Suma de Riemann

$f(x) = 3x + 2$

$[1, 3]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x \cdot i$$

$$x_i = 1 + \frac{2}{n}i = 1 + \frac{2i}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[3\left(1 + \frac{2i}{n}\right) + 2\right]\frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[3 + \frac{6i}{n} + 2\right]\frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[5 + \frac{6i}{n}\right]\frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{10}{\cancel{n}} + \frac{12\cancel{i}}{\cancel{n^2}}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[10 + \frac{12}{2}\right] = 16$$

Aproximaciones

Método	Ecuación
Esquina superior izquierda	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$
Esquina superior derecha	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i + \Delta x)\Delta x$
Punto medio	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i + \Delta x/2)\Delta x$

Integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Definida

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Indefinida

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Integrales notables

Integral	Función primitiva
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\int \sec^2 x\,dx$	$\tan x + c$
$\int \csc^2 x\,dx$	$-\cot x + c$
$\int \sec x \tan x\,dx$	$\sec x + c$
$\int \csc x \cot x\,dx$	$-\csc x + c$
$\int \sinh x\,dx$	$\cosh x + c$
$\int \cosh x\,dx$	$\sinh x + c$
$\int \sec x\,dx$	$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + c$
$\int \csc x\,dx$	$\ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + c$
$\int \tan x\,dx$	$\ln\lvert\sec x\rvert + c$
$\int \cot x\,dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\arctan x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin x + c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + c$

Propiedades de las integrales

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$m \le f(x) \le M \Longrightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Cálculo de área

Área total

$$\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$$

Área neta

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema Fundamental del Cálculo. Parte 1

$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$

$$F'(x) = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$$

Método de sustitución

$x = g(t)$

$dx = g'(t)\,dt$

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

Ejemplo

$\int \tan x\,dx$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$$\int \frac{(-du)}{u}$$

$$-\int \frac{1}{u}\,du$$

$$-\ln|u| + c$$

$$-\ln|\cos x| + c$$

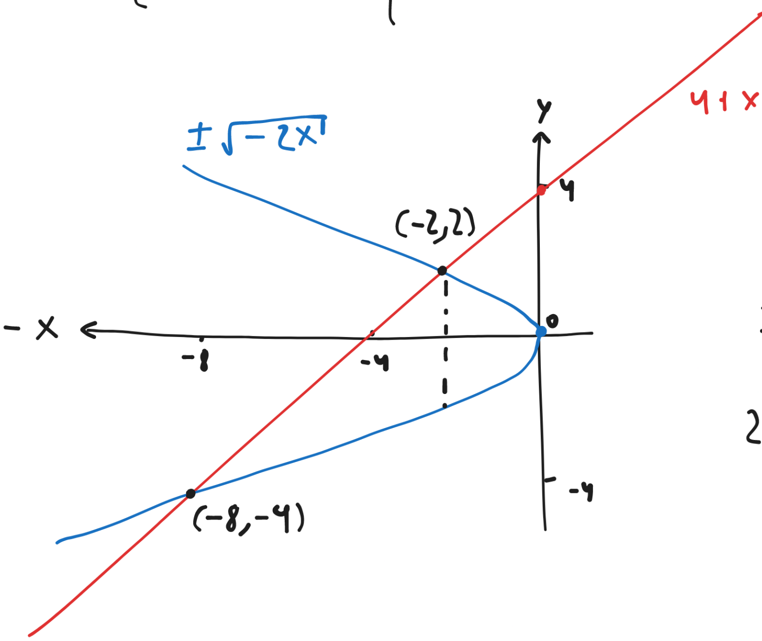
Cálculo de área entre curvas

$$\int f(x) - g(x)\,dx$$

> $f(x)$ función exterior
> $g(x)$ función interior

Por partes

$$\begin{cases} y^2 = -2x \\ y - x = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \pm\sqrt{-2x} \\ y = 4 + x \end{cases}$$



