

INF-221
Algoritmos y Complejidad
Documentación

Índice general

Índice general	2
1 Consejos y consideraciones	3
1.1. Forma eficiente de leer un problema	3
1.2. Estimación de complejidades aceptadas en función de tamaño de entrada	3
1.3. Técnicas para encontrar propiedades de un problema	3
1.4. Consejos para C++	3
1.5. Consejos para programación dinámica	4
2 Complejidad	6
2.1. Desempeño de algoritmos	6
2.2. Invariante de ciclo	6
2.3. Análisis asintótico	7
2.4. Teorema maestro	8
3 Estructuras de datos	9
3.1. Vector	9
3.2. Stack	11
3.3. Queue	12
3.4. Priority Queue	13
3.5. Set	14
3.6. Map	16
3.7. Disjoint Union Set	18
3.8. Grafo (Implementación con lista de adyacencia)	20
4 Librería <algorithm> C++	23
4.1. sección	23
5 Algoritmos de Sorting	24
6 Grafos	25
7 Fuerza bruta	26
7.1. Problemas Fuerza Bruta	26
8 Algoritmos Greedy	27
8.1. Problemas Greedy	27
9 Programación dinámica	43
9.1. Metodos de resolución de DP	43
9.2. Fibonnaci	43

1 Consejos y consideraciones

1.1. Forma eficiente de leer un problema

- Leer la entrada y salida del problema.
- Leer el enunciado (eliminar información innecesaria en función del paso anterior).
- Obtener **observaciones** y **propiedades** del problema.
- Pensar en un algoritmo (si es menos de 10^8 operaciones, es válido).

1.2. Estimación de complejidades aceptadas en función de tamaño de entrada

n	Peor complejidad aceptada
$n \leq 10$	$O(n!)$, $O(n^7)$, $O(n^6)$
$n \leq 20$	$O(2^n \cdot n)$, $O(n^5)$
$n \leq 80$	$O(n^4)$
$n \leq 400$	$O(n^3)$
$n \leq 7500$	$O(n^2)$
$n \leq 7 \cdot 10^4$	$O(n\sqrt{n})$
$n \leq 5 \cdot 10^5$	$O(n \log n)$
$n \leq 5 \cdot 10^6$	$O(n)$
$n > 10^8$	$O(\log n)$, $O(1)$

1.3. Técnicas para encontrar propiedades de un problema

1. Resolver desde lo específico a lo general.
2. Confiar en tus capacidades y supuestos.
3. Si no se te ocurre nada en 60 minutos, sigue con otra cosa.

1.4. Consejos para C++

La librería más utilizada y que engloba todo lo necesario para problemas de programación competitiva es:

```
#include <bits/stdc++.h>
```

También se recomienda definir aliases para tipos de datos recurrentes con el propósito de agilizar la escritura. Por ejemplo, algunas definiciones pueden ser

```
#define ll long long
#define ld long double
#define vvi std::vector<std::vector<int>>
/*...*/
```

A modo de optimizar, hay configuraciones que se pueden utilizar al inicio de cada programa:

```
std::ios_base::sync_with_stdio(false);
std::cin.tie(NULL);
std::cout.tie(NULL);
```

Para pruebas rápidas de samples, es posible usar el mismo ejecutable junto a un archivo de texto con las entradas esperadas.

```
bashiee@benjito000 $ g++ program.cpp
bashiee@benjito000 $ ./a.out < sample.txt
```

1.5. Consejos para programación dinámica

Cuándo NO usar DP

- **NO hay subestructura óptima:** No hay subproblemas con soluciones óptimas.
- **No hay superposición de problemas:** No hay subproblemas que se resuelvan más de una vez.
- **Hay un greedy que funciona.**
- **Espacio/Tiempo excesivo para las dimensiones del problema.**
- **Problemas NP-Complejos sin restricciones.**

Metodología sistemática

1. **¿Qué quiero calcular? (costos, maximizar, minimizar...).**
2. **¿De qué variables depende?**
3. **Calcular complejidad (Espacio y tiempo).**
4. **¿Es muy costoso? (optimizar, volver al paso 2).**

Patrones comunes

- **DP en 1D:** Subproblemas dependen de estados anteriores inmediatos (fibonacci, coin, stairs...).
- **DP en 2D:** Subproblemas dependen de dos parámetros (knapsack, LCS...)

Errores comunes

- **Olvidar restricciones (estados inválidos).**
- **Índices incorrectos (límites del problema).**
- **Estados insuficientes (No se considera toda la información).**

Consejos clave

- **Buscar opciones recursivas naturales:** ¿Qué pasaría si existiera una función mágica? ¿Cuál sería la última decisión por tomar?
- **Identificar patrones de repetición:** ¿Los mismos subproblemas aparecen más de una vez?
- **Definir un estado por completo:** ¿Qué información se necesita para definir un subproblema por completo?
- **Considerar casos bases:** ¿Cuándo termina la recursión?
- **Empezar con casos pequeños:** Resolver manualmente casos pequeños. Buscar patrones.
- **Pensar en los últimos elementos:** ¿Cómo se llegó a este estado?

