Beispiel $f(x) = 3x^2 \cdot \cos^3(2x-1)$

$$f'(x) = (3x^2)' \cdot \cos^3(2x-1) + 3x^2 \cdot (\cos^3(2x-1))' =$$

$$= 6x \cdot \cos^3(2x-1) + 3x^2 \cdot 3 \cdot \cos^2(2x-1) \cdot (-\sin(2x-1)) \cdot 2 =$$

$$= 6x \cdot \cos^3(2x-1) - 18x^2 \cdot \cos^2(2x-1) \cdot \sin(2x-1) =$$

$$= 6x \cdot \cos^2(2x-1) \cdot (\cos(2x-1) - 3x \cdot \sin(2x-1)).$$

(3) Arcusfunktionen : $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$.

$f(x) = \arcsin x$; $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

$f(x) = \arccos x$; $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arctan x$; $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;

$f(x) = \operatorname{arccot} x$; $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

Berechne $(\arctan x)'$ mithilfe der Umkehrfunktionregel:

* $\tan(\arctan x) = x$; $\qquad (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $= 1 + \tan^2 x$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} \overset{*}{=} \qquad (f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{1+\tan(\arctan x)\cdot\tan(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Beispiel $f(x) = \arcsin \underbrace{\dfrac{x^2+2}{3x^3}}_{y}$ $\qquad y' = \left(\dfrac{x^2+2}{3x^3}\right)' =$

$$= \frac{(x^2+2)' \cdot 3x^3 - (x^2+2)\cdot(3x^3)'}{9x^6} = \frac{2x \cdot 3x^3 - 9x^2(x^2+2)}{9x^6} =$$

$$= \frac{6x^4 - 9x^4 - 18x^2}{9x^6} = \frac{-3x^4 - 18x^2}{9x^6} = -\frac{\cancel{3x^2}(x^2+6)}{3\,\cancel{9}x^{\cancel{6}\,4}} = -\frac{x^2+6}{3x^4}$$

$$f'(x) = (\arcsin y)' \cdot y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \left(-\frac{x^2+6}{3x^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2+2}{3x^3}}} \cdot \left(-\frac{x^2+6}{3x^4}\right) = -\frac{x^2+6}{3x^4\sqrt{1-\frac{x^2+2}{3x^3}}}$$

(4) Logarithmusfunktionen

$$f(x) = \ln x, \quad x > 0 \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Beweis (per Definition)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x_0+\Delta x) - \ln(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{x_0} \cdot \frac{x_0}{\Delta x}\right) \cdot \ln\left(\frac{x_0+\Delta x}{x_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0}{\Delta x} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{\Delta x}}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} =$$

Einschub: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; Wenn $\Delta x \to 0$, $\frac{x_0}{\Delta x} \to \infty$

$$= \frac{1}{x_0} \cdot \ln e = \frac{1}{x_0}.$$

Beispiel (1) $f(x) = \ln \underbrace{x^2}_{y}$; $f'(x) = (\ln y)' \cdot y' =$

$$= \frac{1}{y} \cdot 2x = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x};$$

(2) $f(x) = \ln^2 x = \ln x \cdot \ln x,$

$$f'(x) = \ln' x \cdot \ln x + \ln' x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln x}{x};$$

Verallgemeinerung (beliebige Basis)

$$f(x) = \log_a x \quad ; \quad f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

(5) Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \quad ; \quad f'(x) = e^x$$

Beweis mithilfe der Umkehrfunktion (Hausaufgabenblatt)

<u>Verallgemeinerung</u> $f(x) = a^x$; $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

<u>Beispiel</u> 1) $f(x) = e^{-ax^2}$;

$$f'(x) = (e^z)' \cdot z'(x) = e^{-ax^2} \cdot (-2ax) = -2ax \cdot e^{-ax^2}$$

2) $f(x) = A \cdot (1 - e^{-\lambda t}) = A - Ae^{-\lambda t}$;

$$f'(x) = -A \cdot (e^{-\lambda t})' = A \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$

III.5. Anwendungen der Differentialrechnung

III.5.1 Die Regel von Bernoulli und de L'Hospital

$f(x)$ und $g(x)$ seien in einer Umgebung von x_0 differenzierbar und $f(x_0) = g(x_0) = 0$; dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Beispiel</u> $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$ Typ „$\frac{0}{0}$“

<u>Bemerkung</u> (1) Die Regel gilt auch für

a) $x_0 \to \infty$

b) Grenzwerte, die auf die unbestimmte Form „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“ führen.

(2) Alle anderen unbestimmten Formen lassen sich auf „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ umformen.

