3B.18: Teslatrasslet

Snurrig bana i magnetfält

Uppgiften kan delas upp i tre delar. Del 1 går ut på att visa att komponenterna av en vektor

$$B(r,0,z) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} a d\varphi$$

med $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, $\mathbf{i}(\varphi) = I_0(-sin\varphi, cos\varphi, 0)$, $\mathbf{s}(\varphi) = \mathbf{p} - \mathbf{q} = (r - acos\varphi, -asin\varphi, z)$ och $s = \|p - q\|_2 = \sqrt{(r - acos\varphi)^2 + a^2 sin^2\varphi + z^2}$ blir

$$B_x = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{zcos\varphi}{s^3} d\varphi,\ B_y = 0,\ B_z = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a - rcos\varphi}{s^3} d\varphi$$

där $C = \mu_r I_0 a \cdot 10^{-7}$.

Det går att lösa enkelt utan nummeriska metoder.

$$\begin{aligned}
B(r,0,z) &= \tfrac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\mathbf{i}(\varphi)\times\mathbf{s}(\varphi)}{s^3} a d\varphi \\
&= \tfrac{a\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\mathbf{i}(\varphi)\times\mathbf{s}(\varphi)}{s^3} d\varphi \\
&= \tfrac{4\pi\mu_r a \cdot 10^{-7}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\mathbf{i}(\varphi)\times\mathbf{s}(\varphi)}{s^3} d\varphi \\
&= \mu_r a \cdot 10^{-7} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\mathbf{i}(\varphi)\times\mathbf{s}(\varphi)}{s^3} d\varphi \\
&= \mu_r a \cdot 10^{-7} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{I_0(-sin\varphi, cos\varphi, 0)\times(r-acos\varphi, -asin\varphi, z)}{s^3} d\varphi \\
&= \mu_r I_0 a \cdot 10^{-7} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{(-sin\varphi, cos\varphi, 0)\times(r-acos\varphi, -asin\varphi, z)}{s^3} d\varphi \\
&= C \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{(-sin\varphi, cos\varphi, 0)\times(r-acos\varphi, -asin\varphi, z)}{s^3} d\varphi \\
&= C \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{(zcos\varphi - 0, 0-(-zsin\varphi), asin^2\varphi - cos\varphi(r-acos\varphi))}{s^3} d\varphi \\
&= C \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{(zcos\varphi, zsin\varphi, asin^2\varphi + acos^2\varphi - rcos\varphi)}{s^3} d\varphi \\
&= C \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{(zcos\varphi, zsin\varphi, a(sin^2\varphi + cos^2\varphi) - rcos\varphi)}{s^3} d\varphi \\
&= C \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{(zcos\varphi, zsin\varphi, a - rcos\varphi)}{s^3} d\varphi
\end{aligned}$$

Nu ser vi att $B_x = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{zcos\varphi}{s^3} d\varphi$ och $B_z = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a-rcos\varphi}{s^3} d\varphi$, men B_y kräver lite mer analys.

Enligt beräkningen ovan gäller $B_y = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{zsin\varphi}{s^3} d\varphi$. Dessutom vet vi att $y = 0$ eftersom vi arbetar i punkten $p = (r, 0, z)$. Därför måste $sin\varphi = 0$, vilket medför

$$\begin{aligned}
B_y &= C \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{zsin\varphi}{s^3} d\varphi \\
&= C \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{z \cdot 0}{s^3} d\varphi \\
&= C \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nu är del 1 nästan klar. Som uppgiftsförfattaren noterar har magnetfältet endast komponenter i radiell- och z-led. Därför byter vi namn på B_x till B_r, då $y = 0$.

Del 2 handlar om att nummeriskt lösa diffrentialekvationssystemet

$$dr/dv = B_r(r,z),\ dz/dv = B_z(r,z),\ r(0) = r_0,\ z(0) = 0.$$

Det första problemet vi stöter på är att integralerna i B_r och B_z alltid är lika med 0, eftersom funktionen vi söker bildar en oval med mittpunkt i origo. Därför får vi ändra integreringsintervallet.

