schienenkreuz befestigt ist. Somit bewegt sie sich nicht mit dem Schwenkarm des Drehtellers mit. Auf dieser Platte werden PE-Halbzyylinder gelegt, sodass sich unterschiedliche Einfallswinkel ergeben, wenn die Mikrowellen vom Sender auf den Halbzyylinder treffen. Je nachdem, ob die runde Seite des Halbzyinders auf den Empfänger oder auf den Sender zeigt, findet die Brechung von PE in Luft oder von Luft in PE statt. Der Schwenkarm dreht sich während der Messung im Halbkreis um den Drehtisch und das CASSY-Gerät zeichnet die verstärkte Spannung am Empfänger gegen den Widerstand des Winkelaufnehmers auf.

Bei der Brechung von Luft in PE nehmen wir die Intensitätsverteilung für die Einfallswinkel $\alpha_1 = \{0, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ\}$ auf, bei der Brechung von PE in Luft wählen wir Einfallswinkel $\alpha_2 = \{0, -20^\circ, -40^\circ\}$. Im Verlauf des Versuches gab unser Winkelaufnehmer immer häufiger Fehlwerte aus, sodass wir den Versuch nach der Messung von $\alpha_2 = -40^\circ$ abbrechen mussten. Die bis dahin aufgenommenen Daten reichen jedoch für eine erste Auswertung aus.

8.3 Versuchsauswertung

Die Abb. 18 und 19 zeigen den Spannungsverlauf des Empfängers in Abhängigkeit des Schwenkarmwinkels γ für unterschiedliche Einfallswinkel. Abb. 18 zeigt die Spannung für die Brechung von Luft nach PE, Abb. 19 für die Brechung von PE nach Luft. Die Werte von γ wurden aus den gemessenen Widerständen mit der Winkelkalibrierung des Wegaufnehmers berechnet (Gl. (35)). Die Peaks der Spannungskurven geben den Winkel von γ an, in die die Welle während der Brechung transmittiert wird. Diese Werte wurden mit dem Peakschwerpunktfinder in CASSYlab ermittelt und lauten

