Suma de Riemann

$f(x) = 3x + 2$

$[1, 3]$

1. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

   $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$
2. $x_i = a + \Delta x \cdot i$

   $x_i = 1 + \frac{2}{n} i = 1 + \frac{2i}{n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[3\left(1 + \frac{2i}{n}\right) + 2\right]\frac{2}{n}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[3 + \frac{6i}{n} + 2\right]\frac{2}{n}$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[5 + \frac{6i}{n}\right]\frac{2}{n}$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{10}{\cancel{n}} + \frac{12\cancel{i}}{\cancel{n^2}}\right]$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[10 + \frac{12}{2}\right] = 16$

Aproximaciones

Esquina superior izquierda

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

Esquina superior derecha

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i + \Delta x)\Delta x$

Punto medio

$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x$

Integrales

$\int_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

Definida

$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

Indefinida

$\int f(x)\, dx = F(x) + c$

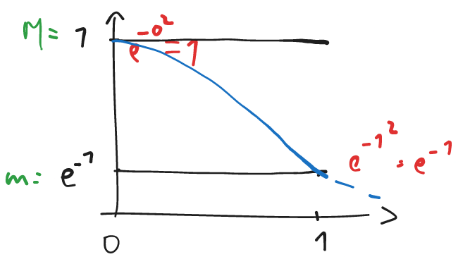
Integrales notables

Integral	Función primitiva
$\int x^n\, dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\int \csc x \cot x$	$-\csc x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$

Propiedades de las integrales

- $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$
- $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
- $m \leq f(x) \leq M \Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$



$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0) \leq \int_a^b f(x)dx \leq 1(1-0)$$

$$e^{-1} \leq \int_a^b f(x)dx \leq 1$$

Cálculo de área

Área total: $\int_a^b |f(x)|\,dx$

Área neta: $\int_a^b f(x)\,dx$

Teorema fundamental del cálculo

$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$

$F'(x) = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$

$$g(x) = \int_a^x \sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

1.

$$g(x) = \int_1^{x^4} \underbrace{\sec t}_{} \, dt$$

se deja tal cual

$$g'(x) = \sec u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \sec x^4 \cdot \frac{d(x^4)}{dx}$$

$$g'(x) = 4x^3 \cdot \sec x^4$$

2.

$$G(x) = \int_x^{\pi} \sqrt{1 + \sec t} \, dt$$

↳ x debe estar arriba

$$G(x) = -\int_{\pi}^{x} \sqrt{1 + \sec t} \, dt$$

$$G'(x) = -\sqrt{1 + \sec x} \cdot \frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}}^{1}$$

3.

1.

$$g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \, dt$$

podemos poner un punto arbitrario

$$g(x) = \int_{2x}^{0} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \, dt + \int_0^{3x} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \, dt$$

resolvemos con TFC

$$g(x) = -\int_0^{2x} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \, dt + \int_0^{3x} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \, dt$$

$$g'(x) = \left[-\frac{(2x)^2 - 1}{(2x)^2 + 1} \cdot 2 \right] + \left[\frac{(3x)^2 - 1}{(3x)^2 + 1} \cdot 3 \right]$$

$$g'(x) = -2 \cdot \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} + 3 \cdot \frac{9x^2 - 1}{9x^2 + 1}$$

2.

$$g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \, dt$$

$$g'(x) = 3\left(\frac{(3x)^2 - 1}{(3x)^2 + 1} \right) - 2\left(\frac{(2x)^2 - 1}{(2x)^2 + 1} \right)$$

Método de sustitución

$x = g(t)$

$dx = g'(t)\, dt$

$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt$

① $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\, dx$

$t = x^2+x+1$

$(2x+1)\, dx = 1\, dt$

$\int \frac{2x+1}{t^2}\, dx \to \int \frac{1}{t^2}\, dt$

$\int t^{-2}\, dt$

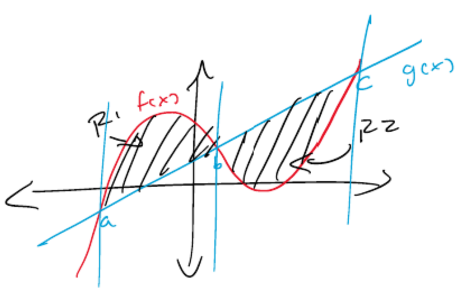
$\hookrightarrow F(t) = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t}$

