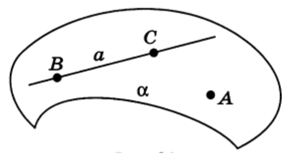
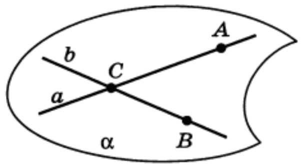
Аксиома 1:
В пространстве существуют плоскости. В каждой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.
Аксиома 2(аксиома плоскости):
Через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.
Аксиома 3:
Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.
Аксиома 4(аксиома прямой и плоскости):
Если прямая проходит через две точки плоскости, то она лежит в этой плоскости.
Аксиома 5(аксиома пересечения плоскостей):
Если две плоскости имеют общую точку, то пересечение этих плоскостей есть их общая прямая.
Аксиома 6(аксиома разбиения пространства плоскостью):
Любая плоскость α разбивает множество не принадлежащих ей точек пространства на два непустых множества так, что: а) любые две точки, принадлежащие разным множествам, разделены плоскостью α; б) любые две точки, принадлежащие одному и тому же множеству, не разделены плоскостью α.
Аксиома 7(аксиома расстояния):
Расстояние между любыми двумя точками пространства одно и то же на любой плоскости, проходящей через эти точки.
Теорема 1(теорема о плоскости, порожденной прямой и не лежащей на ней точкой):
Через любую прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.
Пусть даны прямая a и не принадлежащая ей точка A. Выберем на прямой a любые точки B и C. Через точки B и C проходит только одна прямая - прямая a. Так как точка A по условию теоремы не принадлежит прямой a, то точки A, B и C не принадлежат одной прямой. По аксиоме плоскости через точки A, B и C проходит только одна плоскость - плоскость ABC, которую обозначим α. Прямая a имеет с ней две общие точки - точки B и C, следовательно, по аксиоме прямой и плоскости эта прямая лежит в плоскости α. Таким образом, плоскость α проходит через прямую a и точку A и является искомой. Докажем, что другой плоскости, проходящей через прямую a и точку $A \notin a$, не существует. Предположим, что есть другая плоскость - α1, проходящая через точку A и прямую a. Тогда плоскости α и α1 проходят через точки A, B и C не принадлежащие одной прямой, а значит, совпадают. Следовательно, плоскость α единственна. ▌

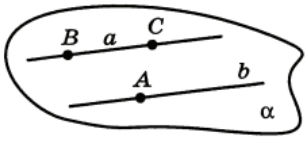


Теорема 2(теорема о плоскости, порожденной двумя пересекающимися прямыми):
Через любые две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.
Пусть данные прямые a и b пересекаются в точке C. Выберем на прямых a и b любые точки A и B, отличные от C: $A \in a$, $B \in b$. Тогда три точки A, B и C не принадлежат одной прямой, и по аксиоме плоскости через них можно провести только одну плоскость. Обозначим её α. Точки A и C прямой a принадлежит плоскости α, значит плоскость α проходит через прямую a. Плоскость α проходит и через прямую b, так как точки B и C этой прямой принадлежат плоскости α. Таким образом, плоскость α проходит и через прямые a и b, следовательно является искомой. Докажем единственность плоскости α.

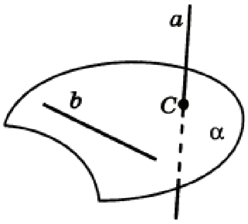
Допустим, что есть другая, отличная от плоскости α и проходящая через прямые a и b, плоскость β. Так как плоскость β проходит через прямую a и не принадлежащую ей точку B, то по теореме о плоскости, порожденной прямой и не лежащей на ней точкой она совпадает с плоскостью α. ❚



Теорема 3(теорема о плоскости, порожденной двумя параллельными прямыми):
Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.
Пусть a и b - данные параллельные прямые. Из определения параллельных прямых следует, что через прямые a и b можно провести плоскость. Обозначим её α и убедимся, что она единственна. Допустим противное. Пусть существует другая плоскость, отличная от α, которая содержит каждую из прямых a и b. Обозначим эту плоскость β. Выберем на прямой a точки B и C, на прямой b - точку A. В силу параллельности прямых a и b точки A, B и C не принадлежат одной прямой. Каждая из плоскостей α и β содержит обе прямые a и b, значит, каждая из них проходит через точки A, B и C. Но по аксиоме плоскости, через эти точки можно провести лишь одну плоскость. Следовательно, плоскости α и β совпадают. ❚