2 Complejidad

2.1. Desempeño de algoritmos

Los algoritmos no tienen un rendimiento fijo para cualquier tipo de entrada. Generalmente, hay situaciones donde se comportan de mejor o peor manera dependiendo de la noción de la cual trabajan. En el análisis y diseño de algoritmos se tienen en cuenta los siguientes casos para evaluar el rendimiento de un algoritmo.

Mejor caso

Caso donde el algoritmo funciona de la mejor manera. Por ejemplo, el mejor caso de algunos algoritmos de ordenamiento se considera el que la entrada ya esté ordenada.

Caso promedio

Caso donde el algoritmo posee un tiempo de ejecución esperado dentro una distribución de entradas. Para comprobarlo, se necesita una hipótesis probabilística.

Peor caso

Caso donde el algoritmo trabaja de peor forma. Es la situación que se utiliza generalmente para las notaciones asintóticas. Un ejemplo es una entrada inversamente ordenada para los algoritmos de ordenamiento.

Caso amortizado

Costo promedio de **una operación** en una secuencia larga de operaciones que no depende de la distribución de la entrada. Un ejemplo es el método *push_back* para la clase *vector* de C++.

2.2. Invariante de ciclo

Una técnica que se utiliza a menudo para demostrar la correctitud de un algoritmo es usar un **invariante de ciclo**. Un *invariante* es una afirmación o predicado sobre un conjunto de variables relacionadas que es **siempre verdadero**. La idea es que este invariante sea **constante** en cada iteración y que explique la relación entre las variables de entrada y salida del ciclo.

Etapas del invariante de ciclo

Inicialización: El invariante debe ser verdadero **antes de empezar** el ciclo (caso base).

Mantención: El invariante es verdadero **antes de cada iteración del ciclo** y se mantiene verdadero hasta **antes de la siguiente iteración**. A menudo se utiliza **inducción** para probar este punto con una *hipótesis inductiva* para luego realizar un *paso inductivo*.

Finalización: El invariante debe ser verdadero **después de terminar** el ciclo.

Conclusión: Si el invariante es verdadero en cada etapa, el algoritmo es correcto.

2.3. Análisis asintótico

Una manera de medir la complejidad de un algoritmo es a través del *análisis asintótico*. Dentro de las dimensiones estudiadas, se consideran dos grandes aspectos:

- Complejidad temporal ($T(n)$): Predicción de operaciones fundamentales en base al tamaño de la entrada.
- Complejidad espacial ($E(n)$): Predicción del costo en memoria en base al tamaño de la entrada.

En base a estos criterios, se definen las siguientes notaciones:

Notación Big O

La notación *Big O* se relaciona con $T(n)$.

Se utiliza $O(f(n))$ como representación del límite en el peor caso de tiempo de ejecución de un algoritmo en base a un tamaño de entrada n .

Formalmente, se define como:

$$T(n) = O(f(n)) \text{ ssi } \exists c, n_0 > 0 \text{ t.q. } T(n) \leq c \cdot f(n), \forall n \geq n_0$$

Notación little o

La notación *little o* se relaciona con $T(n)$.

A diferencia de *Big O*, la notación *little o* permite afirmar que $T(n)$ **siempre** es menor que $c \cdot f(n)$ por muy pequeño que sea c a partir de un n_0 y puede hacerse más pequeña de manera arbitraria.

Formalmente, se define como:

$$T(n) = o(f(n)) \text{ ssi } \exists c, n_0 > 0 \text{ t.q. } T(n) < c \cdot f(n), \forall n \geq n_0$$

Por otro lado, también se puede intuir a través de esta relación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{T(n)}{f(n)} \right) = 0$$

Notación Big Omega

La notación *Big Omega* se relaciona con $T(n)$.

Se utiliza $\Omega(f(n))$ como representación de la cota inferior del tiempo de ejecución de un algoritmo para un tamaño de entrada n .

Formalmente, se define como:

$$T(n) = \Omega(f(n)) \text{ ssi } \exists c, n_0 > 0 \text{ t.q. } T(n) \geq c \cdot f(n), \forall n \geq n_0$$

Notación little omega

La notación *little omega* se relaciona con $T(n)$.

Similar a la notación *little o*, la notación *little omega* permite afirmar que $T(n)$ es **estrictamente** mayor que $c \cdot f(n)$ a partir de un n_0 sea cual sea el valor de c .

Formalmente, se define como:

$$T(n) = \omega(f(n)) \text{ ssi } \exists c, n_0 > 0 \text{ t.q. } T(n) > c \cdot f(n), \forall n \geq n_0$$

Paralelamente, se puede intuir a partir de la siguiente relación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{T(n)}{f(n)} \right) = \infty$$

Notación Big Theta

La notación *Big Theta* se relaciona con $T(n)$.

Se utiliza $\Theta(f(n))$ para un $T(n)$ donde se cumple que $T(n) = \mathcal{O}(f(n))$ y $T(n) = \Omega(f(n))$ para simbolizar la cota superior e inferior en tiempo de ejecución de un algoritmo frente a un tamaño de entrada n .

Formalmente, se define como:

$$T(n) = \Theta(f(n)) \text{ ssi } \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \text{ t.q. } c_1 \cdot f(n) \leq T(n) \leq c_2 \cdot f(n), \forall n \geq n_0$$

2.4. Teorema maestro

Para determinar la complejidad de un algoritmo recursivo se utiliza a menudo el **teorema maestro**.

