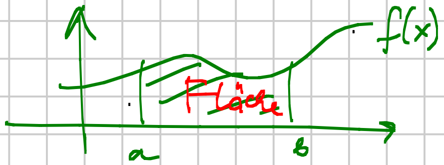
$\stackrel{\circ}{=} 3 \ln|x| + 4 \cdot \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+10) + 4 \cdot 3 \arctan(x-3) - \arctan(x-3)$

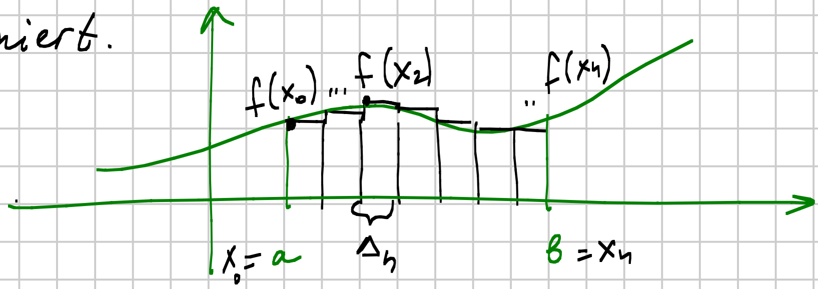
$+ C = 3 \cdot \ln|x| + 2\ln|x^2-6x+10) + 11 \arctan(x-3) + C.$

IV.5 Das bestimmte Integral

Die Berechnung von Flächeninhalten ist eine der ältesten Aufgaben der Mathematik. Für Dreieck oder Rechteck sind die Formeln bekannt. Wie rechnet man die Fläche, wenn mindestens eine der Seiten durch eine nichtlineare Funktion gegeben ist?



Die Idee ist, die stetige Funktion durch eine Treppenfunktion anzunähern, dabei wird die Fläche zwischen $f(x)$ und x-Achse im Intervall $[a,b]$ durch eine Summe von Rechtecksflächen approximiert.



Unterteilen wir das Intervall $[a,b]$ in n Intervalle gleicher Länge $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$, so ist die Summe der dargestellten Rechtecksflächen gleich $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta_n$, wobei $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta_n$, $x_2 = a + 2\Delta_n, \dots, x_n = a + n \cdot \Delta_n = b$. Je kleiner die Intervalle, so wird die Fläche unter dem Funktionsgraphen immer besser durch F_n angenähert.

<u>Definition</u> Sei f eine auf $[a,b]$ stetige Funktion. Setzen wir $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$ und $x_k = a + k \cdot \Delta_n$ für $k = 0, \dots, n$. Dann konvergiert die Folge der Rechtecksflächen $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_n$. Mann nennt ihren Grenzwert das bestimmte Integral von f auf dem Inter-

vall das bestimmte Integral von f auf dem Intervall $[a,b]$ und schreibt ihn in der Form $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_n$.

Dabei heißt $f(x)$ Integrand, x Integrationsvariable, a und b untere bzw. obere Integrationsgrenze und $[a,b]$ das Integrationsintervall.

<u>Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</u>: Sei f stetig auf $[a,b]$ und F irgendeine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

<u>Bemerkung</u> Die Definition ist unabhängig von der gewählten Stammfunktion. Sei $G = F + C$. Dann $G(b) - G(a) =$
$= F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$.

IV.5.1 Berechnung bestimmter Integrale

<u>Beispiel</u>: 1) $\int_1^2 (3x^2+1)\,dx = x^3 + x\Big|_1^2 = 8+2-(1+1) = 8.$

2) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0$

3) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ existiert nicht, da Pol bei $x=0$

Sätze über Integrationsgrenzen

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ <u>Bew</u>. $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, <u>Bew</u> $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =$

$= -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) Sei $c \in D_f$, $f(x)$ integrierbar auf D_f

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{F(b)-F(a)} = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{F(c)-F(a)} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{F(b)-F(c)}$$

4) Sind $f(x), g(x)$ integrierbar, so sind auch $f+g$ und $c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$ integrierbar. Es gilt:

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx .$$

$$\int_a^b c \cdot f\,dx = c \cdot \int_a^b f\,dx$$

5) $$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{t=\Phi(a)}^{t=\Phi(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

mit $x = \varphi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x) = \Phi(x)$

