

# Albenili Yüzeyler

Matematiğin ne kadar karmaşık olduğu söylenir durur. Öte yandan dünyamızın karmaşıklığını anlamamıza yardımcı olduğu da bir gerçektir; örneğin, temel yapıları ve fiziksel nesnelerin önemli ortak özelliklerini tanımamızı sağlayarak bunu yapar. Bir nesne *sınıfında*, diğer tüm özellikleri göz ardı ederek aynı önemli özelliğe sahip tüm nesneleri bir araya toplamaya sınıflandırma denir. Sınıflandırma, dünyamızdaki nesne ve formların sonsuz çeşitliliğine dair bir genel bakış edinmemiz için önemli bir araçtır. Bu açıdan matematik esastır. Neyin önemli olup neyin olmadığına karar vermek, neyi anlamak istediğinize bağlıdır. Anlamak istediğiniz şey örneğin bir nesnenin formu ya da büyüklüğü olabilir.

Formu tarif etmek ve sınıflandırmak eski bir insan ihtiyacıdır; bunun nasıl yapılacağıysa bilinmezdir. Eski Yunan, geometriyi ve geometrik nesnelerin oranlarını kullandı. Daha sonra Araplar (Harezmi, İ.S. 900) cebri inşa ettiler. 17. yüzyılda Fermat ve Descartes'in büyük başarısıyla, geometrik ilişkileri tarif etmek için koordinat sistemleri keşfedildi. Böylece cebir ve geometri birlikte kullanılabilecekti.

SURFER yazılımı işte bu ilişkinin birincil örneklerinden biridir; cebir (formül) aracılığıyla geometriyi (şekil, form) yaratır. Bu galeride matematiğin güzelliğini bir deneyim olarak yaşayabilir ve kendiniz de yaratıcı olabilirsiniz. Sağ taraftaki yüzeylerden birini seçin. Formül ve form arasındaki bağlantı basit bir biçimde bir dizi örnekle açıklanmaktadır.

Hayal gücü ve sezgi sizden çıkıp gelecektir...

# Zitrus

Bu bir limon değildir - imgelerin ihaneti...

$$x^2 + z^2 = y^3(1 - y)^3$$

Bu resme ilk göz attığımızda şüphesiz hepimiz “Bu bir limon” diye düşüneceğiz. Fakat bu bir limon ise niye kokusu ve tadı yok? Niye gözenekleri ve benekleri yok? Bu bir limon olamaz!

Bu şekil bir limon değil elbette, onun matematiksel bir modeli. Limonun şeklinin özelliklerini daha iyi kavramamıza yardımcı oluyor. Coğrafyada *Alfred H. S. Korzybski* tarafından söylenmiş aynı havada bir cümle vardır: "Bir harita bir ülke değildir."

Formüller, formları daha iyi incelemek için bize yardımcı olacak matematiksel modeller kurmamızı sağlar.

Bunları hepsi matematiğin şiirselliğinin parçaları: düşüncelerimizi zihnimizin beklenmedik köşelerine taşıyan cebirsel denklemler aracılığıyla güzel yüzeyler yaratabiliyoruz.

# Tick

Formül, kuşkuya yer bırakmayan bir isim...

$$x^2 + y^2 = z^3(1 - z)$$

Bu galerideki tüm şekillerin adları var. Siz onlara ne ad takardınız? Başka biri onlara ne ad takardı?

Şekillere, hiçbir zaman kafa karışıklığına neden olmayacak adlar verebilir miyiz? Matematik buna bir çözüm bulmuş: şekilleri denklemleriyle adlandırıyor. Bir denklem, şeklin tüm noktalarını, eğrilerini, deliklerini, kırışıklıklarını ve sivriliklerini tamamen belirler. Sizin bilmeniz gereken tek şey, formülden bu formları nasıl bulup çıkaracağınız ve nasıl çizeceğiniz.

Denklemler tüm dünyada aynı biçimde yazılıyor ve yorumlanıyor çünkü matematiğin dili, tıpkı müzik notaları gibi, evrenseldir.

# Hummingbird

Denklem noktaları belirler...

$$z^3 + y^2 z^2 = x^2$$

Cebirsel ifadeyle, Hummingbird

$$x^2 = y^2 z^2 + z^3$$

denklemini sağlayan tüm  $(x, y, z)$  noktalarıyla verilir. Örneğin,  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$  ve  $(3, -2, -3)$  noktaları Hummingbird üzerindedir;  $(0, 1, 1)$  ise üzerinde değildir.

Üç boyutlu dünyamız üç yönle tarif edilir: ileri/geri, sol/sağ ve yukarı/aşağı. Bu yönler  $x$ ,  $y$  ve  $z$  ile ifade edilir. Her nokta bu yönlerin her birinden bir değerle betimlenir. Bu değerlere noktanın koordinatları denir ve nokta  $(x, y, z)$  diye yazılır.

Şimdi uzayın tüm noktalarını bu değerleriyle denklemin içine sokuyoruz ve sadece denklemi sağlayanları boyuyoruz. Boyanan tüm noktalar hep beraber şekli oluşturuyor.

