IV.4. Integration gebrochen rationaler Funktionen, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Integrationsmethode: Partialbruchzerlegung

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \; ; \; a_i \in \mathbb{R}$$

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i , \quad b_i \in \mathbb{R} \; ; \quad b_n = 1 \; ; \; b_i \in \mathbb{R} \; , \; i = 0, \ldots, n-1$$

Bemerkung: falls $m \geq n$: zuerst Polynomdivision

1. Fall: $Q(x)$ hat nur einfache reelle Nullstellen

Gegeben: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ mit Grad $P(x) <$ Grad $Q(x)$; $Q(x)$ ist normiert

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Ansatz: $$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n}}$$

Integration: $$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A_1}{x - x_1} dx + \int \frac{A_2}{x - x_2} dx + \ldots + \int \frac{A_n}{x - x_n} dx =$$

$$= A_1 \cdot \ln|x - x_1| + A_2 \cdot \ln|x - x_2| + \ldots + A_n \cdot \ln|x - x_n| + C;$$

Bestimmung der Koeffizienten: Koeffizientenvergleich

Beispiel 1) $\int \frac{4x - 9}{x^2 - 8x + 15} dx$

1. Nullstellen des Nenners: $x^2 - 8x + 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = 4 \pm 1 \; ; \; x_1 = 5, \; x_2 = 3$$

$$Q(x) = (x-5)(x-3) = x^2 - 8x + 15$$

2. Partialbruchzerlegung

$$\frac{4x - 9}{(x-5)(x-3)} = \frac{A_1}{x-5}^{\cdot (x-3)} + \frac{A_2}{x-3}^{\cdot (x-5)} = \frac{A_1(x-3) + A_2(x-5)}{(x-5)(x-3)} =$$

$$= \frac{A_1 x - 3A_1 + A_2 x - 5A_2}{(x-5)(x-3)}$$

(I) $\begin{cases} 4 = -3A_1 - 5A_2 \\ 9 = A_1 + A_2 \end{cases} \rightsquigarrow$ LGS lösen

$A_1 = \frac{11}{2}$; $A_2 = -\frac{3}{2}$

oder: (II)

$$4x - 9 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$$

$x=5$ einsetzen: $11 = A_1 \cdot 2$; $A_1 = \frac{11}{2}$

$x=3$ einsetzen: $3 = A_2 \cdot (-2)$; $A_2 = -\frac{2}{3}$

Also: $$\frac{4x-9}{(x-5)(x-3)} = \frac{11/2}{(x-5)} - \frac{2/3}{x-3}$$

3. Integration

$$\int \frac{4x-9}{x^2-8x+15}\,dx = \frac{11}{2}\int \frac{dx}{x-5} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= \frac{11}{2}\ln|x-5| - \frac{3}{2}\ln|x-3| + C;$$

2) $$\int \frac{2x^4 - x^2 - 5x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}\,dx = I$$

Integrand unecht-gebrochen rational $\Rightarrow$ Polynomdivision

1. Polynomdivision:

$$(2x^4 - x^2 - 5x + 1) : (x^3 - x^2 - 2x) = 2x + 2 + \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$\begin{array}{l} -\;(2x^4 - 2x^3 - 4x^2) \\ \hline \quad 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \\ -\;(2x^3 - 2x^2 - 4x) \\ \hline \quad\quad 5x^2 - x + 1 \end{array}$$

2. Nullstellen $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = 0$

$\underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\quad x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$; $\underline{\underline{x_2 = 2}}$; $\underline{\underline{x_3 = -1}}$

$$Q(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$$

3. Partialbruchzerlegung

$$\frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A_1}{x}\Big|\cdot(x-2)(x+1) + \frac{A_2}{x-2}\Big|\,x(x+1) + \frac{A_3}{x+1}\Big|\cdot x(x-2) =$$

$$= \frac{A_1(x-2)(x+1) + A_2 \cdot x \cdot (x+1) + A_3 \cdot x(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$5x^2 - x + 1 = A_1(x-2)(x+1) + A_2 \cdot x \cdot (x+1) + A_3 \cdot x \cdot (x-2)$$