Beispiel 1) $I = \int_0^{\pi} \cos(x-3)\,dx$

Substitution: $t = x-3$; $dx = dt$; $x = 0 \Rightarrow t = -3$

$x = \pi \Rightarrow t = \pi - 3$

$$I = \int_{-3}^{\pi-3} \cos t\,dt = \sin t \Big|_{-3}^{\pi-3} = \sin(\pi-3) - \sin(-3) =$$

$$= \underbrace{\sin\pi}_{=0} \cos(+3) - \sin 3 \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + \sin 3 =$$

$$= \underline{\underline{2 \sin 3}}.$$

2) $$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \cos x\,dx \;\circledeq\; \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x\,dx \\ t_1 = \sin \pi/6 = \frac{1}{2} \\ t_2 = \sin \pi/2 = 1 \end{array} \right|$$

$$\circledeq \int_{t_1=1/2}^{t_2=1} t^5\,dt = \frac{t^6}{6}\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{6} - \frac{(1/2)^6}{6} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{\cancel{6}_{2}} \cdot \frac{\cancel{63}^{21}}{64} = \frac{21}{128}$$

3) $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x\,dx \;\circledeq\; \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \sin x \cdot dx \\ t_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \sin \pi/2 = 1 \end{array} \right|$$

$$\circledeq \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

4) $I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \overset{\bigcirc}{=}$

$t := \arctan x; \quad t_1 = \arctan 0 = 0$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{1+x^2}; \quad t_2 = \arctan 1 = \pi/4$

Es gilt $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$ Typ 2 (Abschnitt IV.3.2)

$f(y(x)) \cdot y'(x)$

$$\overset{\bigcirc}{=} \int_0^{\pi/4} t\,dt = \frac{1}{2}t^2 \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - 0\right) = \frac{\pi^2}{32}.$$

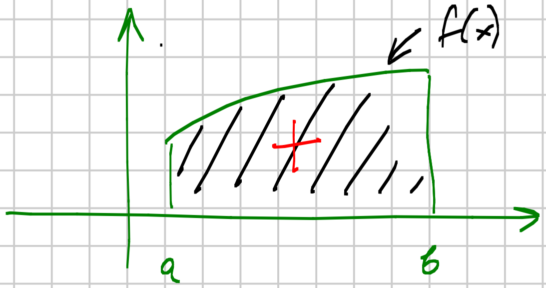
IV.5.2. Flächenberechnung

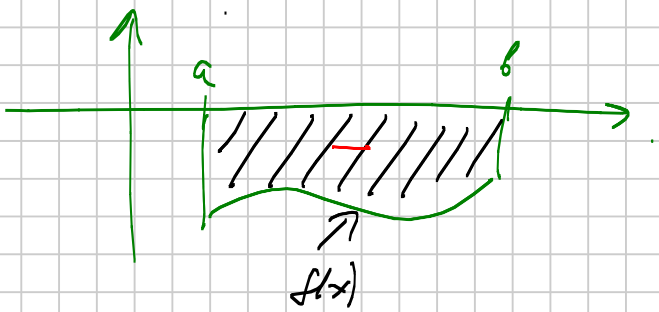
Definition Es sei $f(x)$ auf $[a,b]$ stetig und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$.
Dann heißt $A = \int_a^b f(x)\,dx$ der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f.

Eigenschaften

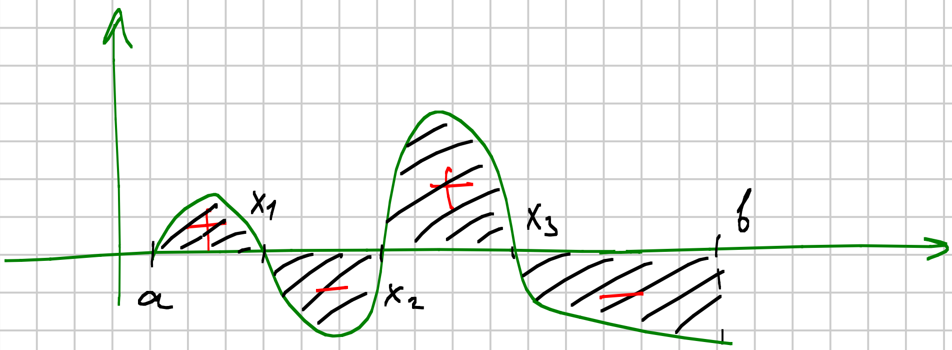
1) Wenn $f(x) \geq 0$ für $x \in [a,b] \Rightarrow I = \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

2) Wenn $f(x) \leq 0$ für $x \in [a,b] \Rightarrow I \leq 0 \Rightarrow A = -I \geq 0$





3) Nimmt $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ sowohl positive als auch negative Werte an, so müssen zunächst die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ bestimmt werden.

