

### 3B.18: TESLATRASSLET

#### SNURRIG BANA I MAGNETFÄLT

Uppgiften kan delas upp i tre delar. Del 1 går ut på att visa att komponenterna av en vektor

$$B(r, 0, z) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} a d\varphi$$

med  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ ,  $\mathbf{i}(\varphi) = I_0(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ ,  $\mathbf{s}(\varphi) = \mathbf{p} - \mathbf{q} = (r - a\cos\varphi, -a\sin\varphi, z)$  och  $s = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_2 = \sqrt{(r - a\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi + z^2}$  blir

$$B_x = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\cos\varphi}{s^3} d\varphi, \quad B_y = 0, \quad B_z = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a - r\cos\varphi}{s^3} d\varphi$$

där  $C = \mu_r I_0 a \cdot 10^{-7}$ .

Det går att lösa enkelt utan numeriska metoder.

$$\begin{aligned} B(r, 0, z) &= \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} a d\varphi \\ &= \frac{a\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} d\varphi \\ &= \frac{4\pi\mu_r a \cdot 10^{-7}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} d\varphi \\ &= \mu_r a \cdot 10^{-7} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} d\varphi \\ &= \mu_r a \cdot 10^{-7} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_0(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \times (r - a\cos\varphi, -a\sin\varphi, z)}{s^3} d\varphi \\ &= \mu_r I_0 a \cdot 10^{-7} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \times (r - a\cos\varphi, -a\sin\varphi, z)}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \times (r - a\cos\varphi, -a\sin\varphi, z)}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z\cos\varphi - 0, 0 - (-z\sin\varphi), a\sin^2\varphi - \cos\varphi(r - a\cos\varphi))}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z\cos\varphi, z\sin\varphi, a\sin^2\varphi + a\cos^2\varphi - r\cos\varphi)}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z\cos\varphi, z\sin\varphi, a(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - r\cos\varphi)}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z\cos\varphi, z\sin\varphi, a - r\cos\varphi)}{s^3} d\varphi \end{aligned}$$

Nu ser vi att  $B_x = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\cos\varphi}{s^3} d\varphi$  och  $B_z = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a - r\cos\varphi}{s^3} d\varphi$ , men  $B_y$  kräver lite mer analys.

Enligt beräkningen ovan gäller  $B_y = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\sin\varphi}{s^3} d\varphi$ . Dessutom vet vi att  $y = 0$  eftersom vi arbetar i punkten  $p = (r, 0, z)$ . Därför måste  $\sin\varphi = 0$ , vilket medför

$$\begin{aligned} B_y &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\sin\varphi}{s^3} d\varphi \\ &= C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z \cdot 0}{s^3} d\varphi \\ &= C \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nu är del 1 nästan klar. Som uppgiftsförfattaren noterar har magnetfältet endast komponenter i radiell- och z-led. Därför byter vi namn på  $B_x$  till  $B_r$ , då  $y = 0$ .

## FÄLTLINJEBERÄKNING

Del 2 handlar om att numeriskt lösa differentialekvationssystemet

$$dr/dv = B_r(r, z), \quad dz/dv = B_z(r, z), \quad r(0) = r_0, \quad z(0) = 0.$$

Det första problemet vi stöter på är att integralerna i  $B_r$  och  $B_z$  alltid är lika med 0, eftersom funktionen vi söker bildar en oval med mittpunkt i origo. Därför får vi ändra integreringsintervallet.

$$C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z \cos \varphi}{s^3} d\varphi = 4C \int_0^{\pi/2} \frac{z \cos \varphi}{s^3} d\varphi, \quad C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a - r \cos \varphi}{s^3} d\varphi = 4C \int_0^{\pi/2} \frac{a - r \cos \varphi}{s^3} d\varphi$$