Se regresa a variable original

$\int = -\frac{1}{x^2+x+1} + C$

$\hookrightarrow$ importante

Cálculo de área entre curvas



$\text{Area } R_1 = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$

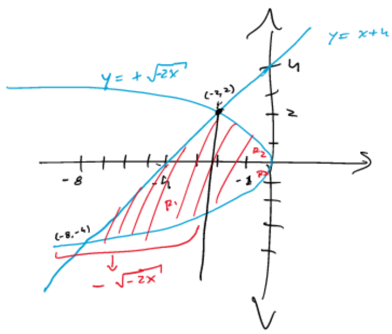
$'' \quad R_2 = \int_b^c g(x) - f(x)\, dx$

$'' \quad \text{Total} = \text{Area } R_1 + \text{Area } R_2$

---

1. Por partes

$$\begin{cases} y^2 = -2x \\ y - x = 4 \end{cases} \approx \begin{cases} y = \pm\sqrt{-2x} \\ y = 4 + x \end{cases}$$

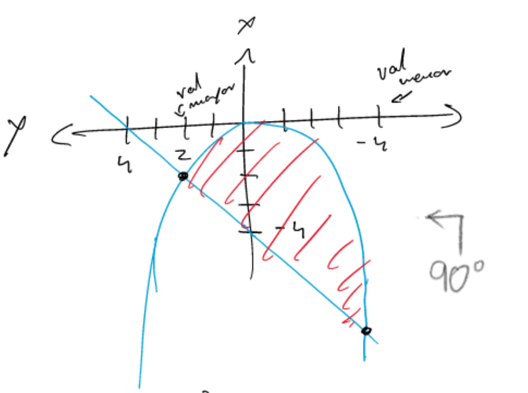


$$\text{Area } R_1 = \int_{-8}^{-2} (x+4) - (-\sqrt{2x})$$

$$\text{Area}(R_2 + R_3) = 2 \cdot \int_{-2}^{0} \sqrt{-2x}\, dx$$

2. Cambio de ejes

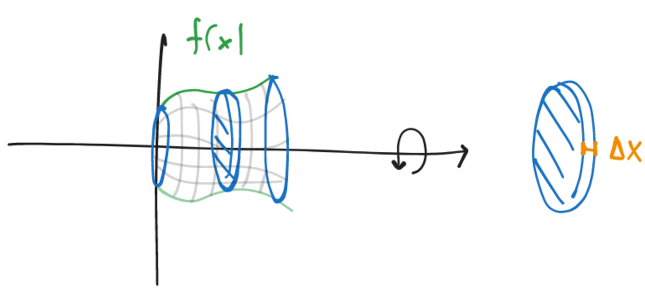
$$\begin{cases} y^2 = -2x \\ y - x = 4 \end{cases} = \begin{cases} x = -\frac{1}{2} y^2 \\ x = y - 4 \end{cases}$$



$$A = \int_{-4}^{2} \left[-\frac{y^2}{2} - (y-4) \right] dy$$

Volumenes de revolución

Método de discos



$V = Abh$

$V = \pi r^2 h \Delta x$

$V = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x$

$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$

Método de arandelas

$V = \pi \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 \, dx$

Tanto en el método de discos y arandelas:

- Si giro alrededor del eje x; entonces dx y límites en x
- Si giro alrededor del eje y; entonces dy y límites en y

Método de capas cilíndricas

$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx$

Método de los cascarones cilíndricos

$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)] \, dx$

Tanto en el método de capas y cascarones cilíndricos:

- Si giro alrededor del eje x; entonces dy y límites en y
- Si giro alrededor del eje y; entonces dx y límites en x

Trabajo mecánico

$W = \int_a^b F(x) \, dx$