# GRUNDLAGEN DER ANALYSIS.

Notiztitel 21.09.2015

## II Funktionen einer Veränderlichen.

**Definition** (Erinnerung, siehe 1. Semester, G.d.d.M.)

Sind $D$ und $B$ zwei Mengen und ist $f$ eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element aus $D$ genau ein Element aus $B$ zuordnet, so ist durch $D$ und $f$ eine Funktion gegeben.

$D$ : Definitionsmenge, Definitionsbereich

$B$ : Bildmenge, Wertebereich

$x \in D$ : Argument, Urbild

$f(x) \in B$ : Bild von $x$, Funktionswert

$W = \{ f(x) \mid x \in D \}$ Wertebereich, $W \subset B$

**Schreibweisen**

$f: D \mapsto B$ mit $x \mapsto f(x)$

$f: x \to f(x)$ [mit $x \in D$]

$y = f(x)$ [mit $x \in D$]

**Beispiel** (1) $y = 2x$, $x \in [0,1] = D$; $[0,2] = W$

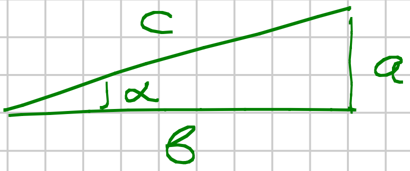
(2) $y = \pm\sqrt{x}$, $x \geq 0$ Zwei Funktionen!

$W = D = \mathbb{R}^+$

(3) $y = x^2$, $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^+$

# II.1 Trigonometrische Funktionen

## Erinnerung




$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c};$$

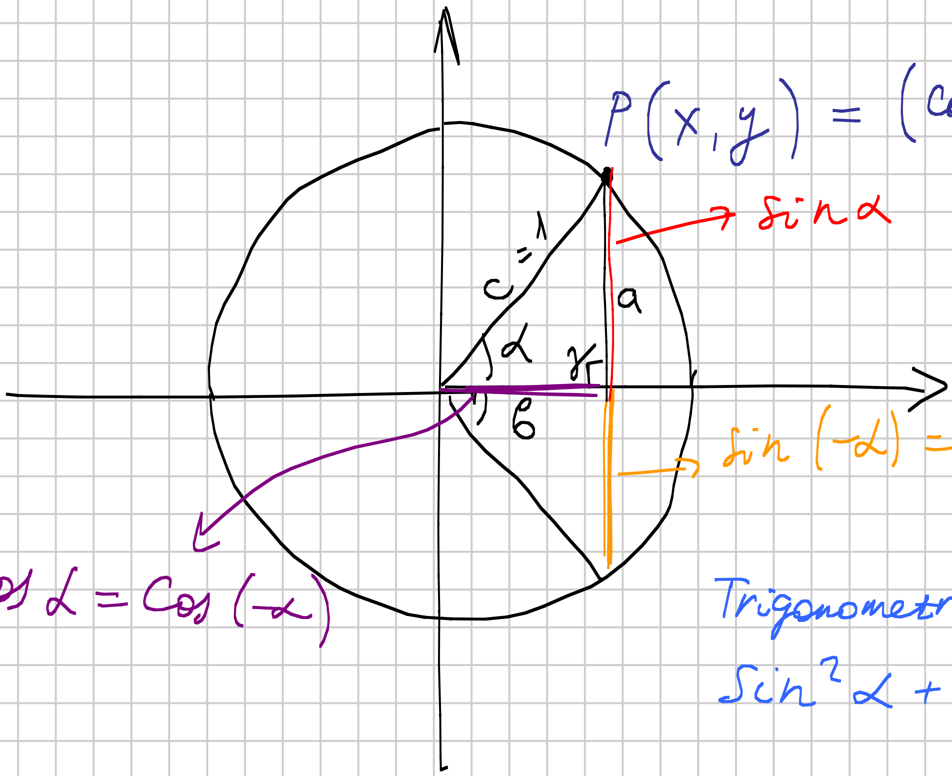
$$\tan\alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b};$$

