

Protokoll Wellenlehre Physikalisches Grundpraktikum 2

Gruppe B2
Máté Farkas, Maria Spethmann

28. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Abstandsmessung	4
2.1	Versuchsaufbau	4
2.2	Vorversuch: Kalibrierung des Wegaufnehmers	4
2.3	Versuchsdurchführung	6
2.4	Versuchsauswertung	6
3	Stehende Wellen	9
3.1	Versuchsaufbau	9
3.2	Versuchsdurchführung	9
3.3	Versuchsauswertung	9
4	Beugung am Einzelspalt und Doppelspalt	12
4.1	Versuchsaufbau	12
4.2	Vorversuch: Kalibrierung des Winkelaufnehmer	12
4.3	Versuchsdurchführung	13
4.4	Versuchsauswertung	13

1 Theorie

Schallwellen sind Longitudinalwellen, die sich in der Luft ausbreiten. Die zugehörigen Feldgrößen, der Schalldruck p und die Schallschnelle u , lassen sich mit den Eulerschen Gleichungen zu den Wellengleichungen kombinieren.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\kappa p_0}{\rho} \Delta p : \quad (1)$$

mit dem Außendruck p_0 , der Gasdichte ρ und dem Adiabatenexponenten κ (analog für u). Die Schallgeschwindigkeit ist somit

$$c_{Schall} = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho}} \approx 343 \frac{m}{s}. \quad (2)$$

Spezielle Lösungen der Wellengleichung sind die ebene Welle

$$p(x, t) = p_0 f(kx - \omega t), \quad (3)$$

die sich in x-Richtung ausbreitet, mit $c_{Schall} = \frac{\omega}{k}$, und die Kugelwelle,

$$p(r, t) = p_0 \frac{r_0}{r} f(r - c_{Schall} t), \quad (4)$$

die sich in alle Raumrichtungen gleich ausbreitet. Die Intensität ist dabei proportional zum Quadrat der Feldgröße.

Bei Reflexion an einer Wand kann es zur Ausbildung von stehenden Wellen kommen, bei denen die örtliche und die zeitliche Komponenten entkoppelt sind.

$$p(x, t) = 2p_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \quad \text{mit Reflexion bei } x = 0 \quad (5)$$

In Abständen einer halben Wellenlänge bilden sich Knoten, an denen die Amplitude zu allen Zeiten null ist.

Trifft eine ebene Welle auf einen Einzelspalt, so ergibt sich in großem Abstand dahinter (Frauenhofer Näherung) ein Interferenzmuster mit einem Hauptmaximum und mehreren Nebenminima und Maxima, wobei für die Minima gilt $\sin(\alpha) = n\lambda/b$, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$, α der Winkel zur Einfallrichtung ist, und b der Spaltbreite.

Bei einem Doppelspalt zeigt das Interferenzmuster Maxima bei $\sin(\alpha) = m\lambda/d$, mit $m = 1, 2, 3, \dots$ und Spaltabstand d und Minima bei $\sin(\alpha) = (m - 1/2)\lambda/d$. Allgemein gilt für das Intensitätsmuster eines N-fach Spaltes:

$$I(\alpha) = I_0 \left(\frac{\sin(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha)}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha)}{\sin(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha)} \right)^2 \quad (6)$$

2 Abstandsmessung

2.1 Versuchsaufbau

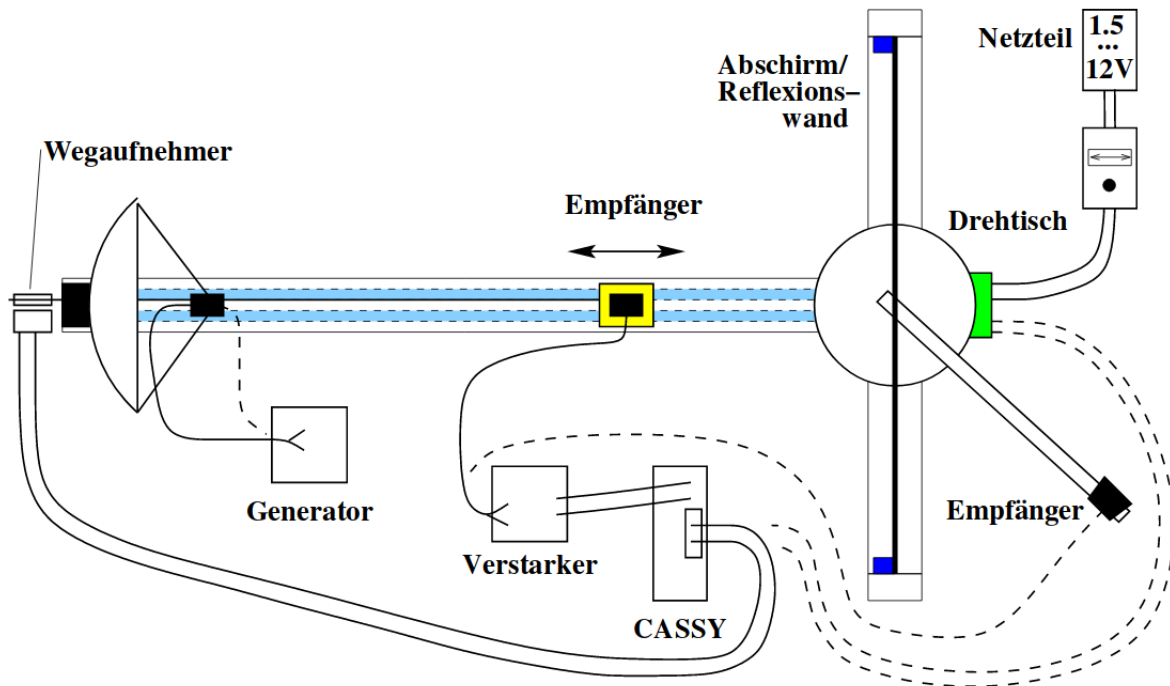


Abbildung 1: Versuchsaufbau (Quelle: Versuchshandbuch)

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 1 dargestellt (bei diesem Teilversuch ohne Parabolspiegel). Ein Piezoelement als Ultraschallsender ist fest auf einer Schiene montiert und mit einem Generator angeschlossen, der den Ultraschallwandler in Resonanzfrequenz anregt. Als Empfänger dient ebenfalls ein Piezoelement, das auf den Sender gerichtet ist und sich auf der Schiene frei verschieben lässt. Das Signal des Empfängers wird über einen Verstärker als Spannung an das Cassy-Gerät geleitet. Um die Position des Empfängers zu bestimmen, wird ein Faden von dem Empfängerstativ über das Drehpotentiometer des Wegaufnehmers geführt und mit einem kleinen Gewicht gespannt. Der Wegaufnehmer gibt die Position des Empfängers somit als Widerstand aus.

