

Gleichzeitige Approximation von Phasen- und Betragsvorschriften durch FIR- und IIR-Systeme

Eduard Grundschoettel

8. Januar 1995

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Diskrete Systeme	7
2.1	Systemeigenschaften und Beschreibung im Zeitbereich	7
3	Charakterisierung diskreter Systeme im Frequenzbereich	9
3.1	Die Übertragungsfunktion	9
3.1.1	Stabilität	13
3.2	Definition der Dämpfung, Phase und Gruppenlaufzeit	15
3.3	Ermittlung der Systemeigenschaften aus den Linearfaktoren der Übertragungs- funktion	17
3.3.1	Frequenzgang reeller und konjugiert komplexer Pol- Nullstellen	18
3.4	Spezielle Systeme	27
3.4.1	Allpässe	27
3.4.2	Minimalphasige Systeme	30
3.4.3	Systeme mit linearer Phase	32
4	Filterentwurf mit Methoden der Tschebyscheff-Approximation	33
4.1	Tschebyscheff-Approximation	36
4.2	Approximationsfunktionen und Nebenbedingungen beim Filterentwurf	42
4.3	Partielle Ableitungen der Filterfunktionen	47
5	Beispiele	61
5.1	Phasenentzerrung bei einem Cauer-Tiefpasses 8-ter Ordnung	61
5.2	Tschebyscheff-Tiefpaß 8-ter Ordnung	69
5.3	Cauer-Tiefpasses 8-ter Ordnung	74
5.4	Gleichzeitige Approximation von Dämpfung und Gruppenlaufzeit	79
5.5	Stabiles Nennerpolynom für die Systemfunktion eines Bandpaßfilters	86
5.6	Diskretes Psophometerfilter	93

1 Einleitung

In der Regel werden an die Eigenschaften elektrischer Schaltungen mehrere Anforderungen gleichzeitig gestellt, die oftmals in der Tendenz einander widersprechen. Beispiele hierfür sind die gleichzeitige Einhaltung vorgeschriebener Mindestwerte der Verstärkung und Bandbreite durch einen Verstärker, sowie die Realisierung eines elektrischen Filters, daß einen vorgegebenen Dämpfungsfrequenzgang aufweist und gleichzeitig Restriktionen bezüglich der zulässigen Phasenverzerrung oder maximalen Gruppenlaufzeit einhält.

Für den Entwurf von Filtern mit optimalem Dämpfungsverhalten (z.B. Cauerfilter) oder Filter mit konstanter Gruppenlaufzeit (z.B. nichtrekursive Digitalfilter) gibt es analytische Entwurfsmethoden, die jedoch jeweils nur eine der genannten Eigenschaften berücksichtigen. So zeichnen sich Filterentwürfe, bei denen entweder nur das Dämpfungsverhalten oder nur der Frequenzgang der Gruppenlaufzeit berücksichtigt werden, durch folgende Besonderheiten aus: Filter mit optimalem Dämpfungsverlauf zeichnen sich durch einen steilen Anstieg der Gruppenlaufzeit an der Durchlaßgrenze aus, wohingegen Filter ohne Gruppenlaufzeitverzerrungen nicht geeignet sind, hohe Qualitätsforderungen an die Dämpfung zu erfüllen.

Wenn beim Schaltungsentwurf geschlossene analytische Lösungen nicht möglich sind, werden Optimierungsverfahren angewendet. Folgende Aufgaben sind beispielhaft hierfür: Realisierung von Zeit- und Frequenzforderungen mit Hilfe einer Schaltung, deren Struktur festgelegt ist und durch ein klassisches Syntheseverfahren nicht geliefert wird. Berücksichtigung von eingeschränkten Variationsbereichen, Frequenzabhängigkeiten und Nichtlinearitäten der Bauelemente einer Schaltung. Berücksichtigung parasitärer Erscheinungen. Realisierung von digitalen oder analogen Filtern, die nicht nur vorgegebene Dämpfungsforderungen erfüllen müssen, sondern gleichzeitig bestimmten Anforderungen an die Gruppenlaufzeit bzw. Phasenverzerrung zu genügen haben.

Für den Entwurf analoger Filter aus konzentrierten Bauelementen und RC-Leitungsfiltern unter Nebenbedingungen, wurde von Dr. Johann Friedrich Heinrichmeyer, im Rahmen seiner Dissertation am Lehrstuhl für Allgemeine Theoretische Elektrotechnik der Universität Erlangen-Nürnberg, das Programm TOPT entwickelt. Grundsätzliche Aufgabe des Programms TOPT ist es, eine gegebene Startlösung für ein Problem der Tschebyscheff-Approximation beim Entwurf von elektrischen Systemen zu verbessern.

Das Programm TOPT unterstützt den Entwurf der bereits erwähnten Filterarten gerade bei den für die Praxis wichtigen Entwurfsaufgaben, bei denen mehrere Filtereigenschaften gleichzeitig optimiert werden sollen. Ein typisches Beispiel hierfür sind kombinierte Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitforderungen, die an ein Entzerrfilter gestellt werden.

Aufgabe der vorliegenden Diplomarbeit war die Erweiterung des Programms TOPT, um neben analogen Filtern auch den Entwurf von Digitalfiltern zu ermöglichen. Außerdem war für das Programm TOPT eine graphische Oberfläche zu erstellen, die eine optische Darstellung der Approximationsergebnisse sowie eine bequemere Handhabung des Programms ermöglichen.

Bei Herrn Doktor Heinrichmeyer möchte ich mich an dieser Stelle für die motivierende Betreu-

ung und freundliche Unterstützung bei meiner Arbeit bedanken.

2 Diskrete Systeme

Die folgende kurze Einführung beschreibt die Zusammenhänge und Eigenschaften diskreter Systeme, und beschränkt sich auf die, für den Filterentwurf mit TOPT relevanten reellwertigen Systeme. Es soll ein Überblick über theoretische Zusammenhänge und Begriffe gegeben werden. Detailliertere Abhandlungen und Beweise der Zusammenhänge findet man z.B. in [1, 3].

2.1 Systemeigenschaften und Beschreibung im Zeitbereich

In allgemeiner Form kann ein diskretes System wie folgt beschrieben werden.

$$y(k) = S\{x(k)\} \quad (2.1.1)$$

$x(k)$ ist dabei eine diskrete Eingangsfolge, auf die das System mit einer diskreten Ausgangsfolge reagiert. $y(k)$ und $x(k)$ werden durch einen das System charakterisierenden Operator S miteinander verknüpft.

Die Antwort $h(k)$ eines diskreten Systems auf die spezielle Eingangsfolge $\delta(n)$ (δ -Folge) heißt *Impulsantwort*. Sie ist charakteristisch für das Übertragungsverhalten des Systems.

Ein diskretes System wird reellwertig genannt, wenn es auf eine Folge reeller Eingangswerte mit einer Folge reeller Ausgangswerte reagiert. Aus

$$x(k) \text{ reell, } \forall k \in \mathbb{Z} \quad (2.1.2)$$

folgt dann also

$$y(k) \text{ reell, } \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (2.1.3)$$

Insbesondere ist die *Impulsantwort* eines reellwertigen Systems eine Folge reeller Ausgangswerte.

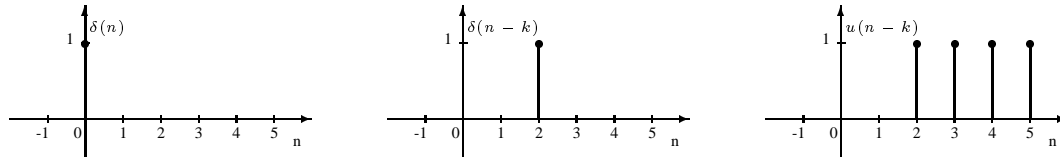


Abbildung 1: Darstellung verschiedener Eingangsfolgen.

Für kausale Systeme gilt, daß der Ausgangswert in einem bestimmten, aber beliebigen Punkt k_0 ausschließlich von $x(k)$ mit $k \leq k_0$ abhängt, nicht dagegen von $x(k)$ mit $k > k_0$. Wenn

$$x(k) = 0, \quad \text{für } k \leq k_0 \quad (2.1.4)$$

gilt, dann ist auch

$$y(k) = 0, \quad \text{für } k \leq k_0. \quad (2.1.5)$$

Ein System wird genau dann als linear bezeichnet, wenn seine Reaktion auf jede Linearkombination aller Eingangsfolgen gleich derselben Linearkombination der Einzelreaktionen ist. Mit den beliebigen (reell für reelle Systeme) Konstanten α_1 und α_2 muß also gelten:

$$\alpha_1 y_1(k) + \alpha_2 y_2(k) = S\{\alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k)\} \quad (2.1.6)$$

Gilt für ein System, daß die Untersuchung der Reaktion auf eine Eingangsfolge $x(k)$ unabhängig vom Zeitpunkt der Durchführung ist, so bezeichnet man es als zeitinvariant. Es gilt also:

$$y(k) = S\{x(k)\} \quad \text{und} \quad y(k-n) = S\{x(k-n)\} \quad (2.1.7)$$

Ist die Impulsantwort $h(k)$ bekannt, so kann die Reaktion $y(k)$ eines linearen Systems auf ein allgemeines Signal $x(k)$ durch Faltung bestimmt werden. Folgende Gleichung beschreibt den Zusammenhang.

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(k-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(k-n)h(n) \quad (2.1.8)$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$y(k) = h(k) * x(k) \quad (2.1.9)$$

Speziell für ein kausales System gilt

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^k x(n)h(k-n) \quad (2.1.10)$$

Schließlich wird ein System als stabil bezeichnet, wenn es auf jede beschränkte Eingangsfolge mit einer ebenfalls beschränkten Ausgangsfolge reagiert. Diese Eigenschaft wird auch als "bibo" - Stabilität bezeichnet (bounded input, bounded output). Ist also

$$|x(k)| < M_1 < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (2.1.11)$$

so muß für ein stabiles System

$$|y(k)| < M_2 < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (2.1.12)$$

gelten. Stabilität im Sinne von "bibo" - stabil ist dann und nur dann gewährleistet, wenn für ein kausales System die δ -Antwort der Bedingung

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < M < \infty, \quad (2.1.13)$$

beziehungsweise

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < M < \infty \quad (2.1.14)$$

genügt. Mit anderen Worten muß, bei einem bezüglich seines Ein- Ausgangsverhaltens stabilen diskreten Systems, die Impulsantwort absolut summierbar sein.

3 Charakterisierung diskreter Systeme im Frequenzbereich

3.1 Die Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion, beziehungsweise Systemfunktion, ist für zeitdiskrete Systeme die wichtigste Kenngröße. Im folgenden soll diese in verkürzter Form auf zwei unterschiedliche Weisen eingeführt werden. Im Hinblick auf die Signal- und Systembeschreibung findet dabei die z -Transformation Anwendung¹. Zeitinvarianz und Stabilität der Systeme sei für die folgenden Betrachtungen vorausgesetzt.

