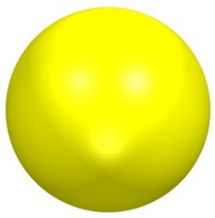
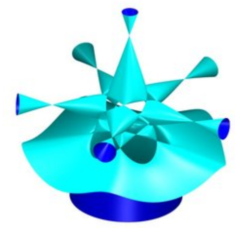
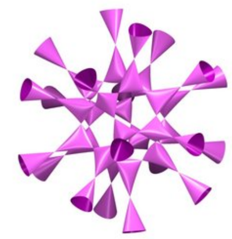
Dünya Rekoru Yüzeyler

Eğer bir yüzeyin üstünde bir sivrilik varsa o yüzeye *tekil* denir; aksi takdirde yüzeye *düzgün, yumuşak* denir. Sivrilik noktalarına *tekillik* denir. Düzgün yüzeylere örnek, küre ya da simittir (torus); bunları görmek için aşağıdaki ilk iki resme bakın. Rastgele bir yüzey seçerseniz neredeyse her zaman düzgün bir yüzeyle karşılaşacaksınız.

düzgün:  

çok tekillikli:   

Dolayısıyla bir yüzeyin tekilliklere sahip olması çok özel bir durumdur. Bu yüzden tekillikler bir yüzeyin en ilginç noktalarıdır. SURFER yazılımında yüzeyler polinomlar aracılığıyla tanımlanır; yani değişkenlerin üsleri sıfırdan büyükeşittir. Bir polinomda en büyük üsse polinomun derecesi denir. Matematikte araştırma sorularından biri, belirli bir dereceli yüzeyin kaç tane tekilliğe sahip olabileceğidir. Bir polinomun derecesini d ile, olası en fazla tekillik sayısını da $\mu(d)$ ile göstereceğiz.

Bu $\mu(d)$ sayısını hesaplamak epey zor. $d = 1, 2, 3, 4$ gibi küçük dereceler için $\mu(d)$ 19. yüzyıldan beri biliniyor. $d = 5$ için ancak 1980'de, $d = 6$ içinse daha 1996'da belirlenebildi. Derecesi 7 olan bir polinom için olası en fazla tekillik sayısı hala bilinmiyor. Bu problemi tamamen halletmek daha çok zaman alacak gibi görünüyor. Bilinen birkaç sonuç şöyle:

d	1	2	3	4	5	6	7	8	d
$\mu(d) \geq$	0	1	4	16	31	65	99	168	$\approx \frac{5}{12} d^3$
$\mu(d) \leq$	0	1	4	16	31	65	104	174	$\approx \frac{4}{9} d^3$

Çift koni

Bu galerinin giriş sayfasında açıklandığı gibi, üstünde (tekillik denen) sivriliklere sahip olmayan yüzeylere *düzgün* denir; örneğin küre ya da simit (altta en soldaki iki resim):

Çift koni (en sağdaki resim) en basit tekilliktir; derecesi 2 olan bir eşitlikle tarif edilebilecek tek tekilliktir:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Bu denklemde 0'ı çok küçük bir $a \neq 0$ ile yer değiştirince, a'nın işaretine bağlı olarak, çift koni şu iki tür hiperboloidden birine döner:

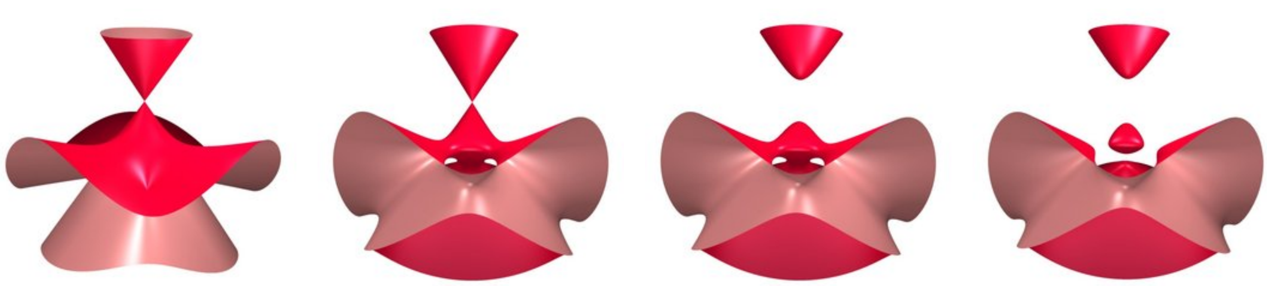
Derecesi 2 olan bir yüzeyin 1'den fazla tekilliği olamaz, yani $\mu(2) = 1$'dir.