2.2 Vorversuch: Kalibrierung des Wegaufnehmers

Zunächst muss der Wegaufnehmer kalibriert werden. Die Längenschiebung S des Empfängers hängt linear von der Widerstandsmessung R des Wegaufnehmers ab. Zur Kalibrierung wird der Empfänger in Schritten von 5cm manuell verschoben, insgesamt 10 Mal, und jeweils der Widerstand aufgenommen. Das Ausmessen erfolgt per Maßband zwischen den Füßen der Piezoelemente.

Die Messwerterfassung des Widerstandes erfolgte im Bereich $0..3k\Omega$ und über 200ms gemittelt (wie auch im Hauptversuch).

Anschließend wurde eine lineare Regression mit den Daten durchgeführt, wobei die Datensätze zuerst auf ihren Mittelpunkt verschoben wurden, sodass die Ungenauigkeit auf den Kalibrationsfaktor minimal wird und der y-Achsenabschnitt null.

$$S - \bar{S} = K \cdot (R - \bar{R}) \quad (7)$$

Wir nehmen Fehler an von

$$\sigma_S = 0.3mm \quad (8)$$

$$\sigma_R = \frac{3k\Omega}{4096 \cdot \sqrt{12}} \quad (9)$$

weil wir die Stative auf ca 1/3mm genau verschieben konnten und wir für den Widerstand den Binningfehler durch die Digitalisierung annehmen. Wir erhalten den Kalibrierungsfaktor K als Steigung zu $K = 16.017 \pm 0.011 cm/k\Omega$. Das χ^2/n ergibt 1.93. Unter Berücksichtigung der geringen Anzahl an Messpunkten ist dieser Wert ein Hinweis darauf, dass sich die Kalibrierung gut durch die Gerade darstellen lässt. Der Residuenplot zeigt keine Auffälligkeiten.

