

Тема. "Линзы. Построение изображений в тонкой линзе. Формула линзы".

Качественные задачи

1. С помощью собирающей линзы на экране получено действительное изображение предмета с увеличением Γ_1 . Не изменяя положение линзы, поменяли местами предмет и экран. Каким окажется увеличение Γ_2 в этом случае?
2. Как надо расположить две собирающие линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 , чтобы параллельный пучок света, пройдя через них, остался параллельным?
3. Объясните, почему для того, чтобы получить четкое изображение предмета, близорукий обычно щурит глаза?
4. Как изменится фокусное расстояние линзы, если ее температура повысится?
5. На рецепте врача написано: +1,5 Д. Расшифруйте, какие это очки и для каких глаз?

Задача 1. Заданы главная оптическая ось линзы NN , положение источника S и его изображения S' . Найдите построением положение оптического центра линзы C и ее фокусов для трех случаев (рис. 1).

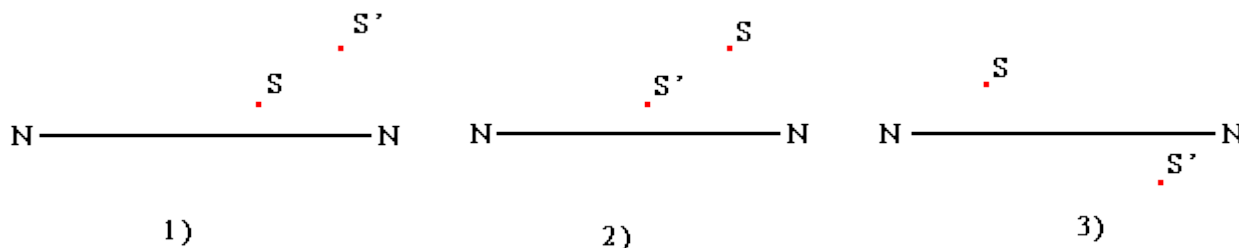


Рис. 1

Решение:

Для нахождения положения оптического центра C линзы и ее фокусов F используем основные свойства линзы и лучей, проходящих через оптический центр, фокусы линзы или параллельно главной оптической оси линзы.

Случай 1. Предмет S и его изображение расположены по одну сторону от главной оптической оси NN (рис. 2).

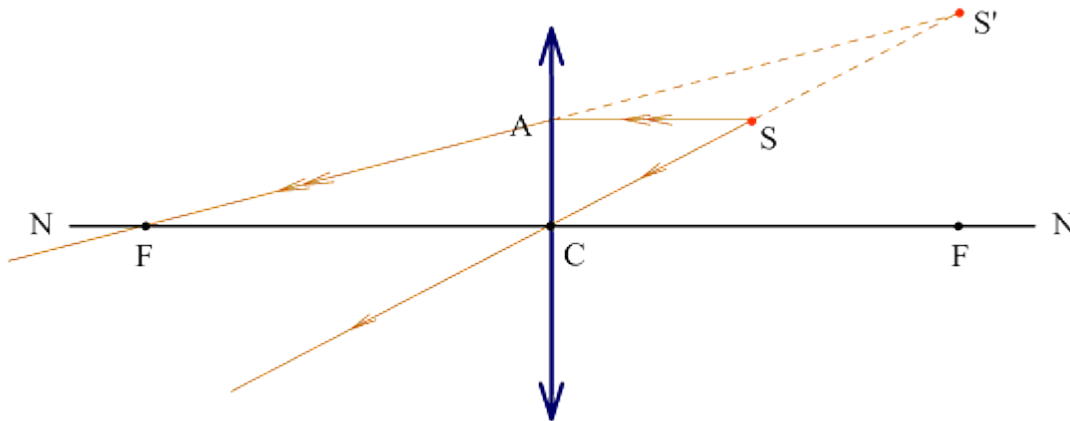


Рис. 2

Проведем через S и S' прямую (побочную ось) до пересечения с главной оптической осью NN в точке C . Точка C определяет положение оптического центра линзы, расположенной перпендикулярно оси NN . Лучи, идущие через оптический центр C , не преломляются. Луч SA , параллельный NN , преломляется и идет через фокус F и изображение S' , причем через S' идет продолжение луча SA . Это значит, что изображение S' в линзе является мнимым. Предмет S расположен между оптическим центром и фокусом линзы. Линза является собирающей.

Случай 2. Проведем через S и S' побочную ось до пересечения с главной оптической осью NN в точке C - оптическом центре линзы (рис. 3).

