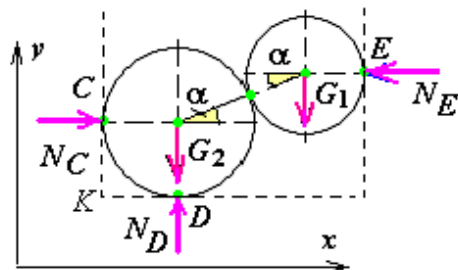


Бондаренко А.Н.

# Курс лекций по теоретической механике

## Статика



Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.

Завершение – Esc.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: [bond@miit.ru](mailto:bond@miit.ru).

Москва - 2007

# Содержание

- **Лекция 1.** Введение. Основные понятия. Аксиомы статики. Связи и реакции связей.
- **Лекция 2.** Система сходящихся сил. Теорема о трех силах. Аналитическое определение равнодействующей сходящихся сил. Уравнения равновесия.
- **Лекция 3.** Произвольная плоская система сил. Момент силы относительно точки. Пара сил. Теоремы о парах. Метод Пуансо. Главный вектор и главный момент. Уравнения равновесия. Три формы уравнений равновесия. Теорема Вариньона.
- **Лекция 4.** Плоские фермы. Методы расчета. Метод вырезания узлов. Метод Риттера. Понятие о линиях влияния опорных реакций и усилий. Равновесие сочлененных тел. Условие равновесия рычага. Условие устойчивости тела на опрокидывание. Кинематический способ определения реакций (принцип возможных перемещений).
- **Лекция 5.** Трение скольжения. Основные законы. Способы определения коэффициента трения. Угол трения. Конус трения. Учет сил трения при решении задач на равновесие. Сопротивление при качении.
- **Лекция 6.** Произвольная пространственная система сил. Моменты силы относительно центра и оси. Связь момента силы относительно точки и момента силы относительно оси. Теоремы о парах. Сложение произвольно расположенных сил в пространстве. Главный вектор и главный момент.
- **Лекция 7.** Аналитическое определение главного вектора и главного момента. Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил. Возможные случаи приведения системы. Зависимость главного момента от выбора центра приведения. Инварианты системы. Теоремы Вариньона.
- **Лекция 8.** Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил. Центр тяжести. Определение положения центра тяжести однородных тел. Центры тяжести простейших фигур. Способы определения положения центров тяжести.

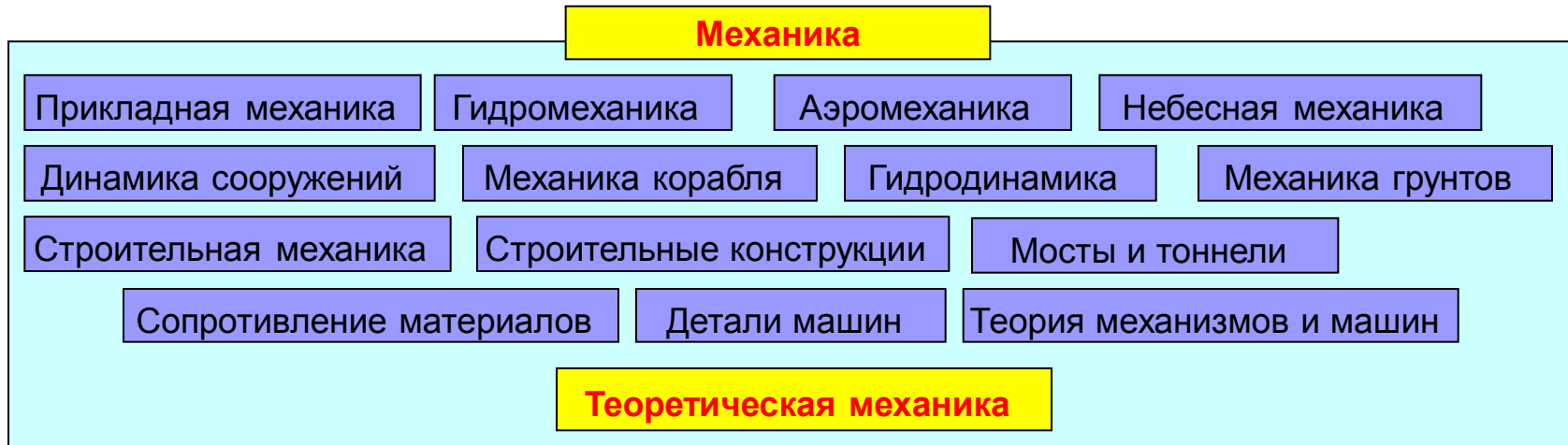
## Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.1. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.
4. Бондаренко А.Н. “Теоретическая механика в примерах и задачах. Статика” (электронное пособие [www.mii.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm](http://www.mii.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm) ), 2004 г.
5. Бондаренко А.Н. Демонстрационная программа “Теория пар” - [www.mii.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm](http://www.mii.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm) , 2004 г.
6. Бондаренко А.Н. Программа-тренажер “Определение проекции и момента силы” - [www.mii.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm](http://www.mii.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm) , 2004 г.

# ◀ Лекция 1 ▶

## ■ Введение

Под названием “механика” объединяется ряд наук, изучающих механическое движение и механическое взаимодействие твердых и деформируемых тел, а также жидких и газообразных сред.



**Механическое движение** – один из видов движения материи, выражающееся в *изменении* с течением времени *взаимных положений* тел или их частей.

**Механическое взаимодействие** – один из видов взаимодействия материи, вызывающий *изменение механического движения* тел или их частей, а также *препятствующий изменению* их взаимных положений.

**Теоретическая механика** – изучает *законы механического движения и механического взаимодействия*, общие для любых тел.

**Общность законов**, пригодность для любых тел и систем, достигается *абстрагированием* (отвлечением) от несущественных особенностей рассматриваемого тела и *выделением наиболее важных особенностей*. Именно по этому теоретическая механика является базовой наукой, на основе которой изучаются другие прикладные технические дисциплины.

*Основные абстрактные образы (модели) материальных тел и систем:*

**Материальная точка (МТ)** – не имеет размеров, но в отличие от геометрической точки обладает массой, равной массе того тела, которое изображается данной материальной точкой.

**Абсолютно твердое тело (АТТ)** – система МТ, в которой расстояние между ними не изменяются ни при каких воздействиях.

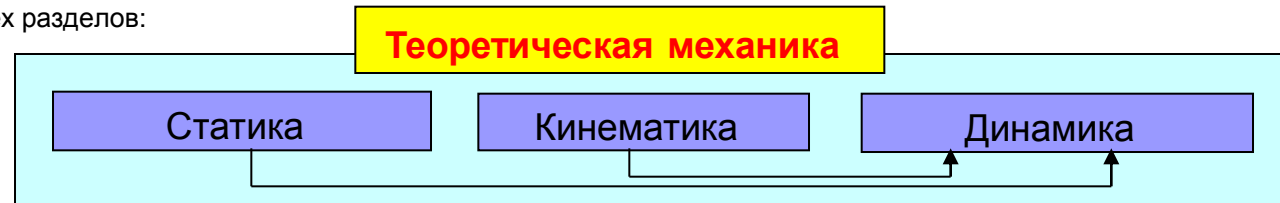
**Механическая система (МС)** – совокупность МТ или АТТ, связанных между собой общими законами движения или взаимодействия.

**В зависимости от условия задачи и выбора объекта изучения одно и то же физическое тело может быть принято за МТ, АТТ или МС.**

Например, Земля при изучении ее движения вокруг Солнца принимается за МТ, а при изучении ее вращения вокруг собственной оси – за АТТ. При изучении явлений, происходящих на Земле (приливы и отливы, перемещения коры и т.п.), Земля рассматривается как МС.

# Лекция 1 (продолжение – 1.2)

Теоретическая механика состоит из трех разделов:



**Статика** – изучает **условия относительного равновесия** механических систем. Для осуществления равновесия необходимо определенное соотношение сил, поэтому в статике изучаются общие свойства сил, правила замены сил другими силами, эквивалентными с точки зрения равновесия.

**Кинематика** – изучает **механическое движение без учета сил**, вызывающих это движение или влияющих на него. Таким образом, устанавливаются некоторые количественные меры движения с чисто геометрической точки зрения.

**Динамика** – изучает **механическое движение в связи с действующими силами** на объект движения. Таким образом, изучается связь между движением и действующими силами.

## Основные понятия теоретической механики

**Сила** – мера механического взаимодействия. Сила моделируется **вектором**, характеризуемым **направлением и величиной** (модулем).

**Кинематическое состояние тела** – состояние покоя или движения с неизменными параметрами.

**Система сил** – совокупность сил, приложенных к рассматриваемому объекту.

**Равнодействующая** – сила, эквивалентная системе сил, т.е. **не изменяющая кинематическое состояние**.

**Эквивалентная система сил** – заменяет данную систему сил без изменения кинематического состояния объекта.

**Взаимно уравновешенная система сил** – под ее действием **объект находится в равновесии**.

## Аксиомы статики

1. **Аксиома инерции** – Под действием взаимно уравновешенной системы сил тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

2. **Аксиома двух сил** – Если тело под действием двух сил находится в равновесии, то эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Такие две силы представляют собой простейшую взаимно уравновешенную систему сил.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

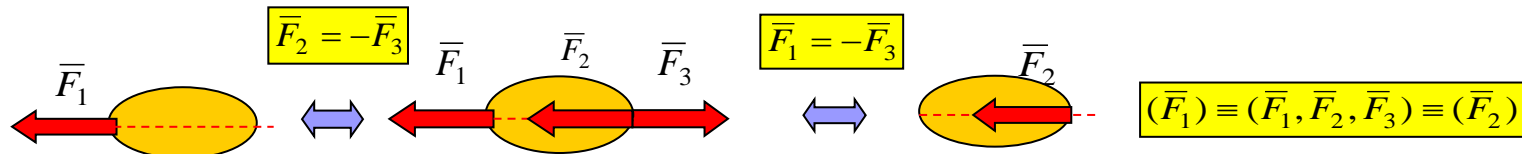
3. **Аксиома присоединения** – Если к заданной системе сил присоединить (или изъять) взаимно уравновешенную систему сил, то кинематическое состояние тела не изменится.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5)$$

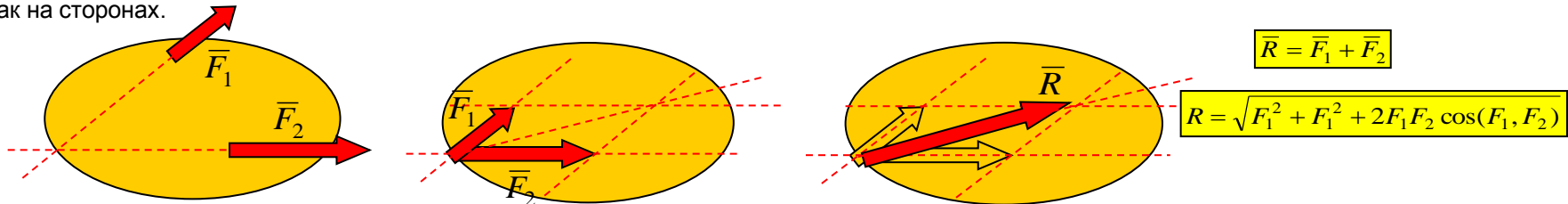
# Лекция 1 (продолжение – 1.3)

## Аксиомы статики (продолжение)

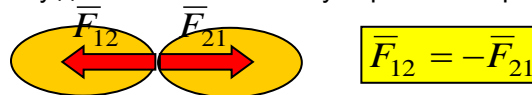
**Следствие из аксиомы присоединения** – Кинематическое состояние тела не изменится, если силу перенести по линии ее действия.



4. **Аксиома параллелограмма** – Равнодействующая двух пересекающихся сил равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах.



5. **Аксиома действия и противодействия** – Всякому действию соответствует равное и противоположное противодействие (III закон Ньютона).



6. **Аксиома отвердевания** – Равновесие деформируемого тела сохраняется при его затвердевании (обратное справедливо не всегда).