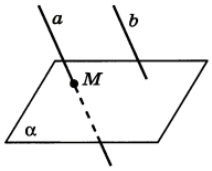


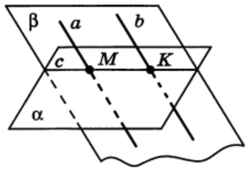
Теорема 4(признак скрещивающихся прямых):
Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.
Пусть a и b - данные прямые. Прямая b лежит в плоскости α. Прямая a пересекает плоскость α в точке C, не лежащей на b. Предположим, что прямые a и b не скрещиваются. Тогда они или параллельны, или пересекаются, и, следовательно, лежат в некоторой одной плоскости β. Плоскость β содержит прямую b и точку C. Но через прямую b и точку C проходит также плоскость α. По теореме 1 плоскости α и β совпадают. Это означает, что прямая a должна лежать в плоскости α. По условию эта же прямая a пересекает плоскость α. Противоречие, значит прямые a и b не лежат в одной плоскости, то есть скрещиваются.❚



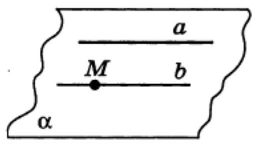
Теорема 5(теорема о плоскости и параллельных прямых):
Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.
Пусть a и b - данные параллельные прямые. Прямая a пересекает плоскость α в точке M. Пусть через параллельные прямые a и b проходит плоскость β. Плоскости α и β имеют общую точку M, значит, они пересекаются по прямой, которая проходит через M. Обозначим эту прямую c. Из планиметрии известно, что если одна из двух параллельных прямых пересекает данную прямую, то и другая прямая пересекает данную прямую. У нас в плоскости β лежат три прямые: a, b и c. Причем a || b и прямая a пересекается с

прямой c. Значит, что прямые b и c также пересекаются в некоторой точке K. А так как прямая c лежит в плоскости α, то точка K принадлежит плоскости K. Следовательно, прямая b пересекает плоскость α в точке K. ▌

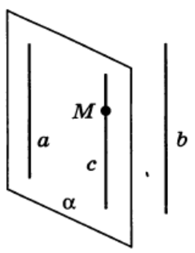




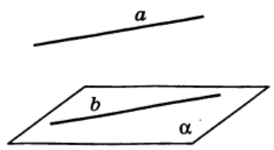
Теорема 6(теорема о прямой, проходящей через данную точку и параллельную данной прямой):
Через точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.
□*Пусть даны прямая a и не принадлежащая ей точка M. Проведем через них плоскость α. В этой плоскости через точку M можно провести единственную прямую, параллельную прямой a. Обозначим эту прямую b и покажем, что в пространстве не существует другой прямой, проходящей через точку M и параллельной прямой a. Предположим, что через точку M можно провести некоторую другую прямую c, параллельную прямой a. Прямая c не лежит в плоскости α, а пересекает ее в точке M. Тогда прямая a, будучи параллельной прямой c, по теореме по теореме о плоскости и параллельных прямых также должна пересекать плоскость α. Это противоречит тому, что a лежит в α. Значит, наше предположение было неверным. То есть прямая b - единственная.* ▌



Теорема 7(признак параллельности прямых):
Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
□*Пусть прямая a параллельна прямой b и прямая c параллельна прямой b. Требуется доказать, что прямая a параллельна b. Случай, когда прямые a, b и c лежат в одной плоскости, был рассмотрен в планиметрии. Рассмотрим случай, когда эти прямые не лежат в одной плоскости. Проведём плоскость α через прямую a и любую точку M прямой c. Так как прямая a лежит в плоскости α и параллельна прямой b, то прямая b не может пересекать плоскость α. Следовательно, плоскость α не может пересекать и прямая c, параллельна прямой b. Получили: прямая c имеет с плоскостью α общую точку M и не пересекает эту плоскость. Это означает, что прямая c лежит в плоскости α. Таким образом, прямые a и c лежат в одной плоскости α. Они не могут пересекаться по теореме 6. Следовательно, прямые a и c параллельны.* ▌