Zunächst soll ein System betrachtet werden, das durch seine Impulsantwort $h(n)$ gekennzeichnet ist. Angenommen, das System werde durch die spezielle Eingangsfolge

$$x(k) = z^k, \quad z = e^{j\Omega}, \quad \forall k \in \mathcal{Z}, \quad 0 \leq \Omega \leq 2\pi \quad (3.1.15)$$

erregt. Dann ergibt sich nach Gl. (2.1.8) für die beschränkte Ausgangsfolge

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j(k-n)\Omega} h(n) = e^{jk\Omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\Omega} h(n) \quad . \quad (3.1.16)$$

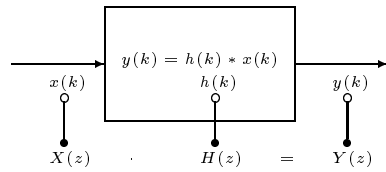
Wegen der vorausgesetzten Stabilität, ist $h(n)$ absolut summierbar, und es existiert

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\Omega} h(n) \quad . \quad (3.1.17)$$

$H(e^{j\Omega})$ ist die z -Transformierte der *Impulsantwort* und heißt *Systemfunktion*. Die Systemfunktion beschreibt das *Spektrum* der Impulsantwort. Da sich die Ausgangsfolge aus der Beziehung

$$y(k) = H(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega} \quad (3.1.18)$$

ergibt, ist $H(e^{j\Omega})$ zugleich der *Frequenzgang* des Systems.



Eine bei $k = -\infty$ einsetzende Erregung mit einer Exponentialfolge z^k und $|z| \geq 1$, führt zu einer Reaktion gleicher Form am Ausgang des Systems. Die oben definierte *Übertragungsfunktion* $H(z)$ beschreibt die Fähigkeit eines linearen, zeitinvarianten Systems, eine Exponentialfolge $x(k) = z^k$ mit $|z| \geq 1$ an den Ausgang des Systems zu übertragen.

¹Gute Einführungen in die z -Transformation findet man z.B. in [1, 3]

Nun soll eine weitere Möglichkeit aufgezeigt werden, mit der die Systemfunktion eingeführt werden kann. Geht man von der Beziehung

$$y(k) = h(k) * x(k) \quad (3.1.19)$$

zwischen Ein- und Ausgangsfolge eines digitalen Systems aus, so ergibt sich nach Anwendung der z -Transformation auf beide Seiten der Gleichung (3.1.19)

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = Y(z) = \mathcal{Z}\{h(k) * x(k)\} = H(z)X(z) \quad . \quad (3.1.20)$$

Hieraus ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad . \quad (3.1.21)$$

Die Systemfunktion kennzeichnet ebenso wie die Impulsantwort die Übertragungseigenschaften eines Systems. Da die Übertragungsfunktion allgemein leichter zu berechnen und für Untersuchungen eines digitalen Systems besser handhabbar ist, stellt sie eine wichtige Basis zur Beschreibung eines digitalen Filters dar.

An dieser Stelle seien drei verschiedene Verfahren, mit denen die Übertragungsfunktion $H(z)$ bestimmt werden kann, aufgelistet:

- Auf den Eingang eines Systems wird die Folge $x(k) = z^k$ mit $|z| \geq 1$ gegeben, dann gilt $H(z) = \frac{y(k)}{z^k}$.
- Betrachtet man das System im z -Bereich, dann ergibt sich $H(z)$ aus dem Quotienten der Systemantwort $Y(z)$ und der Erregung $X(z)$. $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.
- $H(z)$ ist gleich der z -Transformierten der *Impulsantwort* des Systems. $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}$

Diskrete, lineare Systeme mit zeitlich konstanten Parametern können durch Differenzengleichungen beschrieben werden. Für ein lineares, zeitinvariantes System mit einer rekursiven Struktur ergibt sich eine Gleichung n -ter Ordnung.

$$\sum_{\nu=0}^n c_{\nu}y(k+\nu) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu}x(k+\mu), \quad c_n = 1 \quad . \quad (3.1.22)$$

Wendet man die z -Transformation auf beide Gleichungsseiten an, so ergibt sich

$$\sum_{\nu=0}^n c_{\nu}z^{\nu}Y(z) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu}z^{\mu}X(z) \quad . \quad (3.1.23)$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu}z^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^n c_{\nu}z^{\nu}}X(z) \quad (3.1.24)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} z^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^n c_{\nu} z^{\nu}} \quad . \quad (3.1.25)$$

Für kausale Systeme muß dabei $m \leq n$ gelten.

Die Übertragungsfunktion für lineare, zeitinvariante Systeme mit rekursiven Strukturen ist also als gebrochen rationale Funktion in z mit reellen, konstanten Koeffizienten darstellbar. Filter, deren Übertragungsverhalten durch Gl. (3.1.25) beschrieben werden, haben eine unendlich lange Impulsantwort, und werden deshalb als IIR-Filter (Infinite Impulse Response) bezeichnet.

Bei nichtrekursiven Systemen ist der aktuelle Ausgangswert unabhängig von bereits früheren Werten der Ausgangsfolge. Entsprechend wird ein solches System durch die folgende Differenzgleichung beschrieben:

$$y(k) = \sum_{\mu=0}^n a_{\mu} x(k - \mu) \quad . \quad (3.1.26)$$

Nach Durchführung der z -Transformation ergibt sich für die Systemfunktion eines nichtrekursiven, linearen, zeitinvarianten Systems ein Polynom m -ten Grades mit konstanten Koeffizienten im Zähler von $H(z)$ und eine Polstelle m -ter Ordnung bei $z = 0$ im Nenner.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{\mu=0}^m a_{\mu} z^{-\mu} \quad a_{\mu} \in \mathcal{R} \quad . \quad (3.1.27)$$

Weil ein nichtrekursives System keine internen Rückkopplungen (Rückkopplungen von Verzögererausgängen auf Verzögerereingänge) hat, ist die Impulsantwort von endlicher Dauer. Man bezeichnet nichtrekursive Filter als FIR-Filter (Finite Impulse Response).

Sind $z_{0\mu}$ die Nullstellen des Zähler- und $z_{\infty\nu}$ die des Nennerpolynoms von $H(z)$ aus Gl. (3.1.25), so gilt allgemein die faktorisierte Darstellung.

$$H(z) = K \frac{\prod_{\mu=1}^m (z - z_{0\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (z - z_{\infty\nu})} \quad K \in \mathcal{R} \quad . \quad (3.1.28)$$

Da die Koeffizienten in (3.1.25) reell sind, sind die Pole bzw. Nullstellen in (3.1.28) entweder reell, oder konjugiert komplexe Paare. Für Approximations- bzw. Optimierungsverfahren stehen sowohl die Nullstellen, als auch die Polstellen von $H(z)$ zur Verfügung.

Angenommen ² das System habe N einfache Pole bzw. Nullstellen sowie $M/2$ konjugiert kom-

²Es sei nun $m = n$.

plexe Pol- Nullstellenpaare, dann kann $H(z)$ in Teilsystemfunktionen erster und zweiter Ordnung der Form

$$H_i^{(1)}(z) = b_{1i} \frac{z - z_{0i}}{z - z_{\infty i}} = \frac{b_{1i}z + b_{0i}}{z + c_{0i}} \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (3.1.29)$$

$$H_j^{(2)}(z) = b_{2j} \frac{(z - z_{0j})(z - z_{0j}^*)}{(z - z_{\infty j})(z - z_{\infty j}^*)} = \frac{b_{2j}z^2 + b_{1j}z + b_{0j}}{z^2 + c_{1j}z + c_{0j}} \quad j \in \{1, 2, \dots, M/2\} \quad (3.1.30)$$

zerlegt werden. Die gesamte Systemfunktion ergibt sich dann aus der Beziehung

$$H(z) = K \prod_{i=1}^N H_i^{(1)}(z) \prod_{j=N+1}^{N+M/2} H_j^{(2)}(z) \quad (3.1.31)$$

mit

$$K = \prod_{i=1}^N b_{1i} \prod_{j=N+1}^{N+M/2} b_{2j} \quad \text{und} \quad N + M = m. \quad (3.1.32)$$

Die Multiplikation der Teilsystemfunktionen entspricht strukturell einer Hintereinanderschaltung von Teilsystemen (siehe Bild (2)).

Ausgehend von Gleichung (3.1.28) läßt sich durch einfache Rechnung leicht zeigen, daß für die Übertragungsfunktion reellwertiger Systeme folgende Beziehungen gelten.

$$H(z^*) = H^*(z) \quad (3.1.33)$$

$$H(z) \quad \text{ist reell für} \quad z \in \mathcal{R} \quad (3.1.34)$$

$$|H(z^*)| = |H(z)| \quad (3.1.35)$$

$$\angle H(z) = -\angle H(z^*) \quad (3.1.36)$$

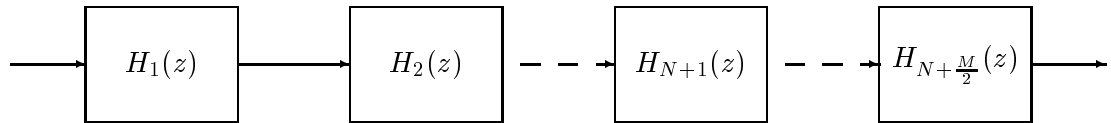


Abbildung 2: Kaskaden-Struktur gemäß Gl. (3.1.31)

3.1.1 Stabilität

Die folgende kurze Abhandlung soll darlegen, wie sich das Stabilitätsverhalten eines digitalen Systems in den Eigenschaften der Übertragungsfunktion ausdrückt.

Die Übertragungsfunktion eines diskreten Systems im z -Bereich lautet

$$H(z) = K \frac{\prod_{\mu=1}^m (z - z_{0\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (z - z_{\infty\nu})} \quad k \in \mathcal{R} \quad .$$

Äquivalent hierzu ist

$$H(z) = B_0 + \sum_{\nu=1}^{n_0} \sum_{\kappa=1}^{n_\nu} B_{\nu\kappa} \frac{z}{(z - z_{\infty\nu})^\kappa} \quad \text{mit } B_0 = H(0). \quad (3.1.37)$$

Die Koeffizienten $B_{\nu\kappa}$ der Gleichung (3.1.37) gewinnt man durch Partialbruchzerlegung von $\frac{H(z)}{z}$. Dabei gibt n_ν die Vielfachheit einer Polstelle und n_0 die Zahl der verschiedenen Polstellen $z_{\infty\nu}$ an. Der Grad des Nennerpolynoms ist $n = \sum_{\nu=1}^{n_0} n_\nu$. Es gilt³

$$B_{\nu\kappa} = \lim_{z \rightarrow z_{\infty\nu}} \frac{1}{(n_\nu - \kappa)!} \frac{d^{n_\nu - \kappa}}{dz^{n_\nu - \kappa}} \left[(z - z_{\infty\nu})^{n_\nu} \frac{H(z)}{z} \right]. \quad (3.1.38)$$

Gliedweise Rücktransformation von (3.1.38) liefert die Impulsantwort $h(k)$.

$$h(k) = B_0 \delta_0(k) + \sum_{\nu=1}^{n_0} \sum_{\kappa=1}^{n_\nu} B_{\nu\kappa} \binom{k}{\kappa - 1} z_{\infty\nu}^{k+1-\kappa} u(k) \quad (3.1.39)$$

$$h(k) = B_0 \delta_0(k) + \sum_{\nu=1}^{n_0} \sum_{\kappa=1}^{n_\nu} P_{\nu,\kappa-1}(k) z_{\infty\nu}^{k+1-\kappa} u(k) \quad (3.1.40)$$

$P_{\nu,\kappa-1}$ ist ein Polynom in k vom Grad $\kappa - 1$.

