



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior De Cómputo



Proyecto Final: Identificación de Componentes Armónicas en Señales Reales

Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería
Prof. David Correa
4CM3

Elaborado por:
Cabrera Archundia Rene Alejandro
Guerrero Camacho Frida
Núñez Ramírez Valery Aylin
Ramírez Piña Stephania Valeria

27 de junio 2025

Contents

Introducción	3
Objetivo	3
Descripción del problema	4
Fundamentación Matemática	5
Capturas del Sistema	8
Resultados	11
Conclusiones	17

Introducción

En este proyecto se trabajó con el análisis de señales reales haciendo uso práctico de las herramientas matemáticas vistas en clase, especialmente la Transformada de Fourier. La idea principal fue observar cómo se puede descomponer una señal de audio en sus frecuencias básicas, identificar las más importantes y reconstruir la señal usando solo algunas de ellas.

Para esto se desarrolló una aplicación web, usando lenguajes como HTML y JavaScript, que permite cargar un archivo de audio, o si se prefiere, grabar audio, visualizar su forma de onda y su espectro de frecuencia, y modificar los armónicos para ver cómo es que esta cambia la reconstrucción. Esto permitió aplicar de forma práctica los conceptos matemáticos, y entender mejor cómo se comportan las señales en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

Objetivo

Realizar un análisis exhaustivo de una señal real de audio para identificar y visualizar de manera clara sus componentes armónicas inherentes, aplicando de forma rigurosa los fundamentos teóricos y prácticos de las Transformadas de Fourier continua y discreta.

- Calcular el espectro de frecuencias de una señal real, como puede ser una señal de audio, utilizando la Transformada Discreta de Fourier.
- Desarrollar una interfaz gráfica de usuario sencilla y práctica que permita la visualización de la señal en el dominio del tiempo y de su correspondiente espectro de frecuencias.
- Identificar las componentes dominantes en el espectro de frecuencias de la señal analizada, interpretando su significado.
- Demostrar la aplicación práctica y la relevancia de los conceptos de la Transformada de Fourier continua y discreta en el campo del procesamiento y análisis de señales de ingeniería.

Descripción del problema

La comprensión de señales es fundamental para cualquier estudiante de ingeniería, especialmente a alguien dedicado en los campos de la electrónica, telecomunicaciones, control y procesamiento digital. Las señales del mundo real, como la voz humana, sonidos musicales o el ruido de una máquina son inherentemente complejas. Están compuestas por una gran variedad de frecuencias que interactúan en el tiempo, dando lugar a formas de onda que no pueden analizarse con facilidad mediante la simple observación visual en el dominio temporal.

En este contexto, surge la necesidad de descomponer dichas señales en sus componentes básicas: las frecuencias que las conforman. Esta descomposición permite extraer información valiosa sobre la estructura de la señal, identificar patrones, detectar anomalías y optimizar procesos como la compresión o el filtrado.

El objetivo principal de este proyecto es implementar una herramienta interactiva que permita al usuario analizar una señal real de audio mediante la Transformada de Fourier. Para ello, se diseñó un sistema que puede capturar audio en tiempo real desde un micrófono o bien cargar archivos de sonido. A partir de esta señal, se aplica un análisis frecuencial que permite visualizar su espectro y calcular los coeficientes que la definen en el dominio de Fourier.

Además, el sistema construido brinda la posibilidad de reconstruir la señal original utilizando únicamente un número reducido de armónicos, lo que permite comprender la importancia de cada componente en la estructura total de la señal. Todo esto se presenta en una interfaz gráfica amigable y visual, diseñada para facilitar la interacción y la comprensión.

Fundamentación Matemática

En este proyecto se aplica el Análisis de Fourier, uno de los temas importantes de las matemáticas avanzadas para descomponer funciones o señales complejas en combinaciones de senos y cosenos. A través de la Transformada Discreta de Fourier, se transforma una señal de audio del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia utilizando la fórmula siguiente:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Donde X_k representa la frecuencia k -ésima, y x_n es la muestra de entrada. Posteriormente, se identifican las componentes armónicas, que son múltiplos de la frecuencia fundamental, y se reconstruye la señal usando la serie de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Concluimos con los coeficientes a_n y b_n que permiten obtener la **amplitud**:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Y la **fase**:

$$\phi_n = \arctan \left(\frac{b_n}{a_n} \right)$$

lo que nos facilita la reconstrucción de la señal usando solo un número limitado de armónicos.