## Связи и реакции связей

**Свободное тело** – свобода перемещений тела не ограничивается никакими другими телами.

**Несвободное тело** – его движение ограничено другими телами.

**Связь** – тело, ограничивающее свободу перемещений объекта.

**Реакция связи** – сила, действующая на объект со стороны связи.

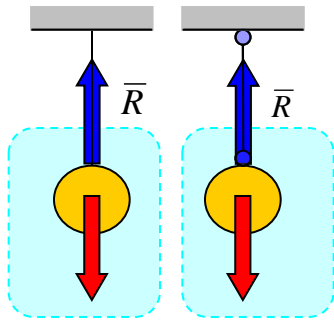
**Принцип освобождения от связи** – несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие соответствующими реакциями.

# Лекция 1 (продолжение – 1.4)

## Связи и реакции связей (продолжение)

Виды связей и их реакции:

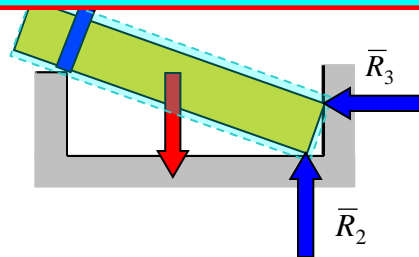
### 1. Нить, шарнирный стержень:



Реакция нити (стержня) направлена по нити (по стержню).

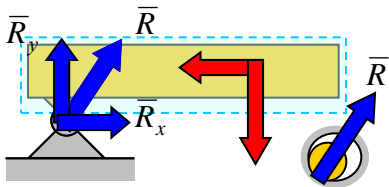
**Общее правило для связей любого вида:**

Если связь препятствует одному или нескольким перемещениям (максимальное число перемещений – три поступательных и три вращательных), то по направлению именно этих и только этих перемещений возникают соответствующие реакции (силы и моменты).



Реакция гладкой поверхности направлена перпендикулярно общей касательной плоскости, проведенной к соприкасающимся поверхностям тела и связи.

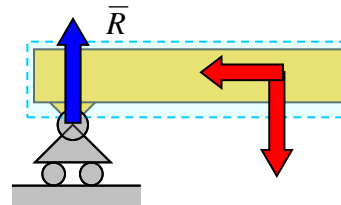
### 3. Неподвижный цилиндрический шарнир:



Реакция неподвижного шарнира проходит через центр шарнира

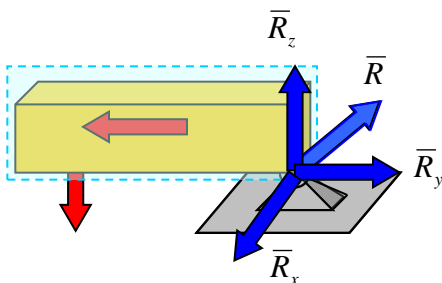
Реакцию неподвижного шарнира можно разложить на две составляющие, например,  $R_x$  и  $R_y$ , параллельные координатным осям.

### 4. Подвижный цилиндрический шарнир:



Реакция подвижного шарнира проходит через центр шарнира перпендикулярно оси шарнира и плоскости опирания.

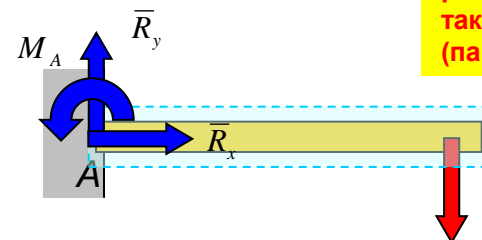
### 5. Неподвижный сферический шарнир:



Реакция неподвижного сферического шарнира

Реакцию неподвижного сферического шарнира можно разложить на три составляющие, например,  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ , параллельные координатным осям.

### 6. Жесткая плоская заделка:



В жесткой плоской заделке возникает три реактивных усилия: две составляющие реактивные силы  $R_x$  и  $R_y$ , а также реактивный момент (пара сил)  $M_A$ .

## Лекция 2

- Система сходящихся сил – линии действия сил пересекаются в одной точке.  
План исследования любой системы сил соответствует последовательному решению трех вопросов:

1. Как упростить систему?
2. Каков простейший вид системы?
3. Каковы условия равновесия системы?

1. Перенесем все силы по линии их действия в точку пересечения (кинематическое состояние тела при этом не изменится – следствие из аксиомы присоединения).

Сложим первые две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (аксиома параллелограмма).  
Количество сил уменьшилось на единицу.

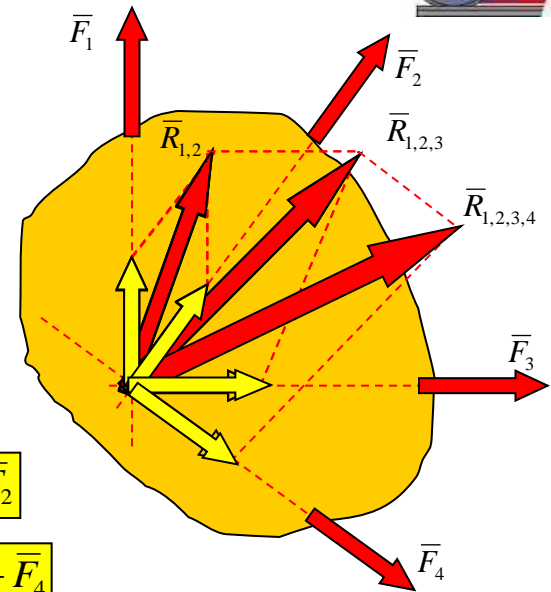
Сложим полученную равнодействующую  $\vec{R}_{12}$  со следующей силой  $\vec{F}_3$ .  
Количество сил вновь уменьшилось на единицу.

Повторим эту же операцию со следующей силой  $\vec{F}_4$ .  
Осталась всего одна сила, эквивалентная исходной системе сил.

$$\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R}_{1,2,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3$$

$$\vec{R}_{1,2,3,4} = \vec{R}_{1,2,3} + \vec{F}_4$$



Сложение сил построением параллелограммов можно заменить построением **силового треугольника** – выбирается одна из сил или изображается параллельно самой себе с началом в любой произвольной точке, все другие силы изображаются параллельными самим себе с началом, совпадающим с концом предыдущей силы.

Результатом такого сложения является вектор, направленный из начала первой силы к концу последней из сил.

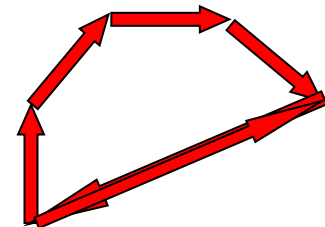
2. Простейший вид системы – сила, приложенная в точке пересечения исходных сил. Таким образом, сходящаяся система сил приводится к одной силе – **равнодействующей** (силе, эквивалентной исходной системе сил), равной геометрической сумме сил системы.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \dots = \sum \vec{F}_i$$

3. Если равнодействующая системы оказывается не равной нулю, тело под действием такой системы силы будет двигаться в направлении равнодействующей (система сил не уравновешена). Для того, чтобы уравновесить систему достаточно приложить силу, равную полученной равнодействующей и направленной в противоположную сторону (аксиома о двух силах). Таким образом, **условием равновесия системы сходящихся сил является обращение равнодействующей в ноль.**

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$$

Это условие эквивалентно замкнутости силового треугольника определенным образом, а именно, **направление всех сил при обходе по контуру не изменяется по направлению:**

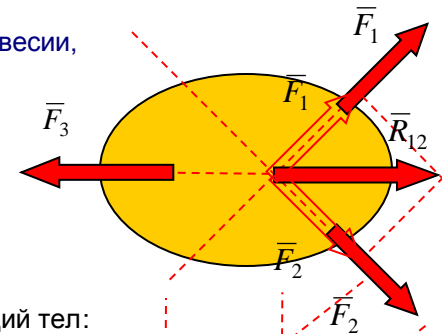




## Лекция 2 (продолжение – 2.2)

- **Теорема о трех силах** – Если тело, под действием трех непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

1. Перенесем две силы по линии их действия в точку их пересечения (кинематическое состояние тела при этом не изменится – следствие из аксиомы присоединения).
2. Сложим эти силы (аксиома параллелограмма). Теперь система состоит всего из двух сил. А такая система находится в равновесии, если эти силы равны между собой и **направлены по одной линии** в противоположные стороны. Таким образом, все три силы пересекаются в одной точке.

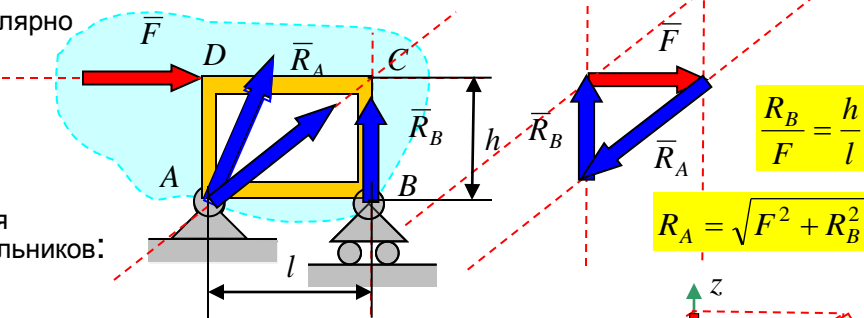


Теорема о трех силах может эффективно применяться для определения направления одной из двух реакций тел:

Реакция подвижного шарнира  $R_B$  направлена вертикально (перпендикулярно опорной плоскости). Направление (угол наклона к горизонту) реакции неподвижного шарнира  $R_A$  пока не определено.

Если тело под действием трех сил  $F$ ,  $R_A$  и  $R_B$  находится в равновесии, то все три силы должны пересекаться в одной точке (в точке C):

Действительные направления и величины реакций легко определяются построением силового треугольника и использованием подобия треугольников:



- **Аналитическое определение равнодействующей** –

Каждая из сил, геометрическая сумма которых дает **равнодействующую**, может быть представлена через ее проекции на координатные оси и единичные векторы (орты):

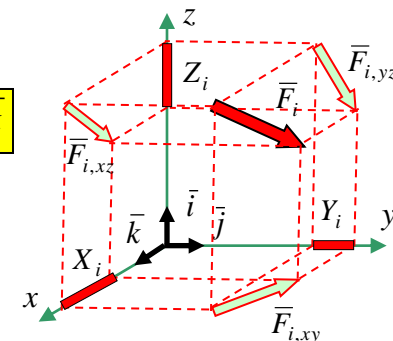
$$\bar{F}_i = X_i \bar{i} + Y_i \bar{j} + Z_i \bar{k}$$

Тогда равнодействующая выражается через проекции сил в виде:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots = X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k} + X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k} + \dots$$

Группировка по ортам дает выражения для проекций равнодействующей:

$$\bar{R} = (X_1 + X_2 + \dots) \bar{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots) \bar{j} + (Z_1 + Z_2 + \dots) \bar{k} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k}$$



Отсюда  
проекции  
равнодействующей :

$$\begin{aligned} R_x &= \sum X_i; \\ R_y &= \sum Y_i; \\ R_z &= \sum Z_i; \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Направляющие} \\ &\text{косинусы} \\ &\text{равнодействующей :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\bar{R}, x) &= \frac{R_x}{R}; \\ \cos(\bar{R}, y) &= \frac{R_y}{R}. \end{aligned}$$

- **Уравнения равновесия сходящейся системы сил**  
**Условие равновесия:**

Равнодействующая  
должна обращаться в ноль:

$$\bar{R} = 0$$

Отсюда  
**уравнения  
равновесия :**

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum Z_i &= 0. \end{aligned}$$

Модуль  
равнодействующей :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$



# Лекция 3

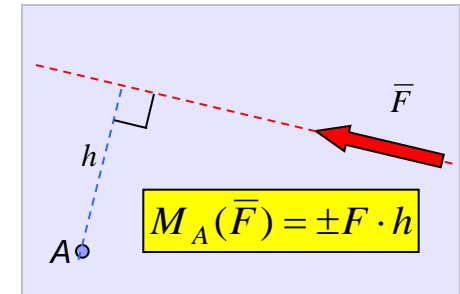
■ **Плоская произвольная система сил** – силы лежат в одной плоскости и их линии действия не пересекаются в одной точке.

