Εργασία Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού

Φίλιππος Ρωσσίδης
(AEM 10379)

5 Μαΐου 2025

Υπολογισμός του α

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln(\frac{b}{a}) \Rightarrow$$

$$a = be^{-2\pi Z_0\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}}$$

Προκύπτει

$$a = 0.76mm$$

Αλγόριθμος ενέργειας

$$W_e = \frac{1}{2}\iint_S \epsilon\nabla\phi\cdot\nabla\phi dS$$

αναλύω το δυναμικό στις συναρτήσεις βάσης:

$$\phi \approx \sum_{p=1}^{N_n}\phi_p N_p(\mathbf{r})$$

όπου ως N_p αναφέρονται οι ολικές συναρτήσεις βάσης για τον κόμβο p.

$$W_e \approx \frac{1}{2}\iint_S \epsilon\nabla(\sum_p \phi_p N_p(\mathbf{r}))\cdot\nabla(\sum_q \phi_q N_q(\mathbf{r}))dS$$

γνωρίζουμε τις τιμές ϕ_p, το ϵ είναι σταθερό στον χώρο και τα αθροίσματα είναι πεπερασμένα, οπότε:

$$W_e \approx \frac{1}{2}\epsilon\iint_S \sum_p\{\phi_p\nabla N_p(\mathbf{r})\}\cdot\sum_q\{\phi_q\nabla N_q(\mathbf{r})\}dS$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon\sum_p\sum_q \phi_p\phi_q\iint_S \nabla N_p(\mathbf{r})\cdot\nabla N_q(\mathbf{r})dS$$

Αν συμβολίσω N_i^t τις *τοπικές* συναρτήσεις βάσης του κόμβου i ενός τριγώνου t, για τριγωνικά στοιχεία πρώτης τάξης ισχύει:

$$N_i^t(x,y) = \zeta_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y,\ \text{εντός του στοιχείου και 0 αλλού} \Rightarrow$$

$$\nabla N_i^l = \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix},\ \text{εντός του στοιχείου και 0 αλλού}$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία της συνάθροισης, για κάθε κόμβο η ολική συνάρτηση βάσης εντός κάθε τριγώνου στο οποίο αυτός ανήκει ισούται με την τοπική συνάρτηση βάσης του και εκτός αυτών με μηδέν. Έπεται ότι το γινόμενο $\nabla N_p\cdot\nabla N_q$ ισούται με 0 για μη γειτονικούς κόμβους. Για γειτονικούς κόμβους p, q όπου ανήκουν και οι δύο σε κάποιο τρίγωνο t, ισχύει εντός του τριγώνου

$$\nabla N_p\cdot\nabla N_q = \nabla N_i^t\cdot\nabla N_j^t = \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_j \\ c_j \end{bmatrix} = b_i b_j + c_i c_j$$

με i, j την τοπική αρίθμηση εντός του t. Έτσι:

$$\iint_S \nabla N_p\cdot\nabla N_q dS = \sum_{t|p,q\in t}(b_i^t b_j^t + c_i^t c_j^t)A_e^t$$

$$\therefore W_e \approx \frac{1}{2}\epsilon \sum_{p} \sum_{q \in N(p)} \phi_p \phi_q \sum_{t|p,q \in t} (b_i^t b_j^t + c_i^t c_j^t) A_e^t$$

$$= \sum_{p} \sum_{q \in N(p)} \frac{1}{2}\epsilon \phi_p \phi_q \sum_{t|p,q \in t} (b_i^t b_j^t + c_i^t c_j^t) A_e^t$$

όπου ως $N(p)$ συμβολίζω τους γείτονες του κόμβου p (συμπεριλαμβανομένου και του εαυτού του).

Για να γλυτώσουμε υπολογιστικό χρόνο μπορούμε, όπως και στον υπολογισμό του πίνακα $\mathbf{S}$, να απαριθμήσουμε όλα τα τρίγωνα και για κάθε έναν από τους 9 συνδυασμούς των κόμβων να υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\frac{1}{2}\epsilon \phi_i \phi_j (b_i b_j + c_i c_j) A_e$$

και να την προσθέτουμε διαδοχικά στο αποτέλεσμα.

Χωρητικότητα ομοαξονικού αναλυτικά

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(\frac{b}{a})} = 6.67 \cdot 10^{-11} F$$

Χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους πυκνωτή

$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

που S το εμβαδόν της πλάκας και d η απόσταση, για χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους:

$$C = \epsilon \frac{w}{d}$$