In Abschnitt 2.1 wurde bereits angegeben, daß die Impulsantwort eines bezüglich seines Ein-Ausgangsverhaltens stabilen Systems absolut summierbar sein muß. Für ein kausales System sei hier die Stabilitätsbedingung wiederholt.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(k)| < M < \infty$$

Mit (3.1.40) muß für ein stabiles und kausales System

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| \leq |B_0| + \sum_{\nu=1}^{n_0} \sum_{\kappa=1}^{n_\nu} \sum_{k=0}^{\infty} |P_{\nu,\kappa-1}(k) z_{\infty\nu}^{k+1-\kappa}| < M < \infty \quad (3.1.41)$$

³Zur Durchführung der Partialbruchzerlegung siehe z.B. [7]

gefordert werden. Hieraus folgt, daß alle Terme $P_{\nu,\kappa-1}(k)z_{\infty\nu}^{k+1-\kappa}$ absolut summierbar sein müssen. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Stabilität bezüglich des Eingangs-Ausgangsverhaltens eines Systems ist somit

$$|z_{\infty\nu}| < 1, \quad \forall \nu \quad . \quad (3.1.42)$$

Liegt mindestens eine *einfache* ($n_\nu = 1$) Polstelle auf dem Einheitskreis ($|z_{\infty\nu}| = 1$) und alle weiteren im Inneren, so liegt ein *bedingt stabiles* System vor. Die Reaktion eines bedingt stabilen Systems ist für eine beschränkte Eingangsfolge, die auch von endlicher Dauer sein kann, ebenfalls beschränkt.

Ist die Bedingung (3.1.42) nicht erfüllt, so ist das System instabil. Das bedeutet, daß für mindestens eine Polstelle $|z_{\infty\nu}| > 1$ gilt und die Ausgangsfolge $y(k)$ des Systems unbeschränkt ist.

Die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens eines diskreten Systems leitet hin zu einer Betrachtung der Nullstellen des Nennerpolynoms von $H(z)$. In der Herleitung der Stabilitätsbedingung ist die Lage der Nullstellen von $H(z)$ in der komplexen z -Ebene unberücksichtigt geblieben. Für das Stabilitätsverhalten eines Systems sind die Nullstellen des Zählerpolynoms von $H(z)$ also ohne Bedeutung.

3.2 Definition der Dämpfung, Phase und Gruppenlaufzeit

Speziell für $z = e^{j\Omega}$ beschreibt $H(z) = H(e^{j\Omega})$ den Frequenzgang eines digitalen Systems. $H(e^{j\Omega})$ ist eine periodische Funktion in $\Omega = \omega T$. Der Frequenzgang $H(e^{j\Omega})$ kann ausgehend von Gl. (3.1.21) wie folgt umgeformt werden:

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|e^{-jb(\Omega)} = e^{-[a(\Omega)+jb(\Omega)]} \quad (3.2.43)$$

Dabei ist

$$a(\Omega) = -\operatorname{Re}\{\ln H(z)|_{z=e^{j\Omega}}\} = -\ln|H(e^{j\Omega})| \quad (3.2.44)$$

die Dämpfung, und

$$b(\Omega) = -\operatorname{Im}\{\ln H(z)|_{z=e^{j\Omega}}\} = -\angle H(e^{j\Omega}) \quad (3.2.45)$$

die Phase eines Systems. Der Zusammenhang zwischen dem Betrag einer Systemfunktion und der Dämpfung wird üblicherweise auch durch die Gleichung

$$a(\Omega) = -20\log|H(e^{j\Omega})|, \quad [\text{dB}] \quad (3.2.46)$$

ausgedrückt. Mit Hilfe der Gleichungen (3.1.33) bis (3.1.36) läßt sich leicht herleiten, daß

$$a(\Omega) = a(-\Omega) \quad (3.2.47)$$

die Dämpfung eine gerade und

$$b(\Omega) = -b(-\Omega) \quad (3.2.48)$$

die Phase eine ungerade Funktion von Ω ist.

Schreibt man in Gleichung (3.1.31) die Teilsystemfunktionen in ihrer Polardarstellung auf, so ergibt sich für den Frequenzgang eines Gesamtsystems

$$H(e^{j\Omega}) = K \prod_{i=1}^N |H_i^{(1)}(e^{j\Omega})| e^{-jb_i^{(1)}(\Omega)} \prod_{\nu=N+1}^{N+M/2} |H_\nu^{(2)}(e^{j\Omega})| e^{-jb_\nu^{(2)}(\Omega)} \quad (3.2.49)$$

Leicht erkennbar ist nun, daß sich Dämpfung und Phase eines Systems aus der Summe der jeweiligen Teildämpfungen und Teilphasen ergibt. Insgesamt gilt also

$$a(\Omega) = -20\log(K) + \sum_{i=1}^N a_i^{(1)}(\Omega) + \sum_{\nu=N+1}^{N+M/2} a_\nu^{(2)}(\Omega) \quad (3.2.50)$$

$$b(\Omega) = \sum_{i=1}^N b_i^{(1)}(\Omega) + \sum_{\nu=N+1}^{N+M/2} b_\nu^{(2)}(\Omega) \quad (3.2.51)$$

Wie bei kontinuierlichen Systemen, wird auch für diskrete Systeme eine Gruppenlaufzeit definiert.

$$\tau_g(\Omega) = \frac{db(\Omega)}{d\Omega} = -\operatorname{Im} \left\{ \frac{d}{dz} [\ln H(z)] \frac{dz}{d\Omega} \bigg|_{z=e^{j\Omega}} \right\} \quad (3.2.52)$$

$$\tau_g(\Omega) = -Re \left\{ z \frac{H'(z)}{H(z)} \Big|_{z=e^{j\Omega}} \right\} \quad (3.2.53)$$

$$\tau_g(\Omega) = Re \left\{ \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kh(k)e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-jk\Omega}} \right\} \quad (3.2.54)$$

Weil $b(\Omega)$ eine ungerade Funktion von Ω ist, muß die Gruppenlaufzeit eine gerade Funktion sein.

$$\tau_g(\Omega) = \tau_g(-\Omega) \quad (3.2.55)$$

Analog zur Dämpfung und Phase eines Systems, daß sich aus Teilsystemen zusammensetzt, ergibt die Summe der Gruppenlaufzeiten jedes Teilsystems die Gruppenlaufzeit des Gesamtsystems.

$$\tau_g(\Omega) = \sum_{i=1}^N \tau_{gi}^{(1)}(\Omega) + \sum_{\nu=N+1}^{N+M/2} \tau_{g\nu}^{(2)}(\Omega) \quad (3.2.56)$$

3.3 Ermittlung der Systemeigenschaften aus den Linearfaktoren der Übertragungsfunktion

Dämpfung, Phase und Gruppenlaufzeit eines Systems lassen sich auf folgende Art aus den Linearfaktoren der Übertragungsfunktion bestimmen. Hier sei der besseren Übersicht wegen die Gleichung für den Frequenzgang eines diskreten Systems wiederholt.

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} e^{j\mu\Omega}}{\sum_{\nu=0}^n c_{\nu} e^{j\nu\Omega}} = b_m \frac{\prod_{\mu=1}^m (e^{j\Omega} - z_{0\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (e^{j\Omega} - z_{\infty\nu})} = \frac{Z(e^{j\Omega})}{N(e^{j\Omega})} \quad (3.3.57)$$

Dabei gilt $z = e^{j\Omega} = \cos(\Omega) + j\sin(\Omega)$.

Im Hinblick auf die spätere Realisierung eines digitalen Filters aus Gliedern 1. und 2. Ordnung sowie zur Vereinfachung von Berechnungen, empfiehlt sich eine Zusammenfassung der konjugiert komplexen Pol- Nullstellenpaare. Angenommen die Funktion $H(e^{j\Omega})$ habe γ (α) reelle Pol- (Null)stellen und δ (β) komplexe Pol- (Null)stellen, dann läßt sich $H(e^{j\Omega})$ wie folgt darstellen:

$$H(e^{j\Omega}) = b_m \frac{\prod_{\mu_1=1}^{\alpha} (e^{j\Omega} - z_{0\mu_1}) \prod_{\mu_2=1}^{\beta/2} (e^{j\Omega} - z_{0\mu_2})(e^{j\Omega} - z_{0\mu_2}^*)}{\prod_{\nu_1=1}^{\gamma} (e^{j\Omega} - z_{\infty\nu_1}) \prod_{\nu_2=1}^{\delta/2} (e^{j\Omega} - z_{\infty\nu_2})(e^{j\Omega} - z_{\infty\nu_2}^*)} \quad (3.3.58)$$

wobei $\alpha + \beta = m$ und $\gamma + \delta = n$; $b_m \in \mathcal{R}$ gilt.

Wählt man die Darstellung in Polarkoordinaten für die einzelnen Linearfaktoren, so ergibt sich

$$H(e^{j\Omega}) = b_m \frac{\prod_{\mu_1=1}^{\alpha} |(e^{j\Omega} - z_{0\mu_1})| e^{-jb_{\mu_1}(\Omega)} \prod_{\mu_2=1}^{\beta/2} |(e^{j\Omega} - z_{0\mu_2})(e^{j\Omega} - z_{0\mu_2}^*)| e^{-jb_{\mu_2}(\Omega)}}{\prod_{\nu_1=1}^{\gamma} |(e^{j\Omega} - z_{\infty\nu_1})| e^{-jb_{\nu_1}(\Omega)} \prod_{\nu_2=1}^{\delta/2} |(e^{j\Omega} - z_{\infty\nu_2})(e^{j\Omega} - z_{\infty\nu_2}^*)| e^{-jb_{\nu_2}(\Omega)}}. \quad (3.3.59)$$

Aus Gleichung (3.3.59) folgt, daß sich Betrag und Phase der Systemfunktion auf einfache Art und Weise aus den einzelnen Beträgen und Phasen der Linearfaktoren bestimmen lassen. Somit gilt für den Betrag

$$|H(e^{j\Omega})| = b_m \frac{\prod_{\mu_1=1}^{\alpha} |(e^{j\Omega} - z_{0\mu_1})| \prod_{\mu_2=1}^{\beta/2} |(e^{j\Omega} - z_{0\mu_2})(e^{j\Omega} - z_{0\mu_2}^*)|}{\prod_{\nu_1=1}^{\gamma} |(e^{j\Omega} - z_{\infty\nu_1})| \prod_{\nu_2=1}^{\delta/2} |(e^{j\Omega} - z_{\infty\nu_2})(e^{j\Omega} - z_{\infty\nu_2}^*)|} \quad (3.3.60)$$

und für die Phase

$$b(\Omega) = \sum_{\nu_1=1}^{\gamma} b_{\nu_1}(\Omega) + \sum_{\nu_2=1}^{\delta/2} b_{\nu_2}(\Omega) - \sum_{\mu_1=1}^{\alpha} b_{\mu_1}(\Omega) - \sum_{\mu_2=1}^{\beta/2} b_{\mu_2}(\Omega) \quad (3.3.61)$$

des Systems.