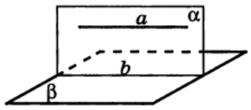
Теорема 9(признак параллельности прямой и плоскости):
Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны.
□*Пусть прямая b лежит в плоскости α, прямая a, не лежащая в плоскости α, параллельна b. Так как прямая b лежит в плоскости α, то прямая a, параллельная прямой b, не может пересекать плоскость α, а так как прямая a по условию не лежат в плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α.*▌



Теорема 10(теорема о линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой):

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.

Пусть прямая a параллельна плоскости β. прямая лежит в плоскости α. Плоскости α и β пересекаются по прямой b. Прямые a и b лежат в одной плоскости α. Кроме того, прямая a не имеет общих точек с прямой b, так как прямая a по условию параллельна плоскости β, в которой лежит прямая b. Таким образом прямая a параллельна прямой b. ▌



Теорема 11. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то прямая их пересечения параллельна каждой из данных прямых.

Дано: $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 52).

Доказать: $c \parallel a$, $c \parallel b$.

Доказательство. Докажем, что прямая c параллельна прямой a.

По условию теоремы прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости β, а значит (по признаку параллельности прямой и плоскости), прямая a параллельна и самой плоскости β. Кроме того, плоскость α проходит через прямую a и пересекает плоскость β по прямой c. По теореме 10 прямые a и c параллельны. Тогда на основании свойства транзитивности параллельности прямых прямая b параллельна прямой c. Теорема доказана. ▼

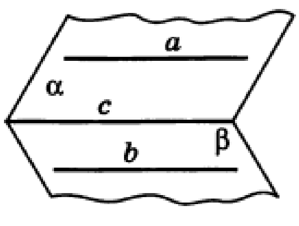


Рис. 52

Теорема 12. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

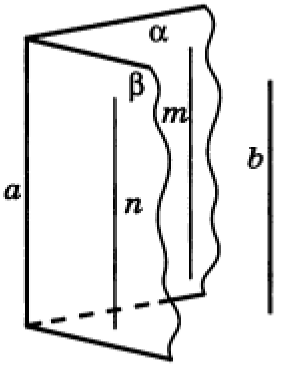


Рис. 53

Дано: $\alpha \cap \beta = a$, $b \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$ (рис. 53).

Доказать: $b \parallel a$.

Доказательство. По следствию из теоремы 10 в плоскостях α и β существуют соответственно прямые m и n, параллельные прямой b, а следовательно, параллельные между собой. Тогда по теореме 11 прямые m и n параллельны прямой a пересечения плоскостей α и β. На основании транзитивности параллельности прямых прямая b параллельна прямой a. Теорема доказана. ▼

Теорема 18 *(признак параллельности плоскостей).* **Если каждая из двух пересекающихся прямых одной плоскости параллельна другой плоскости, то данные плоскости параллельны.**

Дано: $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = M$; $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$ (рис. 82).

Доказать: $\alpha \parallel \beta$.

Доказательство. Рассуждаем методом от противного. Предположим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c (см. рис. 82).

В плоскости α расположены прямая c и данные пересекающиеся прямые a и b. Так как из двух пересекающихся прямых не более, чем одна может быть параллельна данной прямой, то прямая c пересекает, по крайней мере, одну из прямых a и b. Пусть c пересекает прямую a в некоторой точке K: $a \cap c = K$.

Имеем: прямая c, следовательно, и точка K лежат в плоскости β. Значит, прямая a пересекает плоскость β. Это противоречит условию теоремы ($a \parallel \beta$).

Также к противоречию с условием теоремы придем, если допустим, что пересекаются прямые c и b или прямая c пересекает обе прямые a и b.