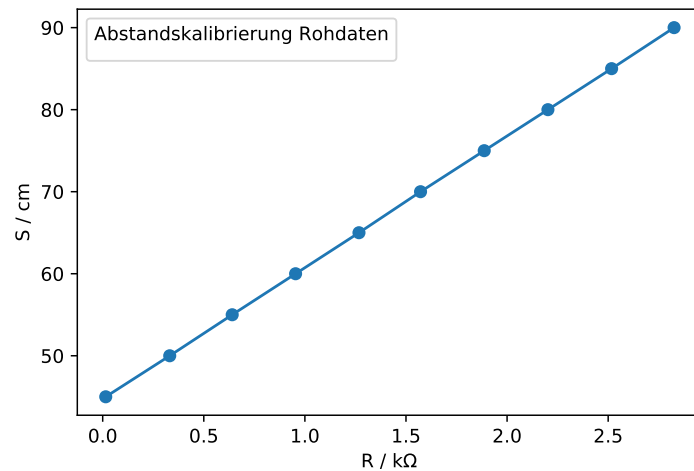


Abbildung 2: Abstand als Funktion der gemessenen Widerstände des Wegaufnehmers

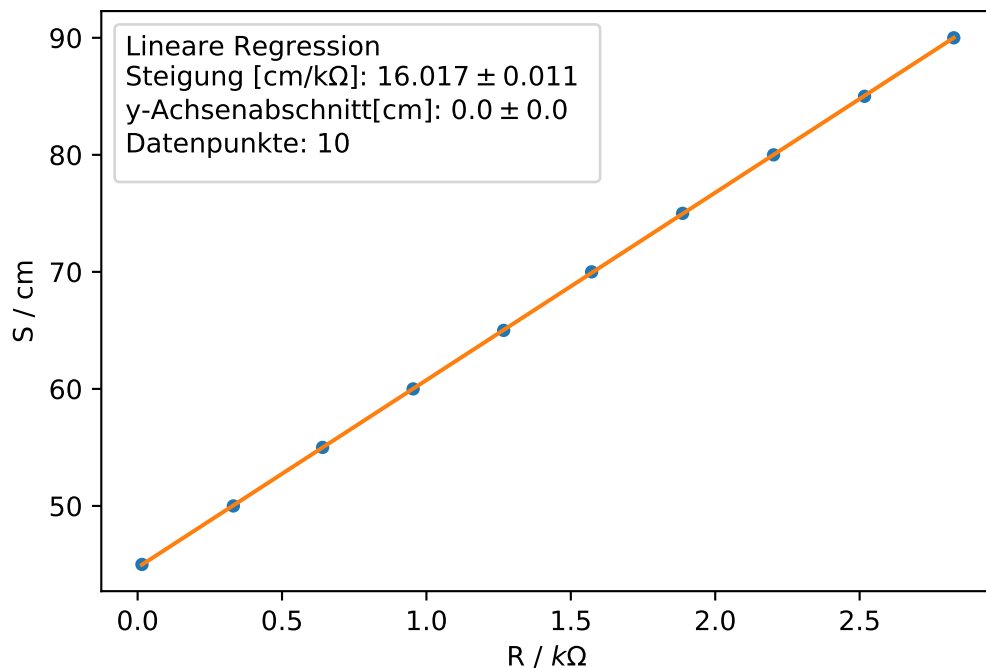


Abbildung 3: Lineare Regression der Kalibrierung des Wegaufnehmers

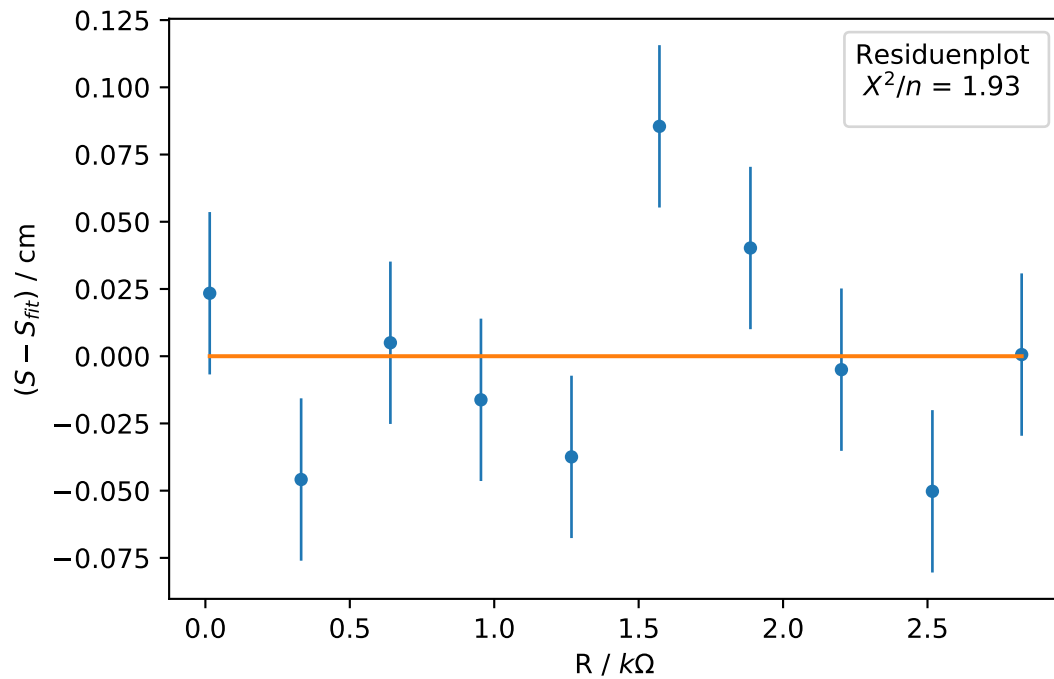


Abbildung 4: Residuenplot der Kalibrierung des Wegaufnehmers

2.3 Versuchsdurchführung

Der Sender sendet eine Kreiswelle aus, sodass die Intensität der Schallwelle quadratisch mit der Entfernung fällt. Der Verstärker quadriert das Signal des Empfängers, das wiederum proportional zum Schalldruck ist:

$$U \sim p^a \sim r^{-a} \quad (10)$$

mit Erwartung $a = 2$ und dem Zusammenhang $I \sim (U/U_0)^{\frac{2}{a}}$. In diesem Versuch wird a berechnet, indem die Spannung des Verstärkers gegen den Abstand zwischen Sender und Empfänger s gemessen wird. Dazu wird zuerst der Abstandsoffset zwischen den beiden Piezoelementen mithilfe des Maßbandes bestimmt. Anschließend schiebt man den Empfänger langsam von dem Sender und misst die dazukommende Entfernung mithilfe des Wegaufnehmers.

Die Messwerterfassung erfolgte folgendermaßen:

Messbereich Spannung	-1 V .. 1 V
Messbereich Widerstand Wegaufnehmer	0 kΩ .. 3 kΩ
Messwerterfassung Spannung	gemittelt über 200 ms
Messwerterfassung Widerstand Wegaufnehmer	gemittelt über 200 ms
Messwertaufnahme	automatisch, Intervalle von 200 ms
Anzahl Messreihen	3

2.4 Versuchsauswertung

Die Rohdaten wirken, als würden die Messwerte stark streuen. Bei genauerer Betrachtung erkennt man jedoch, dass sich stehende Wellen durch Reflexion an weiteren Gegenständen im Raum bilden, die zu einer wellenartigen Spannungsverteilung führen.

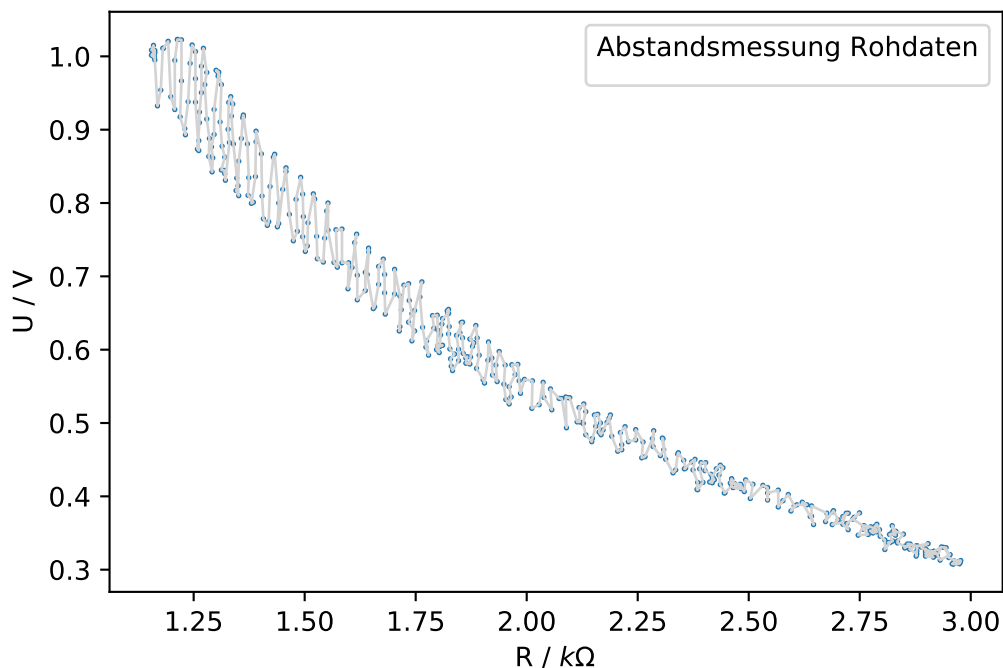


Abbildung 5: Rohdaten der Abstandsmessung

Wir messen einen Abstandsoffset von $S_0 = 25.3\text{cm}$ zwischen Sender und Empfänger bei einem Widerstand des Wegaufnehmers von $1.160\text{k}\Omega$. Als Fehler auf S_0 nehmen wir 1mm an, weil sich die genaue Position des Piezoelementes im Bauteil nicht genau bestimmen ließ. Wir berechnen den Abstand s über

$$s = K(R - R_0) + S_0 \quad (11)$$

Als statistischen Fehler auf R und R_0 nehmen wir erneut den Digitalisierungsfehler von $\sigma_R = 3/4096/\sqrt{12}$ an, womit wir für den statistischen Fehler auf s erhalten:

$$\sigma_s(\text{stat}) = \sqrt{2}K\sigma_R \quad (12)$$

Wir tragen die Spannung doppellogarithmisch auf gegen den Abstand s und führen eine lineare Regression durch. Aus der Steigung erhalten wir den Faktor $-a$. Der Fehler auf K fließt als systematischer Fehler in den Teilversuch mit ein, wird jedoch bei der linearen Regression zunächst nicht berücksichtigt. Die Ungenauigkeit auf die Spannung wird wie beim Widerstand mit dem Digitalisierungsfehler des Cassygerätes angenommen und auf den Logarithmus fortgepflanzt:

$$\sigma_{\log(U/V)} = \frac{1V}{U \cdot 4096\sqrt{12}} \quad (13)$$

Die Fehlerfortpflanzung erfolgt analog für den Abstand. Die folgenden Graphen zeigen die Ergebnisse der linearen Regression.

