Definiciones

Valor absoluto

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Ejemplo

$$x^2 = 20$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{20}$$

$$|x| = \sqrt{20}$$

$$x = \pm\sqrt{20}$$

Conjunto de valores admisibles (C.V.A)

$$\frac{1}{f(x)}; f(x) \neq 0$$

$$\sqrt{f(x)}; f(x) \geq 0$$

$$\log_a f(x); f(x) > 0$$

$$a^x; a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$$

Inecuaciones

Valor absoluto

$b \geq 0$

$\lvert a\rvert < b$	$-b < a < b$
$\lvert a\rvert > b$	$b < a < -b$

$b < 0$

$\lvert a\rvert < b$	no hay solución
$\lvert a\rvert > b$	$\mathbb{R}$

Propiedades logarítmicas

$$x = log_a(n) \Leftrightarrow a^x = n$$

$$log_a n^k = klog_a n$$

$$log\ xy = log\ x + log\ y$$

$$log\left(\frac{x}{y}\right) = logx - log\,y$$

$$log_b n = \frac{log_a n}{log_a b}$$

$$log_a a^x = x$$

$$a^{log_a x} = x$$

$$log_a a = 1$$

$$log_a 1 = 0$$

$$log_a 0 = \text{indefinido}$$

Trigonometría

Medidas de ángulos en grados y radianes

30º (θ)	Radianes	Radianes (simplificado)	45º (θ)	Radianes	Radianes (simplificado)
30°	$\frac{1\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	45°	$\frac{1\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	90°	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
n°	$\frac{k\pi}{6}$		n°	$\frac{k\pi}{4}$	

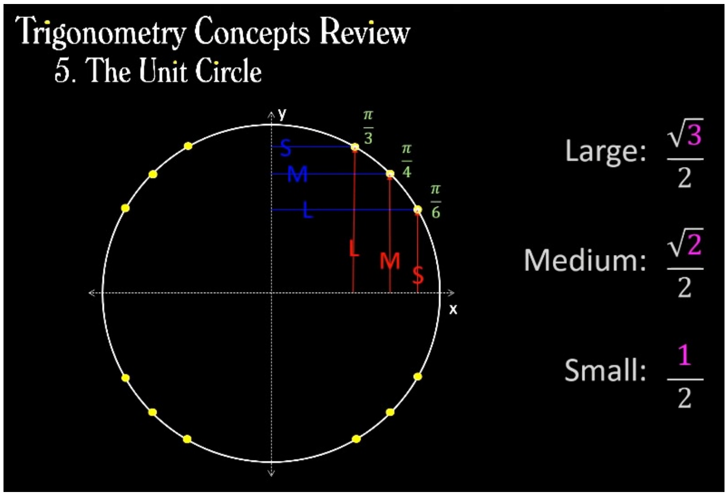
$$k = \frac{n^\circ}{\theta}$$

Tabla trigonométrica

θ	0º	30º	45º	60º	90º
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

> Recomendado: Funk da trigonometria

Visualización



Periodicidad

$$\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$$

Identidades trigonometricas

Identidades pitagóricas

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\csc^2 - \cot^2 = 1$$

Identidades ángulo doble

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

Identidad ángulo medio

$$\sin^2\theta = \tfrac{1}{2}[1 - \cos(2\theta)]$$

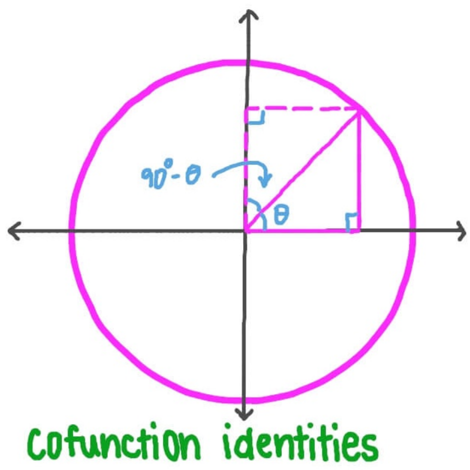
$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}[1 + \cos(2\theta)]$$

