Пружинный и математический маятники

Повторение Ускорение приобретаемое мт прямо пропорционально равнодействующей всех сил, действующих на нее, и обратно пропорционально массе мт (второй закон Ньютона – основной закон динамики)

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n}}{m}$$

Сила упругости, возникающая при деформации тела, прямо пропорциональна величине его абсолютной деформации тела x:

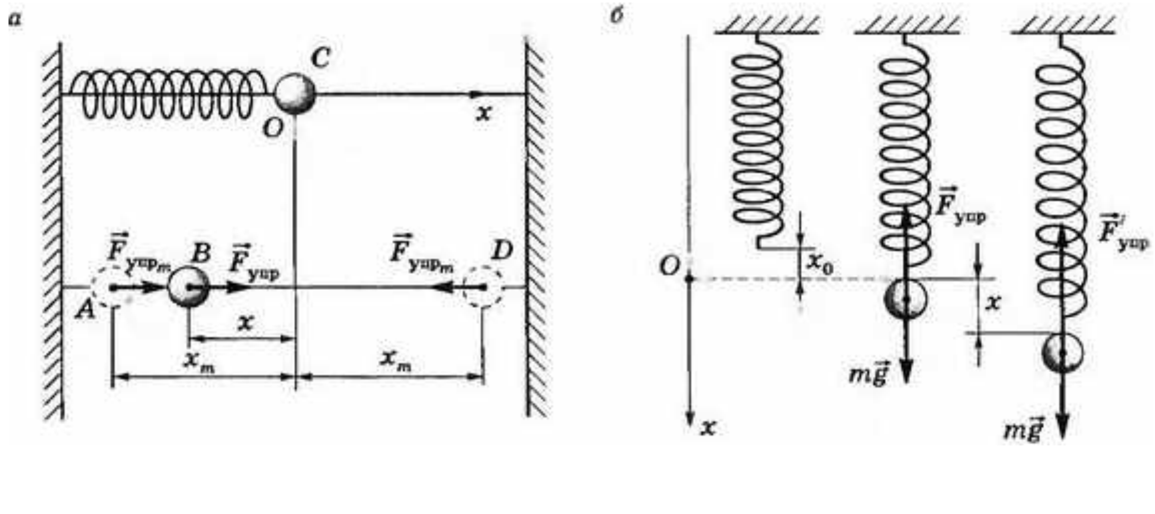
$F_x = -kx$ (Закон Гука)

Коэффициент пропорциональности k называется коэффициентом упругости (жесткостью) материала.

Пружинный маятник

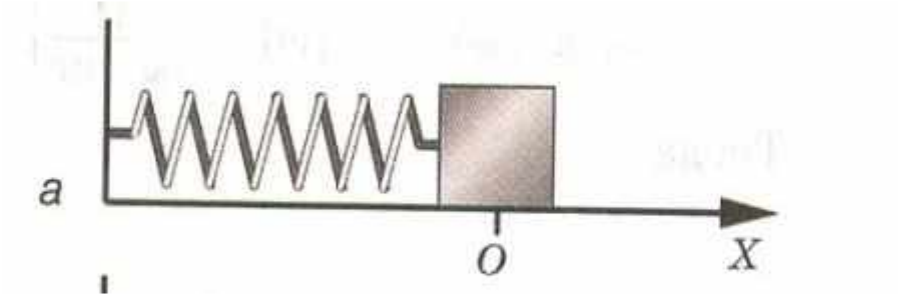
Рассмотрим колебательную систему в виде груза, прикрепленного к пружине.

Прикрепим груз массой m , лежащий на гладкой, горизонтальной поверхности к невесомой упругой пружине с коэффициентом упругости k, второй конец которой зафиксирован такая система называется ***пружинным маятником.***

