Оптимизатор пружин в пружинных амортизаторах под заданные критерии для посадочных модулей.

Цель оптимизатора.

Цель оптимизатора заключается в упрощении поиска пружин с определёнными требованиями. Он позволяет указать диапазон решений, в котором однозначно найдётся пружина, которая выдержит реальные условия. Таким образом, оптимизатор экономит огромное количество времени на подбор параметров.

Идея оптимизации.

Главная идея состоит в том, чтобы рассмотреть момент максимального сжатия пружины и подобрать такие её характеристики, чтобы в этот момент ускорение, которое она даёт, не превышало заданное.

Обоснование обязательного использования оптимизатора совместно с симулятором.

Как уже следует из идеи оптимизации, оптимизатор несамостоятелен. Дело в том, что в реальных пружинах максимальное ускорение не обязательно будет в момент максимального сжатия. Оно может быть заключено между моментом максимального сжатия и моментом касания пружины поверхности. Это обусловлено наличием силы вязкого трения в пружине. Более того, в оптимизаторе нет проверок на касание витков, плавление и разрушение пружины из-за превышения критического напряжения в материале. Именно поэтому оптимизатор необходимо использовать вместе с симулятором.

Вывод формул.

Допустим, нам известен материал, из которого мы хотим сделать пружину (а точнее, его плотность и модуль сдвига), коэффициент жёсткости пружины, отношение диаметра пружины к диаметру проволоки пружины, длина пружины, эквивалентная масса аппарата, начальная скорость падения аппарата, высота крепления пружины к аппарату, ускорение свободного падения у поверхности космического тела и кратность перегрузки, которую мы не хотим превзойти. Все эти характеристики соответственно: $p, G, k, \beta, l, M, V_0, h, g, n$. Сделаем по этим характеристикам такую пружину, которая выполнит все требования.

Как известно из документации симулятора, коэффициент жёсткости пружины и её масса рассчитываются следующими образами:

$$k = \frac{Gd^4}{8ND^3} = \frac{Gd}{8N\beta^3},$$

$m = \frac{\pi^2 N d^2 D p}{4} = \frac{\pi^2 \beta d^3 p}{4}$, где “$D$” – диаметр пружины, “$N$” – количество витков пружины, “m” – масса пружины.

Выразив из первого выражения количество витков пружины и подставив его во второе, получим:

$$N = \frac{Gd}{8\beta^3 k},$$

$$m = \frac{\pi^2 G d^4 p}{32\beta^2 k}.$$

Запишем второй закон Ньютона на точку крепления пружины в момент максимального сжатия:

$Ma = kx - Mg$, где “a” – ускорение аппарата в данный момент, “x” – сжатие пружины.

Выразим отсюда ускорение аппарата в данный момент:

$$a = \frac{kx}{M} - g.$$

Так как по условию мы не должны превзойти определённую перегрузку, то должно соблюдаться следующее условие:

$$a \leq ng;$$

$$\frac{kx}{M} \leq g(n+1).$$

Найдем сжатие пружины из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{V_0^2(M+m)}{2} + Mg(h+h_M) + mg\left(h - \frac{l}{2}\right) =$$

$$= \frac{kx^2}{2} + \frac{mg(l-x)}{2} + Mg(l - x + h_M).$$

Тут “h_M” – расстояние от центра масс аппарата до точки крепления пружины к аппарату.

После преобразований мы получим следующее квадратное уравнение:

$$kx^2 - g(2M+m) * x - (M+m)(2g(l-h) - V_0^2) = 0.$$

После решения этого уравнения мы получим следующие ответы:

$$x = \frac{g(2M+m) \pm \sqrt{g^2(2M+m)^2 + 4k(M+m)(2g(h-l)+V_0^2)}}{2k}.$$

Внимательно посмотрим на второй ответ. Второе слагаемое в подкоренной сумме будет положительным, потому что мы рассматриваем падение с определённой высоты (“$h > l$”). Поэтому в итоге мы получим отрицательное сжатие, что невозможно. Значит, итоговый правильный ответ:

$$x = \frac{g(2M+m) + \sqrt{g^2(2M+m)^2 + 4k(M+m)(2g(h-l)+V_0^2)}}{2k}.$$

Теперь после подстановки выражения для сжатия пружины в неравенство и преобразований, получим, какую массу не должна превосходить пружина, чтобы избежать перегрузки:

$$m \leq \frac{M\left(Mg^2\left(n^2-1\right) + k\left(2g(l-h) - V_0^2\right)\right)}{Mg^2(n+1) + k(2gh + V_0^2)}.$$

Выражая массу пружины по формуле выше, получаем неравенство для диаметра проволоки пружины:

$$d \leq 2\sqrt[4]{\frac{2\beta^2 kM(Mg^2(n^2-1)+k\left(2g(l-h)-V_0^2\right))}{\pi^2 pG(Mg^2(n+1)+k\left(2gh+V_0^2\right))}}.$$

Очень важная деталь заключается в числителе последнего полученного выражения: он не всегда может быть положительным из-за второго слагаемого суммы. Он обязан быть больше нуля, иначе пружину мы не подберём. Давайте рассмотрим его отдельно:

$$2\beta^2 kM(Mg^2(n^2-1)+k(2g(l-h)-V_0^2)) > 0.$$

После преобразований мы получим, какую высоту мы не должны превышать, если мы хотим вообще найти эту пружину:

$$h < l + \frac{Mg(n^2-1)}{2k} - \frac{V_0^2}{2g}.$$