**ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ**
**ΤΟΜΕΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**
**Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός (8ο εξάμηνο)**

## <u>Α.1 Ομοαξονικό καλώδιο με διηλεκτρικό τον αέρα</u>

Δίνεται ομοαξονικό καλώδιο χαρακτηριστικής αντίστασης 50 Ω με διηλεκτρικό τον αέρα και διάμετρο εξωτερικού αγωγού $2b = 3.5$mm. Αφού υπολογίσετε την ακτίνα $a$ του εσωτερικού αγωγού, γράψτε έναν κώδικα πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση του ηλεκτροστατικού προβλήματος εντός του ομοαξονικού καλωδίου και στη συνέχεια τον υπολογισμό της χωρητικότητας ανά μονάδα μήκους του. Ο εσωτερικός αγωγός τίθεται σε δυναμικό $V$ (έστω 1 Volt), ενώ ο εξωτερικός γειώνεται ($\varphi$=0).

Για τη σύνταξη του προγράμματος ακολουθήστε τις εξής οδηγίες:

- Ορίστε τις μεταβλητές που περιγράφουν τη γεωμετρία (είναι στην ουσία οι ακτίνες του εσωτερικού και εξωτερικού αγωγού) και κατασκευάστε τον πίνακα περιγραφής γεωμετρίας. Χρησιμοποιήστε την decsg για να φτιάξετε τον decomposed solid geometry matrix, εξαιρώντας την εσωτερική περιοχή του αγωγού ακτίνας $a$. Φτιάξτε το αρχικό πλέγμα με την initmesh. Εισάγετε μία η περισσότερες εντολές refinemesh για πύκνωση του πλέγματος.
- Με τη βοήθεια του πίνακα e και με βάση και τις συντεταγμένες των κόμβων, εντοπίστε τους κόμβους που αντιστοιχούν σε συνθήκες Dirichlet (στην περίπτωση αυτή είναι οι κόμβοι και των δύο αγωγών – εσωτερικού και εξωτερικού), κατασκευάζοντας έτσι το διάνυσμα node_id. Κατασκευάστε επίσης και το διάνυσμα X0 που περιέχει τις τιμές του δυναμικού στους κόμβους του πλέγματος, αρχικά μόνον στους γνωστούς (το διάνυσμα αυτό θα χρειαστεί για την απεικόνιση του δυναμικού μετά την εκτέλεση του προγράμματος). Σε αυτό θα πρέπει οι κόμβοι του εσωτερικού αγωγού να έχουν τιμή $V$, ενώ αυτοί του εξωτερικού αγωγού θα έχουν τιμή μηδέν. Φυσικά προς το παρόν οι άγνωστοι κόμβοι θα έχουν επίσης δυναμικό μηδέν.
- Φτιάξτε το διάνυσμα επαναρίθμησης index που θα περιέχει την αρίθμηση που θα έχει κάθε κόμβος ως άγνωστος (γνωστοί κόμβοι θα έχουν index μηδέν).
- Αρχικοποιήστε τον ολικό αραιό πίνακα και γράψτε το βρόχο συνάθροισης for για κάθε στοιχείο, σε κάθε επανάληψη του οποίου θα υπολογίζονται οι τοπικοί πίνακες και θα προστίθενται στον ολικό (όπως και το διάνυσμα δεξιού μέλους), ακριβώς όπως περιγράφεται στην παρουσίαση της μεθόδου.
- Λύστε το σύστημα SX=B με direct solver (X = S\B).
- Συμπληρώστε το διάνυσμα X0 (το οποίο έχει ακόμα μόνο τις τιμές των γνωστών κόμβων) με τις άγνωστες τιμές που μόλις βρήκατε από την επίλυση (θα χρειαστεί προφανώς το διάνυσμα index).
- Απεικονίστε χρωματικά τη μεταβολή του δυναμικού με την pdeplot. Βρείτε (με την pdegrad) και απεικονίστε με την pdeplot και το διανυσματικό πεδίο **E**.