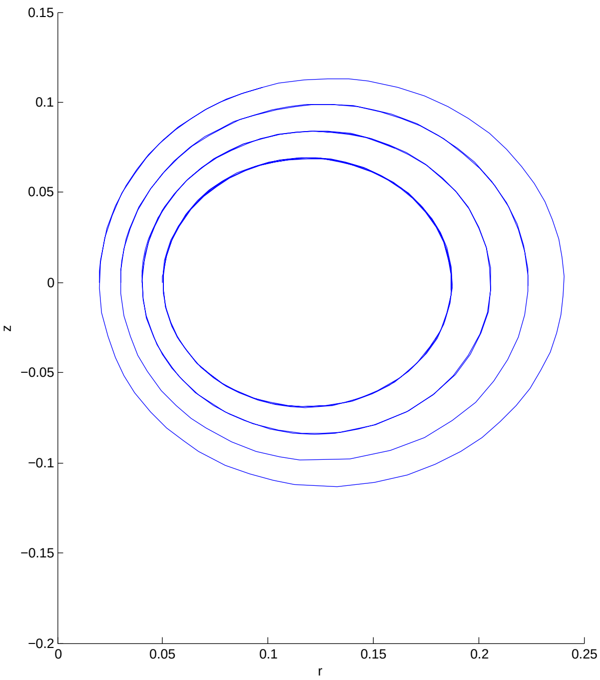
$$C\int_{-\pi}^{\pi} \frac{zcos\varphi}{s^3} d\varphi = 4C\int_{0}^{\pi/2} \frac{zcos\varphi}{s^3} d\varphi,\ C\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a - rcos\varphi}{s^3} d\varphi = 4C\int_{0}^{\pi/2} \frac{a - rcos\varphi}{s^3} d\varphi$$

Nu kan ekvationssystemet lösas med Matlabs ODE.

```
% Konstanter.
clear all
global a C cp
a  = 0.1;
I0 = 2.0;
ur = 40000;
C  = ur * I0 * a * 1e-7;
cp = 2e7;

tspan = [0 5];
xlabel('r');
ylabel('z');

% Startgissning.
r0 = 0.2 * a;
z0 = 0;
[V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
r = RZ(:,1);
z = RZ(:,2);
hold on;
plot(r, z);

% Startgissning.
r0 = 0.3 * a;
[V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
r = RZ(:,1);
z = RZ(:,2);
plot(r, z);

% Startgissning.
r0 = 0.4 * a;
[V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
r = RZ(:,1);
z = RZ(:,2);
plot(r, z);

% Startgissning.
r0 = 0.5 * a;
[V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
r = RZ(:,1);
z = RZ(:,2);
plot(r, z);
```

```
function f = fp(v, rz)
  global C a
  f = [C * 4 * integral(@(fi) (rz(2)      .* cos(fi)) ./ sqrt((rz(1) - a.*cos(fi)).^2 + a.^2.*sin(fi).^2 + rz(2).
       C * 4 * integral(@(fi) (a - rz(1)  .* cos(fi)) ./ sqrt((rz(1) - a.*cos(fi)).^2 + a.^2.*sin(fi).^2 + rz(2).
```

Figur 1: En plot av fältlinjerna med olika värden på r_0. Inifrån och ut är värdena 0.2a, 0.3a, 0.4a, 0.5a



Del 3 handlar om ett nytt diffrentialekvationssystem. Vi söker en tidsberoende partikelbana $\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ som beskrivs av diffrentialekvationen $m\ddot{\mathbf{s}} = Q(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B})$. I punkten (x, y, z) har magnetfältet komponenterna

$$B_x = \frac{x}{r}B_r,\ B_y = \frac{y}{r}B_r,\ B_z$$

där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Om vi inför $c_p = \frac{Q}{m}$ kan vi göra följande härledning.

$$\begin{aligned}
m\ddot{\mathbf{s}} &= Q(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) \Leftrightarrow \\
\ddot{\mathbf{s}} &= \tfrac{Q}{m}(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) = \\
\ddot{\mathbf{s}} &= c_p(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) = \\
(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) &= c_p((\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \times (\tfrac{x}{r}B_r, \tfrac{y}{r}B_r, B_z)) = \\
(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) &= c_p(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y, \dot{z}B_x - \dot{x}B_z, \dot{x}B_y - \dot{y}B_x) = \\
(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) &= (c_p(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y), c_p(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z), c_p(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x))
\end{aligned}$$

Alltså blir komponenterna

$$\ddot{x} = c_p(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y),\ \ddot{y} = c_p(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z),\ \ddot{z} = c_p(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x).$$