$$\gamma_{10} = 0.39^\circ \pm 0.15^\circ \quad (39)$$

$$\gamma_{11} = 7.95^\circ \pm 0.15^\circ \quad (40)$$

$$\gamma_{12} = 16.15^\circ \pm 0.14^\circ \quad (41)$$

$$\gamma_{13} = 26.97^\circ \pm 0.14^\circ \quad (42)$$

$$\gamma_{20} = -1.03^\circ \pm 0.06^\circ \quad (43)$$

$$\gamma_{21} = -14.79^\circ \pm 0.08^\circ \quad (44)$$

$$\gamma_{22} = -33.37^\circ \pm 0.34^\circ \quad (45)$$

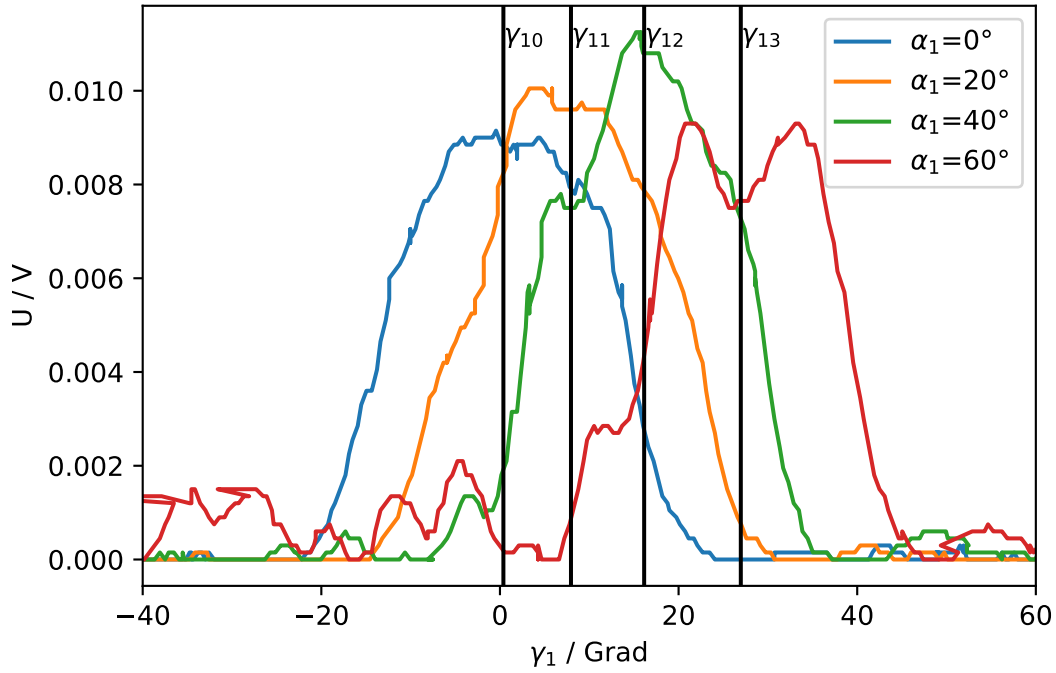


Abbildung 18: Winkel γ als Funktion der am Empfänger ausgegebenen Spannung für die vier Einfallswinkel α_1 bei der Brechung von Luft in PE. Markierung der Spannungspeaks mit schwarzen vertikalen Linien

Der Ausfallswinkel β berechnet sich folgendermaßen als Funktion von α und γ

$$\text{Brechung von Luft nach PE: } \beta_1 = \alpha_1 - \gamma_1 \quad (46)$$

$$\text{Brechung von PE nach Luft: } \beta_2 = \alpha_2 + \gamma_2 \quad (47)$$

Für die Berechnung des Brechungsindex wird $\sin \alpha_1$ gegen $\sin \beta_1$ aufgetragen, bzw. $\sin \beta_2$ gegen $\sin \alpha_2$ und es wird jeweils eine lineare Regression durchgeführt. Die Steigungen entsprechen dem Brechungsindex von PE (der Brechungsindex von Luft wird mit 1 angenähert). Die Unsicherheiten auf $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ wurden mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet, wobei

$$\sigma(\alpha) = \frac{5^\circ}{\sqrt{12}} \quad (48)$$

$$\sigma(\beta) = \sqrt{\sigma^2(\alpha) + \sigma^2(\gamma)} \quad (49)$$

Ersteres wird damit begründet, dass die kleinste Skalenbreite der Platte mit den PE-Halbzylindern 5° war.

Die Abbildungen 20 und 22 stellen die Ergebnisse dar, die Abbildungen 21 und 23 die dazugehörigen Residuenplots. Das χ^2/n für die Brechung von Luft in PE ist zu klein, was zeigt, dass unsere Fehler zu groß gewählt wurden. Wie bei der Winkelkalibrierung lässt sich der Winkel auf α besser einstellen, als die Messskalenbreite vermuten lässt. Die Residuenplots zeigen keine Auffälligkeiten, die Messwerte liegen gleichmäßig um die Ausgleichsgerade. Die Steigung der Regressionsgrade für die Brechung von Luft in PE $n_{\text{PE},1} = 1.57 \pm 0.10$ überschneidet sich mit dem Literaturwert von $n_{\text{PE}} = 1.55$ (Quelle: Versuchshandbuch) im $1\text{-}\sigma$ Intervall, die Steigung der Regressionsgraden für die Brechung von PE in Luft $n_{\text{PE},2} = 1.45 \pm 0.08$ schneidet den Literaturwert im $2\text{-}\sigma$ Intervall. Somit geben die Messergebnisse sehr gut das Snelliussche Brechungsgesetz wieder.