Таким образом, предположив, что плоскости α и β не параллельны, мы пришли к противоречию. Это означает, что предположение неверно. Следовательно, $\alpha \parallel \beta$. Теорема доказана. ▼

Теорема 19. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство. Пусть прямые a и b плоскости α пересекаются в точке M, прямые a_1 и b_1 плоскости β параллельны соответственно прямым a и b (рис. 83). Тогда по признаку параллельности прямой и плоскости имеем:

$$a \parallel a_1,\ a_1 \subset \beta \Rightarrow a \parallel \beta;$$

$$b \parallel b_1,\ b_1 \subset \beta \Rightarrow b \parallel \beta.$$

Таким образом, пересекающиеся прямые a и b в плоскости α параллельны плоскости β. По предыдущей теореме плоскости α и β параллельны. Теорема доказана. ▼

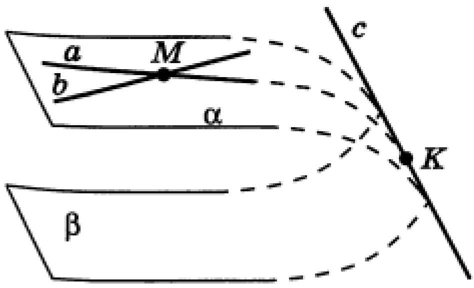


Рис. 82

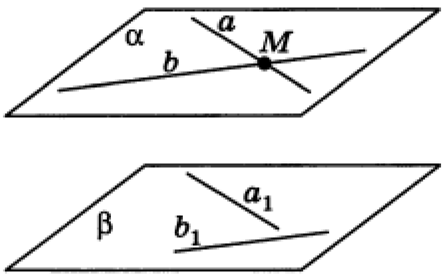


Рис. 83

Теорема 20. Прямые, по которым две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, параллельны.

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$ (рис. 84).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство. Прямые a и b лежат в одной плоскости γ. Эти прямые не имеют общей точки, так как плоскости α и β параллельны. Следовательно, прямые a и b параллельны по определению. Теорема доказана. ▼

Теорема 21. Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \cap \alpha = A$ (рис. 85).

Доказать: a пересекает β.

Доказательство. Выберем в плоскости β любую точку C. Через эту точку и прямую a проведем плоскость γ.

Так как плоскость γ имеет с плоскостями α и β общие точки A и C соответственно, то она пересекает эти плоскости по некоторым прямым b и c, которые проходят соответственно че-

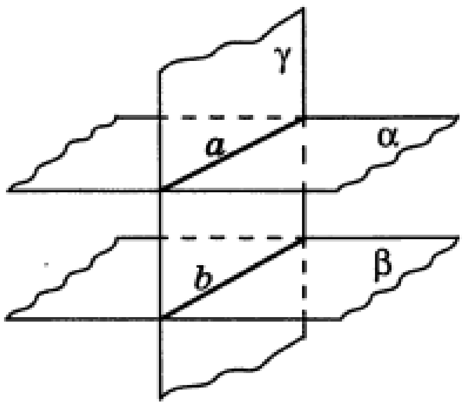


Рис. 84

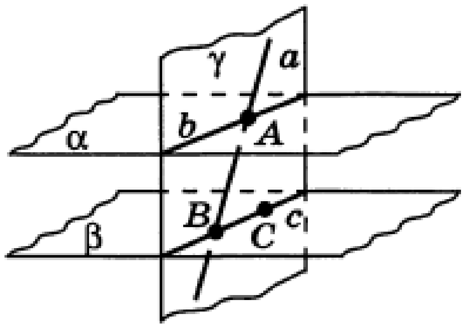


Рис. 85

рез точки A и C. По предыдущей теореме прямые b и c параллельны. Тогда в плоскости γ прямая a пересекает (в точке A) прямую b, которая параллельна прямой c. Значит, прямая a пересекает и прямую c в некоторой точке B. Так как прямая c лежит в плоскости β, то точка B является точкой пересечения прямой a и плоскости β. Теорема доказана. ▼

> **Теорема 22. Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.**

Дано: $\alpha \parallel \beta$, α и γ пересекаются (рис. 86).

Доказать: β и γ пересекаются.

Доказательство. Проведем в плоскости γ прямую a, пересекающую плоскость α в некоторой точке B. Тогда по теореме 21 прямая a пересекает и плоскость β в некоторой точке A. Следовательно, плоскости β и γ имеют общую точку A, т. е. пересекаются. Теорема доказана. ▼

Вернемся к вопросу о существовании параллельных плоскостей.

