

Protokoll Elektrizitätslehre Physikalisches Grundpraktikum 2

Gruppe B2
Máté Farkas, Maria Spethmann

20. März 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Physikalische Grundlagen	3
3	Serienschwingkreis	3
3.1	Physikalische Grundlagen	3
3.2	Verwendete Bauteile	4
3.3	Oszilloskop	5
3.3.1	Versuchsaufbau und Durchführung	5
3.3.2	Auswertung	5
3.4	CASSY-Messung	6
3.4.1	Versuchsaufbau- und Durchführung	6
3.4.2	Auswertung	7
3.5	Zusammenfassung	12
4	Parallelschwingkreis	15
4.1	Physikalische Grundlagen	15
4.2	Verwendete Bauteile	15
4.3	CASSY-Messung	16
4.3.1	Aufbau und Durchführung	16
4.3.2	Auswertung	16
4.4	Zusammenfassung	21
5	Hochpass und Tiefpass	22
5.1	Versuchsaufbau und Durchführung	22
5.2	Auswertung	23

1 Einleitung

In diesem Versuch werden wir uns mit elektrischen Schwingkreisen beschäftigen. Dazu wird eine Wechselspannung an eine Serien- bzw. Parallelschaltung von je einer Spule, einem Kondensator und einem Widerstand angelegt. Das Ziel des Versuchs ist es, die Güte der Schwingkreise zu bestimmen.

2 Physikalische Grundlagen

Beim Wechselstrom gilt für Strom und Spannung im Allgemeinen:

$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad \text{und} \quad U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (1)$$

mit der Amplitude I_0 bzw. U_0 und der Phasendifferenz ϕ . Für viele Anwendungen ist es sinnvoll die Effektivwerte zu definieren:

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

Beim Anlegen einer Wechselspannung an eine Spule oder einen Kondensator muss man beachten, dass diese einen Wechselstromwiderstand darstellen.

Für den Strom durch eine Spule der Induktivität L ergibt sich die sogenannte Induktanz $X_L = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \omega \cdot L$ mit einer Phasenverschiebung von $\phi = 90^\circ$. Bei einem Kondensator mit Kapazität C existiert analog zur Induktanz die Kondensanz $X_C = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{1}{\omega \cdot C}$ mit einer Phasenverschiebung von $\phi = -90^\circ$.

3 Serienschwingkreis

3.1 Physikalische Grundlagen

Wir betrachten einen Schaltkreis, bei der ein Kondensator mit Kapazität C , eine Spule mit Induktivität L und ein Ohmscher Widerstand R in Reihe geschaltet sind und eine Wechselspannung anliegt. Nach Kirchhoff ist die angelegte Spannung gleich der Summe aller Spannungen, die über die Bauteile abfallen. Der Strom dagegen ist im gesamten Schaltkreis derselbe. Man erhält die Differentialgleichung einer erzwungenen, gedämpften Schwingung.

Wir betrachten die partikuläre Lösung nach dem Einschwingvorgang. Durch Einsetzen der Ansätze $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ und $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \phi)}$ erhält man die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung zu

$$\tan(\phi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (3)$$

und die Impedanz

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (4)$$

Das heißt, der Strom $I_0 = \frac{U_0}{Z}$ wird maximal bei der Resonanzfrequenz

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (5)$$

Die Güte eines Schwingkreises ist ein Maß für den Energieverlust. Die Güte berechnet sich durch

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6)$$

wobei $\Delta\omega$ die Frequenzbreite ist, bei der der Strom auf $I_{max}/\sqrt{2}$ abgefallen ist. Die Phase ist bei Resonanzfrequenz $\phi = 0$ und bei $I_0 = I_{max}/\sqrt{2}$ ist die Phase $\phi = \pm 45^\circ$. Es lässt sich einfach zeigen, dass die Güte auch die Spannungsüberhöhung der Spulen- bzw. Kondensatorspannung zur angelegten Spannung bei der Resonanzfrequenz angibt:

$$\frac{U_L(\omega_0)}{U(\omega_0)} = \frac{U_C(\omega_0)}{U(\omega_0)} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad (7)$$

3.2 Verwendete Bauteile

Sind die genauen Werte für die Kapazität C , die Induktivität L und den Widerstand R im Serienschwingkreis bekannt, so erwartet man einen Gütefaktor gemäß Gl. (6). Während des Versuchs stehen uns eine Spule mit 500 Windungen, ein Kondensator mit Kapazität $4.7\mu F$ und Widerstände mit Sollwerten 1Ω , 5Ω , 10Ω , 47Ω und 100Ω zur Verfügung. Die tatsächlichen Werte für C , R und L unterliegen jedoch produktionsbedingten Schwankungen, sodass die Bauteile zunächst an einer Messbrücke ausgemessen werden. Die Messung wird in Tabelle 1 zusammengefasst.

	Sollwert	Messwert	Fehler (sys.)
Spule	500 Windungen	$L = 4.83mH$	0.25%
Spulenwiderstand	-	$R_L = 3.749\Omega$	0.25%
Kondensator	$C = 4.7\mu F$	$C = 4.72\mu F$	0.25%
Widerstand	$R = 1\Omega$	$R = 0.979\Omega$	0.25%
Widerstand	$R = 5\Omega$	$R = 5.18\Omega$	0.25%
Widerstand	$R = 10\Omega$	$R = 9.89\Omega$	0.25%
Widerstand	$R = 47\Omega$	$R = 46.60\Omega$	0.25%
Widerstand	$R = 100\Omega$	$R = 99.15\Omega$	0.25%

Tabelle 1: Messbrücke Daten

Die Messbrücke misst die Werte mit einem systematischen Fehler von 0.25%. Im weiteren Verlauf des Protokolls benennen wir Widerstände, Spulen und Kondensatoren nach ihren Sollwerten.

Die Güte berechnet sich nach Gl. (6), wobei der Spulenwiderstand mit berücksichtigt werden muss:

$$Q = \frac{1}{R + R_L} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8)$$

Den Fehler pflanzen wir mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung fort:

$$\sigma_Q(sys.) = \sqrt{\left(\frac{dQ}{dR}\sigma_R\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dR_L}\sigma_{R_L}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dL}\sigma_L\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dC}\sigma_C\right)^2} \quad (9)$$

Damit erhalten wir folgende Werte für den Serienschwingkreis mit Widerständen $R = 1\Omega$, $R = 5\Omega$ und $R = 10\Omega$.

$R[\Omega]$	Q	$\sigma_Q(sys)$
1	6.769	0.018
5	3.583	0.009
10	2.347	0.006

Tabelle 2: Gütebestimmung über Messbrücke

Die Resonanzfrequenz berechnen wir zu

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1054\text{Hz} \pm 2\text{Hz} \quad (10)$$

3.3 Oszilloskop

3.3.1 Versuchsaufbau und Durchführung

Wir bauen einen Serienschwingkreis mit Kondensator ($C = 4.7\mu\text{F}$), Spule ($N=500$) und Widerstand ($R = 1\Omega$) wie in Abb. 1 auf.

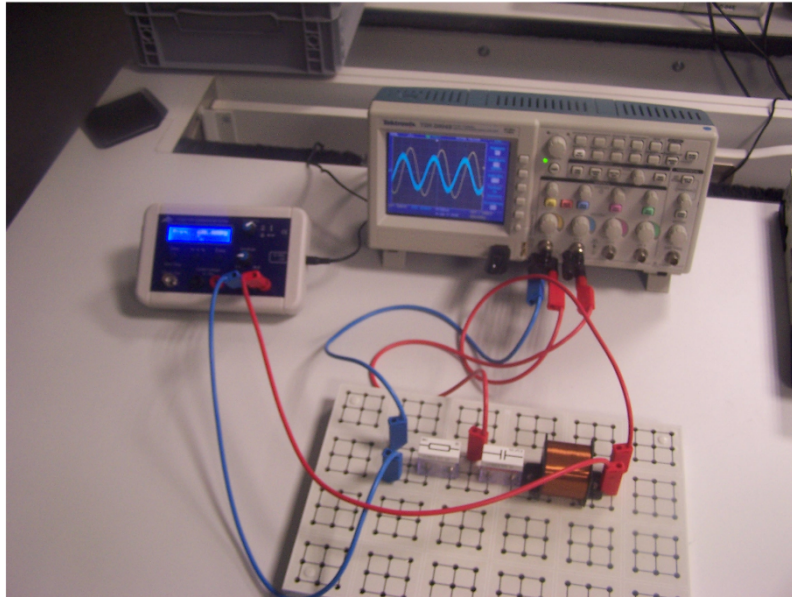


Abbildung 1: Versuchsaufbau Oszilloskop (Quelle:Praktikumsskript)

Mit dem Oszilloskop wird zum einen die Spannung über den Widerstand (Ch2) und zum anderen die Gesamtspannung (Ch1) abgegriffen. Dabei wird die Erde so platziert, dass sie für beide Messungen benutzt werden kann.

Zunächst werden auf dem Oszilloskop die beiden Channel gegeneinander aufgetragen (XY-Darstellung), was in einer Lissajous-Figur resultiert. Wird nun die Eingangsfrequenz variiert, kann man diese Figur verändern. Im Resonanzfall sind Strom und Spannung in Phase, also ist die Lissajous-Figur eine Gerade. Diese Gerade wird nun eingestellt und die Resonanzfrequenz notiert. In den Displayeinstellungen wird wieder die zeitabhängige Amplitudenanzeige (X-t) gewählt, sodass die Spannung U_{max} am Widerstand (Ch2) mithilfe des Cursors abgelesen werden kann. Durch weitere Variation der Frequenz wird nun eine Spannung über den Widerstand von $\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ eingestellt. Da die Spannung am Widerstand proportional zum Strom ist, ist bei dieser Frequenz auch die Stromamplitude auf $I_{max}/\sqrt{2}$ gefallen. Dies wird für je eine Frequenz oberhalb f_+ und unterhalb f_- der Resonanzfrequenz gemacht und die Frequenzen notiert. Aus der Differenz von f_+ und f_- ergibt sich die Breite der Stromkurve und damit die Güte des Schwingkreises. Die Messung wird je einmal von zwei unterschiedlichen Experimentatoren durchgeführt.

3.3.2 Auswertung

Die Resonanzfrequenz wird von beiden Experimentatoren zu $f_0 = 1062\text{Hz}$ mit einer Unsicherheit von $\sigma_{f_0} = 1\text{Hz}$ bestimmt. Für die Frequenzen der Resonanzbreite messen wir

$f_- = (974 \pm 1) \text{ Hz}$ bzw. $f_- = (976 \pm 4) \text{ Hz}$ und $f_+ = (1157 \pm 4) \text{ Hz}$ bzw. $f_+ = (1155 \pm 5) \text{ Hz}$ und berechnen das gewichtete Mittel für jeden Messwert. Damit erhalten wir die Güte zu

$$Q = \frac{f_0}{f_+ - f_-} = 5.83 \quad (11)$$

mit einem statistischen Fehler auf Q von

$$\sigma_Q(\text{stat.}) = Q \sqrt{\left(\frac{\sigma_{f_0}}{f_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{f_-}}{f_+ - f_-}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{f_+}}{f_+ - f_-}\right)^2} = 0.10 \quad (12)$$

Die mit dem Oszilloskop gemessene Güte ist deutlich kleiner als die vorhergesagte Güte durch die Komponenten des Schwingkreises von $Q_{\text{erwartet}} = 6.77 \pm 0.02$. Wahrscheinlich liegt dieser Unterschied daran, dass keine Restwiderstände im Schwingkreis mit einberechnet wurden. Damit erwartete Güte und durch das Oszilloskop gemessene Güte übereinstimmen, müssten die Restwiderstände

$$R_{\text{Rest}} = \frac{1}{Q_{\text{Osz.}}} \sqrt{\frac{L}{C}} - (R + R_L) = (0.76 \pm 0.09) \Omega \quad (13)$$

entsprechen.