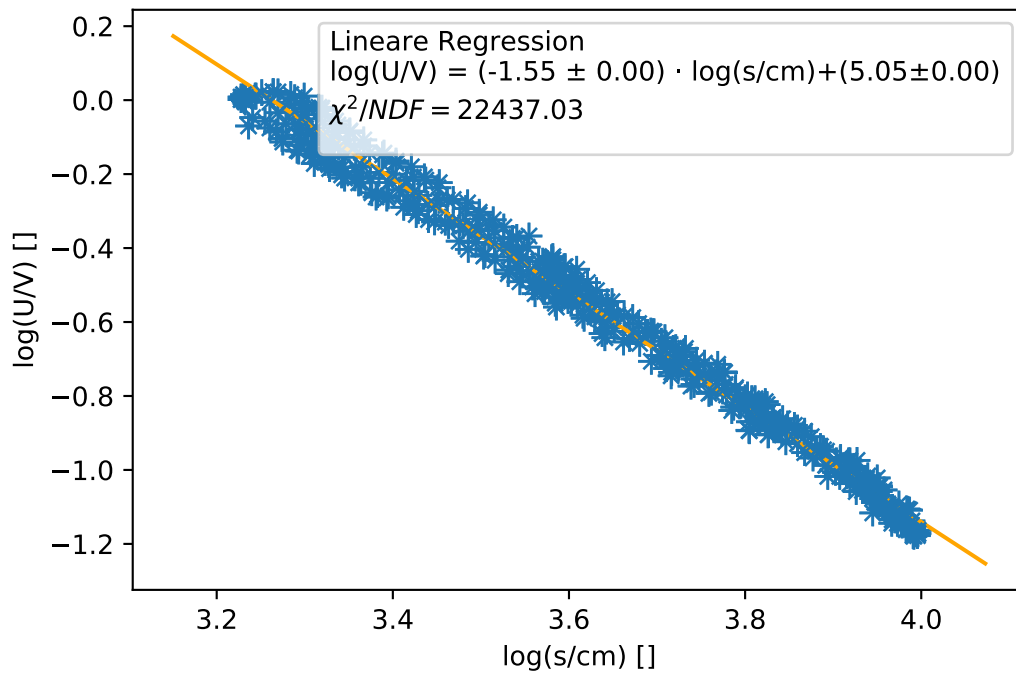


Abbildung 6: Lineare Regression der Abstandsmessung

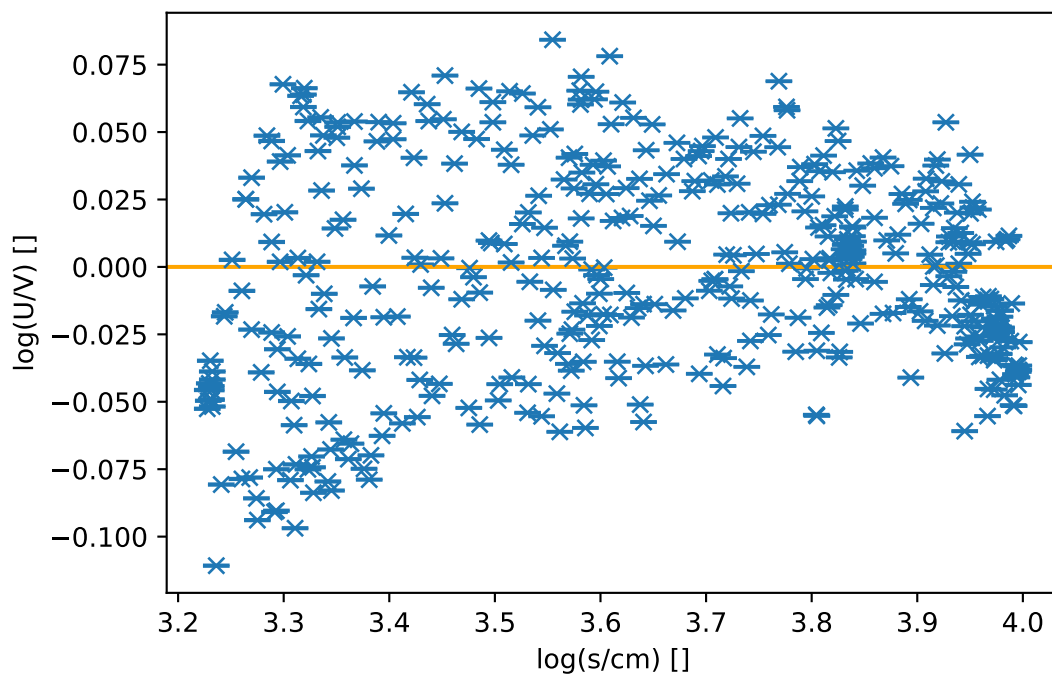


Abbildung 7: Residuenplot der Abstandsmessung

Das χ^2/n ist mit über 20000 sehr groß, was zu erwarten ist, da wir eine wellenartige Verteilung mit einer Geraden anpassen wollen. Die Graphen zeigen jedoch, dass die Gerade durchaus den durchschnittlichen Verlauf der Intensität wiedergibt. Wir erhalten einen Wert von $a = 1.55$, wobei der Fehler auf a aus der linearen Regression unbrauchbar ist. Um trotzdem eine sinnvolle Breite für a zu berechnen, werden zwei weitere Messreihen analog ausgewertet. Die Werte für a dieser Messreihen lauten $a = 1.60$ und $a = 1.53$. Wir berechnen den ungewichteten Mittelwert dieser drei Werte von a und die empirische

Standardabweichung als Maß für die Unsicherheit. Um den systematischen Fehler auf a zu erhalten, wird die gesamte Rechnung mit um σ_{S_0} und σ_K verschobenem s wiederholt, und die Differenz von a zum ursprünglichen a als systematischer Fehler angerechnet. Insgesamt erhält man so:

$$a = 1.561 \pm 0.038(stat) \pm 0.004(sys) \quad (14)$$

Der Wert weicht von der Erwartung $a = 2$ ab, weil die Piezoelemente womöglich keine idealen Kugelwellen aussenden und die Messung durch Reflexion an umliegenden Wänden gestört wird.