Cayley'nin Kübik Yüzeyi

Bu kübik yüzey (*üçgil*, yani derecesi 3 olan yüzey) toplam dört adet çift koni tekilliğe sahip. 19. yüzyılda kübikler konusunda çok araştırma yapmış olan Arthur Cayley'nin adıyla anılır.

Oysa henüz 1863'te bu yüzeyleri üzerlerindeki olası tekilliklere göre sistemli bir biçimde sınıflayan Ludwig Schläfli idi. Örneğin bir kübik yüzey üzerinde niye 4'ten fazla tekillik olamayacağı, makalesinde okunabilir. Böylece $\mu(3) = 4$ olduğunu biliyoruz.

1900 civarında Felix Klein gerçel kübik yüzeylerin olası biçimleri üzerine çalışmıştır. Fikri, Cayley'nin Kübik Yüzeyinden başlayarak ufak oynamalarla soruya cevap verebilmekti: Çift koni tekilliklerini şişirerek, parçalayarak ya da bir araya getirerek sonunda olası tüm biçimleri elde etti. Bunlardan birkaçı şöyle:



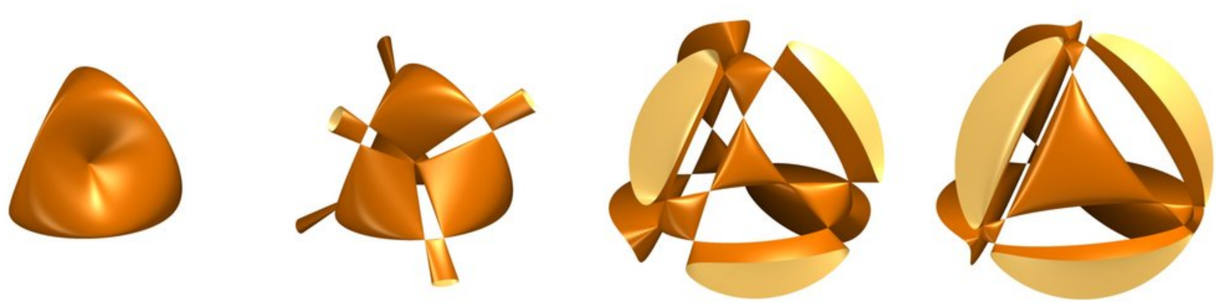
Kummer'in Dörtgili

Eduard Kummer 1875 yılında derecesi d olan bir yüzey üstünde en fazla tekillik sayısının ($\mu(d)$ diye gösteriyoruz) kaç olabileceğini özel olarak derecesi 4 olan yüzeyler (yani *dörtgiller*) için soran ilk kişi oldu.

Kummer $\mu(4) = 16$ olduğunu gösterdi. Bunun ardından 16 tekilliği olan dörtgilleri ayrıntısıyla çalıştı.

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2\right)^2 - \lambda\, y_0\, y_1\, y_2\, y_3,$$

yüzeyler ailesi, o tür yüzeyleri içeren kayda değer güzellikte bir ailedir. Burada μ bağımsız bir parametre ve $\lambda = \frac{3\mu^2-1}{3-\mu^2}$; y_i'ler bir düzgün dörtyüzlünün yüzlerini oluşturan düzlem ifadeleri: $y_0 = 1 - z - \sqrt{2}x$, $y_1 = 1 - z + \sqrt{2}x$, $y_2 = 1 + z + \sqrt{2}y$, $y_3 = 1 + z - \sqrt{2}y$. Böylece inşa edilen yüzey dörtyüzlü simetrisine sahip oluyor. Bu ailenin tüm üyeleri tam 16 gerçel tekilliğe sahip değil, ama çoğu öyle:



Parametrelerin bazı özel değerleri için tekilliklerden birkaçı üstüste gelebiliyor.