3.4 CASSY-Messung

3.4.1 Versuchsaufbau- und Durchführung

Wir verwenden den gleichen Aufbau des Serienschwingkreises wie bei der Messung mit dem Oszilloskop. Allerdings verwenden wir als Generator das Power-CASSY-Gerät und nehmen Messwerte mithilfe eines CASSY-Sensors auf. Das Power-CASSY generiert eine Wechselspannung (U_0) mit einer Amplitude von 1V und variiert die Frequenz von 0 bis 2000Hz in 20Hz Schritten, wobei eine Einschwingzeit von 2s eingehalten wird. Außerdem misst das Power-CASSY den Gesamtstrom und die Phasenverschiebung ϕ . Mit dem CASSY-Sensor werden die Effektivspannungen gemessen, die über Spule und Kondensator abfallen. Der Versuch wird jeweils mit den Widerständen $R = 1\Omega$, $R = 5\Omega$ und $R = 10\Omega$ durchgeführt. In Tabelle 3 werden die Messparameter zusammengefasst.

	Widerstand $R = 1\Omega$	Widerstand $R = 5\Omega$	Widerstand $R = 10\Omega$
Messwertbereich U_0	0V .. 7V		
Amplitude U_0	1V		
Signalform	Sinusförmig, 50% Symmetrie		
Messwertbereich f_1	0Hz .. 2000Hz		
Formel f_1	$900 + (n - 1) \cdot 5$	$900 + (n - 1) \cdot 5$	$800 + (n - 1) \cdot 5$
Messwertbereich I_0	0A .. 0.7A	0A .. 0.21A	
Messwertbereich U_L, U_C	0V .. 7V		
Messwerterfassung	Effektivwerte, gemittelt über 100ms		
Messbedingung	f_1<1200 and delta t>2	f_1<1300 and delta t>2	f_1<1400 and delta t>2

Tabelle 3: Messwertparameter Serienschwingkreis

3.4.2 Auswertung

Abb. 2, 3 und 4 zeigen die Rohdaten unserer Messungen.

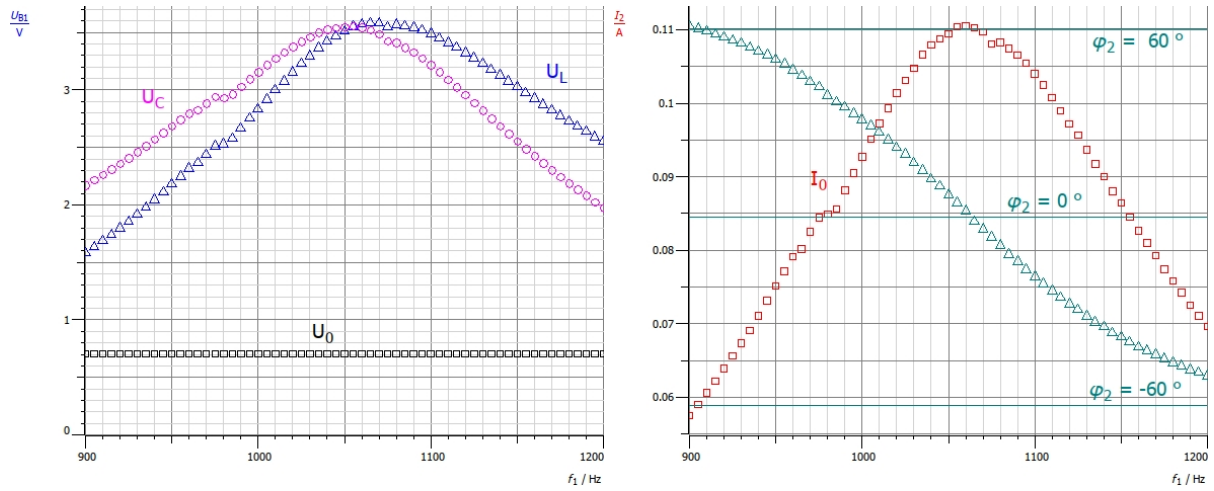


Abbildung 2: Rohdaten zum Serienschwingkreis mit Widerstand $R = 1\Omega$

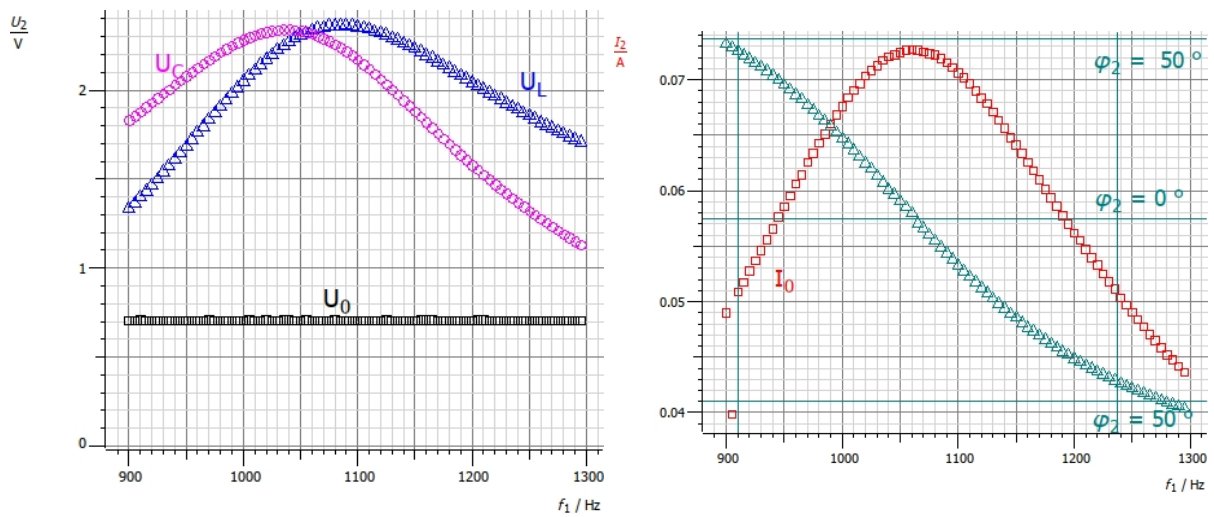
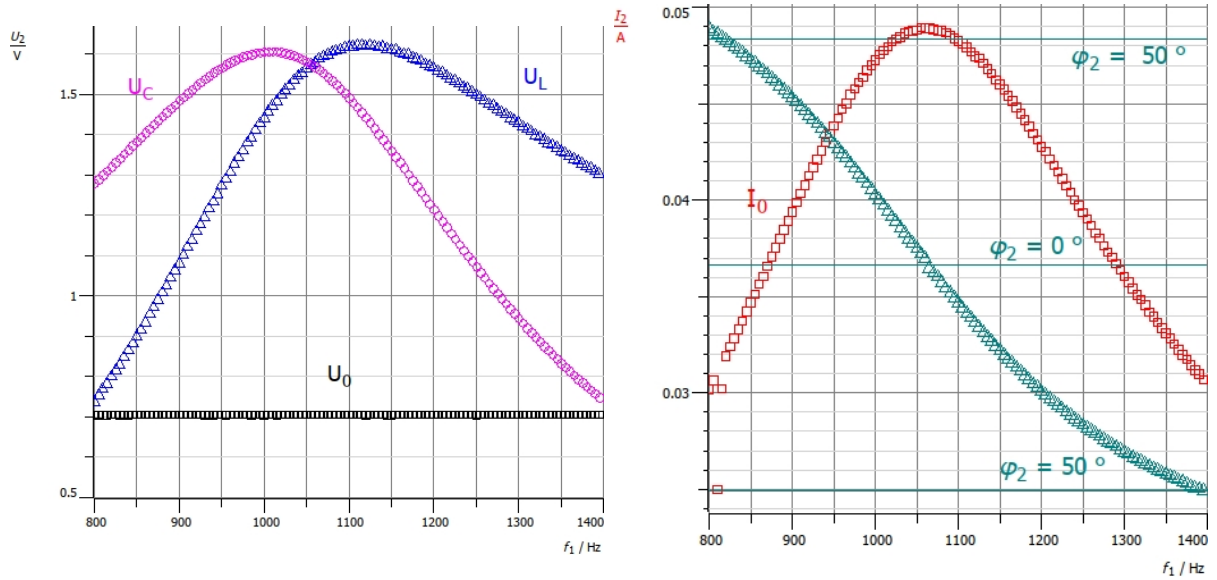


Abbildung 3: Rohdaten zum Serienschwingkreis mit Widerstand $R = 5\Omega$

Abbildung 4: Rohdaten zum Serienschwingkreis mit Widerstand $R = 10\Omega$

Wir bestimmen die Güte durch Ablesen der relevanten Daten aus den in CASSYlab produzierten Graphen. Die diskreten Messpunkte werden in CASSYlab mit einer Linie verbunden, sodass man beispielsweise auch innerhalb der Schrittweite von 5Hz Datenpunkte einfach aus den Graphen ablesen kann. Die Digitalisierungsfehler der CASSY-Geräte sind um Größenordnungen kleiner als die Ablesegenauigkeit und werden im Folgenden vernachlässigt. Die Ablesegenauigkeit schätzen wir ab, indem wir für jede aus dem Graphen ausgelesene Größe x ein Intervall $[x - \sigma_-, x + \sigma_+]$ angeben, in dem wir die Größe vermuten. Aufgrund unterschiedlicher Verläufe der Graphen und Abstände der Messpunkte sind diese Intervalle unterschiedlich groß. Die Ablesungenauigkeit für einen Punkt bestimmen wir durch die gemittelte Differenz der Intervallgrenzen zum abgelesenen Wert, also $\sigma_x = (\sigma_+ + \sigma_-)/2$.

Güteberechnung durch Breite des Strommaximums

Wir lesen die Frequenz f_0 und die Höhe des Strommaximums I_0 ab, anschließend die Frequenzen f_- und f_+ , bei denen der Strom auf $I_0/\sqrt{2}$ abgefallen ist. Die Güte berechnet sich durch

$$Q = \frac{f_0}{f_+ - f_-}. \quad (14)$$

Die statistischen Fehler auf f_0 , f_- und f_+ berechnen wir wie beschrieben durch Abschätzen eines Fehlerintervalls. Der statistische Fehler pflanzt sich auf Q fort:

$$\sigma_Q(\text{stat.}) = Q \sqrt{\left(\frac{\sigma_{f_0}}{f_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{f_-}}{f_+ - f_-}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{f_+}}{f_+ - f_-}\right)^2} \quad (15)$$

In Abb. 5 wird die Vorgehensweise beim Ablesen beispielhaft für den 1Ω -Widerstand dargestellt.

