

Тема: Решение задач по теме « Гармонические механические колебания. Пружинный и математический маятники»

- а) Что называется гармоническим колебанием?
- б) Дайте определение периода, частоты, амплитуды, фазы колебаний.
- в) Единицы измерения этих величин .
- г) Формулы для нахождения координат при колебаниях, фазы, частоты, циклической частоты.
- д) От чего и как зависит период колебания математического маятника.
- е) От чего и как зависит период колебания пружинного маятника
- ж) Формула закона сохранения энергии для математического маятника и для пружинного маятника.

Основные формулы

Пружинный маятник

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, (\text{циклическая частота}) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, (\text{период колебаний})$$

Математический маятник

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (\text{период колебаний})$$

№1

Маятник с длиной нити 1м колеблется в поле тяготения Земли. Найти период колебания, частоту колебания.

Решение

$l=1\text{м}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
$g=9.8\text{м/с}^2$	$T=2\text{с}$
$T=?$	$\nu = \frac{1}{T}$
$\nu=?$	$\nu=0,5\text{Гц}$

Л.А. Кирик "Физика самостоятельные и контрольные работы" Илекса Москва 2006.

Средний уровень

№1 Какова длина математического маятника, если период его колебания равен 2с?

Решение:

$$T=2c \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$l-? \quad \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g}$$

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = l_M$$

№2 Найти массу груза, который на пружине жесткостью 250 Н/м делает 20 колебаний за 16 с.

Решение:

$$k=250\text{Н/м} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$N=20 \quad T = \frac{t}{N}$$

$$t=16\text{с} \quad \frac{t}{N} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$m-? \quad \frac{t^2}{4N^2\pi^2} = \frac{m}{k}$$

$$m = \frac{t^2 k}{4N^2\pi^2}$$

$$m=4 \text{ кг}$$

№7 Груз висит на пружине и колеблется с периодом 0.5с. На сколько укоротится пружина, если снять с нее груз.

Решение

$$T=0.5\text{с} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$x-? \quad \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{m}{k}$$

$$F_{\text{упр}} = F_{\text{г}}$$

$$kx = mg$$

$$\frac{m}{k} = \frac{x}{g}$$

$$\frac{x}{g} = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$x = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 0.062 \text{ м} = 6,2 \text{ см}$$

№8 Пружина под действием груза удлинилась на 1 см. Определите, с каким периодом начнет совершать колебания этот груз на пружине, если его вывести из положения равновесия.

Решение

$$x = 1 \text{ см} = 0,01 \text{ м} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T - ? \quad \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{m}{k}$$

$$F_{\text{упр}} = F_T$$

$$kx = mg$$

$$\frac{m}{k} = \frac{x}{g}$$

$$\frac{x}{g} = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{x}{g}} = 0.19 \text{ с} = 0.2 \text{ с}$$

Достаточный уровень

№1 как относятся длины математических маятников, если за одно и то же время один из них совершает 10, а другой 30 колебаний?

Решение

$$N_1 = 10 \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad T_1 = \frac{t}{N_1}$$

$$N_2 = 30 \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}} \quad T_2 = \frac{t}{N_2}$$

$$t_1 = t_2 = t \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = ?$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{\sqrt{\frac{l_2}{g}}}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{l_1 g}{l_2 g} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{9} \quad \text{второй маятник в 9 раз длиннее}$$

№2 Определите ускорение свободного падения на Луне, если маятниковые часы идут на ее поверхности в 2,46 раза медленнее чем на Земле.

Решение

$$T_2 = \frac{T_1}{2,46} \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}$$

$$l_1 = l_2 = l \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_2}}$$

$$g_2 - ? \quad \frac{T_1}{2,46} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_2}}$$

$$2,46 * 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_2}}$$

$$6,05 \frac{l}{g_1} = \frac{l}{g_2}$$

$$g_2 = \frac{g_1}{6,05} = 1,62 \text{ м/с}^2$$

№3 В неподвижном лифте висит маятник, период колебаний которого 1с. С каким ускорением и в какую сторону движется кабина лифта, если период колебаний этого маятника стал равным 1,1с.