$$\cot\alpha = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

## Darstellung im Einheitskreis

(Radius = 1)
$\gamma = 90°$

$P(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$




$\sin\alpha$

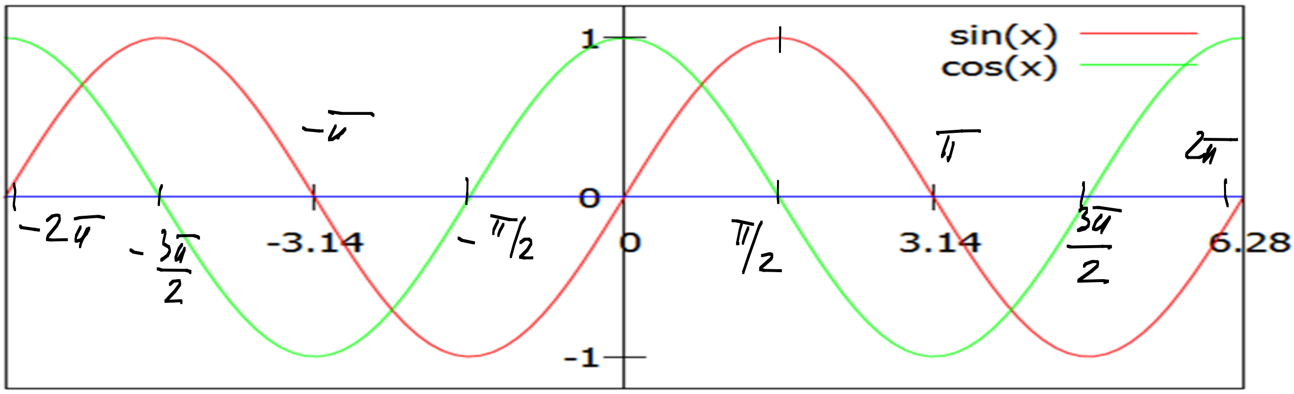
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

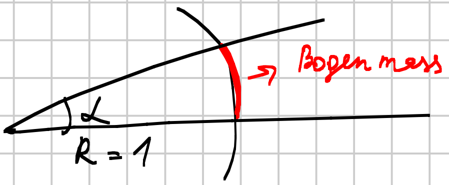
Trigonometrischer Pythagoras:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin\alpha = \frac{a}{c_{=1}} = a$ – Gegenkathete $\Rightarrow$ y-Koordinate

$\cos\alpha = \frac{b}{c_{=1}} = b$ – Ankathete $\Rightarrow$ x-Koordinate




**Def** Unter dem Bogenmaß $x$ eines Winkels $\alpha$ (in °) versteht man die Länge desjenigen Bogens, der dem Winkel $\alpha$ im Einheitskreis gegenüberliegt.




Es gilt:

$$360^\circ \overset{\text{entspricht}}{\triangleq} 2\pi \quad \text{(Umfang des Kreises)}$$

$$180^\circ \triangleq \pi$$

$$1^\circ \triangleq \frac{\pi}{180}$$

Allgemein entspricht dem Winkel $\alpha$ im Grad der Wert $x$ im Bogenmass:

$$\boxed{\alpha = 180^\circ \frac{x}{\pi} \quad ; \quad x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha}$$

## Wichtigste Winkel- und Werte

| | $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\cot\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $0^\circ$ | $0$ | $1$ | $0$ | $\infty$ |
| $\frac{\pi}{6} \triangleq$ | $30^\circ$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4} \triangleq$ | $45^\circ$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{3} \triangleq$ | $60^\circ$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}/3$ |
| $\frac{\pi}{2} \triangleq$ | $90^\circ$ | $1$ | $0$ | $\infty$ | $0$ |

$\sin x = \sin(x + k \cdot 2\pi)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\tan x = \tan(x + k \cdot \pi)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cot x = \cot(x + k \cdot \pi)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

## Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

Beispiel $\sin 15° = \sin(45° - 30°) =$

$= \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 0,2588$

Üb. $\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \cos 60° \cos 45° -$

$- \sin 60° \sin 45° = 1/2 \cdot \sqrt{2}/2 - \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{2}/2 =$

$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \approx -0,2588$

Wiederholung Zuhause (Schulstoff): Nullstellen, Periode etc.