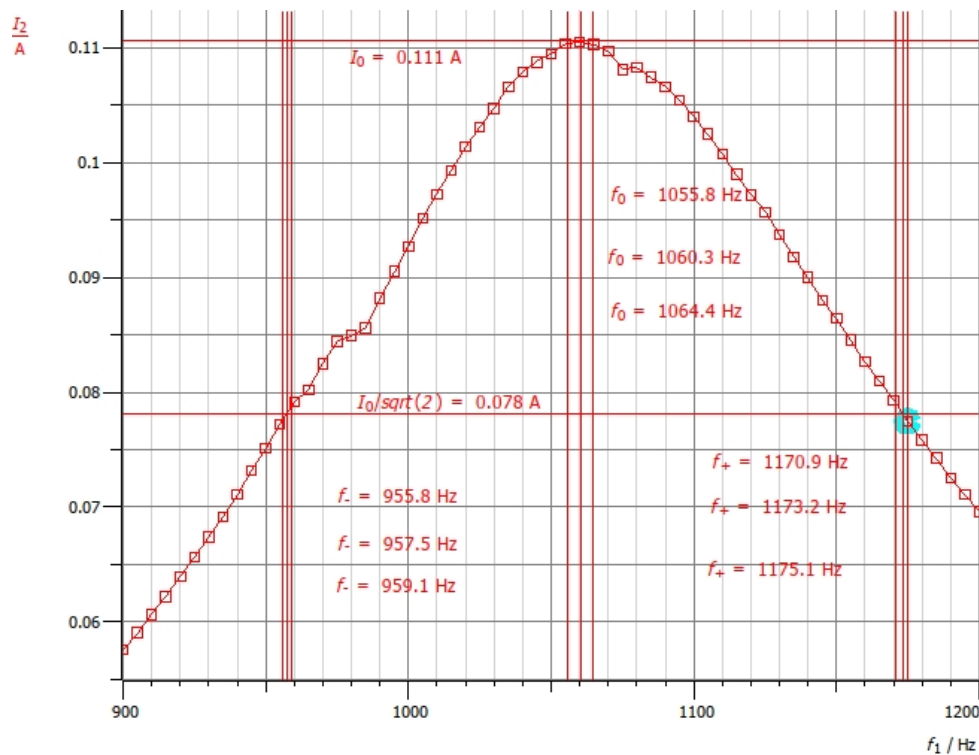


Abbildung 5: Güteberechnung durch Breite des Strommaximums für $R = 1\Omega$. Von den drei Werten, die einer Frequenz zugeordnet sind, stellen der größte und der kleinste die Intervallgrenzen dar.

Zur Berechnung des systematischen Fehlers wird die Verschiebemethode genutzt. Der Hersteller gibt einen systematischen Fehler an in Höhe von

$$\sigma_{I,sys} = (0.02 \cdot I_i + 0.005 \cdot I_{\text{Bereichsendwert}}) / \sqrt{3} \quad (16)$$

Der relative Anteil $\frac{0.02}{\sqrt{3}} I_i$ beeinflusst die Werte für f_0 , f_- und f_+ nicht. Der Offset-Anteil $\frac{0.005}{\sqrt{3}} I_{\text{Bereichsendwert}}$ dagegen verschiebt die relative Lage von $I_0/\sqrt{2}$ und führt damit zu unterschiedlichen Werten von f_- und f_+ . Daher verschieben wir die Stromkurve um den genannten Offset nach oben und nach unten und bestimmen jeweils die Güte mit dieser Verschiebung. Wir berechnen den systematischen Fehler aus dem Mittelwert der Differenzen zwischen verschobener Güte und ursprünglich berechneter Güte. Die Vorgehensweise wird in Abb. 6 für einen Widerstand von $R = 1\Omega$ dargestellt.

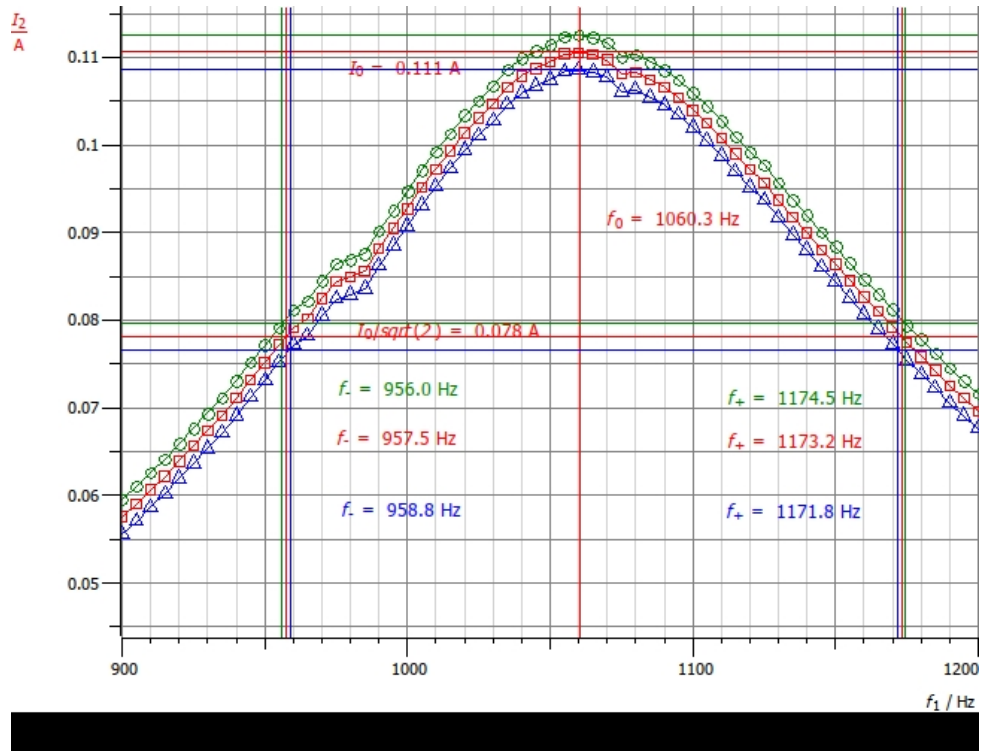


Abbildung 6: Verschiebemethode zur Berechnung des systematischen Fehlers

Die insgesamt erhaltenen Güten mit statistischen und systematischen Unsicherheiten für die drei unterschiedlichen Widerstände werden in Tabelle 4 präsentiert.

$R[\Omega]$	$f_0[\text{Hz}]$	$f_-[\text{Hz}]$	$f_+[\text{Hz}]$	Q	$\sigma_Q(\text{stat.})$	$\sigma_Q(\text{sys.})$
1	1060 ± 4	958 ± 2	1173 ± 2	4.92	0.06	0.06
5	1060 ± 5	913 ± 3	1233 ± 3	3.31	0.05	0.02
10	1058 ± 2	849 ± 2	1323 ± 2	2.23	0.01	0.02

Tabelle 4: Güteberechnung durch Breite des Strommaximums

Güteberechnung durch Quantifizierung der Spannungsüberhöhung

Als nächstes wird die Güte über die Spannungsüberhöhung berechnet. Dazu muss zunächst der Spannungsabfall, der an der Spule gemessen wurde, korrigiert werden, indem der Beitrag des Spulenwiderstandes R_L abgezogen wird.

$$U_L = \sqrt{U_{L,\text{Messung}}^2 - R_L^2 I^2} \quad (17)$$

Die Lage der Resonanzfrequenz f_0 ist dort, wo sich die Spannungscurven der Spule und des Kondensators schneiden. Die Güte des Schwingkreises lässt sich berechnen durch

$$Q = \frac{U_L(f_0)}{U_0} = \frac{U_C(f_0)}{U_0} \quad (18)$$

mit Eingangsspannung U_0 . Wir lesen $U_L = U_C$ am Graphen ab und bestimmen wie zuvor ein Fehlerintervall zur Bestimmung des statistischen Fehlers. Der Graph von U_0 , U_L und U_C wird in Abb. 7 gezeigt für $R = 1\Omega$.

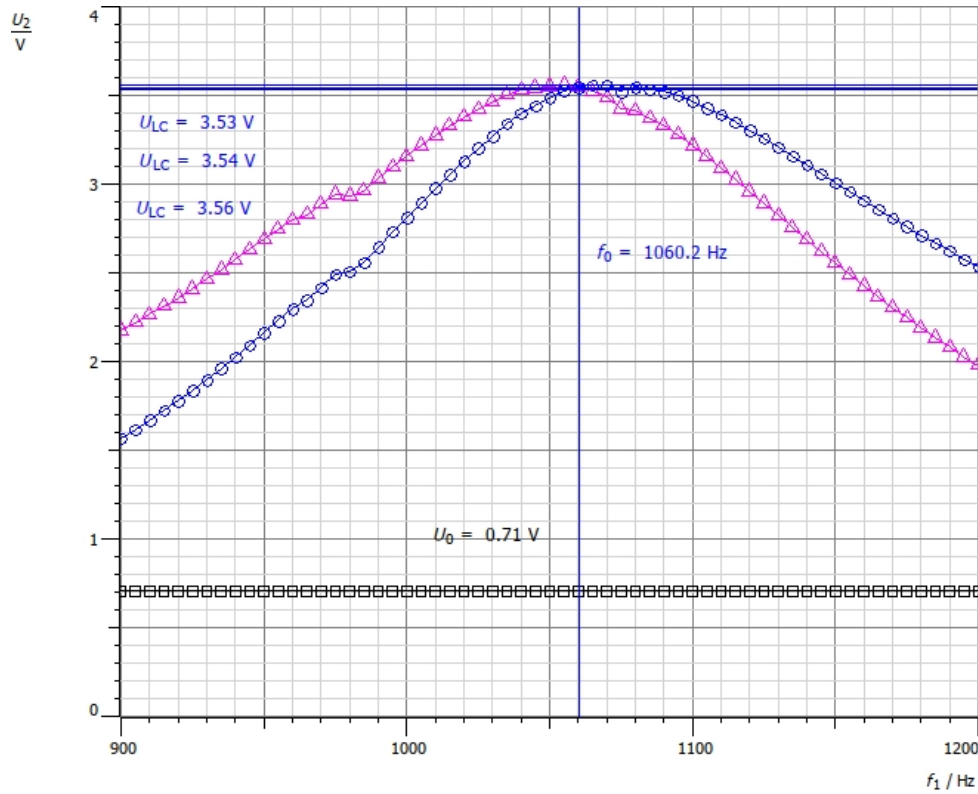


Abbildung 7: Güteberechnung durch Ablesen der Spannungsüberhöhung für $R = 1\Omega$.

