

3B.18: TESLATRASSLET

SNURRIG BANA I MAGNETFÄLT

Uppgiften kan delas upp i tre delar. Del 1 går ut på att visa att fältkomponenterna av en vektor

$$B(r, 0, z) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} a d\varphi$$

med $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, $\mathbf{i}(\varphi) = I_0(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\mathbf{s}(\varphi) = \mathbf{p} - \mathbf{q} = (r - a\cos\varphi, -a\sin\varphi, z)$ och $s = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_2 = \sqrt{(r - a\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi + z^2}$ blir

$$B_x = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\cos\varphi}{s^3} d\varphi, \quad B_y = 0, \quad B_z = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a - r\cos\varphi}{s^3} d\varphi$$

där $C = \mu_r I_0 a \cdot 10^{-7}$.

Det går att lösa enkelt utan numeriska metoder.

$$\begin{aligned} B(r, 0, z) &= \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} a d\varphi \\ &= \frac{a\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} d\varphi \\ &= \frac{4\pi\mu_r a \cdot 10^{-7}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} d\varphi \\ &= \mu_r a \cdot 10^{-7} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} d\varphi \\ &= \mu_r a \cdot 10^{-7} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_0(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \times (r - a\cos\varphi, -a\sin\varphi, z)}{s^3} d\varphi \\ &= \mu_r I_0 a \cdot 10^{-7} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \times (r - a\cos\varphi, -a\sin\varphi, z)}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \times (r - a\cos\varphi, -a\sin\varphi, z)}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z\cos\varphi - 0, 0 - (-z\sin\varphi), a\sin^2\varphi - \cos\varphi(r - a\cos\varphi))}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z\cos\varphi, z\sin\varphi, a\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - r\cos\varphi)}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z\cos\varphi, z\sin\varphi, a(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - r\cos\varphi)}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z\cos\varphi, z\sin\varphi, a - r\cos\varphi)}{s^3} d\varphi \end{aligned}$$

Nu ser vi att $B_x = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\cos\varphi}{s^3} d\varphi$ och $B_z = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a - r\cos\varphi}{s^3} d\varphi$, men B_y kräver lite mer analys.

Enligt beräkningen ovan gäller $B_y = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\sin\varphi}{s^3} d\varphi$. Dessutom vet vi att $y = 0$ eftersom vi arbetar i punkten $p = (r, 0, z)$. Därför måste $\sin\varphi = 0$, vilket medför

$$\begin{aligned} B_y &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\sin\varphi}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z \cdot 0}{s^3} d\varphi \\ &= C \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nu är del 1 nästan klar. Som uppgiftsförfattaren noterar har magnetfältet endast komponenter i radiell- och z-led. Därför byter vi namn på B_x till B_r , då $y = 0$.

FÄLTLINJEBERÄKNING

Del 2 handlar om att numeriskt lösa differentialekvationssystemet

$$dr/dv = B_r(r, z), \quad dz/dv = B_z(r, z), \quad r(0) = r_0, \quad z(0) = 0.$$

Det första problemet vi stöter på är att integralerna i B_r och B_z alltid är lika med 0, eftersom funktionen vi söker bildar en oval med mittpunkt i origo. Därför får vi ändra integreringsintervallet.

$$C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z \cos \varphi}{s^3} d\varphi = 4C \int_0^{\pi/2} \frac{z \cos \varphi}{s^3} d\varphi, \quad C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a - r \cos \varphi}{s^3} d\varphi = 4C \int_0^{\pi/2} \frac{a - r \cos \varphi}{s^3} d\varphi$$