Для рассмотрения такой системы сил необходимо ввести новые понятия:

1. Момент силы относительно точки на плоскости.
2. Пара сил. Момент пары сил.

■ **Момент силы относительно точки на плоскости** – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

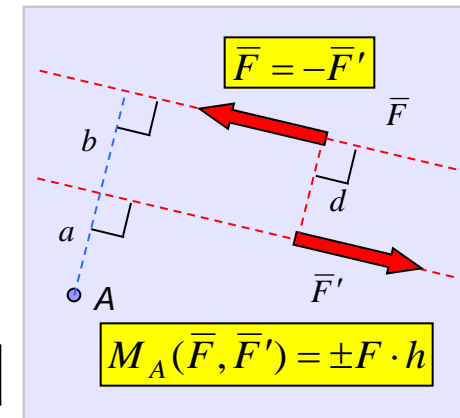
**Плечо силы** – длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.



■ **Пара сил** – совокупность двух параллельных друг другу сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны. Пара сил более не может быть упрощена (не может быть заменена одной силой) и представляет собой новую силовую характеристику механического взаимодействия.

■ **Момент пары сил на плоскости** (теорема о моменте пары сил) – не зависит от выбора центра приведения (полюса) и равен произведению модуля любой из сил пары на плечо пары, взятым со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием пары сил происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

**Плечо пары сил** – длина перпендикуляра, опущенного из любой точки на линии действия одной из сил пары на линию действия другой силы этой пары.



В независимости момента пары от выбора полюса можно убедиться вычислением суммы моментов от каждой из сил относительно любого центра.

$$M_A(\bar{F}, \bar{F}') = F \cdot (a + b) - F'a = Fb = Fd$$

■ **Теоремы о парах:** (Теоремы приводятся без доказательств. Подробные доказательства с графической анимацией см. демонстрационную программу автора по теории пар “Теория пар” на сайте МИИТа. [Посмотреть...](#))

■ **О переносе пары сил в плоскости ее действия** – Пару сил можно перенести в любое место в плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.

■ **Об эквивалентности пар сил** – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты алгебраически равны. Кинематическое состояние тела не изменится.

$$M(\bar{F}_1, \bar{F}_1') = F_1 d_1, \quad M(\bar{F}_2, \bar{F}_2') = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow (\bar{F}_1, \bar{F}_1') \equiv (\bar{F}_2, \bar{F}_2')$$

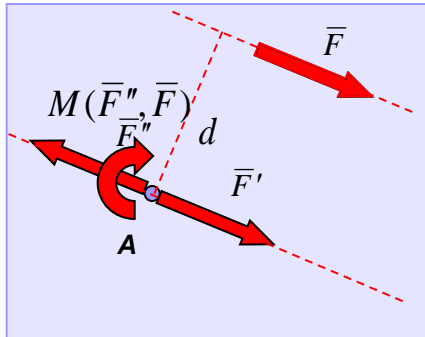
■ **О сложении пар сил на плоскости** – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.

■ **Условие равновесия системы пар сил** –

$$M = \sum M_i = 0$$

## Лекция 3 (продолжение – 3.2)

**Приведение силы к заданному центру (метод Пуансо)** – силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку плоскости, если добавить соответствующую пару сил, момент которой равен моменту этой силы относительно рассматриваемой точки.



Добавим к системе в точке A две силы, равные по величине между собой и величине заданной силы, направленные по одной прямой в противоположные стороны и параллельные заданной силе:

$$\bar{F}'' = -\bar{F}' = -\bar{F}$$

Кинематическое состояние не изменилось (аксиома о присоединении).

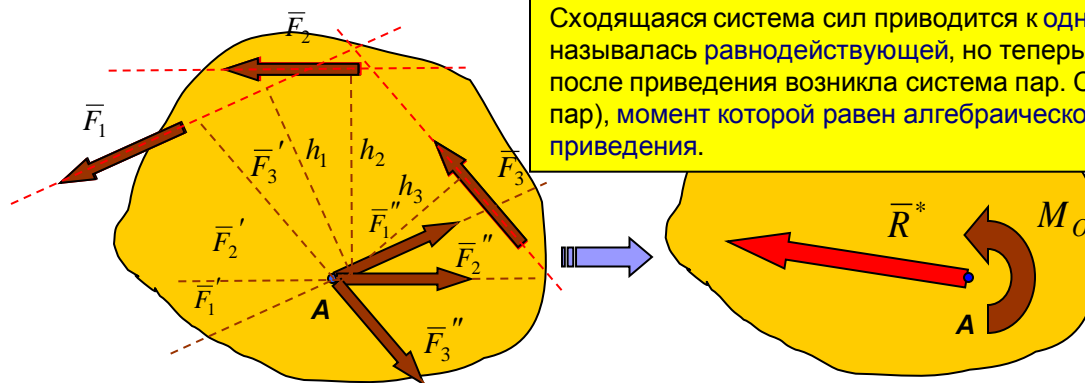
Исходная сила и одна из добавленных сил противоположно направленная образуют пару сил.

**Момент этой пары численно равен моменту исходной силы относительно центра приведения.**

$$M(\bar{F}'', \bar{F}) - F \cdot d = -F \cdot h = M_A(\bar{F})$$

Во многих случаях пару сил удобно изображать дуговой стрелкой.

**Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру** – выбираем произвольную точку на плоскости и каждую из сил переносим по методу Пуансо в эту точку. Вместо исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар.



Сходящаяся система сил приводится к одной силе, называемой **равнодействующей**, но теперь это после приведения возникла система пар. Система пар), момент которой равен алгебраической сумме моментов.

**В общем случае плоская произвольная система сил приводится к одной силе, называемой **главным вектором** и к паре с моментом, равным **главному моменту** всех сил системы относительно центра приведения:**

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i$$

- главный вектор,

$$M = M_A = \sum M_{iA}$$

- главный момент.

**Условием равновесия плоской произвольной системы сил** является одновременное обращение главного вектора и главного момента системы в ноль:

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = 0$$

$$M = M_A = \sum M_{iA} = 0$$

**Уравнения равновесия (I форма)** получаются в виде системы трех уравнений из условий равновесия с использованием выражений для проекций главного вектора:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum M_{iA} &= 0 \end{aligned}$$

Существуют еще две формы уравнений Равновесия (II и III формы):

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & x \\ \sum M_{iB} &= 0; & \perp \\ \sum M_{iA} &= 0 & AB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{iC} &= 0; & C \\ \sum M_{iB} &= 0; & \notin \\ \sum M_{iA} &= 0 & AB \end{aligned}$$

# Лекция 3 (продолжение – 3.3)

Следует обратить внимание на то, что II и III формы уравнений равновесия имеют **ограничения**, связанные с выбором одной из осей, например,  $x$ , и точки  $C$  относительно положения точек  $A$  и  $B$ . Ограничения, накладываемые на выбор оси  $x$  (**не перпендикулярно  $AB$** ) и точки  $C$  (**не лежит на  $AB$** ), гарантируют, что ни одно из уравнений не обращается в тождество, при выполнении двух других уравнений.

$\sum X_i = 0;$	$x$	$\sum M_{iC} = 0;$	$C$
$\sum M_{iB} = 0;$	$\perp$	$\sum M_{iB} = 0;$	$\notin$
$\sum M_{iA} = 0$	$AB$	$\sum M_{iA} = 0$	$AB$

**Теорема Вариньона о моменте равнодействующей** – Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно того же центра.

Доказательство: Пусть система сил  $F_1, F_2, F_3 \dots$  приводится к равнодействующей, приложенной в точке  $O$ .

Такая система не находится в равновесии ( $R \neq 0$ ). Уравновесим эту систему силой  $R'$ , равной равнодействующей  $R$ , направленной по линии ее действия в противоположную сторону (аксиома о двух силах).

Таким образом, система исходных сил  $F_1, F_2, F_3 \dots$  и уравновешивающей силы  $R'$  находится в равновесии и должна удовлетворять уравнениям равновесия, например:

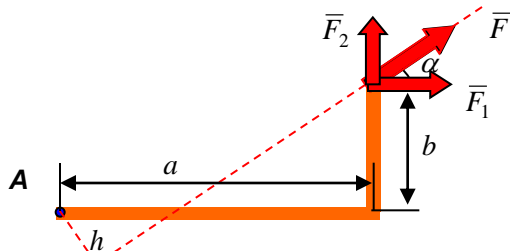
$$\sum M_{iA} + M_A(R') = 0$$

Поскольку сила  $R'$ , равна равнодействующей  $R$  и направлена по линии ее действия в противоположную сторону, то  $M_A(R') = -M_A(R)$ . Подстановка этого равенства в уравнение равновесия дает:

$$\sum M_{iA} - M_A(R) = 0 \quad \text{или} \quad M_A(R) = \sum M_{iA}$$

Примеры использования теоремы о моменте равнодействующей:

1. Определение момента силы относительно точки, когда сложно вычислять плечо силы. Например:



Силу  $F$  разложим на составляющие  $F_1$  и  $F_2$ . Тогда момент силы  $F$  относительно точки  $A$  можно вычислить как сумму моментов каждой из сил относительно этой точки:

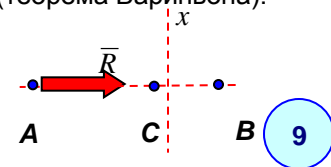
$$M_A(F) = -F_1 b + F_2 a = -(F \cos \alpha) b + (F \sin \alpha) a$$

2. Доказательство необходимости ограничений для II и III форм уравнений равновесия: Если  $\sum M_{iA} = 0$ , то система приводится к равнодействующей, при этом она проходит через

точку  $A$ , т.к. ее момент относительно этой точки должен быть равен нулю (теорема Вариньона).

Если при этом  $\sum M_{iB} = 0$ , то равнодействующая должна также проходить через точку  $B$ .

Тогда проекция равнодействующей на ось, перпендикулярную  $AB$ , и момент равнодействующей относительно точки, лежащей на  $AB$ , будут тождественно равны нулю при любом значении равнодействующей.



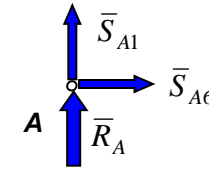
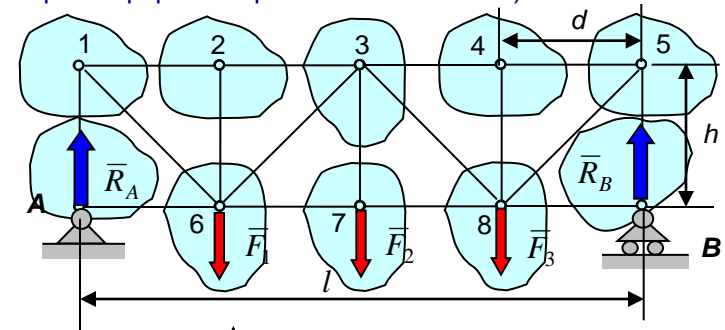
# Лекция 4

- Плоские фермы** – Геометрически неизменяемые стержневые конструкции, стержни которых лежат в одной плоскости.
- Узлы фермы** – точки, в которых сходятся оси стержней (*опорные узлы* – узлы, которыми ферма опирается на основание).
- Верхний и нижний пояса** – стержни, образующие верхний и нижний контуры.
- Стойки** – вертикальные стержни.
- Раскосы** – наклонные стержни.
- Пролет фермы** – расстояние между опорными узлами ( $l$ ).
- Длина панели** – расстояние между стойками ( $d$ ).

**Методы расчета.** Для расчета усилий, возникающих в стержнях ферм, используются метод вырезания узлов и метод сквозных сечений (метод Риттера).

