

Εργασία Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού

Φίλιππος Ρωσσίδης
(AEM 10379)

18 Ιουνίου 2025

1 διαγραφει με

Σκέδαση από άπειρο κυκλικό τέλεια αγωγίμο κύλινδρο

Λύνουμε το πρόβλημα σκέδασης
Galerkin

$$\iint_{\Omega} \nabla E_z^{s'} \cdot \mu^{-1} \nabla E_z^s dS - \omega^2 \iint_{\Omega} E_z^{s'} \epsilon E_z^s dS - \oint_{\partial\Omega} \mu^{-1} E_z^{s'} \frac{\partial E_z^s}{\partial \hat{n}} dl = 0 \quad \mu E_z^{s'} \in \{N_i\} \quad (1)$$

Ο συμβολισμός $E_z^{s'}$ δηλώνει τις συναρτήσεις δοκιμής, οι οποίες στη μέθοδο Galerkin είναι οι συναρτήσεις βάσης. Οι οριακές συνθήκες ABC είναι:

$$\frac{\partial E_z^s}{\partial \hat{n}} = \left(-jk - \frac{1}{2R} \right) E_z^s \quad (2)$$

Υποβάλλοντας την (2) στην διατύπωση Galerkin:

$$\iint_{\Omega} \nabla E_z^{s'} \cdot \mu^{-1} \nabla E_z^s dS - \omega^2 \iint_{\Omega} E_z^{s'} \epsilon E_z^s dS + \oint_{\partial\Omega} \mu^{-1} \left(jk + \frac{1}{2R} \right) E_z^{s'} E_z^s dl = 0 \quad (3)$$

Διακριτοποιώ:

$$E_z^s \approx \sum_p E_z^s(p) N_p \quad (4)$$

όπου με $E_z^s(p)$ συμβολίζω την τιμή του E_z^s στον κόμβο p , και αντικαθιστώ στην (1) τις συναρτήσεις δοκιμής με N_q :

$$\iint_{\Omega} \nabla N_q \cdot \mu^{-1} \nabla \left(\sum_p E_z^s(p) N_p \right) dS - \omega^2 \iint_{\Omega} N_q \epsilon \sum_p E_z^s(p) N_p dS + \oint_{\partial\Omega} \alpha \mu^{-1} N_q \sum_p E_z^s(p) N_p dl = 0 \quad (5)$$

με $\alpha = jk + \frac{1}{2R}$. Υπολογίζουμε κάθε όρο ξεχωριστά:

Ο πρώτος όρος χειρίζεται όπως και στο ηλεκτροστατικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \nabla N_q \cdot \mu^{-1} \nabla \left(\sum_p E_z^s(p) N_p \right) dS &= \\ \iint_{\Omega} \nabla N_q \cdot \mu^{-1} \left(\sum_p E_z^s(p) \nabla N_p \right) dS &= \\ \sum_p E_z^s(p) \iint_{\Omega} \nabla N_q \cdot \mu^{-1} \nabla N_p dS &= \\ \sum_p E_z^s(p) \sum_{t|p,q \in t} \mu^{-1} (b_i b_j + c_i c_j) A_e & \end{aligned} \quad (6)$$

όπου i, j οι τοπικές αριθμήσεις των p, q .

Ο δεύτερος όρος ισούται με¹

¹Matthew N.O. Shadiku: Numerical Techniques in Electromagnetism, Second Edition, σελ. 430, για το ολοκλήρωμα.

$$-\omega^2 \iint_{\Omega} N_q \epsilon \sum_p E_z^s(p) N_p dS = -\omega^2 \sum_p E_z^s(p) \iint_{\Omega} N_q \epsilon N_p dS = -\omega^2 \sum_p E_z^s(p) \cdot \begin{cases} \epsilon A e / 6, & p = q \\ \epsilon A e / 12, & p \neq q \end{cases} \quad (7)$$

Για τον τρίτο όρο πρέπει να λύσουμε το επικαμπύλιο διότι δεν μηδενίζεται λόγω των οριακών συνθηκών ABC:

$$\oint_{\partial\Omega} \alpha \mu^{-1} N_q \sum_p E_z^s(p) N_p dl = \alpha \sum_p E_z^s(p) \oint_{\partial\Omega} N_q \mu^{-1} N_p dl \quad (8)$$

Θεωρούμε το μ σταθερό εντός κάθε στοιχείου (όπως κάναμε και για το ϵ). Το ολοκλήρωμα εφαρμόζεται μόνο στις οριακές ακμές. Το γινόμενο των N_p, N_q είναι μη μηδενικό μόνο για γειτονικούς κόμβους.