Grundlagen der Analysis

für Informatiker

N. Hechler, C. Schmeller

Hochschule Darmstadt

WS 16/17

Literatur

- Gerald Teschl, Susanne Teschl: Mathematik für Informatiker - Band 1 und 2, 2. Auflage 2007, Springer Verlag
- Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, 2001, Hanser, Kapitel 9 und 10

Inhaltsverzeichnis

Folgen

Definition

Ordnet man jeder Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ genau eine Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zu, so entsteht durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad = \quad (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots)$$

ein *reelle Zahlenfolge* oder kurz: *Folge*.

- $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heißen *Glieder* der Folge; a_n ist das *n-te Folgenglied*.
- Eine Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung $a_n = f(n)$, für$n \in \mathbb{N}_0$ heißt Bildungsgesetz der Folge.

Darstellung

- Die Darstellung einer Zahlenfolge in der Form

$$x_n = \varphi(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x_i = a_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

heißt *rekursive Darstellung*.

Grenzwert einer Folge

Definition

$g \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn zu jedem (beliebig kleinem) $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass

$$|a_n - g| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N$$

gilt. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

Bemerkung: Eine Folge die nicht konvergent ist, nennt man divergent.

Beispiel einer divergenten Folge

Example (Divergente Folge)

Zu Beweisen ist, dass die Folge $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ divergiert.
Beweis: Angenommen, die Folge (a_n) konvergiert gegen $g \in \mathbb{R}$. Dann gibt es nach Definition zu $\epsilon := 1$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|a_n - g| < 1 \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Der Abstand von zwei aufeinander folgenden Gliedern ist gleich 2, denn entweder ist es $|(-1) - 1|$ oder $|1 - (-1)|$. Für $n \geq N$ gilt:

$$\begin{aligned} 2 &= |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - g) + (g - a_n)| \\ &\leq |a_{n+1} - g| + |a_n - g| < 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Widerspruch $2 < 2$, d.h. die Folge kann nicht gegen g konvergieren.

Bestimmte Divergenz

Definition

Ist eine Folge a_n monoton wachsend und nach oben unbeschränkt, so nennt man diese Folge a_n *bestimmt divergent gegen* ∞ und schreibt dafür

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty.$$

Ist eine Folge a_n monoton fallend und nach unten unbeschränkt, so nennt man diese Folge a_n *bestimmt divergent gegen* $-\infty$ und schreibt dafür

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty.$$

Grenzwert einer Folge

Theorem

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1, p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828\ldots \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \tag{5}$$

Bestimmung von Grenzwerten

Theorem

Seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \pm (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n)^r = (\lim_{n\to\infty} a_n)^r = a^r, r \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n\to\infty} \log_d(a_n) = \log_d(\lim_{n\to\infty} a_n) = \log_d(a)$

Beispiel einer konvergenten Folge

Example (Konvergente Folge)

Zu zeigen ist, dass die Folge

$$a_n = 5\frac{2+3n}{2n} + \frac{1}{2}(3 - q^n),$$

mit $n \in \mathbb{N}_0, 0 < q < 1$ konvergiert.

Beschränktheit von Folgen

Definition (Beschränkte Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn alle a_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ kleiner oder gleich (bzw. größer oder gleich) einer festen Zahl $M \in \mathbb{R}$ sind.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *beschränkt* wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Definition (Monotone Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt
monoton wachsend, wenn $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots,$
monoton fallend, wenn $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots,$
für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Beschränktheit und Konvergenz von Folgen

Theorem (Konvergenz von beschränkten und monotonen Folgen)

Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen konvergiert.

Geometrische Folge

Definition

Eine geometrische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine regelmäßige mathematische Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist. Es gilt also

$$a_i = a_0 \cdot q^{i-1}.$$

Es gilt weiter:

- $a_{i+1} = a_i \cdot q$ (rekursive Formel)

Beispiel einer geometrischen Folge

Example (Geometrische Folge)

Gegeben sei ein Folge mit

$$a_0 = 3, q = 2.$$

Dann erhält man die weiteren Folgeglieder:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \cdot 2 = 6 \\ a_2 &= a_1 \cdot 2 = 12 \\ a_3 &= a_2 \cdot 2 = 24 \\ a_4 &= \ldots \end{aligned}$$

Unendliche Reihe

Definition (Partialsummen und unendliche Reihe)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Die endlichen Summen:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + a_1 = s_0 + a_1 \\
s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n
\end{aligned}
$$

heißen *Partial-* oder *Teilsummen*.

Eine Folge von Partialsummen wird *unendliche Reihe* genannt und mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Summen von Reihen

Die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen, ist durch

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

gegeben.