$$\int_{-8}^{0} f(x) - g(x)\,dx$$

$$2\int_{-2}^{0} \sqrt{-2x}\,dx + \int_{-8}^{-2} 4 + x - (-\sqrt{-2x})\,dx$$

Cambio de ejes

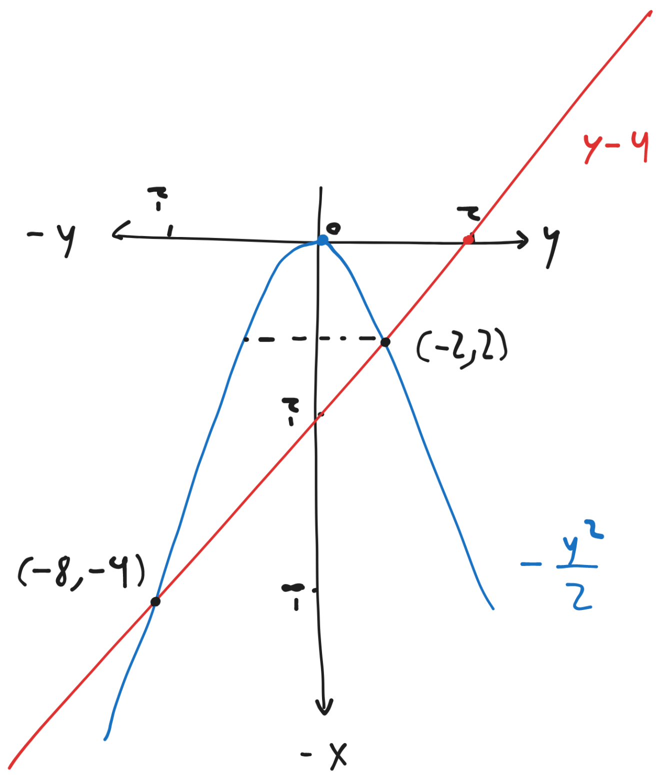
$$\begin{cases} y^2 = -2x \\ y - x = 4 \end{cases}$$

Obtenemos la inversa

$$x^2 = -2y \qquad x - y = 4$$

$$y = -\frac{x^2}{2} \qquad y = x - 4$$

$$\begin{cases} x = -\frac{y^2}{2} \\ y = y - 4 \end{cases}$$



$$\int_{-4}^{2} f(y) - g(y)\, dy$$

$$\int_{-4}^{2} -\frac{y^2}{2} - [y-4]\, dy$$

Volúmenes de revolución

Desplazamiento del eje de rotación con respecto al origen	Signo después de a
> 0	$-$
< 0	$+$

Método de discos

$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$

> $V = \pi \int_a^b f(a \pm x)^2 - g(a \pm x)^2\, dx$

- Giro en $x \rightarrow dx$
- Giro en $y \rightarrow dy$

Método de cascarones cilíndricos

$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$

> $V = 2\pi \int_a^b (a \pm x)[f(x) - g(x)]\, dx$

- Giro en $x \rightarrow dy$

- Giro en $y \to dx$

Trabajo

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

Trabajo de un resorte

$$W = k \int x\,dx$$

Trabajo hidráulico

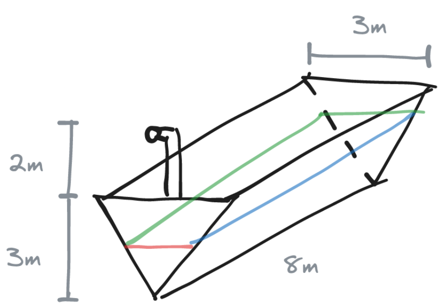
$$W = \rho g \int_a^b V h\,dy$$

> $\rho = 10^3 \frac{kg}{m^3} = 62.5 \frac{lb}{ft^3}$
>
> $g = 10 \frac{m}{s^2} = 32.1 \frac{ft}{s^2}$

Pasos

1. Identificar límites (rango en el que el agua está almacenada)
2. Identificar altura (rango de extracción)
3. Encontrar expresión de volumen
   - Identificar área de sección transversal

