

Εργασία Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού

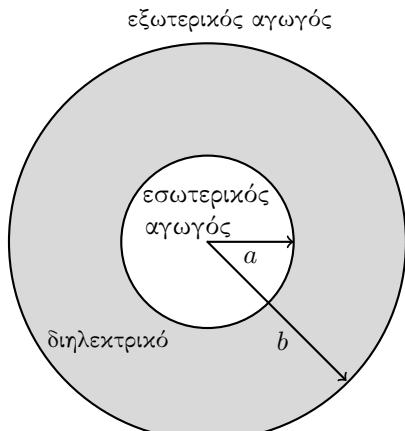
Φίλιππος Ρωσσίδης
(AEM 10379)

13 Ιουνίου 2025

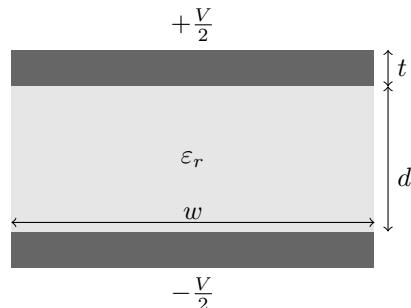
Μέρος Α

Στο πρώτο μέρος της εργασίας θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο FEM για να επιλύσουμε δύο ηλεκτροστατικά προβλήματα: ενός ομοαξονικού καλώδιου (σχήμα 1α') όπου ο εσωτερικός αγωγός τίθεται σε δυναμικό 1 Volt και ο εξωτερικός σε 0 Volt, και ενός πυκνωτή απείρου μήκους, με διαστάσεις που φαίνονται στο σχήμα 1β' και διαφορά δυναμικού V.

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο FEM για την εύρεση του δυναμικού στο χώρο και έπειτα από το δυναμικό θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο, την ενέργεια και την χωρητικότητα.



(α') Ομοαξονικό καλώδιο



(β') Πυκνωτής παράλληλων πλακών

Σχήμα 1

Σύντομη περιγραφή της μεθόδου FEM για την εύρεση δυναμικού σε ηλεκτροστατικό πρόβλημα

Θα παρουσιάσω σύντομα την μέθοδο, για την πληρότητα της αναφοράς. Σε κάποια σημεία χρησιμοποιώντας διαφορετικό συμβολισμό από τις σημειώσεις γιατι το θεώρησα πιο ευανάγνωστο.

Αρχικά, εφόσον λύνουμε δισδιάστατα προβλήματα, χωρίζουμε τον υπολογιστικό χώρο σε 2d simplexes δηλαδή τρίγωνα. Αν οριστούν οι συντεταγμένες simplex σημείου (x, y) ως $\zeta_i(x, y) = h_i/H_i$ όπου h_i η απόσταση του σημείου από την πλευρά που δεν περιέχει τον κόμβο i και H_i το ύψος από τον κόμβο i , τότε

$$\zeta_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y, \quad i = 1, 2, 3$$

όπου τα a_i, b_i, c_i δίνονται με κυκλική εναλλαγή από τις:

$$a_1 = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{D}, \quad b_1 = \frac{y_2 - y_3}{D}, \quad c_1 = \frac{x_3 - x_2}{D}, \quad (1)$$
$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Αναλύουμε, εντός του τριγώνου, το δυναμικό ως

$$\phi \approx \sum_{i=1}^3 \phi_i N_i^t$$

όπου ϕ_i το δυναμικό στον κόμβο i και διαλέγουμε $N_i^t = \zeta_i$ τις τοπικές (εντός του τριγώνου t) συναρτήσεις βάσης. Σκοπός μας είναι να βρούμε τις κατάλληλες τιμές ϕ_i για κάθε κόμβο στον υπολογιστικό χώρο. Έτσι ορίζουμε τις ολικές συναρτήσεις βάσης ως

$$N_p = \sum_{t|p \in t} N_i^t$$

όπου t τρίγωνο τέτοιο ώστε ο κόμβος p να ανήκει σε αυτό, και i η τοπική αρίθμηση του p στο t . Το δυναμικό αναλύεται συνολικά:

$$\phi \approx \sum_{p=1}^{N_n} \phi_p N_p \quad (2)$$

όπου N_n το πλήθος κόμβων. Θα λύσουμε την εξίσωση Poisson:

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) + \rho = 0$$

χρησιμοποιώντας την μέθοδο Galerkin η οποία αποτελεί κατηγορία της μεθόδου σταθμισμένων υπολογίσμων:

$$\langle \phi', \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) + \rho \rangle = 0$$

όπου διαλέγουμε ως συναρτήσεις δοκιμής ϕ' τις συναρτήσεις βάσης N_i , οπότε:

$$\iint_{\Omega} \phi' [\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) + \rho] ds = 0, \quad \forall \phi' \in \{N_i\}$$

όπου Ω ο υπολογιστικός χώρος. Οι παραπάνω είναι τόσες εξίσωσεις όσους έχουμε άγνωστους κόμβους, τους οποίους όμως βρούμε λύνοντας το σύστημα. Ισοδύναμα γράφονται:

$$-\iint_{\Omega} \nabla \phi' \cdot \epsilon \nabla \phi ds + \oint_c \phi' \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} dl + \iint_{\Omega} \phi' \rho ds = 0 \quad (3)$$

όπου c το όριο της επιφάνειας Ω .

Αν έχουμε ομογενής συνθήκες Neumann ($\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} = 0$) ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (3) ισούται με 0. Επίσης αν έχουμε συνθήκες Dirichlet (γνωστό ϕ) οι συναρτήσεις δοκιμής $\phi' \in N_i$ όμως είναι 0 στο όριο (οι κόμβοι που ανήκουν στο όριο είναι γνωστοί και δεν έχουν συνάρτηση βάσης). Θεωρούμε ότι δεν έχουμε άλλου είδους οριακές συνθήκες. Έτσι ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (3) ισούται με 0. Επίσης και στα δύο προβλήματα δεν υπάρχουν φορτία ($\rho = 0$), άρα:

$$\iint_{\Omega} \nabla \phi' \cdot \epsilon \nabla \phi ds = 0$$

Διαχριτοποιώ αντικαθιστώντας την εξίσωση (2), επίσης αφού $\phi' \in \{N_i\}$ γράφω στη θέση του N_q για κάποιο $q \in \{1, \dots, N_n\}$:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \nabla N_q(\mathbf{r}) \cdot \epsilon \nabla (\sum_p \phi_p N_p(\mathbf{r})) ds &= 0 \Rightarrow \\ \sum_p \phi_p \iint_{\Omega} \nabla N_q(\mathbf{r}) \cdot \epsilon \nabla N_p(\mathbf{r}) ds &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Ισχύει:

$$\begin{aligned} N_i^t(x, y) &= \zeta_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y, \text{ εντός του στοιχείου και } 0 \text{ άλλο } \Rightarrow \\ \nabla N_i^t &= \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix}, \text{ εντός του στοιχείου και } 0 \text{ άλλο } \end{aligned}$$