- Transformada Discreta de Fourier

Este es el corazón de tu análisis de audio. Estás implementando una versión básica de la DFT con JavaScript en la función basicFFT. Esta fórmula transforma una señal en el dominio del tiempo a una en el dominio de la frecuencia.

Fórmula:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Donde:

x_n : señal de entrada (en el tiempo)

X_k : componente de frecuencia k

N : número total de muestras

$j = \sqrt{-1}$: unidad imaginaria

- Series de Fourier

Se está usando esta serie para reconstruir la señal con cierto número de armónicos controlables por el usuario.

Fórmula:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Donde:

a_0 : componente promedio (DC)

a_n, b_n : coeficientes de Fourier

ω : frecuencia fundamental

- Análisis Espectral (espectro de frecuencia)

La gráfica freqChart representa el espectro de magnitudes de la señal, es decir, qué tantas veces aparece cada frecuencia.

Fórmulas

$$|X_k| = \sqrt{(\text{Re}(X_k))^2 + (\text{Im}(X_k))^2}$$

$$\text{Magnitud en dB} = 20 \cdot \log_{10}(|X_k|)$$

- Identificación de Armónicos

El usuario puede seleccionar cuántos armónicos incluir en la reconstrucción. Esos armónicos son múltiplos de la frecuencia fundamental ω .

$$f_n = n \cdot f_0 \quad (\text{donde } n = 1, 2, 3, \dots)$$

- Fase y amplitud polar

Al calcular los coeficientes a_n y b_n , también calculamos:

Fórmula de amplitud del armónico:

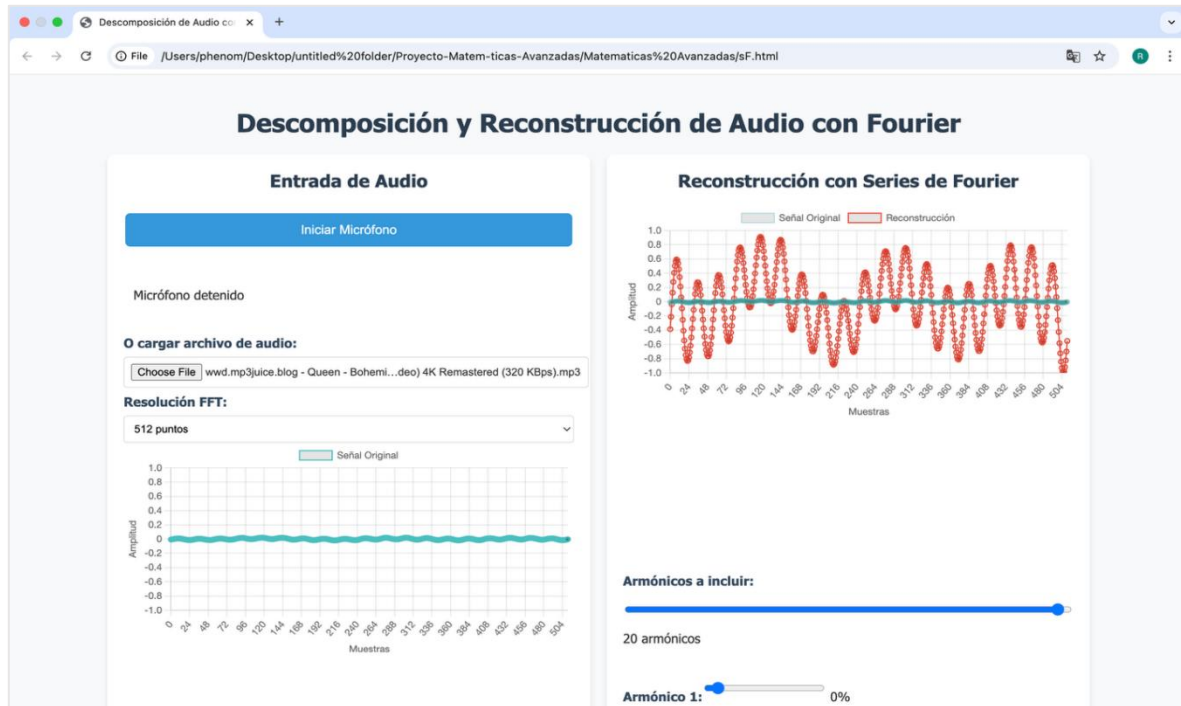
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Fase:

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Capturas del Sistema

El diseño del sistema fue creado con la intención de que todo fuera desplegado en una única página, con diferentes secciones que serán descritas a continuación.