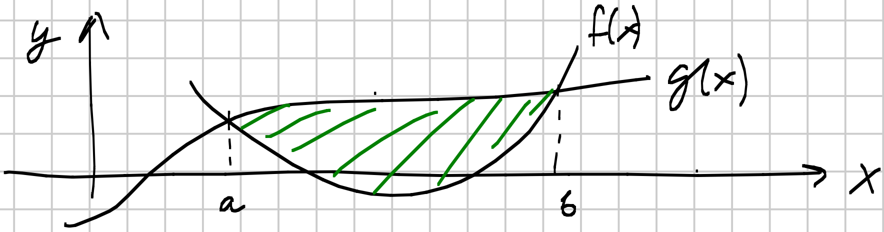


$I_1 = \int_a^{x_1} f(x)\,dx$, $I_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, ..., $I_{n+1} = \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx$

$$\Rightarrow A = |I_1| + |I_2| + ... + |I_n| = \int_a^b f(x)\,dx$$

4) Flächeninhalt zwischen zwei Kurven im $[a;b]$

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$



Wenn $f(x)$ und $g(x)$ sich schneiden, sind zuerst die Schnittpunkte zu berechnen.

Beispiel 1) Flächeninhalt zwischen der Kurve $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ und der x-Achse für $-2{,}5 \le x \le 3$

Nullstellen: $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

$x = 1$ ist eine Nullstelle: $1 - 3 - 6 + 8 = 0$

$$(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x - 1) = x^2 - 2x - 8$$
$$\begin{array}{l} -(x^3 - x^2) \\ \hline -2x^2 - 6x + 8 \\ -(-2x^2 + 2x) \\ \hline -8x + 8 \\ -(-8x + 8) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = 1 \pm 3$$

$$x_1 = 4;\quad x_2 = -2$$

Nullstellen sortiert: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$

Nur $x_1, x_2 \in [-2{,}5; 3] \Rightarrow$ drei Teilflächen

$$I_1 = \int_{-2{,}5}^{-2} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)\,dx = \frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 8x \Big|_{-2{,}5}^{-2} =$$

$$= \frac{(-2)^4}{4} - (-2)^3 - 3(-2)^2 + 8(-2) - \left(\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^4 - \left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 8\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\right) =$$

$$= 4-(-8)-12-16-\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{125}{8}\right)-\frac{25}{4}+\frac{15}{2}+8\right)=$$

$$=-16+\frac{5}{2}\left(\frac{-125-200+240+256}{32}\right)=-16+\frac{171}{32}\cdot\frac{5}{2}=\underline{\underline{-2,641}}$$

$$I_2=\int_{-2}^{1}(x^3-3x^2-6x+8)\,dx=\frac{x^4}{4}-x^3-3x^2+8x\Big|_{-2}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{4}-1-3+8\right)-\left(\frac{16}{4}+8-12-16\right)=4,25-(-16)=\underline{\underline{20,25}}$$

$$I_3=\int_{1}^{3}(x^3-3x^2-6x+8)\,dx=\frac{x^4}{4}-x^3-3x^2+8x\Big|_{1}^{3}=$$

$$=\left(\frac{3^4}{4}-3^3-3\cdot3^2+8\cdot3\right)-\left(\frac{1}{4}-1-3+8\right)=$$

$$=\left(\frac{81}{4}-27-27+24\right)-4,25=20\frac{1}{4}-30-4,25=-9,75-4,25=\underline{\underline{-14}}$$

$\Rightarrow$ Flächeninhalt: $A=|I_1|+|I_2|+|I_3|=|-2,641|+|20,25|+|-14|=$

$=\underline{\underline{36,891}}$

2) Flächeninhalt A, der von $y=-x^2+2$ und $y=x^2-2x-2$ eingeschlossene

Schnittpunkte: S_1, S_2

$$-x^2+2=x^2-2x-2;$$

$$2x^2-2x-4=0$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2};$$

$$x_1=2;\quad x_2=-1$$

$$A=\int_{-1}^{2}[(-x^2+2)-(x^2-2x-2)]\,dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right)\Big|_{-1}^{2}=\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}+1-4\right)=\underline{\underline{9}}$$

IV.6 Das uneigentliche Integral

Die Definition des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ mit $F'(x) = f(x)$ basiert aus zwei Voraussetzungen:

1) Das Integrationsintervall ist beschränkt: $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$
2) Der Integrand $f(x)$ ist (stückweise) stetig (und beschränkt) in $[a, b]$.