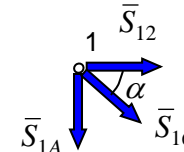
**Основные допущения, принимаемые при расчете ферм:**

- Все узлы соединения стержней считаются идеальными шарнирами, не препятствующими взаимному повороту стержней. Узлы в металлических фермах, в которых стержни соединяются при помощи фасонных листов и заклепок, также рассматриваются как шарнирные, поскольку при нагрузке они допускают малые упругие деформации (взаимные повороты).
- Нагрузка приложена в узлах. Для узловой передачи нагрузки на практике используются специальные балочные конструкции.
- Геометрические размеры фермы не изменяются при нагружении (деформации малы).



$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & S_{A6} &= 0, \\ \sum Y_i &= 0; & S_{A1} + R_A &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{A6} &= 0, \\ S_{A1} &= -R_A \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & S_{12} + S_{16} \cos \alpha &= 0, \\ \sum Y_i &= 0; & S_{1A} - S_{16} \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{16} &= \frac{S_{1A}}{\sin \alpha} = \frac{S_{A1}}{\sin \alpha}, \\ S_{12} &= -S_{16} \cos \alpha = -\frac{S_{A1}}{\sin \alpha} \cos \alpha. \end{aligned}$$

- Метод вырезания узлов** – Последовательно вырезаются узлы фермы так, чтобы в двух уравнениях равновесия для каждого из узлов было не более двух неизвестных усилий. Как правило внешние опорные реакции должны быть предварительно определены.

**Порядок расчета:**

- Выбираем в качестве объекта равновесия ферму в целом и определяем опорные реакции:
- Нумеруем или обозначаем буквами необозначенные узлы. Реакции стержней (или усилия в них) будем обозначать далее двумя индексными цифрами или буквами – первая из них совпадает с номером (обозначением) вырезаемого узла, а вторая указывает к какому узлу присоединяется другим концом рассматриваемый стержень.
- Вырезаем узел A (в этом узле всего два неизвестных усилия) и заменяем действие разрезанных (отброшенных) узлов усилиями (реакциями)  $S_{A1}$  и  $S_{A6}$ .
- Составляем уравнения равновесия для узла A и вычисляем усилия  $S_{A1}$  и  $S_{A6}$ .
- Вырезаем узел 1 (в этом узле всего два неизвестных усилия) и заменяем действие разрезанных (отброшенных) узлов усилиями (реакциями)  $S_{1A}$ ,  $S_{12}$  и  $S_{16}$ .
- Составляем уравнения равновесия для узла 1 и вычисляем усилия  $S_{12}$  и  $S_{16}$  ( $S_{1A}$  и  $S_{A1}$  равны алгебраически, поскольку при направлении неизвестных усилий от узла аксиома действия и противодействия выполняется автоматически).

Далее процесс вырезания узлов и определения усилий повторяется в определенном порядке, например: 2, 6, 7, 3, 4, 8, 5.

Вырезание последнего узла B может служить для контроля правильности расчета.

⏪ ⏩ Лекция 4 (продолжение – 4.2) ⏪ ⏩

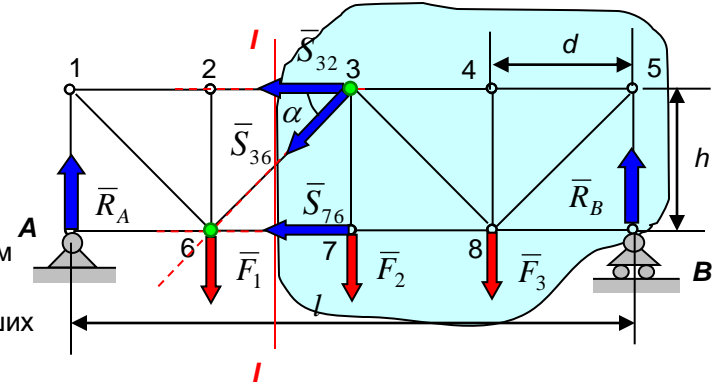
**Метод вырезания узлов** для вычисления усилия только в указанном стержне **требует рассмотрения всех узлов и решения для них уравнений равновесия** (по крайней мере узлов, находящихся между одним из опорных узлов и узлом, к которому подходит указанный стержень). Кроме того, последовательное вычисление усилий и подстановка результатов в дальнейший расчет при большом числе узлов чревато накоплением ошибок, не говоря уже о том, допущенная грубая ошибка в одном из узлов делает дальнейшие вычисления неверными.

■ **Метод сквозных сечений (метод Риттера)** в большинстве случаев не требует для вычисления усилия только в указанном стержне составления каких-либо других вспомогательных уравнений равновесия кроме того уравнения, в котором непосредственно участвует искомое усилие.

Метод основывается на составлении **одного уравнения равновесия** с использованием II и III форм уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

### Порядок расчета:

1. Выбираем в качестве объекта равновесия ферму в целом и **определяем опорные реакции**:
2. Проводим сквозное сечение, разделяющее ферму на две отдельные части так, чтобы **в сечение попадало не более трех стержней**, в одном из которых требуется найти усилие, например, сечение I-I для определения  $S_{23}$ .
3. Выбирая в качестве объекта равновесия одну часть, например, правую, отбрасываем другую (левую) часть.
4. Действие отброшенной части на оставшуюся заменяем реакциями стержней, попавших в разрез –  $S_{32}$ ,  $S_{36}$  и  $S_{76}$ .
5. Для искомого усилия  $S_{32}$  **находим положение точки Риттера**, как точки пересечения линий действия двух других усилий  $S_{36}$  и  $S_{76}$ , не подлежащих определению в данный момент. Точка Риттера для усилия  $S_{32}$  совпадает с узлом 6.
6. Составляем **моментное уравнение равновесия** для оставленной (правой) части относительно найденной точки Риттера (узла 6) и определяем искомое усилие.
7. Для определения усилия  $S_{76}$  **находим положение точки Риттера**, как точки пересечения линий действия двух других усилий  $S_{36}$  и  $S_{32}$ , не подлежащих определению в данный момент. Точка Риттера для усилия  $S_{76}$  совпадает с узлом 3.
8. Составляем **моментное уравнение равновесия** для оставленной (правой) части относительно найденной точки Риттера (узла 3) и определяем искомое усилие.
7. При определении усилия  $S_{36}$  **точка Риттера**, как точка пересечения линий действия двух других усилий  $S_{76}$  и  $S_{32}$ , не подлежащих определению в данный момент, **уходит в бесконечность**. В этом случае моментное уравнение равновесия вырождается в уравнение равновесия в проекциях на ось, перпендикулярную линиям, уходящим в бесконечность.



$$\sum M_{i6}^{\text{прав}} = 0; \quad S_{32}h + R_B 3d - F_3 2d - F_2 d = 0$$

$$S_{32} = \frac{-R_B 3d + F_3 2d + F_2 d}{h}$$

$$\sum M_{i3}^{\text{прав}} = 0; \quad -S_{76}h + R_B 2d - F_3 d = 0$$

$$S_{76} = \frac{R_B 2d - F_3 d}{h}$$

$$\boxed{\sum Y_i^{\text{npab}} = 0; \quad -S_{36} \sin \alpha + R_B - F_2 - F_3 = 0}$$

$$S_{36} = \frac{R_B - F_2 - F_3}{\sin \alpha}$$

Для определения других усилий необходимо провести другое сечение (п.2) и повторить описанные действия (пп. 3,4,....)



## Лекция 4 (продолжение – 4.3 – дополнительный материал)



■ **Понятия о линиях влияния опорных реакций и усилий.** Железнодорожные мосты, сооружаемые с использованием таких элементов, как фермы и балочные конструкции, при эксплуатации подвергаются подвижной многоосной нагрузке. При движении поезда усилия в элементах изменяются по некоторому закону и требуется определить наиболее опасные расположения такой нагрузки на сооружении. Исходным аппаратом решения этой задачи являются линии влияния усилий. Линии влияния широко используются в строительной механике.

**Линия влияния усилия** – график изменения усилия в зависимости от положения **единичной подвижной нагрузки**.

Выражения для усилий в стержнях фермы от постоянной нагрузки содержат величину опорной реакции, например:

$$S_{36} = \frac{R_B - F_2 - F_3}{\sin \alpha}$$

В случае рассмотрения единичной подвижной нагрузки ( $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ ,  $P = 1$ ) соответствующие выражения будут различными в зависимости от расположения единичной нагрузки:

груз находится слева от сечения I-I:

$$S_{36} = \frac{R_{B3}}{\sin \alpha}$$

груз находится справа от сечения I-I (на оставленной части фермы):

$$S_{36} = \frac{R_{B3} - 1}{\sin \alpha}$$

Таким образом, линия влияния усилия  $S_{36}$  может быть построена с помощью линии влияния опорной реакции  $R_B$ :

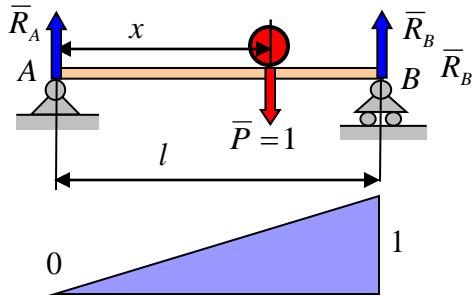
груз находится слева от сечения I-I:  
(левая ветвь)

$$\text{Л.в. } S_{36} = \frac{\text{Л.в. } R_{B3}}{\sin \alpha}$$

груз находится справа от сечения I-I:  
(правая ветвь)

$$\text{Л.в. } S_{36} = \frac{\text{Л.в. } R_{B3} - 1}{\sin \alpha}$$

**Построение линии влияния опорной реакции** – Ферму можно в данном случае представить в виде обычной балки:



1. Отбрасываем связи и заменяем реакциями:
2. Составляем моментное уравнение равновесия и находим величину реакции в функции от координаты положения груза:
3. Подставляя значения  $x = 0$  и  $x = l$  строим график изменения значения опорной реакции (линию влияния):

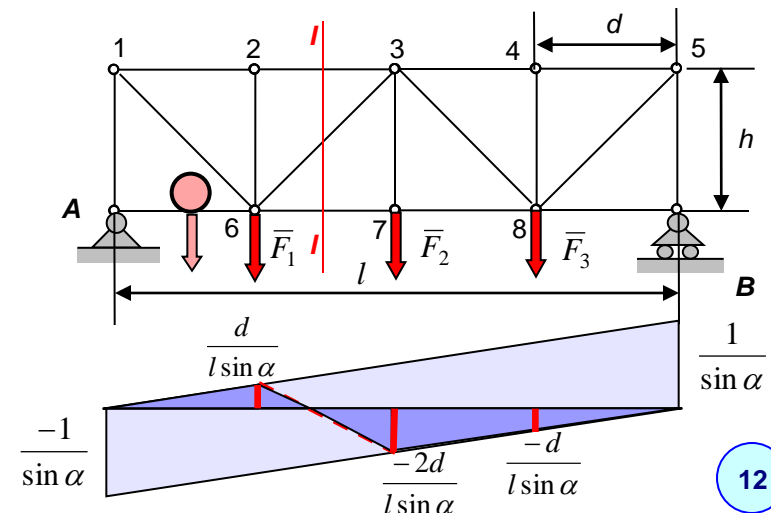
$$\sum M_{iA} = 0; \quad R_B l - 1x = 0$$

$$R_B = \frac{x}{l}$$

**Построение линии влияния усилия в стержне  $S_{36}$ :**

Построенная линия влияния позволяет легко найти величину усилия от любой статической (постоянной) вертикальной нагрузки как сумму произведений величин сил на значения ординат линии влияния:

$$S_{36} = \sum F_i y_i = F_1 \frac{d}{l \sin \alpha} + F_2 \left( \frac{-2d}{l \sin \alpha} \right) + F_3 \left( \frac{-d}{l \sin \alpha} \right)$$