Για κάθε κόμβο η ολική συνάρτηση βάσης εντός κάθε τριγώνου στο οποίο ανήκει ισούται με την τοπική συνάρτηση βάσης του σε αυτό το τρίγωνο και εκτός αυτών με μηδέν. Έπειτα ότι το γινόμενο $\nabla N_p \cdot \epsilon \nabla N_q$ ισούται με 0 για μη γειτονικούς κόμβους. Για γειτονικούς p, q όπου ανήκουν και οι δύο σε κάποιο τρίγωνο t , ισχύει εντός του τριγώνου

$$\nabla N_p \cdot \epsilon \nabla N_q = \nabla N_i^t \cdot \epsilon \nabla N_j^t = \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix} \cdot \epsilon \begin{bmatrix} b_j \\ c_j \end{bmatrix} = \epsilon(b_i b_j + c_i c_j)$$

με i, j την τοπική αρίθμηση εντός του t . Έτσι, θεωρώντας ότι το ϵ είναι σταθερό εντός κάθε στοιχείου:

$$\iint_S \nabla N_p \cdot \epsilon \nabla N_q dS = \sum_{t|p,q \in t} \epsilon(b_i b_j + c_i c_j) A_e \quad (5)$$

δηλαδή άθροισμα της ποσότητας $(b_i b_j + c_i c_j) A_e$ για κάθε τρίγωνο t που περιέχει και τον p και τον q , όπου i, j η τοπική αρίθμηση των κόμβων p, q στο τρίγωνο t , οι b, c δίνονται από την (1) και $A_e = D/2$ το εμβαδόν του τριγώνου. Η (4) γράφεται:

$$\sum_p \phi_p \sum_{t|p,q \in t} \epsilon(b_i b_j + c_i c_j) A_e = 0 \quad \forall q \in \{1, \dots, N_n\} \quad (6)$$

Αν ορίσω τον τετραγωνικό πίνακα $N_n \times N_n \mathbf{S}$:

$$\mathbf{S}[p, q] = \sum_{t|p,q \in t} \epsilon(b_i b_j + c_i c_j) A_e$$

και τον πίνακα στήλη $1 \times N_n \mathbf{F}$ που περιέχει τα δυναμικά των κόμβων ϕ_p , τότε το σύστημα (6) γράφεται:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τον πίνακα \mathbf{S} αν απαριθμήσουμε κάθε τρίγωνο στον χώρο και έπειτα για κάθε έναν από τους 9 συνδυασμούς των κόμβων του (έστω p, q ολικά, i, j τοπικά) υπολογίσουμε την ποσότητα $\epsilon(b_i b_j + c_i c_j) A_e$ και την προσθέσουμε στην θέση $[p, q]$ του πίνακα.

Τέλος πρέπει να λάβουμε υπόψη τους κόμβους με οριακή συνθήκη Dirichlet δηλαδή γνωστού δυναμικού. Επειδή ο πίνακας \mathbf{F} είναι η λύση, δεν μπορεί να περιλαμβάνει τα γνωστά δυναμικά, έτσι τον χωρίζουμε τοποθετώντας πρώτα τα άγνωστα και έπειτα τα γνωστά:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_f \\ \mathbf{F}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ff} & \mathbf{S}_{fp} \\ \mathbf{S}_{pf} & \mathbf{S}_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ff} & \mathbf{S}_{fp} \\ \mathbf{S}_{pf} & \mathbf{S}_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_f \\ \mathbf{F}_p \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ff} \cdot \mathbf{F}_f + \mathbf{S}_{fp} \cdot \mathbf{F}_p \\ \mathbf{S}_{pf} \cdot \mathbf{F}_f + \mathbf{S}_{pp} \cdot \mathbf{F}_p \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Επειδή ο πίνακας \mathbf{S} είναι συμμετρικός, αρκεί να λυθεί το πάνω μέρος:

$$\mathbf{S}_{ff} \cdot \mathbf{F}_f = -\mathbf{S}_{fp} \cdot \mathbf{F}_p \quad (7)$$

Λύνοντας το σύστημα (7) ως προς \mathbf{F}_f βρίσκουμε τα άγνωστα δυναμικά σε κάθε κόμβο του χώρου.

Αλγόριθμος ενέργειας

Αφού έχουμε βρει το δυναμικό σε κάθε κόμβο, θα υπολογίσουμε την συνολική ενέργεια ανά μονάδα μήκους:

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_S \epsilon |\mathbf{E}|^2 dS = \frac{1}{2} \iint_S \nabla \phi \cdot \epsilon \nabla \phi dS \quad (8)$$

αναλύω το δυναμικό στις συναρτήσεις βάσης σύμφωνα με την (2):

$$W_e \approx \frac{1}{2} \iint_S \nabla \left(\sum_p \phi_p N_p(\mathbf{r}) \right) \cdot \epsilon \nabla \left(\sum_q \phi_q N_q(\mathbf{r}) \right) dS$$

γνωρίζουμε τις τιμές ϕ_p και τα αύρισματα είναι πεπερασμένα, οπότε:

$$W_e \approx \frac{1}{2} \iint_S \sum_p \{\phi_p \nabla N_p(\mathbf{r})\} \cdot \epsilon \sum_q \{\phi_q \nabla N_q(\mathbf{r})\} dS$$

$$= \frac{1}{2} \sum_p \sum_q \phi_p \phi_q \iint_S \nabla N_p(\mathbf{r}) \cdot \epsilon \nabla N_q(\mathbf{r}) dS$$

Αντικαθιστώντας από την (5):

$$W_e \approx \frac{1}{2} \sum_p \sum_q \phi_p \phi_q \sum_{t|p,q \in t} \epsilon(b_i b_j + c_i c_j) A_e$$

Για να γλυτώσουμε υπολογιστικό χρόνο μπορούμε, όπως και στον υπολογισμό του πίνακα \mathbf{S} , να απαριθμήσουμε όλα τα τρίγωνα και για κάθε έναν από τους 9 συνδυασμούς των κόμβων να υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\frac{1}{2} \epsilon \phi_i \phi_j (b_i b_j + c_i c_j) A_e$$

και να την προσθέτουμε διαδοχικά στο αποτέλεσμα.

Ομοαξονικό καλώδιο

Το ομοαξονικό καλώδιο του σχήματος 1α' με $2b = 3.5\text{mm}$ έχει χαρακτηριστική αντίσταση 50Ω και διηλεκτρικό τον αέρα. Ο εσωτερικός αγωγός τιμεται σε δυναμικό $\phi = 1 \text{ Volt}$ και ο εξωτερικός σε $\phi = 0$.