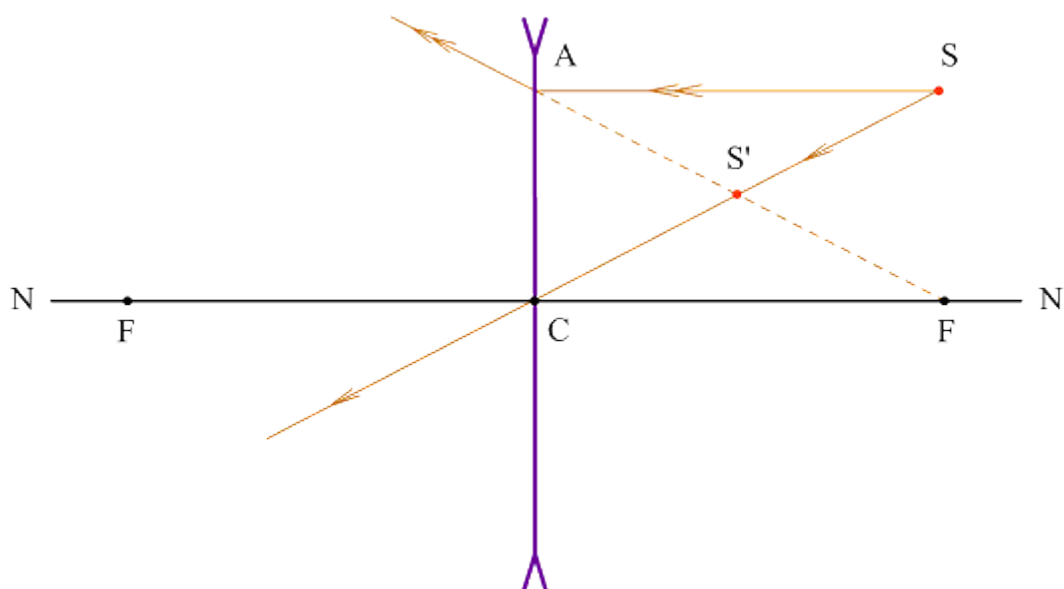


Рис. 3

Луч SA , параллельный NN , преломляясь, идет через фокус F и изображение S' , причем через S' идет продолжение луча SA . Это значит, что изображение мнимое, а линза, как видно из построения, рассеивающая.

Случай 3. Предмет S и его изображение лежат по разные стороны от главной оптической оси NN (рис. 4).

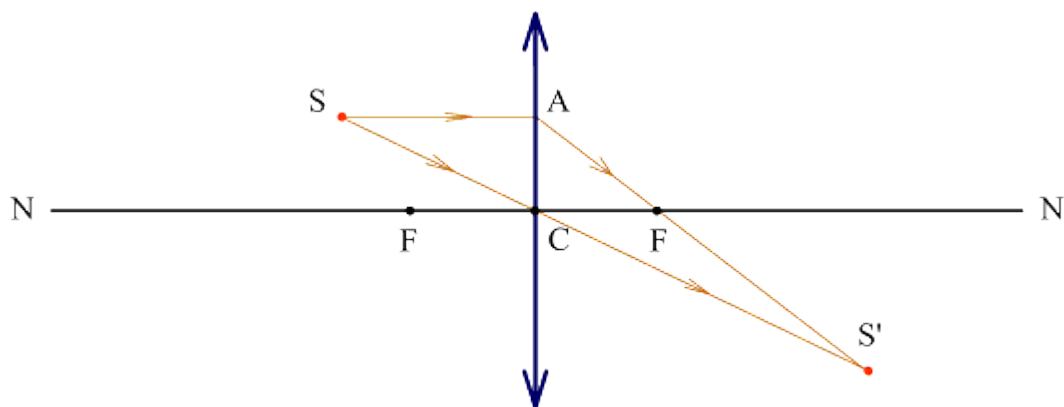


Рис. 4

Соединив S и S' , находим положение оптического центра линзы и положение линзы. Луч SA , параллельный NN , преломляется и через фокус F идет в точку S' . Луч через оптический центр идет без преломления.

Задача 2. На рис. 5 изображен луч AB , прошедший сквозь рассеивающую линзу. Постройте ход луча падающего, если положение фокусов линзы известно.

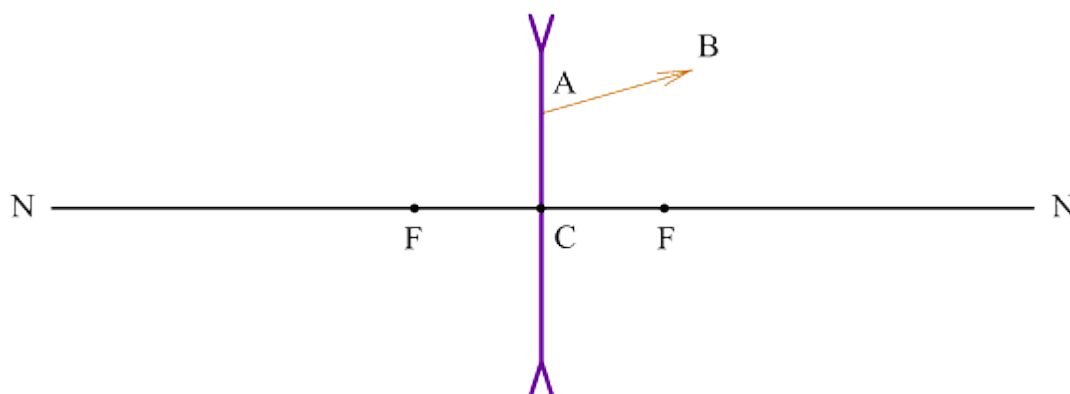


Рис. 5

Решение:

Продолжим луч AB до пересечения с фокальной плоскостью PP' в точке F' и проведем побочную ось OO' через F' и C (рис. 6).