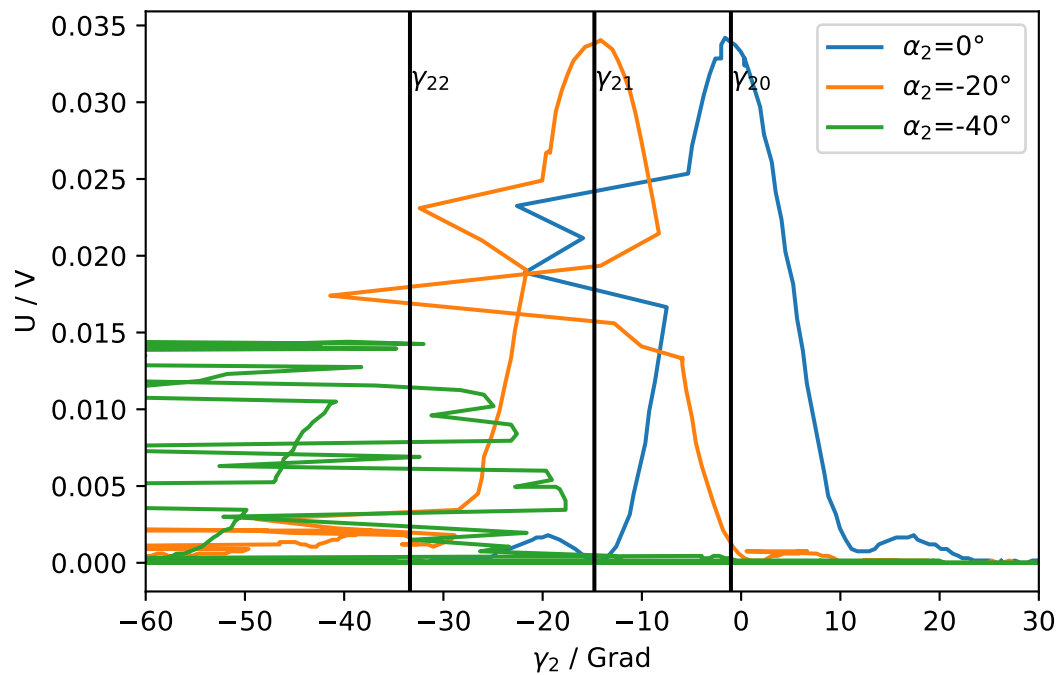


Abbildung 19: Winkel γ als Funktion der am Empfänger ausgegebenen Spannung für die drei Einfallswinkel α_2 bei der Brechung von PE in Luft. Markierung der Spannungspeaks mit schwarzen vertikalen Linien

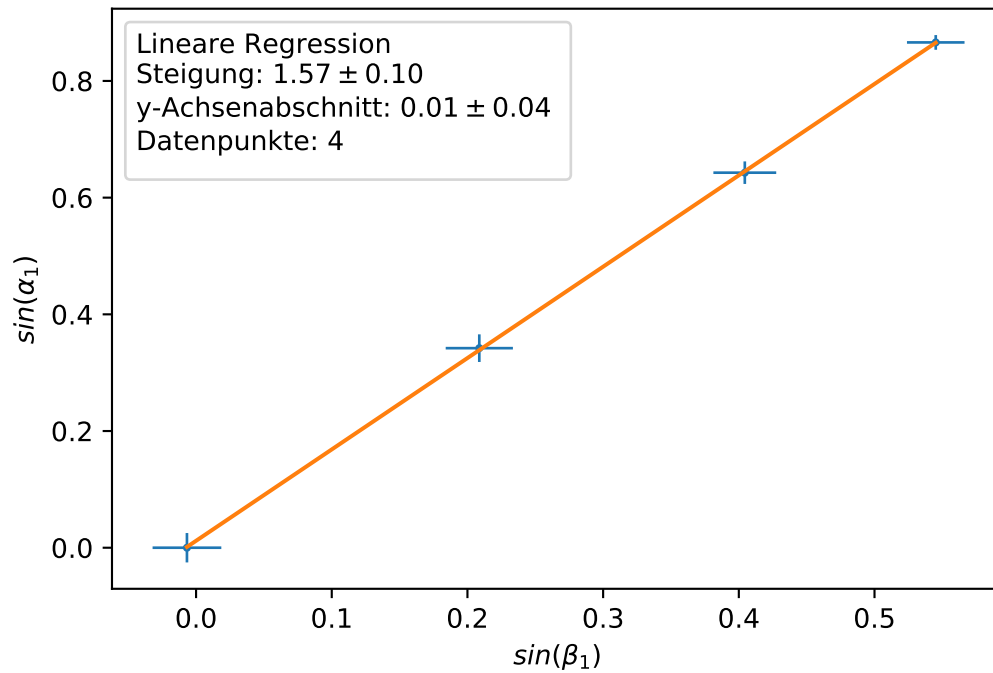


Abbildung 20: Lineare Regression zur Bestimmung des Brechungsindex bei der Brechung von Luft in PE