Die Eingangsspannung am Power-CASSY wurde auf einen Effektivwert von 0.71V eingestellt und schwankt um ca. 0.01V. Der statistische Fehler auf Q ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_Q(stat.) = Q \sqrt{\left(\frac{U_0}{\sigma_{U_0}}\right)^2 + \left(\frac{U_L}{\sigma_{U_L}}\right)^2} \quad (19)$$

U_L und U_C unterliegen einem systematischen Fehler von

$$\sigma_{U,sys} = (0.01 \cdot I_i + 0.005 \cdot U_{Bereichsendwert})/\sqrt{3} \quad (20)$$

Der sich dadurch ergebende Fehler auf Q ist dann am größten, wenn U_L und U_C in die gleiche Richtung verschoben werden. Daher berechnen wir die systematische Unsicherheit durch

$$\sigma_Q(sys.) = \frac{\sigma_{U_L}(sys.)}{U_0} \quad (21)$$

Insgesamt erhalten wir für die Güte für die benutzten Widerstände folgende Werte und Unsicherheiten (Tabelle 5):

$R[\Omega]$	$U_L = U_C[V]$	$U_0[V]$	Q	$\sigma_Q(stat.)$	$\sigma_Q(sys.)$
1	3.540 ± 0.015	0.71 ± 0.01	4.99	0.067	0.06
5	2.320 ± 0.005	0.71 ± 0.01	3.27	0.05	0.05
10	1.570 ± 0.005	0.71 ± 0.01	2.21	0.03	0.04

Tabelle 5: Güteberechnung durch Spannungsüberhöhung

Gütebestimmung durch frequenzabhängige Phasenlage

Als letztes bestimmen wir die Güte über die Phase zwischen Strom und Eingangsspannung. Diese wird automatisch vom Power-CASSY erfasst und ausgegeben. Über die Phasenlage

lassen sich die Resonanzfrequenzen (bei $\phi = 0$) und die Frequenzen der Resonanzbreite bestimmen (in diesem Fall $\phi = -45^\circ$ für f_- und $\phi = 45^\circ$ für f_+). Die Güte berechnet sich nun ganz analog wie bei der Betrachtung des Strommaximums (Gl. (30)). Für die Fehler auf f_- , f_0 und f_+ werden wieder Fehlerintervalle um den abgelesenen Wert auf dem von CASSYlab ausgegebenem Graphen abgeschätzt und die Unsicherheit auf Q mittels Fehlerfortpflanzung bestimmt (Gl. (15)). Die Berechnung wird in Abb. 8 illustriert.

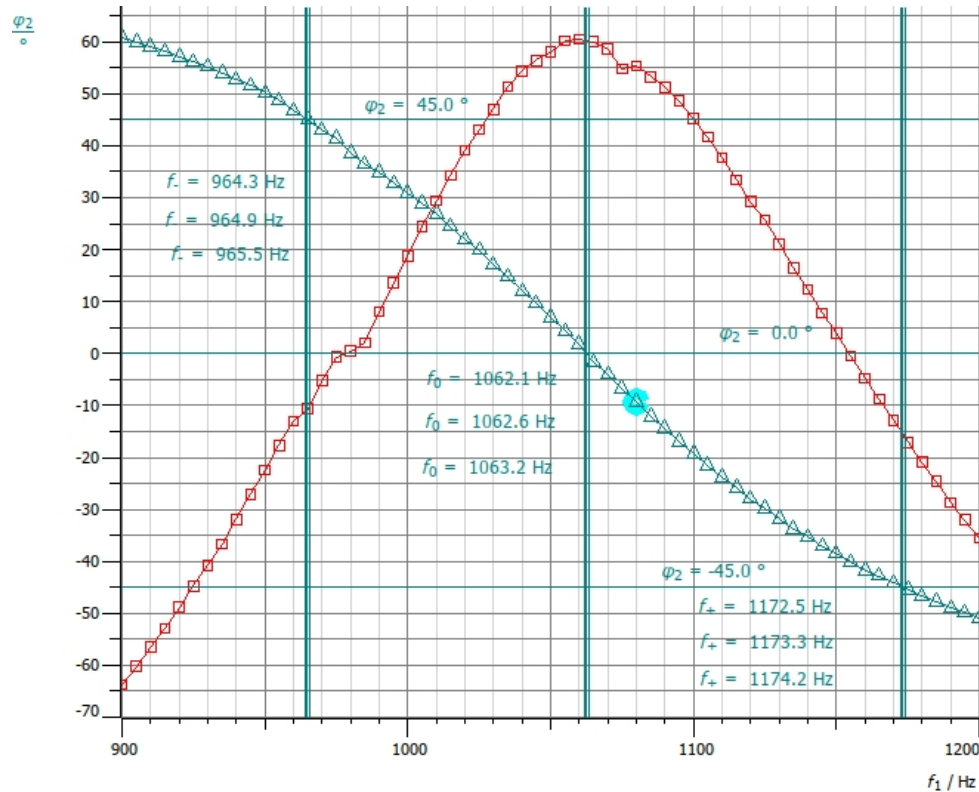


Abbildung 8: Güteberechnung durch Ablesen der Phasenlage

Ein systematischer Fehler kann nicht bestimmt werden, weil es vonseiten des Herstellers keine Angaben zum systematischen Fehler auf die Phase gibt. In Tabelle 6 werden die Zwischenergebnisse und die berechneten Güten aufgelistet.

$R[\Omega]$	$f_0[\text{Hz}]$	$f_-[\text{Hz}]$	$f_+[\text{Hz}]$	Q	$\sigma_Q(\text{stat.})$
1	1063 ± 1	965 ± 1	1173 ± 1	5.10	0.03
5	1063 ± 2	916 ± 2	1238 ± 2	3.30	0.02
10	1063 ± 2	852 ± 1	1334 ± 2	2.21	0.01

Tabelle 6: Güteberechnung durch Phasenlage

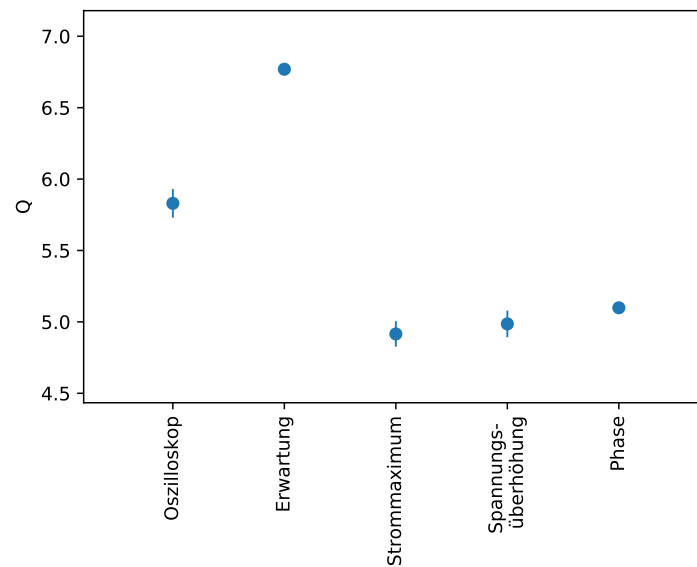
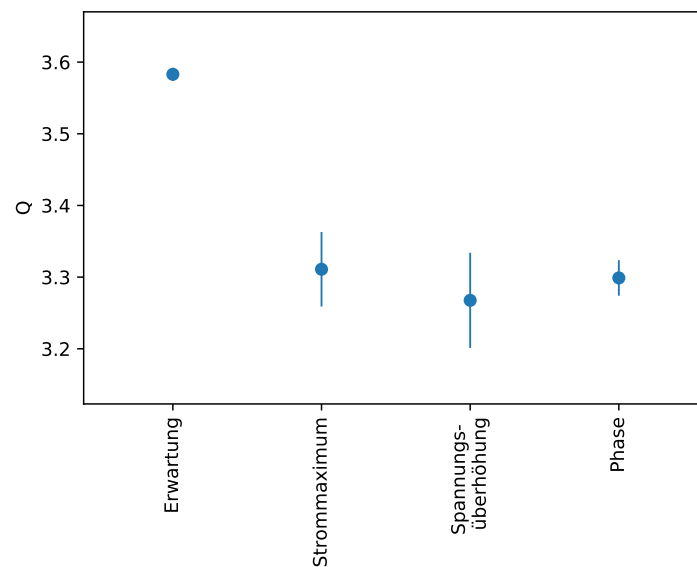
3.5 Zusammenfassung

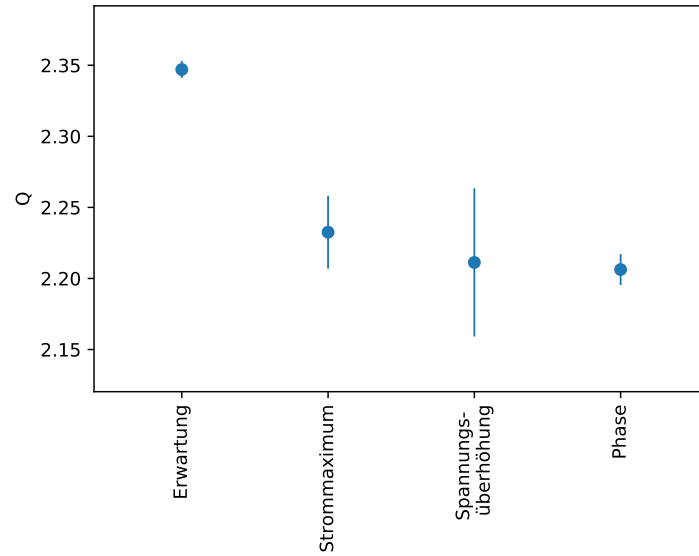
Wir fassen unsere Ergebnisse in Abb. 9, 10, 11 und Tabelle 7 zusammen. Es fällt auf, dass die erwartete Güte, die wir aus dem Vermessen der Bauteile erhalten haben, größer ist als die Güten, die wir bei der Auswertung mit CASSY berechnet haben. Wahrscheinlich liegt das daran, dass wir Restwiderstände im Schaltkreis nicht in unsere Berechnung mit einbezogen haben. Die Gütewerte der CASSY-Messung stimmen untereinander besser überein (schneiden sich im 1σ -Intervall). Bei der Betrachtung ist zu beachten, dass beispielsweise

bei der Gütebestimmung mithilfe der Phasendifferenz kein systematischer Fehler berechnet werden konnte. Schließlich werden die Güten wie erwartet kleiner für größer gewählte Widerstände.

	$R = 1\Omega$	$R = 5\Omega$	$R = 10\Omega$
Erwartung/Messbrücke	$6.769 \pm 0.018(sys.)$	$3.583 \pm 0.009(sys.)$	$2.347 \pm 0.006(sys.)$
Strommaximum	$4.92 \pm 0.06 \pm 0.06$	$3.31 \pm 0.05 \pm 0.02$	$2.23 \pm 0.01 \pm 0.02$
Spannungsüberhöhung	$4.99 \pm 0.07 \pm 0.06$	$3.27 \pm 0.05 \pm 0.05$	$2.21 \pm 0.03 \pm 0.04$
Phase	$5.10 \pm 0.03(stat.)$	$3.30 \pm 0.02(stat.)$	$2.21 \pm 0.01(stat.)$
Oszilloskop	$5.83 \pm 0.10(stat)$		

Tabelle 7: Zusammenfassung Serienschwingkreis

Abbildung 9: Güteberechnung für $R = 1\Omega$ Abbildung 10: Güteberechnung für $R = 5\Omega$

Abbildung 11: Güteberechnung für $R = 10\Omega$

Die Restwiderstände im Schaltkreis lassen sich mit diesen Ergebnissen folgendermaßen abschätzen, wobei für Q_{CASSY} das gewichtete Mittel der drei CASSY-Berechnungen mit statistischen Fehler eingesetzt wird.

$$R_{Rest} = \frac{1}{Q_{CASSY}} \sqrt{\frac{L}{C}} - (R + R_L) = (0.76 \pm 0.09)\Omega \quad (22)$$

Wir erhalten:

	$R = 1\Omega$	$R = 5\Omega$	$R = 10\Omega$
$R_{Rest}[\Omega]$	1.590 ± 0.082	0.778 ± 0.085	0.814 ± 0.055

4 Parallelschwingkreis

4.1 Physikalische Grundlagen

Bei einem Parallelschwingkreis bestehend aus einem Widerstand R , einer Spule mit Induktivität L und einem Kondensator mit Kapazität C besagen die Kirchhoffschen Regeln, dass der Gesamtstrom gleich der Summe der Ströme durch die einzelnen Bauteile ist.