> **Теорема 23. Через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.**

Дано: α, M; $M \notin \alpha$ (рис. 87).

Доказать: существует единственная плоскость β такая, что $M \in \beta$, $\beta \parallel \alpha$.

Доказательство. В данной плоскости α проведем две произвольные пересекающиеся прямые a и b. Через точку M проведем прямые a_1 и b_1, параллельные соответственно a и b.

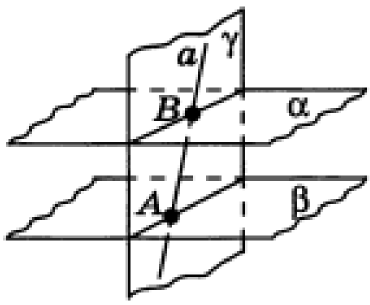


Рис. 86

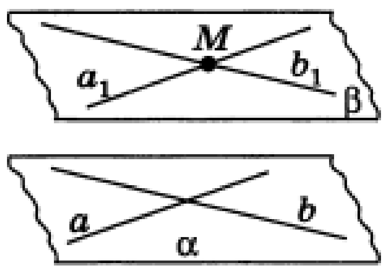


Рис. 87

Плоскость, проходящую через пересекающиеся прямые a_1 и b_1, обозначим β. На основании теоремы 19 плоскость β параллельна плоскости α.

Докажем методом от противного, что β — единственная плоскость, удовлетворяющая условию теоремы.

Допустим, что через точку M проходит другая плоскость, например β_1, параллельная α.

Так как β_1 пересекает плоскость β (они имеют общую точку M), то по теореме 22 плоскость β_1 пересекает и плоскость α ($\beta \parallel \alpha$). Мы пришли к противоречию. Таким образом, предположение о том, что через точку M можно провести плоскость, отличную от плоскости β и параллельную плоскости α, неверно. Значит, плоскость β — единственна. Теорема доказана. ▼

> **Теорема 24. Две плоскости, параллельные третьей, параллельны.**

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \parallel \beta$ (рис. 89).

Доказать: $\alpha \parallel \gamma$.

Доказательство. Допустим, что плоскости α и γ пересекаются по некоторой прямой c. Выберем на прямой c произвольную точку M. Через эту точку проходят две различные плоскости α и γ, каждая из которых параллельна плоскости β. Это противоречит теореме 23. Значит, предположение было неверно. Поэтому $\alpha \parallel \gamma$. Теорема доказана. ▼

> **Теорема 25. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.**

Дано: $\alpha \parallel \beta$; $a \parallel b$; $a \cap \alpha = A_1$, $a \cap \beta = B_1$;
$b \cap \alpha = A_2$, $b \cap \beta = B_2$ (рис. 90).

Доказать: $A_1B_1 = A_2B_2$.

Доказательство. Проведем через параллельные прямые a и b плоскость γ (т. 3). Она пересекает параллельные плоскости α и β по параллельным прямым A_1A_2 и B_1B_2 (т. 20). А так как $a \parallel b$, то четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ — параллелограмм. Поэтому $A_1B_1 = A_2B_2$ (как противоположные стороны этого параллелограмма). Теорема доказана. ▼

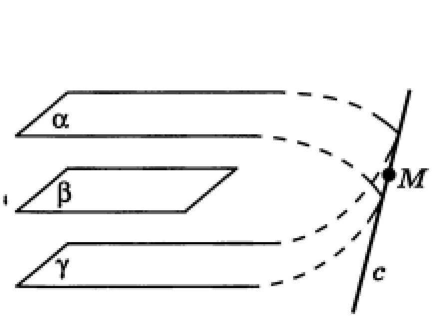


Рис. 89

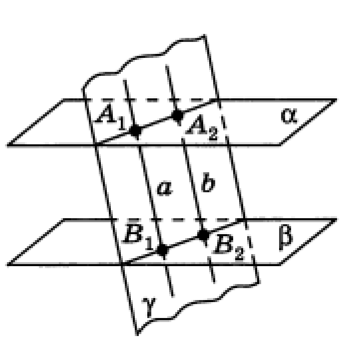


Рис. 90