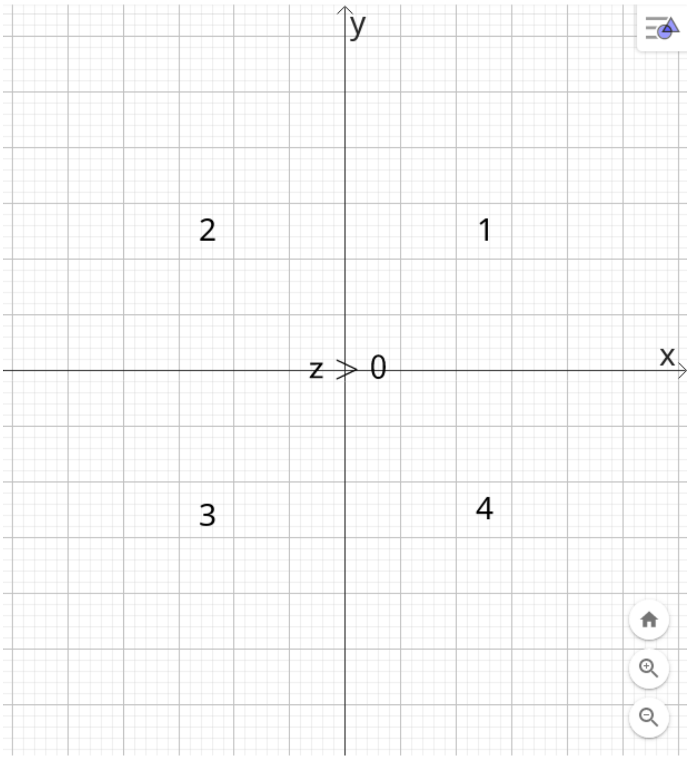
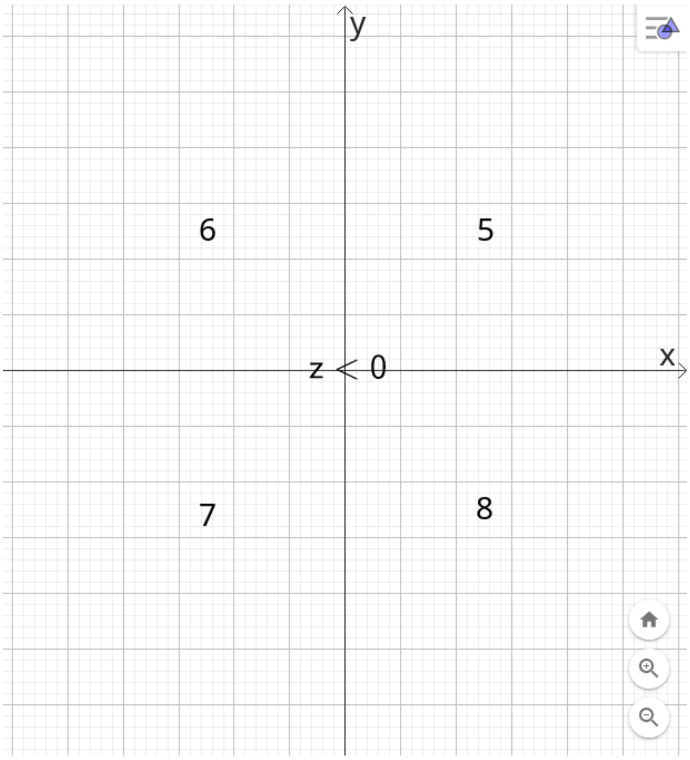
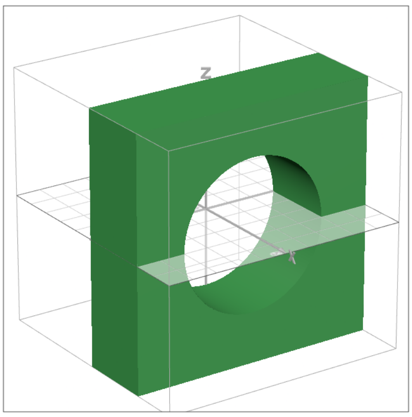
12.1 Sistema de coordenadas tridimensional