$$I = I_R + I_C + I_L \quad (23)$$

Gleichzeitig fällt über alle Bauteile die gleiche Spannung ab, nämlich die angelegte Spannung. Bei einer Parallelschaltung addieren sich die inversen Impedanzen:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \quad (24)$$

Die Schwierigkeit beim Parallelschwingkreis ist, dass der Spulenwiderstand R_L bei realen Bauteilen getrennt betrachtet werden muss und nicht wie beim Serienschwingkreis einfach zum Ohmschen Widerstand des Schaltkreises dazuaddiert werden kann. Nach einiger Rechnung erhält man, dass der Gesamtstrom bei der Resonanzfrequenz f_0 minimal wird, wobei

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \frac{C}{L} R_L^2}{LC}} \quad (25)$$

Die Güte im Schwingkreis findet man durch mit $Q = f_0/\Delta f$, wobei die Breite Δf als Differenz der Frequenzen berechnet wird, bei der der Strom auf $\sqrt{2}I_{min}$ gestiegen ist. Außerdem lässt sich die Güte (bei $R_L > 0$ näherungsweise) über die Stromerhöhung des über Spule und Kondensator abfallenden Stroms im Verhältnis zum Gesamtstrom berechnen:

$$\frac{(I_L)_0}{I_0} = \frac{(I_C)_0}{I_0} = Q \quad (26)$$

Schließlich lässt sich die Güte auch direkt über die Werte von R , R_L , C und L bestimmen als

$$Q = \frac{R\sqrt{\frac{C}{L}}}{1 + R \cdot R_L \cdot \frac{C}{L}} \quad (27)$$

oder als

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} + R_L\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (28)$$

4.2 Verwendete Bauteile

Wir verwenden die gleichen Bauteile, die wir für den Serienschwingkreis bereits ausgemessen hatten. Somit lassen sich die Messwerte für R , R_L , L und C aus Tabelle 1 auslesen. Aus diesen Werten lässt sich mit Gl. (27) die Güte des Schaltkreises berechnen. Der Fehler auf die Güte wird durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\sigma_Q(sys.) = \sqrt{\left(\frac{dQ}{dR}\sigma_R\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dR_L}\sigma_{R_L}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dL}\sigma_L\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dC}\sigma_C\right)^2} \quad (29)$$

Insgesamt erhalten wir folgende Werte für die Widerstände $R = 47\Omega$, $R = 100\Omega$ und $R = \infty$ (Tabelle 8):

$R[\Omega]$	Q	$\sigma_Q(sys)$
47	1.244	0.003
100	2.273	0.005
∞	8.536	0.026

Tabelle 8: Gütebestimmung über Messbrücke

4.3 CASSY-Messung

4.3.1 Aufbau und Durchführung

Wir bauen den Parallelschwingkreis wie in Abb. 12 dargestellt auf. Wir verwenden die gleiche Spule und den gleichen Kondensator wie im Serienschwingkreis und führen den Versuch einmal mit dem Widerstand $R = 47\Omega$, einmal mit dem Widerstand $R = 100\Omega$ und einmal mit geöffneter Schaltung ($R = \infty$) durch. Das Power-CASSY generiert eine Wechselspannung mit variierenden Frequenzen, im Bereich von 0 bis 2000Hz in Abständen von 20Hz nach einer Einschwingzeit von 2s. Außerdem misst das Power-Cassy den Gesamtstrom. Mithilfe von zwei CASSY-Sensoren werden der Strom durch die Spule und den Kondensator als Effektivwerte gemessen. Die Messwertparameter sind in Tabelle 9 zusammengefasst.

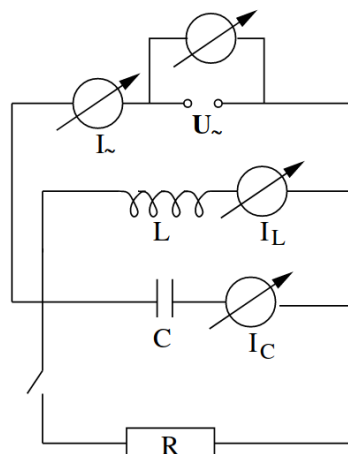


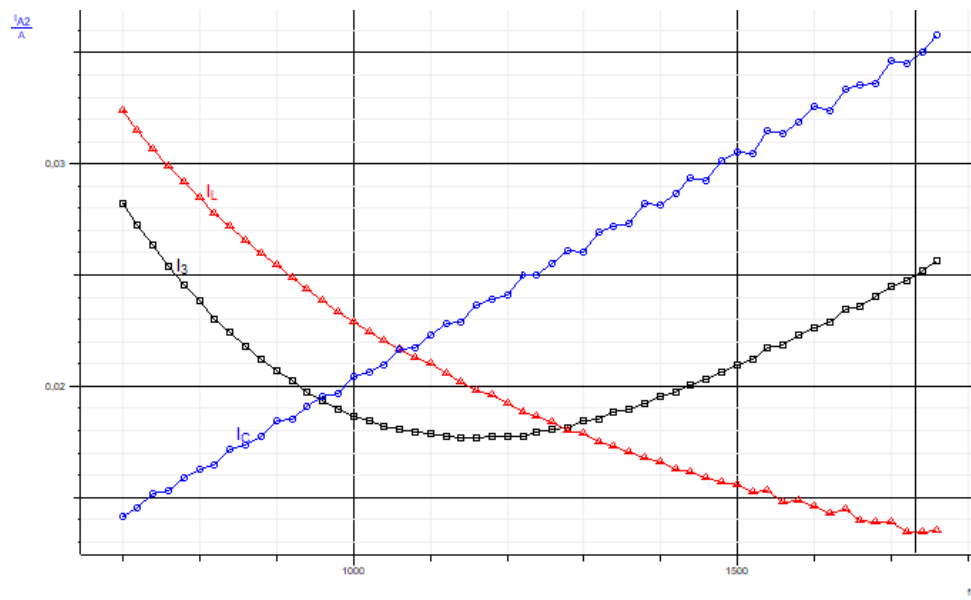
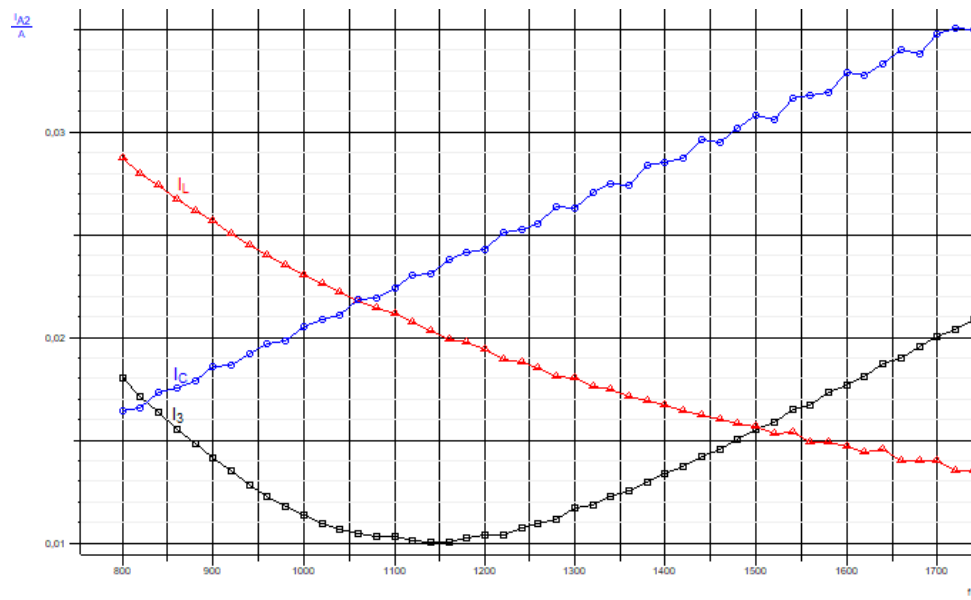
Abbildung 12: Aufbau Parallelschwingkreis (Quelle: Praktikumsskript)

Messwertbereich U_3	0V .. 0.7V
Amplitude U_3	1V
Signalform	Sinusförmig, 50% Symmetrie
Messwertbereich f_1	0Hz .. 1400Hz
Formel f_1	$700 + (n - 1) \cdot 20$ oder $900 + (n - 1) \cdot 10$
Messwertbereich I_L, I_C, I_3	0A .. 0.07A
Messwarterfassung	Effektivwerte gemittelt über 100ms
Messbedingung	$f_1 < 12000$ and $\Delta t > 2$

Tabelle 9: Messwertparameter Parallelschwingkreis

4.3.2 Auswertung

Abb. 13, 14 und 15 zeigen die Rohdaten unserer Messungen.

Abbildung 13: Rohdaten zum Parallelschwingkreis mit $R = 47\Omega$ Abbildung 14: Rohdaten zum Parallelschwingkreis mit $R = 100\Omega$

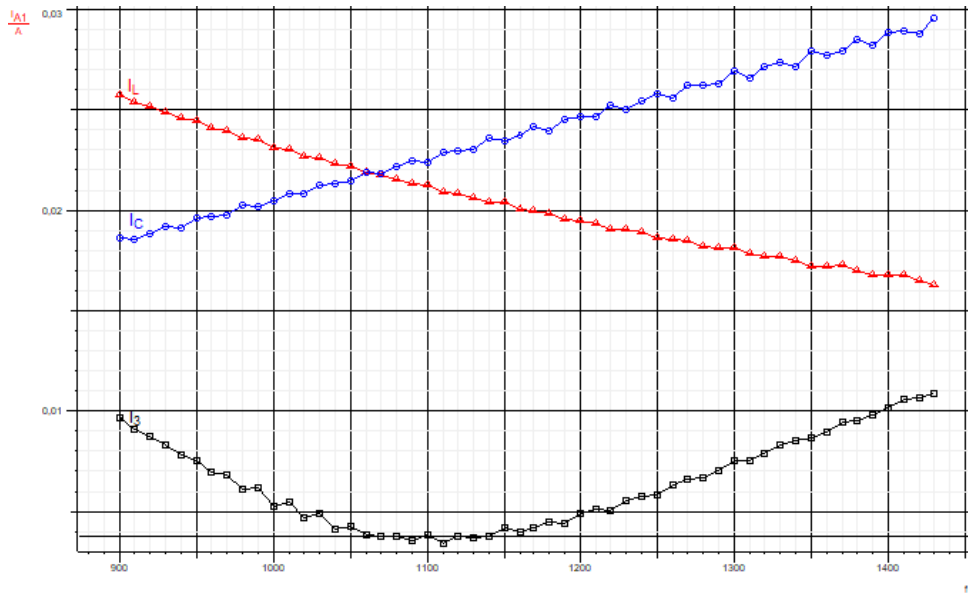


Abbildung 15: Rohdaten zum Parallelschwingkreis mit $R = \infty$ (geöffnete Schaltung)

Die Auswertung der Messdaten erfolgt mit den gleichen Methoden wie bei den Versuchen zum Serienschwingkreis. Auch hier bestimmen wir die Güte des Systems durch Ablesen von Werten in den von CASSY-Lab produzierten Graphen. Die Ablesegenauigkeit wird wieder durch Abschätzen eines Fehlerintervalls bestimmt und ist größer als der Digitalisierungsfehler durch die CASSY-Geräte.