## Umkehrfunktionen

$f^{-1} \circ f = id_D$ ; $f \circ f^{-1} = id_W$ $\Rightarrow$ siehe GddM

Sei $f: x \mapsto y = f(x)$ mit $x \in \mathbb{D}_f$

Umkehrung: $y$ bekannt, gesucht $x$ mit $f(x) = y$

Berechnung 1) $y = f(x)$ nach $x$ auflösen $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$ ;

2) $x$ und $y$ vertauschen $y = f^{-1}(x)$

Hinweis Die Funktion f(x) sollte umkehrbar eindeutig sein (Bijektiv).

Graphisch Spiegelung von $y = f(x)$ an der 1. Winkelhalbierenden

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen heissen Arcus-Funktionen. Die Funktionswerte der Arcus-Funktionen sind im Bogen- oder Gradmaß dargestellte Winkel.

Notwendig Einschränkung der trigonometrischen Funktionen auf Intervalle, in denen sie streng monoton verlaufen

| trig. Funk. | eingeschr. Def.-Ber. | Umkehrfunk. | Def.-Ber. |
|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ | $\arcsin x$ | $[-1; 1]$ |
| $\cos x$ | $[0; \pi]$ | $\arccos x$ | $[-1; 1]$ |
| $\tan x$ | $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ | $\arctan x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cot x$ | $[0; \pi]$ | $\text{arccot}\, x$ | $\mathbb{R}$ |

## II. 2. Exponential- und Logarithmusfunktion

$$\boxed{f(x) = a^x, \quad a > 0, \; a \neq 1, \; a, x \in \mathbb{R}}$$

Wichtige Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, mit $e = 2{,}71828...$ (Eulersche Zahl)

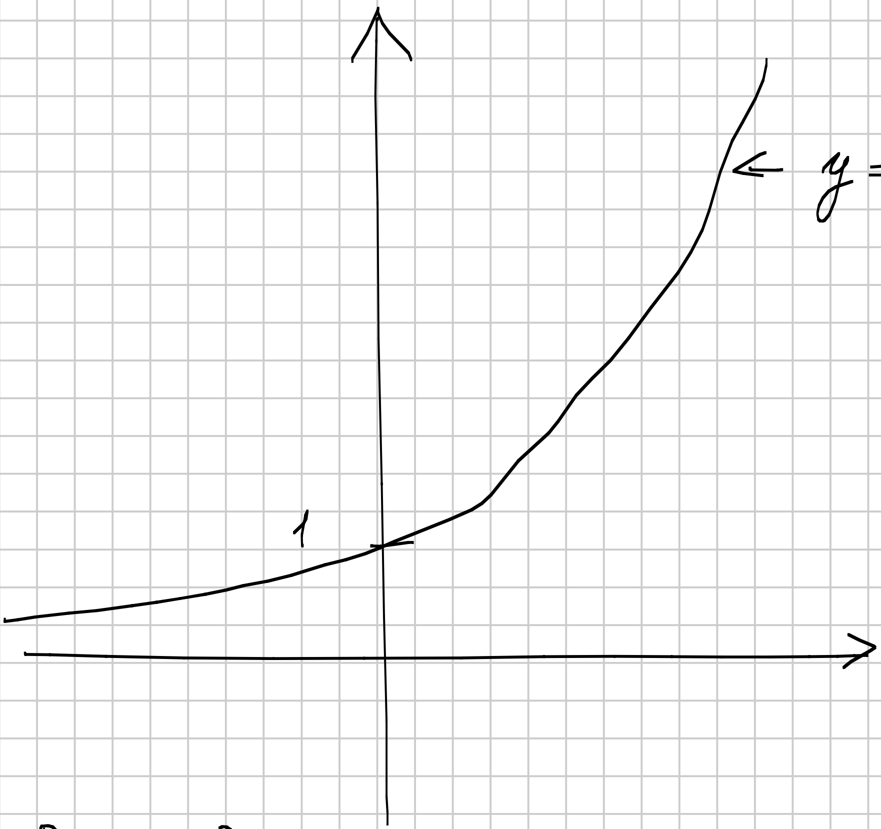
Eigenschaften

1) $f(x) > 0$ (keine Nullstellen)