Formalmente, se define la siguiente relación para casos grandes:

$$T(n) \leq a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$$

Parámetros:

a es el número de llamadas recursivas.

b el factor de disminución del tamaño de entrada (sub-problemas).

d el exponente asociado al trabajo no recursivo.

De esta relación y si se cumple que $a \geq 1, b > 1$ y $d \geq 0$, se cumple que:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

3 Estructuras de datos

3.1. Vector

El vector es un tipo de arreglo dinamico en C++. Aqui se encuentran sus operaciones principales

```
/**
 * Creación de un vector
 */
std::vector<T> vector;

/**
 * Creación de un vector con tamaño n
 * @timecomplexity: O(n)
 */
std::vector<T> vector(n);

/**
 * Creación de un vector con tamaño n y sus valores en 0
 * @timecomplexity: O(n)
 */
std::vector<T> vector(n,0);

/**
 * Retorna un iterador al inicio del vector
 */
vector.begin();

/**
 * Retorna un iterador al final del vector
 */
vector.end();

/**
 * Acceso a un elemento especifico de un vector
 * @timecomplexity: O(1)
 */
vector[i];

/**
 * Agregar un elemento al final del vector
 * @timecomplexity: O(1)*
 */
vector.push_back(i);

/**
 * Quitar un elemento del final del vector
 * @timecomplexity: O(1)
 */
vector.pop_back();
```

```
vector.pop_back();

< /**
 * Inserta un elemento en la posición i
 * @timecomplexity: O(n)
 */
vector.insert(vector.begin() + i, item);

< /**
 * Elimina un elemento en la posición i
 * @timecomplexity: O(n)
 */
vector.erase(vector.begin() + i, item);

< /**
 * Revisa si el vector esta vacio
 * @timecomplexity: O(1)
 */
vector.empty();

< /**
 * Retorna el tamaño del vector
 * @timecomplexity: O(1)
 */
vector.size();
```

3.2. Stack

La Stack es la estructura de datos que cumple con la propiedad de LIFO

```
/*
 * Declaración de un stack con tipo de dato T
 */
std::stack<T> st;

/**
 * Retorna el tamaño del stack
 */
st.size();

/**
 * Ingresá un dato al stack
 * @timecomplexity: O(1)
 */
st.push(item);

/**
 * Elimina el tope del stack
 * @timecomplexity: O(1)
 */
st.pop();

/**
 * Retorna al elemento del tope del stack
 * @timecomplexity: O(1)
 */
st.top();
```

3.3. Queue

La Queue es la estructura de datos que cumple con la propiedad de FIFO

```
/**  
 * Declaración de una queue del tipo T  
 */  
std::queue<T> queue;  
  
/**  
 * Retorna el tamaño de la queue  
 * @timecomplexity: O(1)  
 */  
queue.size();  
  
/**  
 * Ingresar un elemento a la queue  
 * @timecomplexity: O(1)  
 */  
queue.push(item);  
  
/**  
 * Elimina el elemento al inicio de la queue  
 * @timecomplexity: O(1)  
 */  
queue.pop();  
  
/**  
 * Retorna el elemento al frente de la queue  
 * @timecomplexity: O(1)  
 */  
queue.top();
```

3.4. Priority Queue

Una priority queue permite mantener los datos de mayor prioridad con acceso $O(1)$. Esta mayor prioridad generalmente se basa en base al valor.

```
/**
 * Crea una priority queue del tipo T
 * El elemento al tope de la priority queue sera el de mayor valor
 */
std::priority_queue<T> pq;

/**
 * Crea una priority queue del tipo T
 * El elemento al tope de la priority queue sera aquel de menor valor
 */
std::priority_queue<T, std::vector<T>, std::greater<T>> min_pq;

/**
 * Retorna el tamaño de la priority queue
 * @timecomplexity: O(1)
 */
pq.size();

/**
 * Inserta un elemento en la priority queue
 * @timecomplexity: O(log{n})
 */
pq.insert(item);

/**
 * Elimina el elemento de mayor prioridad
 * @timecomplexity: O(log{n})
 */
pq.pop();

/**
 * Obtiene el elemento al tope de la priority queue
 * @timecomplexity: O(1)
 */
pq.top();
```

3.5. Set

Un set es una estructura de datos que permite guardar elementos únicos.

```
/**
 * Declaración de un set de tipo T
 */
std::set<T> set;

/**
 * Retorna el tamaño del set
 * @timecomplexity: O(1)
 */
set.size();

/**
 * Inserta un elemento al set
 * @timecomplexity: O(\log{n})
 */
set.insert(item);

/**
 * Elimina el elemento del set
 * @timecomplexity: O()
 */
set.erase(item);

/**
 * Retorna un iterador al elemento item. En caso que no existe retorna un iterador al final
 * @timecomplexity: O(\log{n})
 */
set.find(item);

/**
 * Recorrer el set con un iterador. Permite obtener los elementos en orden basado en
 * → red-black-tree
 * @timecomplexity: O(n)
 */
for(auto itr = set.begin(); itr != set.end(); itr++){}
```