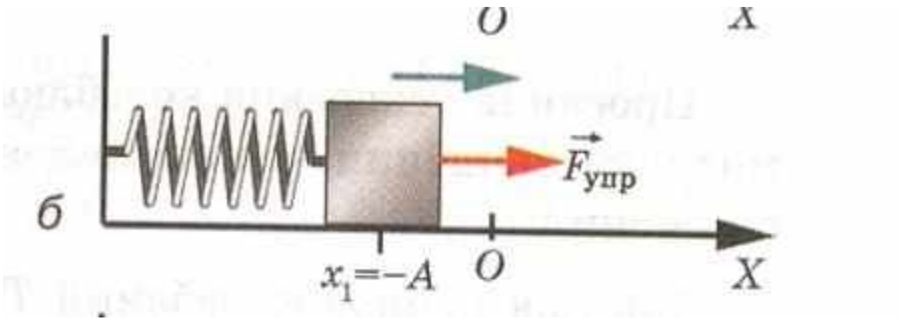


Рассмотрим динамику движения пружинного маятника

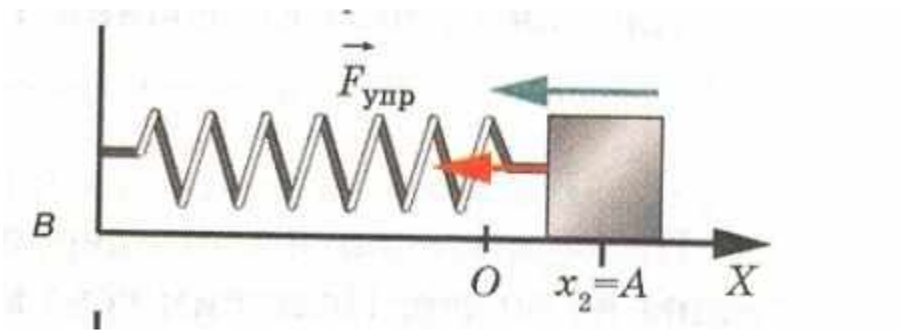
1. в начальный момент



$$\overrightarrow{F_{упр}} = 0, a = 0, \vartheta = 0$$

2. 

$$\overrightarrow{F_{упр}} = \overrightarrow{F_{max}}, a = a_{max}, \vartheta = 0$$

3. 

$$\overrightarrow{F_{упр}} = 0, a = 0, \vartheta = 0$$

4. При прохождении положения равновесия

$$\overrightarrow{F_{упр}} = 0 , a = 0, \vartheta = \vartheta_{max}$$

Рассмотрим движение пружинного маятника с учетом второго закона Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

где $F = F_{упр}$

по закону Гука

$$\overrightarrow{F_{упр}} = -kx$$

$\vec{a} = \frac{-kx}{m}$ - *динамическое уравнение пружинного маятника*

Перенесем все в лево и разделим на m , чтобы привести к форме, аналогичной уравнению движения гармонического осциллятора.

$$m\vec{a} + kx = 0$$

$$\vec{a} + \frac{k}{m}x = 0$$

Сравним полученное уравнение с уравнением гармонического осциллятора

$$a(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

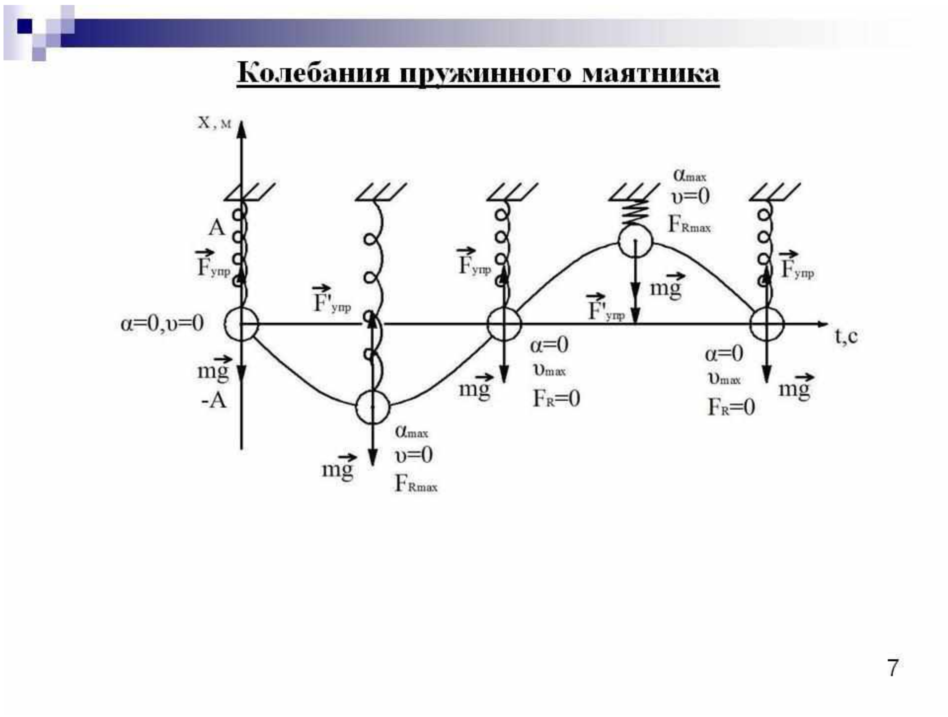
Находим циклическую частоту колебаний пружинного маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Тогда период колебаний можно найти по формуле