2) streng monoton wachsend

3) $e^0 = 1 \Rightarrow f(0) = 1$

4) $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$




__Def__ Die Umkehrung der Exponentialfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $x \mapsto y = a^x$ heißt Logarithmusfunktion $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto y = \log_a x$ zur Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

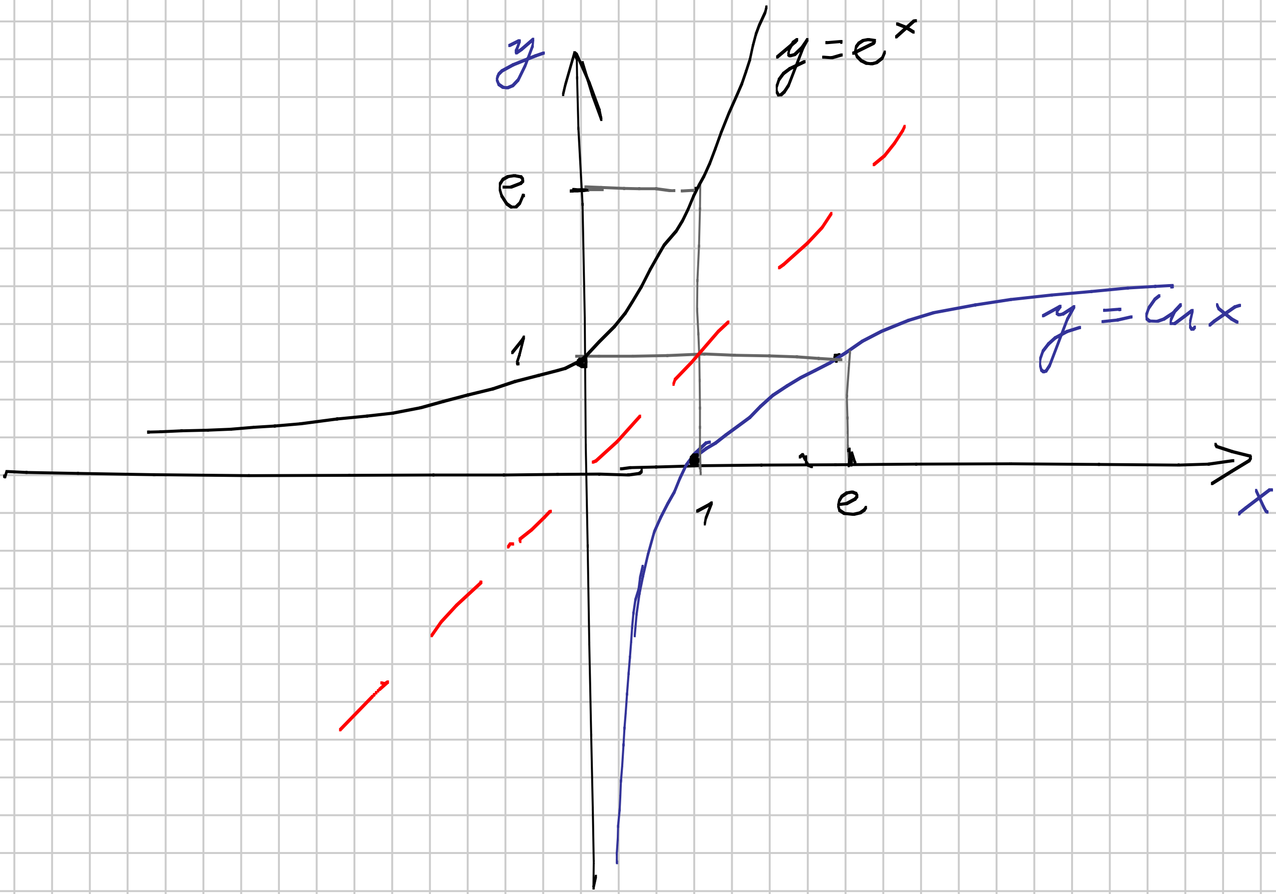
Die zwei wichtigsten Logarithmusbasen sind:

$a = 10 \qquad \log_{10} x =: \lg x$ Zehner-logarithmen

$a = e \qquad \log_e x =: \ln x$ Natürliche Logarithmus.