Nu kan ekvationssystemet lösas med Matlabs ODE.

```

1  % Konstanter.
2  clear all
3  global a C cp
4  a = 0.1;
5  I0 = 2.0;
6  ur = 40000;
7  C = ur * I0 * a * 1e-7;
8  cp = 2e7;
9
10 tspan = [0 5];
11 xlabel('r');
12 ylabel('z');
13
14 % Startgissning.
15 r0 = 0.2 * a;
16 z0 = 0;
17 [V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
18 r = RZ(:,1);
19 z = RZ(:,2);
20 hold on;
21 plot(r, z);
22
23 % Startgissning.
24 r0 = 0.3 * a;
25 [V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
26 r = RZ(:,1);
27 z = RZ(:,2);
28 plot(r, z);
29
30 % Startgissning.
31 r0 = 0.4 * a;
32 [V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
33 r = RZ(:,1);
34 z = RZ(:,2);
35 plot(r, z);
36
37 % Startgissning.
38 r0 = 0.5 * a;
39 [V, RZ] = ode45(@fp, tspan, [r0 z0]);
40 r = RZ(:,1);
41 z = RZ(:,2);
42 plot(r, z);

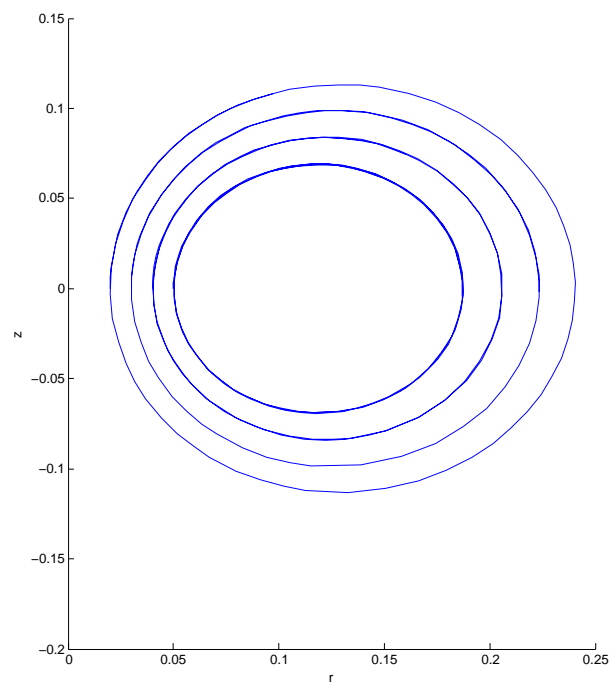
```

```

1 function f = fp(v, rz)
2     global C a
3     f = [C * 4 * integral(@(fi) (rz(2) .* cos(fi)) ./ sqrt((rz(1) - a.*cos(fi)).^2 + a.^2.*sin(fi).^2 + rz(2)
4           C * 4 * integral(@(fi) (a - rz(1) .* cos(fi)) ./ sqrt((rz(1) - a.*cos(fi)).^2 + a.^2.*sin(fi).^2 + rz(2)

```

Figur 1: En plot av fältlinjerna med olika värden på  $r_0$ . Inifrån och ut är värdena  $0.2a$ ,  $0.3a$ ,  $0.4a$ ,  $0.5a$



Del 3 handlar om ett nytt differentialekvationssystem. Vi söker en tidsberoende partikelbana  $\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  som beskrivs av differentialekvationen  $m\ddot{\mathbf{s}} = Q(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B})$ . I punkten  $(x, y, z)$  har magnetfältet komponenterna

$$B_x = \frac{x}{r}B_r, \quad B_y = \frac{y}{r}B_r, \quad B_z$$

där  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Om vi inför  $c_p = \frac{Q}{m}$  kan vi göra följande härledning.

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{s}} &= Q(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) \Leftrightarrow \\ \ddot{\mathbf{s}} &= \frac{Q}{m}(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) = \\ \ddot{\mathbf{s}} &= c_p(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) = \\ (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) &= c_p((\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \times (\frac{x}{r}B_r, \frac{y}{r}B_r, B_z)) = \\ (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) &= c_p(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y, \dot{z}B_x - \dot{x}B_z, \dot{x}B_y - \dot{y}B_x) = \\ (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) &= (c_p(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y), c_p(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z), c_p(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x)) \end{aligned}$$

Alltså blir komponenterna

$$\ddot{x} = c_p(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y), \quad \ddot{y} = c_p(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z), \quad \ddot{z} = c_p(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x).$$

