דניאל קגנוביץ' ועומרי פרידנטל

פרויקט אופטימיזציות:

1. הבעיה:

Security structure optimization

Given a grid-based terrain, construct obstacles to make an attacker's task most difficult.

קלט:

נתונים אודות הבסיס:

- **לוח בסיס B עם n משבצות, המתאר שטח עבודה, עליו היינו רוצים להגן מפני תוקפים אפשריים.**
  למשל:
  - שטח של מתקן צבאי - נרצה להציב שומרים.
  - בנק המכיל חדר כספות - נרצה לשים חיישני אבטחה.
  - אזור גאוגרפי המכיל כבישים, בזמן מרדף משטרתי אחר עבריין.- נרצה להציב ניידות משטרה לפני שהוא נכנס לאזור זה.

  - המשחק "clash of clans" - בו צריך לבנות בסיס ולהציב שמירות בצורה שתגן על הפריטים שלך כאשר תוקפים אותך - דוגמא אפשרית לפרזנטציה.

נתונים סטטיסטים אודות התוקף:

- **וקטור התחלה** $r \in (0,1)^n$ **- הסתברויות כניסות אפשריות של תוקף לבסיס.**
  למשל, עבור בסיס עם 6 משבצות ושתי כניסות במיקומים 2,5 הוקטור יראה כך:
  $r = (0, 0.3,\ 0,\ 0,\ 0.7,\ 0)$
  אפשרי שבבסיס מלבני כל משבצת שאינה מסגרת תהיה עם הסתברות 0.

- http://u.math.biu.ac.il/~amirgi/ariel_notes2.pdf
- **מטריצה** $M \in (0,1)^{n\,x\,n}$ **המתארת הסתברויות לצעדים אפשריים של התוקף.** $M_{i,l}$ היא ההסתברות למעבר בין משבצת i ל j . **המטריצה חייבת להיות סטוכסטית - סכום כל שורה יהיה 1. (הגיוני כיוון שלכל משבצת מרחב הסתברות משלה במעברים).**
  למשל, $M_{2,3}$ הוא הסיכוי שהתוקף ינוע מהמשבצת ה2 ל3. ערכים אלו הם שקלול של תנאי הבסיס וסטטיסטיקה לגבי פעולת התוקף - כלומר עבור מעבר לא חוקי ההסתברות תהיה 0. אפשרי שבבסיס מלבני רוב המטריצה תהיה אפסים.

משאבי ההגנה:

- $k \in N$ מספר ההגנות הזמינים לרשותנו. הגנה היא שיבוץ מכשול על משבצת כלשהי בלוח אשר תופסת תוקף.
  לדוגמא, אם למתקן צבאי יש כוח אדם של 2 שומרים - $k = 2$.

פלט:

- $D = \{d_1, d_2, ..., d_l\}$ **שיבוץ ההגנות המביא למקסימום את הסיכוי לתפוס את הפורץ.**
  למשל בדוגמא של שדה התעופה, נקבל D מיקומים בהם עלינו לשים את הניידות על מנת לקבל אבטחה מקסימלית.
  הערה: מדובר על $l << n$ כלומר מספר ההגנות הזמינות קטן משמעותית מגודל הלוח, וקטן משמעותית ממספר הכניסות ללוח (אחרת יכלנו להציב הגנה בכל כניסה).

2. הפתרון:

1. הגדרת בעיית האופטימיזציה:
נרצה לחשב **באיזה k משבצות** למקם סנסורים כך ש**ההסתברות לתפוס את הפורץ - ההסתברות שפורץ ידרוך באחת מהן** תהיה **מקסימלית.**
כלומר אם נגדיר את $p = (p_1, ..., p_k)$ להיות משבצות המסלול של הפורץ לכל k, כאשר משבצת הכניסה מתאימה למוגדר בr, והמסלול נלקח על פני כל המסלולים האפשריים המתאימים להסתברויות המוגדרות בM.
ונגדיר $d_1, ..., d_l$ שיבוצי הסנסורים שלנו -
נסמן $d_j \in P$ אם d_j מופיע במסלול p כלשהו עבור k כלשהו.
נרצה $max\, Pr_P\,(d_1 \in P \vee ... \vee d_l \in P)$.
נפשט ראשית לסנסור אחד d ולאחר מכן נכליל.

