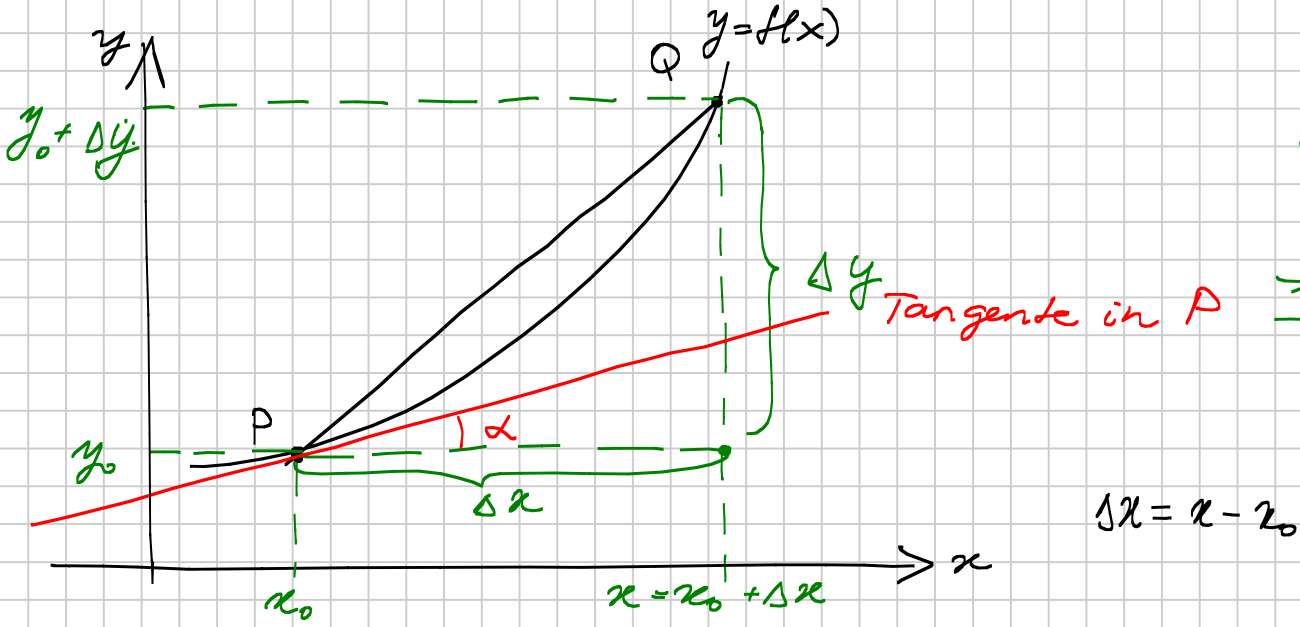
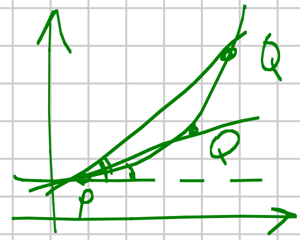
GRUNDLAGEN DER ANALYSIS.

Notiztitel 21.09.2015

III Differentialrechnung

III.1. Differenzierbarkeit einer Funktion





$\Delta x = x - x_0$

Welche Steigung besitzt die Kurve $y = f(x)$ im Punkt P?
Sei m_s – die Steigung der Sekanten, die der Punkt P mit einem anderen beliebigen Punkt Q verbindet.

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Wir lassen den Punkt Q entlang der Kurve in Richtung P zuwandern. Dabei strebt Δx gegen Null.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ – Steigung der Tangente.

Beispiel $\quad y = 4x^2; \quad x_0 = 1$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(1+\Delta x)^2 - 4\cdot(1)^2}{\Delta x} = 4 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} =$$

$$= 4 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{1} + 2\Delta x + (\Delta x)^2 \cancel{-1}}{\Delta x} = 4 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$= 4 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 4 \cdot 2 = 8$$

<u>Definition</u> $y = f(x)$ heißt differenzierbar in $x_0 \in D_f$, wenn der Grenzwert $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt dann (erste) Ableitung (Differentialquotient) von $f(x)$ an der Stelle x_0, geschrieben:

$$\boxed{y'(x_0) = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x = x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

<u>Beispiel</u> 1) $f_1(x) = x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_0} + \Delta x - \cancel{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

2) $f_2(x) = x^2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 \cancel{- x_0^2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x_0 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

Offensichtlich existieren der Grenzwerte für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir können also x_0 als Variable auffassen und erhalten für die beiden Funktionen die erste Ableitungen:

$$f_1'(x) = 1; \qquad f_2'(x) = 2x; \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>Bemerkungen</u>

(i) Nicht jede in x_0 stetige Funktion ist auch in x_0 differenzierbar. So gilt z.B. für die $y = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Der Grenzwert, d.h. der Differenzialquotient, existiert nicht, die Funktion $y=|x|$ ist an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar. Sie ist aber überall stetig.

ii) Umgekehrt gilt aber: Wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar, dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

III.2 Ableitungen höherer Ordnung

Allgemein kann die erste Ableitung f' der Funktion f wieder als Funktion aufgefasst werden. Die Ableitung von f' heißt zweite Ableitung oder Ableitung zweiter Ordnung und wird als f'' bezeichnet. Entsprechend erhält man die dritte Ableitung von f als (erste) Ableitung von f'' usw. Ableitungen n-ter Ordnung werden mit $f^{(n)}$ bezeichnet, $n=0,1,\dots$ mit $f^{(0)}=f$, $f^{(1)}=f'$, $f^{(2)}=f''$, ...