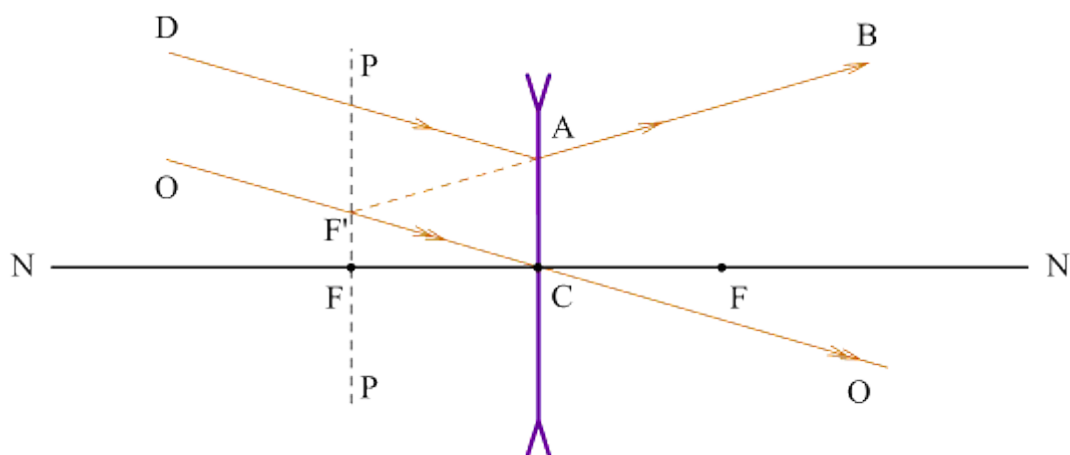


Рис. 6

Луч, идущий вдоль побочной оси OO' , пройдет, не меняя своего направления, луч DA , параллельный OO' , преломляется по направлению AB так, что его продолжение идет через точку F' .

Задача 3. На собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_1 = 40$ см падает параллельный пучок лучей. Где следует поместить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F_2 = 15$ см, чтобы пучок лучей после прохождения двух линз остался параллельным?

Решение: По условию пучок падающих лучей EA параллелен главной оптической оси NN , после преломления в линзах он должен таковым и остаться. Это возможно, если рассеивающая линза расположена так, чтобы задние фокусы линз F_1 и F_2 совпали. Тогда продолжение луча AB (рис. 7), падающего на рассеивающую линзу, проходит через ее фокус F_2 , и по правилу построения в рассеивающей линзе преломленный луч BD будет параллелен главной оптической оси NN , следовательно, параллелен лучу EA . Из рис. 7 видно, что рассеивающую линзу следует поместить на расстоянии $d = F_1 - F_2 = (40 - 15) \text{ см} = 25 \text{ см}$ от собирающей линзы.

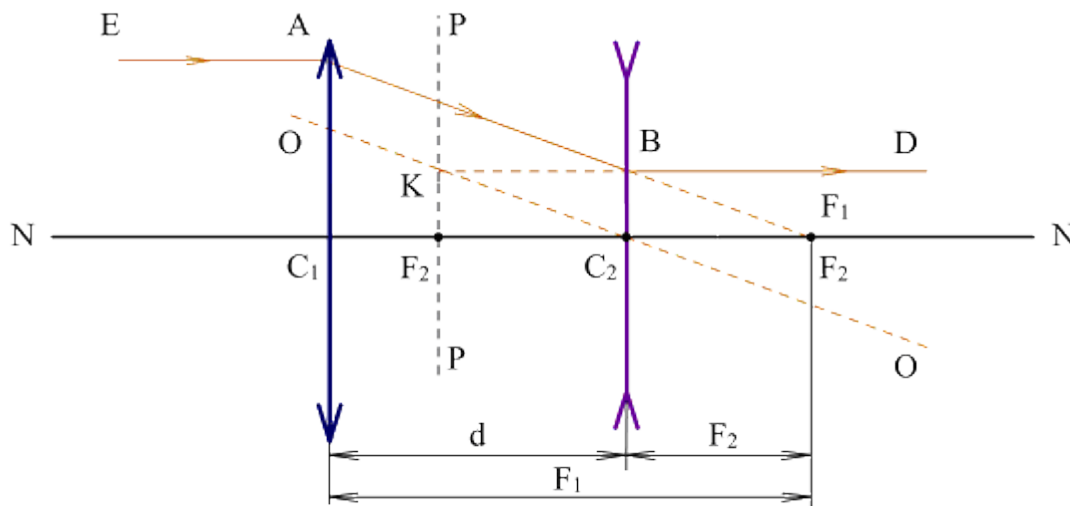


Рис. 7

Ответ: на расстоянии 25 см от собирающей линзы.

Задача 4. Высота пламени свечи 5 см. Линза дает на экране изображение этого пламени высотой 15 см. Не трогая линзы, свечу отодвинули на $l = 1,5$ см дальше от линзы и, придвинув экран, вновь получили резкое изображение пламени высотой 10 см. Определите главное фокусное расстояние F линзы и оптическую силу линзы в диоптриях.

Решение: Применим формулу тонкой линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, где d - расстояние от предмета до линзы, f - расстояние от линзы до изображения, для двух положений предмета:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{d_1 + l} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}. \quad (2)$$

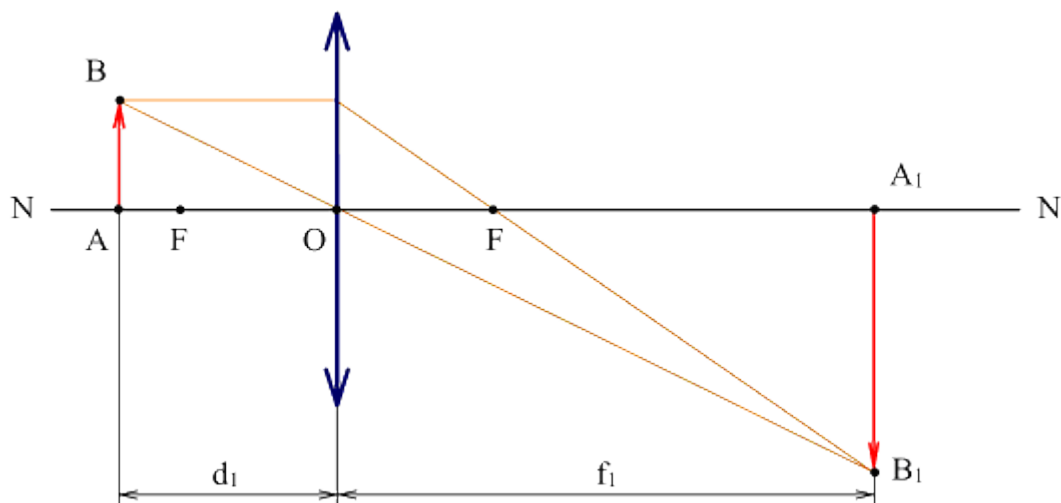


Рис. 8

Из подобных треугольников AOB и A_1OB_1 (рис. 8) поперечное увеличение линзы будет равно $\Gamma_1 = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{f_1}{d_1}$, откуда $f_1 = \Gamma_1 d_1$.