# Лекция 4 (продолжение – 4.4)

■ **Равновесие сочлененных тел.** Железнодорожные и строительные конструкции могут состоять из сочлененных между собой тел (балок, ферм). Количество наложенных связей может превышать число независимых уравнений равновесия, которые можно составить для рассматриваемой конструкции. Такие задачи являются **статически неопределимыми**. Степень статической неопределимости для плоских систем равна:

$$n = 3Ж + 2Ш + С - 3Д$$

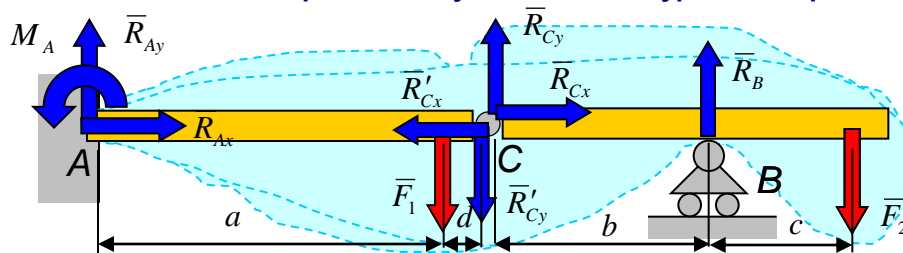
где  $Д$  – число жестких дисков,  $Ж$  – число жестких заделок,

$Ш$  – число неподвижных шарниров (опорных и соединяющих диски между собой),

$С$  – число шарнирных стержней (опорных или соединяющих диски между собой) или подвижных шарниров

В теоретической механике возможно решение только статически определимых задач, в которых количество связей равно числу независимых уравнений равновесия ( $n = 0$ ).

$$n = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0$$



1. Выберем в качестве объекта всю конструкцию.
2. Отбросим связи и заменим их действие реакциями.
3. Число неизвестных реакций – 4, а количество независимых уравнений – 3. Это означает, что необходимо **расчленить** конструкцию – отбросить шарнир С и заменить его действие на каждую из частей реакциями.

$$(CB): \sum X_i = 0; R_{Cx} = 0;$$

$$\sum M_{Ci} = 0; R_B b - F_2(b+c) = 0;$$

$$\sum M_{Bi} = 0; -R_{Cy}b - F_2b = 0.$$

$$\begin{aligned} \bar{R}'_{Cx} &= -\bar{R}_{Cx}, \text{ но } R'_{Cx} = R_{Cx}; \\ \bar{R}'_{Cy} &= -\bar{R}_{Cy}, \text{ но } R'_{Cy} = R_{Cy}. \end{aligned}$$

$$(AC): \sum X_i = 0; R_{Ax} - R'_{Cx} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; R_{Ay} - R'_{Cy} - F_1 = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; M_A - R'_{Cy}(a+d) - F_1a = 0.$$

4. Число неизвестных реакций – 8, а количество независимых уравнений равновесия для обеих частей –  $3 \cdot 2 = 6$ .

С использованием аксиомы действия и противодействия для каждой пары реакций шарнира С общее число неизвестных реакций уменьшается до 6 и равно общему числу уравнений равновесия:

5. Решение полученной системы уравнений не представляет особых затруднений в указанном порядке: от **вспомогательной** балки  $CB$  (не может оставаться в равновесии без балки  $AC$ ) к **основной** балке  $AC$  (может находиться в равновесии без балки  $CB$ ).

■ **Равновесие рычага.** Рычаг – твердое тело, имеющее одну неподвижную точку.

Рычаг имеет одну степень кинематической подвижности ( $w = -n = 3Д - 3Ж - 2Ш - С = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 = 1$ ) и в равновесии может быть лишь при определенном соотношении активных сил, действующих на рычаг.

■ **Уравнения равновесия рычага.** Применяя общий подход составления уравнений равновесия к рычагу получаем:

$$\sum X_i = 0; R_{Ax} = 0;$$

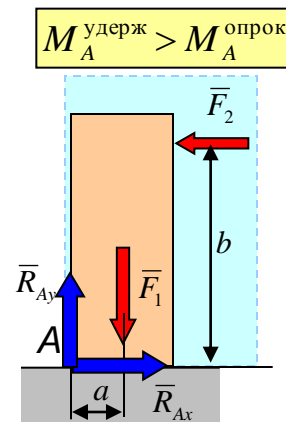
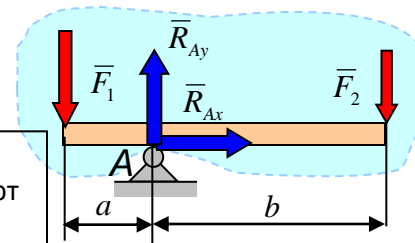
$$\sum Y_i = 0; R_{Ay} - F_1 - F_2 = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; F_1a - F_2b = 0.$$

Во многих случаях значением опорных реакций не интересуются и искомое соотношение сил определяют из последнего моментного уравнения, которое и принимается за **уравнение равновесия рычага**.

Уравнение равновесия рычага используется при **расчете подпорной стенки или груза на опрокидывание**:

**Условие устойчивости на опрокидывание:** Удерживающий момент относительно неподвижной точки (от  $F_1$ ) должен быть больше опрокидывающего момента (от  $F_2$ ) относительно этой же точки.







# Лекция 4 (продолжение – 4.5 – дополнительный материал)



■ **Кинематический способ определения реакций и усилий.** Способ основывается на принципе возможных перемещений:

■ **Принцип возможных перемещений** – Для равновесия материальной системы, подчиненной стационарным, двухсторонним и идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого положения равновесия равнялась нулю:

$$\delta A^F = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

**Стационарные связи** – не зависящие от времени.

**Двухсторонние связи** – препятствующие перемещениям в обоих противоположных направлениях (жесткая заделка, шарнир, стержень являются двухсторонними связями, нить, гладкая поверхность – односторонние связи). Если связь односторонняя, то достаточно просто не рассматривать в качестве возможных перемещений перемещения, соответствующие тому направлению, в котором связь не может удерживать объект, например, в направлении отрыва объекта от гладкой поверхности.

**Идеальные связи** – работа которых на любом возможном перемещении равна нулю.

Если связь не идеальная, то реакция такой связи должна быть причислена к действующим (активным) силам, например, сила трения шероховатой поверхности добавляется к активным силам.

■ **Возможные перемещения** – бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями. Возможные перемещения не зависят от приложенных к системе сил.

■ **Вычисление возможных перемещений:** – в силу малости возможных перемещений при повороте твердого тела любая его точка может рассматриваться движущейся не по дуге, а по перпендикуляру к радиусу вращения в сторону угла поворота:

$$\delta x_A = l - l \cos \delta \alpha$$

$$\delta y_A = l \sin \delta \alpha$$

■ **Возможная работа силы** – элементарная работа силы.

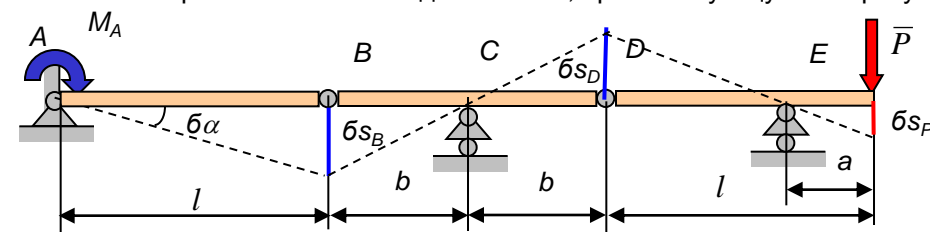
■ **Примеры использования принципа возможных перемещений.**

**Пример 1.** Определить реакцию балки в правой опоре:

Без правой опоры балка падает. Зададим ей возможное перемещение, соответствующее повороту на угол  $\delta \alpha$ . Вычислим возможные перемещения точек  $A$  и  $B$ . Запишем сумму работ:

**Пример 2.** Определить опорный момент многопролетной балки.

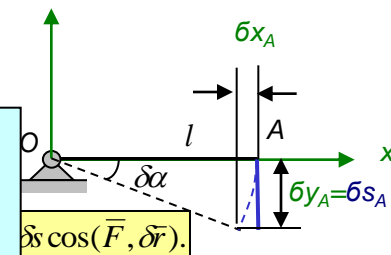
Отбросим в жесткой заделке связь, препятствующую повороту балки, и заменим ее парой сил  $M_A$ :



Заметим, что

1. для нахождения опорного момента  $M_A$  из уравнений статики потребовалось бы решить как минимум три уравнения равновесия;
2. эпюра возможных перемещений пропорциональна линии влияния усилия;
3. если задать возможное перемещение для искомой реакции равным 1, например,  $\delta x_A = 1$ , то эпюра перемещений будет полностью тождественна линии влияния поскольку

$$\delta A = M_A \cdot 1 + 1 \cdot \delta s_F(z) = 0; \quad M_A = -\delta s_F(z).$$



действительных перемещений. заменим ее реакцией: реакцию  $R_B$  причисляем к активным силам.

$$R_B = \frac{Pa \delta \alpha}{l \delta \alpha} = \frac{Pa}{l}.$$

Запишем сумму работ:

$$\delta A = M_A \delta \alpha + F \delta s_F = 0.$$

$$M_A \delta \alpha + F \frac{a}{l-a} l \delta \alpha = 0.$$

$$M_A = -F \frac{a}{l-a} l.$$

## Лекция 5

■ **Трение скольжения.** При действии сдвигающей силы, приложенной к телу, покоящемуся на шероховатой поверхности, возникает сила, противодействующая возможному смещению тела (**сила трения сцепления**) из равновесного положения или его действительному перемещению (**сила трения скольжения**) при его движении.

**Основные законы трения (Амонтона - Кулона):**

1. Сила трения лежит в касательной плоскости к соприкасающимся поверхностям и направлена в сторону противоположную направлению, в котором приложенные к телу силы стремятся его сдвинуть или сдвигают в действительности (реактивный характер).

2. Сила трения изменяется от нуля до своего максимального значения  $0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}$ . Максимальная сила трения пропорциональна коэффициенту трения и силе нормального давления  $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fN$ .

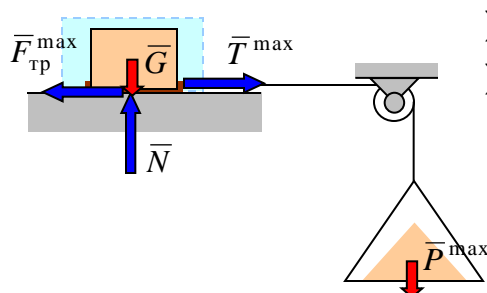
3. Коэффициент трения есть величина постоянная для данного вида и состояния соприкасающихся поверхностей ( $f = \text{const}$ ).

4. Сила трения в широких пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

■ **Способы определения коэффициента трения.**

1. Сдвигающая сила изменяется от нуля до своего максимального значения –  $0 \leq T \leq T^{\text{max}}$ , ( $0 \leq P \leq P^{\text{max}}$ ).

2. Сила нормального давления изменяется от некоторого начального значения до минимального значения –  $N_0 \geq N \geq N^{\text{min}}$  ( $G_0 \geq G \geq G^{\text{min}}$ ).



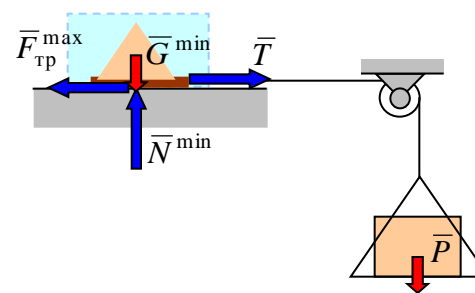
$$\sum X_i = 0; \quad T^{\text{max}} - F_{\text{тр}}^{\text{max}} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N - G = 0.$$

$$T^{\text{max}} = fN;$$

$$N = G;$$

$$f = \frac{T^{\text{max}}}{N} = \frac{P^{\text{max}}}{G}.$$



$$\sum X_i = 0; \quad T - F_{\text{тр}}^{\text{max}} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N^{\text{min}} - G^{\text{min}} = 0.$$

$$T = fN^{\text{min}};$$

$$N^{\text{min}} = G^{\text{min}};$$

$$f = \frac{T}{N^{\text{min}}} = \frac{P}{G^{\text{min}}}.$$

3. Сдвигающая сила и сила нормального давления изменяются при изменении угла наклона плоскости скольжения от нуля до максимального

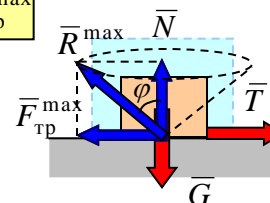
Активные силы ( $G$ ,  $T$  и др.) можно заменить равнодействующей силой  $P$ , имеющей угол отклонения от вертикали  $\alpha$ . Можно показать, что **равновесие возможно лишь в том случае, когда эта сила остается внутри пространства конуса трения**:

Условие равновесия по оси  $x$ :  $P \sin \alpha \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}$ .  
Из уравнения равновесия по оси  $y$ :  $N = P \cos \alpha$ .  
Максимальная сила трения  $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fN = \text{tg} \varphi N = \text{tg} \varphi P \cos \alpha$ .  
Тогда  $P \sin \alpha \leq \text{tg} \varphi P \cos \alpha$ , откуда  $\text{tg} \alpha \leq \text{tg} \varphi$  и  $\alpha \leq \varphi$ .