Octantes

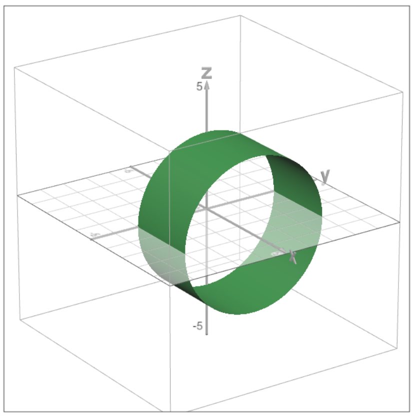




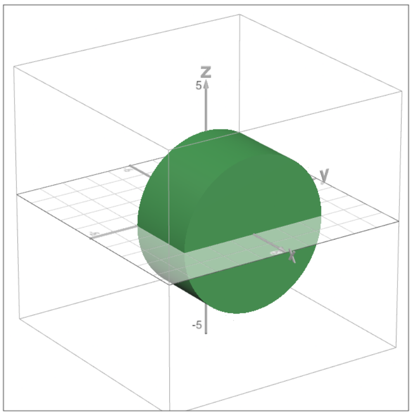
Superficies



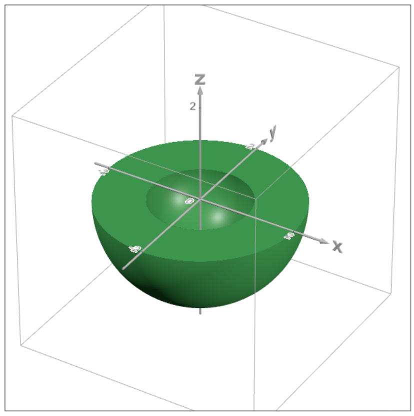
$$y^2 + z^2 \geq 9 \{0 \leq x \leq 3\}$$



$$y^2 + z^2 = 9 \{0 \leq x \leq 3\}$$



$$y^2 + z^2 \leq 9\{0 \leq x \leq 3\}$$



$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\{z \leq 0\}$$

12.2 Vectores

Operaciones

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n \rangle$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, \cdots, a_n - b_n \rangle$$

$$c\vec{a} = \langle ca_1, ca_2, \cdots, ca_n \rangle$$

Vectores base

$$\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Longitud o magnitud

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Vector unitario

$$\hat{v} = \vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$$

12.3 Producto punto

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| cos\theta$$

Propiedades y teoremas

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |a|^2$$

Es comnutativo y es asociativo

Si $\theta > \frac{\pi}{2}$ el resultado del producto punto es negativo

$\vec{a}$ es ortogonal (perpendicular) con respecto a $\vec{b}$ cuando $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Proyección escalar

$$\text{comp}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\text{comp}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