En primera instancia, podremos seleccionar cual será el mecanismo con el que alimentaremos nuestro sistema, en este caso contamos con dos posibilidades utilizar el micrófono de nuestro dispositivo o cargar un archivo de audio que se reproducirá en bucle.



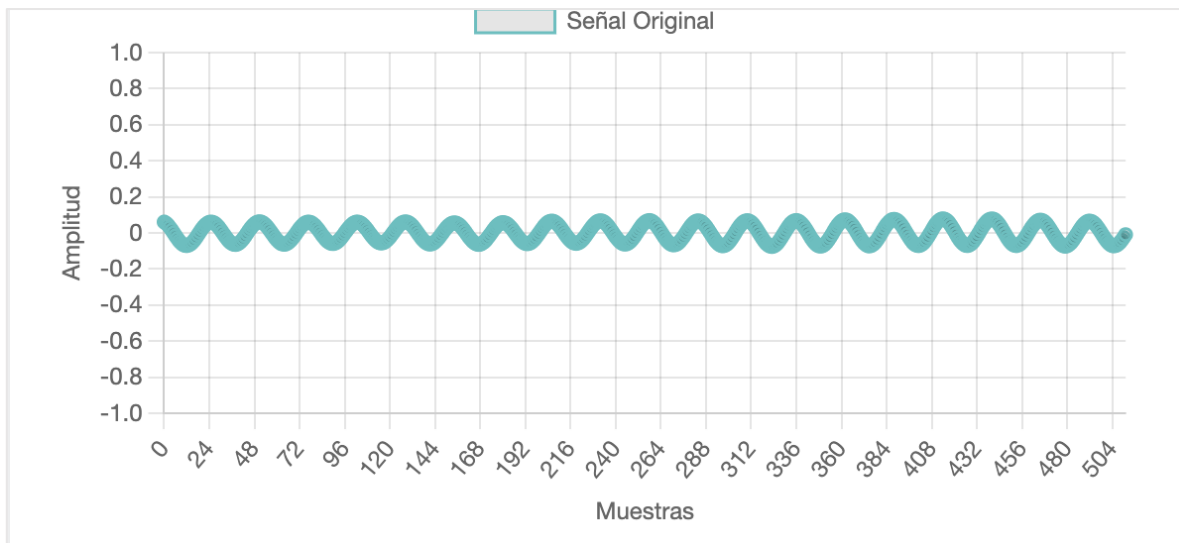
Justo debajo nos podemos encontrar con el selector de resolución para nuestra transformada rápida de Fourier, el valor de esta resolución va desde los 64 hasta los 512 puntos.