För att kunna lösa systemet med ode45 behöver vi skriva om systemet till en första ordningens diffrentialekvationssystem. Därför inför vi betäckningarna

$$\begin{aligned}
u_1 &= x,\ u_2 = \dot{x}, & \dot{u_1} &= u_2,\ \dot{u_2} = c_p(v_2B_z - w_2B_y), \\
v_1 &= y,\ v_2 = \dot{y}, & \dot{v_1} &= v_2,\ \dot{v_2} = c_p(w_2B_x - u_2B_z), \\
w_1 &= z,\ w_2 = \dot{z}, & \dot{w_1} &= w_2,\ \dot{w_2} = c_p(u_2B_y - v_2B_x).
\end{aligned}$$

Nu kan vi lösa systemet med hjälp av startvärdena nedan.

$$\begin{aligned}
x(0) &= 1.2a, & \dot{x}(0) &= 0, \\
y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= v_0, \\
z(0) &= 0.15a, & \dot{z}(0) &= 0
\end{aligned}$$

där $v_0 = 200000$ och $c_p = 2 \cdot 10^7$.

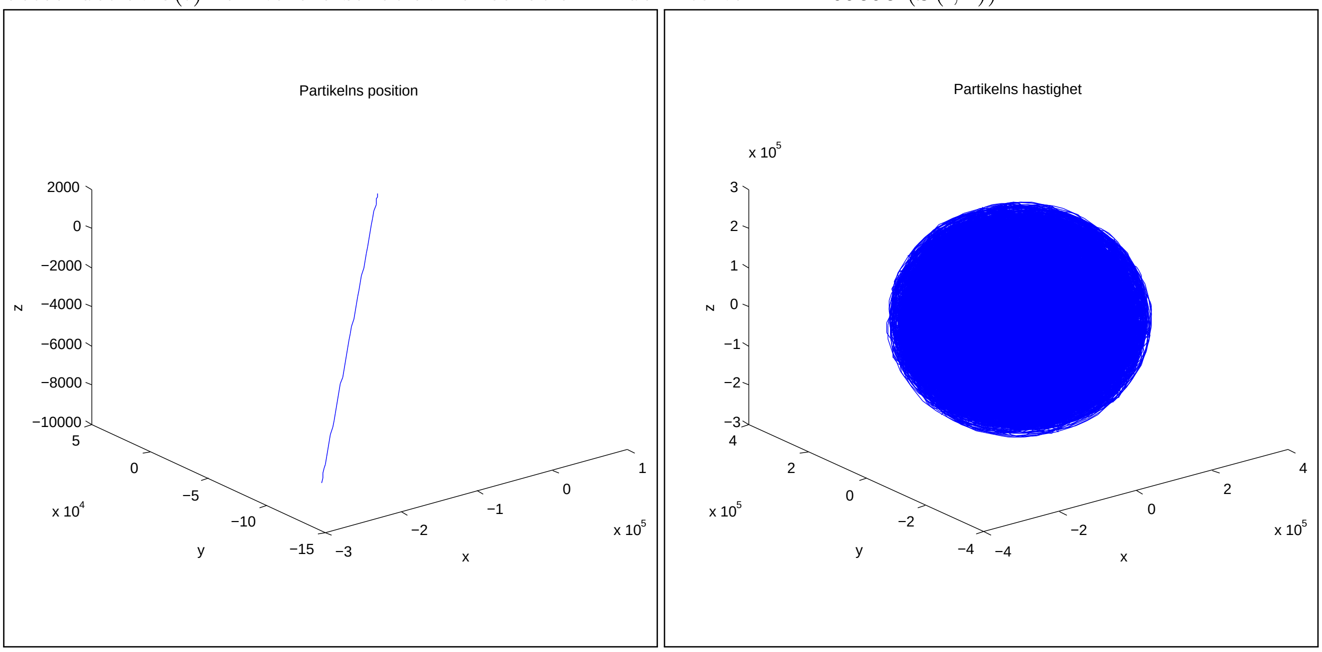
```
global a C
a  = 0.1;
I0 = 2.0;
ur = 40000;
C  = ur * I0 * a * 1e-7;
mopt=odeset('OutputFcn', @odephas3, 'OutputSel', [1 3 5]);
format long;

v0 =  2e5;

x0 =  1.4*a;
dx0 = 0;

y0 =  0;
dy0 = v0;

z0 =  0.15*a;
dz0 = 0;

s0 = [x0
      dx0
      y0
      dy0
      z0
      dz0];

[T, S] = ode45(@fp2, [0 1], s0, mopt);
```

```
range = 1:69270;

subplot(2, 2, 1);
% Plotta partikelns bana.
plot3(S(range,1), S(range,3), S(range,5));
subplot(2, 2, 2);
% Plotta partikelns hastighet.
plot3(S(range,2), S(range,4), S(range,6));
```