$\omega = 2\pi\upsilon = 2\pi\frac{1}{\mathrm{T}}$

$$\boxed{\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

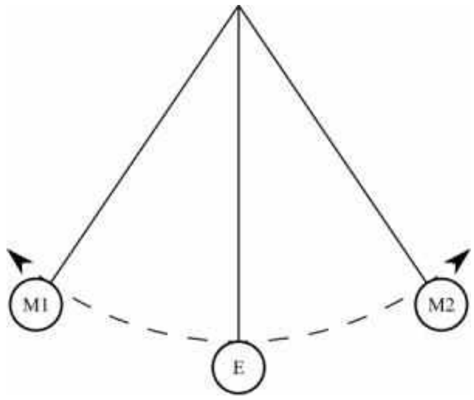


<u>математический маятник</u>

Рассмотрим простой маятник – тяжелый шарик, подвешенный на длинной нити.

Если размеры шарика много меньше длинны нити, то этими размерами можно пренебречь.

Математический маятник – это модель, представляющая собой мт подвешенную на нерастяжимой, невесомой нити.



Свойства маятника

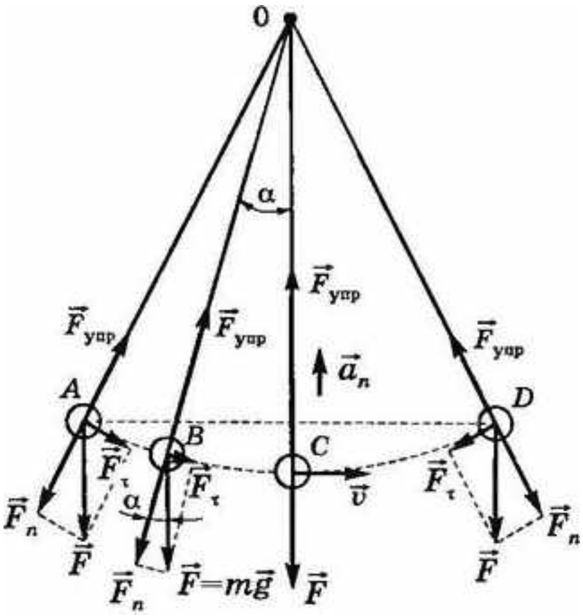
Математический маятник имеет очень интересные свойства. Все они подтверждаются известными физическими законами. Период колебаний любого другого маятника зависит от разных обстоятельств, таких как размер и форма тела, расстояние между точкой подвеса и центром тяжести, распределение массы относительно данной точки. Именно поэтому определение периода висящего тела является довольно сложной задачей. Намного легче вычисляется период математического маятника, формула которого будет приведена ниже. В результате наблюдений над подобными механическими системами можно установить такие закономерности:

• Если, сохраняя одинаковую длину маятника, подвешивать различные грузы, то период их колебаний получится одинаковым, хотя их массы будут сильно различаться. Следовательно, период такого маятника не зависит от массы груза.

• Если при запуске системы отклонять маятник на не слишком большие, но разные углы, то он станет колебаться с одинаковым периодом, но по разным амплитудам.

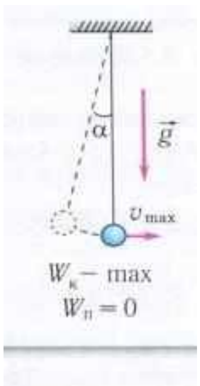
Пока отклонения от центра равновесия не слишком велики, колебания по своей форме будут достаточно близки гармоническим.

Период такого маятника никак не зависит от колебательной амплитуды. Это свойство данной механической системы называется изохронизмом (в переводе с греческого «хронос» - время, «изос» - равный)

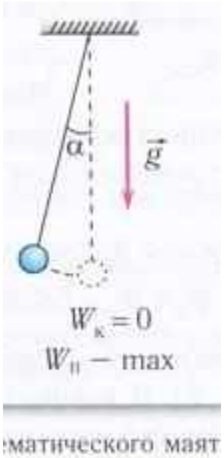


Рассмотрим динамику движения математического маятника

1. в начальный момент

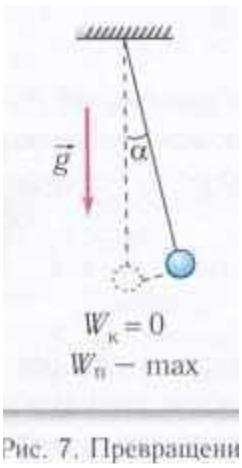


$$\overrightarrow{F_\tau} = \overrightarrow{F_{упр}}, \mathrm{a} = 0, \vartheta = 0$$



2.