Unordered Set

Un unordered set cumple con las mismas propiedades que el set, pero con una complejidad distinta. Su complejidad pasa a ser $O(1)$ dada a pasar de un Red-Black Tree a funciones hash.

```
/**
 * Declaración de un unordered_set de tipo T
 */
std::unordered_set<T> unordered_set;

/**
 * Retorna el tamaño del unordered_set
 * @timecomplexity: O(1)
 */
unordered_set.size();

/**
```

```
* Inserta un elemento al unordered_set
* @timecomplexity: O(1)
*/
unordered_set.insert(item);

/**
* Elimina el elemento del unordered_set
* @timecomplexity: O(1)
*/
unordered_set.erase(item);

/**
* Retorna un iterador al elemento item. En caso que no existe retorna un iterador al final
* @timecomplexity: O(1)
*/
unordered_set.find(item);
```

3.6. Map

Un map es una estructura de datos que guarda valores en la forma llave : valor.

```

/*
 * Declaración de un map con llave del tipo T1 y valor del tipo T2
 */
std::map<T1,T2> map;

/**
 * Retorna el tamaño del map
 * @timecomplexity: O(1)
 */
map.size();

/**
 * Inserta un par llave - valor dentro del map
 * @timecomplexity: O(\log{n})
 */
map.insert({llave,valor});

/**
 * Elimina el par que contenga la llave
 * @timecomplexity: O(\log{n})
 */
map.erase(llave);

/**
 * Retorna un iterador hacia item. Retorna un iterador al final si no existe
 * @timecomplexity: O(\log{n})
 */
itr = map.find(llave);

/**
 * Acceso al primer elemento (llave)
 */
itr -> first;

/**
 * Acceso al segundo elemento (valor)
 */
itr -> second;
```

Unordered Map

El unordered map cumple con las mismas propiedades que un Map. Su complejidades pasan a ser $O(1)$, dado de pasar de un Red-Black tree a un hash

```

/*
 * Declaración de un unordered_map con llave del tipo T1 y valor del tipo T2
 */
std::unordered_map<T1,T2> unordered_map;

/**
 * Retorna el tamaño del unordered_map
```

```
* @timecomplexity: O(1)
*/
unordered_map.size();

/**
 * Inserta un par llave - valor dentro del unordered_map
 * @timecomplexity: O(1)
 */
unordered_map.insert({llave,valor});

/**
 * Elimina el par que contenga la llave
 * @timecomplexity: O(1)
 */
unordered_map.erase(llave);

/**
 * Retorna un iterador hacia item. Retorna un iterador al final si no existe
 * @timecomplexity: O(1)
 *
 */
itr = unordered_map.find(llave);

/**
 * Acceso al primer elemento (llave)
 */
itr -> first;

/**
 * Acceso al segundo elemento (valor)
 */
itr -> second;
```

3.7. Disjoint Union Set

El disjointed union set permite identificar si dos elementos estan del mismo set. Si no entiendes su funcionamiento, no pasa nada. Utiliza la siguiente implementación para algoritmos como Kruskal

```

/*
 * Clase que implementa un Disjoint Set Union (DSU)
 */
class DisjointSetUnion{

private:

    std::vector<int> parent;
    std::vector<int> rank; // Para mantener la altura del arbol

public:

    /**
     *
     * @time_complexity: O(n)
     * @space_complexity: O(n)
     */
    DisjointSetUnion(int n){
        parent.resize(n);
        std::iota(parent.begin(), parent.end(), 0);
        rank.assign(n, 0);
    }

    /**
     *
     * @time_complexity: O(\alpha(N))
     * @space_complexity: O(n)
     */
    int find(int i) {
        if (parent[i] == i) {return i; }
        return parent[i] = find(parent[i]);
    }

    /**
     *
     * @time_complexity: O(\alpha(N))
     * @space_complexity: O(n)
     */
    bool unite(int x, int y){
        int root_x = find(x);
        int root_y = find(y);

        if(root_x != root_y){

            if (rank[root_x] < rank[root_y]) {
                parent[root_x] = root_y;
            } else if (rank[root_x] > rank[root_y]) {
                parent[root_y] = root_x;
            } else {
                parent[root_y] = root_x;
                rank[root_x]++;
            }
        }
        return true;
    }
}
```

```
    }  
  
    return false;  
}  
  
};
```

3.8. Grafo (Implementación con lista de adyacencia)

```

    /**
 * Clase que implementa un grafo mediante lista de adyacencia
 *
 * Esta implementación tiene los siguientes supuestos
 * - El valor del nodo corresponde a su indice. (Nodo 0 == nodes[0])
 * - No habra multiples aristas en la misma dirección
 * - No es posible borrar nodos (Es programable, pero depende del problema)
 */
class GraphAdjacency{

private:

    /**
     * @brief Representa una arista con dirección a v y peso w
     */
    struct Edge{
        int node_v; // Indice / Valor de la variable de destino
        int weight; // Peso de la arista
    };

    // Definición de estados
    const int ACTIVE = 1;
    const int INACTIVE = 0;

    // Definición de estados para DFS
    const int NOT_VISITED = 0;
    const int IN_PROCESS = 1;
    const int VISITED = 2;

    // Definición de estados para Bellman
    const int INF = INT_MAX;
    const int MINF = INT_MIN;

    /**
     * @brief Representa un nodo con valor asociado y estado, utilizado para varios algoritmos
     */
    struct Node{
        int node_val; // Posible valor a guardar si indice no equivale
        int state; // Estado del nodo (Utilizado para algoritmos)
        std::vector<Edge> adj; // Lista de adyacencia del nodo actual
    };

    int n_nodes; // Cantidad de nodos en el grafo
    int m_edges; // Cantidad de aristas en el grafo

    std::vector<Node> nodes; // Vector que guarda los nodos relacionados al grafo.

public:

    GraphAdjacency(){
        n_nodes = 0;
        m_edges = 0;
    }
}