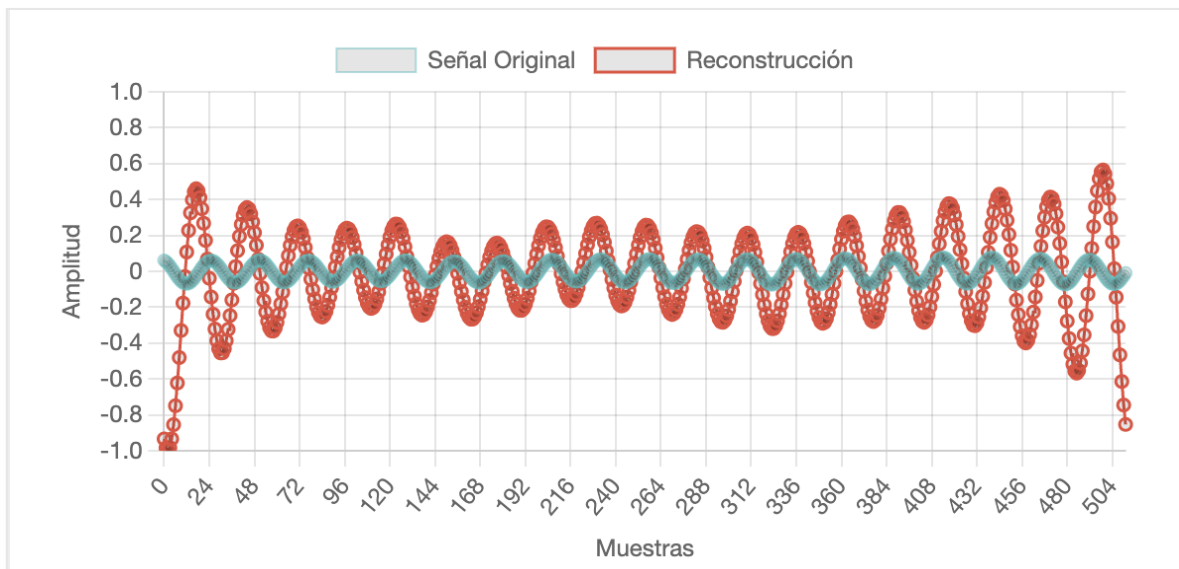
- 64 puntos
- 128 puntos
- 256 puntos
- ✓ 512 puntos

p3

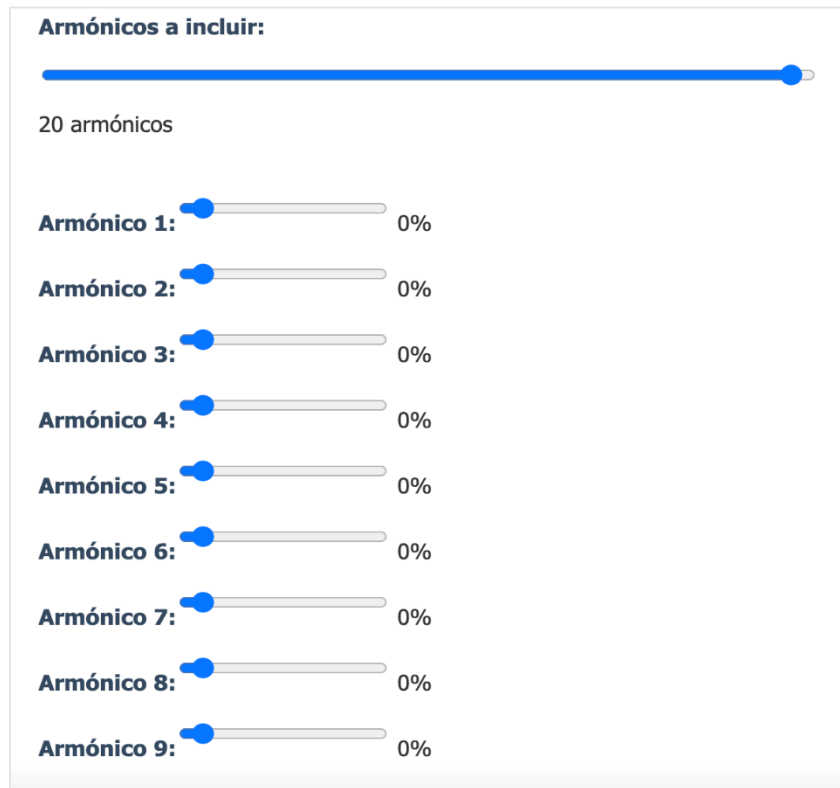
Cuando nuestro sistema sea alimentado podremos ver una gráfica con nuestra señal original.



Posteriormente podremos observar la gráfica que muestra la comparación entre nuestra señal original y la señal reconstruida mediante la transformada rápida de Fourier.



Justo de bajo de nuestra grafica con la señal reconstruida nos encontraremos con nuestros armónicos, podremos seleccionar la cantidad de ellos desde 1 hasta 20, así como el porcentaje que incluiremos de cada uno de ellos desde un 0% hasta un 100%.