Υπολογισμός του a

Η χαρακτηριστική αντίσταση ομοαξονική γραμμής μεταφοράς δίνεται από την:¹

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Λύνοντας ως προς a

$$a = be^{-2\pi Z_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}} = 1.75 \cdot 10^{-3} e^{-2\pi 50 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}}$$

Προκύπτει

$$a = 0.76\text{mm}$$

Χωρητικότητα αναλυτικά

Η ανά μονάδα μήκους χωρητικότητα κυλινδρικού πυκνωτή δίνεται από την:²

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = 66.7014293 \text{ pF/m} \quad (9)$$

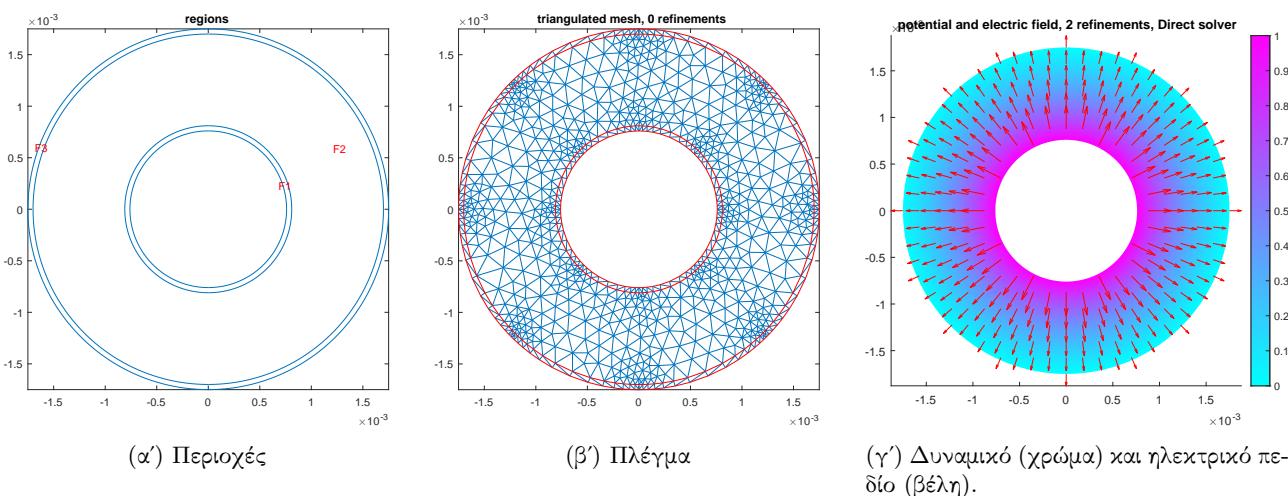
Κώδικας / Αποτελέσματα

Η παραπάνω μέθοδος FEM για τον υπολογισμό του δυναμικού, όπως και αυτή για τον υπολογισμό της ενέργειας ανά μονάδα μήκους υλοποιήθηκε σε matlab. Υπάρχει αναλυτική εξήγηση σε επίπεδο συναρτήσεων με μορφή σχολίων στο αρχείο coaxial.m. Εδώ περιγράφεται συνοπτικά τη διαδικασία.

Αρχικά ορίζω τις περιοχές που φαίνονται στο σχήμα 2α' με τις παραμέτρους a, b . Οι περιοχές F1, F3 (όρια) θα χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των σημείων με συνθήκες Dirichlet. Οι ακμές που βρίσκονται στο όριο της F1 και του εξωτερικού (περιοχή 0) έχουν γνωστό δυναμικό $\phi = 1 \text{ Volt}$ ενώ οι αντίστοιχες τις περιοχής F3 έχουν γνωστό δυναμικό $\phi = 0 \text{ Volt}$.

Ακολουθεί η δημιουργία τριγωνικού πλέγματος, στο σχήμα 2β' φαίνεται το αποτέλεσμα χωρίς refinement. Στο σχήμα 5 φαίνονται οπτικοποιήσεις και του ομοαξονικού και του πυκνωτή παράλληλων πλακών για περισσότερα refinements.

Ορίζεται καινούργια αρίθμηση για τους γνωστούς και αγνώστους κόμβους ώστε να τους επεξεργαστούμε ξεχωριστά, και έπειτα υπολογίζονται οι πίνακες S_{ff} και S_{fp} όπως περιγράφτηκε. Λύνεται το σύστημα (7) με direct μέθοδο. Έπειτα υπολογίζεται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ως $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Στο σχήμα 2γ' φαίνονται τα αποτελέσματα.



Σχήμα 2

¹Θεόδωρος Τσιμπούκης, Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, σελ. 933

²Θεόδωρος Τσιμπούκης, Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, σελ. 145

Το πρόβλημα λύνεται με 0,1,2 και 3 refinements στο πλέγμα. Το πλήθος βαθμών ελευθερίας σε κάθε περίπτωση είναι το πλήθος των άγνωστων κόμβων. Για refinements 0,1,2 και 3 είναι 761, 3228, 13280 και 53856 αντίστοιχα. Στα γραφήματα δεν παρατηρείται διαφορά οπότε παρέχεται στο σχήμα 2γ' το αποτέλεσμα μόνο για 2 refinements. Παρατηρείται ελάχιστη διαφορά στο αποτέλεσμα του υπολογισμού της χωρητικότητας, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

Τη πολογίζεται η ενέργεια ανά μονάδα μήκους με τη μέθοδο που παρουσιάστηκε παραπάνω. Έπειτα βρίσκεται η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους ως $C = 2W_e/V^2$.

Το αποτέλεσμα για refinements 0,1,2 και 3 είναι $66.8 \text{ pF}/m$, $66.73 \text{ pF}/m$, $66.706 \text{ pF}/m$ και $66.7016 \text{ pF}/m$, με σχετικό σφάλμα από την αναλυτική τιμή [εξίσωση (9)] 0.15%, 0.0036%, 0.0076% και 0.0003% αντίστοιχα. Με περισσότερα refinements παίρνουμε ακριβέστερα αποτελέσματα.

Ο πίνακας \mathbf{S} είναι αραιός (επειδή οι περισσότεροι κόμβοι είναι μη γειτονικοί και για μη γειτονικούς κόμβους $\mathbf{S}[p, q] = 0$). Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε iterative solver ώστε να βελτιστοποιήσουμε μνήμη και χρόνο. Χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση pcg της matlab. Η iterative μέθοδος παρουσιάζει πλεονέκτημα ως προς την ταχύτητα και τη μνήμη, όμως τα αποτελέσματα είναι λιγότερο ακριβή μιας ακολουθείται διαδικασία σύγκλισης.

Χρησιμοποιήθηκε tolerance στο σφάλμα ίσο με 0.01. Το αποτέλεσμα για 3 refinements φαίνεται στο σχήμα 5γ' και όπως φαίνεται στα όκρα του καλωδίου παρουσιάζει οπτικό σφάλμα. Η υπολογισμένη χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους με αυτή τη μέθοδο είναι $71.2 \text{ pF}/m$ με μεγάλο σχετικό σφάλμα 6.87%.

Προφανώς εάν επιλεχθεί μικρότερο tolerance σφάλματος το αποτέλεσμα θα είναι πολύ ακριβέστερο, επιλέχθηκε συγκεκριμένα αυτό για να επιδειχθούν τα πλεονέκτημα και μειονεκτήματα της μεθόδου: για 3 refinements η direct μέθοδος τρέχει σε 0.072sec ενώ η iterative σε 0.048sec. Επίσης μπορεί να επιταχυνθεί περαιτέρω με καλό tuning και παραλληλοπόληση. Για μεγαλύτερα σε πλήθος αγνώστων προβλήματα οι διαφορές θα ήταν εμφανέστερες.