Güteberechnung durch Breite des Stromminimums

Wir bestimmen die Resonanzfrequenz als die Frequenz f_0 , bei der der in den Schwingkreis hineinfließende Strom minimal wird $I_3 = I_0$. Die Breite der Resonanzkurve ergibt sich als Differenz der Frequenzen f_+ und f_- , bei denen der Strom auf $\sqrt{2}I_0$ angestiegen ist. Die Güte berechnet sich damit zu

$$Q = \frac{f_0}{f_+ - f_-} \quad (30)$$

wie bei der Berechnung im Serienschwingkreis. In Abb. 16 sind die abgelesenen Werte für f_- , f_0 und f_+ bei einem Widerstand von $R = 100\Omega$ beispielhaft dargestellt.

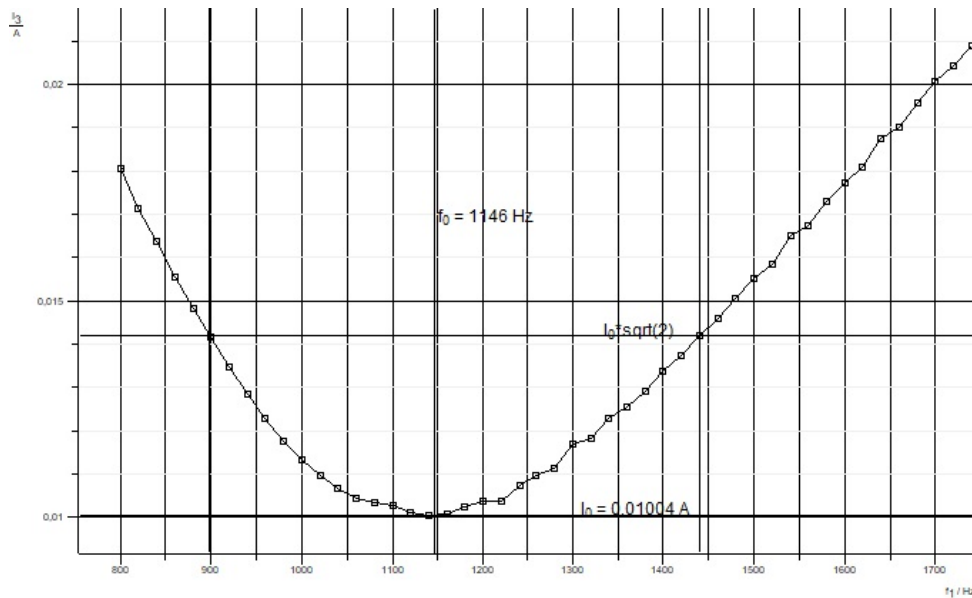


Abbildung 16: Güteberechnung durch Breite des Stromminimums

Ebenfalls wie im Serienschwingkreis schätzen wir die Unsicherheit auf f_- , f_0 und f_+ durch Fehlerintervalle ab und pflanzen den Fehler auf die Güte fort, wo sie die relevante statistische Unsicherheit darstellt (Gl. (15)). Schließlich bestimmen wir auch den systematischen Fehler wie im Serienschwingkreis durch die Verschiebemethode. Wir verschieben den Strom um die vom Hersteller angegebene Offset-Unsicherheit von $\frac{0.005}{\sqrt{3}} I_{\text{Berechsendwert}} = 0.0002 \text{ A}$ nach oben und nach unten und berechnen die Güte aus diesen verschobenen Stromkurven (siehe Abb. 17).

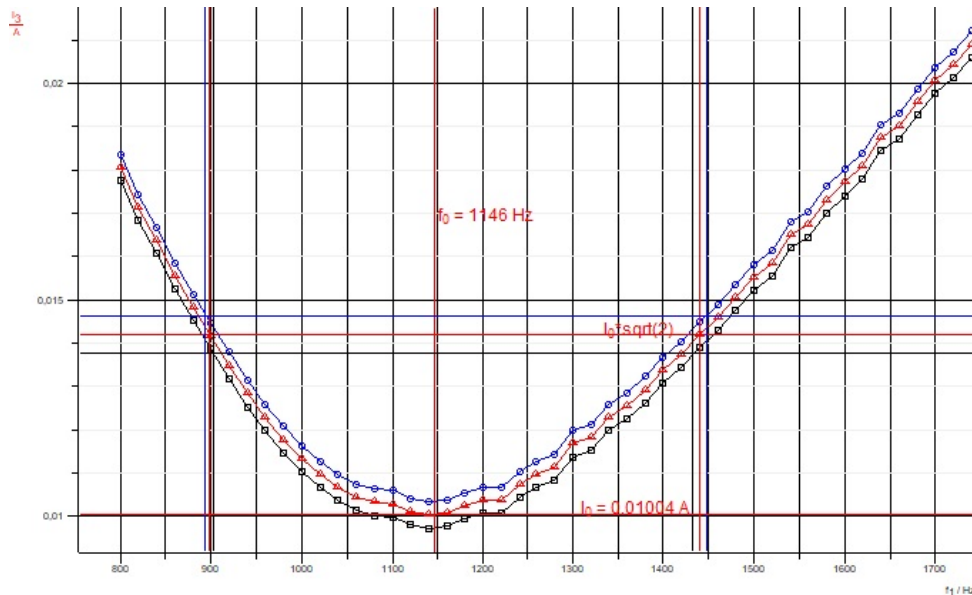


Abbildung 17: Verschiebemethode zur Berechnung des systematischen Fehlers

Die gemittelte Differenz zur ursprünglich bestimmten Güte entspricht dem systematischen Fehler. In Tabelle 10 werden die ausgelesenen Frequenzen und berechneten Güten für die unterschiedlichen Widerstände präsentiert. Die Bezeichnung $R = \infty$ stellt hier und im Folgenden den Schaltkreis mit geöffnetem Schalter statt Ohmschen Widerstand dar.

$R[\Omega]$	$f_0[Hz]$	$f_-[Hz]$	$f_+[Hz]$	Q	$\sigma_Q(stat.)$	$\sigma_Q(sys.)$
47	1169 ± 20	770 ± 20	1728 ± 20	1.22	0.04	0.01
100	1146 ± 20	898 ± 20	1440 ± 20	2.12	0.09	0.05
∞	1101 ± 10	1013 ± 10	1225 ± 10	5.18	0.35	0.12

Tabelle 10: Güteberechnung durch Breite des Stromminimums

Güteberechnung durch Quantifizierung der Stromüberhöhung

Schließlich berechnen wir die Güte über die Stromüberhöhung. Bei (in etwa) der Resonanzfrequenz schneiden sich die Stromkurven der hyperbelförmigen Spulenstromkurve und der linear ansteigenden Stromkurve ($I_L = I_C$). Wir berechnen die Güte über

$$Q = \frac{I_L}{I_0^*} = \frac{I_L}{I_0^*} \quad (31)$$

wobei I_0^* der Gesamtstrom bei der Frequenz ist, bei der der Strom minimal ist. In Abb.18 werden die abgelesenen Werte für $I_C = I_L$ und I_0^* für die Messung illustriert.

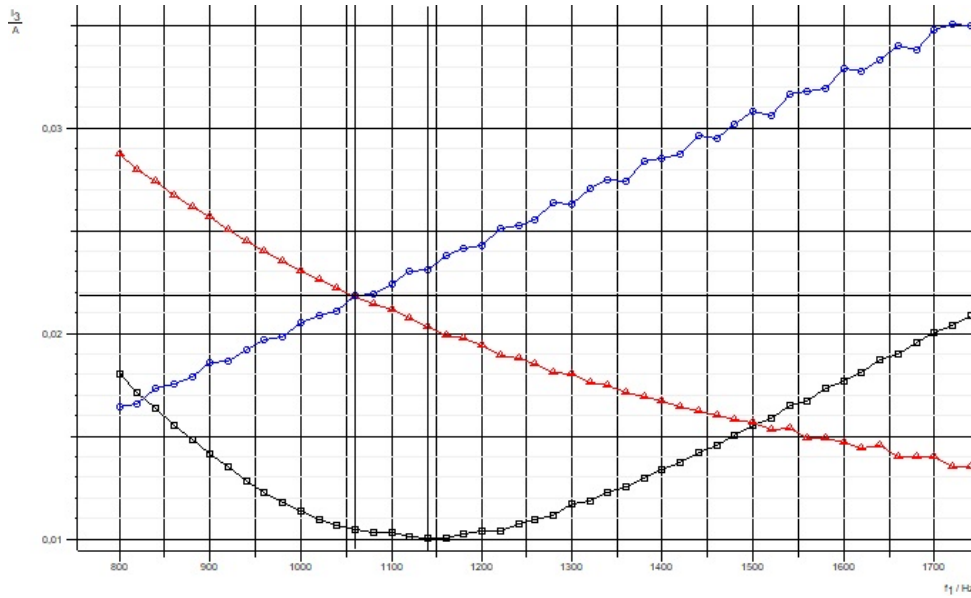


Abbildung 18: Güteberechnung durch Ablesen der Stromüberhöhung

Für die Bestimmung der statistischen Unsicherheit, schätzen wir die Fehler auf $I_L = I_C$ und I_0^* mit Fehlerintervallen ab (Abb. 18) und pflanzen den Fehler auf Q fort:

$$\sigma_Q(stat.) = Q \sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_L}}{I_L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_0^*}}{I_0^*}\right)^2} \quad (32)$$

I_L , I_C und der einlaufende Strom unterliegen außerdem einem systematischen Fehler der Größe (laut Hersteller)

$$\sigma_{I,sys} = (0.02 \cdot I_i + 0.005 \cdot I_{Bereichsendwert})/\sqrt{3} \quad (33)$$

Wir berechnen den Fehler auf jeweils $I_L = I_C$ und I_0^* und pflanzen den Fehler auf Q wie bei der statistischen Unsicherheit mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung fort:

$$\sigma_Q(sys.) = Q \sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_L(sys.)}}{I_L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_0^*(sys.)}}{I_0^*}\right)^2} \quad (34)$$

Die Ergebnisse für alle Widerstände sind in Tabelle 11 zusammengefasst.

$R[\Omega]$	$I_L = I_C[A]$	$I_0^*[A]$	Q	$\sigma_Q(stat.)$	$\sigma_Q(sys.)$
100	0.0218 ± 0.0002	0.0100 ± 0.0001	2.17	0.02	0.08
47	0.0217 ± 0.0002	0.0177 ± 0.0001	1.23	0.01	0.03
∞	0.0219 ± 0.0002	0.0038 ± 0.0003	5.76	0.46	0.32

Tabelle 11: Güteberechnung durch Stromüberhöhung

4.4 Zusammenfassung

Wir fassen unsere Ergebnisse in der Tabelle 12 zusammen. Die erwartete Güte aus der Vermessen der Bauteil ist größer als die mit CASSY berechneten Güten, was wieder an vernachlässigten Kabelwiderständen liegen könnte. Die Gütewerte der CASSY-Messung stimmen innerhalb ihrer 1σ -Umgebung überein. Es fällt auf, dass die systematischen Unsicherheiten im Parallelschwingkreis deutlich größer sind als im Serienschwingkreis. Das liegt daran, dass sich der Offset-Fehler auf den Strom beim Minimalstromwert des Parallelschwingkreises stärker bemerkbar macht als bei den großen Maximalstromwerten im Serienschwingkreis. Schließlich lässt sich beobachten, dass die Güten wie erwartet größer werden für größer gewählte Widerstände.