$x=0 \quad \Rightarrow \quad 1 = A_1 \cdot (-2) \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\frac{1}{2};$

$x=2 \quad \Rightarrow \quad 19 = A_2 \cdot 2 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{19}{6};$

$x=-1 \quad \Rightarrow \quad 7 = 3 \cdot A_3 \quad \Rightarrow \quad A_3 = \frac{7}{3};$

$$\frac{5x^2-x+1}{x^3-x^2-2x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{19}{6} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x+1}$$

4. Integration

$$\int \frac{2x^4 - x^2 - 5x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}\,dx = \int (2x+2)\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{19}{6}\int \frac{1}{x-2}\,dx +$$

$$+ \frac{7}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx = x^2 + 2x - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{19}{6}\ln|x-2| + \frac{7}{3}\ln|x+1| + C;$$

2. Fall: $Q(x)$ hat nur reelle Nullstellen, die auch mehrfach auftreten.

Gegeben: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ mit Grad $P(x) <$ Grad $Q(x)$; $Q(x)$ normiert

$Q(x) = (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r}$; $k_1 + k_2 + \ldots + k_r =$ Grad $Q(x)$

Ansatz:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}$$

$$+ \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{A_{r1}}{x-x_r} + \frac{A_{r2}}{(x-x_r)^2} + \ldots + \frac{A_{rk_r}}{(x-x_r)^{k_r}}$$

Beispiel 1) $\int \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$

1. Nullstellen $x_1 = 1$ doppelt, d.h. $k_1 = 2$

$x_2 = -1$ einfach, d.h. $k_2 = 1$

2. Partialbruchzerlegung:

$|\cdot(x-1)(x+1) \qquad |\cdot x+1 \qquad |(x-1)^2$

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{A_{21}}{x+1} =$$

$$= \frac{A_{11}(x-1)(x+1) + A_{12}(x+1) + A_{21}(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x+1)}$$

$$2x+3 = A_{11}(x-1)(x+1) + A_{12}(x+1) + A_{21}(x-1)^2$$

$x = x_1 = 1$: $\quad 5 = A_{12}\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad A_{12} = \frac{5}{2}$;

$x = x_2 = -1$: $\quad 1 = 4A_{21} \quad \Rightarrow \quad A_{21} = \frac{1}{4}$;

$x = 0$ (beliebig) : $\quad 3 = -A_{11} + A_{12} + A_{21} = -A_{11} + \frac{5}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{11} = \frac{5}{2} + \frac{1}{4} - 3 = -\frac{1}{4};$$

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}$$

3 Integration

$$\int\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\int\frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C;$$

2) $\displaystyle\int\frac{x-5}{x^2-6x+9}\,dx$

1. Nullstellen $\quad x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \quad$ (Binomische Formel)

$x_1 = x_2 = 3$; $\quad k_1 = 2$

2. Partialbruchzerlegung:

$|\cdot(x-3$

$$\frac{x-5}{x^2-6x+9} = \frac{A_{11}}{x-3} + \frac{A_{12}}{(x-3)^2} = \frac{A_{11}(x-3) + A_{12}}{(x-3)^2}$$

$$x-5 = A_{11}(x-3) + A_{12}$$

$x = 3$: $\quad -2 = A_{12}$; $\Rightarrow A_{12} = -2$

$x = 0$ (Beliebig) : $\quad -5 = -3A_{11} + A_{12} = -3A_{11} - 2$;

$$\Rightarrow +3A_{11} = 3 \; ; \; A_{11} = +1$$

$$\frac{x-5}{x^2-6x+9} = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{(x-3)^2}$$

3. Integration

$$\int \frac{x-5}{x^2-6x+9}\,dx = \int \frac{dx}{x-3} - 2\int \frac{dx}{(x-3)^2} =$$

$$= \ln|x-3| + \frac{2}{x-3} + C \; ;$$

3. Fall: $Q(x)$ besitzt keine reelle Nullstellen

Gegeben: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ mit Grad $P(x) <$ Grad $Q(x)$; $Q(x)$ normiert.