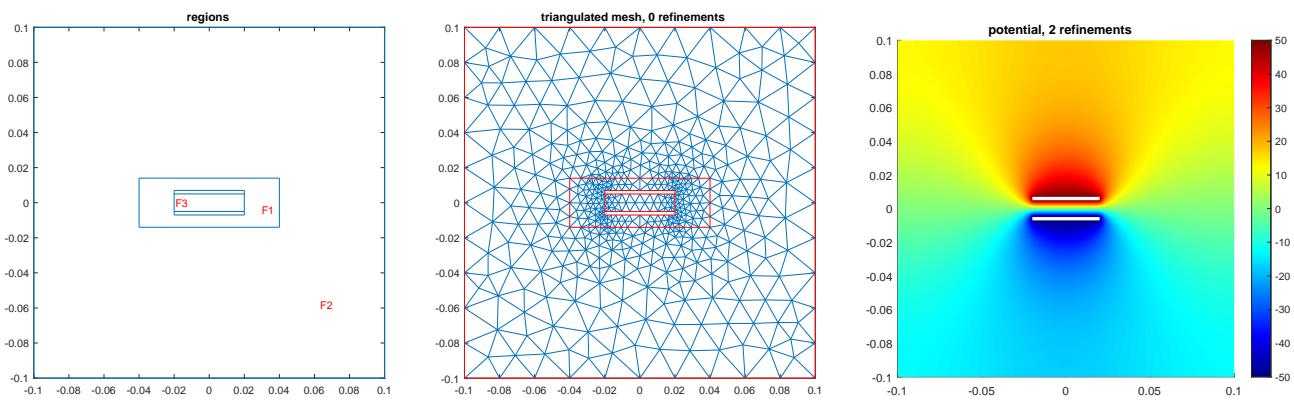
Για σύγκριση, στο 1 refinement, σε μικρότερο χρόνο από την direct (0.00129sec έναντι 0.00292sec) η iterative υπολογίζει χωρητικότητα $66.887 \text{ pF}/m$ με σχετικό σφάλμα 0.278%, καλύτερη από ότι στα 3 refinements.

Πυκνωτής παράλληλων πλακών

Ο πυκνωτής απείρου μήκους του σχήματος 1β' με διαστάσεις $w = 4\text{cm}$, $t = 2\text{mm}$ και $d = 1\text{cm}$, διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 2.2$ τίθεται σε διαφορά δυναμικού $V = 100 \text{ Volt}$. Στις όκρες του υπολογιστικού χώρου υποτίθενται οριακές συνθήκες Neumann. Οι πλάκες έχουν οριακές συνθήκες Dirichlet με τους κόμβους που ανήκουν στην άνω να έχουν δυναμικό $+V/2$ και αυτούς που ανήκουν στην κάτω $-V/2$. Ορίζω υπολογιστικό χώρο διαστάσεων $5\text{w} \times 5\text{h}$.

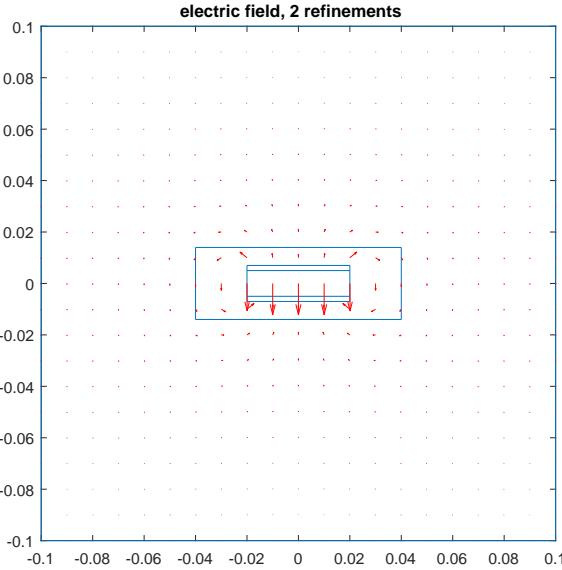
Ο κώδικας matlab βρίσκεται στο αρχείο capacitor.m. Ακολουθείται η ίδια διαδικασία με το ομοαζονικό καλώδιο (σχεδόν πανομοιότυπος κώδικας) για να υπολογιστούν το δυναμικό, το πεδίο και η χωρητικότητα. Διαφορά παρουσιάζεται στο γεγονός ότι η διηλεκτρική σταθερά εξαρτάται από την περιοχή (όπως φαίνεται στο σχήμα 1β' ανάμεσα στις πλάκες υπάρχει διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 2.2$ και έξω θεωρείται αέρας). Στο σχήμα 3' φαίνονται οι περιοχές που ορίστηκαν. Η περιοχή F3 ορίστηκε για να διαχωρίζεται η περιοχή με διαφορετικό διηλεκτρικό και η F1 για να διαχωρίζονται οι οριακοί κόμβοι (αυτοί που έχουν ένα ωκήμα στο όριο με την περιοχή 0) σε αυτούς που έχουν συνθήκες Neumann και και αυτούς με συνθήκες Dirichlet. Η άνω πλάκα διαχωρίζεται από την κάτω από το γεγονός ότι οι κόμβοι της έχουν θετικές συντεταγμένες y , έναντι αρνητικών.

Στο σχήμα 3' φαίνεται το πλέγμα και στο σχήμα 3γ' το δυναμικό μετά το πέρας της διαδικασίας.

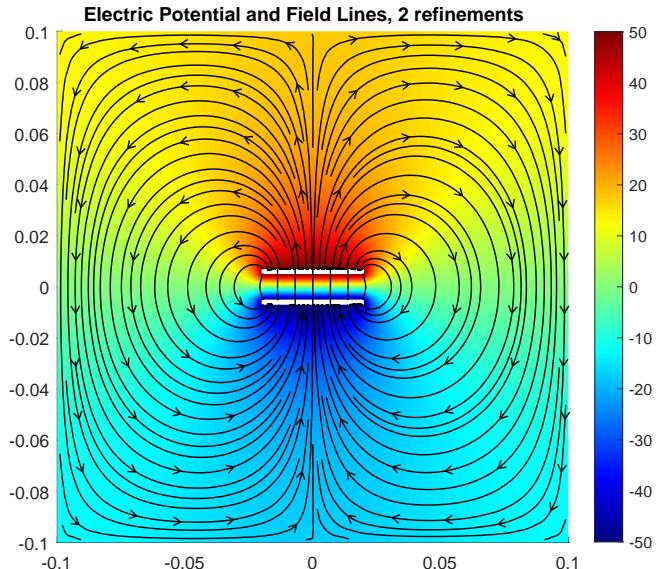


Σχήμα 3

Στο σχήμα 4 φαίνεται το ηλεκτρικό πεδίο που υπολογίστηκε από τη σχέση $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.