Dentro de esa misma sección nos podremos encontrar con un despliegue de los valores de cada uno de los armónicos que incluiremos en nuestra señal.

Cálculo de Coeficientes

Armónico 1

$$a_0 = -1.71e-3$$
$$b_0 = 0.00e+0$$

Armónico 2

$$a_1 = -2.74e-3$$
$$b_1 = 1.94e-4$$

Armónico 3

$$a_2 = -9.78e-4$$
$$b_2 = -5.01e-4$$

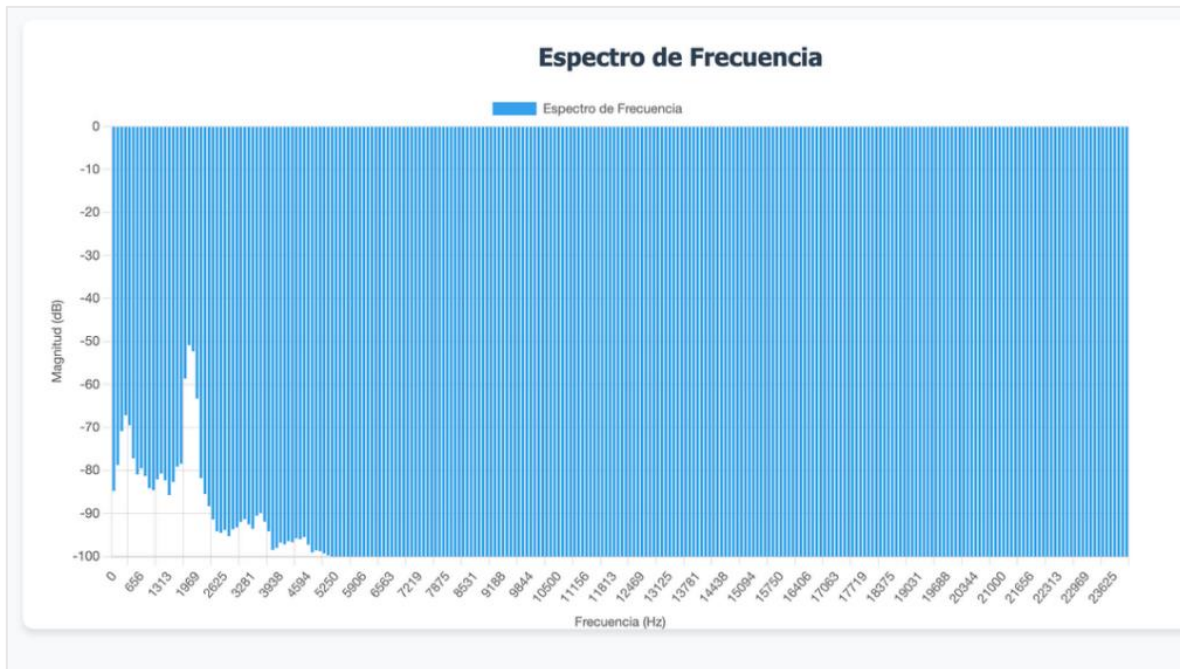
Armónico 4

$$a_3 = -2.43e-3$$
$$b_3 = -1.14e-4$$

Armónico 5

$$a_4 = 2.47e-3$$
$$b_4 = -3.16e-3$$

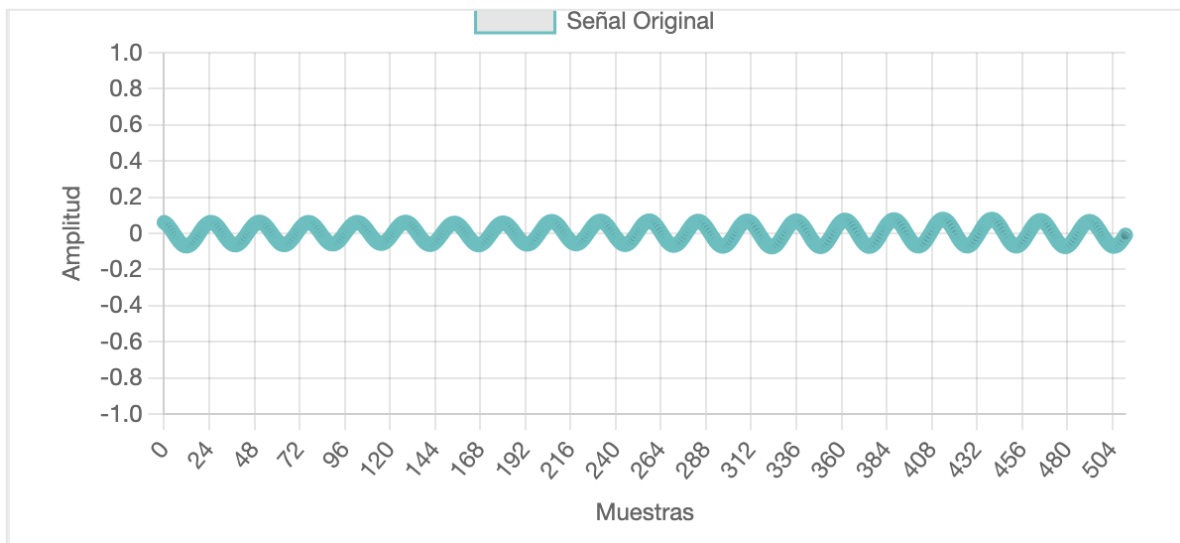
Finalmente nos encontraremos con un histograma de nuestros espectros de frecuencia.



Resultados

Para comprobar el correcto funcionamiento de nuestro sistema realizaremos una prueba utilizando el audio recibido por el micrófono de nuestro dispositivo.