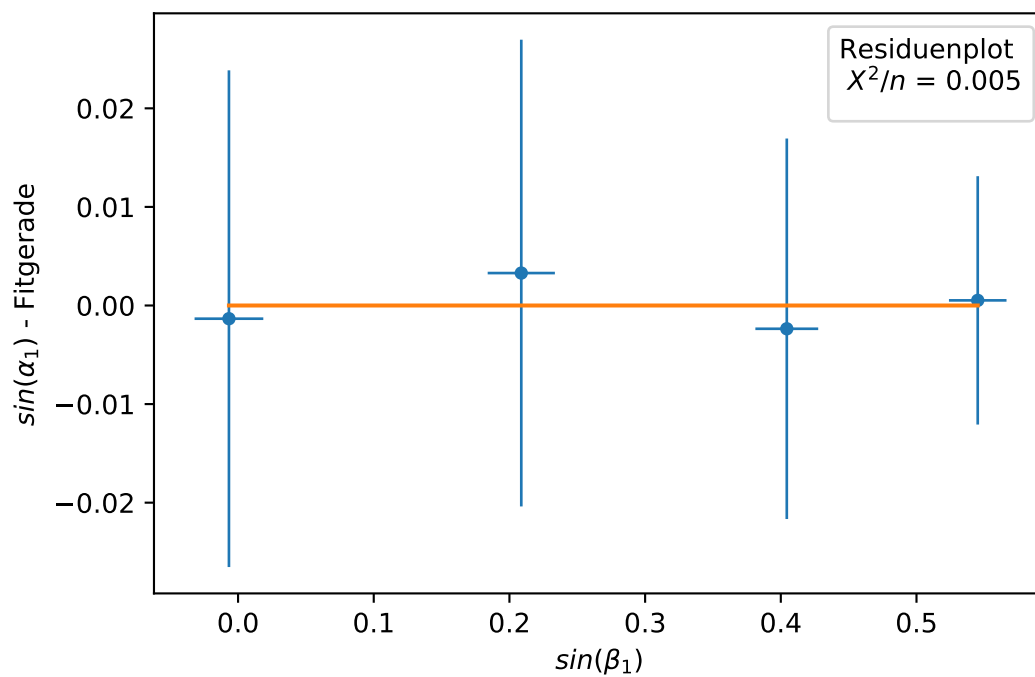


Abbildung 21: Residuenplot zum Versuch zur Brechung von Luft in PE

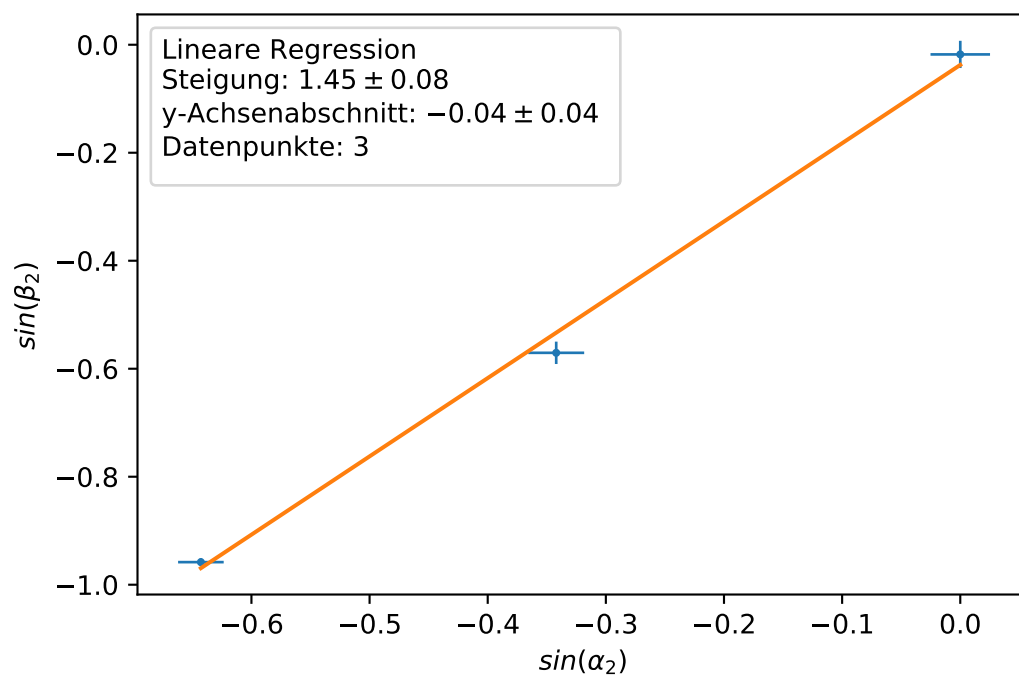


Abbildung 22: Lineare Regression zur Bestimmung des Brechungsindex bei der Brechung von PE in Luft

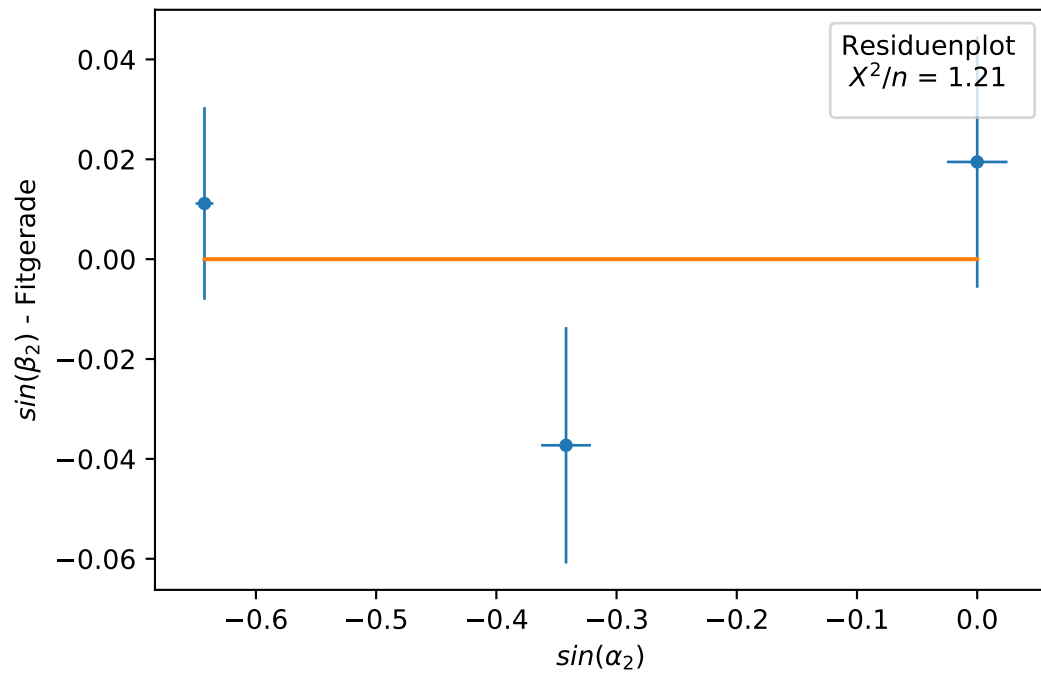


Abbildung 23: Residuenplot zum Versuch zur Brechung von PE in Luft

9 Optischer Tunneleffekt

9.1 Versuchsbeschreibung

In diesem Versuch wird eine quantitative Messung zur Frustrierten Totalen Internen Reflexion (FTIR) realisiert. Trifft eine Welle in einem Medium und Brechungsindex n auf einen Spalt mit kleinerem Brechungsindex unter einem Einfallswinkel, der größer ist als der Grenzwinkel der Totalreflexion, wird trotzdem ein Teil der Welle transmittiert, wenn die Spaltbreite D klein gegenüber der Wellenlänge λ ist. Die Intensität der transmittierten Welle hängt exponentiell von der Spaltbreite und der Wellenlänge ab:

$$I_T \sim \exp\left(\frac{-2\pi D}{\lambda}\right) \quad (50)$$

Dieser Zusammenhang wird in diesem Versuch untersucht, indem die Intensität der transmittierten Welle für unterschiedliche Spaltbreiten gemessen wird.