# Nozzle

Bir sözcükte sonsuz sayıda harf...

$$yz(x^2 + y - z) = 0$$

İzlenimciler evleri ve çayırları binlerce renkli noktacıkla resmettiler. Tıpkı bunun gibi, matematiksel yüzeyler de binlerce noktadan oluşur; bu noktaların ne eni ne kütlesi vardır, sadece denklemi sağlarlar!

Sonsuzluğu hayal etmenin bir yolu 1, 2, 3, ... diye saymaya başlamaktır.

Her zaman bir sonraki sayı olacaktır. Sonuna kadar saymayı asla başaramayız.

Yalnızca yüzeylerde mi sonsuz nokta var? 0 ve 1 sayıları arasında da onlardan sonsuz tane var. Olanaksız mı görünüyor? Noktaları sonsuz ufak olarak düşünün; sanki kalınlığı sıfır olan bir kalemle boyanmış gibi... 0 ile 1 arasını bunlarla doldurmak için çok fazla nokta işaretlemeniz gerekecek: sonsuz tane!

# Helix

Bir sabun köpüğünden bile ince...

$$6x^2 = 2x^4 + y^2z^2$$

Sabun köpükleri hassastır; bakarak bile onları patlatırmışız gibi gelir. Yüzeylerinin iki tarafı vardır. Dış taraf sabun, iç taraf sudur. Eğer sabun katmanı çok incelirse - yani balon büyüdükçe - su, balonun patlamasına yol açar.

Cebirsel yüzeyler sabun köpüklerinden çok daha incedir; noktalardan oluşmuş bir katmandırlar. Unutmayın, bu noktaları yaratmak için hayal gücümüzü kullanıyoruz. Noktaların ne kütleleri ne yoğunlukları var. Dolayısıyla, şu helix gibi sivrilikleri ve kırışıklıkları olsa da, bizim yüzeyler patlamaz.

Helix yüzeyinin üç boyutlu bir modelini inşa etmek istersek, asıl helix yüzeyinden daha kalın bir heykel yapmak zorunda kalırız. Bunun için de yüzeyi bir tarafına doğru kalınlaştırıp sağlamlaştırmak gerekir.

# Nepali

Sonu gelmeyen dünya...

$$(xy - z^3 - 1)^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$$

Belki de bir yüzeyi çok güzel buldunuz ve bir tutam kar ile birlikte bir cam topun içine yerleştirip oynamak istediniz. Sakın herhangi bir yüzeyi oturma odanıza götürebileceğinizi düşünmeyin!

Öyle yüzeyler vardır ki sonsuza kadar uzar giderler. Çok güzel olsalar da ne boyutta bir cam top alırsanız alın topun içine sığmazlar. Böyle yüzeylere *sınırlanmamış* diyoruz. Bunları resmedebilmek için bazı bölümlerini saklamamız gerekir elbette.

Sınırlanmışlık özelliği, SURFER yardımıyla bile, kolayca saptanabilecek bir özellik değildir. Bu tıpkı Evren'in sınırlanmış olup olmadığını bulmaya benzer: sınırlarının var olup olmadığını bilmediğimizden olabilir de olmayabilir de.

# Heaven and Hell

Şapkadan yeni formlar çıkarmak...

$$x^2 - y^2 z^2 = 0$$

Yeni formlar yaratmak için denklemlerin nasıl çalıştığını anlamamız gerekir. Denklemlerin yapıtaşları *monomiallerdir*; bunlar harfler ve sayılardan oluşmuş cebirsel ifadelerdir.

Bir monomial şu unsurları içerir: İşaretler, katsayılar, değişkenler, üsler ve derece.

Örneğin:

$$2xy^2z = +2x^1y^2z^1.$$

Bir monomialin *derecesi*, değişkenlerinin üslerinin toplamıdır: yukarıdaki *derece* =  $1 + 2 + 1 = 4$ .

Denklemler kurmak için toplama, çıkarma ve çarpma gibi aritmetik işlemleri kullanırız. Bu işlemleri ilkokuldan beri biliyoruz. Tüm cebirsel yüzeyler bunlar tarafından ifade edilir.

Sadece toplama ve çarpma kullanarak sivriliğe ve deliklere sahip şekiller yaratabilir misiniz?



# Quaste

Denklemlerin ABC'si...

$$\begin{aligned} &8z^9 - 24x^2z^6 - 24y^2z^6 + 36z^8 + 24x^4z^3 - 168x^2y^2z^3 \\ &+ 24y^4z^3 - 72x^2z^5 - 72y^2z^5 + 54z^7 - 8x^6 - 24x^4y^2 \\ &- 24x^2y^4 - 8y^6 + 36x^4z^2 - 252x^2y^2z^2 + 36y^4z^2 \\ &- 54x^2z^4 - 108y^2z^4 + 27z^6 - 108x^2y^2z + 54y^4z \\ &- 54y^2z^3 + 27y^4 = 0 \end{aligned}$$

Quaste yüzeyinin denklemine yakından baktınız mı? Çok karışık görünüyor, değil mi? Oysa şekil basitçe tarif edilebiliyor: üst sınır Yunan alfabesindeki  $\alpha$  harfine benziyor; yan sınır bir sivrilik içeren bir eğri biçiminde. Bu tür bir sivriliğe *gaga* (*cusp*) diyoruz. Gagayı  $\alpha$  eğrisi boyunca sürüklerseniz ortaya Quaste çıkar. Bu yöntemle elde edilebilen yüzeylere (Fransız matematikçi René Descartes'a ithafen) Kartezyen çarpım denir.

