

# Definiciones

## Valor absoluto

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

## Ejemplo

$$x^2 = 20$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{20}$$

$$|x| = \sqrt{20}$$

$$x = \pm\sqrt{20}$$

## Conjunto de valores admisibles (C.V.A)

$$\frac{1}{f(x)}; f(x) \neq 0$$

$$\sqrt{f(x)}; f(x) \geq 0$$

$$\log_a f(x); f(x) > 0$$

$$a^x; a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$$

# Inecuaciones

## Valor absoluto

$$b \geq 0$$

$$\begin{array}{l} \overline{|a| < b \quad -b < a < b} \\ \overline{|a| > b \quad b < a < -b} \end{array}$$

$$b < 0$$

$$\begin{array}{l} \overline{|a| < b \quad \text{no hay solución}} \\ \overline{|a| > b \quad \mathbb{R}} \end{array}$$

## Propiedades logarítmicas

$$x = \log_a(n) \Leftrightarrow a^x = n$$

$$\log_a n^k = k \log_a n$$

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right)=\log x-\log y$$

$$\log_b n=\frac{\log_a n}{\log_a b}$$

$$\log_a a^x=x$$

$$a^{\log_a x}=x$$

$$\log_a a=1$$

$$\log_a 1=0$$

$$\log_a 0=\text{indefinido}$$

# Trigonometría

## Medidas de ángulos en grados y radianes

30º (θ)	Radianes	Radianes (simplificado)	45º (θ)	Radianes	Radianes (simplificado)
30º	$\frac{1\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	45º	$\frac{1\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
60º	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	90º	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
nº	$\frac{k\pi}{6}$		nº	$\frac{k\pi}{4}$	

$$k=\frac{n^{\circ}}{\theta}$$

## Tabla trigonométrica

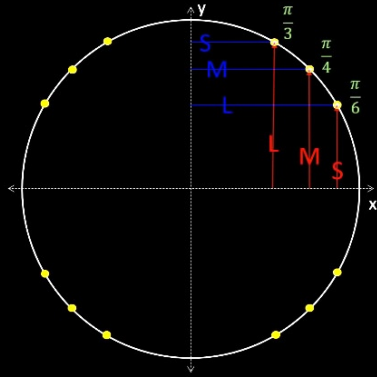
θ	0º	30º	45º	60º	90º
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Recomendado: Funk da trigonometria

## Visualización

## Trigonometry Concepts Review

### 5. The Unit Circle



Large:  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Medium:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Small:  $\frac{1}{2}$

### Periodicidad

$$\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$$

### Identidades trigonometricas

#### Identidades pitagóricas

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

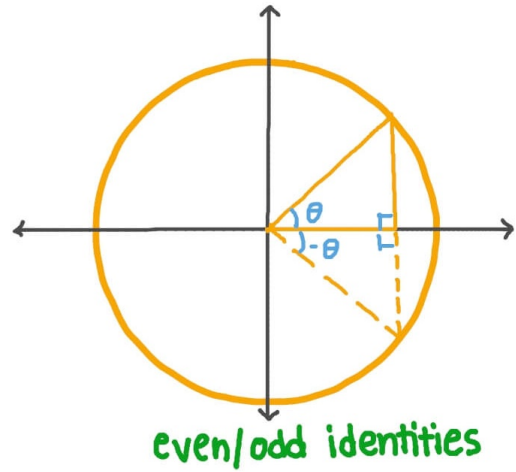
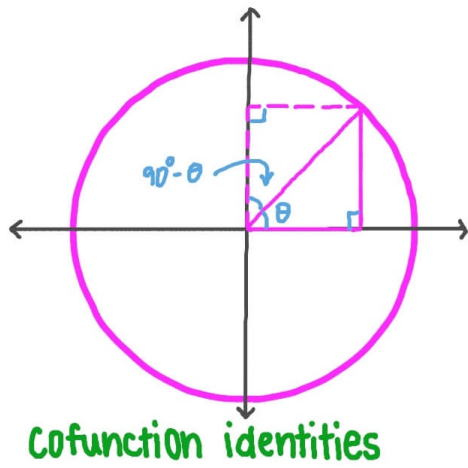
$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

#### Identidades ángulo doble

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$



## Funciones hiperbólicas

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

## Funciones

### Cuadrática

#### Discriminante

Indica el número de soluciones

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	$x = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	no hay solución

### Combinación

$$(f + g)x = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)x = f(x) - g(x)$$

$$(fg)x = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$(f \circ g) = f(g(x))$$

# Límites

## Leyes

$$\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) \wedge \exists \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}; \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$$

## Regla de L'Hôpital

Se puede aplicar múltiples veces mientras la condición se cumpla.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \vee \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \frac{N'}{D'}$$

## Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \frac{2x - 4}{2x + 1} = \frac{0}{5} = 0$$

## Límites notables

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} (\pm)n = (\pm) \pm \infty$$

Si un límite es igual a infinito, no existe pero se denota que tiende a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

## Casos en los que no existe

El límite izquierdo no es igual al derecho

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \neq \lim_{x \rightarrow c^-}$$

## Función que oscila alrededor de $c$

Ejemplo

$$c = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} = \sin\left(\frac{n}{x}\right)$$

## Función que oscila hacia el infinito

Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \sin(x)$$

## Continuidad

$$f(a) = n \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = n$$

Función es continua != Función es continua en un punto. Para saber si  $f$  es continua se debe evaluar el dominio.