- Συγκρίνετε τα αποτελέσματα για ένα, δύο ή και τρία refinement και γράψτε το πλήθος βαθμών ελευθερίας σε κάθε περίπτωση.
- Προσπαθήστε να λύσετε το σύστημα και με iterative solver (π.χ. biconjugate gradient ή GMRES). Συγκρίνετε το χρόνο επίλυσης του συστήματος (με tic και toc) για direct και iterative solvers σε κάθε περίπτωση.
- Με βάση το αποτέλεσμα του πεδίου, γράψτε ένα μικρό κώδικα για τον υπολογισμό της συνολικής ανά μονάδα μήκους ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου, βάσει της γνωστής σχέσης

  $$W_e = \frac{1}{2}\iint_S \varepsilon \left|\mathbf{E}\right|^2 ds = \frac{1}{2}\iint_S \varepsilon \left|\nabla\phi\right|^2 ds = \frac{1}{2}\iint_S \nabla\phi \cdot \varepsilon\nabla\phi ds\,.$$

  Αναλύοντας το δυναμικό ως προς τις συναρτήσεις βάσης, γράψτε μια διακριτή έκφραση για το παραπάνω ολοκλήρωμα και υπολογίστε το προσθέτοντας τις συνεισφορές από όλα τα στοιχεία, βάσει της λύσης που έχετε. Από την ενέργεια, υπολογίστε τη χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους βάσει της σχέσης

  $$W_e = \frac{1}{2}CV^2$$

  Συγκρίνετε με την αναλυτική (ακριβή λύση) και υπολογίστε το σχετικό σφάλμα για ένα, δύο, τρία και τέσσερα refinements.

Σημείωση: Η εκτέλεση της άσκησης μπορεί να βασιστεί στον υπάρχοντα έτοιμο κώδικα FEM_0.m.

**Α.2 Πυκνωτής παράλληλων πλακών πεπερασμένου πλάτους**

Πυκνωτής (άπειρου μήκους) παραλλήλων πλακών πεπερασμένου πλάτους $w$ και πάχους $t$ έχει διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς $\varepsilon_r$ ανάμεσα στις πλάκες, οι οποίες βρίσκονται σε απόσταση $d$ μεταξύ τους. Θεωρήστε ότι το χωρίο υπολογισμού έχει διαστάσεις $A \times B$ ($A$=$B$=5$w$) και ότι ο πυκνωτής είναι στο κέντρο του χωρίου. Το δυναμικό είναι $V/2$ στην πάνω πλάκα και $-V/2$ στην κάτω πλάκα. Στο (απομακρυσμένο) εξωτερικό σύνορο τίθενται ομογενείς συνθήκες Neumann.

**(α)** Χρησιμοποιήστε παραλλαγή του ήδη υπάρχοντος κώδικα από το Α.1 για την απεικόνιση του πεδίου και τον υπολογισμό της χωρητικότητας. Συγκρίνετε τις τιμές που προκύπτουν για ένα, δύο και τρία refinements.

**(β)** Εξετάστε την επίδραση του μεγέθους του domain, παίρνοντας διαδοχικά $A$=$B$=3$w$, $A$=$B$=5$w$, $A$=$B$=7$w$, $A$=$B$=9$w$. Συγκρίνετε τις τιμές της χωρητικότητας στις παραπάνω τέσσερις περιπτώσεις (για 2 refinements σε όλες τις περιπτώσεις).

Υπόδειξη: Η ουσιαστική διαφοροποίηση σε σχέση με το Α.1 είναι ότι για το σχηματισμό του διανύσματος node_id, όπως και του X0, θα πρέπει να λάβετε υπόψη (σε κατάλληλες εντολές if) και τις συντεταγμένες των εξωτερικών κόμβων που συναντούμε στον πίνακα e. Για παράδειγμα, η πάνω πλάκα του πυκνωτή ξεχωρίζει από την κάτω από το ότι οι συντεταγμένες y των κόμβων της είναι μεγαλύτερες του μηδενός, ενώ και οι δύο πλάκες ξεχωρίζουν από το σύνορο του domain ως προς το ότι βρίσκονται εντός ενός «κουτιού» διαστάσεων π.χ. $\left|x\right| < w$, $\left|y\right| < d$.

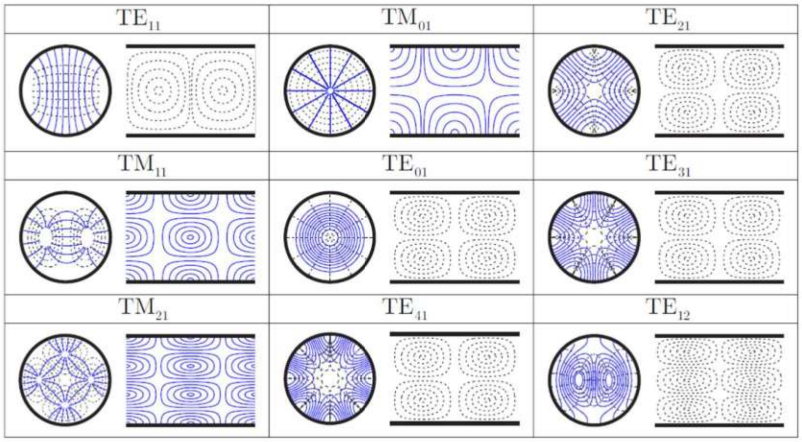
Αριθμητική εφαρμογή: $w$ = 4cm, $t$ = 2mm, $d$ = 1cm, $V$ = 100 Volt, $\varepsilon_r$ = 2.2.