Togliatti'nin Beşgili

Eugenio Giuseppe Togliatti 1937'de derecesi 5 olan yüzeylerden (beşgil) tam 31 tekilliği olan bir tanesinin varlığını keşfetti — bu o gün için bir dünya rekoruydu.

1980'de Arneau Beauville daha fazla tekilliği olan bir beşgil olmadığını, şifreleme kuramıyla ilginç bir bağlantısını kurarak gösterdi. Demek oluyor ki Togliatti'nin dünya rekoru artık geliştirilemez!

Kummer'in Dörtgili ya da Barth'ın Altıgilinde Platon cisimlerinin simetrileri kullanılıyor. Derecesi 5 olan bir yüzey için simetri düzlemleri kullanılabilecek bir Platon cismi var olmadığından, 31 tekillikli beşgilin daha az simetrisi var: yalnızca düzgün beşgenin düzlemdeki simetrilerine sahip.

Biz burada Wolf Barth'ın 1990'da bulduğu yüzey denklemini kullanıyoruz çünkü Togliatti'nin 1937'de bulduğu yüzeyi görselleştirmek zor.

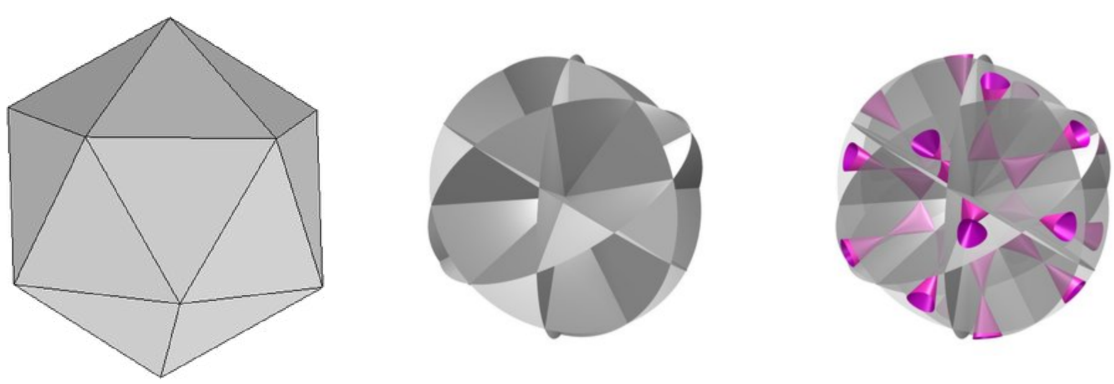
Barth'ın Altıgili

Derecesi 6 olan bu yüzey (altıgil) Wolf Barth tarafından 1996'da inşa edildi.

Barth'ın Altıgilinin toplam 65 tekilliği var. Bu inşadan hemen sonra Jaffe ve Ruberman, bu sayının bir altıgilin sahip olabileceği en fazla tekillik sayısı olduğunu gösterdi — dolayısıyla Barth'ın dünya rekorunu kimse geçemezdi!

Barth'ın inşası büyük sürpriz oldu çünkü uzun zamandır derecesi 6 olan yüzeylerin yalnızca 64 tekilliğe sahip olabileceği düşünülüyordu.

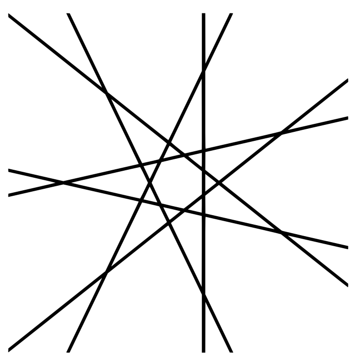
İnşanın çarpıcı bir özelliği yirmiyüzlü simetrisine sahip olması; aşağıdaki şekil bir yirmiyüzlü ve simeri düzlemlerini gösteriyor:

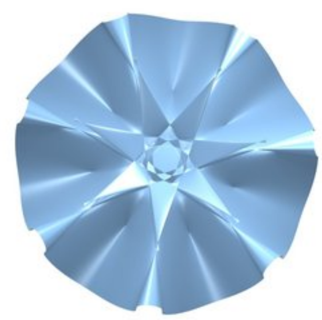


Barth'ın Altıgili $P_6 - \alpha K^2 = 0$, denklemini sağlar; burada P_6 altı adet simetri düzleminin polinomlarının çarpımı, $K = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ birim küre (1 yarıçaplı ve merkezi orijin olan küre) ve $\alpha = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{5})$.