3a $Q(x)$ enthält einen nicht mehr zerlegbaren quadratischen Faktor. Dieser Faktor muss dann in der Partialbruchzerlegung folgendermaßen berücksichtigt werden:

$$\frac{A_1 x + A_2}{x_2 + Bx + C}$$

3b $Q(x)$ enthält einen nicht mehr zerlegbaren quadratischen Faktor mit Vielfachheit $r > 1$, d.h. $(x^2+Bx+C)^r$ ist ein Faktor des Nennerpolynoms. Dieser Faktor muß dann folgendermaßen in der Partialbruchzerlegung berücksichtigt werden.

$$\frac{A_{11}x + B_{11}}{x^2+Bx+C} + \frac{A_{12}x + B_{12}}{(x^2+Bx+C)^2} + \ldots + \frac{A_{1r}x + B_{1r}}{(x^2+Bx+C)^r}$$

Beispiel 1) $\int \frac{4}{x^3+4x}\,dx$

1. Nullstellen

$x^3+4x = x(x^2+4) \rightarrow$ keine reelle Nullstellen

reell, einfach

$$\frac{4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{A_{11}x+B_{12}}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(A_{11}x+B_{12})x}{x(x^2+4)}$$

$$4 = Ax^2+4A+A_{11}x^2+B_{12}x = x^2(A+A_{11})+B_{12}x+4A;$$

$4A=4;\quad A=1;\quad B_{12}=0;\quad A+A_{11}=0 \Rightarrow A_{11}=-1$

$$\frac{4}{x^3+4x} = \frac{1}{x} + \frac{-x+0}{x^2+4} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}$$

2. Integration

$$\int \frac{4}{x^3+4x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+4}\,dx \;=$$

Einschub: $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$a=1;\quad b=0;\quad c=4.$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln|x^2+4|$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C.$$

2) $$\int \frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x}\,dx$$

1 Nullstellen: $x^3-6x^2+10x = x(x^2-6x+10)$

$x_1=0$ – reele einfache Nullstelle

$x^2-6x+10=0$ – hat keine reellen Nullstellen $\quad x_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2} = 3\pm\sqrt{-1}$

2. Partialbruchzerlegung

$$\frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+10} =$$

$$= \frac{A(x^2-6x+10)+(Bx+C)x}{x(x^2-6x+10)} = \frac{Ax^2-6Ax+10A+Bx^2+Cx}{x(x^2-6x+10)}$$

$$7x^2-19x+30 = x^2(A+B)+x(C-6A)+10A$$

$x=0 \Rightarrow 10A=30;\ A=3$

$x=1$ (Bel.) $\Rightarrow 18 = A+B+C-6A+10A = 5A+B+C = 15+B+C.$

$\Rightarrow B+C=3.$

$x=-1$ (Bel.) $\Rightarrow 56 = A+B-C+6A+10A = 17A+B-C = 51+B-C$

$\Rightarrow 5 = B-C;$

$$\begin{cases} B+C=3 \\ B-C=5 \end{cases} \Rightarrow 2B=8;\ B=4;\ C=-1$$

3 Integration

$$\int \frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{4x-1}{x^2-6x+10}\,dx =$$

$$= 3\int \frac{1}{x}\,dx + 4\int \frac{x}{x^2-6x+10}\,dx - \int \frac{dx}{x^2-6x+10} \ \textcircled{=}$$

Einschub: $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$

$a=1;\ b=-6;\ c=10$

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+10} = \frac{2}{\sqrt{40-36}} \arctan \frac{2\cdot x-6}{\sqrt{40-36}} = \arctan(x-3)$$

$$\int \frac{x}{x^2-6x+10}\,dx = \frac{1}{2\cdot a}\ln(ax^2+bx+c) - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+10) + \frac{6}{2}\int \frac{dx}{x^2-6x+10} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+10) + 3\arctan(x-3)$$

$= 3\ln|x| + 4\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+10) + 4\cdot 3\arctan(x-3) - \arctan(x-3) +$

$+ C = 3\cdot\ln|x| + 2\ln|x^2-6x+10) + 11\arctan(x-3) + C.$