Решение

$$T_1 = 1 \text{ с} \quad g_1 = g_2 + a$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}$$

$$T_2 = 1,1c \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_2}}$$

$\vec{a}-?$ *Выразим l из этих формул и приравняем*

$$|\vec{a}|-? \quad l = \frac{T_1^2 g_1}{4\pi^2} \quad l = \frac{T_2^2 g_2}{4\pi^2}$$

$$T_2^2 g_2 = \frac{T_1^2 g_1 4\pi^2}{4\pi^2}$$

$$g_2 = \frac{T_1 g_1}{T_2^2}$$

$$a = g_1 - \frac{T_1 g_1}{T_2^2} = 1.7 \text{ м/с}^2 \text{ лифт движется вниз.}$$

7. Медный шарик, подвешенный на пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить алюминиевый шарик того же радиуса? (плотность меди равна 8900 кг/м³, алюминия 2700 - кг/м³)

Решение

$$r_1 = r_2 = r \quad m_1 = V\rho$$

$$\rho_1 = 8900 \text{ кг/м}^3 \quad V_1 = V_2 = V$$

$$\rho_2 = 2700 \text{ кг/м}^3 \quad m_1 = V\rho_1$$

$$k_1 = k_2 = k \quad m_1 = V\rho_1$$

$$\frac{T_1}{T_2} - ? \quad m_2 = V\rho_2$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{V\rho_1}{k}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{V\rho_2}{k}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{\frac{V\rho_1}{k}}}{\sqrt{\frac{V\rho_2}{k}}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{\frac{V\rho_1}{k}}}{\sqrt{\frac{V\rho_2}{k}}}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = 1.82$$

№8 Груз массой 4 кг совершает горизонтальные колебания под действием пружины жесткостью 75 Н/м. При каком смещении груза от положения равновесия модуль его скорости равен 5 м/с, если в положении равновесия модуль его скорости равен 10 м/с?

Решение

$$m=4\text{кг}$$

Вспомним закон сохранения полной энергии

$$k=75\text{Н/м}$$

$$W = K + \Pi$$

$$v=5\text{м/с}$$

$$W = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$v_0 = 10\text{м/с}$$

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$$

$$kx^2 = mv_0^2 - mv^2$$

$$x^2 = \frac{m}{k}(v_0^2 - v^2)$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{m}{k}(v_0^2 - v^2)} = \pm 2\text{м}$$

Высокий уровень

№1 К пружине подвешена чашка с гирями . Период вертикальных колебаний чашки 1с. После того как на чашку положили добавочный груз, период стал 1,2с. На сколько удлинилась пружина от прибавления добавочного груза, если первоначальное удлинение было 4 см.

Решение

$$T_1 = 1\text{с} \qquad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

$$m_1 \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1+\Delta m)}{k}}$$

$$T_2 = 1.2\text{с} \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{\frac{m_1}{k}}}{\sqrt{\frac{(m_1+\Delta m)}{k}}}$$

$$m_2 = m_1 + \Delta m \qquad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{m_1}{(m_1+\Delta m)}$$

$$x_1 = 4\text{см} = 0.04\text{м} \qquad kx_1 = m_1g$$

$$\Delta x\text{-?} \qquad kx_2 = (m_1 + \Delta m)g$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_1}{m_1+\Delta m}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{x_1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{x_1 T_2^2}{T_1^2} - x_1 = 1.76 \text{ см}$$

№5 С какой частотой будет колебаться палка массой 2кг и площадью поперечного сечения 5 см², плавающая на поверхности воды в вертикальном положении.

Решение

$$m=2\text{кг} \qquad v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$S=5\text{см}^2 \qquad \Delta F = F_A$$

$$\rho = 10\text{кг/м}^3 \qquad \Delta F = k\Delta x \qquad F_A = \rho g \Delta V = \rho g S \Delta x$$

$$v\text{-?} \qquad k = \rho g S$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} = 0.25 \text{ Гц}$$

№587

Колебания математического маятника происходят по закону $x(t) = 0.1 \cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})$ (м). Определите длину его нити подвеса.

$$\omega t = \frac{\pi}{2}t \quad \omega = \frac{\pi}{2} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{l}{g} \quad l = \frac{g}{\omega^2} = \frac{4g}{\pi^2} = 4\text{м}$$

№614

Определите частоту с которой будет колебаться паутина, если в нее попадет насекомое массой 0,20г. Жесткость паутины 0,20 Н/м.

$$\nu = \frac{1}{T} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 5\text{Гц}$$

№591

Как и во сколько раз изменится период колебаний маятника длиной 1м при:
а) перемещении его точки подвеса вверх с ускорением $a=1.2 \text{ м/с}^2$; б) перемещении маятника вниз с тем же модулем ускорением.