Definition (Summe einer Reihe)

Konvergiert die Folge der Partialsummen s_m, so ist ihr Grenzwert s durch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gegeben und heißt dann Summe der Reihe. Wir schreiben dann

$$s = \lim_{m\to\infty} s_m =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Geometrische Reihen

Theorem (Unendliche geometrische Reihe)

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für alle $|x| < 1$ mit dem Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Konvergente Reihen

Theorem (Linearkombination konvergenter Reihen)

Seien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a \quad \textit{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$$

zwei konvergente Reihen reeller Zahlen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Dann konvergiert auch die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ *und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lambda a + \mu b$$

Konvergente Reihen

Definition (Absolut konvergent)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe der absolut Beträge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Theorem (Majoranten Kriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit

$$|a_n| \leq c_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Beispiel Majoranten Kriterium

Example

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergiert.
Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen ebenfalls konvergieren:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Funktionen

Definition (Funktion)

Eine Abbildung oder Funktion f von einer Menge D in eine Menge M ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in M$ zuordnet. Man schreibt dafür:

$$\begin{aligned} f : D &\to M \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

und sagt: "x wird auf $f(x)$ abgebildet" bzw. "$f(x)$ ist das Bild (oder der Funktionswert) von x". Die Menge D heißt Definitionsbereich, die Menge $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$ heißt Bildmenge und die Menge M heißt Wertebereich.

Rechnen mit Funktionen

Seien f, g zwei Funktionen mit identischem Definitionsbereich. So kann man neue Funktionen wie folgt bilden:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \text{für } g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Verkettung von Funktionen

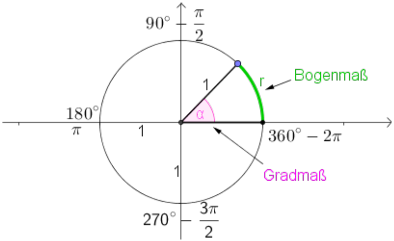
Definition (Verkettung)

Seien $f : D_f \to M$ und $g : D_g \to N$ Funktionen. Die Hintereinanderausführung oder Verkettung von f und g ist die Funktion von $f \circ g : D_g \to M$ mit

$$x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Damit die Hintereinanderausführung Sinn macht, muss $g(D_g) \subseteq D_f$ gelten.

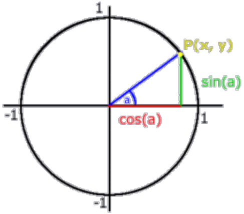
Trigonometrische Funktionen



Definition (Bogenmaß)

Das Bogenmaß x eines Winkels α (in °) ist die Länge des Bogens, welcher dem Winkel α im Einheitskreis gegenüber liegt.

Trigonometrische Funktionen



Definition (Trigonometrisch Funktion)

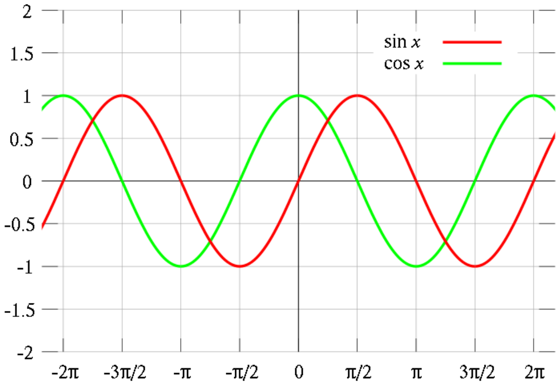
Sei a die Bogenlänge am Einheitskreis, die vom Punkt $(1, 0)$ beginnend entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen wird, und bei $P = (x, y)$ endet. Dann definieren wir

$$\sin(a) = y \quad \text{bzw.} \quad \cos(a) = x$$

und nennen diese Funktionen Sinus bzw. Kosinus.

Die sin und cos Funktionen

Um $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zu definieren, lassen wir auch Mehrfachumdrehungen zu ($x = k2\pi$ entspricht k vollen Umdrehungen, falls $k < 0$ ist, so wurde im Uhrzeigersinn gedreht).



sin und cos als Reihendarstellung

Heutzutage kann es bequem sein, die beiden Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch unendliche Reihen wie folgt zu definieren:

Definition (Analytische Definition)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Diese Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Theoreme

Theorem

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

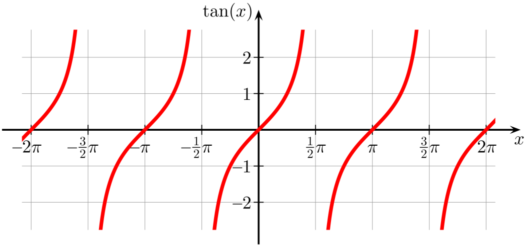
$$\begin{aligned} \cos(-x) = \cos x \quad & \textit{und} \quad \sin(-x) = -\sin x \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

Theorem

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

Tangens



Definition

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ setzt man

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Kotangens und Verschiebungssatz

Definition (Kotangens)

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ setzt man

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Theorem (Verschiebungssatz)

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *gilt*

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Eigenschaften von Abbildungen

Definition (Injektiv, Surjektiv, Bijektiv)

Sei $f : D \to M$ eine Abbildung

- f heißt injektiv, wenn $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ für alle $x_1, x_2 \in D$.
  Anders gesagt, wenn verschiedene Elemente von D auf verschiedenen Elemente von $f(D)$ abgebildet werden.
- f heißt surjektiv, wenn jedes Element von M das Bild eines Elements aus D ist, kurz $f(D) = M$.
- f heißt bijektiv, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Monotonie

Definition

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to M \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion.

- f heißt streng monoton wachsend, wenn gilt

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D.$$

- f heißt streng monoton fallend, wenn gilt

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D.$$

- Wenn anstellen von $<$ und $>$ (bei den Funktionswerten) jeweils $\leq$ bzw. $\geq$ gilt, dann nennt man die Funktion nur monoton wachsend bzw. monoton fallend.