Nu kan ekvationssystemet lösas med Matlabs ODE.

```

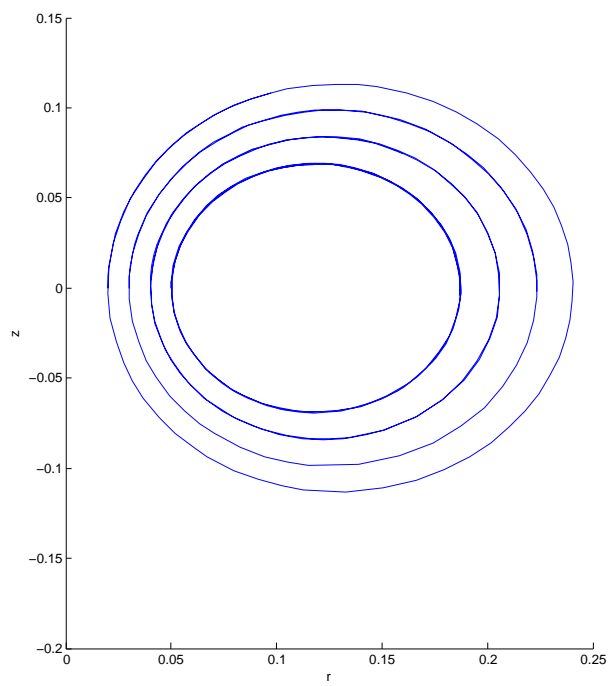
1  % Konstanter.
2  clear all
3  global a C cp
4  a = 0.1;
5  I0 = 2.0;
6  ur = 40000;
7  C = ur * I0 * a * 1e-7;
8  cp = 2e7;
9
10 tspan = [0 5];
11 xlabel('r');
12 ylabel('z');
13
14 % Startgissning.
15 r0 = 0.2 * a;
16 z0 = 0;
17 [V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
18 r = RZ(:,1);
19 z = RZ(:,2);
20 hold on;
21 plot(r, z);
22
23 % Startgissning.
24 r0 = 0.3 * a;
25 [V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
26 r = RZ(:,1);
27 z = RZ(:,2);
28 plot(r, z);
29
30 % Startgissning.
31 r0 = 0.4 * a;
32 [V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
33 r = RZ(:,1);
34 z = RZ(:,2);
35 plot(r, z);
36
37 % Startgissning.
38 r0 = 0.5 * a;
39 [V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
40 r = RZ(:,1);
41 z = RZ(:,2);
42 plot(r, z);

```

```

1 function f = fp(v, rz)
2     global C a
3     f = [C * 4 * integral(@(fi) (rz(2) .* cos(fi)) ./ sqrt((rz(1) - a.*cos(fi)).^2 + a.^2.*sin(fi).^2 + rz(2)
4           C * 4 * integral(@(fi) (a - rz(1) .* cos(fi)) ./ sqrt((rz(1) - a.*cos(fi)).^2 + a.^2.*sin(fi).^2 + rz(2)

```



Del 3 handlar om ett nytt differentialekvationssystem. Vi söker en tidsberoende partikelbana $\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ som beskrivs av differentialekvationen $m\ddot{\mathbf{s}} = Q(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B})$. I punkten (x, y, z) har magnetfältet komponenterna

$$B_x = \frac{x}{r}B_r, \quad B_y = \frac{y}{r}B_r, \quad B_z$$

där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Om vi inför $c_p = \frac{Q}{m}$ kan vi göra följande härledning.

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{s}} &= Q(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) \Leftrightarrow \\ \ddot{\mathbf{s}} &= \frac{Q}{m}(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) = \\ \ddot{\mathbf{s}} &= c_p(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) = \\ (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) &= c_p((\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \times (\frac{x}{r}B_r, \frac{y}{r}B_r, B_z)) = \\ (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) &= c_p(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y, \dot{z}B_x - \dot{x}B_z, \dot{x}B_y - \dot{y}B_x) = \\ (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) &= (c_p(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y), c_p(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z), c_p(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x)) \end{aligned}$$

Alltså blir komponenterna

$$\ddot{x} = c_p(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y), \quad \ddot{y} = c_p(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z), \quad \ddot{z} = c_p(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x)$$