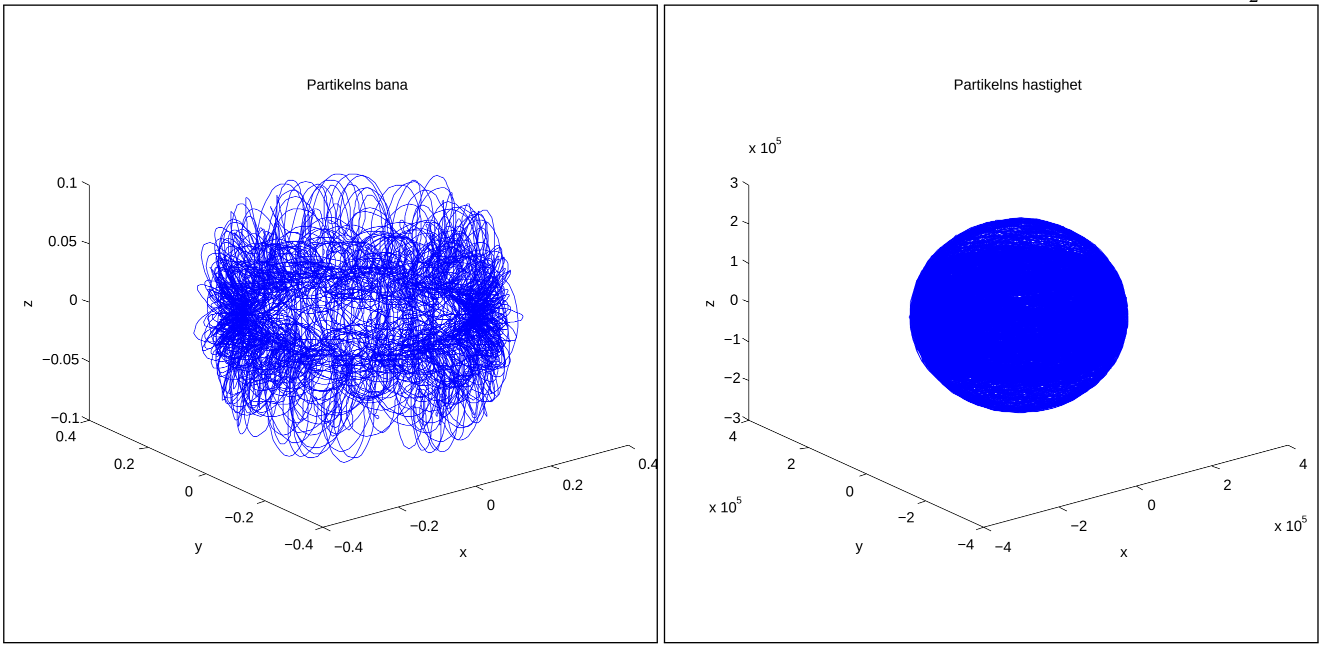
```
function f = fp2(t, s)
  global a C
  cp = 2e7;
  r = sqrt(s(1)^2 + s(3)^2);
  br = C * 4 * quad(@(fi) (s(5) .* cos(fi)) ./ sqrt((r - a.*cos(fi)).^2 + a^2*sin(fi).^2 + s(5)^2).^3, 0, pi/2);
  bx = s(1) / r * br;
  by = s(3) / r * br;
  bz = C * 4 * quad(@(fi) (a - r .* cos(fi)) ./ sqrt((r - a.*cos(fi)).^2 + a.^2*sin(fi).^2 + s(5)^2).^3, 0, pi/2

  f = [s(2)
      cp*(s(4)*bz - s(6)*by)
      s(4)
      cp*(s(6)*bx - s(2)*bz)
      s(6)
      cp*(s(2)*by - s(4)*bx)];
```

Mot slutet av körningen av ode45 händer något konstigt; s(t) slutar följa det tigiare torusliknande mönstret och drar iväg i en rät linje. Jag misstänker att anledningen är kancellation men har inget bevis för hypotesen. Se figurerna 2, 3, och 4 för detaljer.