> Proyección escalar de $\vec{b}$ en $\vec{a}$

Ejemplo

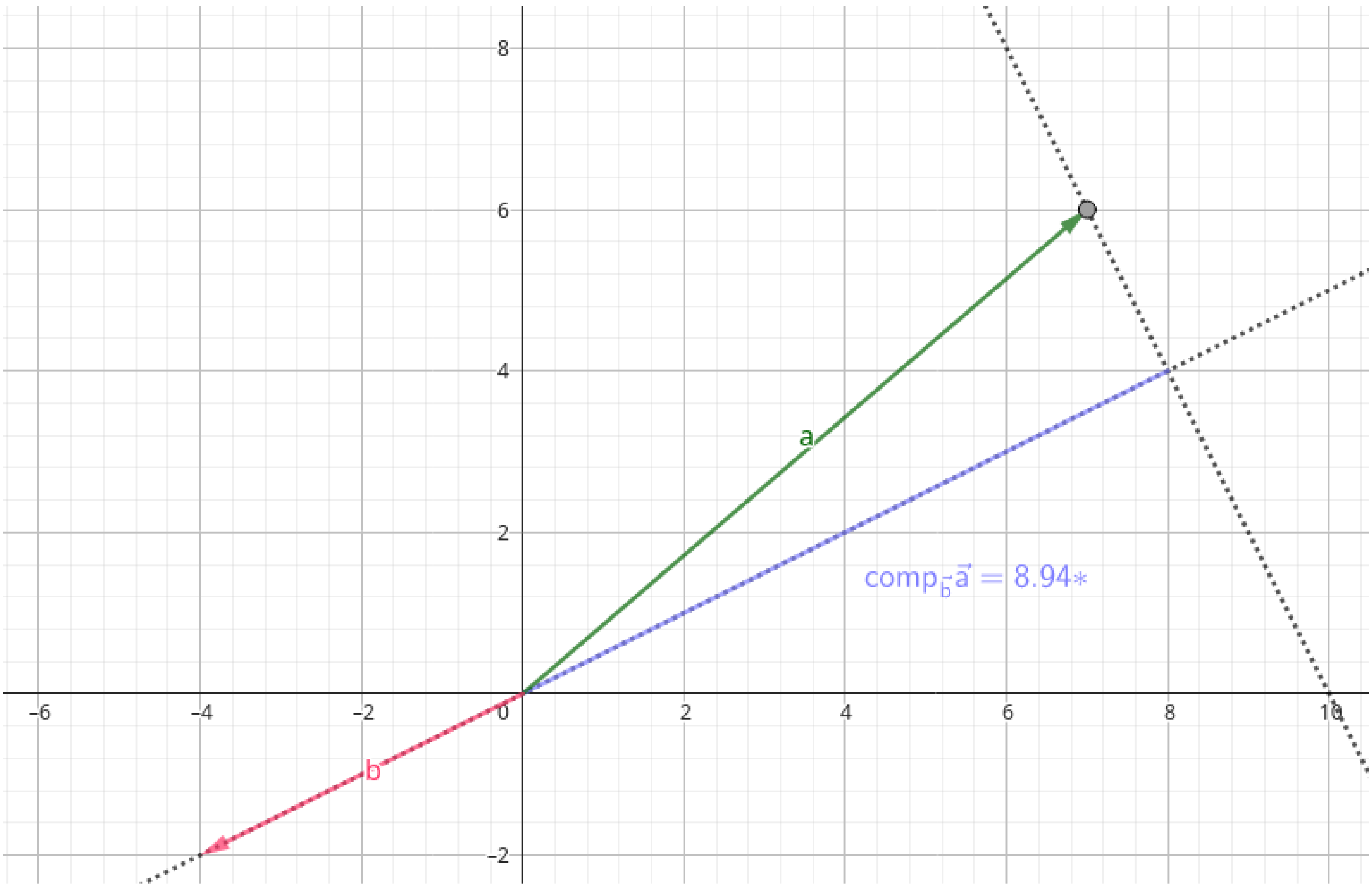
$\vec{a} = \langle 7, 6 \rangle$

$\vec{b} = \langle -4, -2 \rangle$

$$\text{comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{b}|}$$

$$\text{comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{7(-4) + 6(-2)}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}}$$