## Cálculo de asíntotas

### Asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

### Asíntota vertical

$$\text{es asíntota horizontal} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

## Teorema del sandwich

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \alpha \wedge \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} h(x) = \alpha$$

## Derivadas

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

## Casos en los que no se puede derivar (punto)

1. Recta tangente es vertical
2.  $f$  es discontinua
3. "Giro" brusco

## Derivadas notables

Función	Derivada
$f(x) = ax$	$f'(x) = a(x)'$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$

## n-ésima derivada

Función	Derivada
$f(x) = xe^x$	$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x$

## Recta tangente, normal

La pendiente de la recta tangente es igual a la derivada evaluada en una constante.

$$m_{L_T} = f'(a)$$

La recta normal es perpendicular a la tangente, por tanto:

$$m_{L_N} = -\frac{1}{m_{L_T}}$$

Para obtener la ecuación de la recta tangente o la recta normal se usa:

$$y - f(a) = m(x - a)$$

Si te piden linealizar, significa que debes calcular la recta tangente.

## Reglas

### Regla del producto

$$(fg)' = fg' + f'g$$

### Regla del cociente

$$\left(\frac{N}{D}\right)' = \frac{DN' - D'N}{D^2}$$

### Regla de la cadena

$$\left[(f(x))^n\right]' = nf(x)^{n-1}f'(x)$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

## Derivación implícita

Se deriva con respecto a una variable, el resto de variables son tratadas como funciones.

Se deriva ambos lados de la ecuación.

$$\sin(x + y) + e^y + xy^2 = 5$$

$$y' \text{ o } \frac{dy}{dx}?$$

$$\cos(x + y)(1 + y') + e^y y' + x2yy' + y^2 = 0$$

$$\cos(x + y) + y' \cos(x + y) + e^y y' + 2xyy' + y^2 = 0$$

$$y'[\cos(x + y) + e^y + 2xy] = -[\cos(x + y) + y^2]$$

$$y' = -\frac{\cos(x + y) + y^2}{\cos(x + y) + e^y + 2xy}$$

$$x' \text{ o } \frac{dx}{dy}?$$

$$\cos(x+y)(x'+1) + e^y + x2y + x'y^2 = 0$$

$$\cos(x+y) + x' \cos(x+y) + e^y + 2xy + x'y^2 = 0$$

$$x'[\cos(x+y) + y^2] = -[\cos(x+y) + e^y + 2xy]$$

$$x' = -\frac{\cos(x+y) + e^y + 2xy}{\cos(x+y) + y^2}$$

## Derivación logarítmica

Es útil para simplificar ecuaciones con exponentes abundantes.

### Ejemplo

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{(x+3)^3 \sqrt[3]{x+4}}$$

Tomamos logaritmo natural de ambos lados.

$$\ln[y] = \ln \left[ \frac{\sqrt{x+1}}{(x+3)^3 \sqrt[3]{x+4}} \right]$$

$$\ln y = \ln(\sqrt{x+1}) - \ln[(x+3)^3 \sqrt[3]{x+4}]$$

$$\ln y = \ln(x+1)^{\frac{1}{2}} - [\ln(x+3)^3 + \ln(x+4)^{\frac{1}{3}}]$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x+1) - 3 \ln(x+3) - \frac{1}{3} \ln(x+4)$$

Derivamos.

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} (1) - 3 \frac{1}{x+3} (1) - \frac{1}{3} \frac{1}{x+4} (1)$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x+3} - \frac{1}{3(x+4)}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x+1}}{(x+3)^3 \sqrt[3]{x+4}} \left[ \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x+3} - \frac{1}{3(x+4)} \right]$$

## Optimización

1. Identificar la función a optimizar.
2. Obtener una función que se correlacione con el dato de entrada.
3. Combinar ambas funciones por medio de sustitución.
4. Derivar la función compuesta e igualar a cero, obtener los cortes con el eje  $x$ .
5. Si es necesario comprobar, derivar nuevamente la función compuesta y reemplazar con los valores obtenidos de  $x$ .

$$f''(x) > 0 \rightarrow \text{Punto mínimo}$$

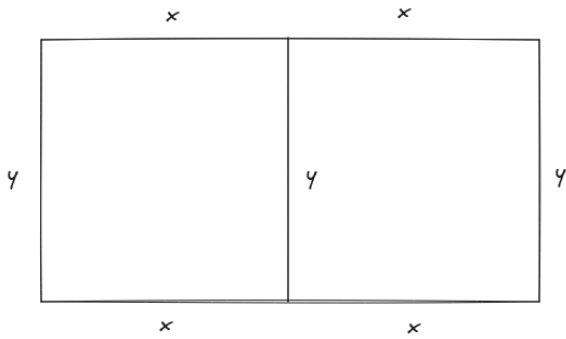
$$f''(x) < 0 \rightarrow \text{Punto máximo}$$

6. Reemplazar el valor de  $x$  obtenido en el paso 4 en la función compuesta original (en general, también depende de lo que se requiera).



### Ejemplo

Un ranchero tiene 300m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.



$$1. A = 2xy$$

$$2. P = 4x + 3y$$

$$y = \frac{300-4x}{3}$$

$$3. A = 2x \left( \frac{300-4x}{3} \right)$$

$$A = -\frac{8}{3}x^2 + 200x$$

$$4. A' = 0$$

$$-\frac{16}{3}x + 200 = 0$$

$$x = 37,5$$

$$5. A'' = -\frac{16}{3}$$

$$A''(37,5) = -\frac{16}{3}$$

$$A''(37,5) < 0 \rightarrow \text{Punto máximo}$$

$$6.$$

$$y = \frac{300-4(37,5)}{3} = 50$$

Dimensiones para maximizar el área:

- $x = 37,5$
- $y = 50$