Аналогично для второго положения предмета после передвижения его на l : $\Gamma_2 = \frac{f_2}{d_1 + l}$, откуда $f_2 = (d_1 + l)\Gamma_2$.

Подставляя f_1 и f_2 в (1) и (2), получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{d_1} + \frac{1}{\Gamma_1 d_1} = \frac{1}{F}, \\ \frac{1}{d_1 + l} + \frac{1}{(d_1 + l)\Gamma_2} = \frac{1}{F}. \end{cases} \quad (3)$$

Из системы уравнений (3), исключив d_1 , находим

$$F = \frac{l\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Оптическая сила линзы

$$D = \frac{1}{F} = 11 \text{ дптр.}$$

Ответ: $F = \frac{l\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м}, D = \frac{1}{F} = 11 \text{ дптр.}$

Задача 5. Двояковыпуклая линза, сделанная из стекла с показателем преломления $n = 1,6$, имеет фокусное расстояние $F_0 = 10$ см в воздухе ($n_0 = 1$). Чему будет равно фокусное расстояние F_1 этой линзы, если ее поместить в

прозрачную среду с показателем преломления $n_1 = 1,5$? Определите фокусное расстояние F_2 этой линзы в среде с показателем преломления $n_2 = 1,7$.

Решение:

Оптическая сила тонкой линзы определяется формулой

$$D = \frac{1}{F} = \left(\frac{n_l}{n_{cp}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где n_l - показатель преломления линзы, n_{cp} - показатель преломления среды, F - фокусное расстояние линзы, R_1 и R_2 - радиусы кривизны ее поверхностей.

Если линза находится в воздухе, то

$$\frac{1}{F_0} = \left(\frac{n}{n_0} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right); \quad (4)$$

в среде с показателем преломления n_1 :

$$\frac{1}{F_1} = \left(\frac{n}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right); \quad (5)$$

в среде с показателем преломления n :

$$\frac{1}{F_2} = \left(\frac{n}{n_2} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (6)$$

Для определения F_1 и F_2 выразим $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ из (4):

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{n_0}{F_0 (n - n_0)}.$$

Подставим полученное значение в (5) и (6). Тогда получим

$$F_1 = \frac{F_0 (n - n_0) n_1}{(n - n_1) n_0} = 90 \text{ см},$$

$$F_2 = \frac{F_0 (n - n_0) n_2}{(n - n_2) n_0} = -102 \text{ см}.$$

Знак "-" означает, что в среде с показателем преломления большим, чем у линзы (в оптически более плотной среде) собирающая линза становится рассеивающей.

Ответ: $F_1 = \frac{F_0 (n - n_0) n_1}{(n - n_1) n_0} = 90 \text{ см}, \quad F_2 = \frac{F_0 (n - n_0) n_2}{(n - n_2) n_0} = -102 \text{ см}.$

Задача 6. Система состоит из двух линз с одинаковыми по модулю фокусными расстояниями. Одна из линз собирающая, другая рассеивающая. Линзы расположены на одной оси на некотором расстоянии друг от друга.

Известно, что если поменять линзы местами, то действительное изображение Луны, даваемое этой системой, сместится на $l = 20$ см. Найдите фокусное расстояние каждой из линз.

Решение:

Рассмотрим случай, когда параллельные лучи 1 и 2 падают на рассеивающую линзу (рис. 9).

