GRUNDLAGEN DER ANALYSIS.

Notiztitel 21.09.2015

I. Zahlenfolgen. Grenzwerte

I.1. Definition und Darstellungen von Folgen

Def. Ordnet man jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau eine Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zu, so entsteht durch

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_r, \dots$$

eine Zahlenfolge oder kurz: Folge.

$a_1, a_2, a_3, \dots$ heißen Glieder der Folge; a_n ist das n-te Folgenglied.

Eine Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung $a_n = f(n)$; $n \in \mathbb{N}$ heißt Bildungsgesetz der Folge.

Die Darstellung einer Zahlenfolge in der Form

$$x_n = \varphi(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x_i = a_i \quad, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \quad k \in \mathbb{N}$$

heißt rekursive Darstellung.

Beispiel:

(1) $a_n = a$ $\qquad (a_n) = a, a, a, \dots$ (konstante Folge)

(2) $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad (a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

(3) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$ $\qquad (a_n) = -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \dots$

(4) $a_n = n^2$ $\qquad (a_n) = 1, 4, 9, 16, 25, \dots$

(5) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}\ ; \quad a_1 = 1 \ ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_2 = \sqrt{2a_1} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$a_3 = \sqrt{2a_2} = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{3/2}} = 2^{3/4}$$

$$a_4 = \sqrt{2a_3} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2^{7/4}} = 2^{7/8}$$

$$(a_n) = 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots$$

Grenzwert: $a = 2$

(6) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{3}{2a_n}\ ; \quad a_0 = 2$

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = \frac{a_0}{2} + \frac{3}{2 \cdot a_0} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2 \cdot 2} = 1{,}75$$