Ejemplo



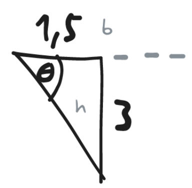
1. $\int_0^3$

2. $h = 5 - y$

3. $V = A\,dy$

$V = 8y\,dy$

$$\rho g \int_0^3 8y\,(5-y)\,dy$$



$\tan\theta = \frac{co}{ca} = \frac{h}{b/2}$

$\tan\theta = \frac{3}{1,5} = 2$

$\frac{h}{b/2} = 2$

$\frac{b}{2} = \frac{h}{2}$

$b = h$

$x = y$

Integración por partes

$$udv = uv - \int vdu$$

> Un día ví una vaca sin cola vestida de uniforme

Para selección de u

$$\begin{array}{ll} I & \text{nversa} \\ L & \text{ogarítmica} \\ A & \text{lgebraica} \\ T & \text{rigonométrica} \\ E & \text{xponencial} \end{array}$$

Ejemplo

$\int \ln x \, dx$

$\begin{array}{rr} u = \ln x & dv = 1\, dx \\ du = \frac{1}{x}\, dx & v = x \end{array}$

$$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int x \frac{1}{x} \, dx$$

$$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int 1 \, dx$$

$$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - x + c$$

Ejemplo

$\int \frac{\ln x}{x}$

$$\int \ln x \frac{1}{x}$$

$\begin{array}{rr} u = \ln x & dv = \frac{1}{x}\, dx \\ du = \frac{1}{x}\, dx & v = \ln x \end{array}$

$$\int \ln x \frac{1}{x} = \ln x \ln x - \int \ln x \frac{1}{x} \, dx$$

$$2 \int \ln x \frac{1}{x} = \ln x \ln x$$

$$\int \frac{\ln x}{x} = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

Valor promedio

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Integrales trigonométricas

$\sin^n x$ - n es impar

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = \int \cos^m x (\sin^2 x)^{n-1} \sin x \, dx$$

Ejemplo

$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$

$$\int \cos^2 x (\sin^2 x)^2 \sin x \, dx$$

$$\int \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$$-\int u^2 (1 - u^2)^2 \, du$$

$$-\int u^2 - 2u^4 + u^6$$

$$-\frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c$$

$$-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

$\cos^n x$ **-** n **es impar**

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^{n-1} \cos x \, dx$$

Ejemplo

$\int \cos^3 x \, dx$

$$\int (\cos^2 x) \cos x \, dx$$

$$\int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$$

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$$\int (1 - u^2) \, du$$

$$u - \frac{u^3}{3} + c$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$\sin^n x$ **o** $\cos^n x$ **-** n **es par**

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Ejemplo

$\int \sin^4 x \, dx$

$$\int (\sin^2 x)^2 \, dx$$

$$\int \left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]^2 \, dx$$

$$\int \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right]^2 \, dx$$

$$\int \left[\frac{1}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos^2(2x)}{4}\right] \, dx$$

$$\frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right] \, dx$$

$\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(2(2x))}{2}$

$$\frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos(2x) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(4x)}{2}\right)\right] \, dx$$

$$\frac{1}{4}\int \left[\frac{3}{2} - 2\cos(2x) + \frac{\cos(4x)}{2}\right] \, dx$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin(2x) + \frac{\sin(4x)}{8}\right] + c$$

$\tan^n x$ **-** n **es impar**

$$\int \tan^n x \sec^m x \, dx = \int \sec^{m-1} x (\tan^2 x)^{n-1} \sec x \tan x \, dx$$