Form	$f(x) \to$	$g(x) \to$	Umformung
$0 \cdot \infty$	0	∞	$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \to \frac{0}{0}$

			oder $f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \to \frac{\infty}{\infty}$
$\infty - \infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x)-f(x)}{g(x)\cdot f(x)} \to \frac{0}{0}$
$1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$	$1;\ 0;\ \infty$	$\infty;\ 0;\ 0$	$f(x)^{g(x)} = e^{\ln[f(x)^{g(x)}]} = e^{g(x)\ln f(x)} \to e^{0\cdot\infty}$ (Zeile 1)

(3) Wiederholte Anwendung möglich:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Beispiel: 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \left| \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \right| = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n\cdot x^{n-1}} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln \cdot \sin x}{\cot x} = \left| \text{„}\frac{-\infty}{\infty}\text{"} \right| = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot (-1)\sin^2 x =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} (-\sin x \cdot \cos x) = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \left| \text{„}0\cdot\infty\text{"} \right| = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left| \text{„}\frac{-\infty}{\infty}\text{"} \right| =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$

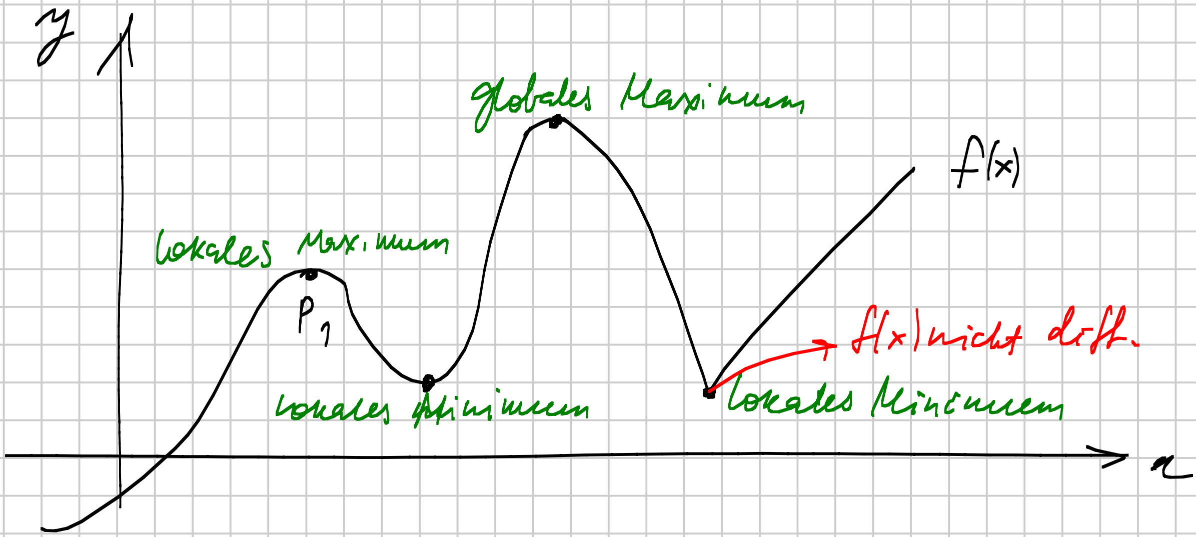
4) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}} = \left| \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“} \right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{-\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2 3x} = \left| \text{„}\frac{0}{0}\text{“} \right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{-}\cancel{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cancel{2}\cdot\cos 3x\,(\cancel{-}\sin 3x)\cdot\cancel{3}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos 3x\cdot\sin 3x} = \left| \text{„}\frac{0}{0}\text{“} \right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(-\sin^2 3x+\cos^2 3x\right)3} =$$

$$= -\frac{1}{3}$$

III.5.2. Maximum. Minimum. Wendepunkt



Definition $f(x)$ hat bei x_n ein relatives bzw. lokales

$$\begin{cases} \text{Maximum} \iff f(x) \le f(x_n) \\ \text{Minimum} \iff f(x) \ge f(x_n) \end{cases}$$ in einer Umgebung

$U_\varepsilon(x_n)$ von x_n.

Absolutes bzw. globales

$$\begin{cases} \text{Maximum} \iff f(x) \le f(x_n) \\ \text{Minimum} \iff f(x) \ge f(x_n) \end{cases}$$ für alle $x \in D$.

Satz: Sei $f(x)$ zweimal stetig diffb (in x_n), $f'(x_n)=0$ und

$$\left\{\begin{array}{ll} f''(x_n) < 0 & \Rightarrow f(x) \text{ hat Maximum} \\ f''(x_n) > 0 & \Rightarrow f(x) \text{ hat Minimum} \end{array}\right\} \text{ bei } x_n.$$

<u>Beispiel</u> $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 2x$

$f''(x) = 12x - 2$

Notwendige Bedingung für Extremwert bei x_n: $f'(x_n) = 0$

$f'(x_n) = 6x_n^2 - 2x_n = 0 \quad \Rightarrow \quad x_n(6x_n - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad x_{n_1} = 0 \qquad x_{n_2} = \frac{1}{3}$.

$f''(x_n) \gtrless 0$?

$f''(n_1) = f''(0) = 12 \cdot 0 - 2 = -2 < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $x = 0$

$f''(n_2) = f''(\frac{1}{3}) = 12 \cdot \frac{1}{3} - 2 = 2 > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $x = \frac{1}{3}$.