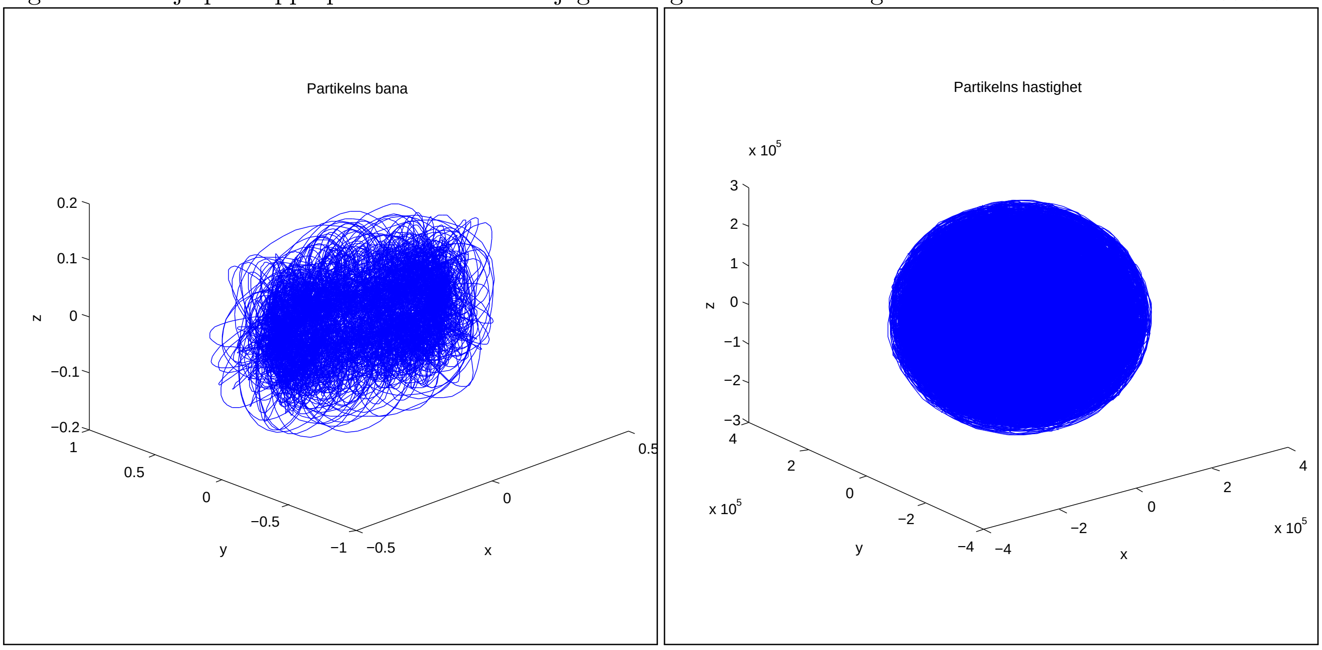
Figur 2: Så här ser det ut om vi plottar hela resultatet av ode45. Det annorlunda och troligtvis felaktiga beteendet av $s(t)$ kan vara orsakat av kancellation. Indexintervall: $1 \ldots 69393$ $(S(:,1))$



Figur 3: Om vi istället plottar halva intervallet får vi en vettigare bild av partikelns bana. Intervall: $1 \ldots \frac{69393}{2}$



Figur 4: Med hjälp av upprepade försök hittade jag det högsta indexet som ger en bra bild. Intervall: $1 \ldots 69270$



Komponent	Max	Min
x	0.486771690308782	−0.456856640922508
y	0.522403421982921	−0.501795361430149
z	0.143200879717427	−0.146768568104478
$\dot{x}$	$2.746180389029979 \cdot 10^5$	$-2.739321965020182 \cdot 10^5$
$\dot{y}$	$2.752769112730630 \cdot 10^5$	$-2.762187255299316 \cdot 10^5$
$\dot{z}$	$2.735498451313063 \cdot 10^5$	$-2.736650329878195 \cdot 10^5$

Eftersom det är alldeles för mycket utdata för att bifoga i detta dokument har jag sammanställt det som är mest intressant. Vi ser från tabellen att partikelhastigheten för alla led ligger i intervallet $[-2.77 \cdot 10^5, 2.77 \cdot 10^5]$, vilket svarar på frågan från uppgiften om hur mycket hastigheten varierar.