__Bemerkung__ Den Funktionsgraphen des Logarithmus erhält man durch Spiegelung des Graphen der zugehörigen Exponentialfunktion an den Winkelhal-

Bisektrix des 1. Quadranten.




Umrechnung von $\log_a x$ in die Basis b:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Speziell gilt:

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} \qquad a = e,\ b = 10$$

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \qquad a = 10,\ b = e$$

<u>Bemerkung</u> Jede Exponentialfunktion kann mit Hilfe der e-Funktion dargestellt werden:

$$\boxed{y = a^x = e^{x \cdot \ln a}} = e^{\ln a^x}$$

## II.3 Gebrochen rationale Funktionen

**Def.**

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

$a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $0 \le i \le n$, $0 \le j \le m$

heißt gebrochen rationale Funktion.

Wenn $n < m$: echt gebrochen rational

$n \geq m$: unecht gebrochen rational

**Bemerkung** Jede (unechte) rationale Funktion läßt sich zerlegen in ein Polynom und eine echt rationale Funktion. (Polynomdivision, GdelM)

**Beispiel** $P_4(x) = 5x^4 + 13x^3 + 5x^2 - 7x + 1$

$Q_2(x) = x^2 + 1$

$$(5x^4 + 13x^3 + 5x^2 - 7x + 1) : (x^2 + 1) = 5x^2 + 13x + \frac{-20x + 1}{x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{l} -\,(5x^4 + 5x^2) \\ \hline 13x^3 - 7x + 1 \\ -\,(13x^3 + 13x) \\ \hline -20x + 1 \end{array}$$

Üb im Hörsaal

$P_3(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1$ ; $Q_2(x) = x^2 - 3x + 2$

$$\frac{P_3(x)}{Q_2(x)} = (3x + 11) + \frac{27x - 23}{x^2 - 3x + 2}$$

Def. Stellen, in deren unmittelbarer Umgebung die Funktionswerte über alle Grenzen hinaus fallen oder wachsen, heißen Pole oder Unendlichkeitsstellen der Funktion $f(x)$.

$$\boxed{x_0 \text{ Pol } (k\text{-ter Ordnung}) \Leftrightarrow \left(P_n(x_0) \neq 0 \text{ und } \underset{\substack{\downarrow \\ k\text{-ter Ordnung}}}{Q_m(x_0) = 0}\right)}$$

$$\boxed{x_1 \text{ Nullstelle } (k\text{-ter Ordnung}) \Leftrightarrow \left(P_n(x_1) = 0 \ (k\text{-ter Ordnung}) \ \& \ Q_m(x_1) \neq 0\right)}$$

$$\boxed{x_2 \text{ Lücke} \Leftrightarrow \left(P_n(x_2) = 0 \text{ und } Q_m(x_2) = 0\right)}$$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\text{Pole, Lücken}\}$

## Bestimmung der Nullstellen und Pole einer gebrochen rationalen Funktion

1. Zerlegung des Zähler- und Nennerpolynoms in Linearfaktoren und Kürzung gemeinsamer Faktoren (Schließung der Lücken)
2. Reelle Linearfaktoren im Zähler: reelle Nullstellen
   reelle Linearfaktoren im Nenner: reelle Pole

Beispiel $f(x) = \frac{2x^3+2x^2-32x+40}{x^3+2x^2-13x+10} = \frac{P_3(x)}{Q_3(x)}$

$P_3(2) = 0$; $Q_3(1) = 0$

Linearfaktorisierung:

a) $P_3(x)$

| | 2 | 2 | -32 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| $x=2$ | 0 | 4 | 12 | -40 |
| | 2 | 6 | -20 | 0 |
| | $c_2$ | $c_1$ | $c_0$ | $r_0$ |

$\Rightarrow P_3(x) = (2x^2+6x-20)(x-2)$

$2x^2+6x-20=0 \Leftrightarrow x^2+3x-10=0$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$

$x_1 = 2$ ; $x_2 = -5$

$P_3(x) = 2 \cdot (x-2)^2 (x+5)$.

b) $Q_3(x)$

| | 1 | 2 | -13 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $x=1$ | 0 | 1 | 3 | -10 |
| | 1 | 3 | -10 | 0 |
| | $c_2$ | $c_1$ | $c_0$ | $r_0$ |

siehe a)