3 Stehende Wellen

3.1 Versuchsaufbau

Ziel dieses Versuchs ist die Bestimmung der Wellenlänge durch das Vermessen von stehenden Wellen, die durch Reflexion von ebenen Wellen an einer Wand entstehen. Zur Erzeugung der ebenen Wellen wird ein Parabolspiegel an die Schiene gebaut und der Sender im Brennpunkt und auf den Spiegel zeigend positioniert. Am Schienenende wird eine Wand montiert und der verschiebbare Empfänger Richtung Wand ausgerichtet. Wie im vorherigen Versuch lässt sich die Position des Empfängers mit dem Wegaufnehmer bestimmen.

3.2 Versuchsdurchführung

Der Empfänger wird auf der Schiene langsam verschoben und die Spannung des Verstärkers als Funktion des Widerstandes am Wegaufnehmer gemessen. Die genaue Entfernung zur Wand wird bei dem Versuch nicht benötigt, sodass kein Abstandsoffset in die Berechnung mit einfließt. Die Messwerterfassung erfolgt identisch zum vorherigen Versuch und es werden wieder drei Messreihen durchgeführt.

3.3 Versuchsauswertung

Die Spannung wird gegen den Widerstand graphisch aufgetragen und es ist klar erkennbar, dass sich stehende Wellen mit Bäuchen (Maxima) und Knoten (Minima) in gleichen Abständen ausbilden. Wir wählen für jede Messung einen möglichst großen Bereich zwischen zwei Knoten und zählen die Knoten N in diesem Intervall, wobei wir den ersten nicht mitzählen.

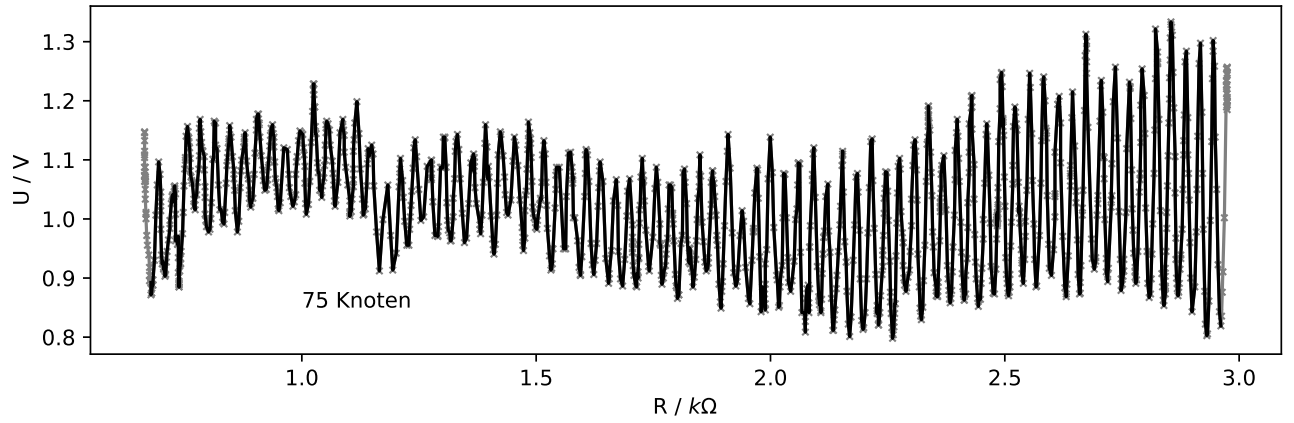


Abbildung 8: Stehende Welle: Messung 1. Der dunkelunterlegte Bereich enthält 75 halbe Wellenlängen. (Der erste Knoten wird bei der Zählung nicht mitgezählt.)

Die Wellenlänge λ erhalten wir durch

$$\lambda = K \Delta R \frac{2}{N} \quad (15)$$

$\Delta R = R_N - R_0$ ist die Widerstandsdifferenz zwischen dem letztem und dem 0. Knoten. Auf die genaue Position der Knoten nehmen wir eine Ungenauigkeit von $\sigma_R = 0.003 k\Omega$ an, da es pro Knotenpunkt nur wenige Messwerte gibt und sich bei Betrachtung der einzelnen Widerstandswerte der Knotenpunkt ca. auf diese Größenordnung genau bestimmen ließ. Damit erhalten wir einen statistischen Fehler von

$$\sigma_\lambda(stat) = \sqrt{2} K \frac{2}{N} \sigma_R. \quad (16)$$

Der Fehler auf K führt zu einem systematischen Fehler in der Wellenlänge.

$$\sigma_\lambda(sys) = \Delta R \frac{2}{N} \sigma_K. \quad (17)$$

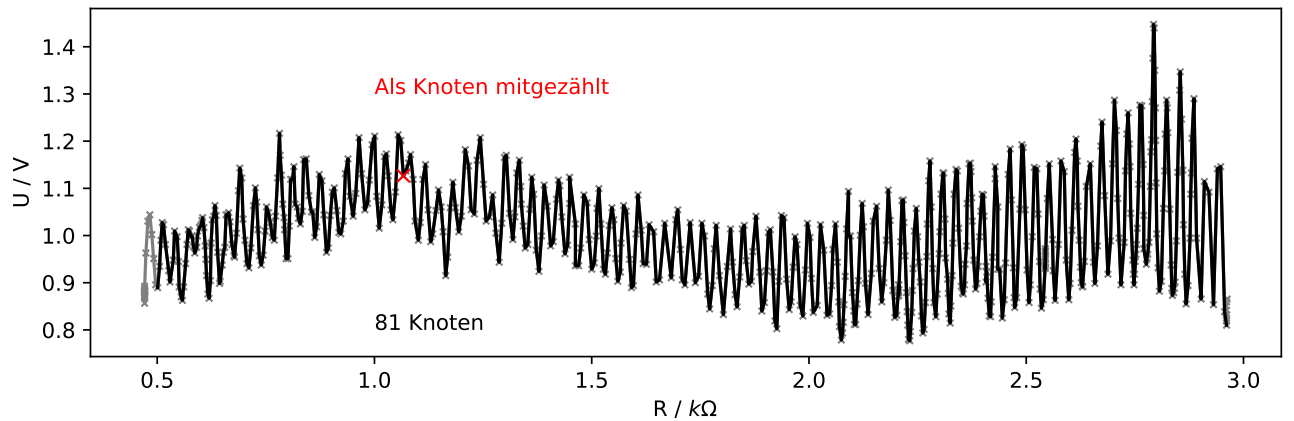


Abbildung 9: Stehende Welle: Messung 2.