Bijektive Funktionen

Theorem

Eine reelle Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to M \subseteq \mathbb{R}$ ist injektiv, wenn sie entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Gilt weiter, dass $f(D) = M$ ist (Surjektivität), so ist die Funktion f bijektiv.

Umkehrfunktion

Definition (Umkehrfunktion)

Ist die Funktion $f : D \to M$ bijektiv, dann heißt die Funktion, die jedem $y \in M$ das eindeutig bestimmt $x \in D$ mit $y = f(x)$ zuordnet, die Umkehrfunktion (oder inverse Funktion) von f. Sie wird mit f^{-1} bezeichnet.

$f^{-1} : M \to D$ hat folgende Eigenschaft: $f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $y = f(x)$. Insbesondere gilt

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{und} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y$$

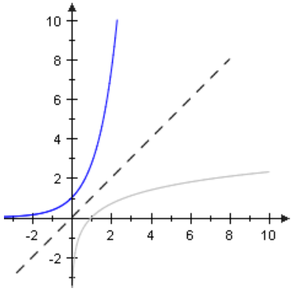
für alle $x \in D$ bzw. $y \in M$.

Umkehrfunktion der Trigonometrischen Funktionen

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen heißen Arcus-Funktionen. Für die Existenz der Umkehrfunktionen ist es notwendig, den Definitionsbereich der trigonometrischen Funktionen einzuschränken.

trig. Funktion	eing. Def. Bereich	Umkehrfunktion	Def. Bereich
$\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\arcsin x$	$[-1; 1]$
$\cos x$	$[0; \pi]$	$\arccos x$	$[-1; 1]$
$\tan x$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$[0; \pi]$	$\text{arccot}\ x$	$\mathbb{R}$

Exponential und Logarithmus



Theorem

Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *gegeben durch* $f(x) = a^x$ *ist für* $0 < a < 1$ *streng monoton fallend und für* $1 < a$ *streng monoton wachsend.*
Ihre Umkehrfunktion wird als Logarithmusfunktion *bezeichnet:* $f^{-1} : (0, \infty) \to$ *mit* $f^{-1}(x) = \log_a(x)$*.*

Exponential und Logarithmus: Rechenregeln

Theorem

Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x b^x = (ab)^x$
- $(1/a)^x = a^{-x}$
- $a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$ *für alle* $x \in \mathbb{Z}$ *und* $y \in \mathbb{N}$*.*

Eulersche e-Funktion

Eine wichtige Exponentialfunktion ist $f(x) = e^x$ mit $e = 2,71828\ldots$ (Eulersche Zahl).
Eigenschaften:

1) $f(x) > 0$ (keine Nullstellen)
2) stetig und streng monoton wachsend $\Rightarrow$ bijektiv
3) $e^0 = 1$ daraus folgt $f(0) = 1$
4) $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$

Da die Eulerschen e-Funktion bijektiv ist, existiert eine Umkehrfunktion. Diese ist durch den natürlichen Logarithmus $\ln(x) = \log_e(x)$ gegeben.

Eulersche-e-Funktion

Bemerkung: Jede Exponentialfunktion kann mit Hilfe der Eulerschen e-Funktion dargestellt werden

$$f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} = \mathrm{e}^{\ln a^x}.$$

Für einen Basiswechsel von der Basis b zu Basis a oder e gilt

$$\underbrace{\log_b x}_{\text{Basis } b} = \frac{\log_a x}{\underbrace{\log_a b}_{\text{Basis } a}} = \frac{\ln x}{\underbrace{\ln b}_{\text{Basis e}}}\ .$$

Gebrochen rationale Funktionen

Definition (Gebrochen rationale Funktion)

Seien $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$ und $0 \leq j \leq m$. Die Funktion

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

heißt gebrochen rationale Funktion.

$n < m$: echt gebrochen rational

$n \geq m$: unecht gebrochen rational

Verhalten im Unendlichen

Für das Verhalten von rational gebrochenen Funktionen im Unendlichen kann die folgende Regel verwendet werden:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{a_n}{b_m} \right) x^{n-m}.$$

Definition (Polstellen)

Stellen, in deren unmittelbarer Umgebung die Funktionswerte unbeschränkt wachsen oder fallen, heißen Pole oder Unendlichkeitsstellen der Funktion $f(x)$.

Polstellen und Lücken

Definition (Pol der k-ten Ordnung)

x_0 ist ein Pol k-ter Ordnung $\Leftrightarrow$ ($P_n(x_0) \neq 0$ und $Q_m(x_0) = 0$ ist eine Nullstelle von k-ter Ordnung)

Definition (Nullstelle der k-ten Ordnung)

x_1 ist eine Nullstelle k-ter Ordnung $\Leftrightarrow$ ($P_n(x_1) = 0$ ist eine Nullstelle von k-ter Ordnung und $Q_m(x_1) \neq 0$)

Definition (Lücke)

x_2 ist eine Lücke $\Leftrightarrow$ ($P_n(x_2) = 0$ und $Q_m(x_2) = 0$)

Definitionsbereich

Der Definitionsbereich D einer gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Pole}, \text{Lücken}\}$$

Bestimmung der Nullstellen und Pole einer gebrochen rationalen Funktion:

1. Zerlegung des Zähler- und Nennerpolynoms in Linearfaktoren und Kürzung gemeinsamer Faktoren (Schließung der Lücken).
2. Reelle Linearfaktoren im Zähler sind reelle Nullstellen.
   Reelle Linearfaktoren im Nenner sind reelle Pole.