```

```

    }

    /**
     * Agrega un nodo al grafo
     * Por convención, este sera accesible por el indice, no su valor guardado
     *
     * @param node_val Valor para guardar dentro del nodo,
     */
    void addNode(int node_val){

        Node new_node = {node_val,ACTIVE,{}};
        nodes.push_back(new_node);
        n_nodes++;

    }

    /**
     * Agrega una arista al grafo
     * Si la arista ya existe, modificará su peso
     *
     * @param node_u Indice para acceder al nodo inicial
     * @param node_v Indice para acceder al nodo destino
     * @param weight Peso de la arista
     */
    void addEdge(int node_u, int node_v, int weight){

        if(node_u < n_nodes && node_v < n_nodes){

            std::vector<Edge>& adj = nodes[node_u].adj;

            for(Edge edge : adj){
                if(edge.node_v == node_v){
                    modifyEdge(node_u,node_v,weight);
                    return;
                }
            }

            nodes[node_u].adj.push_back({node_v,weight});
            m_edges++;
        }
    }

    /**
     * Borra una arista al grafo
     *
     * @param node_u Indice para acceder al nodo inicial
     * @param node_v Indice para acceder al nodo destino
     */
    void deleteEdge(int node_u, int node_v){

        if(node_u < n_nodes && node_v < n_nodes){

            std::vector<Edge>& adj = nodes[node_u].adj;
            auto itr = adj.begin();

            while(itr != adj.end()){
                if(itr->node_v == node_v){


```

```
        adj.erase(itr);
        m_edges--;
        break;
    }
    else{itr++;}
}
}

/***
 * Modifica el peso de una arista del grafo
 *
 * @param node_u Indice para acceder al nodo inicial
 * @param node_v Indice para acceder al nodo destino
 * @param weight Peso de la arista
 */
void modifyEdge(int node_u, int node_v, int new_weight){

    if(node_u < n_nodes && node_v < n_nodes){
        for(auto itr = nodes[node_u].adj.begin(); itr != nodes[node_u].adj.end(); itr++){
            if(itr->node_v == node_v){itr->weight = new_weight;}
        }
    }
}

/***
 * Modifica el estado de un nodo
 *
 * @param node_u Indice para acceder al nodo inicial
 * @param new_state Nuevo estado para el nodo.
 */
void modifyNodeState(int node_u, int new_state){

    if(node_u < n_nodes){
        nodes[node_u].state = new_state;
    }
}
```

4 Librería <*algorithm*> C++

apuntes

4.1. sección

apuntes

5 Algoritmos de Sorting

6 Grafos

7 Fuerza bruta

7.1. Problemas Fuerza Bruta

La siguiente sección incluye todos los problemas de fuerza bruta realizados

8 Algoritmos Greedy

8.1. Problemas Greedy

La siguiente sección incluye todos los problemas Greedy realizados.

Frosh Week

Professor Zac is trying to finish a collection of tasks during the first week at the start of the term. He knows precisely how long each task will take, down to the millisecond. Unfortunately, it is also Frosh Week. Zac's office window has a clear view of the stage where loud music is played. He cannot focus on any task when music is blaring.

The event organizers are also very precise. They supply Zac with intervals of time when music will not be playing. These intervals are specified by their start and end times down to the millisecond.

Each task that Zac completes must be completed in one quiet interval. He cannot pause working on a task when music plays (he loses his train of thought). Interestingly, the lengths of the tasks and quiet intervals are such that it is impossible to finish more than one task per quiet interval!

Given a list of times t_i (in milliseconds) that each task will take and a list of times ℓ_j (in milliseconds) specifying the lengths of the intervals when no music is being played, what is the maximum number of tasks that Zac can complete?

Input

The first line of input contains a pair of integers n and m , where n is the number of tasks and m is the number of time intervals when no music is played. The second line consists of a list of integers t_1, t_2, \dots, t_n indicating the length of time of each task. The final line consists of a list of times $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ indicating the length of time of each quiet interval when Zac is at work this week.

You may assume that $1 \leq n, m \leq 200\,000$ and $100\,000 \leq t_i, \ell_j \leq 199\,999$ for each task i and each quiet interval j .

Output

Output consists of a single line containing a single integer indicating the number of tasks that Zac can accomplish from his list during this first week.

```
#include <bits/stdc++.h>

#define ll long long

int main(){

    ll t;
    std::cin >> t;

    while(t--){

        ll l, n;
        std::cin >> l >> n;

        ll input;
        std::vector<ll> positions;

        for(int i=0; i<n; i++){
            std::cin >> input;
            positions.push_back(input);
        }

        ll min = 0;
        ll max = 0;

        for(int i=0; i<n; i++){

            ll curr_pos = positions[i];

```

```
    ll left_distance = curr_pos;
    ll right_distance = l - curr_pos;

    ll min_curr_distance = std::min(left_distance,right_distance);
    min = std::max(min_curr_distance,min);

    ll max_curr_distance = std::max(left_distance,right_distance);
    max = std::max(max_curr_distance,max);
}

std::cout << min << " " << max << std::endl;

}

return 0;
}
```

Assigning Workstations

Penelope is part of the admin team of the newly built supercomputer. Her job is to assign workstations to the researchers who come here to run their computations at the supercomputer.