(α') Ηλεκτρικό πεδίο πυκνωτή παράλληλων πλακών



(β') Δυναμικό (χρώμα) και ηλεκτρικό πεδίο (γραμμές ροής) πυκνωτή παράλληλων πλακών

Σχήμα 4

Χωρητικότητα

Θεωρώντας ότι το πλάτος w είναι πολύ μεγαλύτερο από την απόσταση d μπορούμε να καταλήξουμε σε μία αναλυτική σχέση για τον υπολογισμό της χωρητικότητας:

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \quad (10)$$

όπου A το εμβαδόν της πλάκας και d η απόσταση μεταξύ των πλακών. Επομένως η ανά μονάδα χωρητικότητα στο παραπάνω πρόβλημα θα είναι:

$$C = \epsilon \frac{w}{d} = 77.9 \text{ pF/m} \quad (11)$$

Αυτή η σχέση υποθέτει ότι δεν υπάρχουν φαινόμενα άκρων και ότι το πεδίο είναι συγκεντρωμένο στο εσωτερικό του πυκνωτή. Όπως φαίνεται στα σχήματα 1β' και 4 οι υποθέσεις αυτές δεν ισχύουν.

Υπολογίζοντας την χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους μην υιοθετώντας αυτές τις υποθέσεις με τη χρήση FEM όπως και προηγουμένως, τα αποτελέσματα για 0,1,2 και 3 refinements είναι 92.88 pF/m, 92.37 pF/m, 92.20 pF/m και 92.14 pF/m αντίστοιχα. Φαίνεται με την αύξηση των refinements να συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια τιμή.

Επειτα εξετάζουμε την επιρροή του μεγέθους του υπολογιστικού χώρου. Χρησιμοποιώντας 2 refinements λύνουμε το πρόβλημα για υπολογιστικό χώρο διαστάσεων $3w \times 3w$, $5w \times 5w$, $7w \times 7w$ και $9w \times 9w$. Οι τιμές χωρητικότητας ανά μονάδα μήκους προκύπτουν: 91.40 pF/m, 92.20 pF/m, 92.42 pF/m και 92.51 pF/m αντίστοιχα. Με την αύξηση των διαστάσεων του υπολογιστικού χώρου φαίνεται επίσης να συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία τιμή.

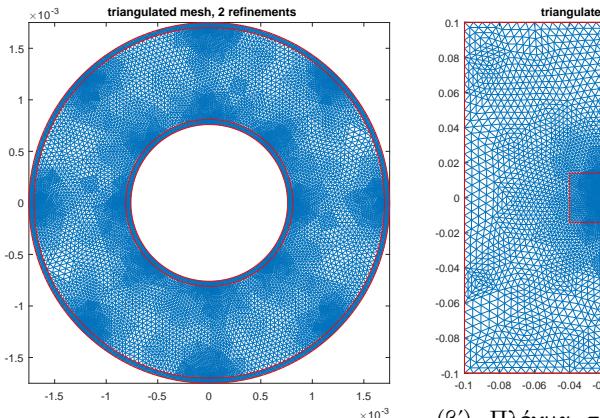
Το γεγονός αυτό της σύγκλισης της χωρητικότητας ανά μονάδα μήκους με την αύξηση των διαστάσεων του υπολογιστικού χώρου ερμηνεύεται ως εξής: Σε αντίθεση με το ομοιοζονικό καλώδιο, η επιρροή του πυκνωτή παράλληλων πλακών εκτίνεται στο άπειρο (η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μειώνεται τετραγωνικά όμως δεν μηδενίζεται πουθενά) επομένως για να υπολογίσουμε την ενέργεια ανά μονάδα μήκους σύμφωνα με την (8) πρέπει να ολοκληρώσουμε στο άπειρο. Δεν έχουμε αυτή την δυνατότητα, όμως εφόσον το πεδίο εξασθενεί τετραγωνικά, με την αύξηση των διαστάσεων του χώρου ολοκλήρωσης (υπολογιστικός χώρος) το ολοκλήρωμα θα συγκλίνει ομοιόμορφα. Έτσι μπορούμε να επιτύχουμε αρκετά ακριβή αποτελέσματα μεγαλώνοντας τον υπολογιστικό χώρο.

(Η ομοιόμορφία εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι αυξάνοντας τον χώρο ολοκλήρωσης, επειδή η προς ολοκλήρωση ποσότητα $\epsilon |\mathbf{E}|^2$ είναι παντού θετική, το ολοκλήρωμα θα αυξάνεται συνεχώς, όμως με φθίνων ρυθμό, πλησιάζοντας την πραγματική ποσότητα. Έτσι δεν είναι δυνατόν με αύξηση του χώρου ολοκλήρωσης να αυξηθεί το σφάλμα).

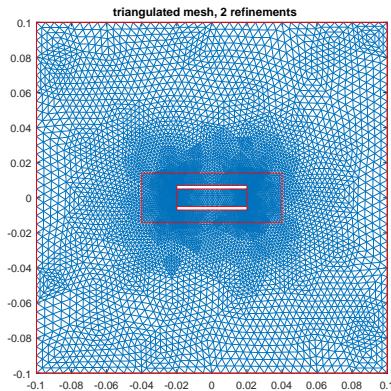
Βλέπουμε τώρα ότι υπάρχει μεγάλη απόκλιση των αποτελεσμάτων FEM και σχέσης (10), η οποία οφείλεται στα φαινόμενα άκρων τα οποία η (10) αγνοεί.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για το συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν απαραίτητη η χρήση υπολογιστικής μεθόδου.

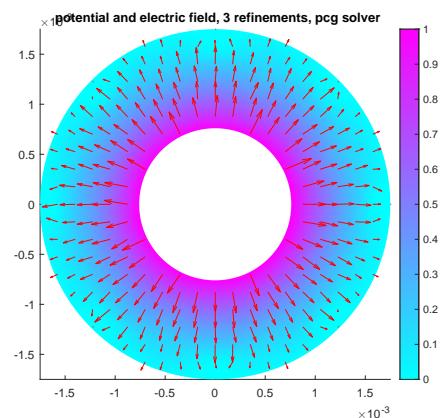
Επιπλέον γραφήματα



(α') Πλέγμα ομοαξονικού καλωδίου με 2 refinements.



(β') Πλέγμα πυκνωτή παράλληλων πλακών με 2 refinements.



(γ') Δυναμικό (χρώμα) και ηλεκτρικό πεδίο (βέλη) του ομοαξονικού καλωδίου με iterative solver.

Σχήμα 5: Επιπλέον γραφήματα

Μέρος Β

Κυματοδηγός κυλινδρικής διατομής

Βρίσκουμε τους εννέα πρώτους ρυθμούς (είτε TE είτε TM) ενός κυλινδρικού κυματοδηγού ακτίνας $a = 1 \text{ cm}$. Οι ρυθμοί υπολογίζονται ζεχωριστά για TE και TM και επιστρέφονται οι 9 μικρότεροι.