$$\text{comp}_{\vec{b}}\vec{a} = -8.94$$



Proyección vectorial

$$\text{proy}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

> Proyección vectorial de $\vec{b}$ en $\vec{a}$

Ejemplo

$\vec{a} = \langle 7, 6\rangle$

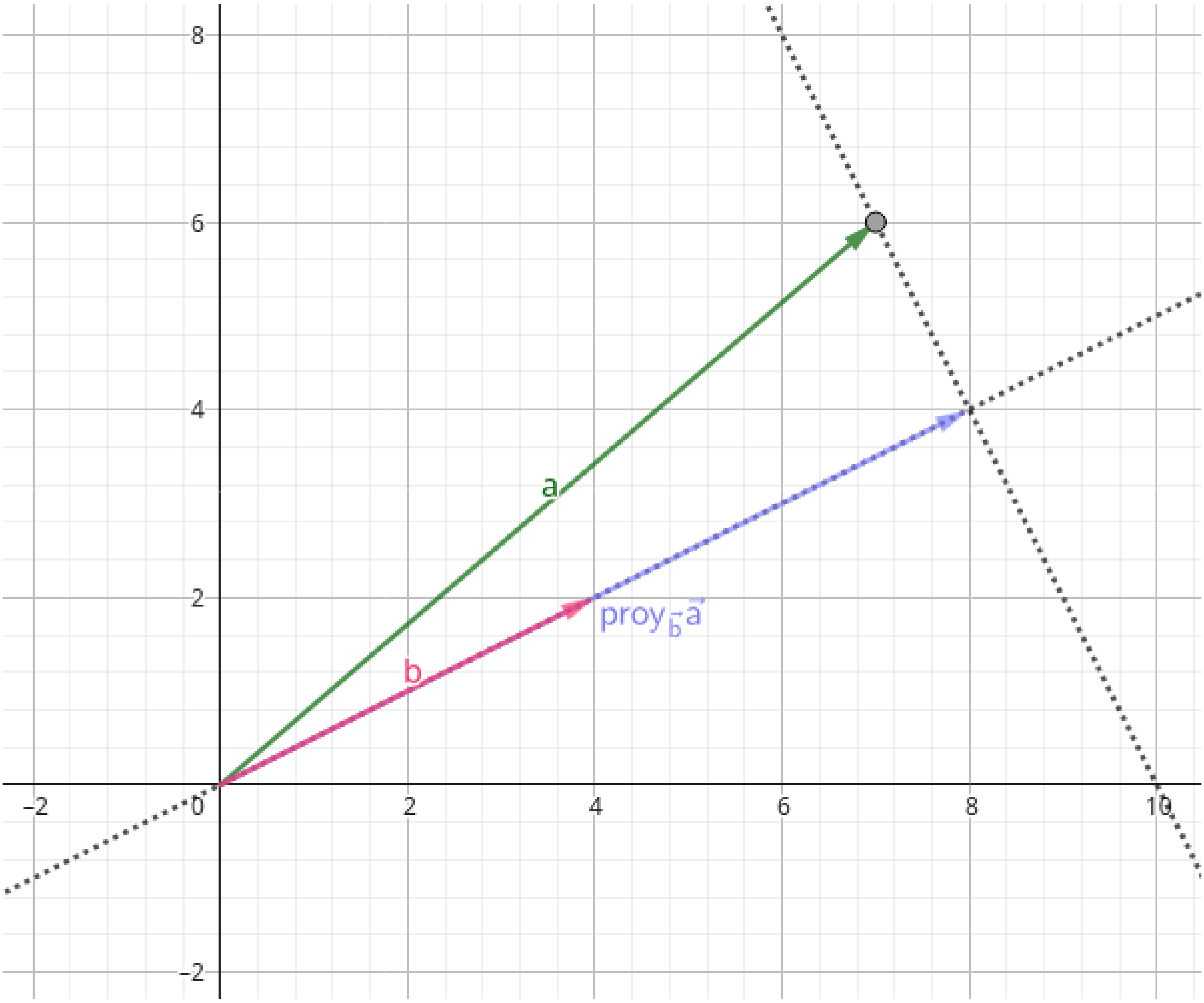
$\vec{b} = \langle 4, 2\rangle$

$$\text{proy}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

$$\text{proy}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{7(4)+6(2)}{4^2+2^2}\langle 4, 2\rangle$$

$$\text{proy}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{40}{20}\langle 4, 2\rangle$$

$$\text{proy}_{\vec{a}}\vec{b} = \langle 8, 4\rangle$$



Ángulos directores

$$\hat{a} = \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

12.4 Producto cruz

- Vector simultáneamente perpendicular a otros dos vectores
- La magnitud del producto cruz representa geométricamente un área

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades y teoremas

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

No es conmutativo ni asociativo

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |a||b| \sin\theta$$

Volumen

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Triple producto

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

12.5 Ecuaciones de líneas y planos

Ecuaciones de línea

$\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

> Recta paralela a $\vec{v}$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0)

$$\vec{r} = (1-t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1; 0 \leq t \leq 1$$

> Segmento que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) hasta (x_1, y_1, z_1)

Ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + v_1 t; y = y_0 + v_2 t; z = z_0 + v_3 t$$

