Лабораторная работа № 6

«Измерение ускорения свободного падения с помощью математического маятника»

Цель работы. Изучение гармонических колебаний и определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника.

Краткая теория

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити.

В вертикальном положении сила тяжести P шарика полностью уравновешивается натяжением нити $\boldsymbol{T}$, и маятник остается в покое. Это положение называется положением **равновесия** (точка А).

Если маятник отклонить от положения равновесия на некоторый угол α (в точку С), то составляющая силы тяжести, направленная вдоль нити, т.е. сила $F_2 = Pcos\alpha$, уравновесится натяжением нити T'. Другая составляющая, т.е. сила $F_1 = Psin\alpha$, перпендикулярная к нити, будет стремиться вернуть маятник в положение равновесия. Под действием этой силы маятник начнет ускоренно двигаться к точке А (положению равновесия). В точке А равнодействующая всех сил, действующих на маятник, равна нулю, но так как маятник обладает массой m и к моменту прохождения точки А будет иметь скорость ϑ, то он по инерции пройдет точку **А**. По дуге АВ маятник будет двигаться замедленно вследствие того, что направление силы F_1 (к положению равновесия) будет противоположно направлению движения маятника. В точке **В** маятник остановится и сразу же начнет движение к точке **А**. Таким образом, маятник будет совершать колебательные движения. Если на маятник не действуют силы трения, то он будет совершать колебательные движения бесконечно долго (незатухающие колебания).

Колебания маятника будут происходить по дуге СВ, которая является частью окружности радиусом l с центром в точке 0. Если угол отклонения маятника α от положения равновесия мал (~ 3 – 5^0), то можно принять, что $sin\alpha = \alpha$, АС $\approx x_0$. (1)

Точку А принимаем за начало отсчета, и тогда отклонения маятника можно описывать величинами x (отклонение вправо) и $-x$ (отклонение влево). Величина x называется **смещением** маятника от положения равновесия. Максимальное смещение от положения равновесия x_0 называется **амплитудой** колебания.

Время одного полного колебания (от точки **С** к точке **В** и обратно) называется **периодом** T колебания. Любой момент времени t колебаний ($t < T$) или $t + nT$, где n = 0, 1, 2… соответствует определенному смещению $|x|$, которое представляет собой координату материальной очки в данный момент времени.

Таким образом, колебания маятника, совершаемые под действием силы F_1, характеризуются величинами x, x_0 и T. Найдем математическое выражение, объединяющее эти величины.

Так как $P = mg$, что $F_1 = mgsin\alpha$ (2), где $sin\alpha = \left|\frac{x}{l}\right|$ (3).

Подставляя (3) в (2), получим $F_1 = -\,mg\frac{x}{l}$ (4).

Знак "минус" в формуле (4) означает, что сила F_1 и смещение x всегда направлены в разные стороны.

Сила F_1, согласно второму закону Ньютона, равна $F_1 = ma$ (5).

Ускорение a равно второй производной смещения x по времени t: $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, тогда $F_1 = m\frac{d^2x}{dt^2}$ (6)

Из (4) и (6) получаем $-\,mg\frac{x}{l} = m\frac{d^2x}{dt^2}$ и, следовательно,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + mg\frac{x}{l} = 0 \quad (7)$$

Так как величины g и l положительные, то их отношение можно приравнять к квадрату некоторой величины $\omega^2 = \frac{g}{l}$ (8)

Подставляя (8) в (7), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 = 0 \quad (9)$$

Выражение (9) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний. Частным решением этого уравнения является функция $x = x_0\sin(\omega t + \varphi)$, (10)

где t – текущее время или время начала отсчета; $\omega t + \varphi$ – фаза колебаний; φ – начальная фаза, т.е. фаза, соответствующая отклонению маятника в момент времени $t = 0$;
ω– круговая (циклическая) частота.