Grenzwerte

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$ und in einer Umgebung von x_0 definiert.

Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D, x_n > x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g_r \quad \text{(rechtseitiger Grenzwert).}$$

Für jede Folge $(\widetilde{x_n})$ mit $\widetilde{x_n} \in D, \widetilde{x_n} < x_0$ und $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n} = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x_n}) = g_L \quad \text{(linkseitiger Grenzwert).}$$

Gilt $g_r = g_L$, so existiert der Grenzwert g.

Grenzwerte

Bei den Grenzwerten kann man verkürzt

- für den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = g_r$$

- für den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = g_L$$

schreiben.

Stetigkeit

Definition (Stetigkeit)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt stetig in Punkt x_0 falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

f heißt stetig in D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

Stetige Funktionen

Theorem

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ *Funktionen, die in* $x_0 \in D$ *stetig sind und sei* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Dann sind auch die Funktionen*

$$\begin{aligned} f+g &: D \to \mathbb{R}, \\ \lambda f &: D \to \mathbb{R}, \\ fg &: D \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

im Punkt x_0 *stetig. Ist* $g(x_0) \neq 0$, *so ist auch die Funktion*

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$$

in x_0 *stetig. Dabei ist* $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Definition

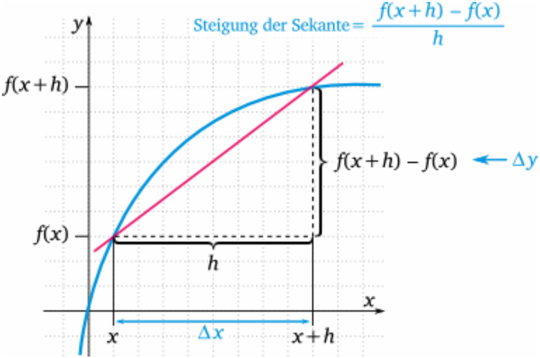
Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt in einem Punkt $x \in D$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x)$ heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f im Punkt x (man schreibt auch $\frac{\mathbf{d}f(x)}{\mathbf{d}x}$). Die Funktion f heißt differenzierbar in D, falls f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.

Geometrische Interpretation



Beim Grenzübergang ($h \to 0$) geht die Sekante in die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$ über.

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x \end{aligned}$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} \\
&= (-1) \cdot x^{-2}
\end{aligned}$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \end{aligned}$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Theorem

Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$ differenzierbar, so ist sie auch in a stetig.

Rechenregeln für differenzierbare Funktionen

Theorem

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g,\ \lambda f,\ fg : D \to \mathbb{R}$$

in x differenzierbar und es gelten die Rechenregeln:

a) *Linearität:*

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x),\\ (\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x).\end{aligned}$$

Rechenregeln für differenzierbare Funktionen

Theorem (Fortsetzung)

b) *Produktregel:*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

c) *Quotientenregel: Ist $g(a) \neq 0$ für alle $a \in D$, so ist auch die Funktion $(f/g) : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Umkehrfunktion

Theorem

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $\varphi = f^{-1} : D^* \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion, wobei $D^* = f(D)$.
Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, so ist φ im Punkt $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}.$$

Kettenregel

Theorem

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $g : E \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $f(D) \subseteq E$. *Die Funktion* f *sei im Punkt* $x \in D$ *differenzierbar und* g *sei in* $y := f(x) \in E$ *differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion*

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}$$

im Punkt x *differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) \quad = \quad g'(f(x))f'(x).$$

Ableitung höherer Ordnung

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei in D differenzierbar. Falls die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ ihrerseits im Punkt $x \in D$ differenzierbar ist, so heißt

$$\frac{\mathbf{d}^2 f(x)}{\mathbf{d}x^2} := f''(x) := (f')'(x)$$

die zweite Ableitung von f in x.
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar in D, wenn f in jedem Punkt $x \in D$ k-mal differenzierbar ist. Sie heißt k-mal stetig differenzierbar in D, wenn überdies die k-te Ableitung $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ in D stetig ist.

Wichtige Ableitungen

- $f(x) = C,\ f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n,\ f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = 1/x^n,\ f'(x) = -n/x^{n+1}$, für $x \neq 0$
- $f(x) = x^\alpha,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, für $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
- $f(x) = \ln x,\ f'(x) = 1/x$, für $x > 0$
- $f(x) = \log_a x,\ f'(x) = 1/(x \ln a)$, für $x > 0$
- $f(x) = \mathrm{e}^x,\ f'(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = a^x,\ f'(x) = a^x \ln a$

Wichtige Ableitungen

- $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x,\ f'(x) = 1/(\cos^2 x)$ für $x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}$
- $f(x) = \cot x,\ f'(x) = -1/(\sin^2 x)$, für $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $f(x) = \arcsin x,\ f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, für $-1 < x < 1$
- $f(x) = \arccos x,\ f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$, für $-1 < x < 1$
- $f(x) = \arctan x,\ f'(x) = 1/(1+x^2)$
- $f(x) = \text{arccot}\ x,\ f'(x) = -1/(1+x^2)$