■ **Угол трения.**

С учетом силы трения, возникающей при контакте с шероховатой поверхностью полная реакция такой поверхности может рассматриваться как геометрическая сумма нормальной реакции абсолютно гладкой поверхности и силы трения:

$$\bar{R}^{\text{max}} = \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}}^{\text{max}}$$



Угол отклонения полной реакции шероховатой поверхности – **угол трения**, равный:

$$\varphi = \arctg \left( \frac{F_{\text{тр}}^{\text{max}}}{N} \right) = \arctg (f)$$

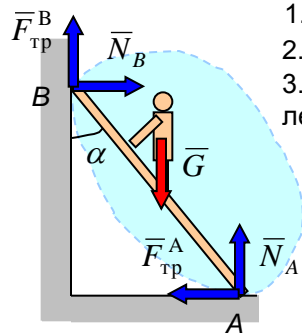
При изменении направления сдвигающей силы  $T$  на опорной поверхности ее поворотом относительно нормали к плоскости полная максимальная реакция шероховатой поверхности описывает **конус трения**.

## Лекция 5 (продолжение – 5.2)

■ **Учет сил трения при решении задач на равновесие.** При наличии сил трения:

1. К действующим на объект активным силам и реакциям абсолютно гладких поверхностей **добавляются соответствующие силы трения**, направленные по общей касательной к контактным поверхностям в сторону, противоположную возможному смещению точки касания объекта относительно опорной шероховатой плоскости.
2. К уравнениям равновесия, составленным для объекта, **добавляются выражения для максимальных сил трения** в количестве, равном числу сил трения.

■ **Пример решения задачи на равновесие с учетом трения.** Человек весом  $G$  собирается установить легкую лестницу под углом  $\alpha$  к вертикали (стене) и взобраться на половину длины лестницы для выполнения работы. Коэффициенты трения в точках контакта лестницы с полом ( $A$ ) и со стеной ( $B$ ) равны  $f_A$  и  $f_B$  соответственно. Определить предельное значение угла наклона, при котором лестница с человеком может сохранять равновесие. Весом лестницы пренебречь.



1. Выбираем на объект (человек и лестница), отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями гладкой поверхности.
2. Добавляем активные силы (силу тяжести  $G$ ).
3. Добавляем силы трения, направленные в сторону, противоположную возможному перемещению контактных точек  $A$  и  $B$  лестницы под действием приложенной активной силы.

4. Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & N_B - F_{\text{тр}}^A &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & F_{\text{тр}}^B - G + N_A &= 0; \\ \sum M_{iA} &= 0; & G \frac{AB}{2} \sin \alpha - F_{\text{тр}}^B AB \sin \alpha - N_B AB \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

5. Добавляем выражения для сил трения:

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}}^A &= f_A N_A; \\ F_{\text{тр}}^B &= f_B N_B; \end{aligned}$$

6. Подстановка последних выражений в уравнения равновесия с простыми преобразованиями третьего уравнения дает:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & N_B - f_A N_A &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & f_B N_B - G + N_A &= 0; \\ \sum M_{iA} &= 0; & G \frac{1}{2} \tan \alpha - f_B N_B \tan \alpha - N_B &= 0. \end{aligned}$$

7. Решение первых двух уравнений дает выражения для нормальных реакций:

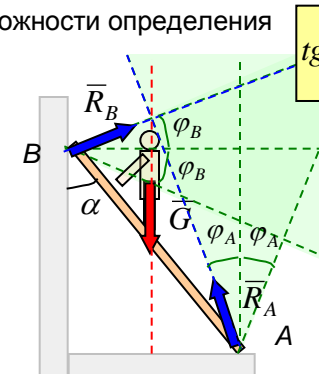
$$\begin{aligned} N_A &= \frac{G}{1 + f_A f_B}; \\ N_B &= \frac{f_A G}{1 + f_A f_B}. \end{aligned}$$

8. Подстановка выражений для нормальных реакций в третье уравнение равновесия приводит к возможности определения предельного угла наклона  $\alpha$ :

$$\tan \alpha = \frac{2f_A}{1 - f_A f_B}$$

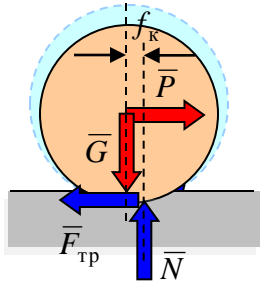
■ **Определение области равновесия.** Задача решена для конкретного положения человека, угол наклона соответствует предельному равновесию (использованы максимальные значения сил трения). С помощью понятия конуса трения, образуемого полной реакцией шероховатой поверхности и теоремы о трех силах можно определить **область возможных равновесных положений** человека на лестнице.

Для этого достаточно по заданным коэффициентам трения определить углы трения, определяющие предельные положения полной реакции и построить конусы трения. Общая область конусов дает область равновесных положений человека. Хорошо видно, что для более высокого положения человека надо уменьшать угол наклона.



## ⏪ Лекция 5 (продолжение 5.3) ▶

■ **Соппротивление при качении.** При действии сдвигающей силы, приложенной к катку, покоящемуся на шероховатой поверхности, возникает сила, противодействующая возможному смещению тела (**сила трения сцепления**) из равновесного положения или его действительному перемещению (**сила трения скольжения**) при его движении и пара сил, момент которой препятствует повороту катка (**момент сопротивления качению**). Возникновение пары сил, препятствующей качению, связана с деформацией опорной плоскости, в результате которой равнодействующая нормальных реактивных сил по площадке контакта смещена от линии действия силы тяжести в сторону возможного или действительного движения.



### Основные законы трения качения:

1. Момент сопротивления качению всегда направлен в сторону противоположную, тому направлению, в котором приложенные к телу силы стремятся его повернуть, или действительному повороту под действием этих сил (реактивный характер).

2. Момент сопротивления качению изменяется от нуля до своего максимального значения

$$0 \leq M_k \leq M_k^{\max}$$

Максимальный момент сопротивления качению пропорционален коэффициенту трения качения и силе нормального давления:

$$M_k^{\max} = f_k N$$

3. Коэффициент трения качения есть величина постоянная для данного вида и состояния соприкасающихся поверхностей ( $f_k = \text{const}$ ).

4. Момент сопротивления качению в широких пределах не зависит от радиуса катка.

Если коэффициент трения скольжения является безразмерной величиной, то коэффициент трения качения измеряется единицами длины и равен по величине указанному смещению равнодействующей нормального давления. В силу малости деформаций коэффициент трения качения имеет очень малую величину и составляет, например, для стального бандажа по стальному рельсу 0.0005 м.



# Лекция 6

- **Пространственная произвольная система сил** – силы не лежат в одной плоскости и их линии действия не пересекаются в одной точке.

Для рассмотрения такой системы сил необходимо ввести новые понятия:

1. Момент силы относительно центра в пространстве.
2. Момент силы относительно оси.
3. Момент пары сил в пространстве.

- **Момент силы относительно центра в пространстве** – векторная величина, равная

векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из центра к точке приложения силы, и вектора силы.

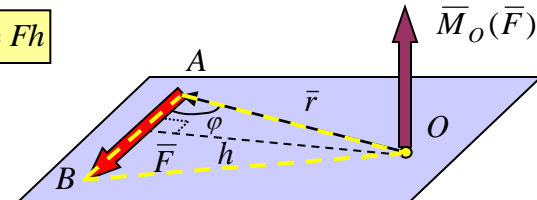
$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

По определению векторного произведения вектор момента силы направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через центр и силу, в ту сторону, откуда поворот радиуса-вектора к вектору силы на наименьший угол представляется происходящим по часовой стрелке.

Модуль вектора момента силы относительно центра равен:

$$M_O(\vec{F}) = rF \sin(\vec{r}, \vec{F}) = Fh$$

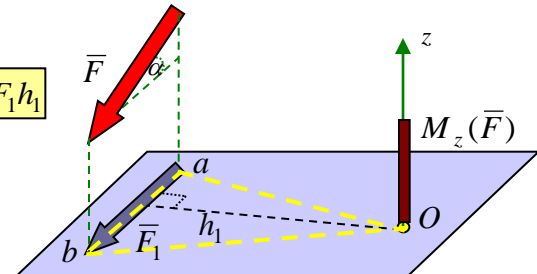
Модуль вектора момента силы относительно центра численно равен удвоенной площади треугольника  $\triangle OAB$ .



- **Момент силы относительно оси** – алгебраическая величина, равная произведению проекции вектора силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы представляется при взгляде навстречу оси происходящим против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_1 h_1$$

Момент силы относительно оси численно равен удвоенной площади треугольника  $\triangle Oab$ .



- **Связь момента силы относительно центра и относительно оси.**

Модуль вектора момента силы относительно центра, лежащего на оси z, равен удвоенной площади треугольника  $\triangle OAB$ :

$$M_O(\vec{F}) = Fh = 2S_{OAB}$$

Момент силы относительно оси z, равен удвоенной площади треугольника  $\triangle Oab$ :

$$M_z(\vec{F}) = F_1 h_1 = 2S_{Oab}$$

Треугольник  $\triangle Oab$  получен проекцией треугольника  $\triangle OAB$  на плоскость, перпендикулярную оси z, и его площадь связана с площадью треугольника  $\triangle OAB$  соотношением:

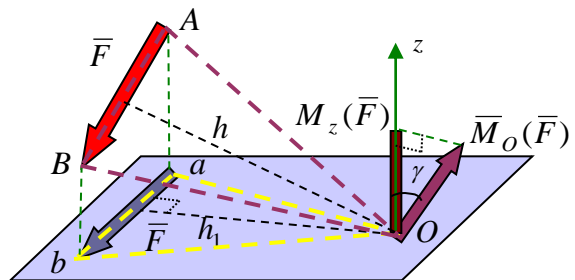
$$S_{Oab} = S_{OAB} \cos \gamma, \text{ где } \gamma - \text{двугранный угол между плоскостями треугольников.}$$

Поскольку вектор момента силы относительно точки перпендикулярен плоскости треугольника  $\triangle OAB$ , то угол между вектором и осью равен углу  $\gamma$ .

Таким образом, **момент силы относительно оси есть проекция**

**вектора момента силы относительно центра на эту ось:**

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cos \gamma$$

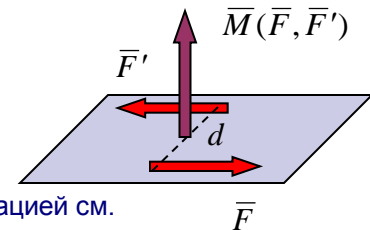


## Лекция 6 (продолжение – 6.2)

- **Момент пары сил в пространстве** – вектор, перпендикулярный плоскости действия пары, направленный в ту сторону, откуда вращение плоскости под действием пары представляется происходящим против часовой стрелки.