9.2 Versuchsaufbau und Durchführung

Wie im vorherigen Versuch wird der Empfänger auf dem Schwenkarm des Drehtellers befestigt. Zwischen Sender und Empfänger werden auf dem U-Profil zwei Halbzylinder so mit den flachen Seiten aneinander platziert, dass sie einen Vollzylinder mit Spalte der Breite D darstellen. Die Halbzylinder werden so gedreht, dass die vom Sender ausgegebene Welle ungebrochen in das PE eindringt und anschließend mit einem Einfallswinkel von 60° auf die Luftspalte trifft. Obwohl bei diesem Winkel klassischerweise ausschließlich eine Totalreflexion stattfinden sollte, wird nur ein Teil der Welle reflektiert und der andere durch den optischen Tunneleffekt in den zweiten Halbzylinder transmittiert. Während der Messung fährt der Empfänger angetrieben durch den Motor des Drehtellers um die beiden Prismen im Winkel von -80° bis 80° und zeichnet die Intensität als Spannung auf. So kann sowohl die transmittierte als auch die reflektierte Intensität gemessen werden. Durch Variation der Spaltbreiten D mithilfe von Abstandsblechen lässt sich der Zusammenhang zwischen Spaltbreite und Intensität der transmittierten Welle untersuchen.

9.3 Versuchsauswertung

Die erfasste Spannung wird über $I \sim U^{-2/a}$ auf Intensitäten umgerechnet und in Abb. 24 aufgetragen. Die durch den Peakschwerpunktfinder des CASSYlabs erhaltenen Maximalwerte lauten

$$I'_{T,1mm} = 0.0209 \quad (51)$$

$$I'_{T,4mm} = 0.0095 \quad (52)$$

$$I'_{T,10mm} = 0.0020 \quad (53)$$

$$I_{R,1mm} = 0.0052 \quad (54)$$

$$I_{R,4mm} = 0.0152 \quad (55)$$

$$I_{R,10mm} = 0.0217 \quad (56)$$

wobei die Werte einheitslos betrachtet werden, weil nur das relative Verhältnis untereinander von Bedeutung ist. Wie erwartet sinkt die maximale Intensität der transmittierten Welle bzw steigt die Intensität der reflektierten Welle bei größer werdendem Spaltabstand D . Da bei der transmittierten Welle Beugungs- und Interferenzerscheinungen auftreten, die die Intensität der transmittierten Welle verfälschen, und dieser Effekt vor allem bei

den Spaltbreiten 4 mm und 10 mm erkennbar sind, wir die totale Intensität I_{tot} bestimmt durch

$$I_{tot} = I_{R,1mm} + I'_{T,1mm} \quad (57)$$

Statt der ausgelesenen transmittierten Wellen $I'_{T,i}$ rechnen wir im folgenden mit $I_{T,i} = I_{tot} - I_{R,i}$. Als nächstes werden D und $\log(I - T/I_{tot})$ gegeneinander aufgetragen und eine lineare Regression durchgeführt. Der Fehler auf D wird mit

$$\sigma_D = \frac{1 \text{ mm}}{\sqrt{12}} \quad (58)$$

abgeschätzt durch Annahme einer Gleichverteilung und einer minimalen Skalenbreite von 1 mm der Abstandsbleche. Der Fehler auf I_R und I_{tot} wird abgeschätzt durch

$$\sigma_I \equiv \sigma(I_{tot}) = \sigma(I_R) = \frac{1}{2}(\max(I_R + I'_T) - \min(I_R + I'_T)) \quad (59)$$

und durch Fehlerfortpflanzung

$$\sigma(\log(I_T/I_{tot})) = \frac{I_R \sigma_I}{I_{tot} - I_R} \sqrt{\frac{1}{I_{tot}^2} + \frac{1}{I_R^2}} \quad (60)$$