	$R = 47\Omega$	$R = 100\Omega$	$R = \infty$
Erwartung/Messbrücke	$1.244 \pm 0.003(sys.)$	$2.273 \pm 0.005(sys.)$	$8.536 \pm 0.026(sys.)$
Stromminimum	$1.22 \pm 0.04 \pm 0.01$	$2.12 \pm 0.09 \pm 0.05$	$5.18 \pm 0.35 \pm 0.12$
Stromüberhöhung	$1.23 \pm 0.01 \pm 0.03$	$2.17 \pm 0.02 \pm 0.08$	$5.76 \pm 0.46 \pm 0.32$

Tabelle 12: Zusammenfassung Parallelschwingkreis

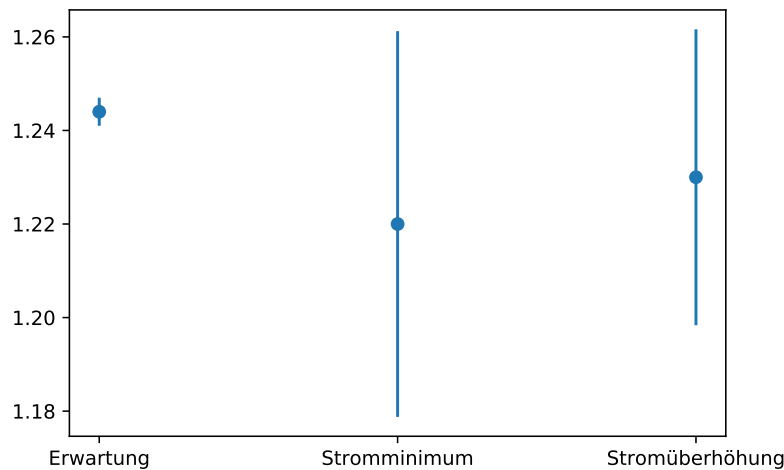
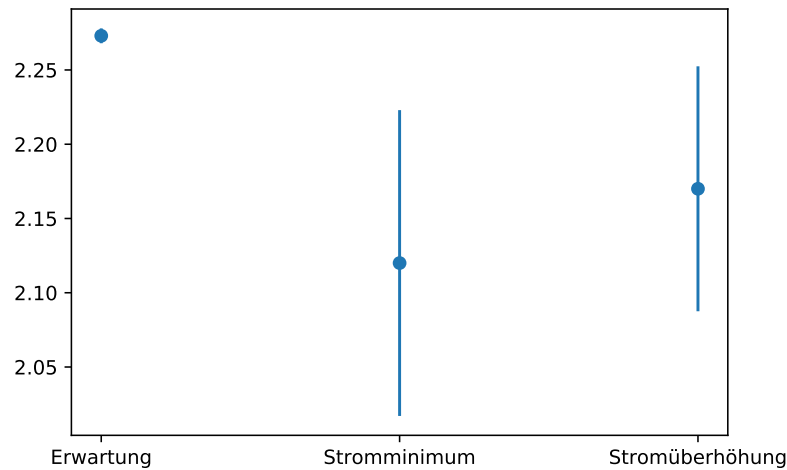
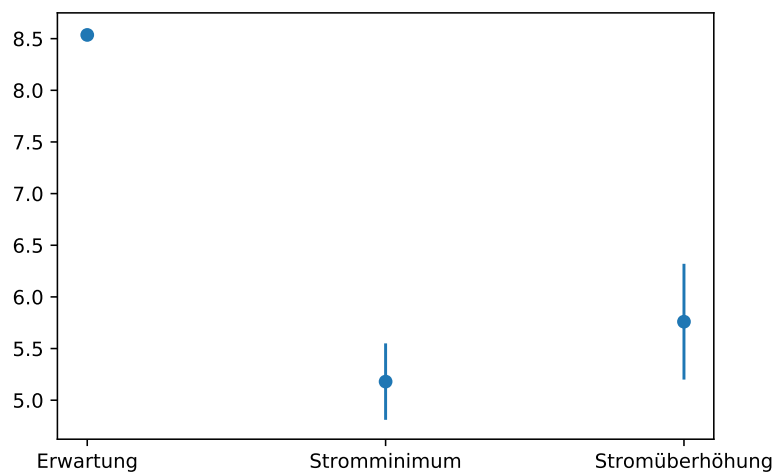


Abbildung 19: Güteberechnung für $R = 47\Omega$

Abbildung 20: Güteberechnung für $R = 100\Omega$ Abbildung 21: Güteberechnung für $R = \infty$

5 Hochpass und Tiefpass

5.1 Versuchsaufbau und Durchführung

In diesem Versuch wird qualitativ das Antwortverhalten eines Hoch- und Tiefpasses untersucht. Wir bauen einen Serienschwingkreis aus einem Widerstand mit $R = 47\Omega$ und Kondensator mit $C = 4,7\mu F$ auf, gemäß folgendem Schaltbild (Abb. 22):

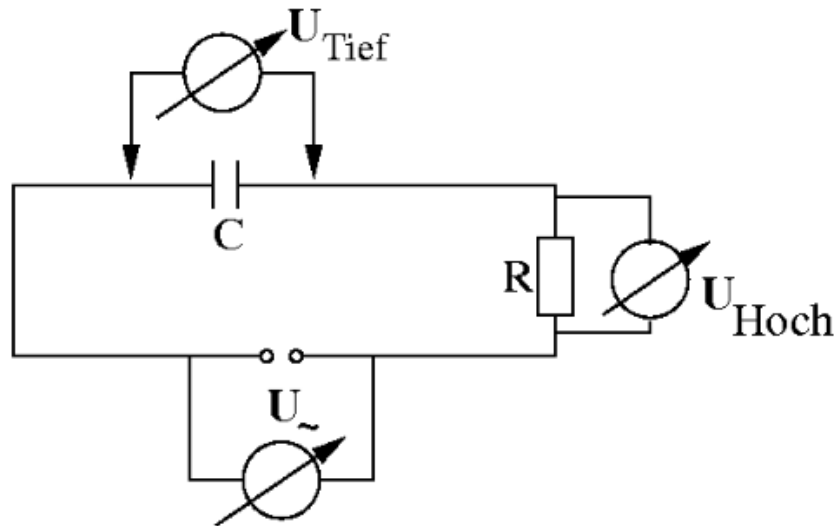


Abbildung 22: Schaltbild für den Hochpass und Tiefpass (Quelle:Praktikumsskript)

Als Generator verwenden wir das Power-CASSY-Gerät und nehmen die Spannungen über den Widerstand (U_R) und den Kondensator (U_C) über den Sensor-CASSY auf. Wir stellen eine Rechtecksspannung mit Amplitude $U_0 = 1V$ und Frequenz $f = 50Hz$ als Eingangsspannung ein. Nun nehmen wir die Momentanwerte der Spannungen U_0 , U_R und U_C als Funktion der Zeit auf. In Tabelle 13 werden die Messparameter zusammengefasst.

Messwertbereich U_0	-1V .. 1V
Amplitude U_0	1V
Signalform	Rechteckwechselfspannung, 50% Symmetrie
Frequenz	50Hz
Messwertbereich U_C , U_R	-1V .. 1V
Messwerterfassung	Momentanwerte
Aufnahme	Automatisch, Anzahl: 16001
Messzeit	160ms, Intervall: 10 μ s

Tabelle 13: Messwertparameter Hoch-/Tiefpass

5.2 Auswertung

Ein Hochpass ist ein Filter, der hohe Frequenzen passieren lässt, aber kleine Frequenzen dämpft, wohingegen ein Tiefpass kleine Frequenzen passieren lässt, aber hohe Frequenzen dämpft.

Die am Kondensator abgegriffene Spannung im betrachteten Schaltbild lässt sich über die Impedanzen der Bauteile berechnen zu

$$|U_C| = \frac{|U_0|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2 + 1}} \quad (35)$$

Wie an dieser Formel zu erkennen ist, verhält sich die Ausgangsspannung am Kondensator wie ein Tiefpass. Die über den Widerstand abgegriffene Spannung berechnet sich zu

$$|U_R| = \frac{|U_0|}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad (36)$$

womit die Spannung am Widerstand einem Hochpass entspricht. Die zugehörige Grenzfrequenz, bei der $|U_C| = |U_R| = \frac{|U_0|}{\sqrt{2}}$ ist, liegt bei $\omega = 1/RC$.

Die Rohdaten unserer Messung sind in Abb. 23 und 24 dargestellt.

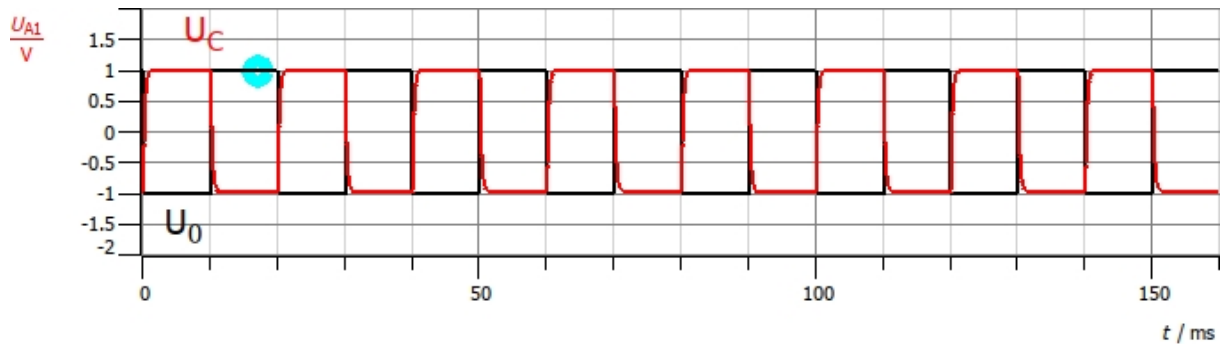


Abbildung 23: Rohdaten: Eingangsspannung (U_0) und Spannung über Kondensator (U_C) als Funktion der Zeit

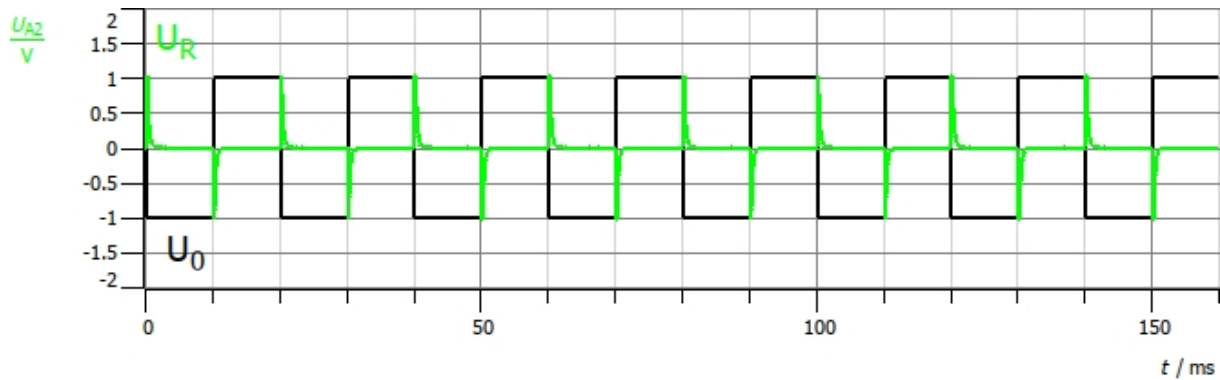


Abbildung 24: Rohdaten: Eingangsspannung (U_0) und Spannung über Widerstand (U_R) als Funktion der Zeit

An den Graphen lassen sich die Auflade- und Entladekurve des Kondensators beobachten. Die Spannung am Kondensator ist proportional zum Integral der Eingangsspannung ("Integrierglied"), wohingegen die Spannung am Widerstand proportional zur zeitlichen Ableitung der Eingangsspannung ist ("Differenzierglied").