Penelope is very lazy and hates unlocking machines for the arriving researchers. She can unlock the machines remotely from her desk, but does not feel that this menial task matches her qualifications. Should she decide to ignore the security guidelines she could simply ask the researchers not to lock their workstations when they leave, and then assign new researchers to workstations that are not used any more but that are still unlocked. That way, she only needs to unlock each workstation for the first researcher using it, which would be a huge improvement for Penelope.

Unfortunately, unused workstations lock themselves automatically if they are unused for more than m minutes. After a workstation has locked itself, Penelope has to unlock it again for the next researcher using it. Given the exact schedule of arriving and leaving researchers, can you tell Penelope how many unlockings she may save by asking the researchers not to lock their workstations when they leave and assigning arriving researchers to workstations in an optimal way?

You may assume that there are enough workstations available.

Input

The input consists of: * one line with two integers n ($1 \leq n \leq 300\,000$), the number of researchers, and m ($1 \leq m \leq 10^8$), the number of minutes of inactivity after which a workstation locks itself; * n lines each with two integers a and s ($1 \leq a, s \leq 10^8$), representing a researcher that arrives at a minutes and stays for s minutes.

Output

Output the maximum number of unlockings Penelope may save herself.

Sample 1

```
3 5
1 5
6 3
14 6
```

Output 1:

```
2
```

Input

```
2
5 10
2 6
1 2
17 7
3 9
15 6
```

Output 2

```
3
```

```
#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
```

```

struct Worker{
    ll arrive_time;
    ll duration;
};

struct Workstation{
    ll start;
    ll end;
};

int main(){

    ll n, m;
    std::cin >> n >> m;

    std::priority_queue<ll> inactive_time;
    std::vector<Worker> workers;

    for(int i=0; i<n; i++){

        ll arrive_time, duration;
        std::cin >> arrive_time >> duration;

        Worker worker;
        worker.arrive_time = arrive_time;
        worker.duration = duration;

        workers.push_back(worker);
    }

    std::sort(workers.begin(), workers.end(), [](const Worker&a, const Worker&b){
        return a.arrive_time < b.arrive_time;
    });

    ll unlockings_saved = 0;

    for(int i=0; i<n; i++){

        ll curr_workstation;
        Worker curr_worker = workers[i];

        while(!inactive_time.empty()){

            ll curr_workstation_inactive = -inactive_time.top();

            // no activity has started the inactive period
            if(curr_workstation_inactive > curr_worker.arrive_time){
                break;
            }

            // In the inactive period
            else if(curr_workstation_inactive <= curr_worker.arrive_time &&
                   curr_worker.arrive_time <= curr_workstation_inactive+m){
                unlockings_saved++;
                inactive_time.pop();
                break;
            }
        }
    }
}

```

```
    }

    // inactive_time already ended
    else{
        inactive_time.pop();
    }

}

curr_workstation = curr_worker.arrive_time + curr_worker.duration;
inactive_time.push(-curr_workstation);

}

std::cout << unlockings_saved << std::endl;

return 0;
}
```

Birds on a wire

There is a long electrical wire of length l centimetres between two poles where birds like to sit. After a long day at work you like to watch the birds on the wire from your balcony. Some time ago you noticed that they don't like to sit closer than d centimetres from each other. In addition, they cannot sit closer than 6 centimetres to any of the poles, since there are spikes attached to the pole to keep it clean from faeces that would otherwise damage and weaken it. You start wondering how many more birds can possibly sit on the wire.

Task

Given numbers l and d , how many additional birds can sit on the wire given the positions of the birds already on the wire? For the purposes of this problem we assume that the birds have zero width.

Input

The first line contains three space separated integers: the length of the wire l , distance d and number of birds n already sitting on the wire. The next n lines contain the positions of the birds in any order. All numbers are integers, $1 \leq l, d \leq 1000\,000\,000$ and $0 \leq n \leq 20\,000$. (If you have objections to the physical plausibility of fitting that many birds on a line hanging between two poles, you may either imagine that the height of the line is 0 cm above ground level, or that the birds are ants instead.) You can assume that the birds already sitting on the wire are at least 6 cm from the poles and at least d centimetres apart from each other.

Output

Output one line with one integer – the maximal number of additional birds that can possibly sit on the wire.

```
#include <bits/stdc++.h>

#define ll long long

int main(){

    ll l,d,n;
    std::cin >> l >> d >> n;

    std::vector<ll> positions;
    ll input;
    for(int i=0; i<n; i++){
        std::cin >> input;
        positions.push_back(input);
    }

    if(n>0){std::sort(positions.begin(), positions.end());}

    ll new_birds = 0;

    // case birds
    for(ll i=0; i<n-1; i++){

        ll pos1 = positions[i];
        ll pos2 = positions[i+1];

        new_birds += std::max((pos2-pos1)/d - 1, 0ll);
    }

    // edge cases
    if(n > 0){
        new_birds += (positions[0]-6)/d;
        new_birds += (l-6-positions[n-1])/d;
    }
}
```

```
    }
    else if(l >= 12) // no birds but string
        new_birds += (l-12)/d + 1;

    std::cout << new_birds << std::endl;
    return 0;
}
```

Shopaholic

Lindsay is a shopaholic. Whenever there is a discount of the kind where you can buy three items and only pay for two, she goes completely mad and feels a need to buy all items in the store. You have given up on curing her for this disease, but try to limit its effect on her wallet.