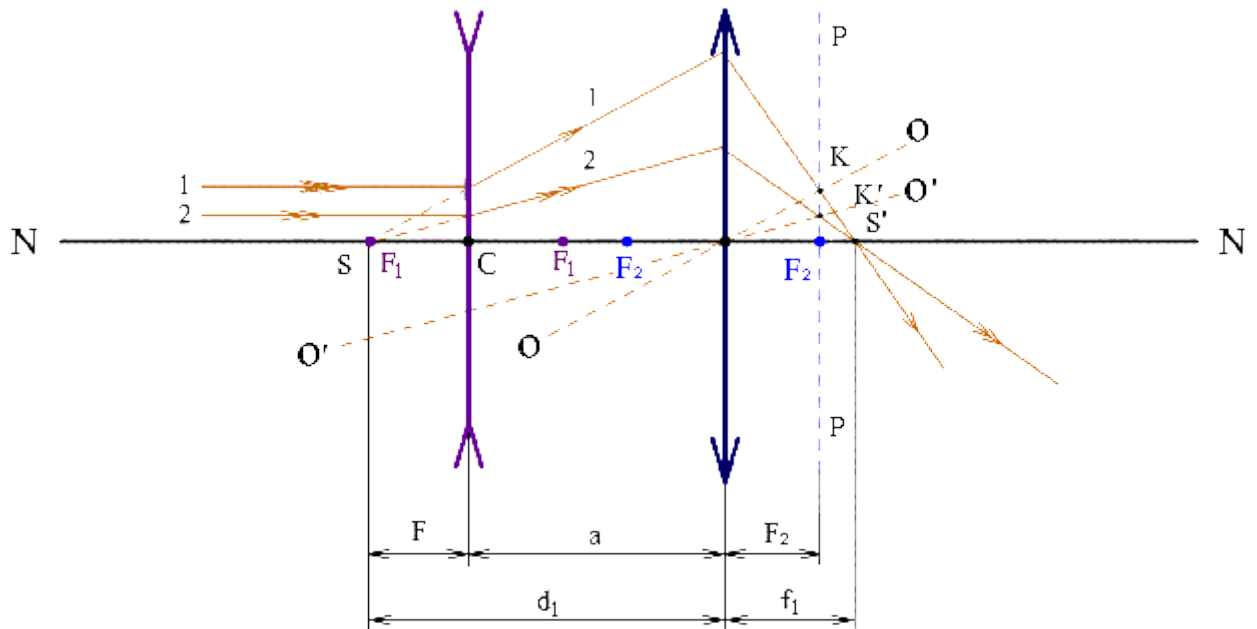


Рис. 9

После преломления их продолжения пересекаются в точке S , являющейся фокусом рассеивающей линзы. Точка S является "предметом" для собирающей линзы. Ее изображение в собирающей линзе получим по правилам построения: лучи 1 и 2, падающие на собирающую линзу, после преломления проходят через точки пересечения соответствующих побочных оптических осей OO и $O'O'$ с фокальной плоскостью PP собирающей линзы и пересекаются в точке S' на главной оптической оси NN , на расстоянии f_1 от собирающей линзы. Применим для собирающей линзы формулу

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, \quad (7)$$

где $d_1 = F + a$.

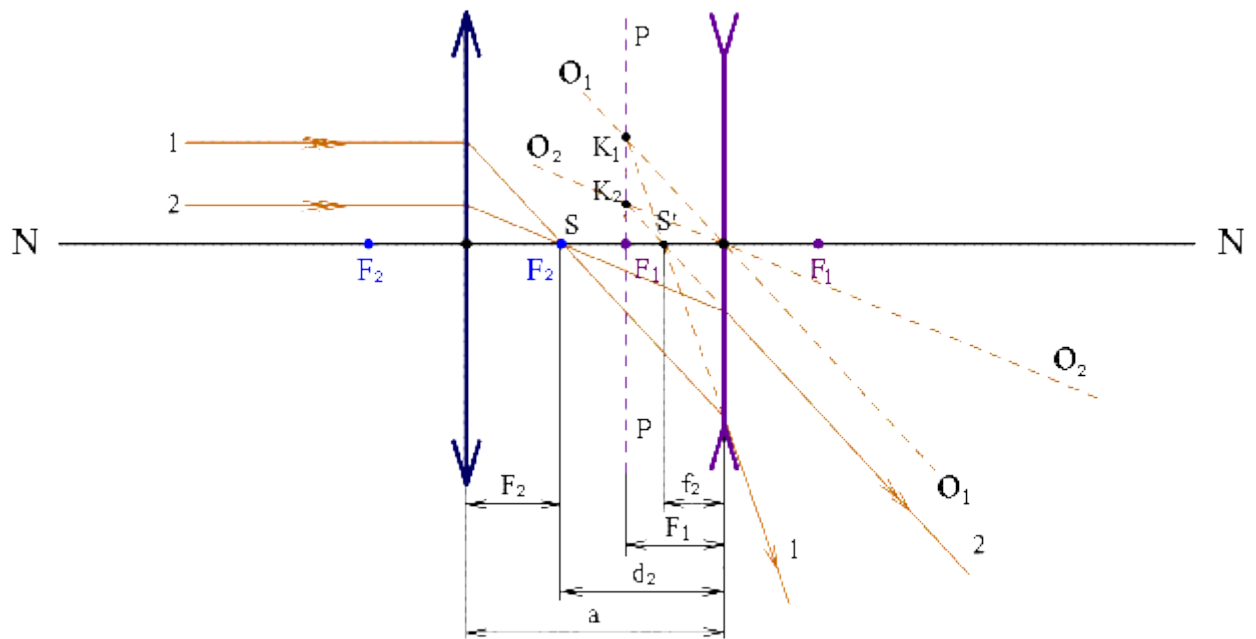


Рис. 10

Пусть теперь лучи падают на собирающую линзу (рис. 10). Параллельные лучи 1 и 2 после преломления соберутся в точке S (фокусе собирающей линзы). Падая на рассеивающую линзу, лучи преломляются в рассеивающей линзе так, что продолжения этих лучей проходят через точки пересечения K_1 и K_2 соответствующих побочных осей O_1O_1 и O_2O_2 с фокальной плоскостью PP рассеивающей линзы. Изображение S' находится в точке пересечения продолжений вышедших лучей 1 и 2 с главной оптической осью NN на расстоянии f_2 от рассеивающей линзы. Для рассеивающей линзы

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}, \quad (8)$$

где $d_2 = a - F$.

Из (7) и (8) выразим f_1 и $-f_2$:

$$f_1 = \frac{F(F+a)}{a}, \quad -f_2 = \frac{F(F-a)}{a}.$$

Разность между ними по условию равна

$$l = f_1 - (-f_2) = \frac{F(F+a)}{a} - \frac{F(F-a)}{a}.$$

Откуда $F = \frac{l}{2} = 10$ см.

Ответ: $F = \frac{l}{2} = 10$ см.

Задача 7. Собирающая линза дает на экране изображение S' светящейся точки S , лежащей на главной оптической оси. Между линзой и экраном на расстоянии $d = 20$ см от экрана поместили рассеивающую линзу. Отодвигая экран от рассеивающей линзы, получили новое изображение S'' светящейся точки S . При этом расстояние нового положения экрана от рассеивающей линзы равно $f = 60$ см.

Определите фокусное расстояние F рассеивающей линзы и ее оптическую силу в диоптриях.