99 Tekillikli Bir Yedigil

Oliver Labs 2004 yılında Mainz Üniversitesinde doktora tezi üstünde çalışırken derecesi 7 olan (yedigil) ve 99 adet tekilliği olan bir yüzey inşa etti. Bu yedigiller arasında bir dünya rekoru. Yine de tekillik sayısı 104'e kadar çıkabilecek bir yüzey var olabilir. Labs'ın yüzeyi düzgün yedigen simetrisine sahip (soldaki resim). Yüzeye yukarıdan bakınca bu görülebiliyor (sağdaki resim):





Bu yüzeyin inşasında Oliver Labs bir bilgisayar cebir sistemi olan SINGULAR (Kaiserslautern Üniversitesi) yazılımını kullandı. Bu yazılım, cebirsel geometri ve tekillik hesaplarında yetkin bir yazılımdır.

Kullandığı temel gözlem, sonlu sayı kümelerinde saymanın doğal bir yolunun olduğuydu. Bunu saatlerden biliyoruz aslında: saat 24:00, 00:00 demek olduğundan 24:00 + 1 saat 25:00 değil 01:00 olur.

Endrass'ın Sekizgili

1995'de Stephan Endrass, Erlangen Üniversitesi'ndeki doktora tezinin ana sonucu olarak derecesi 8 olan bu yüzeyi (sekizgil) inşa etti. Yüzeyin toplam 168 tekilliği var ve bu hala bir dünya rekoru!

Varchenko'nun genel bir sonucu aracılığıyla bir sekizgilin 174'ten çok tekilliği olamayacağını biliyoruz. Böylece $168 \leq \mu(8) \leq 174$ elde ediliyor. $\mu(8)$ sayısının tam kaç olacağı bilinmiyor.

Bu yüzeyi bulmak hiç kolay olmadı: Endrass, bu yüzeyi 5 boyutlu bir uzay oluşturan bir sekizgil ailesi içinde aramak zorunda kaldı. Bu ailedeki genel bir yüzeyin tekillik sayısı 112 idi.

İnşanın simetrisi resimde aşikar: bir düzgün sekizgen simetrisinin yanı sıra yüzey xy düzlemine göre de simetrik.

Bu simetriler kullanılmasaydı, o sekizgil uzayı daha da yüksek bir boyuta sahip olacaktı.

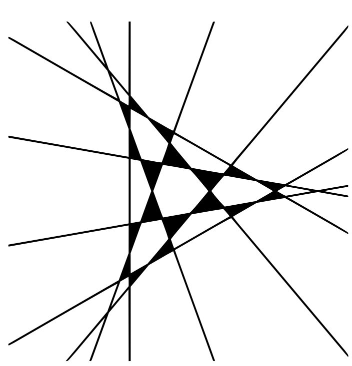
Birçok Gerçel Tekillikli Yüzeyler

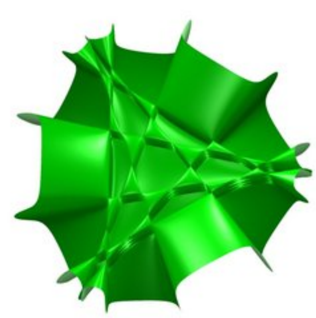
Daha önce değindiğimiz gibi, derecesi 7 olan bir yüzeyin sahip olabileceği en fazla tekillik sayısı (yani $\mu(7)$) bilinmiyor. Bir üst ve alt sınıra sahibiz yalnızca: $99 \leq \mu(7) \leq 104$.

Dolayısıyla genel bir d derecesi için daha da az bilinmesi çok şaşırtıcı olmamalı. Hiç değilse, Sonja Breske, Oliver Labs ve Duco van Straten, S.V. Chmutov'un bir inşasından yola çıkarak, halihazırdaki en fazla tekillik sayılarının, gerçel tekilliği olan yüzeyler tarafından da gerçeklendiğini gösterebildiler. Şu ana kadar

$$0,41\bar{6}d^3 \lessapprox \mu(d) \lessapprox 0.44\bar{4}d^3$$

olduğunu biliyoruz. Aşağıda inşanın simetrisi ve düzlemde bir doğru yerleştirmesinde olabilecek en fazla siyah bölge ile ilişkisi görülebilir.