You have realized that the stores coming with these offers are quite selective when it comes to which items you get for free; it is always the cheapest ones. As an example, when your friend comes to the counter with seven items, costing 400400, 350350, 300300, 250250, 200200, 150150, and 100100 dollars, she will have to pay 15001500 dollars. In this case she got a discount of 250250 dollars. You realize that if she goes to the counter three times, she might get a bigger discount. E.g. if she goes with the items that costs 400400, 300300 and 250250, she will get a discount of 250250 the first round. The next round she brings the item that costs 150150 giving no extra discount, but the third round she takes the last items that costs 350350, 200200 and 100100 giving a discount of an additional 100100 dollars, adding up to a total discount of 350350.

Your job is to find the maximum discount Lindsay can get.

Input

The first line of input gives the number of items Lindsay is buying, $1 \leq n \leq 200000$. The next line gives the prices of these items, which are integers $1 \leq p_i \leq 200000$.

Output

Output one line giving the maximum discount Lindsay can get by selectively choosing which items she brings to the counter at the same time.

```
#include <bits/stdc++.h>

#define ll long long

int main(){

    ll n;
    std::cin >> n;

    std::priority_queue<ll> prices;

    while(n--){
        ll item_price;
        std::cin >> item_price;
        prices.push(item_price);
    }

    std::vector<ll> trio;
    ll discounts = 0;

    while(!prices.empty()){

        trio.push_back(prices.top());
        prices.pop();

        if(trio.size() == 3){
            discounts += *std::min_element(trio.begin(), trio.end());
            trio.clear();
        }
    }
}
```

```
    std::cout << discounts;  
  
    return 0;  
}
```

Boiling Vegetables

The trick to boiling vegetables is to make sure all pieces are about the same size. If they are not, the small ones get too soft or the large ones get undercooked (or both). Fortunately, you have heard of the kitchen knife, but your parents' warnings of using sharp instruments still echoes in your head. Therefore you better use it as little as possible. You can take a piece of a vegetable of weight w and cut it arbitrarily in two pieces of weight w_{left} and w_{right} , where $w_{\text{left}} + w_{\text{right}} = w$. This operation constitutes a "cut". Given a set of pieces of vegetables, determine the minimum number of cuts needed to make the ratio between the smallest and the largest resulting piece go above a given threshold.

Input

The input starts with a floating point number T with 2 decimal digits, $0,5 < T < 1$, and a positive integer $N \leq 1000$. Next follow N positive integer weights w_1, w_2, \dots, w_N . All weights are less than 10^6 .

Output

Output the minimum number of cuts needed to make the ratio between the resulting minimum weight piece and the resulting maximum weight piece be above T . You may assume that the number of cuts needed is less than 500. To avoid issues with floating point numbers, you can assume that the optimal answer for ratio T is the same as for ratio $T' + 0,0001$.

```
#include <bits/stdc++.h>

#define ld float
#define ll long long

using namespace std;

int main(){

    ld T;
    cin >> T;

    ll N;
    cin >> N;

    auto comp = [] (const pair<ll,ll> &a, const pair<ll,ll> &b){
        return (a.first/a.second) < (b.first/b.second);
    };

    priority_queue<pair<ll,ll>, vector<pair<ll,ll>>, decltype(comp)> ratios(comp);

    ld min_value = LONG_LONG_MAX;
    ll weight;

    while(N--){
        cin >> weight;
        ratios.push({weight, 1});
        min_value = std::min(min_value, (ld)weight);
    }

    ll cuts = 0;

    while(!ratios.empty()){
        pair<ll, ll> max_ratio = ratios.top();
        if(min_value/(max_ratio.first/max_ratio.second) >= T) break;
        ratios.pop();
        ll new_weight = max_ratio.first - min_value;
        ratios.push({new_weight, 1});
        min_value = std::min(min_value, (ld)new_weight);
        cuts++;
    }
}
```

```
    ratios.pop();
    ratios.push({max_ratio.first, (max_ratio.second + 1)});
    cuts++;

    min_value = std::min(min_value, (ld)(max_ratio.first/(max_ratio.second + 1)));

}

std::cout << cuts;

return 0;
}
```

Square Peg in a Round Hole

Mr. Johnson likes to build houses. In fact, he likes it so much that he has built a lot of houses that he has not yet placed on plots. He has recently acquired N circular plots. The city government has decided that there can be only one house on each plot, and a house cannot touch the boundary of the plot.

Mr. Johnson has M circular houses and K square houses. Help him figure out how many of the plots he can fill with houses so that he can get some money back on his investments.