Aquí podemos ver la gráfica de nuestra señal original.



La intención de esta prueba es configurar nuestra reconstrucción de señal de manera que la señal reconstruida sea lo más similar a la señal original.

Nuestra resolución para nuestra FFT estará configurada con el valor más alto siendo de 512 puntos.

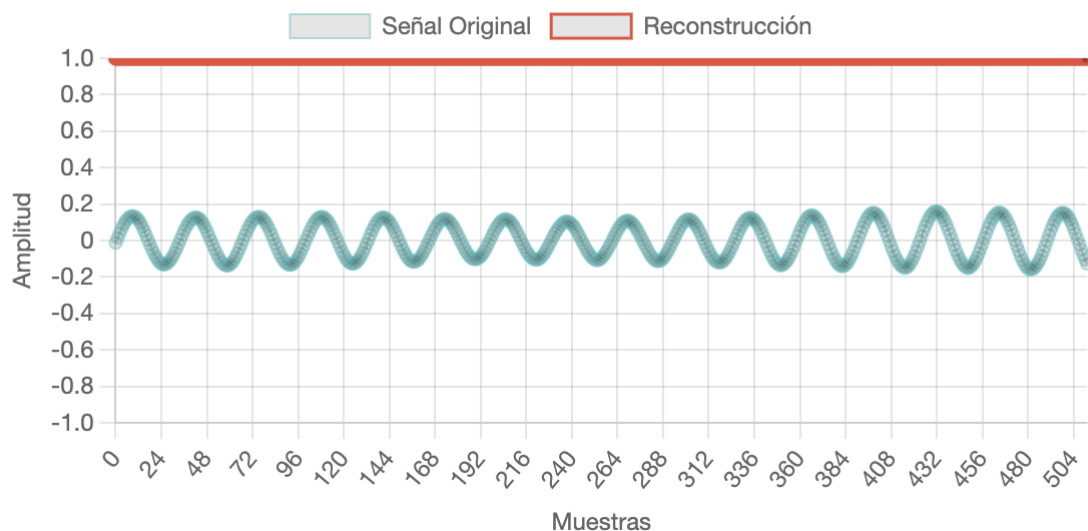
Resolución FFT:

512 puntos



Posteriormente iniciaremos nuestra reconstrucción incluyendo únicamente un armónico para después realizar incrementos de 5 en 5 armónicos hasta encontrar un valor donde nuestra señal reconstruida sea muy semejante a nuestra señal original.