Решение:

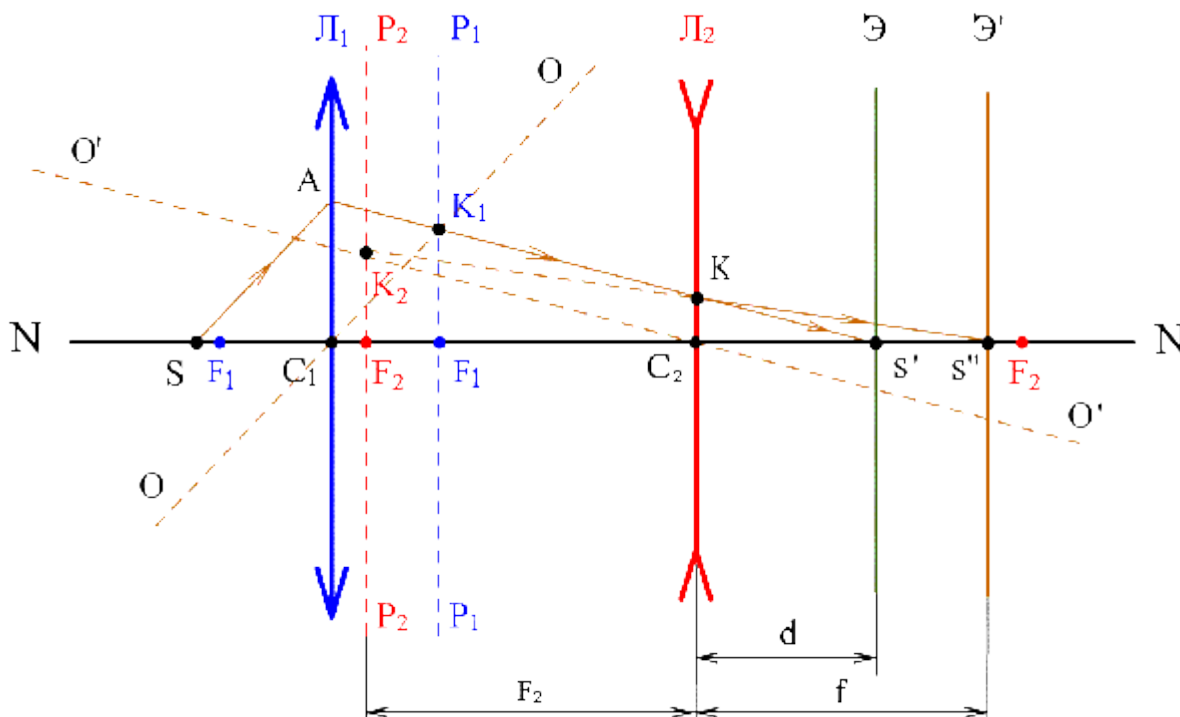


Рис. 11

Изображение S' (рис. 11) источника S в собирающей линзе L_1 находится на пересечении луча, идущего вдоль главной оптической оси NN и луча SA после преломления идущего в направлении AS' по правилам построения (через точку K_1 пересечения побочной оптической оси OO , параллельной падающему лучу SA , с фокальной плоскостью P_1P_1 собирающей линзы). Если поставить рассеивающую линзу L_2 , то луч AS' изменяет направление в точке K , преломляясь (по правилу построения в рассеивающей линзе) в направлении KS'' . Продолжение KS'' проходит через точку K_2 пересечения побочной оптической оси $O'O'$ с фокальной плоскостью P_2P_2 рассеивающей линзы L_2 .

По формуле для рассеивающей линзы

$$-\frac{l}{F} = \frac{l}{d} - \frac{l}{f},$$

где d - расстояние от линзы L_2 до предмета S' , f - расстояние от линзы L_2 до изображения S'' .

Отсюда
$$F = \frac{df}{d-f} = \frac{20 \cdot 60}{20-60} = -30 \text{ см.}$$

Знак "-" указывает, что линза рассеивающая.

Оптическая сила линзы
$$D = \frac{1}{F} = -\frac{1}{0,3} \approx -3,3 \text{ дптр.}$$

Ответ:
$$F = \frac{df}{d-f} = 30 \text{ см, } D = \frac{1}{F} \approx -3,3 \text{ дптр.}$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Тонкая стеклянная линза имеет оптическую силу $D = 5$ дптр. Когда эту линзу погружают в жидкость с показателем преломления n_2 , она действует как рассеивающая с фокусным расстоянием $F = 100$ см. Определите показатель преломления n_2 жидкости, если показатель преломления стекла линзы $n_1 = 1,5$.

Ответ:
$$n_2 = \frac{F_2 D n_1}{F_2 D + 1 - n_1} \approx 1,67$$

2. Предмет находится на расстоянии $a = 0,1$ м от переднего фокуса собирающей линзы, а экран, на котором получается четкое изображение предмета, расположен на расстоянии $b = 0,4$ м от заднего фокуса линзы. Найдите фокусное расстояние F линзы. С каким увеличением Γ изображается предмет?

Ответ:
$$F = \sqrt{ab} = 2 \cdot 10^{-1} \text{ м; } \Gamma = \sqrt{\frac{b}{a}} = 2$$

3. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 10$ см и $F_2 = 15$ см расположены вдоль общей главной оптической оси на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Где следует поместить точечный источник света, чтобы идущие от него лучи после прохождения обеих линз образовали пучок лучей, параллельных главной оптической оси? Рассмотрите два варианта.

$$d_1 = \frac{(\ell - F_2)F_1}{\ell - F_2 - F_1} = 30$$

Ответ: см перед первой линзой;

$$d_2 = \frac{(\ell - F_1)F_2}{\ell - F_1 - F_2} = 60$$

см за второй линзой.

