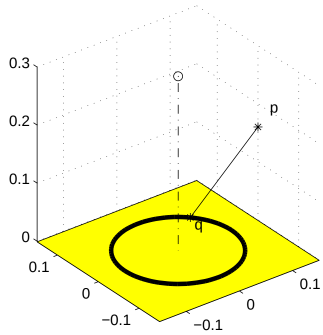
3B.18: Teslatrasslet — snurrig bana i magnetfält

Genom en ring med radien a går strömmen I_0. Ringen är placerad i planet $z = 0$ med centrum i origo. Strömmen ger upphov till ett magnetfält. Låt $\mathbf{q}$ vara en punkt på ringen, $\mathbf{q} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$. I punkten $\mathbf{p} = (r, 0, z)$ bestäms det magnetiska fältet enligt Biot-Savarts lag av



$$\mathbf{B}(r,0,z) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3}\, a\, d\varphi$$

μ_r är permeabilitetstalet för ledaren och $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ (i SI-enheter). $\mathbf{i}(\varphi) = I_0(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\mathbf{s}(\varphi) = \mathbf{p} - \mathbf{q} = (r - a\cos\varphi,\, -a\sin\varphi,\, z)$ och s är avståndet $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_2 = \sqrt{(r - a\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi + z^2}$.

Visa att fältkomponenterna blir

$$B_x = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\cos\varphi}{s^3}\, d\varphi, \quad B_y = 0, \quad B_z = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a - r\cos\varphi}{s^3}\, d\varphi$$

där konstanten $C = \mu_r I_0\, a \cdot 10^{-7}$ med I_0 i ampere och a i meter. Enheten för magnetisk flödestäthet är *tesla*. Magnetfältet har som synes endast komponenter i radiell led och i z-led. Av symmetriskäl gäller detta för alla vertikala plan genom origo. Komponentbeteckningen B_x (i planet $y = 0$) ersätter vi därför med B_r som betecknar radiell fältkomponent.

Fältlinjeberäkning: I varje vertikalplan genom origo (rz-plan) beskrivs de magnetiska fältlinjerna i parameterform, $(r(v), z(v))$, av differentialekvationssystemet

$$dr/dv = B_r(r,z), \quad dz/dv = B_z(r,z), \qquad r(0) = r_0,\ z(0) = 0.$$

Använd RK4 eller ode45 för den numeriska behandlingen. Utnyttja vid beräkning av B_r och B_z att integranderna är periodiska funktioner. Fältlinjerna bildar slutna ovala kurvor; rita kurvor för $r_0 = 0.2a,\ 0.3a,\ 0.4a,\ 0.5a$.
Data: $a = 0.1,\ I_0 = 2.0,\ \mu_r = 40000$.

Beräkning av partikelbanor: En laddad partikel, laddning Q, massa m, påverkas av det magnetiska fältet från den strömförande ringen. Partikelbanan är tidsberoende, $\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, och beskrivs av differentialekvationen $m\,\ddot{\mathbf{s}} = Q\,(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B})$. Magnetfältet har i punkten (x,y,z) komponenterna $B_x = \frac{x}{r}B_r,\ B_y = \frac{y}{r}B_r,\ B_z$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Inför $c_p = Q/m$. Härled följande rörelseekvationer för en partikel med given startposition, riktning och hastighet:

$$\ddot{x} = c_p(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y), \quad \ddot{y} = c_p(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z), \quad \ddot{z} = c_p(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x).$$

Skriv om till ett system av första ordningens ODE och utnyttja ode45 för att beräkna och rita banan för en partikel med laddning/massa-förhållandet $2 \cdot 10^7$ (As/kg). Experimentera med olika kombinationer av begynnelsepositioner och starthastighet. För testfallets partikel gäller

$$x(0) = 1.2a,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0.15a,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{y}(0) = v_0,\ \dot{z}(0) = 0$$

med $v_0 = 200000$ m/s. Hur mycket varierar hastigheten under den trassliga färden?