$$\text{Вниз } T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}} \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g+a}{g}} = 1.09 \text{ уменьшится}$$

$$\text{Вверх: } T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}} \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g-a}{g}} = 0,9 \text{ увеличится}$$

№594

Как необходимо изменить длину маятника, чтобы частота его колебаний увеличилась в 3 раза

$$v = \frac{1}{T} \quad v_1 = \frac{1}{T_1} \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad v_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l_1}} \quad v_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l_2}} \quad 3 v_1 =$$

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l_2}} \quad \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \quad \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{9} \text{ надо длину уменьшить в 9 раз}$$

№609

Определите период колебаний груза массой m на двух последовательно соединенных пружинах жесткостью k .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\text{Т.к. } k_1 = k_2 = k \quad k = \frac{k^2}{2k} = \frac{k}{2} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

№629

К грузу массой 5 кг подвешенному на две параллельные пружины с коэффициентами жесткости 75 н/м и 8н/м. Определите частоту колебаний груза.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad k = k_1 + k_2 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

$$= 0.64 \text{ Гц}$$

№611

Груз массой m на конце пружины колеблется с частотой 0,60 Гц. Когда к нему прикрепляют дополнительный груз массой 500г частота колебаний становится 0,40Гц. Определите значение m .

$$v = \frac{1}{T} \quad v_1 = \frac{1}{T_1} \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}} \quad v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad v_2$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m + \Delta m}{m}} \quad m = \frac{\Delta m v_2^2}{v_1^2 - v_2^2} = 0.4 \text{ кг}$$

Условия задач "Математический и пружинный маятники"

1. Маятник с длиной нити 1м колеблется в поле тяготения Земли. Найти период колебания, частоту колебания.
2. Какова длина математического маятника, если период его колебания равен 2с?
3. Найти массу груза, который на пружине жесткостью 250 Н/м делает 20 колебаний за 16с.
4. Груз висит на пружине и колеблется с периодом 0.5с. На сколько укоротится пружина, если снять с нее груз.
5. Пружина под действием груза удлинилась на 1см. Определите, с каким периодом начнет совершать колебания этот груз на пружине, если его вывести из положения равновесия.
6. как относятся длины математических маятников, если за одно и то же время один из них совершает 10, а другой 30 колебаний?
7. Определите ускорение свободного падения на Луне, если маятниковые часы идут на ее поверхности в 2,46 раза медленнее чем на Земле.
8. В неподвижном лифте висит маятник, период колебаний которого 1с. С каким ускорением и в какую сторону движется кабина лифта, если период колебаний этого маятника стал равным 1,1с.
9. Медный шарик, подвешенный на пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить алюминиевый шарик того же радиуса? (плотность меди равна 8900 кг/м³, алюминия 2700 - кг/м³)
10. Груз массой 4 кг совершает горизонтальные колебания под действием пружины жесткостью 75 Н/м. При каком смещении груза от положения равновесия модуль его скорости равен 5 м/с, если в положении равновесия модуль его скорости равен 10 м/с?
11. К пружине подвешена чашка с гирями. Период вертикальных колебаний чашки 1с. После того как на чашку положили добавочный груз, период стал

1,2с. На сколько удлинилась пружина от прибавления добавочного груза, если первоначальное удлинение было 4 см.

№587

Колебания математического маятника происходят по закону $x(t) = 0.1 \cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})$ (м). Определите длину его нити подвеса.

№614

Определите частоту с которой будет колебаться паутина, если в нее попадет насекомое массой 0,20г. Жесткость паутины 0,20 Н/м.

№591

Как и во сколько раз изменится период колебаний маятника длиной 1м при:
а) перемещении его точки подвеса вверх с ускорением $a=1.2 \text{ м/с}^2$; б) перемещении маятника вниз с тем же модулем ускорением.

№594

Как необходимо изменить длину маятника, чтобы частота его колебаний увеличилась в 3 раза

№609

Определите период колебаний груза массой m на двух последовательно соединенных пружинах жесткостью k .

№629

К грузу массой 5 кг подвешенному на две параллельные пружины с коэффициентами жесткости 75 н/м и 8н/м. Определите частоту колебаний груза.

№611

Груз массой m на конце пружины колеблется с частотой 0,60 Гц. Когда к нему прикрепляют дополнительный груз массой 500г частота колебаний становится 0,40Гц. Определите значение m .