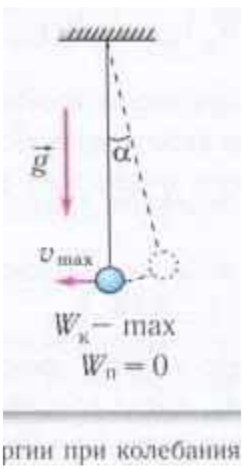
$$\overrightarrow{F_\tau} = F_T sin\alpha \quad \mathrm{a} = a_\tau, \vartheta = 0$$



3.

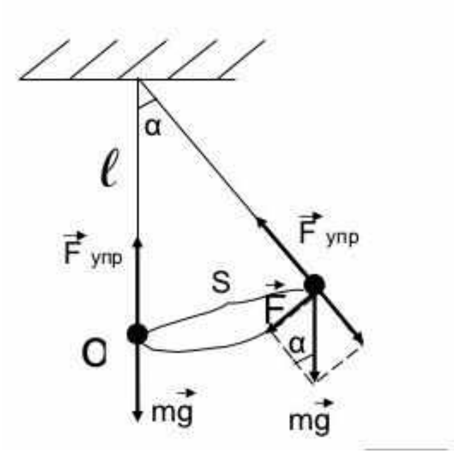
$$\overrightarrow{F_\tau} = F_T sin\alpha \quad \mathrm{a} = a_\tau, \vartheta = 0$$

4.



$$\overrightarrow{F_\tau} = 0, \text{a} = 0, \vartheta = \vartheta_{max}$$

Получим уравнение описывающее движение математического маятника



$$F_\tau = F_T sin\alpha = mgsin\alpha$$

$$\alpha = \frac{S}{l}$$

т.к. угол мал, то $sin\alpha = \alpha = \frac{S}{l}$

$$F_\tau = -mg\frac{S}{l}$$

Знак - появляется, т.к. сила направлена к положению равновесия, а смещение в противоположную сторону.

Теперь рассмотрим движение математического маятника с учетом второго закона Ньютона

$$F_\tau = ma_\tau$$

$$-mg\frac{S}{l} = ma_\tau$$

$a_\tau = -\frac{g}{l}S$ - динамическое уравнение математического маятника

$$a_\tau + \frac{g}{l}S = 0$$

Сравним полученное уравнение с уравнением гармонического осциллятора

$$a(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Находим циклическую частоту колебаний пружинного маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Период малых колебаний математического маятника в поле силы тяжести Земли определяется по формуле

$$\text{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Это выражение называют ***формулой Гюйгенса***. Оно определяет период свободных колебаний математического маятника. Из формулы следует, что при малых углах отклонения от положения равновесия период колебаний математического маятника:

1. не зависит от его массы и амплитуды колебаний;
2. пропорционален корню квадратному из длины маятника и обратно пропорционален корню квадратному из ускорения свободного падения.

Галилео Галилей экспериментально установил, что период колебаний маятника не зависит от его массы и амплитуды колебаний. Он также установил, что период колебаний прямо пропорционален $\sqrt{l}$.

Свойство независимости периода колебаний математического маятника от амплитуды называется изохорностью (с греч.- равномерный)

Пружинный маятник тоже обладает свойством изохорности, т.к. его период колебаний не зависит от амплитуды.

Это согласуется с экспериментальными законами малых колебаний математического маятника, которые были открыты Г. Галилеем.

Подчеркнем, что эту формулу можно использовать для расчета периода при одновременном выполнении двух условий:

1. колебания маятника должны быть малыми;
2. точка подвеса маятника должна покоиться или двигаться равномерно прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, в которой он находится.

Если точка подвеса математического маятника движется с ускорением $\vec{a}$ то при этом изменяется сила натяжения нити, что приводит к изменению и возвращающей силы, а следовательно, частоты и периода колебаний. Как показывают расчеты, период колебаний маятника в этом случае можно рассчитать по формуле

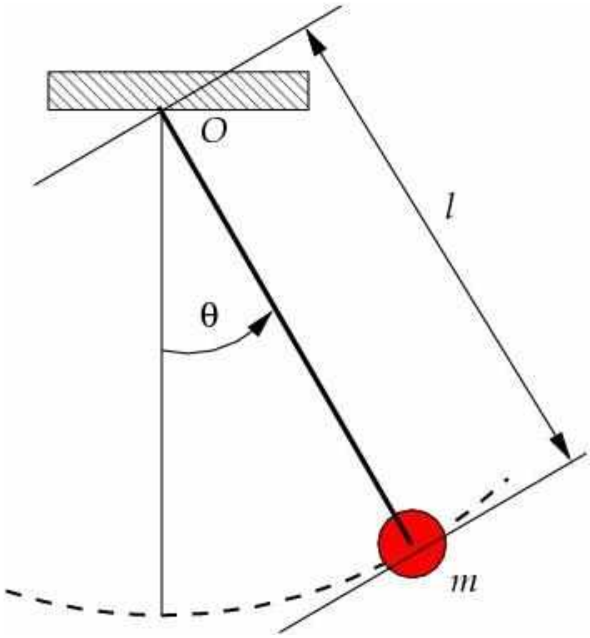
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

где g' — "эффективное" ускорение маятника в неинерциальной системе отсчета. Оно равно геометрической сумме ускорения свободного падения $\vec{g}$ и вектора, противоположного вектору $\vec{a}$, т.е. его можно рассчитать по формуле

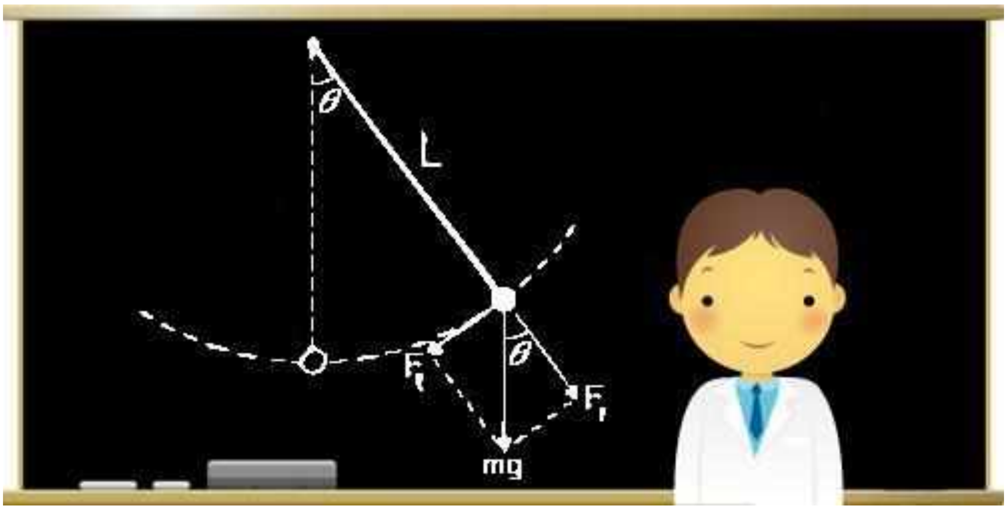
$$\vec{g}' = \vec{g} + (-\vec{a}).$$

***Практическое применение математического маятника ***

Ускорение свободного падения изменяется с географической широтой, поскольку плотность земной коры по всей планете не одинакова. Там, где залегают породы с большей плотностью, оно будет несколько выше. Ускорение математического маятника нередко применяют для геологоразведки. В его помощью ищут различные полезные ископаемые. Просто подсчитав количество колебаний маятника, можно обнаружить в недрах Земли каменный уголь или руду. Это связано с тем, что такие ископаемые имеют плотность и массу больше, чем лежащие под ними рыхлые горные породы.



Математическим маятником пользовались такие выдающиеся ученые, как Сократ, Аристотель, Платон, Плутарх, Архимед. Многие из них верили в то, что эта механическая система может влиять на судьбу и жизнь человека. Архимед использовал математический маятник при своих вычислениях. В наше время многие оккультисты и экстрасенсы пользуются этой механической системой для осуществления своих пророчеств или поиска пропавших людей.



Известный французский астроном и естествоиспытатель К. Фламмарион для своих исследований также использовал математический маятник. Он утверждал, что с его помощью ему удалось предсказать открытие новой планеты, появление Тунгусского метеорита и другие важные события. Во время Второй мировой войны в Германии (г. Берлин) работал специализированный Институт маятника. В наши дни подобными исследованиями занят Мюнхенский институт парапсихологии. Свою работу с маятником сотрудники этого заведения называют «радиэстезией».