Satz Sei $n \in \mathbb{R}$, und $f(x)=x^n$ - differenzierbar für $x \in \mathbb{R}$

Dann gilt $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Beispiel 1) $f(x) = x^{1/3}$; $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2}$

2) $f(x) = x^3 + x$; $f'(x) = 3x^2+1$; $f''(x) = 6x$; $f^{(3)}(x) = 6$; $f^{(4)}(x) = 0$.

III.3 Ableitungsregel

Es seien u und v differenzierbare Funktionen. Dann können für die Bildung der ersten Ableitung der Funktion f folgende Regeln verwendet werden:

(1) Faktorregel: $f(x) = c \cdot u(x)$, $f'(x) = c \cdot u'(x)$, $c \in \mathbb{R}$

(2) Summen- und Differenzenregel.

$$f(x) = u(x) \pm v(x) \quad , \quad f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

(2a) Kombination von (1) und (2):

$$f(x) = a \cdot u(x) \pm b \cdot v(x) \, , \quad f'(x) = a \cdot u'(x) \pm b \cdot v'(x)$$

Beispiel:

$$y = 3x^5 + 7x^4 - 2x^2 + 5 ;$$

$$y' = 5x^4 + 28 \cdot x^3 - 4x ;$$

(3) Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \; ; \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beispiel: 1) $u(x) = \sqrt{x}$; $v(x) = x^3 + x^2 + 2$

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) = \sqrt{x}\,(x^3 + x^2 + 2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (x^3 + x^2 + 2) + (3x^2 + 2x) \cdot x^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^{5/2} + x^{3/2} + x^{-1/2}\right) + 3x^{5/2} + 2x^{3/2} = 3{,}5\,x^{5/2} + 2{,}5\,x^{3/2} + x^{-1/2}$$

Alternative: $f(x) = \sqrt{x}\,(x^3 + x^2 + 2) = x^{1/2}(x^3 + x^2 + 2) =$

$$= x^{3,5} + x^{2,5} + 2x^{0,5} \; ; \quad f'(x) = 3{,}5\,x^{2,5} + 2{,}5\,x^{1,5} + x^{-0,5}$$

2) $f(x) = [u(x) \cdot v(x)] \cdot w(x)$ Weiter $f = u \cdot v \cdot w$

$$f' = (u \cdot v)' \cdot w + (u \cdot v) \cdot w' = (u'v + u \cdot v')\,w + uv \cdot w' =$$

$$= u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w' .$$

(4) Quotientenregel: Sei $v(x) \neq 0$.

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \; ; \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

Beispiel

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x + 5}{2x^2 - 4x + 1} \; ; \quad u(x) = x^3 - 4x + 5, \quad u'(x) = 3x^2 - 4 ;$$

$v(x) = 2x^2 - 4x + 1$; $v'(x) = 4x - 4$;

$$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{(3x^2-4)(2x^2-4x+1) - 4(x-1)(x^3-4x+5)}{(2x^2-4x+1)^2} =$$

$$= \frac{6x^4 - 12x^3 + 3x^2 - 8x^2 + 16x - 4 - 4x^4 + 16x^2 - 20x + 4x^3 - 16x + 20}{(2x^2-4x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 20x + 16}{(2x^2-4x+1)^2};$$

(5) Kettenregel Die Ableitungsredel (1)–(4) gelten nicht zur Ableitung von verketteten Funktionen der Form $f(x) = u(v(x))$

$y = v(x)$ – innere Funktion

$u(y)$ – äußere Funktion

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Beispiel 1) $f(x) = \sqrt{4x^3+5}$;

$$y = \underbrace{4x^3+5}_{v(x)} \; ; \qquad f = \underbrace{\sqrt{y}}_{u(y)}$$

$$y' = 12x^2 \qquad u' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4x^3+5)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4x^3+5}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^3+5}} \cdot 12x^2 = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3+5}}$$

2) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; $\quad y = \underbrace{\frac{x+1}{x-1}}_{v(x)}$; $\quad f = \underbrace{\sqrt{y}}_{u(y)}$

$$v' = \frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2};$$

$$u' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f' = \frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{(-2)}{(x-1)^2} = \frac{-2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\,(x-1)^2} = \frac{-2}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{(x-1)^3}}$$

(6) Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} von f.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beispiel: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$

Berechne die Ableitung der Umkehrfunktion mithilfe der Regel (6).

$$(f^{-1})'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\,(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Also $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\rightsquigarrow$ vergleiche mit Satz, S.3.

II.4. Ableitungen der Grundfunktionen

(1) Polynome: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$

$$f'(x) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1$$

(2) Trigonometrische Funktionen.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{+\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$