Formal gleiche Ergebnisse ergeben sich für die Dämpfung $a(\Omega)$ und die Gruppenlaufzeit $\tau(\Omega)$ des Systems. Es gilt

$$a(\Omega) = \sum_{\mu_1=1}^{\alpha} a_{\mu_1}(\Omega) + \sum_{\mu_2=1}^{\beta/2} a_{\mu_2}(\Omega) - \sum_{\nu_1=1}^{\gamma} a_{\nu_1}(\Omega) - \sum_{\nu_2=1}^{\delta/2} a_{\nu_2}(\Omega) \quad (3.3.62)$$

und

$$\tau(\Omega) = \sum_{\nu_1=1}^{\gamma} \tau_{\nu_1}(\Omega) + \sum_{\nu_2=1}^{\delta/2} \tau_{\nu_2}(\Omega) - \sum_{\mu_1=1}^{\alpha} \tau_{\mu_1}(\Omega) - \sum_{\mu_2=1}^{\beta/2} \tau_{\mu_2}(\Omega) \quad (3.3.63)$$

Zur Lösung einer Approximations- bzw. Optimierungsaufgabe mit TOPT muß dem Programm vorgegeben werden, welche Parameter der Übertragungsfunktion Gegenstand der Optimierung sind. Dabei kann eine zugrunde liegende Übertragungsfunktion in Linearfaktoren⁴ 1-ten und 2-ten Grades zerlegt sein.⁵ In den nächsten Abschnitten soll gezeigt werden, welche Beiträge zur Dämpfung, Phase und Gruppenlaufzeit eines Filters einzelne Linearfaktoren liefern.

3.3.1 Frequenzgang reeller und konjugiert komplexer Pol- Nullstellen

Zunächst soll allgemein der Beitrag einer komplexen Pol- Nullstelle zum Frequenzgang hergeleitet werden. Für das Betragsquadrat⁶ $|H_1(\Omega)|^2$ und die Dämpfung $a_1(\Omega)$ einer Polstelle $z_{\infty\nu_1}$ bzw. Nullstelle $z_{0\mu_1}$ mit $z = \cos(\Omega) + j\sin(\Omega)$ und

$$z_{\infty\nu_1} = \alpha_{\infty\nu_1} + j\beta_{\infty\nu_1} = \rho_{\infty\nu_1} e^{j\psi_{\infty\nu_1}}, \quad z_{0\mu_1} = \alpha_{0\mu_1} + j\beta_{0\mu_1} = \rho_{0\mu_1} e^{j\psi_{0\mu_1}}$$

gilt mit

$$H_{0\mu_1}(\Omega) = \cos(\Omega) + j\sin(\Omega) - \alpha_{0\mu_1} - j\beta_{0\mu_1} \quad (3.3.64)$$

$$H_{\infty\nu_1}(\Omega) = \frac{1}{\cos(\Omega) + j\sin(\Omega) - \alpha_{\infty\nu_1} - j\beta_{\infty\nu_1}} \quad (3.3.65)$$

$$|H_{0\mu_1}(\Omega)|^2 = (\cos(\Omega) - \alpha_{0\mu_1})^2 + (\sin(\Omega) - \beta_{0\mu_1})^2 \quad (3.3.66)$$

$$|H_{\infty\nu_1}(\Omega)|^2 = \frac{1}{(\cos(\Omega) - \alpha_{\infty\nu_1})^2 + (\sin(\Omega) - \beta_{\infty\nu_1})^2} \quad (3.3.67)$$

⁴Teilsysteme 1-ten und 2-ten Grades

⁵Polynome müssen nicht in Teilsysteme zerlegt werden, wenn deren Koeffizienten Gegenstand der Optimierung sind

⁶Der Index 1 soll andeuten, daß eine einzelne Pol- Nullstelle betrachtet wird.

$$a_{0_{\mu_1}}(\Omega) = -10 \log((\cos(\Omega) - \alpha_{0_{\mu_1}})^2 + (\sin(\Omega) - \beta_{0_{\mu_1}})^2) \quad (3.3.68)$$

$$a_{\infty_{\nu_1}}(\Omega) = 10 \log((\cos(\Omega) - \alpha_{\infty_{\nu_1}})^2 + (\sin(\Omega) - \beta_{\infty_{\nu_1}})^2) \quad (3.3.69)$$

oder nach elementaren Umformungen mit Polarkoordinaten für z.B. eine Nullstelle

$$H_{0_{\mu_1}}(\Omega) = \cos(\Omega) + j \sin(\Omega) - \rho_{0_{\mu_1}} \cos(\psi_{0_{\mu_1}}) - j \rho_{0_{\mu_1}} \sin(\psi_{0_{\mu_1}}) \quad (3.3.70)$$

$$|H_{0_{\mu_1}}(\Omega)|^2 = 1 + \rho_{0_{\mu_1}}^2 - 2\rho_{0_{\mu_1}} \cos(\Omega - \psi_{0_{\mu_1}}) \quad (3.3.71)$$

$$a_{0_{\mu_1}}(\Omega) = -^{(+)} 10 \log(1 + \rho_{0_{\mu_1}}^2 - 2\rho_{0_{\mu_1}} \cos(\Omega - \psi_{0_{\mu_1}})) . \quad (3.3.72)$$

Aus (3.3.64) ergibt sich dann für Phase und Gruppenlaufzeit einer einfachen Pol- Nullstelle

$$b_{0_{\mu_1}}(\Omega) = -^{(+)} \arctan\left(\frac{\sin(\Omega) - \beta_{0_{\mu_1}}}{\cos(\Omega) - \alpha_{0_{\mu_1}}}\right) \quad (3.3.73)$$

$$\tau_{0_{\mu_1}}(\Omega) = \frac{db_{0_{\mu_1}}(\Omega)}{d\Omega} . \quad (3.3.74)$$

Nach Differentiation von (3.3.73) und einigen Umformungen des Ergebnisses ergibt sich

$$\tau_{0_{\mu_1}}(\Omega) = -^{(+)} \frac{1 - (\alpha_{0_{\mu_1}} \cos(\Omega) + \beta_{0_{\mu_1}} \sin(\Omega))}{1 - 2(\alpha_{0_{\mu_1}} \cos(\Omega) + \beta_{0_{\mu_1}} \sin(\Omega)) + \alpha_{0_{\mu_1}}^2 + \beta_{0_{\mu_1}}^2} \quad (3.3.75)$$

oder wieder mit Polarkoordinaten

$$\tau_{0_{\mu_1}}(\Omega) = -^{(+)} \frac{1 - \rho_{0_{\mu_1}} \cos(\Omega - \psi_{0_{\mu_1}})}{1 - 2\rho_{0_{\mu_1}} \cos(\Omega - \psi_{0_{\mu_1}}) + \rho_{0_{\mu_1}}^2} . \quad (3.3.76)$$

Ersetzt man in (3.3.72), (3.3.73), (3.3.75) und (3.3.76) $\rho_{0_{\mu_1}}, \psi_{0_{\mu_1}}, \alpha_{0_{\mu_1}}$ und $\beta_{0_{\mu_1}}$ durch die entsprechenden Werte einer Polstelle und berücksichtigt dabei das positive Vorzeichen, so erhält man die Formeln für eine komplexe Polstelle.

Speziell für reelle Pol- Nullstellen gilt $\psi_1 = 0$ bzw. $\beta_1 = 0$. Bild (3) zeigt den Verlauf von Dämpfung, Phase und Gruppenlaufzeit in Abhängigkeit von Ω und ρ als Parameter. Wegen der geforderten Stabilität, kommt nur für Nullstellen $\rho_{0_{\mu_1}} \geq 1$ in Betracht. Die Kurvenverläufe für $\rho_{0_{\mu_1}} > 1$ ergeben sich, wenn man den Parameter ρ durch $\frac{1}{\rho}$ ersetzt und die Kurve mit ρ multipliziert.

Beim Phasenverlauf ergeben sich prinzipiell andere Kurvenverläufe, wenn $\rho_{0_{\mu_1}} > 1$ ist. Für $\rho_{0_{\mu_1}} = 1$ ist der Phasenbeitrag

$$b_{0_{\mu_1}}(\Omega) = - \left[\frac{\Omega}{2} + \frac{\pi}{2} \text{sign}(\Omega) \right] \quad (3.3.77)$$

Durch Verschiebung der Frequenzgänge in Abszissen- und Ordinatenrichtung gewinnt man die Phasenverläufe $b_{1_k}(\Omega)$ für komplexe Pol- Nullstellen. Es gilt

$$b_{1_k}(\Omega) = b_{1_r}(\Omega - \psi_1) + \psi_1 \quad (3.3.78)$$

wenn $b_{1,r}$ der Phasenanteil reeller Pole und Nullstellen mit gleichem Radius ($\rho_1 < 1$) ist.

Während $\psi_1 = 0$ für reelle Pol- Nullstellen gilt, bewirkt bei komplexen Pol- Nullstellen $\psi_1 \neq 0$ eine Verschiebung in Abszissen- und Ordinatenrichtung. Nullstellen mit $\rho_{0_{\mu_1}} = 1$ liefern den Beitrag

$$\tau_{0_{\mu_1}}(\Omega) = -[0.5 + \pi\delta_0(\Omega)] \quad (3.3.79)$$

zur Gruppenlaufzeit. Frequenzgänge der Gruppenlaufzeit mit wechselnden Vorzeichen ergeben sich für Nullstellen mit Beträgen $\rho_{0_{\mu_1}} > 1$, wobei in der Umgebung von $\Omega = \psi_{0_{\mu_1}}$ positive Beiträge zur Gesamtlaufzeit entstehen.



Abbildung 3: Beiträge einer Pol- Nullstelle zum Frequenzgang

Nun sollen die Zusammenhänge in etwas verkürzter Form für konjugiert komplexe Pol- Nullstellen dargelegt werden.

