Εργασία Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού

Φίλιππος Ρωσσίδης
(AEM 10379)

18 Ιουνίου 2025

διαγραφε με

Σκέδαση από άπειρο κυκλικό τέλεια αγώγιμο κύλινδρο

Λύνουμε το πρόβλημα σκέδασης
Galerkin

$$\iint_\Omega \nabla E_z^{s\prime} \cdot \mu^{-1} \nabla E_z^s dS - \omega^2 \iint_\Omega E_z^{s\prime} \epsilon E_z^s dS - \oint_{\partial\Omega} \mu^{-1} E_z^{s\prime} \frac{\partial E_z^s}{\partial \hat{n}} dl = 0 \quad \text{με} E_z^{s\prime} \in \{N_i\} \tag{1}$$

Ο συμβολισμός $E_z^{s\prime}$ δηλώνει τις συναρτήσεις δοκιμής, οι οποίες στη μέθοδο Garelkin είναι οι συναρτήσεις βάσης.
Οι οριακές συνθήκες ABC είναι:

$$\frac{\partial E_z^s}{\partial \hat{n}} = \left(-jk - \frac{1}{2R}\right) E_z^s \tag{2}$$

Υποβάλλοντας την (2) στην διατύπωση Galerkin:

$$\iint_\Omega \nabla E_z^{s\prime} \cdot \mu^{-1} \nabla E_z^s dS - \omega^2 \iint_\Omega E_z^{s\prime} \epsilon E_z^s dS + \oint_{\partial\Omega} \mu^{-1} \left(jk + \frac{1}{2R}\right) E_z^{s\prime} E_z^s dl = 0 \tag{3}$$

Διακριτοποιώ:

$$E_z^s \approx \sum_p E_z^s(p) N_p \tag{4}$$

όπου με $E_z^s(p)$ συμβολίζω την τιμή του E_z^s στον κόμβο p, και αντικαθιστώ στην (1) τις συναρτήσεις δοκιμής με N_q:

$$\iint_\Omega \nabla N_q \cdot \mu^{-1} \nabla \left(\sum_p E_z^s(p) N_p\right) dS - \omega^2 \iint_\Omega N_q \epsilon \sum_p E_z^s(p) N_p dS + \oint_{\partial\Omega} \alpha \mu^{-1} N_q \sum_p E_z^s(p) N_p dl = 0 \tag{5}$$

με $\alpha = jk + \frac{1}{2R}$. Υπολογίζουμε κάθε όρο ξεχωριστά:
Ο πρώτος όρος χειρίζεται όπως και στο ηλεκτροστατικό πρόβλημα:

$$\begin{gathered}\iint_\Omega \nabla N_q \cdot \mu^{-1} \nabla \left(\sum_p E_z^s(p) N_p\right) dS = \\ \iint_\Omega \nabla N_q \cdot \mu^{-1} \left(\sum_p E_z^s(p) \nabla N_p\right) dS = \\ \sum_p E_z^s(p) \iint_\Omega \nabla N_q \cdot \mu^{-1} \nabla N_p dS = \\ \sum_p E_z^s(p) \sum_{t|p,q\in t} \mu^{-1}(b_i b_j + c_i c_j) A_e\end{gathered} \tag{6}$$

όπου i, j οι τοπικές αριθμήσεις των p, q.
Ο δεύτερος όρος ισούται με[1]

[1] Matthew N.O. Shadiku: Numerical Techniques in Electromagnetism, Second Edition, σελ. 430, για το ολοκλήρωμα.

$$-\omega^2 \iint_\Omega N_q \epsilon \sum_p E_z^s(p) N_p dS = -\omega^2 \sum_p E_z^s(p) \iint_\Omega N_q \epsilon N_p dS = -\omega^2 \sum_p E_z^s(p) \cdot \begin{cases} \epsilon Ae/6, & p = q \\ \epsilon Ae/12, & p \neq q \end{cases} \tag{7}$$

Για τον τρίτο όρο πρέπει να λύσουμε το επικαμπύλιο διότι δεν μηδενίζεται λόγω των οριακών συνθηκών ABC:

$$\oint_{\partial\Omega} \alpha \mu^{-1} N_q \sum_p E_z^s(p) N_p dl = \alpha \sum_p E_z^s(p) \oint_{\partial\Omega} N_q \mu^{-1} N_p dl \tag{8}$$

Θεωρούμε το μ σταθερό εντός κάθε στοιχείου (όπως κάναμε και για το ϵ). Το ολοκλήρωμα εφαρμόζεται μόνο στις οριακές ακμές. Το γινόμενο των N_p, N_q είναι μη μηδενικό μόνο για γειτονικούς κόμβους.