Ο αλγόριθμος FEM είναι ο εξής: Λύνεται το πρόβλημα ιδιοτυπών:

$$\begin{aligned} TE : \quad & (\mathbf{S} - k_c^2 \mathbf{T}) \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ TM : \quad & (\mathbf{S} - k_c^2 \mathbf{T}) \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12)$$

Με τον πίνακα \mathbf{S} να υπολογίζεται όπως προηγουμένως, όμως χωρίς τη διηλεκτρική σταθερά, δηλαδή:

$$\mathbf{S}[p, q] = \sum_{t|p, q \in t} (b_i b_j + c_i c_j) A_e$$

και \mathbf{T} είναι ο πίνακας μάζας που δίνεται από την

$$\mathbf{T}[p, q] = \sum_{t|p, q \in t} \begin{cases} A_e / 6, & p = q \\ A_e / 12, & p \neq q \end{cases}$$

Η λύση σε κάθε περίπτωση θα είναι ο πίνακας \mathbf{H} ή \mathbf{E} και η ιδιοτυπή k_c^2 που του αντιστοιχεί. Οι πίνακες \mathbf{H} , \mathbf{E} (πίνακες στήλης) περιέχουν για κάθε κόμβο του πλέγματος την τιμή των H_z , E_z , δηλαδή τα πλάτος των αντίστοιχων πεδίων κατά τη διεύθυνση διάδοσης.

Οριακές συνθήκες

Στην περίπτωση των TE ρυθμών, λύνουμε ώς προς \mathbf{H} , το οποίο έχει ομογενής Neumann οριακές συνθήκες στο όριο. Επομένως όλοι οι κόμβοι αφήνονται ελεύθεροι και το σύστημα δε χρειάζεται επεξεργασία.

Στην περίπτωση των TM ρυθμών, λύνουμε ως προς \mathbf{E} , το οποίο στο όριο έχει ομογενής συνθήκες Dirichlet. Έτσι πρέπει, όπως και στο ηλεκτροστατικό πρόβλημα, να αναλυθούν τα \mathbf{E} , \mathbf{S} και \mathbf{T} στους γνωστούς και άγνωστους κόμβους:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_f \\ \mathbf{E}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ff} & \mathbf{S}_{fp} \\ \mathbf{S}_{pf} & \mathbf{S}_{pp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ff} & \mathbf{T}_{fp} \\ \mathbf{T}_{pf} & \mathbf{T}_{pp} \end{bmatrix}$$

Τότε το σύστημα γίνεται:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ff} & \mathbf{S}_{fp} \\ \mathbf{S}_{pf} & \mathbf{S}_{pp} \end{bmatrix} - k_c^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ff} & \mathbf{T}_{fp} \\ \mathbf{T}_{pf} & \mathbf{T}_{pp} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_f \\ \mathbf{E}_p \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ff} - k_c^2 \mathbf{T}_{ff} & | & \mathbf{S}_{fp} - k_c^2 \mathbf{T}_{fp} \\ \mathbf{S}_{pf} - k_c^2 \mathbf{T}_{pf} & | & \mathbf{S}_{pp} - k_c^2 \mathbf{T}_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_f \\ \mathbf{E}_p \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{S}_{ff} - k_c^2 \mathbf{T}_{ff}) \cdot \mathbf{E}_f + (\mathbf{S}_{fp} - k_c^2 \mathbf{T}_{fp}) \cdot \mathbf{E}_p \\ (\mathbf{S}_{pf} - k_c^2 \mathbf{T}_{pf}) \cdot \mathbf{E}_f + (\mathbf{S}_{pp} - k_c^2 \mathbf{T}_{pp}) \cdot \mathbf{E}_p \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Από τη συμμετρία, αρχεί να λύσουμε το πάνω μέρος:

$$(\mathbf{S}_{ff} - k_c^2 \mathbf{T}_{ff}) \cdot \mathbf{E}_f + (\mathbf{S}_{fp} - k_c^2 \mathbf{T}_{fp}) \cdot \mathbf{E}_p = \mathbf{0}$$

και επειδή στο όριο το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0, δηλαδή $\mathbf{E}_p = 0$, προκύπτει:

$$(\mathbf{S}_{ff} - k_c^2 \mathbf{T}_{ff}) \cdot \mathbf{E}_f = \mathbf{0} \quad (13)$$

Υπόλοιπες συνιστώσες

Έχοντας βρει το H_z για TE και E_z για TM μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες συνιστώσες:³

TE :

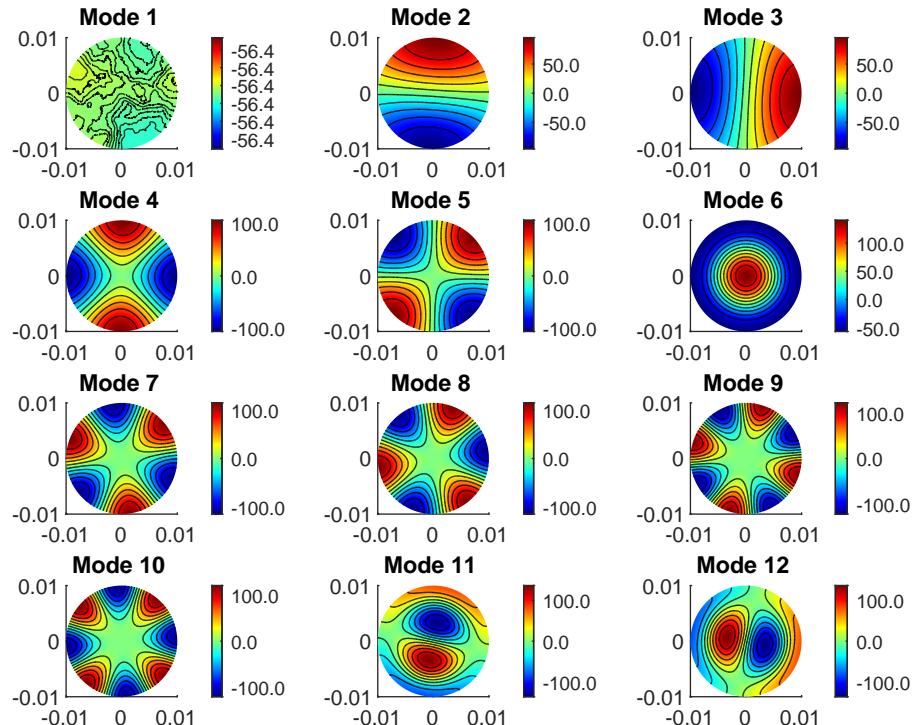
$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ E_y &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_x &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned}$$

TM :

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ H_x &= \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ H_y &= -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (14)$$

Τλοποίηση

Αφού υλοποιηθεί η μέθοδος πεπερασμάτων στοιχείων στο MATLAB παίρνουμε τους πρώτους 12 TE ρυθμούς (μικρότερης ιδιοτυπής) οι οποίοι φαίνονται στο σχήμα 6.