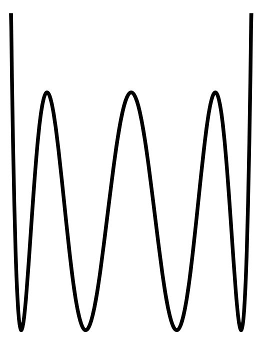


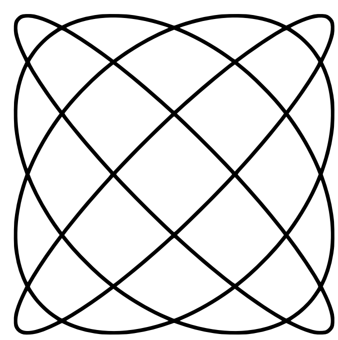
Bir Chmutov Sekizgili

Chmutovun sekizgilinde ilk göze çarpan şey ne kadar simetrik olduğu. Bu, denklemine dikkatle bakarak da görülebilir:

$$T_d(x) + T_d(y) + T_d(z) + 1 = 0;$$

burada T_d, Çebişev polinomu olarak adlandırılan ifade (soldaki resim). $T_8(x) + T_8(y) = 0$ ile verilen eğri de sağda resmedilmiş:





Bu resimlerden yüzeyin görüntülenen resmine giden yol o kadar da uzun değil.

Bu denklemler 80'lerin başında S.V. Chmutov tarafından verilmiştir. O zamanlarda neredeyse tüm d'ler için $\mu(d)$ değerinin dünya rekorlarını, yani d dereceli bir yüzeyde olabilecek en fazla tekillik sayısını veriyorlardı. 90'larda Chmutov kendi dünya rekorunu geliştirdi. 2005 yılındaysa S. Breske, O. Labs ve D. van Straten bu inşayı gerçel yüzeyler üzerinde gerçel tekillikler üretmek için uyarladılar.

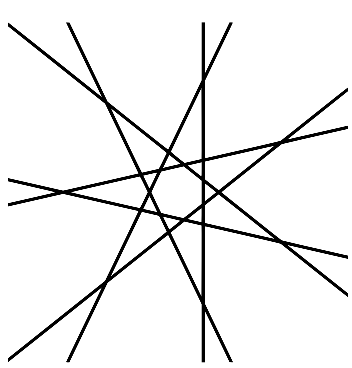
Yedigen Simetrisine Sahip Bir Yedigil

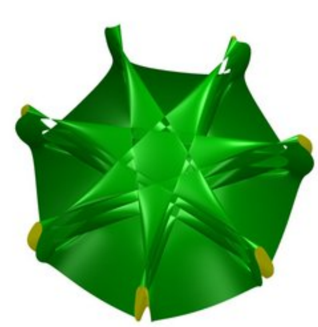
Yıldıza benzeyen bu yüzeyin derecesi 7. Tekillik sayısı 84; bu da yakın zamana kadar yedigiller üzerinde gerçel tekillik sayısı için bilinen en büyük sayıydı. Ta ki 2004'te Oliver Labs dünya rekorunu 99'a taşıyana kadar...

Etkileşimli görüntüde görülen üç yastık, Chmutov'un Sekizgilinde olduğu gibi, Çebişev polinomu kullanılmış olduğu için ortaya çıkmıştır. Aslında yıldız şekilli bu yüzey Chmutov'un yüzeyinin bir çeşitlemesidir. Burada $T_d(x) + T_d(y)$ ile verilen düzlem eğrisi, $S_7(x, y)$ ile göstereceğimiz bir düzgün yedigenle yer değiştirmiştir:

$$S_7(x, y) + \lambda \cdot T_d(z) = 0.$$

Burada uygun bir $\lambda \in \mathbb{R}$ değeri seçilmelidir.