Reconstrucción con Series de Fourier



Armónicos a incluir:



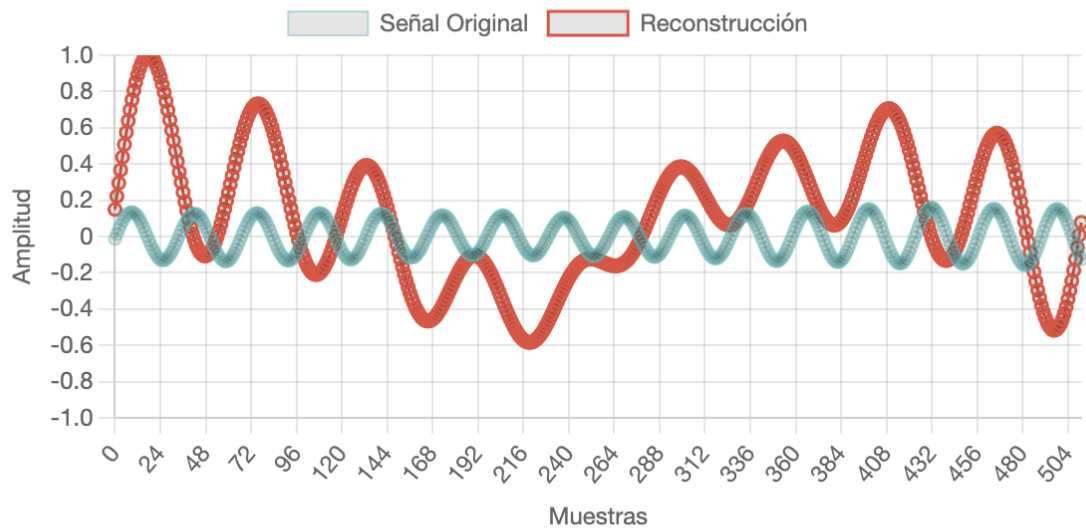
1 armónicos

Podemos ver que aun cuando tenemos una resolución muy alta al incluir un único armónico tenemos un resultado muy diferente a la señal original.



Al incluir 5 armónicos aún no obtenemos un resultado favorable, sin embargo, es importante destacar que con este valor ya no obtenemos una señal plana.

Reconstrucción con Series de Fourier



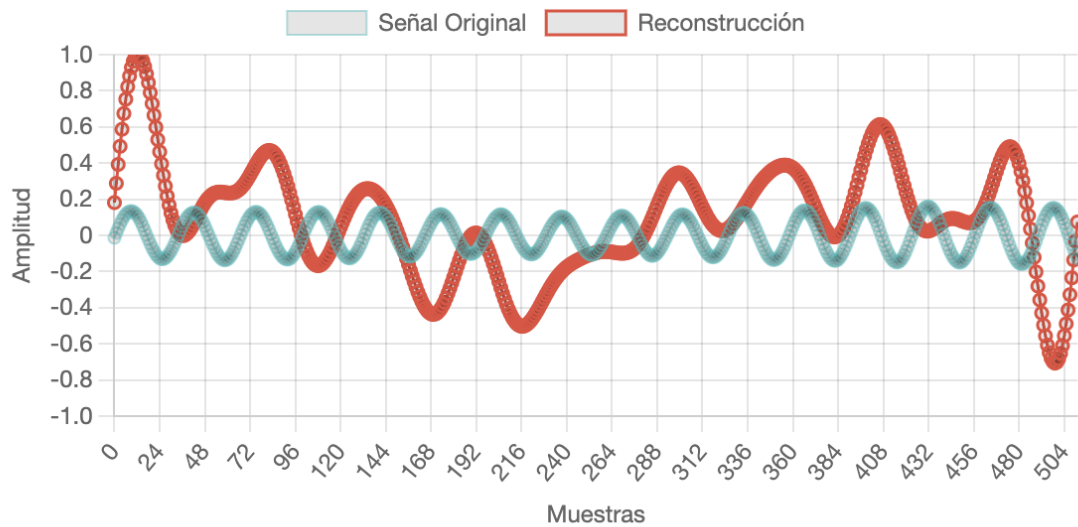
Armónicos a incluir:



10 armónicos

Con 10 armónicos obtenemos un resultado mucho más semejante, pero seguimos teniendo una amplitud diferente a la señal original.