Der systematische Fehler durch die Umrechnung von Spannung zu Intensität wird vernachlässigt. Die Ergebnisse der linearen Regression sind in Abb. 25 und 26 dargestellt. Das χ^2/n ist bei drei Messpunkten wenig aussagekräftig, allerdings sehen die Datenpunkte so aus, als würden sie recht gut durch die Regressionsgerade beschrieben werden. Die Steigung ist $k_{\text{FTIR}} = -1.9 \pm 0.3 \frac{1}{\text{cm}}$. Daraus berechnet sich die Wellenlänge zu

$$\lambda = \frac{-2\pi}{k_{\text{FTIR}}} = 3.31 \pm 0.52 \text{ cm} \quad (61)$$

Dieser Wert stimmt im Rahmen der Unsicherheit mit den berechneten Werten aus dem Versuch der stehenden Welle überein. Allerdings ist die Unsicherheit auf λ recht groß. Mögliche Fehlerquellen bei dem Versuch waren die nicht ganz geraden Flächen der PE-Halbzylinder, die eine genaue Abmessung des Spaltes erschweren und die Tatsache, dass die Mikrowellen an Gegenständen und Personen im Raum reflektiert werden und eine genaue Messung der Intensität erschweren.

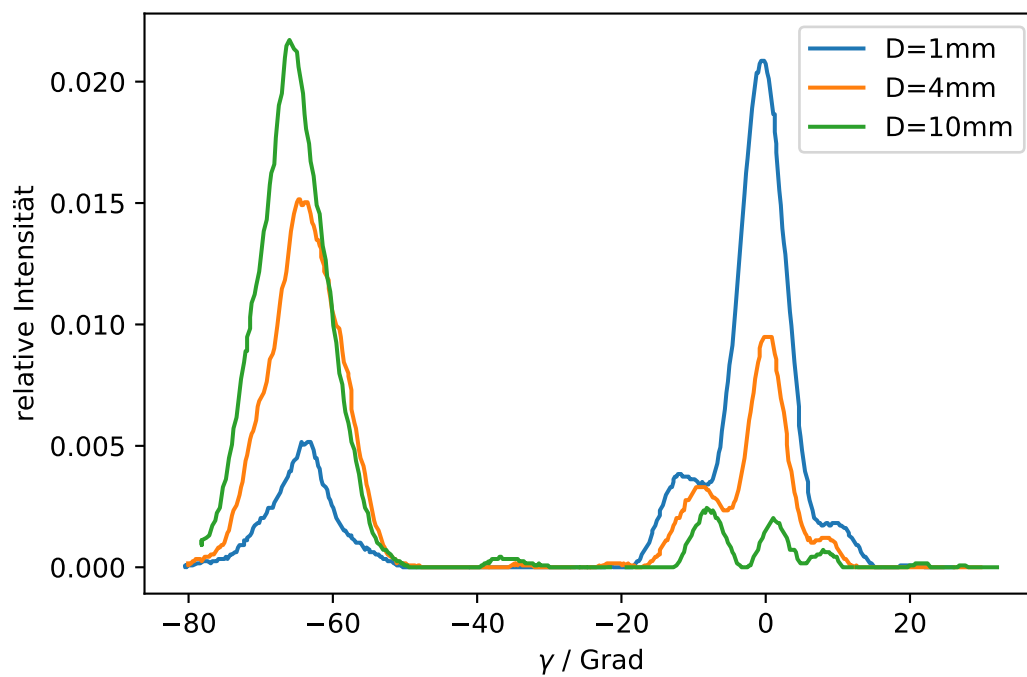


Abbildung 24: Intensitäten der transmittierten Welle bei $\gamma \approx 0$ und der reflektierten Welle bei $\gamma \approx -65^\circ$