Um das Durchlassverhalten bei unterschiedlichen Frequenzen zu beobachten, führen wir eine Fast Fourier Transformation (FFT) mit den Spannungskurven durch, wobei wir die in Cassylab vorimplementierte Funktion für diese Rechnung nutzen. Hintergrund dieser Vorgehensweise ist, dass sich eine Rechteckspannung als Fourierreihe, also Summe vieler sinusförmigen Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen darstellen lässt.

Das Ergebnis dieser diskreten Fouriertransformationen ist in den Abb. 25 und 26 zu sehen.

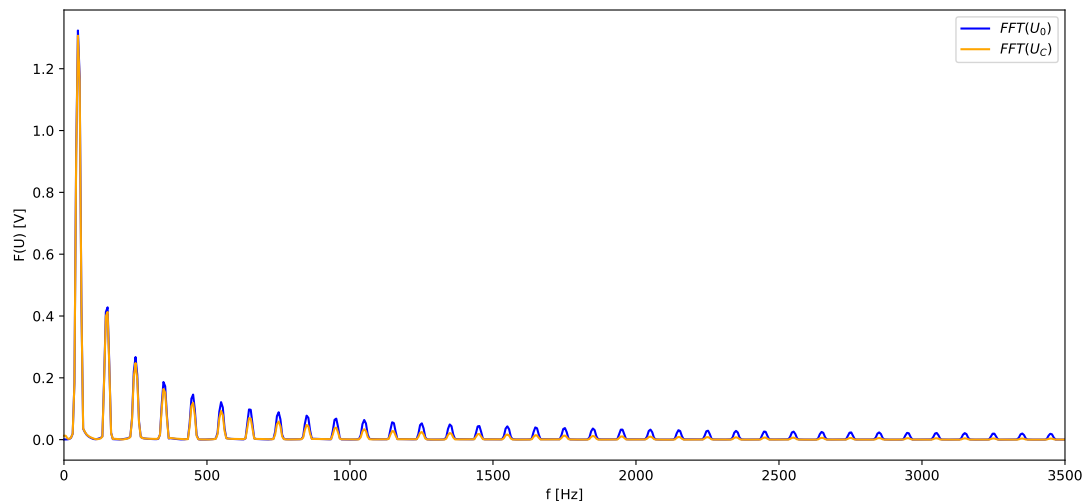


Abbildung 25: Ausschnitt der Fast Fourier Transformation (FFT) der Eingangsspannung und der Spannung über dem Kondensator

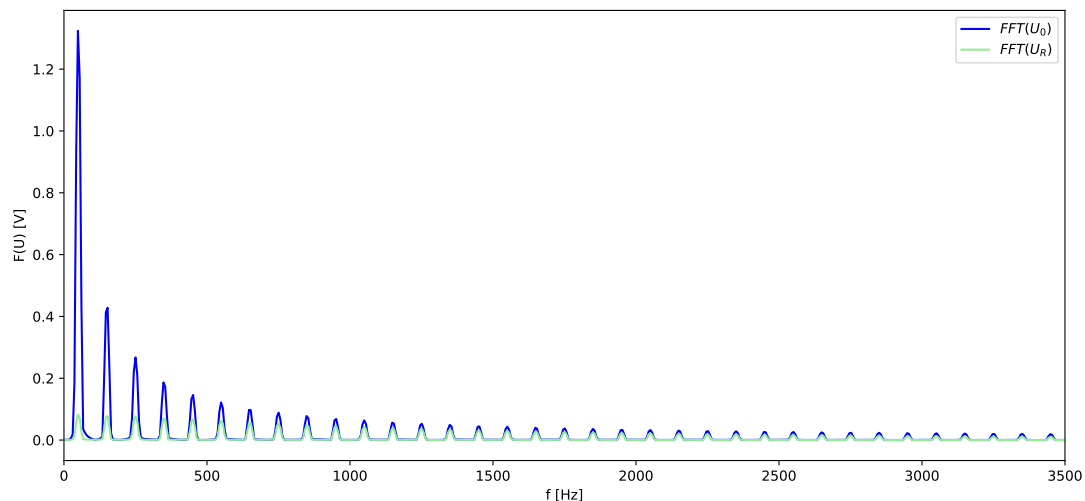


Abbildung 26: Ausschnitt der Fast Fourier Transformation (FFT) der Eingangsspannung und der Spannung über dem Widerstand

Man erkennt, dass für Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz von $f = 1/(2\pi CR) = 724\text{Hz}$ die Spannungsamplituden am Kondensator fast der Amplituden der Eingangsspannung (blau) entsprechen, wohingegen die Spannungsamplituden am Widerstand deutlich gedämpft sind. Für Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz ist es genau umgekehrt: Die Spannungsamplituden am Kondensator sind gedämpft, wohingegen sich die Amplituden am Widerstand der Eingangsamplituden nähern.

Als nächstes wollen wir das gemessene Fourierspektrum mit dem erwarteten, berechenbaren Fourierspektrum vergleichen. Die Fourierreihe der betrachteten Rechteckspannung lautet ¹

$$F(U_0) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega)}{2k+1} \quad (37)$$

mit Eingangsamplitude $U_0 = 1\text{V}$ und Grundfrequenz $\omega = 50\text{Hz}$. Man sieht anhand dieser Formel, dass nur ungerade Vielfache der Grundfrequenz zur Reihe beitragen, und diese ei-

¹Quelle: Wikipedia

ne Amplitude von $\frac{4V}{\pi(2k-1)}$ haben. Damit lassen sich die Frequenzanteile der Eingangsspannung vorhersagen. Für die Frequenzanteile am Kondensator und am Widerstand werden die Amplituden gemäß Gl. 5.2 und 5.2 durch $\sqrt{(\frac{1}{\omega CR})^2 + 1}$ bzw. $\sqrt{1 + (\omega CR)^2}$ geteilt. Die erwarteten Amplituden sind in Abb. 27 und 28 gezeigt.

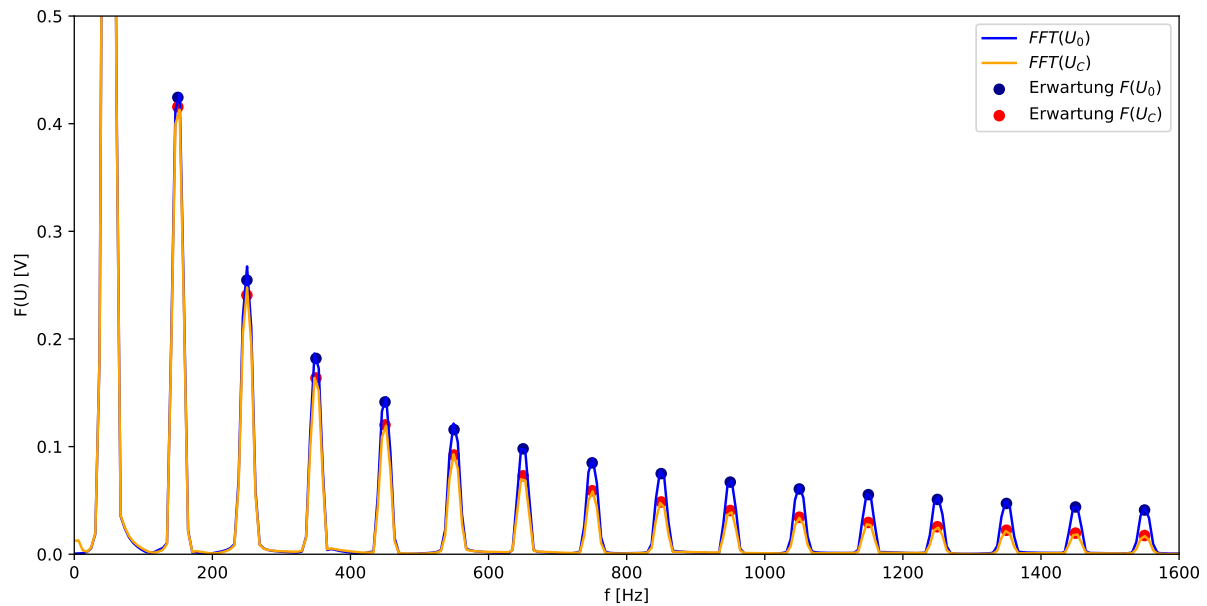


Abbildung 27: FFT der Kondensatorspannung mit Erwartungswerten der einzelnen Frequenzen

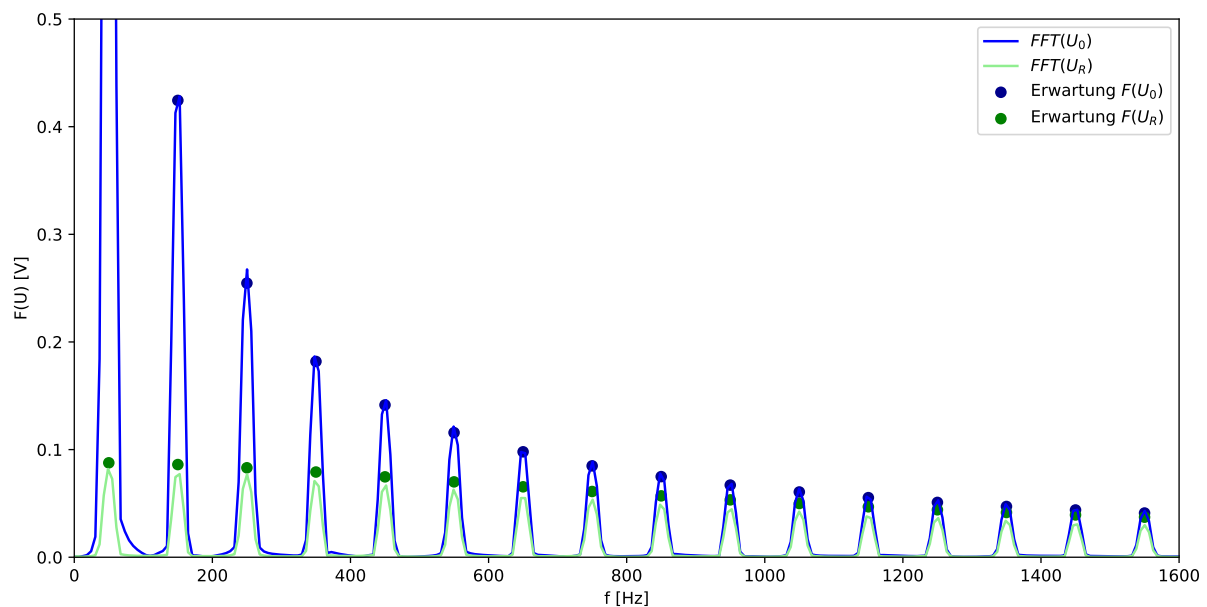


Abbildung 28: FFT der Widerstandsspannung mit Erwartungswerten der einzelnen Frequenzen

Die gemessenen Fourierspektren stimmen gut mit den erwarteten Fourierspektren überein. Lediglich beim Fourierspektrum der Widerstandsspannung ist der gemessene Wert geringfügig höher als der berechnete, was wahrscheinlich an nichtbeachteten Restwiderständen im Schaltkreis liegt.