Suma de Riemann

$f(x) = 3x + 2$

$[1, 3]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x \cdot i$$

$$x_i = 1 + \frac{2}{n} i = 1 + \frac{2i}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[3\left(1 + \frac{2i}{n}\right) + 2 \right] \frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[3 + \frac{6i}{n} + 2 \right] \frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[5 + \frac{6i}{n} \right] \frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{10}{\cancel{n}} + \frac{12\cancel{i}}{\cancel{n^2}} \right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[10 + \frac{12}{2} \right] = 16$$

Aproximaciones

Método	Ecuación
Esquina superior izquierda	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$
Esquina superior derecha	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i + \Delta x)\Delta x$
Punto medio	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i + \Delta x/2)\Delta x$

Integrales

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Definida

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Indefinida

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Integrales notables

Integral	Función primitiva
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\int \sec^2 x\,dx$	$\tan x + c$
$\int \csc^2 x\,dx$	$-\cot x + c$
$\int \sec x \tan x\,dx$	$\sec x + c$
$\int \csc x \cot x\,dx$	$-\csc x + c$
$\int \sinh x\,dx$	$\cosh x + c$
$\int \cosh x\,dx$	$\sinh x + c$
$\int \sec x\,dx$	$\ln\lvert \sec x + \tan x\rvert + c$
$\int \csc x\,dx$	$\ln\lvert \csc x - \cot x\rvert + c$
$\int \tan x\,dx$	$\ln\lvert \sec x\rvert + c$
$\int \cot x\,dx$	$\ln\lvert \sin x\rvert + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\arctan x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin x + c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + c$

Propiedades de las integrales

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$m \leq f(x) \leq M \Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Cálculo de área

Área total

$$\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$$

Área neta

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema Fundamental del Cálculo. Parte 1

$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$

$$F'(x) = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$$

Método de sustitución

$x = g(t)$

$dx = g'(t)\,dt$

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

Ejemplo

$\int \tan x\,dx$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$$\int \frac{(-du)}{u}$$

$$-\int \frac{1}{u}\,du$$

$$-\ln|u| + c$$

$$-\ln|\cos x| + c$$

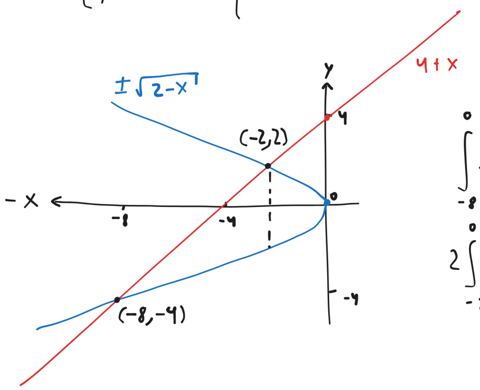
Cálculo de área entre curvas

$$\int f(x) - g(x)\,dx$$

> $f(x)$ función exterior
> $g(x)$ función interior

Por partes

$$\begin{cases} y^2=-2x \\ y-x=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\pm\sqrt{-2x} \\ y=4+x \end{cases}$$



$$\int_{-8}^{0} f(x)-g(x)\,dx$$

$$2\int_{-2}^{0}\sqrt{2-x}\,dx+\int_{-8}^{-2} 4+x-(-\sqrt{2-x})\,dx$$

Cambio de ejes

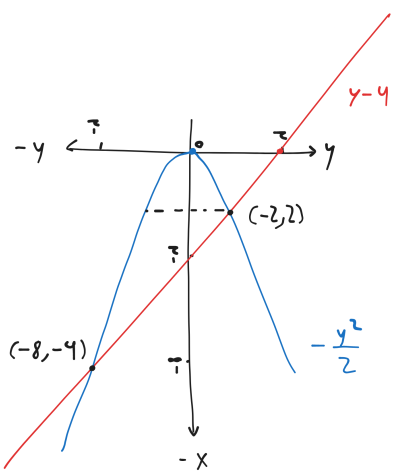
$$\begin{cases} y^2=-2x \\ y-x=4 \end{cases}$$