$f(0) = 1$; $\quad f(\frac{1}{3}) = 2 \cdot \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + 1 = \frac{2 - 3 + 27}{27} = \frac{26}{27}$.

Maximum im $P(0;1)$

Minimum im $P(\frac{1}{3}; \frac{26}{27})$

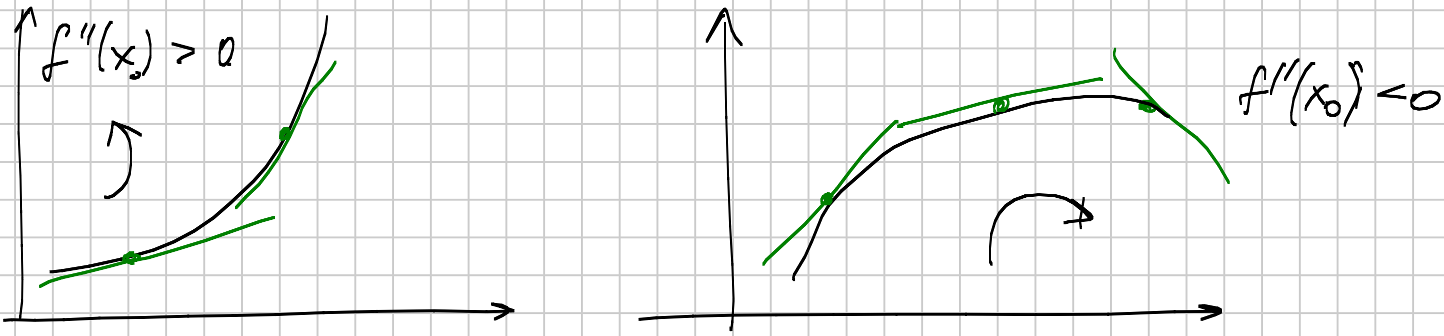
<u>Wendepunkt</u>

Die 2. Ableitung beschreibt das Monotonie-Verhalten von $f'(x)$ und bestimmt dabei das Krümmungsverhalten der Kurve:

$f''(x_0) > 0$: Die Steigung der Kurvengerade nimmt beim Durchgang durch den Kurvenpunkt $P(x_0, y_0)$ zu, d.h. die Tangente dreht sich im positiven

Drehsinn (Gegenuhrzeigersinn): Konvex

$f''(x_0)<0$: Die Steigung nimmt ab. Drehung im negativen Drehsinn (Uhrzeigersinn): Konkav



<u>Definition</u> (1) Kurvenpunkte, in denen sich der Drehsinn der Tangente ändert, heißen Wendepunkte.

(2) Wendepunkte mit waagerechten Tangente heißen Sattelpunkte.

<u>Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt:</u>

$f(x)$ hat Wendepunkt an der Stelle $x_W \iff (f''(x_W)=0$ und $f'''(x_W)\neq 0)$

<u>Beispiele</u> (1) $y=x^3$; $y'=3x^2$; $y''=6x$; $y'''=6>0$

$y'=3x^2=0 \Rightarrow x=0$; $y''(0)=0$; $y'''(0)=6>0$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $x=0$

(2) $y=2x^3-x^2+1$; $y'=6x^2-2x$; $y''=12x-2$; $y'''=12>0$

Wendepunkt: $f''(x)=0 \iff 12x=2$; $x=\frac{1}{6}$;

$f'''\left(\frac{1}{6}\right)=12>0$

Da die 1. Ableitung $\neq 0$ $\left(6\cdot\frac{1}{6^2}-2\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}\neq 0\right) \Rightarrow$ kein Sattelpunkt bei $x=\frac{1}{6}$.

III.S.3 Ergänzung zu Maximum, Minimum

und Sattelpunkt

Satz Sei $f'(x_0)=0$. Nächstfolgende, nichtverschwindende Ableitung: $f^{(n)}(x_0)$. Ist n gerade, so gilt $f(x)$ hat ein relatives Minimum für $f^{(n)}(x_0)>0$

— " — " — " — Maximum für $f^{(n)}(x_0)<0$.

Ist n- ungerade, so gilt: $f(x_0)$ hat ein Sattelpunkt

Beispiel (1) $f(x)=x^4$;

$f'(x)=4x^3$; $\quad f'(0)=4\cdot 0=0$

$f''(x)=12x^2$; $\quad f''(0)=0$

$f^{(4)}(x)=24x$ $\quad f'''(0)=0$

$f^{(4)}(x)=24$ $\quad f^{(4)}(0)>0$

$\Rightarrow f^{(4)}\neq 0 \Rightarrow 4$ - gerade $\Rightarrow$ Minimum in 0.

(2) $f(x)=x^5$; $\quad f'(x)=\ldots=f^{(4)}(x)=0$; $\quad f^{(5)}(x)=120\neq 0$.

5- ungerade $\Rightarrow$ Sattelpunkt.

Satz (Weierstraß) Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetige reelle Funktion f nimmt auf diesem Intervall ihr Maximum und Minimum an. HA 4. ?