Regel von Bernoulli und l'Hospital

Theorem

Auf dem Intervall $I =]a, b[$ *seien* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *zwei differenzierbare Funktionen. Es gilt* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *und es existiere der Limes*

$$\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}.$$

Dann gelten die folgenden Regeln von de l'Hospital:

1) *Falls* $\lim_{x \to b} g(x) = \lim_{x \to b} f(x) = 0$ *und* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *dann gilt,*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Regel von Bernoulli und l'Hospital

Theorem (Fortsetzung)

2) *Falls* $\lim_{x \to b} g(x) = \lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$ *und* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *dann gilt ebenfalls,*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

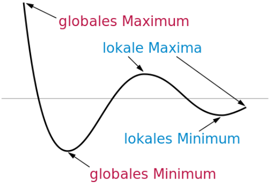
Bemerkung 1: Die Regel gilt auch für $b \to \infty$.
Bemerkung 2: Alle anderen unbestimmten Formen lassen sich umformen, so dass die Regel 1 oder 2 angewendet werden kann.

Umformungstabelle

Die folgende Tabelle zeigt wie unbestimmte Ausdrücke umgeformt werden können um die Regel von l'Hospital zu verwenden.

Funktion $f(x)$	$\lim_{x\to b} f(x)$	Elementare Umformung
$g(x)\cdot h(x)$	$0\cdot\infty$ bzw. $\infty\cdot 0$	$\dfrac{g(x)}{\frac{1}{h(x)}}$ bzw. $\dfrac{h(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
$g(x)-h(x)$	$\infty-\infty$	$\dfrac{\frac{1}{h(x)}-\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{g(x)h(x)}}$
$g(x)^{h(x)}$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{h(x)\cdot\ln g(x)}$

Maximum und Minimum

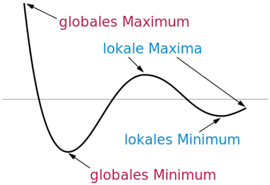


Definition (lokales Minimum und Maximum)

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f habe in $x_n \in]a, b[$ ein lokales Maximum (Minimum), wenn wir eine Umgebung $U_\epsilon(x_n)$ von x_n finden, so dass

$$f(x) \leq f(x_n) \quad (\text{bzw. } f(x) \geq f(x_n)) \;\text{ für alle } x \in U_\epsilon(x_n).$$

Maximum und Minimum



Definition (Globales Minimum und Maximum)

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f habe in $x_n \in]a, b[$ ein globales Maximum (Minimum), wenn

$$f(x) \leq f(x_n) \quad (\text{bzw. } f(x) \geq f(x_n))$$

für alle $x \in]a, b[$ gilt.

Notwendige Bedingungen für ein Extremum

Theorem

Die Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in]a, b[$ ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$.

Bemerkung: $f'(x) = 0$ ist nur eine *notwendige*, aber nicht *hinreichende* Bedingung für ein lokales Extremum.

Example

Für die Funktion $f(x) = x^3$ gilt z.B. $f'(0) = 0$, sie besitzt aber in 0 kein lokales Extremum.

Konvex und konkav

Die 2. Ableitung beschreibt das Monotonie-Verhalten von $f'(x)$ und bestimmt dabei die Krümmung der Kurve.

Definition (Konvex)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.Wir nennen f konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.

Bemerkung: $f''(x) > 0$: heißt, dass die Steigung von $f(x)$ zunimmt.

Definition (Konkav)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.Wir nennen f konkav, wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in D$.

Bemerkung: $f''(x) < 0$: heißt, dass die Steigung von $f(x)$ abnimmt.

Hinreichende Bedingung für ein Extremum

Theorem

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ ein differenzierbare Funktion. Im Punkt $x \in]a,b[$ sei f zweimal differenzierbar und es gelte

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) < 0 \quad (\text{bzw. } f''(x) > 0).$$

Dann besitzt f in x ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

Bemerkung: Dieser Satz gibt nur eine *hinreichende*, aber nicht *notwendige* Bedingung für ein Extremum an.

Example

Die Funktion $f(x) = x^4$ besitzt zum Beispiel für $x = 0$ ein strenges lokales Minimum. Es gilt jedoch $f''(0) = 0$.

Wendepunkt

Definition

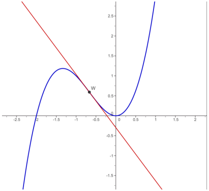
Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man sagt f habe in x_0 einen Wendepunkt, wenn es Intervalle $]\alpha, x_0[$ und $]x_0, \beta[$ gibt, so dass entweder

- f in $]\alpha, x_0[$ konvex und in $]x_0, \beta[$ konkav ist, oder dass
- f in $]\alpha, x_0[$ konkav und in $]x_0, \beta[$ konvex ist.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph der Funktion f im Punkt x_0 das Vorzeichen seiner Krümmung ändert.

Bemerkung: Das heißt, dass der Graph der Funktion f im Punkt x_0 das Vorzeichen seiner Krümmung ändert.

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt



Theorem

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$. Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und es gilt ferner

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0,$$

dann hat f in x_0 einen Wendepunkt.