Модуль вектора момента пары равен произведению одной из сил пары на плечо пары:

$$M = Fd = F'd$$



- **Теоремы о парах:** (Теоремы приводятся без доказательств. Подробные доказательства с графической анимацией см. демонстрационную программу автора по теории пар “Теория пар” на сайте МИИТа. [Посмотреть...](#))
- **О переносе пары сил в плоскость, параллельную плоскости ее действия** – Пару сил можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Об эквивалентности пар сил** – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты геометрически (векторно) равны. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **О сложении пар сил на плоскости** – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической (векторной) сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Условие равновесия системы пар сил** -

$$\bar{M} = \sum \bar{M}_i = 0$$

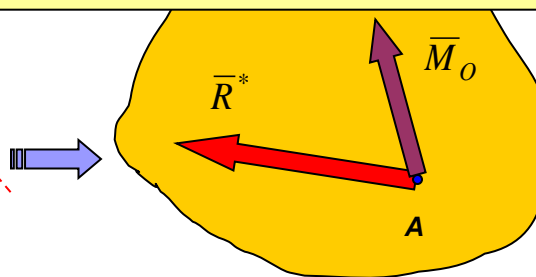
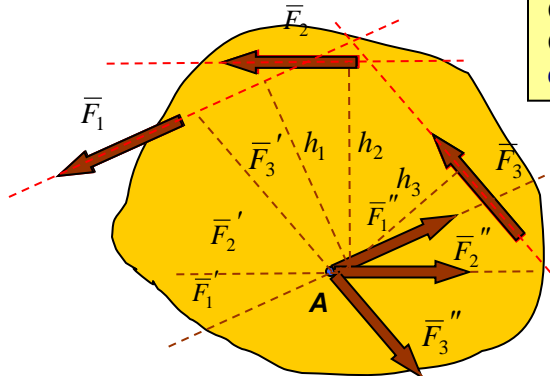
Далее будем по-прежнему придерживаться общего плана исследования системы сил, последовательно решая три вопроса :

1. Как упростить систему?
2. Каков простейший вид системы?
3. Каковы условия равновесия системы?

- **Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру** – выбираем произвольную точку на плоскости и каждую из сил переносим по методу Пуансо в эту точку. Вместо исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар.

В отличие от ранее рассмотренной плоской произвольной системы сил теперь при использовании метода Пуансо присоединенные пары сил характеризуются векторами.

Сходящаяся система сил приводится к одной силе.  
Система пар приводится к одной паре (теорема о сумме моментов исходных сил относительно центра приведения).



**В общем случае плоская произвольная система сил приводится к одной силе, называемой главным вектором и к паре с моментом, равным главному моменту всех сил системы относительно центра приведения:**

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i$$

- главный вектор,

$$\bar{M} = \bar{M}_A = \sum \bar{M}_{iA}$$

- главный момент.



# Лекция 7

- Аналитическое определение главного вектора системы** – вычисляется так же, как и ранее равнодействующая, через проекции на координатные оси и единичные векторы (орты):

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots = X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k} + X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k} + \dots$$

$$\bar{R}^* = (X_1 + X_2 + \dots) \bar{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots) \bar{j} + (Z_1 + Z_2 + \dots) \bar{k} = R_x^* \bar{i} + R_y^* \bar{j} + R_z^* \bar{k}$$

Отсюда  
проекции  
главного вектора :

$$\begin{aligned} R_x^* &= \sum X_i; \\ R_y^* &= \sum Y_i; \\ R_z^* &= \sum Z_i; \end{aligned}$$

Направляющие  
косинусы  
главного вектора

$$\begin{aligned} \cos(\bar{R}^*, x) &= \frac{R_x^*}{R^*}; \\ \cos(\bar{R}^*, y) &= \frac{R_y^*}{R^*}. \end{aligned}$$

Модуль  
главного вектора :

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2} + R_z^{*2}}$$

- Аналитическое определение главного момента системы** – вычисляется аналогично через проекции на координатные оси и единичные векторы (орты):

$$\bar{M}_A = \sum \bar{M}_i = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots = M_{1x} \bar{i} + M_{1y} \bar{j} + M_{1z} \bar{k} + M_{2x} \bar{i} + M_{2y} \bar{j} + M_{2z} \bar{k} + \dots$$

$$\bar{M}_A = (M_{1x} + M_{2x} + \dots) \bar{i} + (M_{1y} + M_{2y} + \dots) \bar{j} + (M_{1z} + M_{2z} + \dots) \bar{k} = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}$$

Отсюда  
проекции  
главного момента :

$$\begin{aligned} M_x &= \sum M_{ix}; \\ M_y &= \sum M_{iy}; \\ M_z &= \sum M_{iz}; \end{aligned}$$

**Условие приведения системы к равнодействующей:**

$$\bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = R^* M_A \cos(\bar{R}^*, \bar{M}_A) = 0$$

$$\bar{M}_A = 0; \Rightarrow \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = 0$$

$$\bar{R}^* \perp \bar{M}_A; \Rightarrow \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = 0 \quad (\cos(\bar{R}^*, \bar{M}_A) = 0)$$

В аналитической (координатной) форме:

$$\bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = R_x^* M_x + R_y^* M_y + R_z^* M_z = 0$$

$$M_A = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

- Условием равновесия пространственной системы сил** является одновременное обращение главного вектора и главного момента в нуль:

- Уравнения равновесия** получают с использованием выражений для проекций:

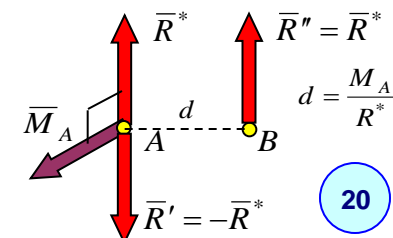
$$\sum \bar{F}_i = 0$$

$$\bar{M} = \bar{M}_A = \sum \bar{M}_{iA} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & \sum M_{xi} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & \sum M_{yi} &= 0; \\ \sum Z_i &= 0; & \sum M_{zi} &= 0. \end{aligned}$$

- Возможные случаи приведения пространственной произвольной системы сил:**

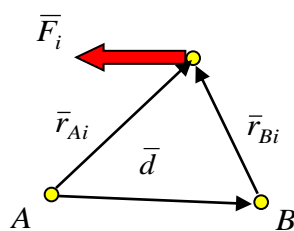
	$\bar{R}^*$	$\bar{M}_A$	Дополнительное условие	Простейший вид системы
1	$\bar{R}^* = 0$	$\bar{M}_A = 0$		Условия равновесия
2	$\bar{R}^* \neq 0$	$\bar{M}_A = 0$		Равнодействующая
3	$\bar{R}^* = 0$	$\bar{M}_A \neq 0$		Пара сил
4	$\bar{R}^* \neq 0$	$\bar{M}_A \neq 0$	$\bar{R}^* \perp \bar{M}_A$	Равнодействующая
			$\bar{R}^* \nparallel \bar{M}_A$	Силовой винт (сила и пара)





## Лекция 7 (продолжение – 7.2)

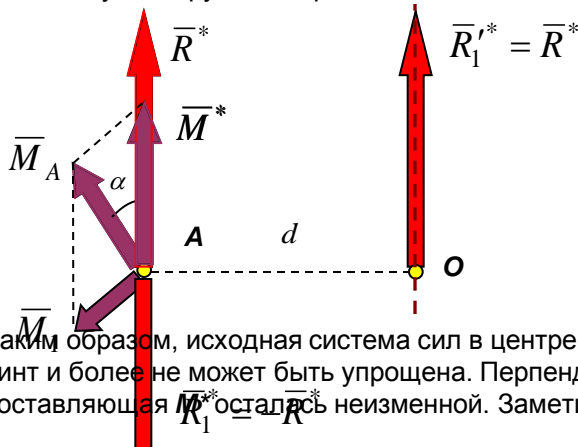
■ **Зависимость главного момента системы от выбора центра приведения** – рассмотрим как изменяется момент произвольной силы  $\vec{F}_i$  при переходе от одного центра приведения к другому и запишем выражения для моментов силы относительно каждого из центров:



$$\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i \quad \vec{M}_B(\vec{F}_i) = \vec{r}_{Bi} \times \vec{F}_i$$

1. Свяжем между собой точки приведения  $A$  и  $B$  радиус-вектором  $\vec{d}$ :  $\vec{d} = \vec{r}_{Ai} - \vec{r}_{Bi}$  или  $\vec{r}_{Bi} = \vec{r}_{Ai} - \vec{d}$
2. Подставим радиус-вектор  $\vec{r}_{Bi}$  в выражение для момента силы  $M_B(F_i)$ :  $\vec{M}_B(\vec{F}_i) = (\vec{r}_{Ai} - \vec{d}) \times \vec{F}_i = \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i - \vec{d} \times \vec{F}_i$
3. Просуммируем моменты всех сил  $\vec{M}_B(\vec{F}_i)$ :  $\sum \vec{M}_B(\vec{F}_i) = \sum \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i - \sum \vec{d} \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_A(\vec{F}_i) - \vec{d} \times \sum \vec{F}_i$
4. Получили зависимость главного момента сил от выбора центра приведения:  $\vec{M}_B = \vec{M}_A - \vec{d} \times \vec{R}^*$

Рассмотрим более подробно приведение системы сил к простейшему виду с использованием этой зависимости. Пусть система привелась в точке  $A$  к главному вектору  $\vec{R}^*$  и паре с главным моментом  $\vec{M}_A$ , имеющих между собой произвольный угол  $\alpha$ .



1. Разложим главный момент пары  $\vec{M}_A$  на два момента  $\vec{M}^*$  и  $\vec{M}_1$ , по двум направлениям: направлению главного вектора и перпендикулярно ему.
2. Представим пару сил с моментом  $\vec{M}_1$ , в виде сил, равных по модулю главному вектору. Плечо этой пары будет равно:  $d = \frac{M_1}{R^*}$
3. Систему сил в точке  $A$  удалим (аксиома присоединения).
4. Оставшуюся пару сил с моментом  $\vec{M}^*$  перенесем в точку приложения оставшейся силы  $\vec{R}^*$  (теорема о переносе пары в пространстве).

Таким образом, исходная система сил в центре приведения  $A$  в новом центре приведения  $O$  превратилась в силовой (статический) винт и более не может быть упрощена. Перпендикулярная главному вектору составляющая главного момента  $\vec{M}_1$  исчезла, а другая составляющая  $\vec{M}^*$  осталась неизменной. Заметим, исходная величина главного момента равна:

$$M_A = \sqrt{M^{*2} + M_1^2} = \sqrt{M^{*2} + (R^* d)^2}$$

При **главном минимальном моменте** умножая на модуль главного вектора левую и правую части выражения главного минимального момента в проекции на центральную ось получаем:

$$R^* M^* = R^* M_A \cos(\vec{M}_A, \vec{R}^*) = \vec{R}^* \cdot \vec{M}_A,$$

откуда **главный минимальный момент** выражается через **скалярное произведение**:

$$M^* = \frac{\vec{R}^* \cdot \vec{M}_A}{R^*}$$

**Главный минимальный момент** может быть вычислен как **проекция главного момента** в любой точке приведения на центральную ось:

$$M^* = M_A \cos \alpha = M_A \cos(\vec{M}_A, \vec{R}^*)$$

$$\cos \alpha = \frac{M^*}{M_A} = \frac{M^*}{\sqrt{M^{*2} + (R^* d)^2}}$$

# Лекция 7 (продолжение – 7.3)

**Инварианты системы сил** – величины, не зависящие от выбора центра приведения:

**Первый (векторный) инвариант** – главный вектор системы сил  $\bar{R}^*$ :

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i$$

Главный момент не является инвариантом, поскольку он зависит от выбора центра приведения. Однако существует величина, связанная с главным вектором, не зависящая от выбора центра приведения:

1. Запишем зависимость для главного момента системы от выбора точки приведения:

$$\bar{M}_B = \bar{M}_A - \bar{d} \times \bar{R}^*$$

2. Умножим левую и правую части этого выражения скалярно на главный вектор и раскроем скобки:

$$\bar{R}^* \cdot \bar{M}_B = \bar{R}^* \cdot (\bar{M}_A - \bar{d} \times \bar{R}^*) = \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A - \bar{R}^* \cdot (\bar{d} \times \bar{R}^*)$$

3. Второе слагаемое в правой части обращается в ноль, т.к. главный вектор  $\bar{R}^*$  перпендикулярен вектору векторного произведения в скобках. Отсюда получаем тождество:

$$\bar{R}^* \cdot \bar{M}_B = \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A$$

Таким образом, **скалярное произведение главного вектора  $\bar{R}^*$  на вектор главного момента  $\bar{M}_A$**  есть **второй (скалярный) инвариант**:

$$\bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = \text{in var}$$

Отсюда, **главный минимальный момент  $M^*$**  также является инвариантной величиной:

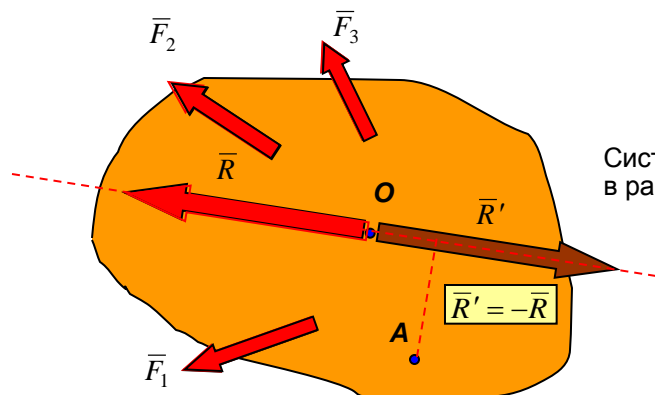
$$M^* = \frac{\bar{R}^* \cdot \bar{M}_A}{R^*} = \frac{\text{in var}}{\text{in var}} = \text{in var}$$

**Теоремы Вариньона о моментах равнодействующей для пространственной системы сил:**

Если система сил имеет равнодействующую, то

момент равнодействующей относительно любого центра равен **геометрической** сумме моментов сил системы относительно того же центра.