$$a_2 = 1{,}732142857$$

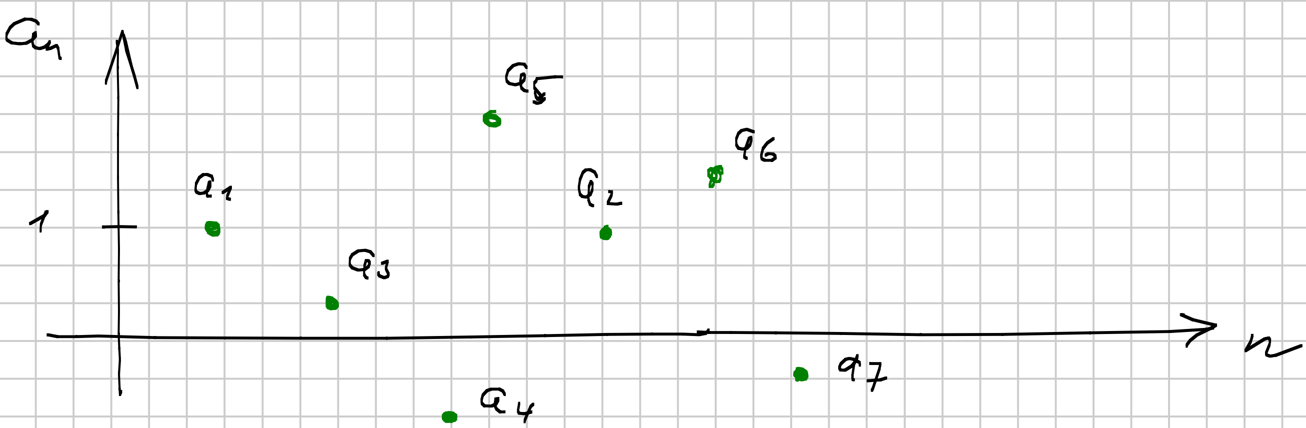
$$a_3 = 1{,}73205081$$

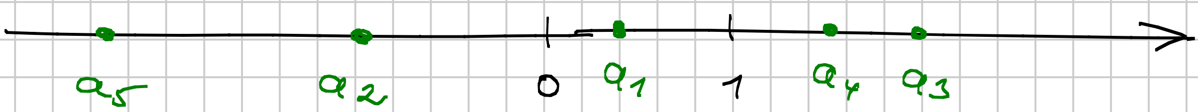
$$a_4 = 1{,}732050808$$

$$\ldots$$

$$a = \sqrt{3}$$

Graphische Darstellungen von Zahlenfolgen

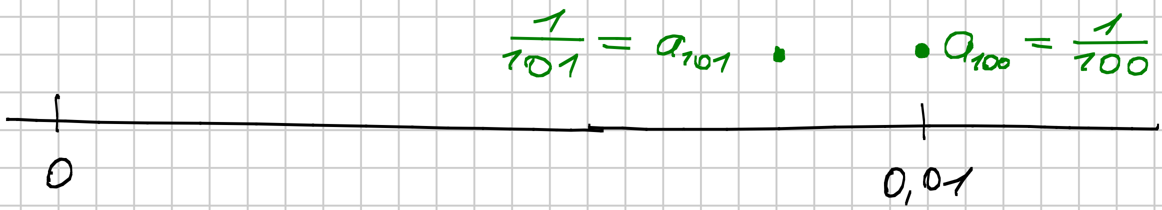




I. 2. Der Grenzwert einer Folge

Welche Eigenschaften hat die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$?

1. $0 < a_n \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$
2. $a_{n+1} < a_n$ — " —



in diesem Intervall liegen alle Glieder a_n mit $n \geq 101$

Folgerung In jeder noch so kleinen ε-Umgebung von Null liegen fast alle, d.h. alle bis auf endlich viele, Glieder der Folge. So ist z.B ab dem 101. Glied der Abstand aller Glieder von Null kleiner als 0,01, d.h die Bedingung $|a_n - 0| = |a_n| < 0{,}01$ ist für alle $n \geq 101$ erfüllt.

Bemerkung: Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ hat den Grenzwert Null (Nullfolge).

Def. $g \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge (a_n), wenn zu jedem (beliebig kleinem) $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$|a_n - g| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

gilt. Man schreibt dann

$$g = \lim_{n \to \infty} a_n$$

Bemerkung:

(1) Existiert der Grenzwert g, so heißt die Folge (a_n) konvergent, anderenfalls divergent.

(2) Der Grenzwert g der Folge (a_n) kann Glied der Folge sein.

(3) Das Abändern endlich vieler Glieder oder das Hinzufügen bzw. Weglassen endlich vieler Glieder einer Folge (a_n) hat keinen Einfluss auf den Grenzwert.

(4) Um nachzuweisen, dass $b \in \mathbb{R}$ kein Grenzwert der Folge (a_n) ist, braucht man nur eine Umgebung $U_\varepsilon(b)$ von b anzugeben, außerhalb derer unendlich viele Glieder von (a_n) liegen.

Beispiel:

(1) $(a_n) = (1 + (-1)^n) = 0, 2, 0, 2, \ldots,$ besitzt keinen Grenzwert, da sowohl in $U_\varepsilon(0)$ als auch in $U_\varepsilon(2)$, $0 < \varepsilon < 1$, unendlich viele Glieder liegen.

(2) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ hat nicht den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$.

Beweis: $\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

1. Fall $\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \geq 0$ für $n = 1, 2, \ldots$

uninteressant, da $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} \iff n \leq 2$

2. Fall $\quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2} < 0 \quad$, d.h. $n > 2$

$$-\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} > -\varepsilon$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \varepsilon$$

Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow n < \frac{1}{\frac{1}{2} - \varepsilon}$$

obere Schranke für n!

$\Rightarrow$ nur endlich viele Werte erfüllen die Ungleichung, also ist $g = \frac{1}{2}$ nicht Grenzwert von $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$.