Sattelpunkt oder Extremum

Definition (Sattelpunkt)

Sei f eine Funktion mit einem Wendepunkt in x_0 und weiter gelte $f'(x_0) = 0$, dann nennen wir diesen Wendepunkt einen Sattelpunkt.

Theorem

Sei $f'(x_0) = 0$ und die Nächstfolgende nicht *veschwindende Ableitung $f^{(n)}(x_0)$.*

- *Ist n gerade, so gilt:*
  $f(x_0)$ ist ein relatives Minimum für $f^{(n)}(x_0) > 0$
  $f(x_0)$ ist ein relatives Maximum für $f^{(n)}(x_0) < 0$
- *Ist n ungerade, so gilt:*
  $f(x_0)$ hat einen Sattelpunkt.

Extremwertsatz

Theorem (Weierstraß: Satz vom Minimum und Maximum)

Eine reellwertige Funktion, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist, ist beschränkt und nimmt ihre obere und ihre untere Grenze an. Folglich existieren $t, h \in [a, b]$ für die

$$f(t) \leq f(x) \leq f(h)$$

für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Motivation

Example

Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms:

$$p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 40$$

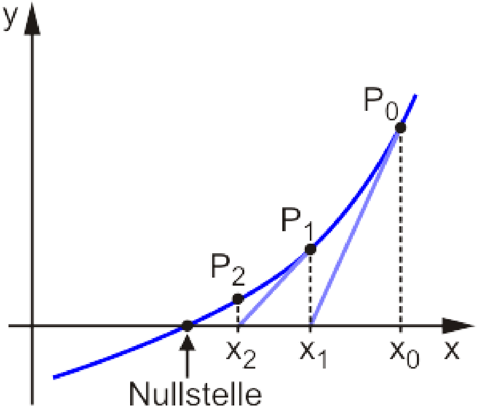
Gesucht ist also $p(x) = 0$.
Für quadratische Gleichungen haben wir die (p, q)-Formel. Wie gehen wir mit höherer Ordnung um?
Lösungsidee: Newton Verfahren.

Idee

Example

Gegeben sei $p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 40$ und wir suchen ein x mit $p(x) = 0$.
Wir raten als Startwert $x_0 = 1$.
$p(1) = 12$ folglich ist x_0 keine Nullstelle,die Ableitung in x_0 liefert uns $p'(x_0) = -22$. Folglich ist die Funktion fallend und es macht Sinn ein weiteres $x_1 > x_0$ zu betrachten.
Zum Beispiel $x_1 = 1,5$ oder ist $x_1 = 20$ besser?
Wie finden wir eine sinnvolle Schrittweite für x_1?

Newton Verfahren



Newton-Verfahren

Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und seien weiter ihre Nullstellen als Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ gesucht. Das Newton-Verfahren löst diese Gleichung iterativ und startet mit einem Näherungswert x_0. In jedem Iterationsschritt x_n wir der Graph von f durch die Tangenten an $f(x_n)$ ersetzt. Der Schnittpunkt der Tagente mit der x-Achse ist das neue x_{n+1}.

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Bemerkung: Nicht für jeden Startwert x_0 konvergiert das Verfahren. Die Herausforderung ist einen guten Startwert zu wählen.

Konvergenzsatz

Falls die, durch diese Iterationsvorschrift gebildete Folge x_n, wohldefiniert ist und gegen ein $\xi \in [a, b]$ konvergiert, so folgt, dass $f(\xi) = 0$ gilt.

Theorem

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt

a) *Es gibt genau ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = 0$.*

b) *Ist $x_0 \in [a, b]$ ein beliebiger Startpunkt mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die Folge*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.

Stammfunktion

Wir wollen zeigen, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist, was in vielen Fällen die Möglichkeit zur Berechnung des Integrals liefert.

Example

Zu einer gegebenen Funktion f wird eine Funktion F gesucht, deren erste Ableitung $F' = f$ ist.

$f(x) = F'(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
$2x$	x^2
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$

Stammfunktion

Definition

Eine Differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$.

Theorem

Sei $F(x)$ die Stammfunktion zu $f(x) = F'(x)$ dann folgt daraus, dass $F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Unbestimmtes Integral

Definition

Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Funktion f heißt *unbestimmtes Integral*,

$$\int f(x)\,\mathbf{d}x = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion f ist der *Integrand* und die Konstante C wird *Integrationskonstante* genannt.

Integrationsregeln

Theorem (Linearität der Integration)

Seien f, g integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

a) *Summenregel:*

$$\int [f(x) + g(x)] \; \mathbf{d}x = \int f(x) \; \mathbf{d}x + \int g(x) \; \mathbf{d}x$$

b) *Faktorregeln:*

$$\int \lambda f(x) \; \mathbf{d}x = \lambda \int f(x) \; \mathbf{d}x$$

c) *Monotonie:*

$$f \leq g \Rightarrow \int f(x) \; \mathbf{d}x \leq \int g(x) \; \mathbf{d}x$$

Substitution

Ein wichtiges Hilfsmittel zum Berechnen von Integralen besteht darin, eine Transformation (*Substitution*) der Integrationsvariablen durchzuführen.