Obtenemos la inversa

$x^2=-2y$ $\qquad$ $x-y=4$

$y=-\frac{x^2}{2}$ $\qquad$ $y=x-4$

$$\begin{cases} x=-\frac{y^2}{2} \\ y=y-4 \end{cases}$$



$$\int_{-4}^{2} f(y)-g(y)\,dy$$

$$\int_{-4}^{2} -\frac{y^2}{2}-[y-4]\,dy$$

Volúmenes de revolución

Desplazamiento del eje de rotación con respecto al origen	Signo después de a
> 0	$-$
< 0	$+$

Método de discos

$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$

> $V = \pi\int_a^b f(a\pm x)^2 - g(a\pm x)^2\,dx$

- Giro en $x \to dx$
- Giro en $y \to dy$

Método de cascarones cilíndricos

$V = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$

> $V = 2\pi \int_a^b (a \pm x)[f(x) - g(x)]\, dx$

- Giro en $x \rightarrow dy$
- Giro en $y \rightarrow dx$

Trabajo

$$W = \int_a^b F(x)\, dx$$

Trabajo hidráulico

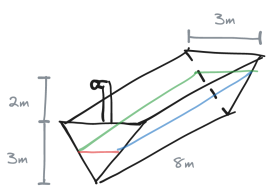
$$W = \rho g \int_a^b Vh\, dy$$

> $\rho = 10^3 \frac{kg}{m^3} = 62.5 \frac{lb}{ft^3}$
>
> $g = 10 \frac{m}{s^2} = 32.1 \frac{ft}{s^2}$

Pasos

1. Identificar límites (rango en el que el agua está almacenada)
2. Identificar altura (rango de extracción)
3. Encontrar expresión de volumen
    - Identificar área de sección transversal

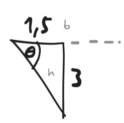
Ejemplo



1. $\int_0^3$
2. $h = 5 - y$
3. $V = A\,dy$

   $V = 8y\,dy$

$\rho g \int_0^3 8y\,(5-y)\,dy$



$\tan\theta = \frac{co}{ca} = \frac{h}{b/2}$

$\tan\theta = \frac{3}{1,5} = 2$

$\frac{h}{b/2} = 2$

$b/2 = \frac{h}{2}$

$b = h$

$x = y$

Trabajo de un resorte

$$W = k \int x\, dx$$

Integración por partes

$$udv = uv - \int vdu$$

> Un día ví una vaca sin cola vestida de uniforme

Para selección de u

I	nversa
L	ogarítmica
A	lgebraica
T	rigonométrica
E	xponencial

Ejemplo

$\int \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = 1 \, dx$
$du = \frac{1}{x} \, dx \qquad v = x$

$$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int x \frac{1}{x} \, dx$$

$$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int 1 \, dx$$

$$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - x + c$$

Ejemplo

$\int \frac{\ln x}{x}$

$$\int \ln x \frac{1}{x}$$

$u = \ln x \qquad dv = \frac{1}{x} \, dx$
$du = \frac{1}{x} \, dx \qquad v = \ln x$

$$\int \ln x \frac{1}{x} = \ln x \ln x - \int \ln x \frac{1}{x} \, dx$$

$$2 \int \ln x \frac{1}{x} = \ln x \ln x$$

$$\int \frac{\ln x}{x} = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

Valor promedio

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Sustituciones trigonométricas

$\cos^n x$ **-** n **es impar**

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^{n-1} \cos x \, dx$$

Ejemplo

$\int \cos^3 x \, dx$

$$\int (\cos^2 x) \cos x \, dx$$

$$\int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx$$

$u = \sin x$

$du = \cos x\, dx$

$$\int (1-u^2)\, du$$

$$u - \frac{u^3}{3} + c$$

$$\sin x - \frac{\sin x^3}{3} + c$$

$\sin^n x$ **-** n **es impar**

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = \int \cos^m x(\sin^2 x)^{n-1} \sin x\, dx$$