Величина x_0 (амплитуда) и φ в (10) не зависят от t. Колебания будут гармоническими, если зависимость смещения x от времени t будет выражаться через функции sin и cos; следовательно, уравнение (10) есть уравнение гармонических колебаний.

Одним из свойств гармонических колебаний является то, что любое положение маятника (или какое-либо значение гармонической функции) точно повторяется через время T, за которое фаза $(\omega t + \varphi)$ получает приращение 2π. Таким образом, если ко времени T прибавить время одного полного колебания, то фаза изменится на 2π.

$\omega(t + \mathrm{T}) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$. (11)

Раскрыв скобки в (11) и приводя сокращения, получим $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$. (12)

Время T связано с частотой колебания f соотношением $\mathrm{T} = \frac{1}{\nu}$ (13)

Из (12) и (13) следует, что $\omega = 2\pi\nu$ (14)

где f – число полных колебаний в единицу времени.

Для нахождения ускорения свободного падения g подставим в (12) значение ω из (8)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (15) \quad \text{откуда} \quad \boldsymbol{g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}} \quad (16)$$

Порядок выполнения работы

Модель математического маятника представляет собой металлический шарик небольшого радиуса, подвешенный на длинной нити.

Длина маятника l определяется расстоянием от точки подвеса до центра шарика

$$l = l_{н} + \frac{d_{ш}}{2},$$

где $l_{н}$– длина нити от точки подвеса до места крепления шарика к нити; $d_{ш}$– диаметр шарика. Длина нити $l_{н}$ измеряется линейкой, диаметр шарика $d_{ш}$– штангельциркулем.

Оставляя нить натянутой, отводят шарик из положения равновесия на расстояние, весьма малое по сравнению с длиной нити. Затем шарик отпускают, не давая ему толчка, и одновременно включают секундомер. Определяют промежуток времени t, в течение которого маятник совершает n = 50 полных колебаний. Опыт повторяют с двумя другими маятниками. Полученные экспериментальные результаты (l_1, l_2, l_3; t_1, t_2, t_3) заносят в таблицу.

Таблица

Номер измерения	l, м	t, с	T, с	g, м/с
1				
2				
3				

По $T = \frac{t}{n}$ формуле вычисляют период колебания маятника, а по формуле (16) вычисляют ускорение свободно падающего тела g.

Результаты измерений заносят в таблицу.

Вычисляют $g_{ср}$ среднее арифметическое из результатов измерения и среднюю абсолютную ошибку $\Delta g_{ср}$.

Окончательный результат измерений и вычислений выражают в виде $g = g_{ср} \pm \Delta g_{ср}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение гармонических колебаний. Напишите уравнение таких колебаний, поясните физический смысл величин, входящих в него.
2. Изобразите график гармонических колебаний, отметив характерные точки.
3. Поясните, какое отношение к реальным (сложным) колебательным процессам имеют идеальные (наиболее простые) гармонические колебания.
4. Укажите, в каких точках траектории тела маятника оно имеет максимальную (для данного колебательного процесса) скорость, потенциальную энергию, кинетическую энергию, ускорение, силу натяжения нити.
5. Как изменится период математического маятника, если изменить его длину, массу колеблющегося тела, амплитуду колебаний?
6. Как изменится период математического маятника при его ускоренном движении по вертикали? Чему равен период колебаний такого маятника в случае его свободного падения?
7. Напишите формулу *закона всемирного тяготения* и поясните, при каких условиях он применим точно, а при каких – приближённо.
8. Различаются ли понятия “вес тела” и его “сила тяжести”? Какую физическую величину определяют при взвешивании тела?
9. От каких величин зависит значение *ускорения свободного падения*? Одинаково ли значение $\vec{g}$ для тел с различной массой?
10. С помощью какого математического маятника, длинного или короткого, можно измерить значение $\vec{g}$ с более высокой точностью? Ответ обоснуйте.
11. Подброшенное вверх тело падает на землю. В каких точках траектории оно находится в состоянии невесомости?
12. Предложите способ определения массы тела, находящегося в состоянии невесомости.