Sind die Voraussetzungen nur teilweise oder gar nicht erfüllt, gelangt man zu den uneigentlichen Integralen.

1. Fall: Das Integrationsintervall ist unendlich

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

Existieren die jeweiligen Grenzwerte, so konvergieren die Integrale, ansonsten divergieren sie.

Beispiel

1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]\Big|_1^b =$

$\displaystyle= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{2b^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}};$

2) $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_4^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left[2\sqrt{x}\right]\Big|_4^b =$

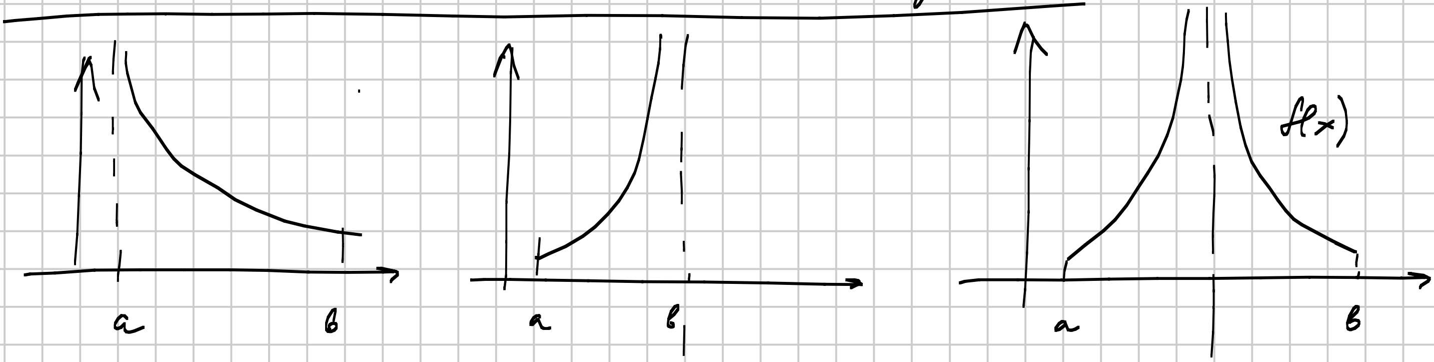
$\displaystyle= \lim_{b \to \infty} \left(2\sqrt{b} - 2\sqrt{4}\right) = 2 \lim_{b \to \infty} \left(\sqrt{b} - 4\right) = \infty$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$\displaystyle= \lim_{a \to -\infty} (\arctan 0 - \arctan a) + \lim_{b \to \infty} (\arctan b - \arctan 0) =$

$$= 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

2. Fall: Unendlichkeitsstelle des Integranden



$f(x)$ stetig auf $[a, b] \setminus \{c\}$, $a \le c \le b$; $\varepsilon > 0$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$

1. $c = a$ $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to a+} \int_\varepsilon^b f(x)\,dx$$

2. $c = b$ $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to b-} \int_a^\varepsilon f(x)\,dx$$

3. $a < c < b$ $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to c-} \int_a^{\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to c+} \int_{\varepsilon_2}^b f(x)\,dx$$

Beispiel 1) $$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 2+} \int_\varepsilon^4 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 2+} 2\sqrt{x-2}\,\Big|_\varepsilon^4 = 2 \lim_{\varepsilon \to 2+} \left(\sqrt{4-2} - \sqrt{\varepsilon - 2}\right) = 2\left(\sqrt{2} - 0\right) = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

2) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cot x \cdot dx = \lim_{\varepsilon \to 0-} \int_{-\frac{\pi}{2}}^\varepsilon \cot x\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0-} \int_{-\frac{\pi}{2}}^\varepsilon \frac{\cos x}{\sin x}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0-} \left(\ln|\sin x|\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0-} \left(\ln|\sin\varepsilon| - \underbrace{\ln\left|\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right|}_{\substack{= -1 \\ \to 0}}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0-} \left(\ln|\sin\varepsilon|\right) = -\infty$$

3) $$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0-} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0-} \left[3 \sqrt[3]{x} \right]_{-1}^{\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \left[3 \sqrt[3]{x} \right]_{\varepsilon_2}^{1} =$$

$$= 3 \cdot \lim_{\varepsilon_1 \to 0-} \left(\sqrt[3]{\varepsilon_1} - \sqrt[3]{-1} \right) + 3 \cdot \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \left[\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{\varepsilon_2} \right] =$$

$$= 3 \cdot \left(0 - (-1) \right) + 3 \left(1 - 0 \right) = \underline{\underline{6}}$$