$\Rightarrow Q_3(x) = (x-1)(x^2+3x-10) =$
$= (x-1)(x-2)(x+5)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{P_3(x)}{Q_3(x)} = \frac{2(x-2)^{\cancel{2}}\cancel{(x+5)}}{\underbrace{(x-1)}_{\text{Pol}}\underbrace{\cancel{(x-2)}}_{\text{Lücke}}\underbrace{\cancel{(x+5)}}_{\text{Lücke}}} = 2\cdot\frac{x-2}{x+1}$$

$$D_{f(x)} = \mathbb{R}\setminus\{\text{Pole, Lücken}\} =$$
$$= \mathbb{R}\setminus\{-5; 1; 2\}$$

Also, $x=2$ ist keine Nullstelle von $f(x)$, da ausgeschlossen aus dem Def-Bereich; aber diese ist die Nullstelle von $P_3(x)$ und $Q_3(x)$.

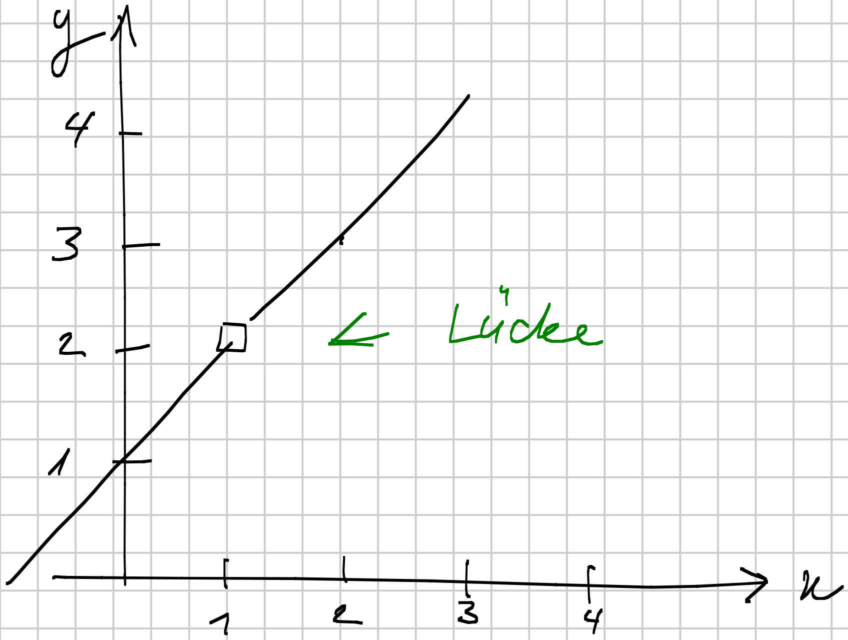
## II.4. ~~Funktionsgrenzwert~~ und Stetigkeit.

Grenzwert für $x \to x_0$ ; $x_0 \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{x^2-1}{x-1} \qquad D_y = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Gegen welchen Wert strebt $y(x)$ für $x \to \underset{x_0}{1}$ ?

$$y = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \underset{x \neq 1}{=} x+1$$




<u>Def</u> $y = f(x)$ sei in einer Umgebung von $x_0$ definiert. Sei $x_n > x_0$, $x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0$, $(x_n)$ beliebig wählbare Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g_r$, so heißt $g_r$ der rechtseitige Grenzwert von $y = f(x)$ für $x \to x_0$, geschrieben $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = g_r$.

Sei $\tilde{x}_n < x_0$, $\tilde{x}_n \in D_f$, $\tilde{x}_n \neq x_0$, $(\tilde{x}_n)$ beliebig wählbar mit $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x_0$.

Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = g_L$, so heißt $g_L$ der links-seitige Grenzwert von $y = f(x)$ für $x \to x_0$, geschrieben $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = g_L$.

Gilt $g_r = g_L$, so existiert der Grenzwert $g$.

Bemerkung (1) Funktionswert an der Stelle $x_0$ und Funktionsgrenzwert an der Stelle $x_0$ sind zwei ganz verschiedene Begriffe, z.B. kann die Funktion in $x_0$ einen Grenzwert haben, ohne dass sie in $x_0$ definiert ist.