4. Линза с фокусным расстоянием $F = 5$ см плотно вставлена в круглое отверстие в доске. Диаметр отверстия $D = 3$ см. На расстоянии $d = 15$ см от линзы на ее оптической оси находится точечный источник света. По другую сторону доски помещен экран, на котором получается четкое изображение источника. Каков будет диаметр D_1 светлого кружка на экране, если линзу вынуть из отверстия?

$$D_1 = \frac{Dd}{d - F} = 4,5$$

Ответ: см.

5. Постройте изображение точки, лежащей на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии, меньшем фокусного. Положение фокусов линзы задано.
6. Параллельный пучок света падает перпендикулярно на собирающую линзу, оптическая сила которой $D_1 = 2,5$ дптр. На расстоянии 20 см от нее находится рассеивающая линза с оптической силой $D_2 = -5$ дтр. Диаметр линз равен 5 см. На расстоянии 30 см от рассеивающей линзы расположен экран Э. Каков диаметр светлого пятна, создаваемого линзами, на экране?

$$\text{Ответ: } 2,5 \text{ см.}$$

7. Две собирающие линзы с оптическими силами $D_1 = 5$ дптр и $D_2 = 6$ дптр расположены на расстоянии $l = 60$ см друг от друга. Найдите, используя построение в линзах, где находится изображение предмета, расположенного на расстоянии $d = 40$ см от первой линзы, и поперечное увеличение системы.

$$\text{Ответ: } 1 \text{ м; } 5.$$

8. Задан ход падающего и преломленного лучей в рассеивающей линзе (рис. 12). Найдите построением главные фокусы линзы.

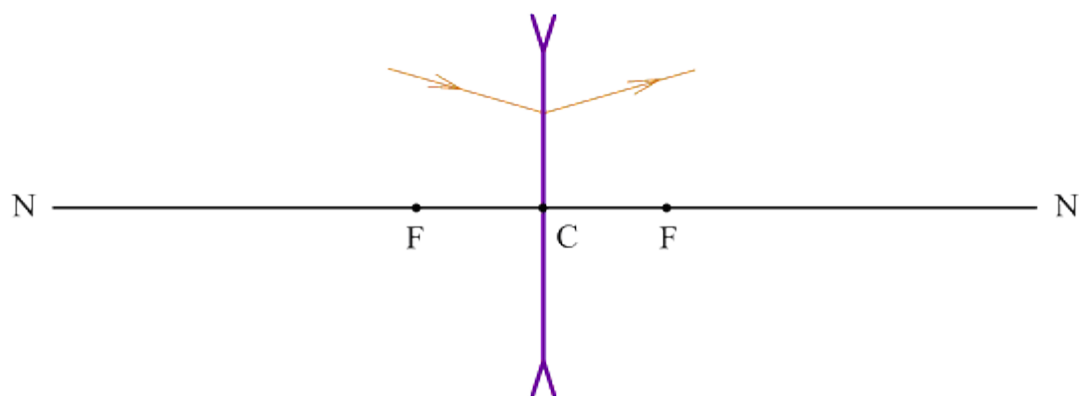


Рис. 12

Задача 1

Представлена тонкая линза, у которой указана главная оптическая ось, и указано, что в плоскости, проходящей через двойной фокус, располагается светящаяся точка. Необходимо определить, какая из четырех точек на чертеже соответствует правильному изображению этого предмета, то есть светящейся точки.

Задача может быть решена несколькими способами, рассмотрим два из них.

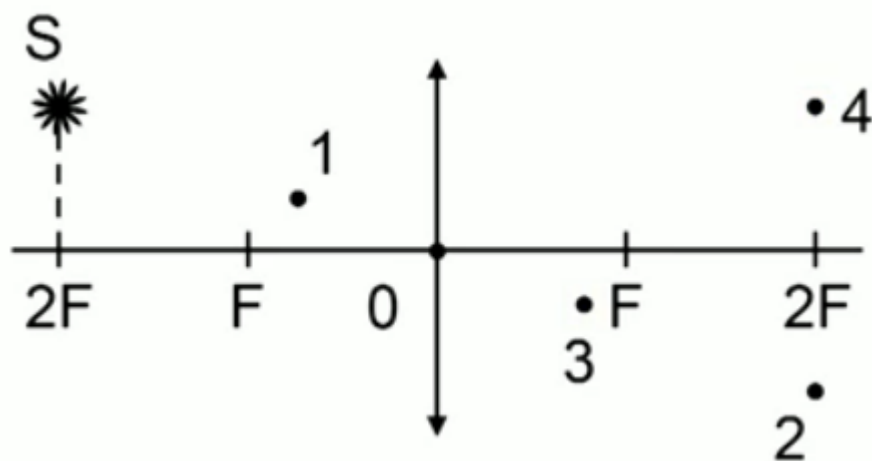


Рис. 1. Задача 1 (Источник)

На рис. 1 изображена собирающая линза с оптическим центром (O), фокусы (F), линза равнофокусная и точки двойного фокуса ($2F$). Светящаяся точка (S) лежит в плоскости, расположенной в двойном фокусе. Необходимо показать, какая из четырех точек соответствует построению изображения или изображению этой точки на схеме.

Решение задачи начнем с вопроса построения изображения.

Светящаяся точка (S) располагается на двойном расстоянии от линзы, то есть это расстояние равно двойному фокусу, его можно построить следующим об-

разом: взять линию, которая соответствует лучу, движущемуся параллельно главной оптической оси, преломленный луч пройдет через фокус (F), а второй луч пройдет через оптический центр (0). Пересечение окажется на расстоянии двойного фокуса ($2F$) от линзы, это не что иное, как изображение, и оно соответствует точке 2. Правильный ответ: 2.