Ecuaciones simétricas

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Planos

Ecuación vectorial

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

> $\vec{n}$ se lo conoce como “vector normal”, este es perpendicular al plano

Ecuación escalar

$\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Ecuación lineal

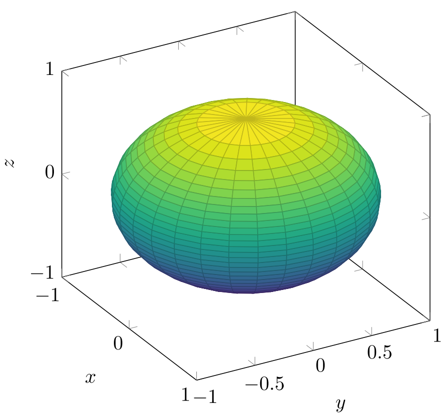
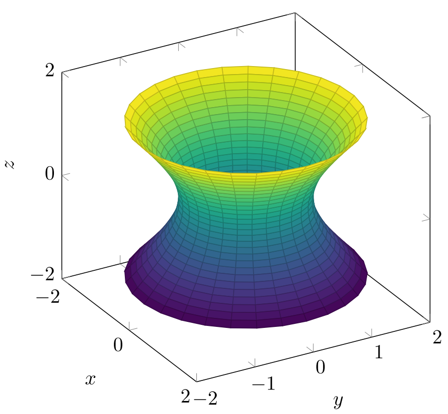
$$ax + by + cz + d = 0; d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

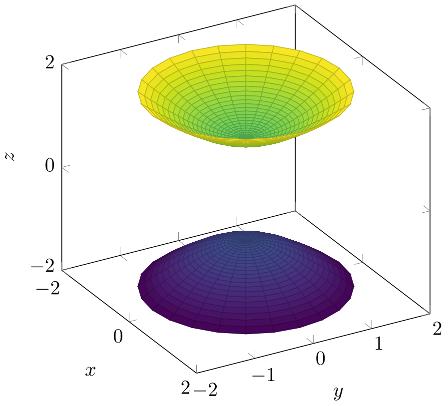
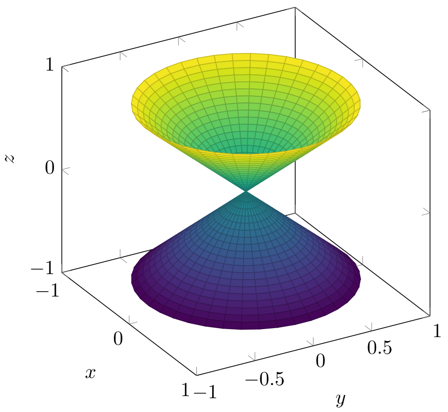
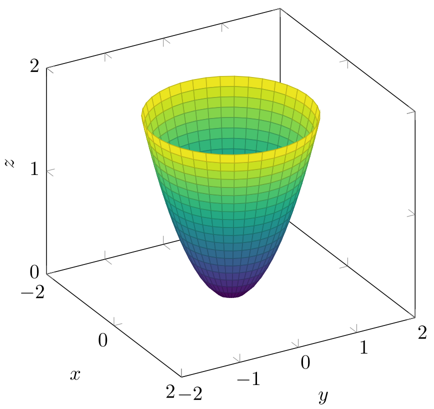
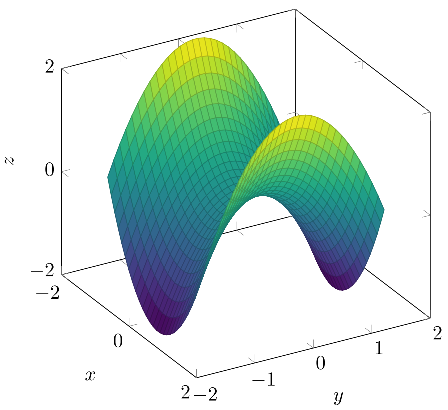
Distancias

$$D = |\text{comp}_{\vec{n}}\vec{b}| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{b}|}{|\vec{n}|}$$

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

12.6 Cilindros y superficies cuadráticas

<table>
<tr><th>Superficie cuadrática</th><th>Ecuación</th></tr>
<tr><td>Elipsoide

</td><td>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$</td></tr>
<tr><td>Hiperboloide de una hoja

</td><td>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$</td></tr>
</table>

Superficie cuadrática	Ecuación
Hiperboloide de dos hojas 	$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
Cono 	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$
Paraboloide elíptico 	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z}{c}=0$
Paraboloide hiperbólico 	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z}{c}=0$

13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio

Función vectorial

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

Límites

$$\lim_{t \to a} = \langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \rangle$$

Continuidad

$\vec{r}$ es continua en $t = a$ si

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$$

Curvas en el espacio

$$C = (x, y, z) : x = f(t), y = g(t), z = h(t), a \leq t \leq b$$

f, g y h son continuas

13.2 Derivadas e integrales de funciones vectoriales

Derivadas

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

Reglas de diferenciación

$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)] = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)] = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$$