Es gilt⁷

$$z_{0_{\mu_2}} = z_{0_{(\mu+1)_2}}^*, \rho_{0_{\mu_2}} = \rho_{0_{(\mu+1)_2}} \quad \text{und} \quad \psi_{0_{\mu_2}} = -\psi_{0_{(\mu+1)_2}} .$$

Somit

$$z_{0_{\mu_2}} = \alpha_{0_{\mu_2}} + j\beta_{0_{\mu_2}} = \rho_{0_{\mu_2}} e^{j\psi_{0_{\mu_2}}} \quad z_{0_{(\mu+1)_2}} = \alpha_{0_{\mu_2}} - j\beta_{0_{\mu_2}} = \rho_{0_{\mu_2}} e^{-j\psi_{0_{\mu_2}}} .$$

Die Darlegung der Zusammenhänge soll wieder auf eine konjugiert komplexe Nullstelle beschränkt bleiben. Im Falle einer Polstelle sind in den Formeln die den Nullstellen entsprechenden Werte einzusetzen. Für den Betrag ist, wie in (3.3.65), der Kehrwert zu bilden. Außerdem gilt das positive Vorzeichen für konjugiert komplexe Pole in den Formeln.

Dämpfung, Phase und Gruppenlaufzeit ergeben sich aus folgenden Gleichungen

$$H_{0_{\mu_2}}(\Omega) = (\cos(\Omega) + j\sin(\Omega) - \rho_{0_{\mu_2}} e^{j\psi_{0_{\mu_2}}})(\cos(\Omega) + j\sin(\Omega) - \rho_{0_{\mu_2}} e^{-j\psi_{0_{\mu_2}}}) . \quad (3.3.80)$$

Ausmultiplizieren der Linearfaktoren und Zusammenfassen der Real- und Imaginärteile liefern aus (3.3.80)

$$H_{0_{\mu_2}}(\Omega) = (\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \rho_{0_{\mu_2}}^2 - 2\rho_{0_{\mu_2}} \cos(\psi_{0_{\mu_2}}) \cos(\Omega)) + j2\sin(\Omega)(\cos(\Omega) - \rho_{0_{\mu_2}} \sin(\psi_{0_{\mu_2}})) \quad (3.3.81)$$

Somit ist

$$|H_{0_{\mu_2}}(\Omega)|^2 = (\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \rho_{0_{\mu_2}}^2 - 2\rho_{0_{\mu_2}} \cos(\psi_{0_{\mu_2}}) \cos(\Omega))^2 + 4\sin^2(\Omega)(\cos(\Omega) - \rho_{0_{\mu_2}} \sin(\psi_{0_{\mu_2}}))^2 \quad (3.3.82)$$

das Betragsquadrat von (3.3.81). Mit $z_{0_{\mu_2}} = z_{0_{(\mu+1)_2}}^*$ in kartesischen Koordinaten gilt auch

$$|H_{0_{\mu_2}}(\Omega)|^2 = (\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha_{0_{\mu_2}}^2 + \beta_{0_{\mu_2}}^2 - 2\alpha_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega))^2 + 4\sin^2(\Omega)(\cos(\Omega) - \alpha_{0_{\mu_2}})^2 \quad (3.3.83)$$

Aus den Linearfaktoren eines quadratischen Terms läßt sich die Phase wie folgt bestimmen:

$$b_{0_{\mu_2}} = \angle \{ (e^{j\Omega} - \rho_{0_{\mu_2}} e^{j\psi_{0_{\mu_2}}})(e^{j\Omega} - \rho_{0_{\mu_2}} e^{-j\psi_{0_{\mu_2}}}) \} \quad (3.3.84)$$

$$b_{0_{\mu_2}} = \angle \{ (e^{j2\Omega}(1 - \rho_{0_{\mu_2}} e^{-j(\Omega - \psi_{0_{\mu_2}})})(1 - \rho_{0_{\mu_2}} e^{-j(\Omega + \psi_{0_{\mu_2}})}) \} . \quad (3.3.85)$$

Insgesamt ergibt sich nach einigen Zwischenrechnungen aus (3.3.85)

$$b_{0_{\mu_2}} = \overset{(+)}{-} \left(2\Omega + \arctan \left(\frac{\rho_{0_{\mu_2}} \sin(\Omega - \psi_{0_{\mu_2}})}{1 - \rho_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega - \psi_{0_{\mu_2}})} \right) + \arctan \left(\frac{\rho_{0_{\mu_2}} \sin(\Omega + \psi_{0_{\mu_2}})}{1 - \rho_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega + \psi_{0_{\mu_2}})} \right) \right) \quad (3.3.86)$$

oder ausgehend von (3.3.81) für kartesische Koordinaten

$$b_{0_{\mu_2}} = \overset{(+)}{-} \arctan \left(\frac{2\sin(\Omega)(\cos(\Omega) - \alpha_{0_{\mu_2}})}{\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha_{0_{\mu_2}}^2 + \beta_{0_{\mu_2}}^2 - 2\alpha_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega)} \right) . \quad (3.3.87)$$

⁷Hier steht der Index 2 für eine konjugiert komplexe Pol- Nullstelle

Schließlich ergibt sich der Beitrag $\tau_{0_{\mu_2}}(\Omega)$ einer konjugiert komplexen Nullstelle zur Gruppenlaufzeit eines Gesamtsystems aus

$$\tau_{0_{\mu_2}}(\Omega) = \frac{db_{0_{\mu_2}}(\Omega)}{d\Omega} . \quad (3.3.88)$$

Das Differentiationsergebnis von Gl. (3.3.86) bzw. (3.3.87) lautet

$$\tau_{0_{\mu_2}}(\Omega) = -^{(+)} \left(2 + \frac{\rho_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega - \psi_{0_{\mu_2}}) - \rho_{0_{\mu_2}}^2}{1 - 2\rho_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega - \psi_{0_{\mu_2}}) + \rho_{0_{\mu_2}}^2} + \frac{\rho_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega + \psi_{0_{\mu_2}}) - \rho_{0_{\mu_2}}^2}{1 - 2\rho_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega + \psi_{0_{\mu_2}}) + \rho_{0_{\mu_2}}^2} \right) \quad (3.3.89)$$

bzw.

$$\tau_{0_{\mu_2}}(\Omega) = -^{(+)} \left(\frac{1 - \rho_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega - \psi_{0_{\mu_2}})}{1 - 2\rho_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega - \psi_{0_{\mu_2}}) + \rho_{0_{\mu_2}}^2} + \frac{1 - \rho_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega + \psi_{0_{\mu_2}})}{1 - 2\rho_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega + \psi_{0_{\mu_2}}) + \rho_{0_{\mu_2}}^2} \right) . \quad (3.3.90)$$

Ebenso

$$\begin{aligned} \tau_{0_{\mu_2}}(\Omega) &= -^{(+)} \left(\frac{1 - \alpha_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega) - \beta_{0_{\mu_2}} \sin(\Omega)}{1 - 2(\alpha_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega) + \beta_{0_{\mu_2}} \sin(\Omega)) + \alpha_{0_{\mu_2}}^2 + \beta_{0_{\mu_2}}^2} \right) \\ &\quad -^{(+)} \left(\frac{1 - \alpha_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega) + \beta_{0_{\mu_2}} \sin(\Omega)}{1 - 2(\alpha_{0_{\mu_2}} \cos(\Omega) - \beta_{0_{\mu_2}} \sin(\Omega)) + \alpha_{0_{\mu_2}}^2 + \beta_{0_{\mu_2}}^2} \right) \end{aligned} \quad (3.3.91)$$

mit Nullstellen in kartesischen Koordinaten.

Vergleicht man (3.3.89) mit (3.3.76), so erkennt man leicht, daß sich, wie erwartet, Dämpfungs-, Phasen- und Gruppenlaufzeitverläufe quadratischer Terme aus der Summe der Frequenzgänge zweier einfacher Pole bzw. Nullstellen mit konjugiert komplexen Werten ergeben.

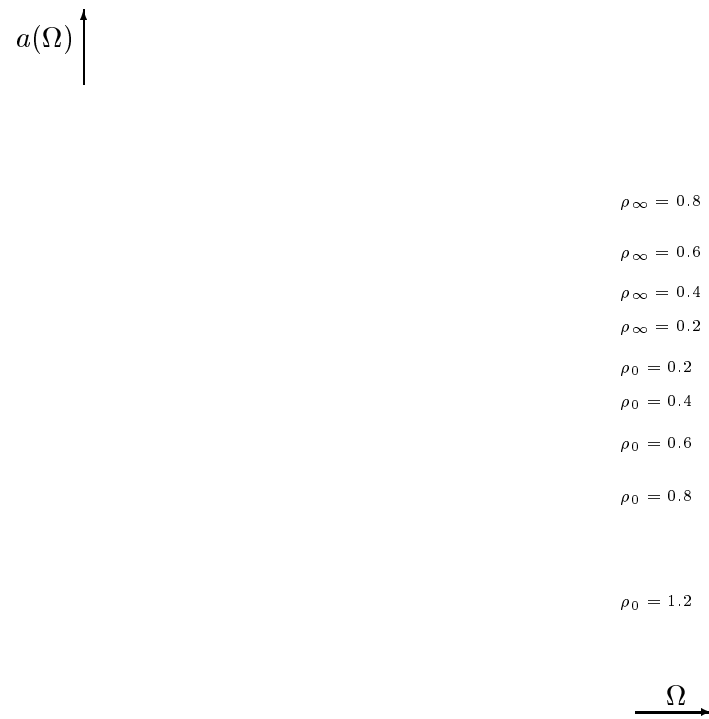


Abbildung 4: Beiträge einer komplexen Pol- Nullstelle zur Dämpfung.

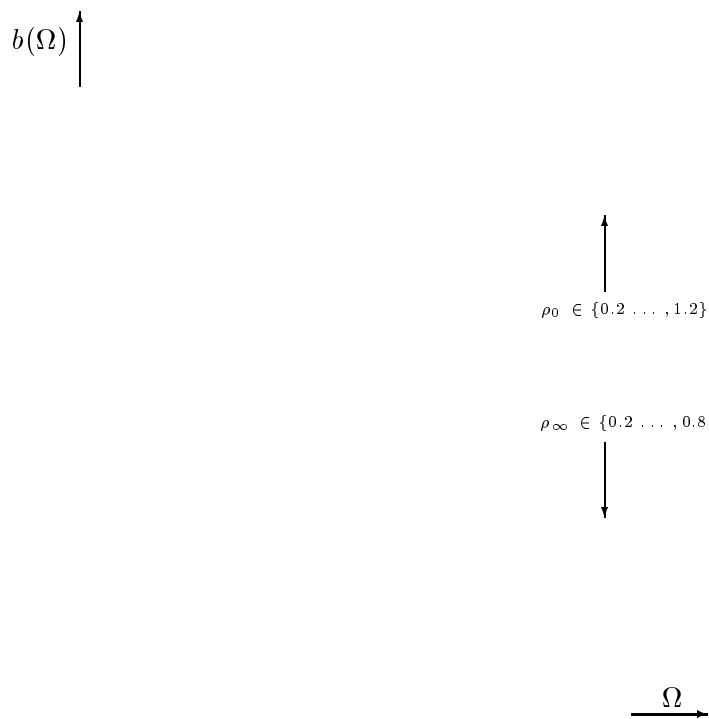


Abbildung 5: Beiträge einer komplexen Pol- Nullstelle zur Phase.