момент равнодействующей относительно любой оси равен **алгебраической** сумме моментов сил системы относительно той же оси.



Доказательство: Пусть система сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3 \dots$  приводится к равнодействующей, приложенной в точке  $O$ . Такая система не находится в равновесии ( $\bar{R} \neq 0$ ).

Уравновесим эту систему силой  $\bar{R}'$ , равной равнодействующей  $\bar{R}$ , направленной по линии ее действия в противоположную сторону (аксиома о двух силах).

Система исходных сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3 \dots$  и уравнивающей силы  $\bar{R}'$  находится в равновесии и должна удовлетворять условиям равновесия, например:

$$\sum \bar{M}_{iA} + \bar{M}_A(\bar{R}') = 0$$

Поскольку сила  $\bar{R}'$ , равна равнодействующей  $\bar{R}$  и направлена по линии ее действия в противоположную сторону, то  $\bar{M}_A(\bar{R}') = -\bar{M}_A(\bar{R})$ . Подстановка этого равенства в уравнение равновесия дает:

$$\sum \bar{M}_{iA} - \bar{M}_A(\bar{R}) = 0 \quad \text{или}$$

$$\bar{M}_A(\bar{R}) = \sum \bar{M}_{iA}$$

Спроектируем это векторное равенство на любую ось, например,  $x$ :

$$M_x(\bar{R}) = \sum M_{ix}$$

## Лекция 8

**Сложение параллельных сил** – Сложение двух параллельных сил подробно рассмотрено в демонстрационной программе автора по теории пар “Теория пар” на сайте МИИТа. [Посмотреть...](#) Основной результат – две параллельные и направленные в одну сторону силы приводятся к одной силе – равнодействующей, приложенной в точке, делящей прямую на расстояния, обратно пропорциональные величинам сил.

Последовательно складывая попарно параллельные силы приходим также к одной силе – равнодействующей  $\vec{R}$ :  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$

Поскольку силу можно переносить по линии ее действия, то точка приложения силы (равнодействующей) по существу не определена. Если все силы повернуть на один и тот же угол и вновь провести сложение сил, то получаем другое направление линии действия равнодействующей. Точка пересечения этих двух линий действия равнодействующих может рассматриваться, как точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол. Такая точка называется **центром параллельных сил**

**Центр параллельных сил** – точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол.

Для аналитического определения положения центра параллельных сил применим теорему Вариньона:

$$\vec{M}_A(\vec{R}) = \sum \vec{M}_{iA} \quad \text{или} \quad \vec{r}_C \times \vec{R} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Каждую из сил представим с помощью единичного вектора  $\vec{e}$ , параллельного линиям действия сил:

$$\vec{F}_i = F_i \vec{e} \quad \text{и} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_i = \sum F_i \vec{e}$$

Тогда предыдущее равенство примет вид:  $\vec{r}_C \times (\sum F_i \vec{e}) = \sum \vec{r}_i \times F_i \vec{e}$  или после перестановки

$$(\sum F_i \vec{r}_i) \times \vec{e}$$

С учетом принятых гипотез при определении положения центра тяжести можно использовать формулы для определения положения центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum \Delta G_i x_i}{\sum \Delta G_i}; \quad y_C = \frac{\sum \Delta G_i y_i}{\sum \Delta G_i}; \quad z_C = \frac{\sum \Delta G_i z_i}{\sum \Delta G_i} \quad \text{где } \Delta G \text{ – силы тяжести элементарных объемов.}$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i}$$

Из ра

Прое

для определения координат центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}$$

атические формулы

**Центр тяжести** – центр приложения равнодействующей сил тяготения (веса) материального тела.

При определении положения центра тяжести тела используются гипотезы:

1. Линии действия сил тяготения, приложенные к отдельным частицам тела, параллельны (рассматриваемые тела имеют размеры много меньше радиуса Земли и углом между линиями действия сил тяготения частиц тел можно пренебречь);
2. Ускорение свободного падения  $g = \text{const}$  (высота рассматриваемых тел много меньше радиуса Земли и изменением величины ускорения свободного падения по высоте тела можно пренебречь)
3. Рассматриваемые тела – однородные (нет включений материалов с другой плотностью) и сплошные (нет пустот).

## Лекция 8 (продолжение – 8.2)

**Определение положения центра тяжести однородных тел** – Выделим элементарный объем  $dV = dx dy dz$ . Сила тяжести такого объема равна  $dG = \gamma dV$ , где  $\gamma = \text{const}$  – объемный вес. Замена суммирования дискретных сил тяжести  $\Delta G$ , непрерывным распределением приводит к интегральным выражениям по объему тела для определения координат центров тяжести, например, координаты  $x_c$ :

$$x_c = \frac{\int x dG}{\int dG} = \frac{\iiint x \gamma dx dy dz}{\iiint \gamma dx dy dz} = \frac{\int x dV}{\int dV}$$

Для всех трех координат получаются подобные выражения:

$$x_c = \frac{\int x dV}{\int dV}$$

$$y_c = \frac{\int y dV}{\int dV}$$

$$z_c = \frac{\int z dV}{\int dV}$$

В частном случае плоского тела (постоянной толщины  $H = \text{const}$ ),  $dV = H dx dy = H dS$ :

$$x_c = \frac{\iint x H dx dy}{\iint H dx dy} = \frac{\int x dS}{\int dS}$$

$$y_c = \frac{\int y dS}{\int dS}$$

$$y_c = \frac{\int y dS}{\int dS}$$

Для линейного тела (постоянного поперечного сечения  $S = \text{const}$ , ось – плоская кривая),  $dV = S dL$ :

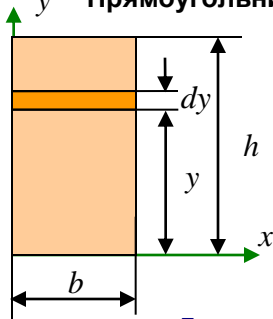
$$x_c = \frac{\int x S dL}{\int S dL} = \frac{\int x dL}{\int dL}$$

$$x_c = \frac{\int x dL}{\int dL}$$

$$y_c = \frac{\int y dL}{\int dL}$$

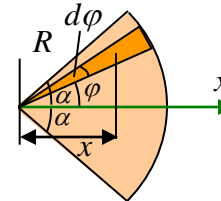
**Определение положения центра тяжести простейших плоских тел:**

**Прямоугольник:**  $dS = b dy$



$$y_c = \frac{\int y dS}{\int dS} = \frac{\int_0^h y b dy}{\int_0^h b dy} = \frac{b \int_0^h y dy}{b \int_0^h dy} = \frac{b \frac{y^2}{2} \Big|_0^h}{bh} = \frac{h}{2}$$

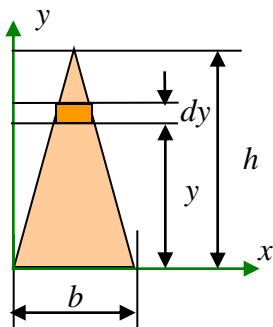
**Круговой сектор:**



$$dS = \frac{1}{2} R (R d\phi) = \frac{1}{2} R^2 d\phi$$

$$x_c = \frac{\int x dS}{\int dS} = \frac{2 \int_0^\alpha \frac{2}{3} R \cos \phi \frac{R^2}{2} d\phi}{2 \int_0^\alpha \frac{R^2}{2} d\phi} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \phi \Big|_0^\alpha}{R^2 \phi \Big|_0^\alpha} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

**Треугольник:**  $\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}$ ;  $b_y = \frac{h-y}{h} b$ ;  $dS = b_y dy = \frac{h-y}{h} b dy$

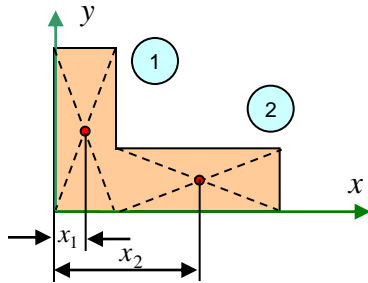


$$y_c = \frac{\int y dS}{\int dS} = \frac{\int_0^h y \frac{h-y}{h} b dy}{\int_0^h \frac{h-y}{h} b dy} = \frac{\frac{b}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy}{\frac{b}{h} \int_0^h (h - y) dy} = \frac{\frac{b}{h} \left( h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^h}{\frac{b}{h} \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{1}{2} bh} = \frac{h}{3}$$

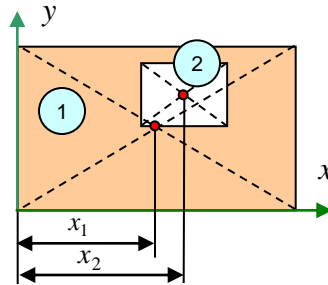
## Лекция 8 (продолжение – 8.3)

### Методы определения положения центра тяжести сложных фигур –

1. **Метод разбиения** – сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются:



$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}$$



2. **Метод отрицательных площадей** – так же, как и в методе разбиения, сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются, но при наличии отверстий или пустот удобно их представление в виде “отрицательных” областей. Например, следующая фигура вместо разбиения на 4 обычных прямоугольника, может быть представлена как совокупность двух прямоугольников, один из которых имеет отрицательную площадь:

$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 (-S_2)}{S_1 + (-S_2)}$$

**Замечание.** Поскольку координата, например,  $x_2$ , может быть отрицательна, то не следует представлять это выражение с использованием разностей:

3. **Метод симметрии** – при наличии у фигуры оси или плоскости симметрии центр тяжести лежит на этой оси. С учетом этого свойства уменьшается количество координат центра тяжести, подлежащих определению. См., например, положение центра тяжести кругового сектора.

$$x_C = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S_1 - S_2}$$

4. **Метод интегрирования** – при наличии у фигуры достаточно простого контура, описываемым известным уравнением (окружность, парабола и т.п.), выбирается элементарная площадка или полоска и выполняется аналитическое интегрирование. См. например, определение положения центра тяжести треугольника или кругового сектора. При более сложном контуре, который может быть разбит на более простые граничные отрезки используется предварительно метод разбиения. При сложностях с аналитическим интегрированием используются численные методы интегрирования.

5. **Метод подвешивания** – экспериментальный метод, основанный на том, что при подвешивании тела или фигуры за какую-либо произвольную точку центр тяжести находится на одной вертикали с точкой подвеса. Для определения положения центра тяжести плоской фигуры достаточно ее подвесить поочередно за две любые точки и прочертить соответствующие вертикали, например, с помощью отвеса, и точка пересечения этих прямых соответствует положению центра тяжести фигуры.