Ejemplo

$\int \tan^5 x \sec^7 x \, dx$

$$\int \sec^6 x (tan^2 x)^2 \sec x \tan x \, dx$$

$$\int \sec^6 x (\sec^2 x - 1)^2 \sec x \tan x \, dx$$

$u = \sec x \, dx$

$du = \sec x \tan x \, dx$

$$\int u^6 (u^2 - 1)^2 \, du$$

$$\int u^{10} - 2u^8 + u^6 \, du$$

$$\frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + c$$

$$\frac{\sec^{11} x}{11} - \frac{2\sec^9 x}{9} + \frac{\sec^7 x}{7} + c$$

$\sec^n x$ **-** n **es par**

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx = \int \tan^m x (\sec^2 x)^{n-2} \sec^2 x \, dx$$

Ejemplo

$\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$

$$\int \tan^6 x (\sec^2 x) \sec^2 x \, dx$$

$$\int \tan^6 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x$

$$\int u^6 (1 + u^2) \, du$$

$$\int u^6 + u^8 \, du$$

$$\frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + c$$

$$\frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} + c$$

Producto de potencias seno y coseno

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

Ejemplo

$\int \sin 4x \cos 5x \, dx$

$$\int \frac{1}{2} [\sin(4x - 5x) + \sin(4x + 5x)] \, dx$$

$$\frac{1}{2} \int \sin x + \sin 9x \, dx$$

$$\frac{1}{2} \left[-\cos x - \frac{\cos 9x}{9} \right] + c$$

Sustituciones trigonométricas

$$\sqrt{a^2 - x^2}, x = a\sin\theta$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}, x = a\tan\theta$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}, x = a\sec\theta$$

Pasos

1. Identificar ST (sustitución trigonométrica)
2. Encontrar derivada de ST
3. Simplificar ST
4. Usar ST en la integral
5. Regresar a la variable original

Ejemplo

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\,dx$$

$u = \frac{x+1}{2}$

$du = \frac{1}{2}\,dx$

$$\int \frac{2}{\sqrt{(2u)^2+4}}\,du$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{4u^2+4}}\,du$$

$$\int \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{u^2+1}}\,du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$$

$u = a\tan\theta \longrightarrow \tan\theta$

$du = \sec^2\theta\,d\theta$

$\sqrt{a^2+u^2} \longrightarrow \sqrt{1+\tan^2\theta} \longrightarrow \sec\theta$

$$\int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta$$

$$\int \sec\theta\,d\theta$$

$$\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$\ln|\sqrt{u^2+1} + u| + c$$

$$\ln\left|\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}+\frac{x+1}{2}\right|+c$$

Integración racional: fracciones parciales

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$P(x)$ es menor en grado que $Q(x)$

Pasos

1. Descomponer en factores $Q(x)$ tan cuánto se pueda
2. Formular fracciones parciales
3. Encontrar m.c.m
4. Encontrar coeficientes
    - Sustitución con valor de x. Disponible para: raíces reales y diferentes, raíz repetida del grado más alto
    - Comparación entre numerador original y numerador m.c.m
    - Resolver sistema de ecuaciones
5. Reemplazar coeficientes en fracciones parciales e integrar

Caso 1: Raíces reales y diferentes

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

Caso 2: Raíces reales y repetidas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)^1} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Caso 3: Raíces complejas y diferentes

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_x+B}{ax^2+bx+c}$$

Caso 4: Raíces complejas y repetidas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^1} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Longitud de curva

$$\int \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Área superficial

	$y = f(x)$	$x = f(x)$
eje x	$\int 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$	$\int 2\pi y\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy$
eje y	$\int 2\pi x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$	$\int 2\pi f(y)\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy$

Integral impropia

Sirve para calcular área de $f(x), a \leq x \leq b$ cuando a o b no están definidos

Definición tipo 1

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

Definición tipo 2

$f(x) = [a, b)$

$$\lim_{t\to b^-} = \int_a^t f(x)\,dx$$

Teorema de comparación

Condiciones

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \wedge f \text{ y } g \text{ son continuas en } x \geq a$$

Casos

Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ es convergente

Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente

Propiedades de los factoriales

$$n! = n(n-1)!$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

Sucesiones

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Teoremas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \lim_{x\to\infty} f(x) = L \wedge f(n) = a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L) \iff \lim_{n\to\infty} a_n = L \wedge f \text{ es continua en } L$$