Одновременно с этим можно воспользоваться формулой тонкой линзы и вместо d подставить $2F$, ведь точка лежит на расстоянии двойного фокуса, при преобразовании получим, что изображение тоже получается в точке, удаленной на двойном фокусе, ответ будет соответствовать 2 (рис. 2).

Решение:

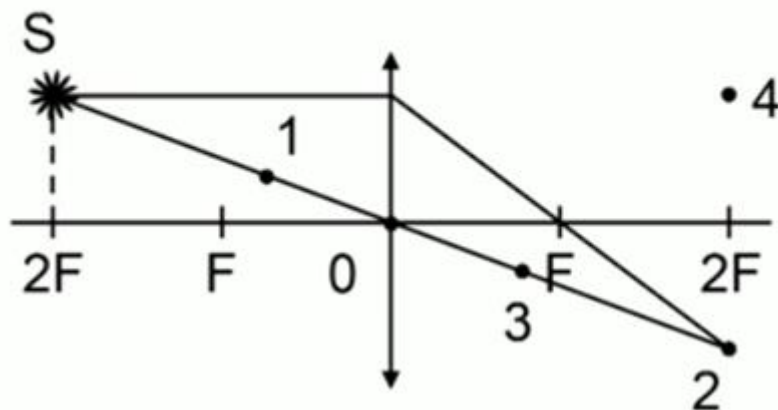


Рис. 2. Задача 1, решение (Источник)

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{f}; \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{2F}$$

Ответ: 2.

Задачу можно было бы решить и с помощью таблицы, которую мы рассматривали ранее, там указано, что если предмет находится на расстоянии двойного фокуса, то изображение тоже получится на расстоянии двойного фокуса, то есть, помня таблицу, ответ можно было бы получить сразу.

Задача 2

Предмет высотой 3 сантиметра находится на расстоянии 40 сантиметров от собирающей тонкой линзы. Определить высоту изображения, если известно, что оптическая сила линзы составляет 4 диоптрии.

Записываем условие задачи и, поскольку величины указаны в разных системах отсчета, переводим их в единую систему и запишем уравнения, необходимые для решения задачи:

Дано:	СИ	Решение:
$h = 3 \text{ см}$	$0,4 \text{ м}$	$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \Gamma = \frac{H}{h} = \frac{ f }{ d }; D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; H = h \cdot \frac{ f }{ d }$
$d = 40 \text{ см}$	$3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$	$\frac{1}{f} = D - \frac{1}{d}; f = \frac{d}{D \cdot d - 1};$
$D = 4 \text{ дптр}$		$H = h \cdot \frac{1}{D \cdot d - 1} = 0,05 [\text{м}]$
$H = ?$		
Ответ: $H = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$.		

Мы использовали формулу тонкой линзы для собирающей линзы с положительным фокусом, формулу увеличения (Γ) через величину изображения и высоту самого предмета, а также через расстояние от линзы до изображения и от линзы до самого предмета. Вспомнив, что оптическая сила (D) – это и есть обратное значение фокусного расстояния, можем переписать уравнение тонкой линзы. Из формулы увеличения запишем высоту изображения. Далее запишем выражение для расстояния от линзы до изображения из преобразования формулы тонкой линзы и запишем формулу, по которой можно вычислить расстояние до изображения (f). Подставив значение (f) в формулу высоты изображения, мы получим необходимый результат $H = 0,05 \text{ м}$, то есть высота изображения получилась больше, чем высота самого предмета. Следовательно, изображение действительное и увеличение больше единицы.

Задача 3

Перед тонкой собирающей линзой поместили предмет, в результате такого размещения увеличение получилось равным 2. Когда предмет передвинули относительно линзы, то увеличение стало равно 10. Определить на сколько передвинули предмет и в каком направлении, если первоначальное расстояние от линзы до предмета составляло 6 сантиметров.

Для решения задачи мы будем использовать формулу вычисления увеличения и формулу собирающей тонкой линзы.

Дано:	Решение:
$d_1 = 6 \text{ см}$	$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}; \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \Gamma_1 = \frac{f_1}{d_1};$
$\Gamma_1 = 2$	$f_1 = \Gamma_1 \cdot d_1 \cdot \frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{\Gamma_1 \cdot d_1};$
$\Gamma_2 = 10$	$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{\Gamma_2 \cdot d_2}; d_2 = 4,4 \text{ см}; \Delta d = d_1 - d_2 = 1,6 [\text{см}]$
$F = 4 \text{ см}$	
$\Delta d = ?$	
Ответ: $\Delta d = 1,6 \text{ см}$.	

Из этих двух уравнений мы и будем искать решение. Выразим расстояние от линзы до изображения в первом случае, зная увеличение и расстояние. Под-

ставив значения в формулу тонкой линзы, мы получим значение фокуса $F = 4 \text{ см}$. Далее все повторяем для второго случая, когда увеличение составляет 10. Получим расстояние от линзы до предмета во втором случае, когда предмет передвинули, $d_2 = 4,4 \text{ см}$. Мы видим, что предмет был передвинут ближе к фокусу, так как фокус составляет 4 сантиметра, в этом случае увеличение составляет 10, то есть увеличивается изображение в 10 раз. Окончательный ответ $\Delta d = 1,6 \text{ см}$, сам предмет был передвинут ближе к фокусу линзы и таким образом увеличение стало больше в 5 раз.

Заключение

Геометрическая оптика остается очень важной темой в физике, все задачи решаются исключительно на понимании вопросов построения изображения в линзах и, конечно, знании необходимых уравнений.