Input

The first line of input consists of 3 space-separated integers N , M , and K . The second line contains N space-separated integers, where the i^{th} integer denotes the radius r'_i of the i^{th} plot. The third line contains M space-separated integers, where the i^{th} integer denotes the radius r_i of the i^{th} circular house. The fourth line contains K space-separated integers, where the i^{th} integer denotes the side length s_i of the i^{th} square house.

Output

Output the largest number of plots he can fill with houses.

Limits

- $1 \leq N, M, K, r_i, s_i \leq 100$

```
#include <bits/stdc++.h>

#define ld long double

int main(){

    ld n,m,k;
    std::cin >> n >> m >> k;

    std::priority_queue<ld> plot_radius;
    std::priority_queue<ld> house_radius;

    ld input;
    while(n--){
        std::cin >> input;
        plot_radius.push(input);
    }

    while(m--){
        std::cin >> input;
        house_radius.push(input);
    }

    while(k--){
        std::cin >> input;
        house_radius.push(input / std::sqrt(2.0));
    }

    long long solution = 0;

    while(!plot_radius.empty() && !house_radius.empty()){

        ld curr_plot_radius = plot_radius.top();
```

```
plot_radius.pop();

while(!house_radius.empty()){

    ld curr_house_radius = house_radius.top();
    house_radius.pop();
    if(curr_house_radius < curr_plot_radius){
        solution++;
        break;
    }
}

std::cout << solution;

return 0;
}
```

Ants

An army of ants walk on a horizontal pole of length l cm, each with a constant speed of 1 cm/s. When a walking ant reaches an end of the pole, it immediately falls off it. When two ants meet they turn back and start walking in opposite directions. We know the original positions of ants on the pole, unfortunately, we do not know the directions in which the ants are walking. Your task is to compute the earliest and the latest possible times needed for all ants to fall off the pole.

Input

The first line of input contains one integer giving the number of cases that follow, at most 100. The data for each case start with two integer numbers: the length l of the pole (in cm) and n , the number of ants residing on the pole. These two numbers are followed by n integers giving the position of each ant on the pole as the distance measured from the left end of the pole, in no particular order. All input integers are between 0 and 1,000,000 and they are separated by whitespace.

Output

For each case of input, output two numbers separated by a single space. The first number is the **earliest** possible time when all ants fall off the pole (if the directions of their walks are chosen appropriately) and the second number is the **latest** possible such time.

```
#include <bits/stdc++.h>

#define ll long long

int main(){

    ll t;
    std::cin >> t;

    while(t--){
        ll l, n;
        std::cin >> l >> n;

        ll input;
        std::vector<ll> positions;

        for(int i=0; i<n; i++){
            std::cin >> input;
            positions.push_back(input);
        }

        ll min = 0;
        ll max = 0;

        for(int i=0; i<n; i++){

            ll curr_pos = positions[i];

            ll left_distance = curr_pos;
            ll right_distance = l - curr_pos;

            ll min_curr_distance = std::min(left_distance,right_distance);
            min = std::max(min_curr_distance,min);
        }
    }
}
```

```
    ll max_curr_distance = std::max(left_distance,right_distance);
    max = std::max(max_curr_distance,max);
}

std::cout << min << " " << max << std::endl;

}

return 0;
}
```

9 Programación dinámica

Programación dinámica es una forma de resolver algoritmos para optimizar los recursos recursivos de un problema.

La idea principal de DP (dynamic programming) es intentar memorizar estados previos para no tener que calcularlos nuevamente en cada iteración.

9.1. Métodos de resolución de DP

Memorización

La memorización es un método del tipo Top Down. En esta, se tiene una EDD que mantenga guardados los datos calculados previamente mas los datos base. Si al intentar calcular un elemento este no se encuentra dentro de la memoria, entonces ahí recién calcula, para luego guardarlo en memoria.

Tabulación

Tabulación es un método Bottom Up, en el cual primero se calculan las instancias más pequeñas del problema. Se utiliza una tabla dp que contiene las primeras soluciones para caso base, para luego ir llenando con fórmula recursiva. La llamada recursiva es en la tabla, no en la función.

9.2. Fibonacci

The Fibonacci numbers, commonly denoted $F(n)$ form a sequence, called the Fibonacci sequence, such that each number is the sum of the two preceding ones, starting from 0 and 1. That is,

$$F(0) = 0, F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2), \text{ for } n > 1.$$

Given n , calculate $F(n)$.

Example 1:

Input: $n = 2$

Output: 1

Explanation: $F(2) = F(1) + F(0) = 1 + 0 = 1$.

Example 2:

Input: $n = 3$

Output: 2

Explanation: $F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$.

Example 3:

Input: $n = 4$

Output: 3

Explanation: $F(4) = F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$.

Constraints:

$0 \leq n \leq 30$

```
class Solution {
public:
    std::map<int, int> dp;

    Solution(){
        dp[0] = 0;
        dp[1] = 1;
    }

    /**
     * Calculates fibonacci sequence using a Top-Down approach
     * - Base case: 0 and 1 results added previously on memory. Memory[0] = 0 and Memory[1]
     *   = 1
     *
     * @param number Number of the fibonacci sequence to be calculated.
     * @param memory Map that stores previous calculated numbers in fibonacci
     */
    int fib(int n) {
        if(dp.find(n) == dp.end()){
            dp[n] = fib(n-1) + fib(n-2);
        }
        return dp[n];
    }
};
```