För att kunna lösa systemet med ode45 behöver vi skriva om systemet till en första ordningens differentialekvationssystem. Därför inför vi betäckningarna

$$\begin{aligned} u_1 = x, \quad u_2 = \dot{x}, & \quad u_1 = u_2, \quad u_2 = c_p(v_2B_z - w_2B_y), \\ v_1 = y, \quad v_2 = \dot{y}, & \quad v_1 = v_2, \quad v_2 = c_p(w_2B_x - u_2B_z), \\ w_1 = z, \quad w_2 = \dot{z}, & \quad w_1 = w_2, \quad w_2 = c_p(u_2B_y - v_2B_x). \end{aligned}$$

Nu kan vi lösa systemet med hjälp av startvärdena nedan.

$$\begin{aligned} x(0) &= 1.2a, & \dot{x}(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= v_0, \\ z(0) &= 0.15a, & \dot{z}(0) &= 0 \end{aligned}$$

där  $v_0 = 200000$  och  $c_p = 2 \cdot 10^7$ .

```

1  global a C
2  a = 0.1;
3  I0 = 2.0;
4  ur = 40000;
5  C = ur * I0 * a * 1e-7;
6  mopt=odeset('OutputFcn', @odephas3, 'OutputSel', [1 3 5]);
7  format long;
8
9  v0 = 2e5;
10
11 x0 = 1.4*a;
12 dx0 = 0;
13
14 y0 = 0;
15 dy0 = v0;
16
17 z0 = 0.15*a;
18 dz0 = 0;
19
20 s0 = [x0
21       dx0
22       y0
23       dy0
24       z0
25       dz0];
26
27 [T, S] = ode45(@fp2, [0 1], s0, mopt);