Beispiel:

(1) $(a_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right) = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Beweis: $\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$

$$\underset{(\varepsilon > 0)}{\Rightarrow} 1 < \varepsilon \cdot n^2 \underset{(n > 0)}{\Rightarrow} n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};$$

(2) $(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$$g = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

Beweis: $\left| 1 - \frac{1}{n} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

Da $n > 0$: $1 < \varepsilon n$; $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Satz Es gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, $p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828\ldots$

I. 3. Bestimmung von Grenzwerten

Seien $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $c \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^r = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^r = a^r$, $a_n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$

Beispiel

(1)
$$a_n = \frac{2n - \sqrt{n^3}}{5\sqrt{n} - n + 2\sqrt{n^3}} = \frac{2n - n^{\frac{3}{2}}}{5n^{\frac{1}{2}} - n + 2n^{\frac{3}{2}}}$$

$$g = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{3/2}\left[2n^{-1/2} - 1\right]}{n^{3/2}\left[5n^{-1} - n^{-\frac{1}{2}} + 2\right]} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n \to \infty} \left[2n^{-1/2} - 1\right]}{\lim\limits_{n \to \infty} \left[5n^{-1} - n^{-1/2} + 2\right]} = \frac{-1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

(2)
$$a_n = \frac{2n^2 - 7\sqrt{n}}{4n + 2n^3} = \frac{n^3\left(2n^{-1} - 7^{-5/2}\right)}{n^3\left(4n^{-2} + 2\right)} =$$

$$= \frac{2n^{-1} - 7n^{-5/2}}{4n^{-2} + 2}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} \left(2n^{-1} - 7n^{-5/2}\right)}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(4n^{-2} + 2\right)} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$$

Üben (3)
$$a_n = \frac{3n^3 + 2\sqrt{n} - 7n}{2n^2 - 4n + \pi} = \frac{n^3\left(3 + 2n^{-5/2} - 7n^{-2}\right)}{n^3\left(2n^{-1} - 4n^{-2} + \pi \cdot n^{-3}\right)} =$$

$$= \frac{3 + 2n^{-5/2} - 7n^{-2}}{2n^{-1} - 4n^{-2} + \pi n^{-3}}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} \left(3 + 2n^{-5/2} - 7n^{-2}\right) \to 3}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(2n^{-1} - 4n^{-2} + \pi \cdot n^{-3}\right) \to 0} \to \infty$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}+\lim\limits_{n\to\infty}1}=$$

$$=\frac{\left[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right]^{1/2}}{\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{1/2}+1}=\underline{\underline{0}}$$

(5)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\underline{\underline{e}}.$$

(6)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}m}=$$

$3n=m$

$n=\frac{1}{3}m$

$$=\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{2/3}=\underline{\underline{e^{2/3}}}$$

(7)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4-7n^{1/2}+3n}{8n^2+9n^4}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4(4-7n^{-7/2}+3n^{-3})}{n^4(8n^{-2}+9)} = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$$

~~äub.~~

(8) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5}{4+n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4(3n^{-2}-5n^{-4})}{n^4(4n^{-4}+1)} = \underline{\underline{0}}$$

<u>Definition</u> Eine Folge $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots$ reeller Zahlen heißt nach oben beschränkt, wenn alle a_n kleiner oder gleich einer festen Zahl M sind ($a_n \leq M$), nach unten beschränkt, wenn alle a_n größer oder gleich einer festen Zahl m sind ($a_n \geq m$), beschränkt, wenn (a_n) nach oben und nach unten beschränkt ist, monoton wachsend, wenn $a_1 \leq a_2 \leq a_3, \ldots$, d.h. $a_n \leq a_{n+1}$ gilt, monoton fallend, wenn $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$, d.h. $a_n \geq a_{n+1}$ gilt.

<u>Satz</u> a) Eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge ist konvergent.

b) Eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge ist konvergent.