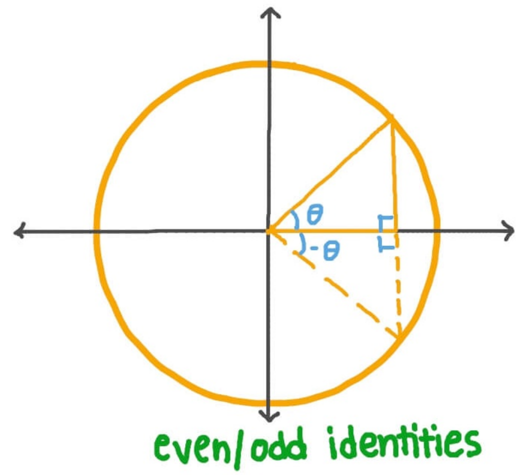
Identidad producto de ángulos

$$\sin A\cos B = \tfrac{1}{2}[\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$\sin A\sin B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$





Funciones hiperbólicas

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Funciones

Cuadrática

Discriminante

Indica el número de soluciones

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	$x = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	no hay solución

Combinación

$$(f+g)x = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)x = f(x) - g(x)$$

$$(fg)x = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$(f \circ g) = f(g(x))$$

Límites

Leyes

$\exists \lim_{x\to c} f(x) \wedge \exists \lim_{x\to c} g(x)$

$$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c}[cf(x)] = c\lim_{x\to c} f(x)$$

$$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}; \lim_{x\to c} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n \iff f(x) > 0 \wedge n > 0$$

Regla de L'Hôpital

Se puede aplicar múltiples veces mientras la condición se cumpla.

$\lim_{x\to c} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \vee \lim_{x\to c} f(x) = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \frac{N'}{D'}$$

Ejemplo

$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \frac{2x-4}{2x+1} = \frac{0}{5} = 0$$

Límites notables

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\pm\infty} (\pm)n = (\pm)\pm\infty$$

Si un límite es igual a infinito, no existe pero se denota que tiende a infinito.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0; \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}; \lim_{x\to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Casos en los que no existe

El límite izquierdo no es igual al derecho

$$\lim_{x\to c^+} \neq \lim_{x\to c^-}$$

Función que oscila alrededor de c

Ejemplo

$c = 0$

$$\lim_{x\to c} = \sin\left(\frac{n}{x}\right)$$

Función que oscila hacia el infinito

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} = \sin(x)$$

Continuidad

$$f(a) = n \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) = n$$

> Función es continua != Función es continua en un punto. Para saber si f es continua se debe evaluar el dominio.

Cálculo de asíntotas

Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Asíntota vertical

$$\text{es asíntota horizontal } \Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

Teorema del sandwich

$$f(x) \le h(x) \le g(x)$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \alpha \wedge \lim_{x\to c} g(x) = \alpha \Longleftrightarrow \lim_{x\to c} h(x) = \alpha$$

Derivadas

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x)}{h}$$

Casos en los que no se puede derivar (punto)

1. Recta tangente es vertical
2. f es discontinua
3. "Giro" brusco

Derivadas notables

Función	Derivada
$f(x) = ax$	$f(x) = a(x)'$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

Función	Derivada
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \sec x \tan x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$

n-ésima derivada

Función	Derivada
$f(x) = xe^x$	$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x$

Recta tangente, normal

La pendiente de la recta tangente es igual a la derivada evaluada en una constante.

$m_{L_T} = f'(a)$

La recta normal es perpendicular a la tangente, por tanto:

$m_{L_N} = -\frac{1}{m_{L_T}}$

Para obtener la ecuación de la recta tangente o la recta normal se usa:

$$y - f(a) = m(x - a)$$

> Si te piden linealizar, significa que debes calcular la recta tangente.

Reglas

Regla del producto

$$(fg)' = fg' + f'g$$

Regla del cociente

$$\left(\frac{N}{D}\right)' = \frac{DN' - D'N}{D^2}$$

Regla de la cadena

$$\left[(f(x))^n\right]' = nf(x)^{n-1}f'(x)$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

Derivación implícita

Se deriva con respecto a una variable, el resto de variables son tratadas como funciones.