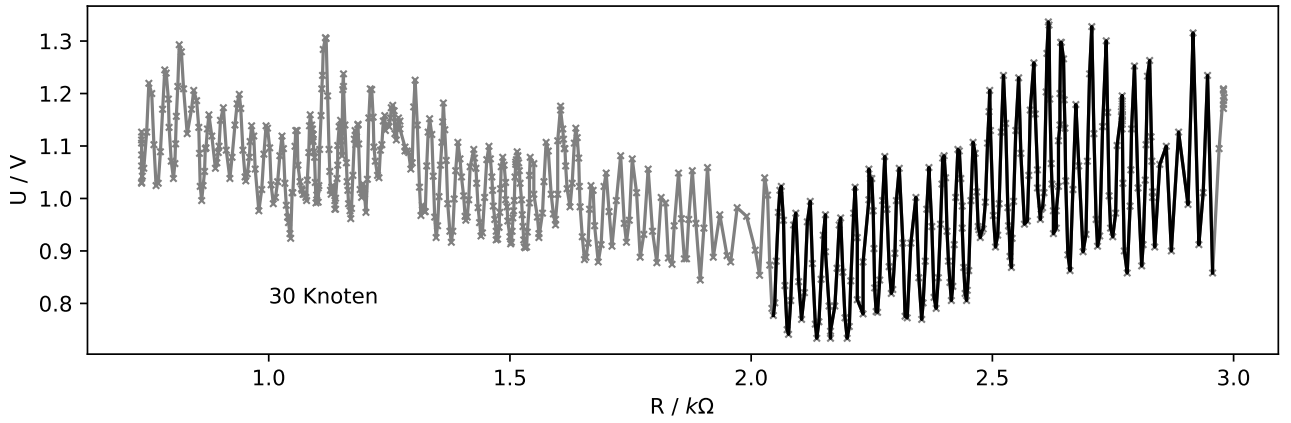


Abbildung 10: Stehende Welle: Messung 3, erste Zählung

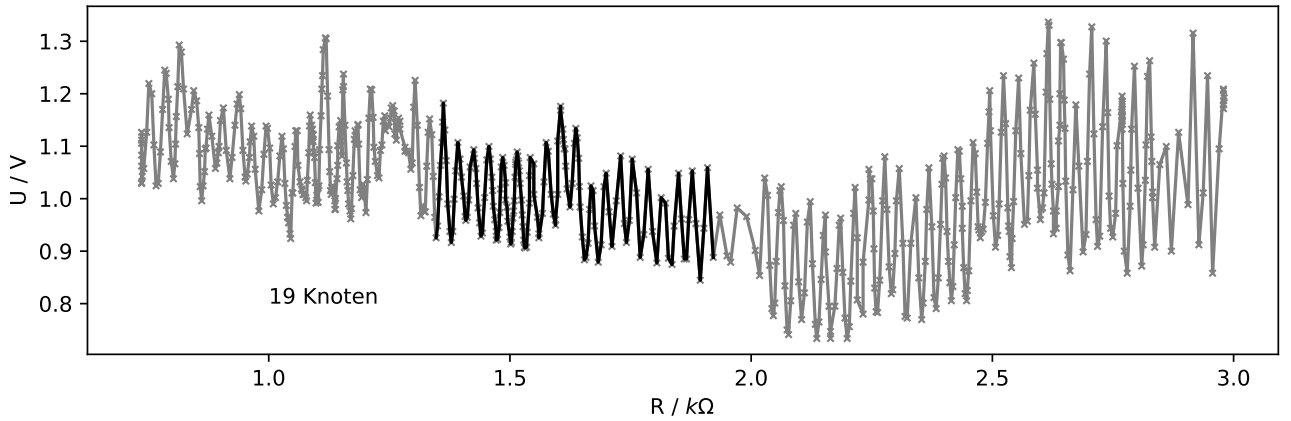


Abbildung 11: Stehende Welle: Messung 3, zweite Zählung

Bei der dritten Messung gibt es mehrere Bereiche, in denen nicht erkennbar ist, ob dort ein Knotenpunkt entsteht. Teilweise liegt das daran, dass der Empfänger zu schnell bewegt wurde. Wir entscheiden uns, zwei Bereiche getrennt auszuwerten, in denen die Anzahl an Knotenpunkten eindeutig gezählt werden kann. Insgesamt erhalten wir so vier Berechnungen der Wellenlänge, die in folgender Tabelle zusammengefasst sind.

	$\lambda[\text{cm}]$	$\sigma_{\lambda}(\text{stat})[\text{cm}]$	$\sigma_{\lambda}(\text{sys})[\text{cm}]$
Messung 1	0.9751	0.0018	0.0006
Messung 2	0.9729	0.0017	0.0006
Messung 3	0.9722	0.0045	0.0006
Messung 4	0.9686	0.0072	0.0006

Da die Messungen innerhalb ihrer statistischen Fehler übereinstimmen, berechnen wir das gewichtete Mittel und erhalten:

$$\lambda = 0.9736 \pm 0.0012(\text{stat}) \pm 0.0006(\text{sys}) \text{ cm} \quad (18)$$

4 Beugung am Einzelspalt und Doppelspalt

4.1 Versuchsaufbau

Ziel dieses Versuchs ist es die Intensitätsverteilung hinter einem Einzel- oder Doppelspalt in Abhängigkeit des Winkels ϕ zur Einfallsrichtung zu bestimmen. Der Aufbau des Senders mit dem Parabolspiegel zur Erzeugung ebener Wellen aus dem vorherigen Versuch bleibt bestehen. Der Empfänger dagegen wird dagegen an einem schwenkbaren Dreharm hinter der Reflexionswand befestigt (Der Aufbau entspricht den gestrichelten Linien von Abb. 1). In die Reflexionswand lassen sich mithilfe von verschiebbaren Metallplatten Einzelspalten und Doppelspalten unterschiedlicher Breite einbauen. Der Drehtisch, an dem der Dreharm befestigt ist, lässt sich mit einem Motor drehen und ist mit einem Drehpotentiometer verbunden, der somit als Winkelaufnehmer wirkt.