Integrales

$$\int_a^b \vec{r}(t) = \langle \int_a^b f(t), \int_a^b g(t), \int_a^b h(t) \rangle$$

Misceláneo

Vector tangente unitario

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

13.3 Longitud de arco y curvatura

Longitud de arco

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt$$

Función longitud de arco

$$s(t) = \int_a^t |r'(u)| du$$

Curvatura

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Vector normal y binormal

Vector normal

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

Vector binormal

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

Plano normal, osculante

Plano normal

Compuesto por el vector normal y binormal

Plano osculante

Compuesto por el vector normal y tangente

Círculo osculante

Ubicado en el plano osculante, su radio está dado por:

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$$

> También llamado círculo de curvatura

13.4 Movimiento en el espacio: velocidad y aceleración

$|\vec{v}_0| = \upsilon_0$

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$$

$$\vec{v}_0 = \upsilon_0 \cos\alpha\hat{i} + \upsilon_0 \sin\alpha\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = \upsilon_0 - gt\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{j}$$

$$x = (\upsilon_0 \cos\alpha)t$$

$$y = (\upsilon_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

$$t_d = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

14.1 Funciones de varias variables

Dominio y rango

Dominio

$$D = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Rango

$$R = \{f(x, y) : (x, y) \in D\}$$

Curvas y superficies de nivel

Curvas de nivel

$$f(x, y) = k$$

Superficies de nivel

$$f(x, y, z) = k$$

14.2 Límites y continuidad

Límites

Para demostrar que el límite de una función multivariable no existe se debe encontrar valores distintos del límite al calcularlo por distintas trayectorias.

Para demostrar que el límite de una función multivariable existe se debe hacer la prueba delta, epsilon: Si para cada número $\epsilon > 0$ existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que si $\vec{v} \in D$ y $0 < |\vec{v} - \vec{v_0}| < \delta$ entonces $|f(\vec{v}) - L| < \epsilon$

Continuidad

$f(x, y)$ es continua en (a, b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

14.3 Derivadas parciales

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Teorema de Clairaut

Siendo f definida en un vecindario D que contiene el punto (a, b). Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, entonces:

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

14.4 Planos tangentes y aproximaciones lineales

Plano tangente

Forma ecuación ($z =$)

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Forma función ($f(x, y, z) =$)

$$\partial f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Aproximación lineal

Si existe f_x y f_y en (a, b, c) y son continuas en (a, b, c) entonces f es derivable.

Si f es derivable en (a, b, c) entonces $f(a, b, c) \approx L(a, b, c)$

$$L \approx z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Diferenciales

$$dz = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$$

14.5 Regla de la cadena

Caso 1

$z = f(x, y), x = g(t), y = h(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Caso 2

$z = f(x, y), x = g(s, t), y = h(s, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Diferenciación implícita

Forma ecuación ($y =$)

Derivar ambos lados de la ecuación.

Forma función ($F(x, y) =$)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

14.6 Derivadas direccionales y su vector gradiente

$$\hat{v} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$$

Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle$$

Derivada direccional

$$Duf(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \hat{v}$$

Tasa máxima de cambio

Ocurre cuando $\hat{v}$ tiene la misma dirección que ∇f.

$|\nabla f|$

14.7 Valores máximos y mínimos

Un punto críotico de f es un punto (a, b) en el dominio de f tal que $\nabla f(a, b) = \vec{0}$ o $\nabla f(a, b)$ no existe.

Un extremo local es punto crítico (a, b) donde $\nabla f(a, b) = \vec{0}$

Método para hallar extremos locales

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

1. $D > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow$ mínimo local
2. $D > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow$ máximo local
3. $D < 0 \Rightarrow$ punto silla

15.1 Integrales dobles sobre rectángulos

$R = (x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Volumen

Si $f(x, y) \geq 0$

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Teorema de Fubini

$R = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

Valor promedio

$$\frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

15.2 Integrales dobles sobre regiones generales

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA$$

Región tipo 1

$D = \{(x,y) : a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Región tipo 2

$D = \{(x,y) : c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Propiedades

$$\iint_D g(x)h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy$$

$$\iint_D 1\,dA = A(D)$$

$$mA(D) \le \iint_D f(x,y)\,dA \le MA(D)$$

15.3 Integrales dobles en coordenadas polares

Coordenadas cartesianas y polares

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = rcos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Integral