Se deriva ambos lados de la ecuación.

$$\sin(x + y) + e^y + xy^2 = 5$$

Encuentre $y' \left[\frac{dy}{dx}\right]$

$$\cos(x + y)(1 + y') + e^y y' + x2yy' + y^2 = 0$$

$$\cos(x+y) + y'\cos(x+y) + e^y y' + 2xyy' + y^2 = 0$$

$$y'[\cos(x+y) + e^y + 2xy] = -[\cos(x+y) + y^2]$$

$$y' = -\frac{\cos(x+y) + y^2}{\cos(x+y) + e^y + 2xy}$$

Encuentre $x'\left[\frac{dx}{dy}\right]$

$$\cos(x+y)(x'+1) + e^y + x2y + x'y^2 = 0$$

$$\cos(x+y) + x'\cos(x+y) + e^y + 2xy + x'y^2 = 0$$

$$x'[\cos(x+y) + y^2] = -[\cos(x+y) + e^y + 2xy]$$

$$x' = -\frac{\cos(x+y) + e^y + 2xy}{\cos(x+y) + y^2}$$

Derivación logarítmica

Es útil para simplificar ecuaciones con exponentes abundantes.

Ejemplo

$y = \frac{\sqrt{x+1}}{(x+3)^3\sqrt[3]{x+4}}$

Tomamos logaritmo natural de ambos lados.

$$\ln[y] = \ln\left[\frac{\sqrt{x+1}}{(x+3)^3\sqrt[3]{x+4}}\right]$$

$$\ln y = \ln(\sqrt{x+1}) - \ln[(x+3)^3\sqrt[3]{x+4}]$$

$$\ln y = \ln(x+1)^{\frac{1}{2}} - [\ln(x+3)^3 + \ln(x+4)^{\frac{1}{3}}]$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x+1) - 3\ln(x+3) - \frac{1}{3}ln(x+4)$$

Derivamos.

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}(1) - 3\frac{1}{x+3}(1) - \frac{1}{3}\frac{1}{x+4}(1)$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x+3} - \frac{1}{3(x+4)}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x+1}}{(x+3)^3\sqrt[3]{x+4}}\left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x+3} - \frac{1}{3(x+4)}\right]$$

Optimización

1. Identificar la función a optimizar.

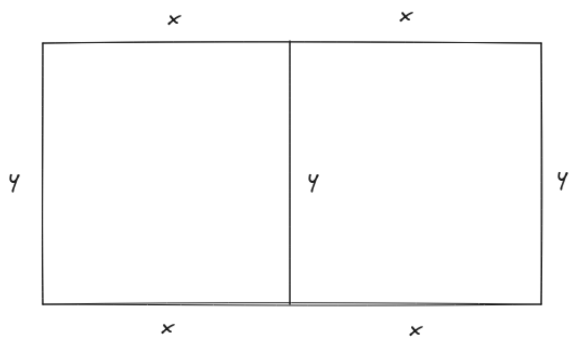
2. Obtener una función que se correlacione con el dato de entrada.
3. Combinar ambas funciones por medio de sustitución.
4. Derivar la función compuesta e igualar a cero, obtener los cortes con el eje x.
5. Si es necesario comprobar, derivar nuevamente la función compuesta y reemplazar con los valores obtenidos de x.

   $f''(x) > 0 \rightarrow$ Punto mínimo

   $f''(x) < 0 \rightarrow$ Punto máximo
6. Reemplazar el valor de x obtenido en el paso 4 en la función compuesta original (en general, también depende de lo que se requiera).

Ejemplo

Un ranchero tiene 300m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.



1. $A = 2xy$
2. $P = 4x + 3y$

   $y = \frac{300-4x}{3}$
3. $A = 2x\left(\frac{300-4x}{3}\right)$

   $A = -\frac{8}{3}x^2 + 200x$
4. $A' = 0$

   $-\frac{16}{3}x + 200 = 0$

   $x = 37{,}5$
5. $A'' = -\frac{16}{3}$

   $A''(37{,}5) = -\frac{16}{3}$

   $A''(37{,}5) < 0 \rightarrow$ Punto máximo
6.

   $y = \frac{300-4(37{,}5)}{3} = 50$

   Dimensiones para maximizar el área:

   - $x = 37{,}5$
   - $y = 50$