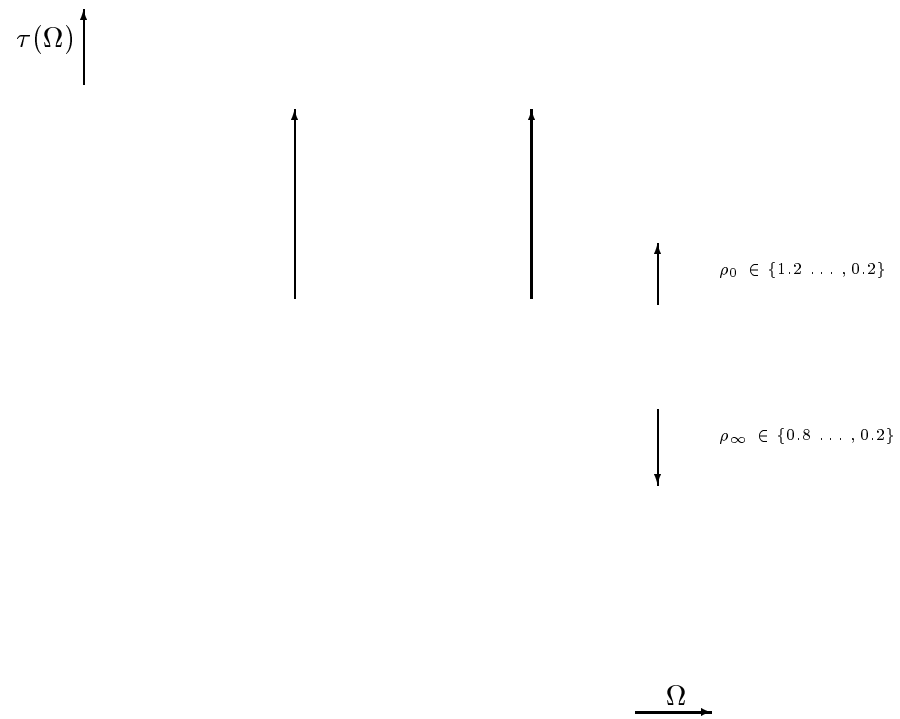


Abbildung 6: Beiträge einer komplexen Pol- Nullstelle zur Gruppenlaufzeit.

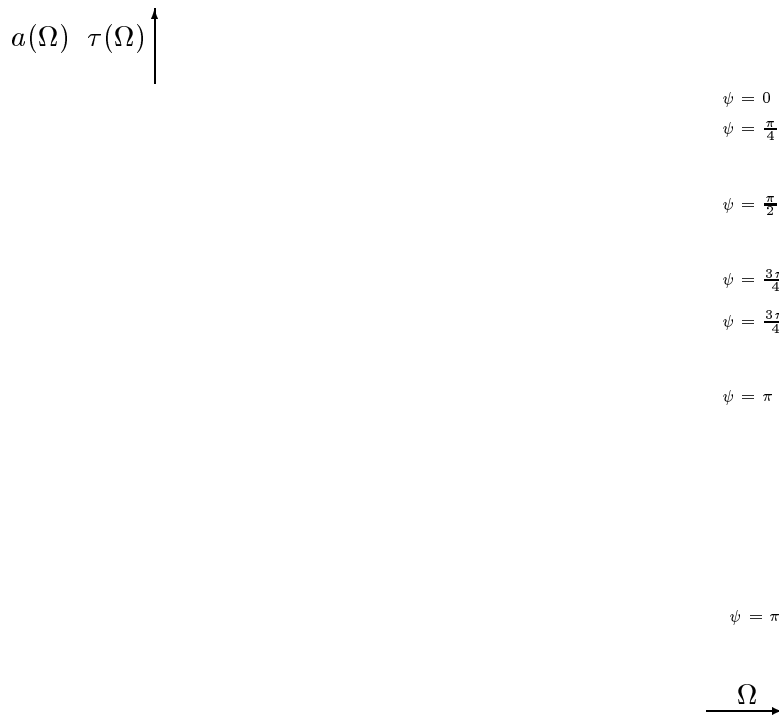


Abbildung 7: Beiträge einer komplexen Polstelle zur Dämpfung und Gruppenlaufzeit.

Die Bilder (4, 5, 6) zeigen für verschiedene Parameter $\rho \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2\}$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ die Beiträge konjugiert komplexer Pol- Nullstellen zum Frequenzgang eines Gesamtsystems. Für $\rho_\infty = 0.8$ und $\psi_\infty \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$ zeigt Bild (7) den Frequenzgang der Dämpfung und Gruppenlaufzeit einer konjugiert komplexen Polstelle.

3.4 Spezielle Systeme

3.4.1 Allpässe

Charakteristisch für einen Allpaß ist, daß der Betrag der Übertragungsfunktion für alle Frequenzen konstant bleibt. Es gilt

$$|H_A(e^{j\Omega})| = \text{const.}, \quad \forall \Omega, \quad (3.4.92)$$

dabei müssen wegen der geforderten Stabilität alle Pole von $H_A(e^{j\Omega})$ innerhalb des Einheitskreises liegen. Ausgehend von

$$H(e^{j\Omega}) = b_m \frac{\prod_{\mu=1}^m (e^{j\Omega} - z_{0\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (e^{j\Omega} - z_{\infty\nu})} \quad (3.4.93)$$

läßt sich zeigen, daß für die Übertragungsfunktion eines Allpasses n -ter Ordnung

$$H_A(e^{j\Omega}) = b_n \frac{\prod_{\nu=1}^n (e^{j\Omega} - \frac{1}{z_{\infty\nu}^*})}{\prod_{\nu=1}^n (e^{j\Omega} - z_{\infty\nu})} \quad (3.4.94)$$

gelten muß. Die Eigenschaft (3.4.92) der Systemfunktion ergibt sich also aus der Tatsache, daß die Nullstellen $z_{0\mu}$ von $H_A(e^{j\Omega})$ spiegelbildlich zu den Polstellen $z_{\infty\nu}$ außerhalb des Einheitskreises der z -Ebene liegen. Insbesondere gilt also $z_{0\mu} = \frac{1}{z_{\infty\nu}^*}$ und Zählergrad m gleich Nennergrad n .

Setzt man in (3.4.94) für $b_n = (-1)^n \prod_{\nu=1}^n z_{\infty\nu}^* = c_0$, so folgt weiter

$$H_A(e^{j\Omega}) = \frac{\prod_{\nu=1}^n (1 - e^{j\Omega} z_{\infty\nu}^*)}{\prod_{\nu=1}^n (e^{j\Omega} - z_{\infty\nu})} \quad (3.4.95)$$

Durch Ausmultiplizieren der Linearfaktoren gewinnt man schließlich

$$H_A(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{\nu=0}^n c_{n-\nu} e^{j\nu\Omega}}{\sum_{\nu=0}^n c_{\nu} e^{j\nu\Omega}} = e^{jn\Omega} \frac{\sum_{\nu=0}^n c_{\nu} e^{-j\nu\Omega}}{\sum_{\nu=0}^n c_{\nu} e^{j\nu\Omega}} = e^{jn\Omega} \frac{N(e^{-j\Omega})}{N(e^{j\Omega})} \quad (3.4.96)$$

und

$$H_A(e^{j\Omega}) = 1, \quad \forall \Omega \quad (3.4.97)$$

Der Nenner $N(e^{j\Omega})$ kann als Polynom n -ten Grades einer komplexen Veränderlichen z in Real- und Imaginärteil zerlegt werden.

$$N(e^{j\Omega}) = N_R(e^{j\Omega}) + jN_I(e^{j\Omega})$$

Geht man unter Berücksichtigung, daß $N(e^{j\Omega}) = N^*(e^{-j\Omega})$ und $\angle N(e^{j\Omega}) = -\angle N(e^{-j\Omega})$ gelten, von (3.4.95) aus, dann lassen sich Phase und Gruppenlaufzeit eines Allpasses n -ter Ordnung wie folgt bestimmen:

$$b_A(\Omega) = -n\Omega + 2 \arctan \left(\frac{N_I(e^{j\Omega})}{N_R(e^{j\Omega})} \right) \quad (3.4.98)$$

$$b_A(\Omega) = -n\Omega + 2 \arctan \left(\frac{\sum_{\nu=1}^n c_{\nu} \sin(\nu\Omega)}{\sum_{\nu=1}^n c_{\nu} \cos(\nu\Omega)} \right) \quad (3.4.99)$$

Differenziert man (3.4.98) nach Ω , so erhält man allgemein für die Gruppenlaufzeit $\tau_{Ag}(\Omega)$ eines Allpasses n -ter Ordnung.

$$\tau_{Ag}(\Omega) = \frac{db_A(\Omega)}{d\Omega} = -n + 2 \frac{N'_I N_R - N'_R N_I}{N^2} \quad (3.4.100)$$

Ein Allpaß 1-ter Ordnung, mit einer komplexen Polstelle, hat die Systemfunktion

$$H_{A_{\nu_1}}(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega} \frac{e^{-j\Omega} - z_{\infty_\nu}^*}{e^{j\Omega} - z_{\infty_\nu}} = e^{-j\Omega} \frac{1 - e^{j\Omega} z_{\infty_\nu}^*}{1 - e^{-j\Omega} z_{\infty_\nu}}. \quad (3.4.101)$$

Zähler und Nenner von (3.4.98) sind konjugiert komplex zueinander, deshalb kann für die Phase leicht abgelesen werden, daß

$$b_{A_{\nu_1}}(\Omega) = -\Omega + 2 \arctan \left(\frac{\sin(\Omega) - \rho_\nu \sin(\psi_\nu)}{\cos(\Omega) - \rho_\nu \cos(\psi_\nu)} \right) \quad (3.4.102)$$

$$b_{A_{\nu_1}}(\Omega) = -\Omega + 2 \arctan \left(\frac{\sin(\Omega) - \beta_\nu}{\cos(\Omega) - \alpha_\nu} \right) \quad (3.4.103)$$

$$b_{A_{\nu_1}}(\Omega) = \Omega + 2 \arctan \left(\frac{\rho_\nu \sin(\Omega - \psi_\nu)}{1 - \rho_\nu \cos(\Omega - \psi_\nu)} \right) \quad (3.4.104)$$

mit $z_{\infty_\nu} = \alpha_{\infty_\nu} + j\beta_{\infty_\nu} = \rho_{\infty_\nu} e^{j\psi_{\infty_\nu}}$ gilt.