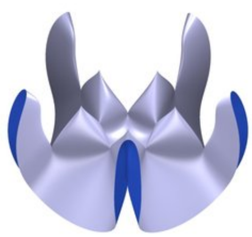
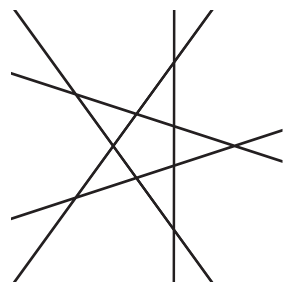




Chmutov'un inşasının bu çeşitlemesi Duco van Straten tarafından verilmiştir.

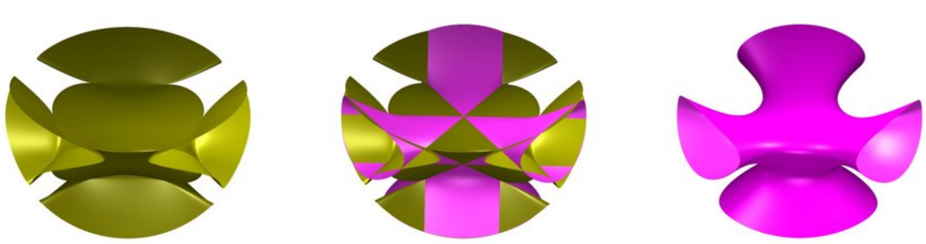
15 Gagalı Bir Beşgil

Derecesi 5 olan bu yüzey (beşgil) A_2 türünden 15 tekilliğe sahip; bu tekilliklere gaga (İng. cusp) diyoruz. Bu beşgil ve ilişkili birkaç yüzey daha Oliver Labs'ın 2005 makalesinde verilmiştir. Buradaki gagalardan beş tanesi diğer on tanesinden farklı görünüyor. Bu beş taneye A_2^{++} tekilliği, diğerlerine A_2^{+-} tekilliği deniyor.

Bu yüzeyin denklemi $S_5(x, y) + t(z) = 0$. Burada $S_5(x, y)$ bir düzgün beşgenin simetrilerini veren doğrular çarpımı (sağ resim) ve $t(z)$ daha önce birkaç kez söz ettiğimiz Çebişev polinomlarıdır.

15 gagalı başka bir beşgil Wolf Barth tarafından inşa edilmiştir (solda); orta resimde görüleceği gibi bu yüzey Clebsch'in Kübiği (sağda) ile ilişkilidir:



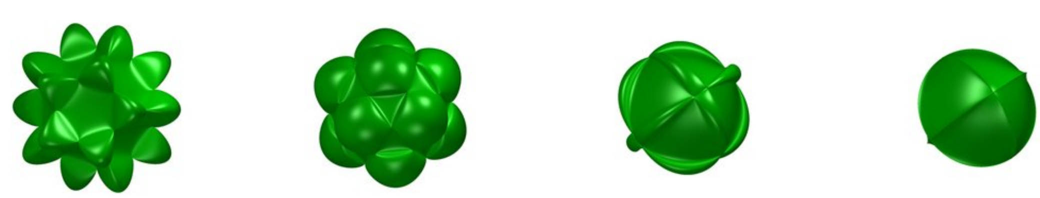
Barth'ın 30 Gagalı Altıgili

Wolf Barth'ın olası en fazla (65) tekilliğe sahip altıgili (galeride diğer bir resim) inşa etmesinin ve kendisinin iki doktora öğrencisinin daha yüksek dereceler için yeni dünya rekoru yüzeyleri bulmalarının ardından, Barth derecesi verilen bir yüzeyde bulunabilecek en fazla gaga tekilliği sayısı üzerinde çalışmaya başladı.

Barth'ın A_1^{+-} (yani çift koni) tekilliklerinden 65 adet ürettiği inşası gaga tekilliklere de uyarlanabilir. Barth'ın Altıgilinde olduğu gibi P_6 yirmiyüzlünün simetri düzlemlerini ve K yine bir birim küreyi göstermek üzere,

$$P_6 - \alpha \cdot K^3 = 0$$

ifadesi 30 adet gaga tekilliği verir:



Bu, altıgiller üzerinde gerçel gaga tekillik sayısı için şu anki dünya rekorudur. Kompleks gagalar için bu sayı 36'dır.