Σχήμα 6: Το αποτέλεσμα της μεθόδου για πρώτους 12 ρυθμούς TE

³Οι τύποι έχουν παρθεί από το βιβλίο MIKROΚΥΜΑΤΑ θεωρία και εφαρμογές των Τραϊανός Β. Γιούλτσης, Εμμανουήλ Ε. Κριεζής, σελ. 136, με επεξεργασία για TE και TM ρυθμούς

Για κάθε ρυθμό (ιδιοδιάνυσμα) το πρόγραμμα μας δίνει και την ιδιοτιμή του k_c^2 (βλ. εξίσωση (13)). Μπορούμε να υπολογίσουμε την συχνότητα αποκοπής των ρυθμών ως

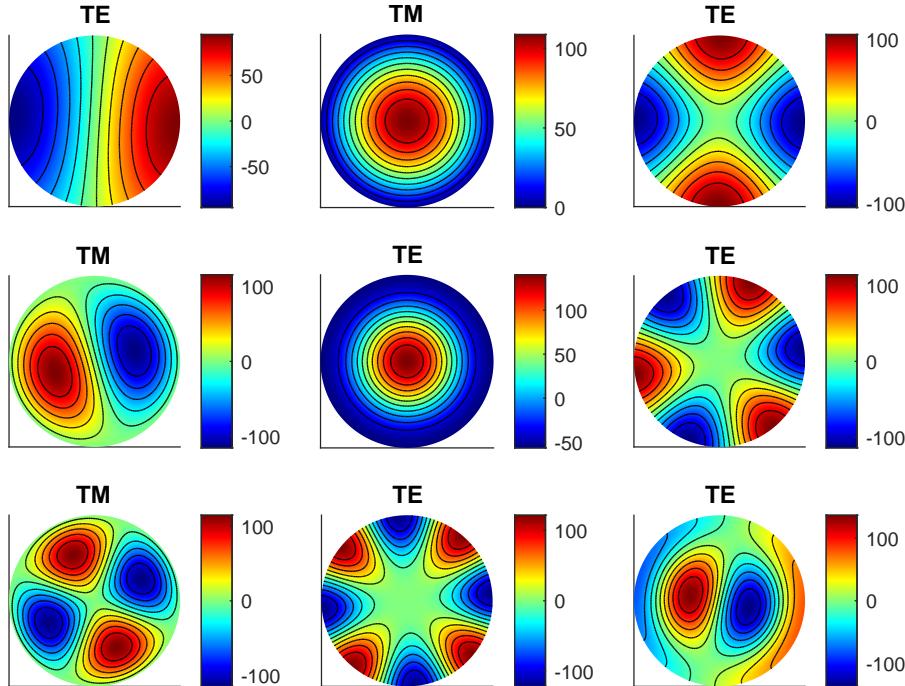
$$f_c = \frac{c}{2\pi} k_c$$

Οι τιμές της συχνότητας αποκοπής για τους πρώτους 12 ρυθμούς TE που βρήκαμε είναι:

$$[0, 0.8788, 0.8788, 1.4583, 1.4583, 1.8304, 2.0067, 2.0068, 2.5415, 2.5416, 2.5489, 2.5491] \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

Η πρώτη συχνότητα των 0 Hz, με H_z σταθερό όπως φαίνεται στο σχήμα 6 παραπέμπει σε TEM ρυθμό και απορρίπτεται. Έπειτα βλέπουμε ότι πολλοί ρυθμοί εμφανίζονται σε δυάδες με ίδια περίπου συχνότητα, και H_z ίδιο με κάποια στροφή. Αυτοί αποτελούν εκφυλισμένους ρυθμούς και απορρίπτουμε τον έναν από τους δύο.

Αφού κάνουμε την ίδια διαδικασία για ρυθμούς TM και κρατήσουμε τους συνολικά 9 πρώτους (μικρότερη συχνότητα αποκοπής) λαμβάνουμε τους:



Σχήμα 7: Οι 9 πρώτοι ρυθμοί. Απεικονίζεται το πλάτος του πεδίου που βρίσκεται στην διεύθυνση μετάδοσης, E_z για TM και H_z για TE.

Τηλογίζω και τις εγκάρσιες συνιστώσες με τις εξισώσεις (14). Συγκεκριμένα εφόσον εξαρτώνται από τη συχνότητα όμως εμείς δεν λύνουμε για κάποια συγκεκριμένη συχνότητα, υπολογίζω χωρίς τις σταθερές, δηλαδή παίρνοντας υπόψη μόνο τις παραγώγους και τα πρόσημα. Ετσι το αποτέλεσμα είναι κάποια ποσότητα αΕ_t που συμβολίζει κάτι ανάλογο στο Ε_t, εφόσον θα τις απεικονίσουμε με διαγράμματα ροής το πλάτος δεν επηρεάζει.

Στο σχήμα 8 φαίνονται οι δυναμικές γραφικές τους.

Οι συχνότητες υπολογίζονται αναλυτικά ως

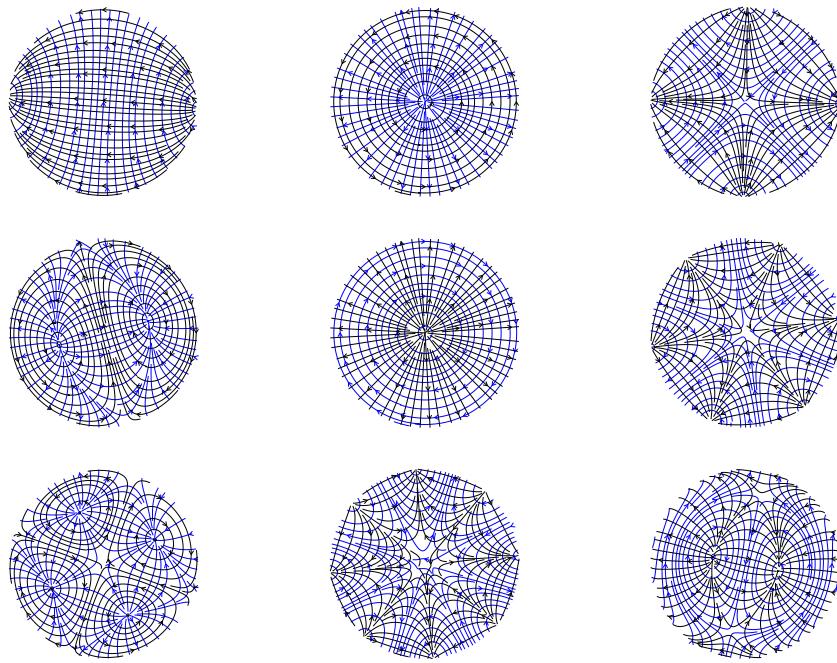
$$f_c^{TE_{nm}} = \frac{c}{2\pi a} p'_{nm} \quad f_c^{TM_{nm}} = \frac{c}{2\pi a} p_{nm}$$

με a την ακτίνα, p'_{nm} τις ρίζες των συναρτήσεων Bessel με πρώτες τιμές:

m\n	0	1	2	3	4
1	3.832	1.841	3.054	4.201	5.3175
2	7.016	5.331	6.706	8.015	9.2824
3	10.173	8.536	9.969	11.346	12.6819

και p_{nm} τα μηδενικά των συναρτήσεων Bessel, με πρώτες τιμές:

m\n	0	1	2	3
1	2.405	3.832	5.135	6.380
2	5.520	7.016	8.417	9.761
3	8.654	10.174	11.620	13.020



Σχήμα 8: Οι 9 πρώτοι ρυθμοί. Απεικονίζονται οι δυναμικές γραμμές των εγκάρσιων συνιστωσών, με μπλε το ηλεκτρικό πεδίο και με μαύρο το μαγνητικό.