Theorem (Substitutionsregel)

Sei f eine stetige Funktion und φ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \mathbf{d}t = \int f(x)\ \mathbf{d}x$$

Beispiele zur Substitution

Example

- $\int f(ax+b)\,\mathbf{d}x = \frac{1}{a}\int f(t)\,\mathbf{d}t$, mit $\varphi(t) = ax+b$
- $\int tf(t^2)\,\mathbf{d}t = \frac{1}{2}\int f(x)\,\mathbf{d}x$, mit $\varphi(t) = t^2$
- Logarithmische Integration:

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathbf{d}t = \ln|\varphi(t)| + C, \quad \left(f(x) = \frac{1}{x}, x = \varphi(t)\right)$$

- $\int \tan t\,\mathbf{d}t = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathbf{d}t = -\ln|\cos t| + C$

Partielle Integration

Neben der Substitutionsregel ist die *partielle Integration* ein weiteres nützliches Hilfsmittel zur Berechnung von Integralen.

Theorem (Partielle Integration)

Seien u, v integrierbare und stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, \mathbf{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, \mathbf{d}x$$

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int x \cos x \, \mathbf{d}x$$

dann setzen wir $u(x) = x, v'(x) = \cos(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, \mathbf{d}x &= x \sin x - \int \sin x \, \mathbf{d}x \\ \int u(x) \cdot v'(x) \, \mathbf{d}x &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, \mathbf{d}x \end{aligned}$$

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int \ln x \, \mathbf{d}x$$

dann setzen wir $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int u(x) \cdot v'(x) \, \mathbf{d}x &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, \mathbf{d}x \\
\int \ln(x) \cdot 1 \, \mathbf{d}x &= x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, \mathbf{d}x \\
&= x \ln x - \int 1 \, \mathbf{d}x = x \ln x - x + C
\end{aligned}$$

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int \ln x \; \mathbf{d}x$$

dann setzen wir $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int u(x) \cdot v'(x) \; \mathbf{d}x &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \; \mathbf{d}x \\
\int \ln(x) \cdot 1 \; \mathbf{d}x &= x \ln x - \int \frac{1}{x} x \; \mathbf{d}x \\
&= x \ln x - \int 1 \; \mathbf{d}x = x \ln x - x + C
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

Example (Partialbruchzerlegung)

Gegeben:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathbf{d}x = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 x^0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 x^0}\,\mathbf{d}x$$

Falls $m \geq n \Rightarrow$ Polynomdivision durchführen.
Dann erhält als ein Ergebnis ein Polynom und eine echt gebrochen rationale Funktion mit $m < n$.
Das Polynom kann wie gewohnt integriert werden.
Für die gebrochen Rationale Funktion wenden wir eine Partialbruchzerlegung an (s. nächste Folie).

Partialbruchzerlegung, Fortsetzung

Example (Partialbruchzerlegung, Fortsetzung)

Fall 1: Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einfache Nullstellen von $Q(x)$. Dann kann man $Q(x)$ in Produktdarstellung angeben:

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

Partialbruchzerlegung, Fortsetzung

Example (Partialbruchzerlegung, Fortsetzung)

Integration

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathbf{d}x &= \int \frac{A_1}{x-x_1}\,\mathbf{d}x + \cdots + \int \frac{A_n}{x-x_n}\,\mathbf{d}x \\ &= A_1 \cdot \ln|x-x_1| + \cdots + A_n \cdot \ln|x-x_n| + C\end{aligned}$$

Bestimmung der Koeffizienten A_i durch Koeffizientenvergleich (siehe Übung).

Partialbruchzerlegung, Fortsetzung

Example (Partialbruchzerlegung, Fortsetzung)

Fall 2: Seien $x_1, x_2, \ldots, x_r$ mehrfache Nullstellen von $Q(x)$.

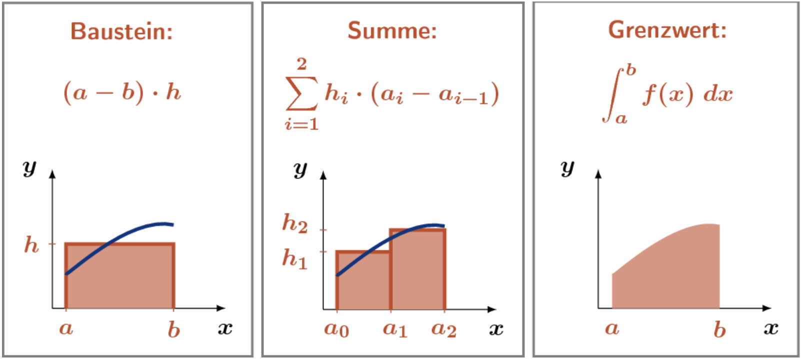
$$\begin{aligned} Q(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^{k_i} &= (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r}, \\ \sum_{i=1}^{r} k_i &= \text{Grad } (Q(x)) = n \end{aligned}$$

Ansatz:

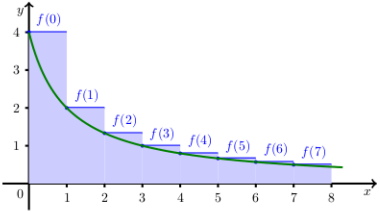
$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \ldots \end{aligned}$$

Motivation

Wie berechnet man die Fläche zwischen dem Graph einer Funktion und der x-Achse?