Derecesi 1 olan monomialler  $x$ ,  $y$  ve  $z$ 'dir. Derecesi 2 olanlarsa  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$ ,  $xz$ ,  $yz$ ,  $z^2$ 'dir vs. Derece arttıkça monomial sayısı da artar ve böylece daha karmaşık şekilleri yaratmak için daha fazla olanak doğar. Aslında bir alfabe gibi: eğer emrinizde daha çok harf varsa daha karmaşık sözcükler ve cümleler yazabilirsiniz.

# Ding Dong

Formülü değiştirerek formu değiştirin...

$$x^2 + y^2 + z^3 = z^2$$

Ding Dong'un formülü ve formu sade. Şekil, Yunan harfi  $\alpha$ 'nın kendi eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilmiş. Başaşağı bakarsanız Ding Dong bir su damlası gibi görünür. Damlanın düşüşünü şöyle izleyebiliriz.

Denkleme küçük bir  $a$  parametresi ekler ve değerini sürekli biçimde değiştirirseniz bir dizi şekil elde edersiniz. Damla ortaya çıkar, yavaş yavaş son haline yaklaşır ve sonunda ikiye parçalanır. Bir filmin kare kare görüntüleri gibi...

$$x^2 + y^2 + z^3 - z^2 + 0.1 \cdot a = 0.$$

Her bir anda damla yerçekimiyle eşitlenmiş yüzey gerilimi sayesinde bir denge konumundadır. Fakat bu denge kararlı olmadığından damla düşmeden önce parçalara ayrılır. Matematikçi René Thom tarafından çalışılmış afet (catastrophe) kuramı, parametrelerdeki küçük değişikliklerin dengede nasıl ani değişikliklere neden olduğunu inceler.

# Vis à Vis

Tekil mi düzgün mü - dost mu düşman mı...

$$x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4 = 0$$

Tekil noktalar (ya da tekillikler) gözle kolayca ayırt edilebilir; gaga ya da katlama tekilliği gibi noktalarda yüzey düzgün ya da yumuşak değildir.

Vis à Vis yüzeyinin sol tarafındaki gaga bir tekilliktir; sağ taraftaki düzgün tepe bir düzgün (olağan) noktadır. Tekillikler ilginç noktalardır çünkü denklemdeki küçük değişiklikler tekilliğin görüntüsünde şaşırtıcı değişikliklere yol açar.

Özellikle bu noktaları incelemeye kendini adanmış insanların var olduğunu biliyor muydunuz? Kara Delikler ve Büyük Patlama, kozmolojik model denklemlerinin tekillikleridirler. Vee şimdi de parmaklarınızın ucuna bakın. Parmak izlerimizin tekillikleri bizim kimliğimizdir!

Sweet

$$(x^2 + 9/4y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2z^3 - 9/80y^2z^3 = 0$$

Sibernetik

üç kere üç dokuz eder  
bilirsin  
birin karesi birdir  
kare kökü de  
bilirsin  
"mutlu aşk yoktur"  
bilirsin

ama baharda ya da dışarda  
sonsuz göğün altında  
aşkın aşkla çarpımı  
nedendir bilinmez  
garip bir biçimde  
hep sonsuzdur  
kare kökü yoktur  
*Turgut Uyar*

Aşk tutkusu çoğunlukla, sonsuzluk, tekillik gibi ifade edilemez şeylerin duygusal gücüyle ilişkilendirilir. Bu ilişki sanatın birçok biçiminde ortaya çıkar.

Eşitlikteki son küpü şairin peşinden giderek kareye dönüştürün bakalım!

# Dullo

Doğada benzersiz bir muamma...

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$$

Matematik, fizik, kimya ve teknoloji gibi bilimler ve alanlarla yakından bağlantılıdır ve çevremizdeki dünyayı anlamamız için güçlü gereçler sunar

Doğayı incelerken karşılaştığımız birçok muamma, tekillikler içeren matematiksel modeller doğurur.

Örneğin, bir futbol stadyumunda izleyicilerin heyecanlı bir alkışıyla üretilen ses dalgalarının yayılması böyle bir durumdur. Bu doğa olayı bir Dullo yüzeyi doğurur. Bu yüzeyin tam ortasında bariz bir tekilliği var. Bu yüzden bir gol ertesinde hakem tam bu noktada olmaktan özenle kaçınır. Aksi takdirde kulakları zarar görebilir!