$D = \{(r,\theta) : \alpha \le \theta\beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$

$$\iint_D g(x)h(y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta$$

15.6 Integrales triples

$B = \{(x,y,z) : a \le x \le b, c \le y \le d, r \le z \le s\}$

$$\iiint_B f(x,y)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V$$

Teorema de Fubini

$B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$

$$\iiint_B f(x,y)\,dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

Integrales triples sobre regiones generales

Región tipo 1

$E = \{(x,y,z) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Región tipo 2

$E = \{(x,y,z) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

Propiedades

$$\iiint_E 1\,dV = V(E)$$

Masa

$$m = \iiint_E \rho\,dV$$

15.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Coordenadas cartesianas y cilíndricas

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x = rcos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

Integral

$E = \{(r,\theta,z) : \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), u_1(r\cos\theta, r\sin\theta) \leq z \leq u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)\}$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta,r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

15.8 Integrales triples en coordenadas esféricas

Coordenadas cartesianas y esféricas

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq \phi \leq \pi \qquad \rho \geq 0$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$r = \rho\cos\phi \qquad z = \rho\sin\phi$$

$$x = rcos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Integral

$E = \{(\rho, \theta, \phi) : a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \cos\phi)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

16.1 Campos vectoriales

$$\vec{F}(x, y) = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

Campos conservativos

Un campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo si existe una función f tal que $\vec{F} = f$

La función f se llama *función potencial* de $\vec{F}$

Campo gravitacional

$$|F| = \frac{mMG}{r^2}$$

$$\vec{F} = \frac{mMG}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

16.2 Integrales de línea

$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$

Integral de línea con respecto a la longitud de arco

$$\int_C f(x, y)\, dS = \int_a^b f(\vec{r}(t))|r'(t)|\, dt$$

Integrales de línea con respecto a x y y

$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(\vec{r}(t))|x'(t)|\, dt$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(\vec{r}(t))|y'(t)|\, dt$$

Integrales de línea de campos vectoriales

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

Diferencias

Cambio de orientación de C al integrar

- Integrales de línea con respecto a x y y: Cambia el signo
- Integral de línea con respecto a la longitud de arco: No cambia el signo
- Integrales de línea de campos vectoriales: No cambia el signo

Si no cambia el signo:

$$\int_{-C} f(x, y)\, ds = \int_C f(x, y)\, ds$$

Sin embargo para las integrales de línea de campos vectoriales sigue siendo cierto:

$$\int_{-C} f(x, y)\, ds = -\int_C f(x, y)\, ds$$

> Explicación: pág. 1083

Conservación de la energía

$$W = \frac{1}{2}m|\vec{v}(b)|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}(a)|^2 = K(B) - K(A)$$

Si $\vec{F}$ es conservativo:

$$W = -P(B) + P(A)$$

Entonces:

$$K(A) + P(A) = K(B) + P(B)$$

> Ley de conservación de la energía para un campo vectorial conservativo.

16.3 Teorema fundamental de las integrales de línea

$$\int_C \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot r'(t)\, dt = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

Conjuntos

- Conjunto abierto: Todas sus fronteras están excluidas.
- Conjunto conectado: Todos los puntos en D pueden unirse por medio de una trayectoria en D.
- Curva simple: No se interseca a sí misma en un punto intermedio.
- Curva simplemente conectada: Región que no tiene huecos y no está separada en partes.

Independencia de trayectoria

$$\begin{tikzcd}
\vec{F} \text{ es conservativo y continuo en } D \arrow[r, Longrightarrow] \arrow[d, Rightarrow, shift left] & \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ es independiente de la trayectoria en } D \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \arrow[u, Rightarrow, shift left, "\substack{D \text{ es abierto} \\ D \text{ es simplemente conectado} \\ P_y,\, Q_x \text{ son continuas}}"] & \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ para toda curva cerrada en } D
\end{tikzcd}$$

16.4 Teorema de Green

∂D es suave por partes, simple, cerrada, orientada positivamente.

P_x, Q_y son continuas.

$$\int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy = \oint_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Área

$$A = \oint_C x\, dy = -\oint_C y\, dx = \frac{1}{2} \oint_C x\, dy - y\, dx$$