Reconstrucción con Series de Fourier

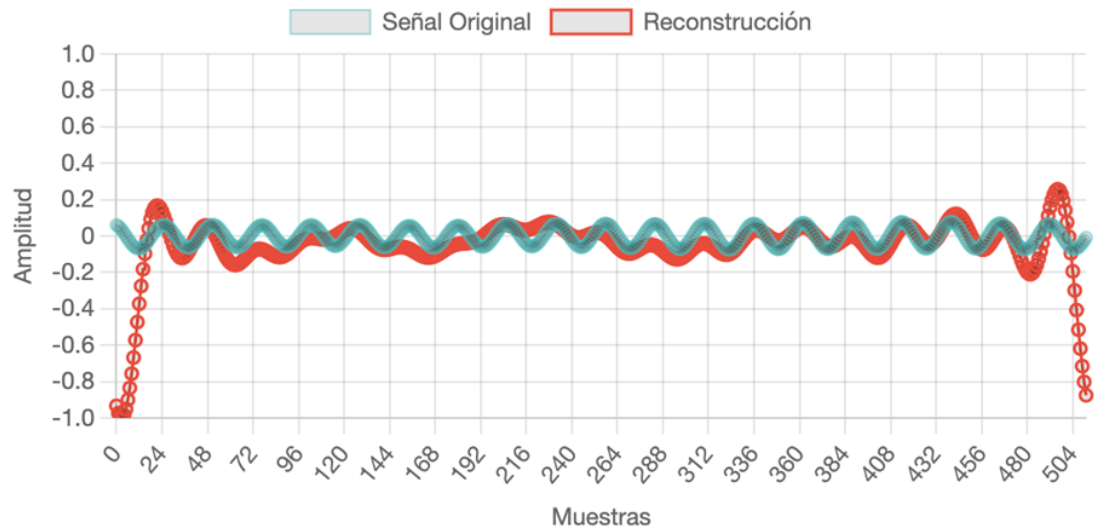


Armónicos a incluir:



15 armónicos

Con 15 armónicos podemos observar que hemos conseguido ajustar ligeramente la señal reconstruida a la original, aun parecen ser señales no del todo iguales.



Armónicos a incluir:



20 armónicos

Finalmente, al utilizar 20 armónicos nos damos cuenta de que la señal reconstruida es muy semejante a la señal original, tanto en amplitud como longitud de onda.

Es así como esta prueba concluye con éxito y confirmamos que el sistema funciona de forma adecuada, ya que logramos reconstruir nuestra señal original implementando relativamente pocos armónicos.

Conclusiones

Uno de los principales logros fue que cumplimos con el objetivo principal del proyecto: analizar una señal real, identificar sus componentes armónicas y visualizar su espectro de frecuencia utilizando una interfaz sencilla. Además, logramos reconstruir la señal a partir de un número limitado de armónicos, lo cual permitió observar con claridad la importancia de las frecuencias dominantes.

Durante el desarrollo del sistema decidimos trabajar con HTML y JavaScript, ya que son los lenguajes que dominamos actualmente. Esto nos permitió construir una herramienta funcional directamente en el navegador, aprovechando nuestros conocimientos previos y facilitando la implementación de gráficas, controles y visualizaciones en tiempo real. A pesar de no utilizar herramientas especializadas de procesamiento digital, conseguimos adaptar la lógica de la Transformada Rápida de Fourier de manera eficiente y comprensible.

Nos dimos cuenta de que muchas señales reales pueden ser representadas con un número reducido de armónicos, lo cual facilita su análisis y procesamiento. Pudimos observar cómo las frecuencias dominantes influyen directamente en la forma de la señal, y cómo al modificar estos componentes se puede reconstruir la señal con resultados bastante precisos.

Trabajar con una interfaz gráfica en tiempo real hizo que el aprendizaje fuera más dinámico y visual. Fue muy útil ver cómo los coeficientes de Fourier cambian dependiendo del tipo de señal, y cómo influye cada parámetro en el resultado final. Esto reforzó nuestro entendimiento tanto a nivel matemático como práctico.

Consideramos que este proyecto fortaleció nuestra comprensión de la teoría adquirida en el curso, también nos dio herramientas para futuros trabajos en áreas de sistemas computacionales como el procesamiento digital, los sistemas de comunicación y el análisis de datos.