Die Gruppenlaufzeit $\tau_{Ag_\nu}(\Omega)$ eines einzelnen Allpasses erhält man durch Differentiation von $b_{A_{\nu_1}}(\Omega)$ nach Ω .

$$\tau_{Ag_{\nu_1}}(\Omega) = \frac{1 - \rho_\nu^2}{1 - 2\rho_\nu \cos(\Omega - \psi_\nu) + \rho_\nu^2} \quad (3.4.105)$$

Entsprechend (3.3.61) und (3.3.63) ergeben sich Phase und Gruppenlaufzeit von Allpässen n -ter Ordnung aus

$$b_A(\Omega) = \sum_{\nu=1}^n b_{A_{\nu_1}}(\Omega) \quad (3.4.106)$$

und

$$\tau_{Ag}(\Omega) = \sum_{\nu=1}^n \tau_{Ag_{\nu_1}}(\Omega). \quad (3.4.107)$$

Speziell für Allpässe 1-ter Ordnung mit reellen Polstellen und Allpässe 2-ter Ordnung mit konjugiert komplexen Polstellen seien hier Formeln angegeben, die Basis für eine Implementierung in TOPT waren.

- Reellwertiger Allpaß 1-ter Ordnung mit $\rho_{\infty_\nu} = \alpha_{\infty_\nu}$

$$H_{A_{\nu_r}}(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega} \frac{e^{-j\Omega} - \alpha_{\infty_\nu}}{e^{j\Omega} - \alpha_{\infty_\nu}} \quad (3.4.108)$$

$$b_{A_{\nu_r}}(\Omega) = -\Omega + 2 \arctan\left(\frac{\sin(\Omega)}{\cos(\Omega) - \alpha_{\infty_\nu}}\right) \quad (3.4.109)$$

$$\tau_{Ag_{\nu_r}}(\Omega) = \frac{1 - \alpha_{\infty_\nu}^2}{1 - 2\alpha_{\infty_\nu} \cos(\Omega - \psi_\nu) + \alpha_{\infty_\nu}^2} \quad (3.4.110)$$

- Allpaß 2-ter Ordnung mit komplexen Polstellen $z_{\infty_\nu} = \rho_{\infty_\nu} e^{j\psi_{\infty_\nu}} = \alpha_{\infty_\nu} + j\beta_{\infty_\nu} = z_{\infty_{(\nu+1)}}^*$

$$H_{A_{\nu_k}}(e^{j\Omega}) = e^{-j2\Omega} \frac{(1 - e^{j\Omega} \rho_{\infty_\nu} e^{-j\psi_{\infty_\nu}})(1 - e^{j\Omega} \rho_{\infty_\nu} e^{j\psi_{\infty_\nu}})}{(1 - e^{-j\Omega} \rho_{\infty_\nu} e^{j\psi_{\infty_\nu}})(1 - e^{-j\Omega} \rho_{\infty_\nu} e^{-j\psi_{\infty_\nu}})} \quad (3.4.111)$$

$$b_{A_{\nu_k}}(\Omega) = 2\Omega + 2 \arctan\left(\frac{\rho_\nu \sin(\Omega - \psi_\nu)}{1 - \rho_\nu \cos(\Omega - \psi_\nu)}\right) + 2 \arctan\left(\frac{\rho_\nu \sin(\Omega + \psi_\nu)}{1 - \rho_\nu \cos(\Omega + \psi_\nu)}\right) \quad (3.4.112)$$

$$\tau_{Ag_{\nu_k}}(\Omega) = \frac{1 - \rho_{\infty_\nu}^2}{1 - 2\rho_{\infty_\nu} \cos(\Omega - \psi_\nu) + \rho_{\infty_\nu}^2} + \frac{1 - \rho_{\infty_\nu}^2}{1 - 2\rho_{\infty_\nu} \cos(\Omega + \psi_\nu) + \rho_{\infty_\nu}^2} \quad (3.4.113)$$

Wenn man die Linearfaktoren von Zähler und Nenner aus Gl. (3.4.111) miteinander multipliziert,

$$H_{A_{\nu_k}}(z) = \frac{(1 - z z_{\infty_\nu}^*)(1 - z z_{\infty_\nu})}{(z - z_{\infty_\nu})(z - z_{\infty_\nu}^*)} = \frac{1 - 2(z_{\infty_\nu}^* + z_{\infty_\nu})z + |z_{\infty_\nu}^*|^2 z^2}{z^2 - 2(z_{\infty_\nu}^* + z_{\infty_\nu})z + |z_{\infty_\nu}^*|^2} \quad (3.4.114)$$

so erhält man

$$H_{A_{\nu_k}}(z) = \frac{1 + c_1 z + c_0 z^2}{z^2 + c_1 z + c_0} \quad \text{mit} \quad c_2 = 1, \quad c_1 = -(z_{\infty_\nu}^* + z_{\infty_\nu}) \quad \text{und} \quad c_0 = |z_{\infty_\nu}|^2. \quad (3.4.115)$$

Gleichung (3.4.115) wird als *biquadratische* Übertragungsfunktion bezeichnet.

Zähler und Nenner von $H_{A_{\nu_k}}(e^{j\Omega})$ können als Polynome 2-ten Grades in z aufgeschrieben werden, dann entspricht

$$H_{A_{\nu_k}}(z) = \frac{c_2 + c_1 z + c_0 z^2}{c_2 z^2 + c_1 z + c_0} \quad c_\nu \in \mathcal{R}. \quad (3.4.116)$$

der allgemeinen Darstellung eines Allpasses 2-ter Ordnung.

Auf Seite 31 sind Frequenzgänge der Phase und Gruppenlaufzeit eines Allpasses für verschiedene Parameter ρ abgebildet.

3.4.2 Minimalphasige Systeme

Die Übertragungsfunktion $H(z) = \frac{Z(z)}{N(z)}$ eines stabilen Systems, das sowohl Nullstellen innerhalb als auch außerhalb des Einheitskreises aufweist, läßt sich, gegebenenfalls durch Erweitern von Zähler und Nenner, als Produkt zweier Teilfunktionen $H_M(z)$ und $H_A(z)$ darstellen [2, Kurseinheit 9].

$$H(z) = H_A(z) H_M(z) \quad (3.4.117)$$



Abbildung 8: Beiträge eines Pol- Nullstellenpaares zur Phase und Gruppenlaufzeit eines Allpasses

In Gleichung (3.4.117) beschreibt $H_A(z)$ einen Allpaß, dessen Nullstellen $z_{0\mu_A}$ sich aus den Nullstellen von $H(z)$ mit $|z_{0\mu}| > 1$ ergeben. Wie in Abschnitt 3.4.1 dargelegt, liegen bei einem Allpaß alle Nullstellen außerhalb des Einheitskreises ($|z_{0\mu_A}| > 1$). Folglich muß für alle übrigen Nullstellen von $H(z)$ $|z_{0\mu_M}| \leq 1$ gelten.

Der Allpaßterm in Gleichung (3.4.117) beeinflußt das Dämpfungsverhalten des Gesamtsystems nicht, sondern trägt nur zur Vergrößerung der Systemphase bei.

Systeme, deren Übertragungsfunktionen $H(z) = H_M(z)$ für $|z| > 1$ keine Nullstellen haben, werden als *minimalphasig* bezeichnet.

3.4.3 Systeme mit linearer Phase

Neben Systemen, bei denen der Betrag der Übertragungsfunktion für $z = e^{j\Omega}$ unabhängig von der Frequenz Ω ist, gibt es solche, deren Phase linear mit der Frequenz anwächst. Allgemein beschreibt

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|e^{-jb(\Omega)}, \quad \text{mit } b(\Omega) = -\varphi(\Omega) = -K\Omega, \quad K = \text{const.} \quad (3.4.118)$$

den Frequenzgang eines Systems mit linearer Phase. Nur mit *nichtrekursiven* Strukturen lassen sich Systeme mit linearer Phase realisieren.

In [2, Kurseinheit 9] wird gezeigt, daß ein System nur dann eine lineare Phase besitzt, wenn die δ -Antwort die Eigenschaft

$$h(k) = h(N - 1 - k) \quad (3.4.119)$$

aufweist. Die Impulsantwort besteht also aus N *symmetrischen* Werten. Entsprechend (3.1.17) liefert die z -Transformierte der δ -Antwort die Systemfunktion

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{n+1-N}, \quad h(n) \in \mathcal{R} \quad (3.4.120)$$

Aus Gleichung (3.4.120) gewinnt man

$$H(z) = z^{(\frac{1-N}{2})} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \frac{z^{(\frac{N-1}{2}-n)} + z^{-(\frac{N-1}{2}-n)}}{2} \quad (3.4.121)$$

und mit $z = e^{j\Omega}$ den Frequenzgang

$$H(e^{j\Omega}) = e^{j\frac{(1-N)\Omega}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\Omega\right] \quad (3.4.122)$$

Somit wächst die Phase $\varphi(\Omega) = \frac{(1-N)\Omega}{2}$ proportional mit Ω , wenn die Impulsantwort eines nichtrekursiven Systems der Bedingung (3.4.119) genügt.

4 Filterentwurf mit Methoden der Tschebyscheff-Approximation

Beim Filterentwurf liegen die Forderungen an ein zu realisierendes System meist in Form vorgegebener Funktionen für z.B. die Dämpfung und bzw. oder die Gruppenlaufzeit in Abhängigkeit vom Frequenzparameter Ω vor. So kann beispielsweise die Forderung an ein Filter, welches im Durchlaßbereich eine konstante Dämpfung aufweisen soll, ausgedrückt werden durch die Funktion

$$a_D(\Omega) = \text{const.} \quad \text{für} \quad \Omega_{\min} \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$$

Desweiteren sind in der Regel auf ausgezeichneten Frequenzintervallen, die sich durch die vorgesehene Anwendung eines Filters ergeben, vorgeschriebene Minimal- und bzw. oder Maximalwerte der Filtereigenschaften einzuhalten. Beispiele hierfür sind eine maximale Gruppenlaufzeit oder Phasenverzerrung im Durchlaßbereich eines Filters, mit dem primär ein vorgegebener Dämpfungsfrequenzgang realisiert werden muß, die nicht überschritten werden darf, die Forderung einer Mindestdämpfung im Sperrbereich eines Tiefpasses, die nicht unterschritten werden soll oder die Einhaltung einer Maximaldämpfung im Durchlaßbereich eines Filters, dessen Realisierungsgrundlage ein vorgegebener Phasenverlauf ist. Die Ungleichung

$$a_S(\Omega) \geq A_{\min} \quad \text{für} \quad \Omega_{\max} \leq \Omega \leq \pi$$

drückt die Anforderung an einen digitalen Tiefpass aus, im Sperrbereich eine Mindestdämpfung A_{\min} nicht zu unterschreiten, während durch

$$\left. \begin{array}{l} \tau_D(\Omega) \leq \tau_{\max}(\Omega) \\ \tau_D(\Omega) \geq \tau_{\min}(\Omega) \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad \Omega_{\min} \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$$

ein Toleranzschlauch für die Gruppenlaufzeit im Durchlaßbereich eines Filters festgelegt wird (siehe z.B. Bild (13) auf Seite 65). Forderungen dieser Art bezeichnet man als *einseitige Frequenzgangforderungen*.