<u>Beispiel</u> a) Die konstante Folge $a, a, a, \ldots$ ist konvergent gegen a (monoton und beschränkt)

b) Die Folge $2, -4, 8, -16, \ldots$ ist alternierend (abwechselndes Vorzeichen) und unbeschränkt $\Rightarrow$ divergent.

c) Die Folge $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ ist streng monoton fallend und beschränkt (9 und 0)

$\Rightarrow$ konvergent

__Bemerkung__ Diese Folge ist eine geometrische Folge: $a_n = q \cdot a_{n-1}$; mit $q = \frac{1}{3}$ und $a_1 = 9$.
Die geometrische Folge ist für $|q| < 1$ konvergent gegen Null und für $|q| > 1$ divergent.

I.4. Unendliche Zahlenreihen

__Def.__ Sei (a_n) eine Folge reeler Zahlen. Die endlichen Summen:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_{n-1} + a_n$$

heißen Partial- oder Teilsummen und bilden eine Folge. Ein Ausdruck der Form $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$

wird unendliche Reihe genannt.

__Beispiel__ (Geometrische Folge & Reihe)
Betrachten wir eine geometrische Folge mit $a_1 = 1$ und $q = x$: $1, x, x^2, x^3, \dots, x^k, \dots$,
dann bilden die Zahlen $s_1, s_2, \dots$ mit:

$$S_1 = 1;\ S_2 = 1 + x;\ S_3 = 1 + x + x^2, \dots$$

eine Folge der Partialsummen.

__Geometrische Summe__

$$\sum_{j=0}^{k} x^j = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$S_k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k \qquad | \cdot x$$

$$x \cdot S_k = \quad x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k + x^{k+1}$$

$$(1-x) S_k = 1 + x^{k+1}$$

(*)
$$\boxed{\begin{array}{ll} S_k = \dfrac{1 - x^{k+1}}{1-x} & \text{für } x \neq 1 \\[2ex] S_k = k+1 & \text{für } x = 1 \end{array}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Def. Besitzt die Folge der Teilsummen $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ einen Grenzwert S, so nennt man die Reihe konvergent und

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n =: \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ihre Summe. Existiert der Grenzwert S nicht, so heißt die Reihe divergent.

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots$$

Sei $|x| < 1$. Dann folgt aus (*):

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1 - x^{k+1}}{1-x} = \frac{1 - \lim_{k \to \infty} x^{k+1}}{1-x} =$$

$$= \frac{1}{1-x}.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1}$$

Beispiel 1) $x = -\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots =$$

$$= \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

2) $x = \frac{1}{3}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}.$$

Bemerkung Für $|x| \geq 1$ ist die Reihe divergent.

Anschauliches Beispiel dafür, dass die Addition unendlich vieler Zahlen eine endliche Zahl ergibt:

$$1 + 1 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-4} + \ldots + =$$

$$= 1{,}1111\ldots = 1{,}\overline{1} = \frac{10}{9}$$

Weiteres Beispiel einer divergenten Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \to \infty$$

harmonische Reihe

Bemerkung Die Addition ist kommutativ und assoziativ, daher ist die Summe endlich vieler Zahlen unabhängig von der Reihenfolge der Summanden, bzw. unabhängig davon, ob Klammern gesetzt werden oder nicht. Für unendliche Reihen gilt dies i. A. nicht.

Beispiel Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(1-1) =$

$$= \overbrace{(1-1)}^{S_1} + \underbrace{(1-1)}_{S_2}\!\!\!\!\!\! + \ldots$$ besitzt wegen $S_1 = S_2 = \ldots = 0$

den Grenzwert Null.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = \overbrace{1}^{S_1} \underbrace{- 1}_{S_2} + 1 - 1 + \ldots$ ist wegen

$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1, \ldots$ divergent.

Satz Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ konvergente Reihen und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n =$$

$$= \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$$

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^n}$ konvergent?

Es gilt $\frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^n} = \frac{3^{n+1}}{6^n} - \frac{2^{n+1}}{6^n} =$

$$= 3 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n (\star)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - 1 = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^n} \underset{(\star)}{=} 3 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{2}}$$