Ejemplo

$\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx$

$$\int \cos^2 x(\sin^2 x)^2 \sin x\, dx$$

$$\int \cos^2 x(1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\, dx$

$$-\int u^2(1-u^2)^2\, du$$

$$-\int u^2 - 2u^4 + u^6$$

$$-\frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c$$

$$-\frac{\cos x^3}{3} + \frac{2\cos x^5}{5} - \frac{\cos x^7}{7} + c$$

$\sin^n x$ **o** $\cos^n x$ **-** n **es par**

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Ejemplo

$\int \sin^4 x\, dx$

$$\int (\sin^2 x)^2\, dx$$

$$\int \left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]^2 dx$$

$$\int \left[\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}\right]^2 dx$$

$$\int \left[\frac{1}{4}-\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{\cos^2(2x)}{4}\right] dx$$

$$\frac{1}{4}\int \left[1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)\right] dx$$

$\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(2(2x))}{2}$

$$\frac{1}{4}\int \left[1-2\cos(2x)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(4x)}{2}\right)\right] dx$$

$$\frac{1}{4}\int \left[\frac{3}{2}-2\cos(2x)+\frac{\cos(4x)}{2}\right] dx$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}-\sin(2x)+\frac{\sin(4x)}{8}\right]+c$$

$\sec^n x$ **-** n **es par**

$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx = \int \tan^m x (\sec^2 x)^{n-2} \sec^2 x\, dx$$

Ejemplo TODO

$\tan^n x$ **-** n **es impar**

$$\int \tan^n x \sec^m x\, dx = \int (\tan^2 x)^{n-1} \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx$$

Ejemplo TODO

Producto de potencias seno y coseno

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A-B)+\sin(A+B)\right]$$

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$$

Raíces

$$\sqrt{a^2-x^2}, x = a\sin\theta$$

$$\sqrt{a^2+x^2}, x = a\tan\theta$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}, x = a \sec \theta$$

Integración racional: fracciones parciales

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$P(x)$ es menor en grado que $Q(x)$

Pasos

1. Descomponer en factores $Q(x)$ tan cuánto se pueda
2. Fórmula
    1. Expresión simple
    2. Expresión m.c.m
3. Encontrar coeficientes.
    1. Emplear métodos
        1. Simple
            - Raíces reales y diferentes
            - Raíz repetida del grado más alto
        2. Comparación numerador original con numerador m.c.m
    2. Resolver sistema de ecuaciones
4. Reemplazar coeficientes en expresión simple e integrar

Caso 1: Raíces reales y diferentes

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

Ejemplo

$$\frac{1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Caso 2: Raíces reales y repetidas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)^1} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Ejemplo

$$\frac{1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

Caso 3: Raíces complejas y diferentes

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_x + B}{ax^2 + bx + c}$$

Ejemplo

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

Caso 4: Raíces complejas y repetidas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(ax^2+bx+c)^1} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ejemplo

$$\frac{1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2} + \frac{Ix+J}{(x^2+1)^3}$$

Integral impropia

Sirve para calcular área de $f(x), a \leq x \leq b$ cuando a o b no están definidos

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

Cuando el límite tiende hacia el infinito, la integral es divergente; de lo contrario, es convergente

Integración discontinua

$f(x) = [a, b)$

$$\lim_{t\to b^-} = \int_a^t f(x)\,dx$$

Longitud de curva

$$\int \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Área superficial

	$y = f(x)$	$x = f(x)$
eje x	$\int 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$	$\int 2\pi y\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy$
eje y	$\int 2\pi x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$	$\int 2\pi f(y)\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy$