

## Тема: *Затухающие и вынужденные колебания. Резонанс.*

### *Свободные колебания*

**Свободные колебания (собственные колебания)** - это колебания, совершаемые колебательной системой, без воздействия внешних сил.

Для начала таких колебаний необходимо вывести систему из положения равновесия.

Условия возникновения свободных колебаний:

- возникновение силы, возвращающей систему в положение равновесия, после того как ее привели в движение;
- отсутствие трения.

Примерами свободных колебаний являются пружинный и математический маятники.

Если в колебательной системе отсутствует трение, то свободные колебания в ней являются **незатухающими** - это колебания, происходящие с постоянной во времени амплитудой.



Свободные колебания обладают собственной частотой , например для пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

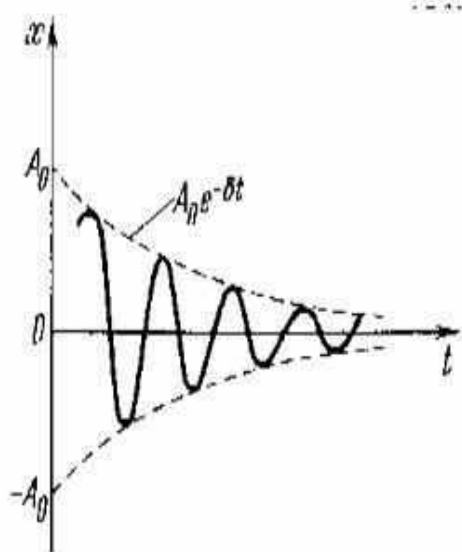
### **Затухающие колебания**

Незатухающие колебания возможны только в идеальных системах (моделях) , в реальных условиях такие колебания не возможны. т.к. в любой реальной системе всегда присутствуют силы трения (сопротивления), поэтому полная механическая энергия

системы будет со временем уменьшаться, переходя в теплоту. Убыль полной энергии означает и уменьшение амплитуды колебаний.

**Затухающие колебания** - это колебания, амплитуда которых уменьшается с течением времени, вследствие потери энергии колебательной системой.

## ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ.



Затухающими наз. колебания, энергия (а значит, и амплитуда) которых уменьшается с течением времени. Затухание свободных механических гармонических колебаний связано с убыванием механической энергии за счет действия сил сопротивления и трения.

### **Вынужденные колебания. Резонанс. Автоколебания**

Колебания, совершающиеся под воздействием внешней периодической силы, называются **вынужденными**.

В этом случае внешняя сила совершает положительную работу и обеспечивает приток энергии к колебательной системе. Она не дает колебаниям затухать, несмотря на действие сил трения.

Периодическая внешняя сила может изменяться во времени по различным законам.

Если свободные колебания происходят на с собственной частотой  $\omega_0$ , которая определяется параметрами системы, то **установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте  $\omega$  внешней силы**. Это означает что действие внешних сил

должно быть периодическими (качели необходимо раскачивать периодически, а не воздействовать на них постоянной силой).

После начала воздействия внешней силы на колебательную систему необходимо некоторое время  $\Delta t$  для установления вынужденных колебаний. Время установления по порядку величины равно времени затухания  $\tau$  свободных колебаний в колебательной системе.

В начальный момент в колебательной системе возбуждаются оба процесса – вынужденные колебания на частоте  $\omega$  и свободные колебания на собственной частоте  $\omega_0$ . Но свободные колебания затухают из-за неизбежного наличия сил трения. Поэтому через некоторое время в колебательной системе остаются только стационарные колебания на частоте  $\omega$  внешней вынуждающей силы.

Рассмотрим в качестве примера вынужденные колебания тела на пружине (рис.1). Внешняя сила приложена к свободному концу пружины. Она заставляет свободный (левый на рис. 1) конец пружины перемещаться по закону  $y = y_m \cos \omega t$ , где  $y_m$  – амплитуда колебаний,  $\omega$  – круговая частота.

Такой закон перемещения можно обеспечить с помощью шатунного механизма, преобразующего движение по окружности в поступательно-возвратное движение (рис. 1).

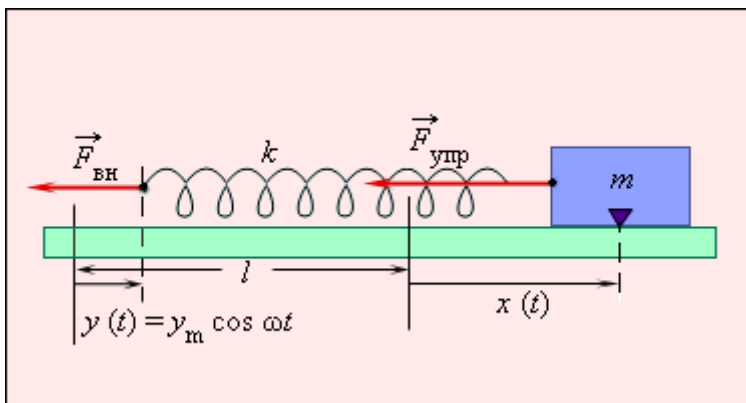


Рисунок 1.

Вынужденные колебания груза на пружине. Свободный конец пружины перемещается по закону  $y = y_m \cos \omega t$ .  $l$  – длина недеформированной пружины,  $k$  – жесткость пружины

Если левый конец пружины смещен на расстояние  $y$ , а правый – на расстояние  $x$  от их первоначального положения, когда пружина была недеформирована, то удлинение пружины  $\Delta l$  равно:

$$\Delta l = x - y = x - y_m \cos \omega t.$$

Второй закон Ньютона для тела массой  $m$  принимает вид :

$$ma = -k(x - y) = -kx + ky_m \cos \omega t.$$

В этом уравнении сила, действующая на тело, представлена в виде двух слагаемых. Первое слагаемое в правой части – это упругая сила, стремящаяся вернуть тело в

положение равновесия ( $x = 0$ ). Второе слагаемое – внешнее периодическое воздействие на тело. Это слагаемое и называют **вынуждающей силой**.  $F = F_0 \sin \omega t$

Амплитуда вынужденных колебаний  $x_m$  и начальная фаза  $\theta$  зависят от соотношения частот  $\omega_0$  и  $\omega$  и от амплитуды  $\langle m \rangle m_0 u_m$  внешней силы.

На очень низких частотах, когда  $\omega \ll \omega_0$ , движение тела массой  $m$ , прикрепленного к правому концу пружины, повторяет движение левого конца пружины. При этом  $x(t) = y(t)$ , и пружина остается практически недеформированной. Внешняя сила приложенная к левому концу пружины, работы не совершает, т. к. модуль этой силы при  $\omega \ll \omega_0$  стремится к нулю.

**Если частота  $\omega$  внешней силы приближается к собственной частоте  $\omega_0$ , возникает резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний. Это явление называется резонансом.**

Зависимость амплитуды  $x_m$  вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  вынуждающей силы называется резонансной характеристикой или резонансной кривой (рис.2).

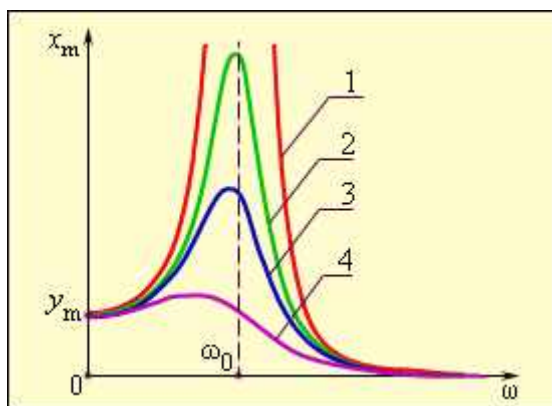


Рисунок 2.

Резонансные кривые при различных уровнях затухания: 1 – колебательная система без трения; при резонансе амплитуда  $x_m$  вынужденных колебаний неограниченно возрастает; 2, 3, 4 – реальные резонансные кривые для колебательных систем с различной добротностью:  $Q_2 > Q_3 > Q_4$ . На низких частотах ( $\omega \ll \omega_0$ )  $x_m \approx y_m$ . На высоких частотах ( $\omega \gg \omega_0$ )  $x_m \rightarrow 0$

При резонансе амплитуда  $x_m$  колебания груза может во много раз превосходить амплитуду  $y_m$  колебаний свободного (левого) конца пружины, вызванного внешним воздействием. В отсутствие трения амплитуда вынужденных колебаний при резонансе должна неограниченно возрастать. В реальных условиях амплитуда установившихся вынужденных колебаний определяется условием: работа внешней силы в течение периода колебаний должна равняться потерям механической энергии за то же время из-за трения. Чем меньше трение (т. е. чем выше добротность  $Q$  колебательной системы), тем больше амплитуда вынужденных колебаний при резонансе.

У колебательных систем с не очень высокой добротностью ( $< 10$ ) резонансная частота несколько смещается в сторону низких частот. Это хорошо заметно на рис. 2.

Явление резонанса может играть как положительную так и отрицательную роль.

Например, тяжелый язык большого колокола может раскачать даже ребенок, но при условии что будет тянуть за веревку в такт со свободными колебаниями языка.

Положительный пример - резонансы в радиоэлектронике, в колебательных контурах для настройки частоты, всевозможных фильтрах. Да те же детские качели, батут - самый наглядный пример положительного резонанса...

Явление резонанса может явиться причиной разрушения мостов, зданий и других сооружений. (во Франции и Петербурге обрушились мосты при прохождении по нему кавалерийского эскадрона строевым шагом).

Поезд по мосту проезжает либо на замедленной скорости, либо на максимальной, чтобы частота колебаний вагонов не совпала с собственной частотой колебаний моста.

**Вынужденные колебания – это незатухающие колебания.** Неизбежные потери энергии на трение компенсируются подводом энергии от внешнего источника периодически действующей силы. Существуют системы, в которых незатухающие колебания возникают не за счет периодического внешнего воздействия, а в результате имеющейся у таких систем способности самой регулировать поступление энергии от постоянного источника. Такие системы называются автоколебательными, а процесс незатухающих колебаний в таких системах – **автоколебаниями**. В автоколебательной системе можно выделить три характерных элемента – колебательная система, источник энергии и устройство обратной связи между колебательной системой и источником. В качестве колебательной системы может быть использована любая механическая система, способная совершать собственные затухающие колебания (например, маятник настенных часов).

Источником энергии может служить энергия деформация пружины или потенциальная энергия груза в поле тяжести. Устройство обратной связи представляет собой некоторый механизм, с помощью которого автоколебательная система регулирует поступление энергии от источника. На рис. 3 изображена схема взаимодействия различных элементов автоколебательной системы.

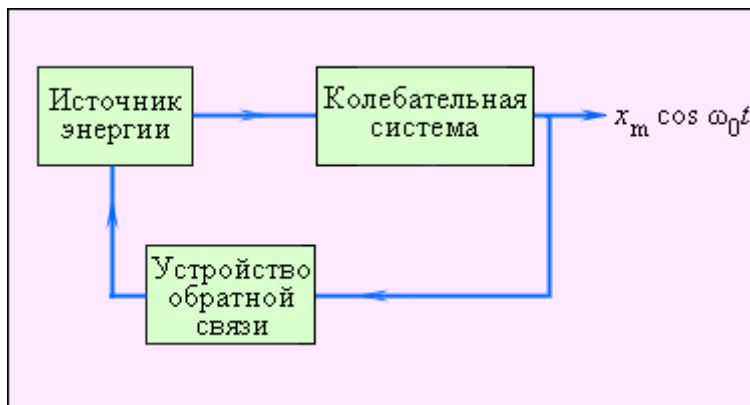


Рисунок 3.

Функциональная схема автоколебательной системы

Примером механической автоколебательной системы может служить часовой механизм с анкерным ходом (рис. 4).



Рисунок 4.

Часовой механизм с маятником

Ходовое колесо с косыми зубьями жестко скреплено с зубчатым барабаном, через который перекинута цепочка с гирей. На верхнем конце маятника закреплен анкер (якорек) с двумя пластинками из твердого материала, изогнутыми по дуге окружности с центром на оси маятника. В ручных часах гиря заменена пружиной, а маятник – балансиром – маховичком, скрепленным со спиральной пружиной. Балансир совершает крутильные колебания вокруг своей оси. Колебательной системой в часах является маятник или балансир. Источником энергии – поднятая вверх гиря или заведенная пружина. Устройством, с помощью которого осуществляется обратная связь, является анкер, позволяющий ходовому колесу повернуться на один зубец за один полупериод. Обратная связь осуществляется взаимодействием анкера с ходовым колесом. При каждом колебании маятника зубец ходового колеса толкает анкерную вилку в направлении движения маятника, передавая ему некоторую порцию энергии, которая компенсирует потери энергии на трение. Таким образом, потенциальная энергия гири (или закрученной пружины) постепенно, отдельными порциями передается маятнику.

Механические автоколебательные системы широко распространены в окружающей нас жизни и в технике. Автоколебания совершают паровые машины, двигатели внутреннего сгорания, электрические звонки, струны смычковых музыкальных инструментов, воздушные столбы в трубах духовых инструментов, голосовые связки при разговоре или пении и т. д.

ДЗ (2) §3-4