## ΜΕΡΟΣ Β – Διάδοση Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος

### Β.1 Κυματοδηγός κυκλικής διατομής

Βρείτε και απεικονίστε του πρώτους εννέα ρυθμούς (είτε TE είτε TM) και τις αντίστοιχες συχνότητες αποκοπής ενός μεταλλικού κυματοδηγού κυκλικής διατομής με αέρα και διάμετρο $2a = 2$ cm. Ειδικότερα, γράψτε δύο κώδικες πεπερασμένων στοιχείων (έναν για ρυθμούς TE και έναν για ρυθμούς TM), οι οποίοι θα είναι παρόμοιοι, με μία μόνον κυκλική περιοχή αλλά προφανώς διαφορετικές οριακές συνθήκες στο εξωτερικό τέλεια αγώγιμο όριο. Για τη σύνταξη του προγράμματος ακολουθήστε την ίδια, κατά βάση, μεθοδολογία που χρησιμοποιήσατε και για το ηλεκτροστατικό πρόβλημα, με τις εξής ειδικότερες οδηγίες:

- Στην περίπτωση των ρυθμών TE με άγνωστη την $H_z$ οι οριακές συνθήκες για τη συνιστώσα αυτή είναι ομογενείς Neumann άρα οι κόμβοι του εξωτερικού συνόρου αφήνονται ως άγνωστοι. Αντίθετα, στους ρυθμούς TE οι κόμβοι του εξωτερικού συνόρου θα έχουν μηδενικές τιμές της $E_z$ (συνθήκες Dirichlet).
- Καθώς το πρόβλημα είναι ιδιοτιμών, θα πρέπει να αποθηκεύσετε και να αρχικοποιήσετε και τους δύο αραιούς ολικούς πίνακες ακαμψίας και μάζας **S** και **T**, αντίστοιχα. Οι τοπικοί πίνακες ακαμψίας δημιουργούνται εντελώς παρόμοια με την περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου, ενώ οι τοπικοί πίνακες μάζας υπολογίζονται επίσης σε πολύ απλή μορφή. Η συνάθροιση γίνεται όπως στο ηλεκτροστατικό πρόβλημα αλλά και για τους δύο πίνακες (ξεχωριστά αλλά στον ίδιο προφανώς βρόχο σάρωσης στοιχείο-προς-στοιχείο), ενώ δεν υπάρχει διάνυσμα (column vector) δεξιού μέλους.
- Λύστε το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών $\left(\mathbf{S} - k_c^2\mathbf{T}\right)\mathbf{x} = 0$ με τη συνάρτηση eigs. Χρησιμοποιήστε τη μορφή `[V,D] = eigs(S,T,k,sigma);`, επιλέγοντας `k=6` (τις πρώτες 6 ιδιοτιμές τόσο για TE όσο και για TM) και κατάλληλο `sigma` ώστε να πάρετε τις *μικρότερες* ιδιοτιμές.
- Από τον πίνακα V που περιέχει τα ιδιοδιανύσματα πάρτε την κάθε μια από τις 6 στήλες του (με ένα for από 1 έως 6) και από αυτή συμπληρώστε κατάλληλα το διάνυσμα X0 (το οποίο τελικά θα έχει τις τιμές του άγνωστου πεδίου σε όλους τους κόμβους) χρησιμοποιώντας και το διάνυσμα index.
- Απεικονίστε χρωματικά τη μεταβολή του αγνώστου πεδίου για καθέναν από τους 6 πρώτους ρυθμούς TE και 6 πρώτους ρυθμούς TM με την pdeplot, χρησιμοποιώντας 3 refinements αν είναι δυνατόν, για καλύτερα αποτελέσματα (και 2 refinements είναι OK). Χρησιμοποιήστε colormap jet και τις εντολές axis equal και axis tight για καλύτερη απεικόνιση. Βάλτε και colorbar on;
- Συγκρίνετε τα γραφήματα (colour plots) των άγνωστων πεδίων για κάθε ρυθμό, με το γνωστό γράφημα του παρακάτω σχήματος. Διαπιστώστε οι ισοσταθμικές του άγνωστου πεδίου με ποιες δυναμικές γραμμές συμπίπτουν, τόσο για τους ρυθμούς TE όσο και τους ρυθμούς TM.




