

# Εργασία Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού

Φίλιππος Ρωσσίδης  
(AEM 10379)

4 Μαΐου 2025

## Υπολογισμός του $\alpha$

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow$$
$$a = be^{-2\pi Z_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}}$$

Προκύπτει

$$a = 0.76mm$$

## Αλγόριθμος ενέργειας

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_S \epsilon \nabla \phi \cdot \nabla \phi dS$$

αναλύω το δυναμικό στις συναρτήσεις βάσης:

$$\phi \approx \sum_{p=1}^{N_n} \phi_p N_p(\mathbf{r})$$

όπου ως  $N_p$  αναφέρονται οι ολικές συναρτήσεις βάσης για τον κόμβο  $p$ .

$$W_e \approx \frac{1}{2} \iint_S \epsilon \nabla \left( \sum_p \phi_p N_p(\mathbf{r}) \right) \cdot \nabla \left( \sum_q \phi_q N_q(\mathbf{r}) \right) dS$$

γνωρίζουμε τις τιμές  $\phi_p$ , το  $\epsilon$  είναι σταθερό στον χώρο και τα αθροίσματα είναι πεπερασμένα, οπότε:

$$W_e \approx \frac{1}{2} \epsilon \iint_S \sum_p \{ \phi_p \nabla N_p(\mathbf{r}) \} \cdot \sum_q \{ \phi_q \nabla N_q(\mathbf{r}) \} dS$$
$$= \frac{1}{2} \epsilon \sum_p \sum_q \phi_p \phi_q \iint_S \nabla N_p(\mathbf{r}) \cdot \nabla N_q(\mathbf{r}) dS$$

Αν συμβολίσω  $N_i^t$  τις τοπικές συναρτήσεις βάσης του κόμβου  $i$  ενός τριγώνου  $t$ , για τριγωνικά στοιχεία πρώτης τάξης ισχύει:

$$N_i^t(x, y) = \zeta_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y, \text{ εντός του στοιχείου και } 0 \text{ αλλού} \Rightarrow$$

$$\nabla N_i^t = \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix}, \text{ εντός του στοιχείου και } 0 \text{ αλλού}$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία της συνάντησης, για κάθε κόμβο  $i$  η ολική συνάρτηση βάσης εντός κάθε τριγώνου στο οποίο αυτός ανήκει ισούται με την τοπική συνάρτηση βάσης του και εκτός αυτών με μηδέν. Έπεται ότι το γινόμενο  $\nabla N_p \cdot \nabla N_q$  ισούται με 0 για μη γειτονικούς κόμβους. Για γειτονικούς κόμβους  $p, q$  όπου ανήκουν και οι δύο σε κάποιο τρίγωνο  $t$ , ισχύει εντός του τριγώνου

$$\nabla N_p \cdot \nabla N_q = \nabla N_i^t \cdot \nabla N_j^t = \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_j \\ c_j \end{bmatrix} = b_i b_j + c_i c_j$$

με  $i, j$  την τοπική αρίθμηση εντός του  $t$ . Έτσι:

$$\iint_S \nabla N_p \cdot \nabla N_q dS = \sum_{t|p,q \in t} (b_i^t b_j^t + c_i^t c_j^t) A_e^t$$

$$\begin{aligned}
\therefore W_e &\approx \frac{1}{2}\epsilon \sum_p \sum_{q \in N(p)} \phi_p \phi_q \sum_{t|p, q \in t} (b_i^t b_j^t + c_i^t c_j^t) A_e^t \\
&= \sum_p \sum_{q \in N(p)} \frac{1}{2}\epsilon \phi_p \phi_q \sum_{t|p, q \in t} (b_i^t b_j^t + c_i^t c_j^t) A_e^t
\end{aligned}$$

όπου ως  $N(p)$  συμβολίζω τους γείτονες του κόμβου  $p$  (συμπεριλαμβανομένου και του εαυτού του).

Για να γλυτώσουμε υπολογιστικό χρόνο μπορούμε, όπως και στον υπολογισμό του πίνακα  $\mathbf{S}$ , να απαριθμήσουμε όλα τα τρίγωνα και για κάθε έναν από τους 9 συνδυασμούς των κόμβων να υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\frac{1}{2}\epsilon \phi_i \phi_j (b_i b_j + c_i c_j) A_e$$

και να την προσθέτουμε διαδοχικά στο αποτέλεσμα.

## Χωρητικότητα ομοαξονικού αναλυτικά

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(\frac{b}{a})} = 6.67 \cdot 10^{-11} F$$