Sucesión r^n

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} -1 < r < 1 & 0 \\ r = 1 & 1 \\ r > 1 & \infty \end{cases}$$

Series

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Serie aritmética

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^{n}$$

$$S_n = \begin{cases} |r| < 1 & \frac{a}{1-r} \\ |r| \geq 1 & \infty \end{cases}$$

Serie tipo P

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\begin{array}{cc} p > 1 & \text{convergente} \\ p \leq 1 & \text{divergente} \end{array}$$

Prueba de convergencia

$$S_n \text{ es convergente } \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Prueba de divergencia

$$S_n \text{ es divergente } \iff \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \vee \nexists \lim_{n\to\infty} a_n$$

Prueba de la integral

f es continua, positiva y decreciente sobre $(1, \infty]$

$$\int_1^{\infty} f(x) \text{ es convergente } \implies S_n \text{ es convergente}$$

$$\int_1^{\infty} f(x) \text{ es divergente } \implies S_n \text{ es divergente}$$

Prueba por comparación

Véase teorema de comparación

Prueba por comparación del límite

Donde $a_n < b_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Estimación de la suma de una serie

f es continua, positiva, decreciente sobre $x \geq n$ y S_n es convergente

$$R_n = S - S_n$$

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \leq S \leq S_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx$$

Serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n\pm a}b_n = \sum_{n=1}^{\infty} cos(n\pi)b_n$$

$$S_n \text{ es convergente } \iff b_n \geq b_{n+1} \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Estimación de la suma de una serie alternante

$$|R_n| = |S - S_n| \leq b_{n+1}$$

Convergencia absoluta

$$S_n \text{ es absolutamente convergente } \iff |S_n| \text{ es convergente}$$

Prueba de la razón

$T = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$S_n \text{ es } \begin{cases} T < 1 & \text{absolutamente convergente} \\ T = 1 & \text{T no es concluyente} \\ T > 1 & \text{divergente} \end{cases}$$

Prueba de la raíz

$T = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$$S_n \text{ es } \begin{cases} T < 1 & \text{absolutamente convergente} \\ T = 1 & \text{T no es concluyente} \\ T > 1 & \text{divergente} \end{cases}$$

Serie de potencias

En torno a 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

En torno a a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Casos

1. La serie converge cuando $x = a$
2. La serie converge para toda x
3. Hay un número positivo R tal que:
    - converge: $|x-a| < R$
    - diverge: $|x-a| > R$

Coeficientes enésimos

En torno a 0

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

En torno a a

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Serie de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{1-x} & \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots & R = 1 \\
e^x & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots & R = \infty \\
\sin x & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots & R = \infty \\
\cos x & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots & R = \infty \\
\arctan x & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots & R = 1 \\
\ln(1+x) & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots & R = 1 \\
(1+x)^k & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 & R = 1
\end{array}$$

> Series importantes de Maclaurin y sus radios de convergencia

Serie de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Numeros imaginarios

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

Números complejos

Compuestos por una parte real y una parte imaginaria

$$z = a + bi$$

Operaciones

Suma

$$z_1 + z_2 = a + c + (b + d)i$$

Resta

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Multiplicación

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Conjugado

$z = a + b_i$

$$\bar{z} = a - b_i$$

Propiedades

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{zw} = \overline{zw}$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

Representación polar

Pasos

1. $$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. $$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

3. $$z = r(\cos\theta + \sin\theta)$$

Operaciones

Multiplicación

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)i]$$

División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)i]$$

Exponenciación

$$z^n = r^n[cos(n\theta) + \sin(n\theta)i]$$

Fórmula de Euler

$$e^{iy} = \cos y + \sin(y)i$$

Curvas paramétricas

- Su comportamiento es dominado por el parámetro
- Tienen dirección

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Derivación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Área

$$\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt$$

Longitud de arco

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Superficie

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$