```

```

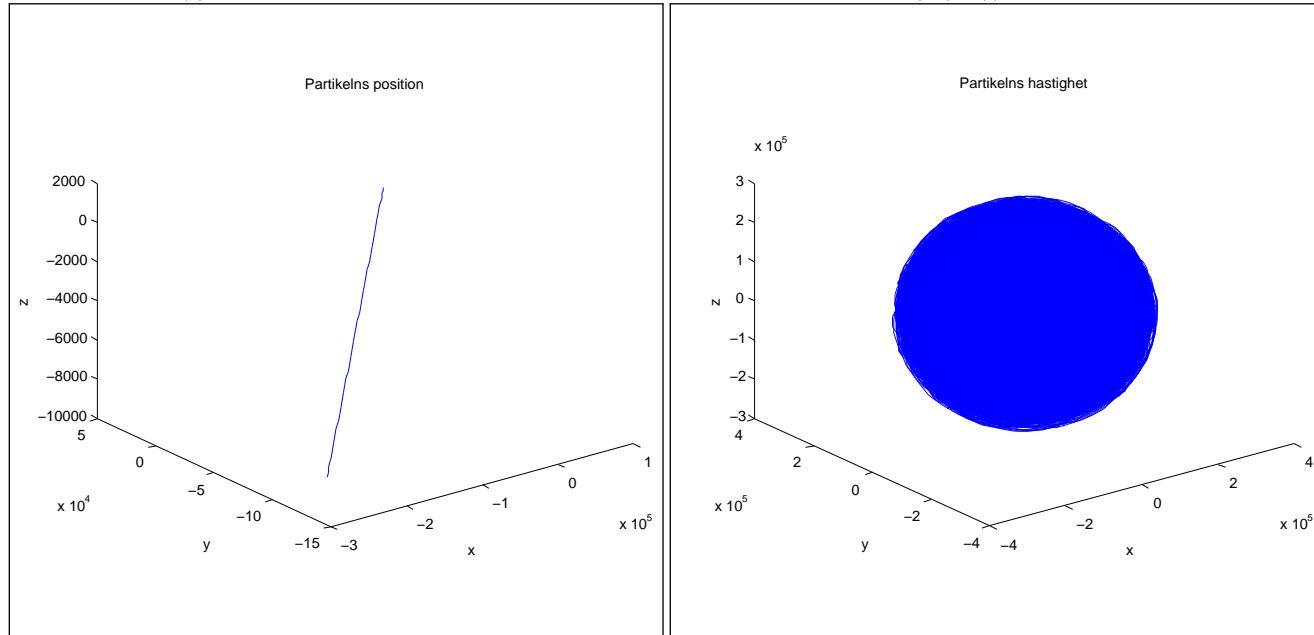
28
29 range = 1:69270;
30
31 subplot(2, 2, 1);
32 % Plotta partikelns bana.
33 plot3(S(range,1), S(range,3), S(range,5));
34 subplot(2, 2, 2);
35 % Plotta partikelns hastighet.
36 plot3(S(range,2), S(range,4), S(range,6));

1 function f = fp2(t, s)
2     global a C
3     cp = 2e7;
4     r = sqrt(s(1)^2 + s(3)^2);
5     br = C * 4 * quad(@(fi) (s(5) .* cos(fi)) ./ sqrt((r - a.*cos(fi)).^2 + a.^2*sin(fi).^2 + s(5)^2).^3, 0, pi/2);
6     bx = s(1) / r * br;
7     by = s(3) / r * br;
8     bz = C * 4 * quad(@(fi) (a - r .* cos(fi)) ./ sqrt((r - a.*cos(fi)).^2 + a.^2*sin(fi).^2 + s(5)^2).^3, 0, pi/2);
9
10    f = [s(2)
11         cp*(s(4)*bz - s(6)*by)
12         s(4)
13         cp*(s(6)*bx - s(2)*bz)
14         s(6)
15         cp*(s(2)*by - s(4)*bx)];

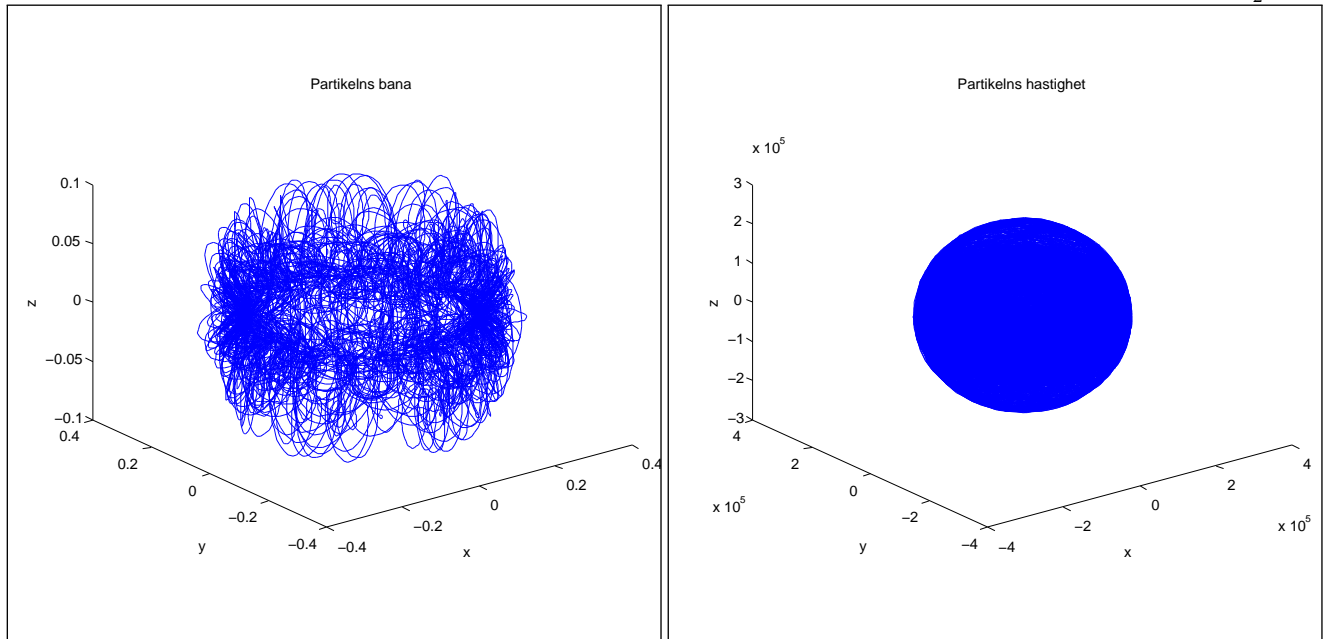
```

Mot slutet av körningen av ode45 händer något konstigt;  $s(t)$  slutar följa det tigiare torusliknande mönstret och drar iväg i en rät linje. Jag misstänker att anledningen är cancellation men har inget bevis för hypotesen. Se figurerna 2, 3, och 4 för detaljer. Notera att den högre intervallgränsen i körningarna nedan inte garanterat stämmer varje körning, eftersom mycket är automatiserat i ode45 (steglängd m.m.). Därför kan intervallet behöva justeras i framtida körningar.