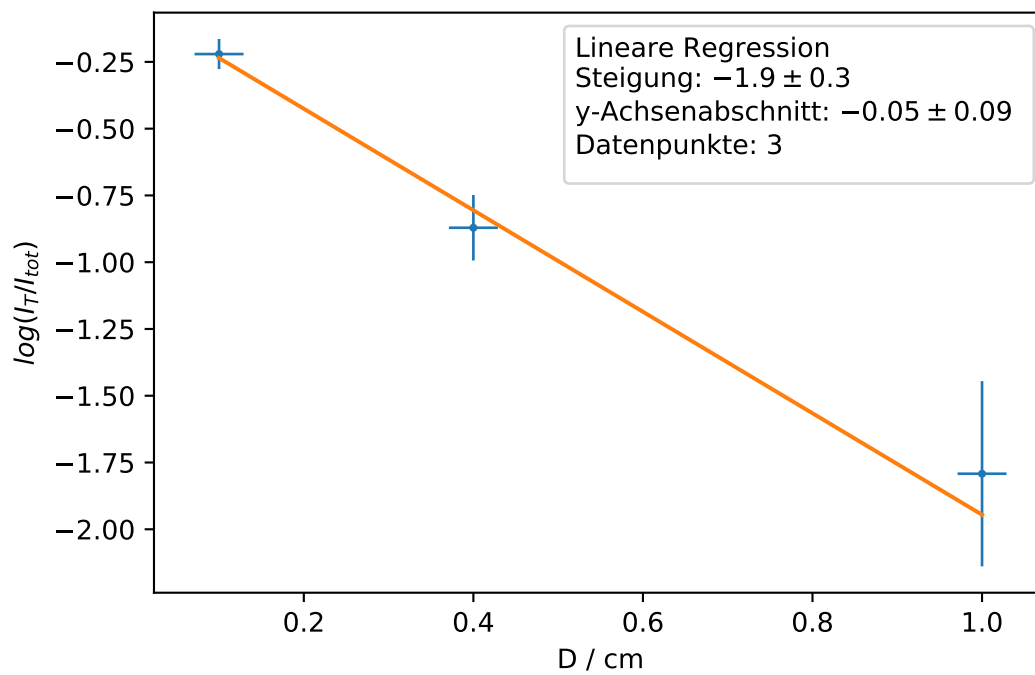


Abbildung 25: Lineare Regression zur FTIR in PE

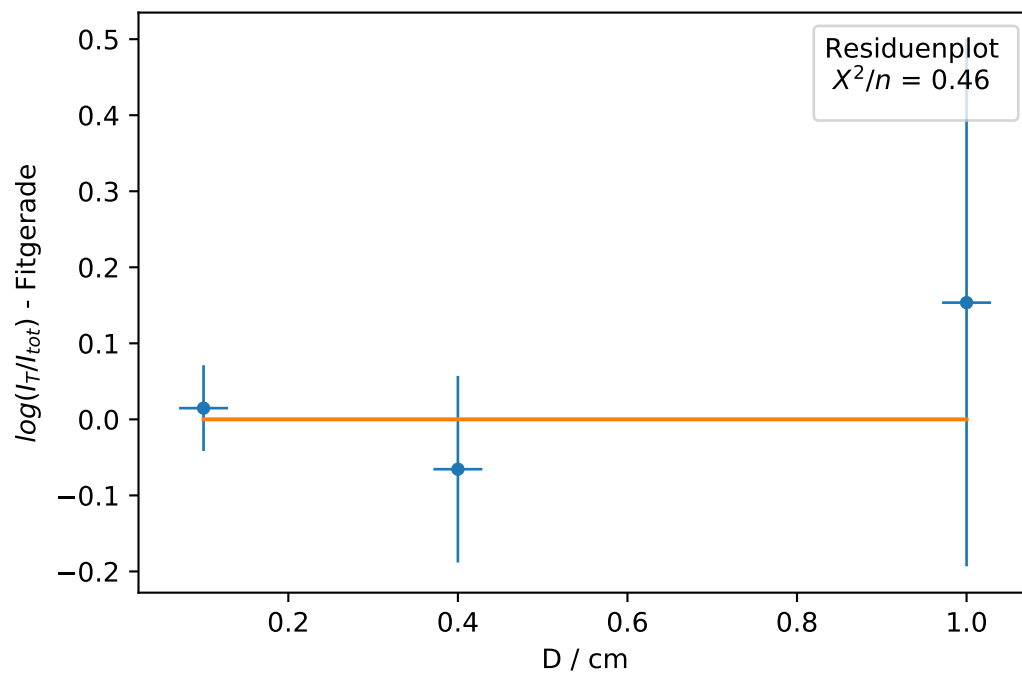


Abbildung 26: Residuenplot zur FTIR in PE