(2) $x \to x_0$ : $x$ kommt $x_0$ beliebig nahe, aber stets gilt $x \neq x_0$.

Beispiel 1) $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Untersuchung bei $x_0 = 1$

i) $y(1)$ existiert nicht

ii) $y = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$ für $x \neq 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2 = g_r = g_l = g$$

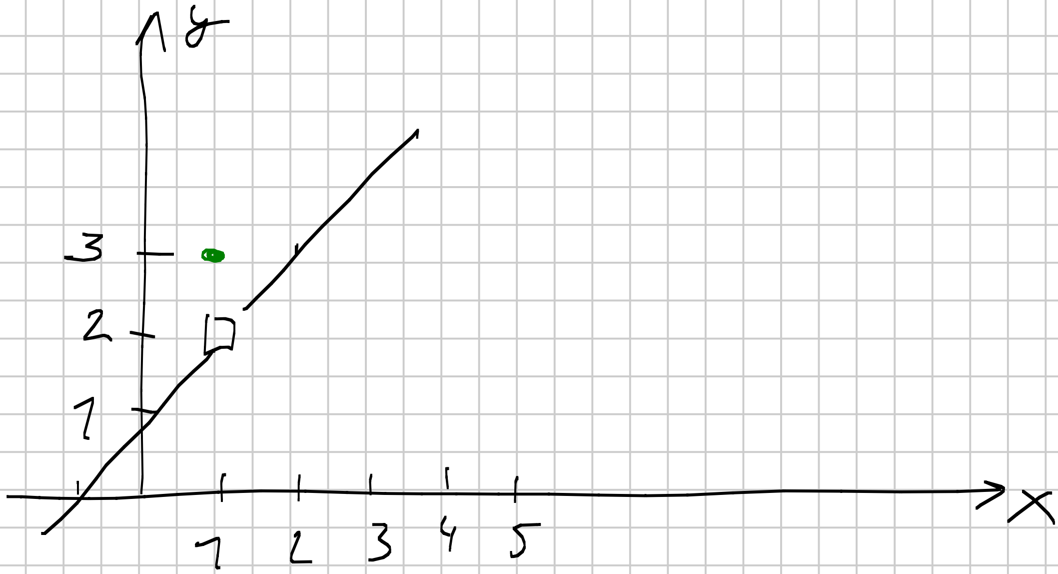
$\Rightarrow$ Grenzwert existiert, Funktionswert nicht (hebbare Lücke)

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ (Beispiel 1)

$f(1) = 3$

$\Rightarrow$ Funktions- und Grenzwert existieren, sind aber voneinander verschieden.




## Stetigkeit

**Def.** $y = f(x)$, $x, x_0 \in D_f$ ist an der Stelle $x_0$ stetig $:\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und stimmt mit dem Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle $x_0$ überein: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$f(x)$ ist stetig auf $D_f$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ ist stetig für jedes $x_0 \in D_f$. (für die Randpunkte muss nur der einseitige Grenzwert existieren und mit dem Funktionswert übereinstimmen.

**Bemerkung** Stetige Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$:

$f(x) = c$, $g(x) = x$, Polynome, $\sin x$, $\cos x$, $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$, gebrochen rationale Funktionen stetig auf $\mathbb{R}$, außer in den Polen

**Satz** Seien $f(x)$, $g(x)$ stetig (in $x_0$ oder auf $(a,b)$) und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f(x) + g(x)$, $c \cdot f(x)$ und $f(x) \cdot g(x)$ stetig (in $x_0$ oder auf $(a,b)$).

Die Quotientenfunktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ ist stetig an allen Stellen $x \in (a,b)$, an denen die Nennerfunktion nicht verschwindet.

<u>Beispiel (vgl. Beispiel S. 14)</u>

a) $$R(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} R(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2 \\ R(1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{stetig bei } x = 1$$

b) $$R(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{für } x \neq 1 \\ 3, & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Vgl. $\lim\limits_{x \to 1} R(x) = 2$, aber $R(1) = 3$ $\Rightarrow$ unstetig bei $x = 1$.