4.2 Vorversuch: Kalibrierung des Winkelaufnehmer

Zunächst muss in einem Vorversuch der Winkelaufnehmer kalibriert werden. Der Winkel ϕ hängt linear von der Widerstandsmessung R des Winkelaufnehmers ab. Zur Kalibrierung wird der Dreharm in Schritten von 10° von -80° bis 80° manuell gedreht und jeweils der Widerstand aufgenommen. Die Winkel werden an dem Drehtisch abgelesen. Die Messwertfassung des Widerstandes erfolgte im Bereich $0..10k\Omega$ und über 200ms gemittelt. Analog zur Kalibration des Wegaufnehmers erwartet man einen linearen Zusammenhang zwischen dem gemessenen Widerstandswert R und dem Drehwinkel ϕ , sodass man wieder eine lineare Regression der Art

$$R - \bar{R} = K \cdot (\phi - \bar{\phi}) \quad (19)$$

durchführen kann. Als Fehler wurden hier folgende Werte genommen:

$$\begin{aligned} \sigma_R &= 0.005 \text{ k}\Omega \\ \sigma_\phi &= 0.5^\circ \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der Regression sind in der Abb. 12 dargestellt:

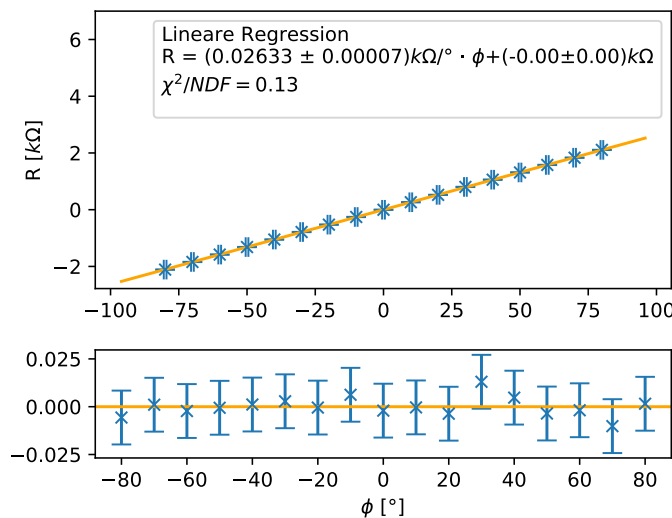


Abbildung 12: Lineare Regression des Winkelaufnehmers

Als Ergebnis der Regression erhält man einen K -Wert von $(0.02633 \pm 0.00007)k\Omega/^\circ$. Dieses Ergebnis wurde auf ϕ umgestellt (man misst den Widerstand R), sodass es einen Umrechnungsfaktor von $K^{-1} = (37.9795 \pm 0.1006)^\circ/k\Omega$ ergibt.

4.3 Versuchsdurchführung

Zuerst werden die Metallplatten mithilfe eines Maßbandes auf die zu untersuchende Spaltbreite eingestellt. Als nächstes wird der Empfänger auf $\pm 80^\circ$ geschoben und (beim Einzelspalt der Breite $d=3\text{cm}$ und beim Doppelspalt) der Motor des Drehtisches gestartet, sodass der Empfänger langsam um den Drehtisch schwenkt. Im Falle des Einzelspalts der Breite $d=4\text{cm}$ wurden die Werte per Hand aufgenommen. Die Messung wird wiederholt, indem auch der Rückweg aufgezeichnet wird.

Die Messwerterfassung erfolgte folgendermaßen:

Messbereich Spannung (Dop.-Spalt, Einzelspalt 4cm)	-1 V .. 1 V
Messbereich Spannung (Einzelspalt 3cm bzw. 4cm)	-0.3 V .. 0.3 V
Messbereich Widerstand Winkelaufnehmer	0 k Ω .. 10 k Ω
Messwerterfassung Spannung	gemittelt über 200 ms
Messwerterfassung Widerstand Wegaufnehmer	gemittelt über 200 ms
Messwertaufnahme	automatisch, Intervalle von 200 ms

4.4 Versuchsauswertung

Unser Ziel ist es, die Spannung des Verstärkers gegen den Widerstand des Winkelaufnehmers aufzuzeichnen, und die Ergebnisse mit der theoretischen Erwartung zu vergleichen. Dafür werden die gemessenen Spannungswerte über die Proportionalität $I \propto U_a^2$ umgerechnet und die Lagen der Maxima der so erhaltenen Intensitätsverteilung bestimmt. Mit den so gewonnenen Informationen können wir auch die Wellenlänge λ des Ultraschalls über die folgenden Beziehungen berechnen:

$$\lambda = \frac{\pi}{4.49341^1} b \cdot \sin(\phi), \quad \text{für einen Einzelspalt der Breite } b \quad (20)$$

$$\lambda = d \cdot \sin(\phi), \quad \text{für einen Doppelspalt mit Spaltabstand } d \quad (21)$$

Die Rohdaten (mit den umgerechneten Widerstandswerten) zweier Beispielmessungen sind in der Abb. 13 dargestellt. Man erkennt sofort, dass die Peaks unscharf erscheinen, sodass die Unsicherheiten auf die Maxima unvermeidlich groß wird. Außerdem sieht man auch, dass die Verteilung gegen die Nullage verschoben ist, sodass sie zuerst zentriert werden soll, um sie mit der theoretischen Vorhersage zu vergleichen.