Treppenfunktion



Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$:

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta_n, \qquad \text{mit } \Delta_n = \frac{b-a}{n}.$$

wobei $x_0 = a; x_1 = a + \Delta_n; \ldots ; x_n = a + n\Delta_n = b.$

Definition

Definition

Sei f eine auf $[a, b]$ stetige Funktion. Setzen wir $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$ und $x_k = a + k \cdot \Delta_n$ für $k = 0, \ldots, n$. Dann konvergiert die Folge der Rechtecksflächen

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_n.$$

Man nennt ihren Grenzwert das bestimmte Integral von f auf dem Intervall $[a, b]$ und schreibt

$$\int_a^b f(x)\, \mathbf{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_n.$$

Definition

Definition (Fortsetzung)

Dabei heißt $f(x)$ Integrand, x Integrationsvariable, a und b untere bzw. obere Integrationsgrenze und $[a, b]$ das Integrationsintervall.

Theorem (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

Sei f stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

Sätze über Integrationsgrenzen

Theorem

1) $\int_a^a f(x)\,\mathbf{d}x = 0$
2) $\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathbf{d}x$
3) *Sei $a < b < c$, dann gilt*

$$\int_a^c f(x)\,\mathbf{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathbf{d}x$$

Sätze über Integrationsgrenzen

Theorem

4) $\int_a^b (f+g)\ \mathbf{d}x = \int_a^b f\ \mathbf{d}x + \int_a^b g\ \mathbf{d}x$
$\int_a^b c \cdot f\ \mathbf{d}x = c \cdot \int_a^b f\ \mathbf{d}x$ *für* $c \in \mathbb{R}$.
5) *Substitution:*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathbf{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ \mathbf{d}x$$

Fläche zwischen einem Graphen und der x-Achse

Definition

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann heißt

$$A = \int_a^b f(x) \, \mathbf{d}x$$

der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f.

1) Wenn $f(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$, dann gilt $A = \int_a^b f(x) \, \mathbf{d}x \geq 0$.
2) Wenn $f(x) \leq 0$ für $x \in [a, b]$, dann gilt $\int_a^b f(x) \, \mathbf{d}x \leq 0$ und $A := -\int_a^b f(x) \, \mathbf{d}x \geq 0$.

Fläche zwischen einem Graphen und der x-Achse

3) Nimmt $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ sowohl positive, als auch negative Werte an, so müssen zunächst die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ bestimmt werden. Man erhält für $k = 1, \ldots, n, n+1$

$$I_k \quad = \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathbf{d}x \text{ mit } x_0 = a \text{ und } x_{n+1} = b$$

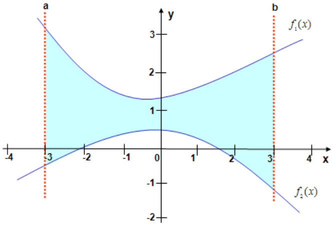
Ausgeschrieben:

$$I_1 = \int_a^{x_1} f(x)\,\mathbf{d}x,\ I_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathbf{d}x, \ldots, I_{n+1} = \int_{x_n}^{b} f(x)\,\mathbf{d}x$$

$$\Rightarrow \quad A = |I_1| + |I_2| + \cdots + |I_{n+1}| = \int_a^b |f(x)|\,\mathbf{d}x.$$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

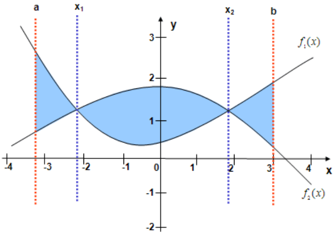
Seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ auf $[a, b]$ stetig.



1) Wenn $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sich im Intervall $[a, b]$ nicht schneiden, so gilt für die Fläche A zwischen den beiden Funktionen

$$A := \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| \, \mathbf{d}x.$$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven



2) Wenn $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sich im Intervall $[a, b]$ schneiden, so müssen zuerst die Schnittpunkte $x_1, \ldots, x_n$ zwischen beiden Funktionen berechnet werden.
Anschließend muss das Integral stückweise auf den Intervallen $[x_k, x_{k+1}]$ für $k = 0, \ldots, n$ mit $x_0 = a$ und $x_{n+1} = b$, wie in 1) beschrieben, berechnet und aufsummiert werden.

1. Fall: Unbeschränktes Integrationsintervall

1) $f(x)$ stetig auf $[a, \infty)$; $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^\infty f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x, \quad b \in [a, \infty)$$

2) $f(x)$ stetig auf $(-\infty, b]$; $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x$$

3) $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$ fest aber beliebig!

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\ \mathbf{d}x + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)\ \mathbf{d}x$$

Existieren die jeweiligen Grenzwerte, so konvergieren die Integrale, ansonsten divergieren sie.

2. Fall: Unendlichkeitsstellen des Integranden (Polstellen)

Sei $f(x)$ stetig auf $[a, b] \setminus \{c\}$ und $a \leq c \leq b$,

1) falls $c = a$

$$\int_{a=c}^{b} f(x)\,\mathbf{d}x = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,\mathbf{d}x$$

2) falls $c = b$

$$\int_{a}^{b=c} f(x)\,\mathbf{d}x = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)\,\mathbf{d}x$$

3) falls $a < c < b$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathbf{d}x = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{a}^{c-\epsilon_1} f(x)\,\mathbf{d}x + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\,\mathbf{d}x$$