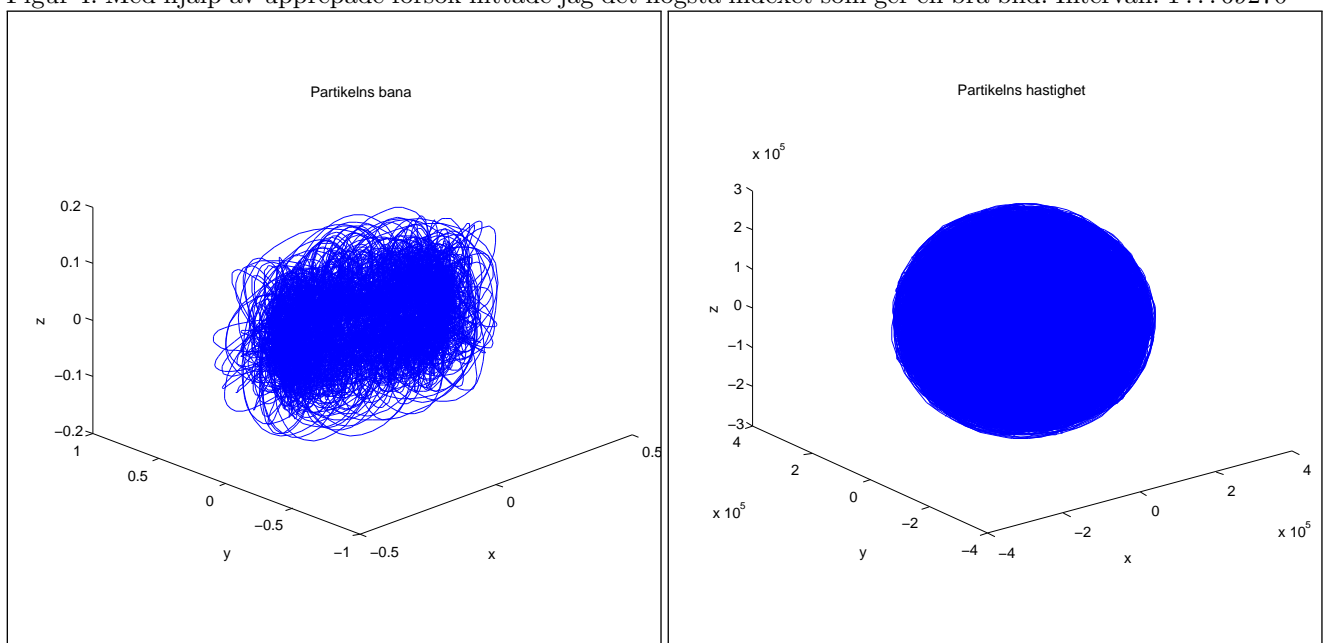
Figur 2: Så här ser det ut om vi plottar hela resultatet av ode45. Det annorlunda och troligtvis felaktiga beteendet av  $s(t)$  kan vara orsakat av cancellation. Indexintervall: 1...69393 ( $S(:,1)$ )



Figur 3: Om vi istället plottar halva intervallet får vi en vettigare bild av partikelns bana. Intervall:  $1 \dots \frac{69393}{2}$



Figur 4: Med hjälp av upprepade försök hittade jag det högsta indexet som ger en bra bild. Intervall:  $1 \dots 69270$



Komponent	Max	Min
x	0.264324738725749	-0.282301086928607
y	0.261193590372932	-0.257412217159470
z	0.073550783526418	-0.072363058159509
$\dot{x}$	$2.746180389029979 \cdot 10^5$	$-2.739321965020182 \cdot 10^5$
$\dot{y}$	$2.752769112730630 \cdot 10^5$	$-2.762187255299316 \cdot 10^5$
$\dot{z}$	$2.735498451313063 \cdot 10^5$	$-2.736650329878195 \cdot 10^5$

Eftersom det är alldeles för mycket utdata för att bifoga i detta dokument har jag sammanställt det som är mest intressant. Vi ser från tabellen att partikelhastigheten för alla led ligger i intervallet  $[-2.77 \cdot 10^5, 2.77 \cdot 10^5]$ , vilket svarar på frågan från uppgiften om hur mycket hastigheten varierar.