2. נצטרך לחשב את ההסתברויות כתלות במשתנים - נשתמש בשרשראות מרקוב.
שרשרת מרקוב מאפשרת לנו פה לחשב את הסיכוי שפורץ ימצא במשבצת x_j בהנתן שהמסלול שלו עד כה היה $x_1, ..., x_{j-1}$. כלומר עבור מסלול באורך k, $Pr\,(p_k = x_k | p_1 = x_1 \wedge ... \wedge p_{k-1} = x_{k-1})$.
ניתן להראות (http://u.math.biu.ac.il/~amirgi/ariel_notes2.pdf) שבסופו של דבר -

$$Pr(p_k = j \mid p_1 = i) = (M^k)_{i,j}$$

ולכן אם נקח בחשבון גם את הוקטור ההתחלתי r:

$$Pr(p_k = j) = \sum_{i=1}^{n} Pr(p_k = j \mid p_0 = i) \cdot Pr(p_0 = i) = = \sum_{i=1}^{n} (M^k)_{i,j} \cdot r_i$$

כעת נקח בחשבון גם את העובדה שאורך המסלול k אינו ידוע ונקבל עבור $p = (p_1, ..., p_k)$:
כאשר נסמן

$$Pr(j \in P) = \sum_{k=1}^{\infty} Pr(p_k = j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (M^k)_{i,j} \cdot r_i$$

לכן נקבל שאם נרצה לשים סנסור d כך שההסתברות $Pr(d \in P)$ יהיה ניתן לחשב $Pr(d \in P)$.

3. ננסח כבעיית אופטימיזציה:
אפשרות א': נגדיר n משתנים בינארים, $D_1, ..., D_n$ כאשר כל $D_i = 1$ אמ"מ נציב סנסור במשבצת ה i. כעת נרצה:

$$max\quad D_1 \cdot Pr(1 \in P) + ... + D_n \cdot Pr(n \in P)$$

תחת האילוץ $D_1 + ... + D_n <= k$.
אפשרות ב' - משתנים שלמים $D_1, ..., D_k$ כאשר $D_i = j$ אם נציב סנסור במשבצת ה j. כעת נרצה:

$$max\quad Pr(D_1 \in P) + ... + Pr(D_k \in P)$$

תחת האילוץ $D_i \neq D_j$ לכל i,j.

4. ננסה לשלב את אופציה א' יחד עם החישוב של ההסתברויות:
נסמן F פונקציית הרווח אותה ננסה למקסם:

$$F \;=\; D_1 \cdot Pr(1 \in P) \;+ ... + D_n \cdot Pr(n \in P)$$

$$F = \sum_{j=1}^{n} D_j \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (M^k)_{i,j} \cdot r_i = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} D_j \cdot \sum_{i=1}^{n} (M^k)_{i,j} \cdot r_i\right)$$

נסתכל רק על הביטוי שבתוך סיגמה של k - כלומר ההסתברויות בהנחה שהמסלול הוא באורך k:

$$F_k = \sum_{j=1}^{n} D_j \cdot \sum_{i=1}^{n} (M^k)_{i,j} \cdot r_i = \; D_1 \cdot r_1 \cdot (M_{11}{}^k + ... + M_{n1}{}^k) + ... + D_n \cdot r_n \cdot (M_{1n}{}^k + ... + M_{nn}{}^k)$$

כלומר ניתן לראות שאם נחשב את M^k ו"נקבע אותה" וכנל ל r , אנחנו סה"כ רואים פה גישה לכל איבר ב M^k פעם אחת וגישה לכל איבר ב r פעם אחת. ביחד נוצר משוואת $F_k = a_1 \cdot D_1 + ... + a_n \cdot D_n$ עבור הקבועים $a_i = r_i \cdot (M_{1i}{}^k + ... + M_{ni}{}^k)$.
ניתן לפתירה על ידי שיטות שלמדנו בכיתה - (הכנס שם של שיטה כאן).
כעת נרצה לשלב את זה לכל k :
ניתן בעצם לעשות כך:

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} F_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k1} \cdot D_1 + ... + a_{kn} \cdot D_n = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{k1}) \cdot D_1 + .. + (\sum_{k=1}^{\infty} a_{kn}) \cdot D_n$$

עבור a_{ki} שיהיה a_i ממקודם עבור k זה.
ובעצם גם זה אותו סגנון של משוואה שלמדנו איך ממקסמים.
הבעיה - הקבועים הם חישוב של טור אינסופי של קבועים.
הפתרון -
אופציה אחת היא להגביל את אורך המסלול, למשל $k <= n^2$ (כלומר מניחים שהפורץ לא חוזר על אף מעבר - אך דבר זה גורם שאנחנו מניחים הנחה לא ידועה על מסלול הפורץ
אופציה דומה אך טיפה יותר טובה היא לחשב את הגבול של טור הקבועים (הסבר למה זה מתכנס),
כלומר לחשב לכל $1 <= i <= n$ את $\alpha_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} a_{ji}$

ואז לנסות למקסם עבור $F = \alpha_1 \cdot D_1 \;+ ... + \alpha_n \cdot D_n$ **, תחת האילוץ** $D_1 + ... \;+\; D_n \;<=\; k$ **.**
נלך על זה.
5. בחירת אלגוריתם האופטימיזציה.
6. קוד
7. הרצה על דוגמאות.