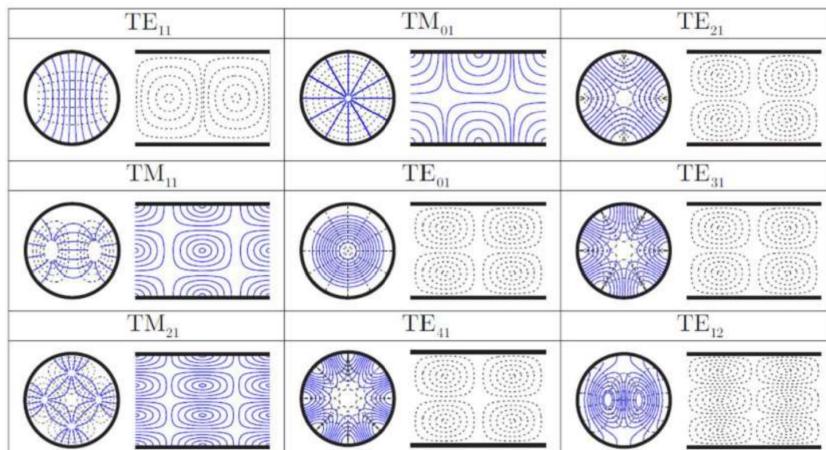
Προκύπτουν αναλυτικά οι 9 μικρότερες συχνότητες αποκοπής:

$$\begin{aligned}
 TE_{11} &: 0.8784 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \\
 TM_{01} &: 1.147 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \\
 TE_{21} &: 1.457 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \\
 TM_{11} &: 1.829 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \\
 TE_{01} &: 1.828 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \\
 TE_{31} &: 2 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \\
 TM_{21} &: 2.45 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \\
 TE_{41} &: 2.537 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \\
 TE_{12} &: 2.544 \cdot 10^{10} \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

Οι 9 μικρότερες συχνότητες αποκοπής που μας επιστρέφει το πρόγραμμα είναι οι:

$$[0.8788, 1.1479, 1.4583, 1.8300, 1.8304, 2.0067, 2.4546, 2.5415, 2.5489] \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

Συγκρίνοντας και το σχήμα 8 με το σχήμα 9 που μας δίνεται, βλέπουμε ότι έχουμε αναγνωρίσει σωστά τους πρώτους 9 ρυθμούς.



Σχήμα 9

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα 7 και 8 βλέπουμε ότι οι ισοσταθμικές των πεδίων στην διεύθυνση μετάδοσης (7) συμπίπτουν με τις δυναμικές γραμμές (8) του εγκάρσιου πεδίου, (του E στα TE και του M στα TM). Αυτό το

καταλαβαίνουμε διότι οι ισοσταθμικές μιας συνάρτησης είναι παντού κάθετες στην χλήση της, και από τις εξισώσεις (14) βλέπουμε ότι στα TE το εγκάρσιο \mathbf{E}_t είναι κάθετο στην χλίση του H_z και στα TM το εγκάρσιο \mathbf{H}_t είναι κάθετο στην χλίση του E_z (H_x ανάλογο της χλίσης του E_z ως προς y και H_y ανάλογο της χλίσης ως προς x .)

Στον παρακάτω πίνακα αναγράφονται οι υπολογισμένες συχνότητες αποκοπής για refinements 0,1,2 και 3, η αναλυτική τιμή των συχνοτήτων αποκοπής και το σχετικό σφάλμα.

Refinement amount	Mode	Analytical (Hz)	Numerical (Hz)	Error (%)
0	TE_{11}	0.8784×10^{10} Hz	0.8833×10^{10} Hz	0.56
	TM_{01}	1.147×10^{10} Hz	1.1546×10^{10} Hz	0.66
	TE_{21}	1.457×10^{10} Hz	1.4726×10^{10} Hz	1.07
	TM_{11}	1.828×10^{10} Hz	1.8546×10^{10} Hz	1.46
	TE_{01}	1.828×10^{10} Hz	1.8621×10^{10} Hz	1.88
	TE_{31}	2.000×10^{10} Hz	2.0386×10^{10} Hz	1.93
	TM_{21}	2.450×10^{10} Hz	2.5169×10^{10} Hz	2.73
	TE_{41}	2.537×10^{10} Hz	2.6049×10^{10} Hz	2.68
	TE_{12}	2.544×10^{10} Hz	2.6234×10^{10} Hz	3.12
	TE_{11}	0.8784×10^{10} Hz	0.8797×10^{10} Hz	0.15
1	TM_{01}	1.147×10^{10} Hz	1.1492×10^{10} Hz	0.19
	TE_{21}	1.457×10^{10} Hz	1.4612×10^{10} Hz	0.29
	TM_{11}	1.828×10^{10} Hz	1.8350×10^{10} Hz	0.33
	TE_{01}	1.828×10^{10} Hz	1.8368×10^{10} Hz	0.48
	TE_{31}	2.000×10^{10} Hz	2.0132×10^{10} Hz	0.66
	TM_{21}	2.450×10^{10} Hz	2.4673×10^{10} Hz	0.71
	TE_{41}	2.537×10^{10} Hz	2.5545×10^{10} Hz	0.69
	TE_{12}	2.544×10^{10} Hz	2.5640×10^{10} Hz	0.79
	TE_{11}	0.8784×10^{10} Hz	0.8788×10^{10} Hz	0.05
	TM_{01}	1.147×10^{10} Hz	1.1479×10^{10} Hz	0.08
2	TE_{21}	1.457×10^{10} Hz	1.4583×10^{10} Hz	0.09
	TM_{11}	1.828×10^{10} Hz	1.8300×10^{10} Hz	0.10
	TE_{01}	1.828×10^{10} Hz	1.8304×10^{10} Hz	0.13
	TE_{31}	2.000×10^{10} Hz	2.0067×10^{10} Hz	0.33
	TM_{21}	2.450×10^{10} Hz	2.4546×10^{10} Hz	0.19
	TE_{41}	2.537×10^{10} Hz	2.5415×10^{10} Hz	0.18
	TE_{12}	2.544×10^{10} Hz	2.5489×10^{10} Hz	0.19
	TE_{11}	0.8784×10^{10} Hz	0.8786×10^{10} Hz	0.02
	TM_{01}	1.147×10^{10} Hz	1.1475×10^{10} Hz	0.04
	TE_{21}	1.457×10^{10} Hz	1.4575×10^{10} Hz	0.03
3	TM_{11}	1.828×10^{10} Hz	1.8287×10^{10} Hz	0.02
	TE_{01}	1.828×10^{10} Hz	1.8288×10^{10} Hz	0.04
	TE_{31}	2.000×10^{10} Hz	2.0051×10^{10} Hz	0.26
	TM_{21}	2.450×10^{10} Hz	2.4514×10^{10} Hz	0.06
	TE_{41}	2.537×10^{10} Hz	2.5383×10^{10} Hz	0.05
	TE_{12}	2.544×10^{10} Hz	2.5451×10^{10} Hz	0.04

Σκέδαση από άπειρο κυκλικό τέλεια αγώγιμο κύλινδρο