- Υπολογίστε τις συχνότητες αποκοπής των παραπάνω ρυθμών χωρίς refinement, όπως επίσης και με 1, 2 και 3 refinements. Υπολογίστε τα σχετικά σφάλματα (ως προς τη θεωρητική λύση) για κάθε περίπτωση και παρουσιάστε τα σε πίνακα. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

**<u>Β.2 Σκέδαση από άπειρο κυκλικό τέλεια αγώγιμο κύλινδρο</u>**

Επίπεδο ομοιόμορφο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με διεύθυνση κατά τα $+x$ της μορφής

$\mathbf{E}^i = \hat{\mathbf{z}} E_0 e^{-jk_0 x}, E_0 = 1\mathrm{V/m}$

προσπίπτει σε άπειρου μήκους τέλεια αγώγιμο κύλινδρο διαμέτρου $2a$ που βρίσκεται στον αέρα. Η πόλωση του κύματος είναι TM (η άγνωστη μεταβλητή του προβλήματος είναι η συνιστώσα z του <u>σκεδαζόμενου</u> ηλεκτρικού πεδίου). Γράψτε έναν κώδικα για την επίλυση του προβλήματος σκέδασης, με απορροφητική οριακή συνθήκη (ABC) $1^{ης}$ τάξης, σε ακτίνα $R$ από τον άξονα του κυλίνδρου. Για τη σύνταξη του κώδικα ακολουθήστε την ίδια, κατά βάση, μεθοδολογία που χρησιμοποιήσατε και για το ηλεκτροστατικό πρόβλημα, με τις εξής ειδικότερες οδηγίες:

- Δημιουργήστε τις περιοχές του υπολογιστικού χωρίου όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, δηλ. δύο κυκλικές περιοχές. Η εσωτερική προφανώς θα εξαιρεθεί από το χωρίο καθώς στο εσωτερικό του κυλίνδρου δεν θα έχουμε διακριτοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία.
- Ο σχηματισμός των πινάκων μοιάζει πολύ με το ηλεκτροστατικό πρόβλημα. Εκτός από τον τοπικό πίνακα ακαμψίας υπολογίζεται εδώ ο τοπικός πίνακας μάζας, άρα ο συνολικός πίνακας του συστήματος θα είναι ένας πίνακας **A** που θα υπολογίζεται από τη συνάθροιση των τοπικών πινάκων $\mathbf{A}_e = \mathbf{S}_e - \omega^2 \mathbf{T}_e$.
- Στον παραπάνω πίνακα θα πρέπει να προστεθεί η συνεισφορά της οριακής συνθήκης ABC στο εξωτερικό σύνορο (όπου επίσης το πεδίο είναι άγνωστο). Θα χρειαστεί κατάλληλη προεπεξεργασία για αν εντοπίσετε τους κόμβους του εξωτερικού συνόρου.
- Στο σύνορο του σκεδαστή C θα εφαρμόσετε μη ομογενείς συνθήκες Dirichlet $E_z^s\big|_C = -E_z^i\big|_C$, άρα σε κάθε κόμβο του συνόρου του σκεδαστή, το σκεδαζόμενο πεδίο θα είναι γνωστό και ίσο με το προσπίπτον.

- Χρησιμοποιήστε τουλάχιστον 2 (καλύτερα 3) refinements για καλύτερα αποτελέσματα. Λύστε το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει με direct solver. Υπολογίστε σε κάθε κόμβο το συνολικό πεδίο (άθροισμα προσπίπτοντος που είναι γνωστό και σκεδαζόμενου, το οποίο υπολογίσατε). Απεικονίστε το συνολικό πεδίο.

Αριθμητική εφαρμογή: Θεωρήστε συχνότητα $f$ = 300 MHz (λ=1m). Λύστε το πρόβλημα για διάμετρο σκεδαστή λ/2, 2λ και 5λ. Για καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις θεωρήστε ακτίνα $R$ της ABC τέτοια ώστε η απόσταση $R$-$a$ της ABC από το σκεδαστή να είναι λ/2, λ ή 2λ. Για όλες τις παραπάνω περιπτώσεις συγκρίνετε τα αποτελέσματα (οπτικά).