¹der Faktor 4.49341 kommt durch $((\sin(x)/x)^2)' = 0 \Rightarrow x = \tan(x)$ zustande (für die Maxima erster Ordnung)

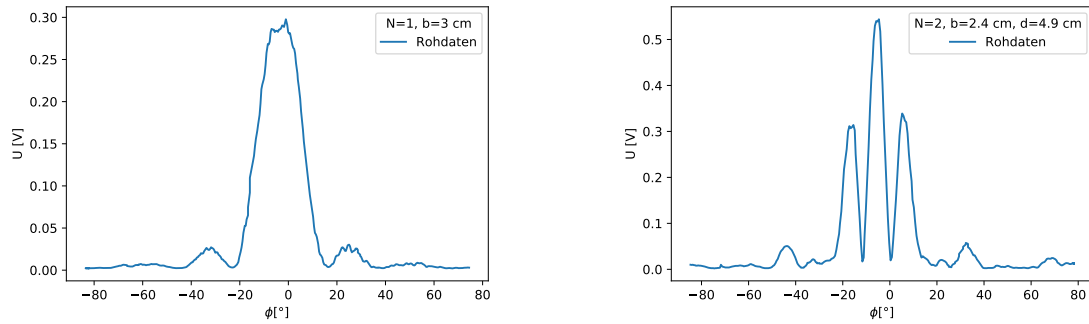


Abbildung 13: Rohdaten der Spannungsmessung

Aus diesen (insgesamt 11) Graphen wurden zuerst die Lagen ϕ_1, ϕ_2 der Maxima erster Ordnung mittels der Python-Bibliothek `scipy` bestimmt. Um die Graphen zu zentrieren, wurden alle Daten mit $(\phi_1 + \phi_2)/2$ verschoben, sodass diese Maxima symmetrisch um den Nullpunkt liegen. Die Plots der gleichen verschobenen Rohdaten sind in Abb. 14 dargestellt.

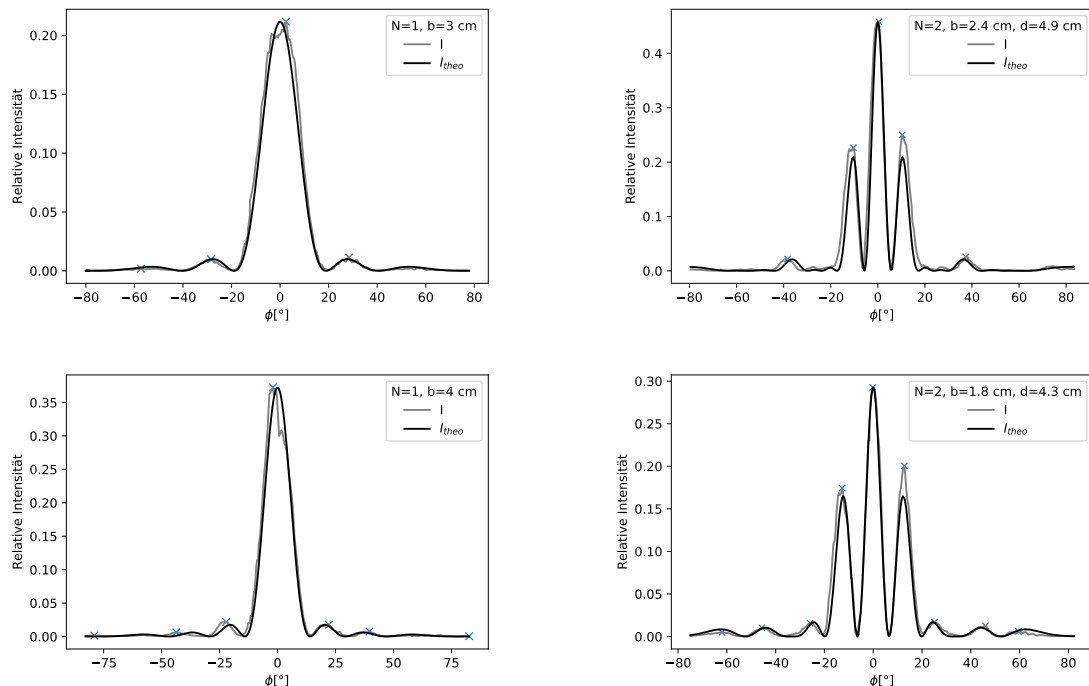


Abbildung 14: Rohdaten der Spannungsmessung

Durch Zusammenfassen der einzelnen Messungen erhält man in der folgenden Tabelle dargestellten Werte.

Messkonfiguration	Gemessener Wert	Theoretischer Wert
Einzelspalt $d=3\text{cm}$	$(28,4 \pm 0,95)^\circ$	$27,69^\circ$
Einzelspalt $d=4\text{cm}$	$(21,245 \pm 0,95)^\circ$	$20,4^\circ$
Doppelspalt $d=4,9\text{cm}, b=2,4\text{cm}$	$(10,455 \pm 1,34)^\circ$	$11,47^\circ$
Doppelspalt $d=4,3\text{cm}, b=1,8\text{cm}$	$(12,74 \pm 1,9)^\circ$	$13,1^\circ$

Tabelle 1: Zusammenfassung der gemessenen Maxima

Man erkennt, dass alle der gemessenen Werte im 1σ -Bereich der theoretischen Vorhersage liegen. Allerdings gibt es Abweichungen in der Intensität, die unter Anderem auf Störeffekte (Reflexion an herumliegenden Gegenständen) zurückführen lassen, was durch eine Rauschmessung hätte korrigiert werden können.

Aus der Lage der zuvor erwähnten Maxima kann man damit mithilfe der Gl. 21 und der Gl. 20 die Wellenlänge λ bestimmen. Der Fehler σ_λ wurde dafür mittels Fehlerfortpflanzung bestimmt (wobei $\sigma_d = \sigma_b = 1mm/\sqrt{12}$)

$$\sigma_{\lambda 1}^2 = \left(\frac{\pi}{4.49341} \right)^2 \cdot [(\sin(\phi)\sigma_b)^2 + (b \cos(\phi)\sigma_\phi)^2]$$

$$\sigma_{\lambda 2}^2 = [(\sin(\phi)\sigma_d)^2 + (d \cos(\phi)\sigma_\phi)^2] ,$$

sodass man durch Kombination aller Messungen erhält

$$\lambda = (0.9961 \pm 0.0171)cm. \quad (22)$$

Dieser Wert liegt im $1,3\sigma$ -Bereich des im Abschnitt 3.3 erhaltenen Werts. Dieses Ergebnis lässt sich aber auch verbessern, indem man die Extrema höherer Ordnungen mitbetrachtet, sofern in der Messung sichtbar.