In der Praxis tritt häufig das Problem auf, in der Tendenz einander widersprechende Anforderungen an die Filtereigenschaften gleichzeitig berücksichtigen zu müssen. Oftmals wird bei der Verwendung analytischer Entwurfsmethoden nur eine Filtereigenschaft, z.B. der Dämpfungsverlauf oder der Frequenzgang der Gruppenlaufzeit, in Betracht gezogen. Entwürfe, die jeweils nur eine der genannten Eigenschaften berücksichtigen, zeichnen sich durch zwei charakteristische Besonderheiten aus:

1. Filter mit optimalem Dämpfungsverhalten (z.B. Cauerfilter) sind durch einen steilen Anstieg der Gruppenlaufzeit an der Grenze des Durchlaßbereiches gekennzeichnet.
2. Filter ohne Gruppenlaufzeitverzerrung (z.B. spezielle nichtrekursive Digitalfilter) sind nicht geeignet, hohe Qualitätsanforderungen an die Dämpfung zu erfüllen.

Für den Filterentwurf bedeutet dies, daß die Verbesserung einer Zielgröße (z.B. der Dämpfung) oftmals zu einer Verschlechterung der anderen (z.B. der Gruppenlaufzeit) führt. Hieraus folgt als typische Entwurfsaufgabe, eine Übertragungsfunktion $H(z)$ so zu bestimmen, daß ein der jeweiligen Anwendung angemessener, optimaler Kompromiß zwischen dem Dämpfungs- und Laufzeitverhalten eines Filters erzielt wird.

Sollen nun mehrere Filtereigenschaften in einem Frequenzintervall gleichzeitig erfüllt werden, so ergibt sich z.B. das Problem, eine oder mehrere Zielfunktionen unter gleichzeitiger Einhaltung von Nebenbedingungen zu realisieren. Als typische Beispiele sei hier wieder die Einhaltung einer konstanten Dämpfung und einer maximalen Gruppenlaufzeit im Durchlaßbereich eines Filters oder die Realisierung eines linearphasigen Systems, bei dem im Durchlaßbereich eine Maximaldämpfung nicht überschritten darf, genannt.

Insgesamt ergibt sich als Grundlage für einen Filterentwurf ein Katalog von Forderungen, die sich durch eine oder mehrere Zielfunktionen in Form von Gleichungen und einseitigen Frequenzgangforderungen in Form von Ungleichungen ausdrücken lassen.

Grundlage der Beschreibung eines diskreten Systems ist die Übertragungsfunktion $H(z)$, die sich beim Systementwurf als Polynom oder rationale Funktion von z ergibt. Aus $H(z)$ lassen sich, wie in Kapitel 3.2 beschrieben, Funktionen für Dämpfung, Phase und Gruppenlaufzeit gewinnen.

Nun kann aber eine stückweise konstante Funktion, wie z.B.

$$H(\Omega) = \left\{ \begin{array}{ll} H_D(\Omega) = \text{const.} & \text{für } \Omega_{\min} \leq \Omega \leq \Omega_{\max} \\ H_S(\Omega) = 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad \Omega \in [0, \pi]$$

mit einer Funktion $H(z)$, die nur entweder ein Polynom oder eine rationale Funktion von z sein kann, nicht realisiert werden. Weiterhin kann die Einhaltung mehrerer Zielvorgaben, die tendenziell einander widersprechen, nicht genau erreicht werden. Eine exakte Erfüllung der Aufgabe ist also unmöglich.

Hieraus ergibt sich zum einen die Notwendigkeit, vorgegebene (z.B. stückweise konstante) Zielfunktionen zu approximieren, darüberhinaus muß oftmals ein optimaler Kompromiß zwischen tendenziell gegenläufigen Zielvorgaben gefunden werden. Die Annäherung einer Approximationsfunktion an eine Zielfunktion ist dabei nur in gewissem Maße möglich.

Ziel einer Entwurfsaufgabe ist es also, vorgegebene Frequenzgänge der Filtereigenschaften durch Funktionen, die sich aus einer Übertragungsfunktion $H(z)$ ableiten lassen, unter Berücksichtigung einseitiger Frequenzgangforderungen und anderer noch zu erläuternder Nebenbedingungen, so zu approximieren, daß eine möglichst optimale Übereinstimmung zwischen den Soll- und Istfunktionen erreicht wird. Hierzu werden die Parameter einer zugrunde liegenden Funktion $H(z)$ durch Optimierungsalgorithmen so lange verändert, bis ein möglichst optimales Approximationsergebnis vorliegt. Parameter der Approximation sind dabei die Koeffizienten bzw. Pol- Nullstellen einer Übertragungsfunktion $H(z)$.

Zur Durchführung der sich ergebenden Approximationsaufgaben sind für den Filterentwurf verschiedene Verfahren und Optimierungsalgorithmen entwickelt worden. Einen Überblick über

geeignete Verfahren und eine vergleichende Beurteilung findet man in [6, 8].

4.1 Tschebyscheff-Approximation

Ziel einer jeden Approximation ist es, eine gegebene Funktion durch eine andere anzunähern. Dies ist immer dann notwendig, wenn aufgrund bestimmter Eigenschaften von Ziel- und Approximationsfunktion eine exakte Übereinstimmung nicht erreicht werden kann. Wie bereits erwähnt, ist die Approximation einer vorgegebenen Zielfunktion nur in einem gewissen Maße möglich. Deshalb ist es zur Beurteilung des Approximationsergebnisses wichtig, den Unterschied zwischen dem (exakt unerreichbaren) Ziel und der gefundenen Lösung zu spezifizieren. Als Maß für die Güte einer Approximation wird üblicherweise eine Norm zugrunde gelegt, die den "Abstand" von Ziel- und Approximationsfunktion beschreibt.

Für die Approximation von Filtereigenschaften sind vor allem die sogenannte *Tschebyscheff-Norm* und die *Gauß-Norm* interessant. Beide sind Spezialfälle der sogenannten L_p -Normen (nach Lebesgue), die allgemein wie folgt definiert sind:

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(\kappa)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \in \mathcal{N}$$

für den Fall, daß eine kontinuierliche Approximationsaufgabe vorliegt, und

$$\|f\|_p := \left(\sum_{i=1}^m |f(\kappa_i)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \in \mathcal{N}$$

wenn der Definitionsbereich von Ziel- und Approximationsfunktion eine endliche Menge diskreter Punkte κ_i ist. Speziell für $p = 2$ ergeben sich die *Gauß-Norm* und für $p \rightarrow \infty$ die *Tschebyscheff-Norm* aus obigen Formeln. Liegt ein Vektor diskreter Funktionswerte vor, so bewertet die Tschebyscheff-Norm diesen Vektor nach dem Betrag seiner größten Komponente. Für den Fall einer kontinuierlichen Funktion wird diese durch die Tschebyscheff-Norm nach ihrem betragsmäßig maximalem Wert bewertet. Eine andere Bezeichnung für die Tschebyscheff-Norm ist wegen $p \rightarrow \infty$ auch L_∞ -Norm. Mit der L_∞ -Norm kann ein besonders anschauliches Fehlermaß für das Ergebnis einer Approximation angegeben werden. Die L_∞ -Norm entspricht dem Betrag des maximalen Fehlers zwischen Soll- und Istfunktion.

Für die Approximationsaufgabe im Tschebyscheffschen Sinne ergibt sich als Abstandsmaß

$$\|f - g\|_\infty = \inf \{ \sigma \mid |f(\kappa) - g(\kappa)| \leq \sigma \quad \text{f.ü. in } [a, b] \}$$

im kontinuierlichen Fall und

$$\|f - g\|_\infty = \max \{ |f(\kappa_i) - g(\kappa_i)| : \kappa_i \in [a, b] \}$$

im diskreten Fall. Dabei sind f und g reellwertige Funktionen einer Variablen κ , die auf einem reellen Intervall $\kappa \in [a, b]$ erklärt sind. Diese Betrachtungsweise ist deshalb interessant und zulässig, weil sich die Frequenzgänge der Filtereigenschaften reellwertiger Systeme als reelle Funktionen einer reellen Frequenzvariablen darstellen lassen.

Das Ziel einer Approximation im Tschebyscheffschen Sinne ist, die L_∞ -Norm einer skalaren Funktion $\phi(\vec{p})$ bzw. eines Vektors $\vec{\psi}(\vec{p})$, welche man aus der Differenz vorgegebener Sollfunktionen $d_\nu(\kappa)$ und Istfunktionen $f_\nu(\vec{p}, \kappa)$ gewinnt, zu minimieren. \vec{p} ist der Parametervektor, dessen Komponenten sich aus den "freien" Parametern der Approximationsfunktionen $f_\nu(\vec{p}, \kappa)$ zusammensetzen.

Der Sachverhalt kann wie folgt ausgedrückt werden:

Wenn eine Zielfunktion angenähert werden muß

$$\|\phi(\vec{p})\|_\infty = \|d(\kappa) - f(\vec{p}, \kappa)\|_\infty \rightarrow \text{Min.} \quad \text{für} \quad \kappa \in [a, b],$$

und für den Fall, daß r Zielfunktionen gleichzeitig approximiert werden sollen

$$\|\vec{\psi}(\vec{p})\|_\infty = \|\vec{d}(\kappa) - \vec{f}(\vec{p}, \kappa)\|_\infty \rightarrow \text{Min.} \quad \text{für} \quad \kappa \in [a, b].$$

$\vec{\psi}(\vec{p})$, $\vec{d}(\kappa)$ und $\vec{f}(\vec{p}, \kappa)$ sind r -dimensionale Vektoren, deren Komponenten sich aus den r Soll- bzw. Istfunktionen ergeben.

Will man r Fehlerfunktionen $\phi_\nu(\vec{p})$ gleichzeitig minimieren, so liegt eine Abbildung der Parametervektoren $\vec{p} \in \mathcal{R}^n$ (n gleich Anzahl freier Parameter) in den r -dimensionalen Raum \mathcal{R}^r vor. Durch Nebenbedingungen wird die Menge \mathcal{M} der erlaubten Parameter (die Lösungsmenge) eingeschränkt. Allgemein gilt also

$$\vec{\psi}(\vec{p}) = (\phi_1(\vec{p}), \phi_2(\vec{p}), \dots, \phi_r(\vec{p}))$$

$$\vec{\psi}(\vec{p}) \in \mathcal{F} \subset \mathcal{R}^r : \vec{p} \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}^n$$

$$e(\vec{p}) = \|\vec{\psi}(\vec{p})\|_\infty \rightarrow \text{Min.}$$

Von einem optimalen Bildpunkt in \mathcal{F} muß gefordert werden, daß es keinen weiteren Punkt gibt, in dem die Beträge aller Komponenten von $\vec{\psi}(\vec{p})$ kleiner oder gleich $e(\vec{p})$ sind.

Minimiert man den Abstand einer gegebenen Wunschfunktion $d(\kappa)$ von einer Approximationsfunktion $f(\vec{p}, \kappa)$ im Sinne der L_∞ -Norm unter Beachtung von Nebenbedingungen, so hat man die Tschebyscheff-Approximationsaufgabe als *restringierte Optimierungsaufgabe* vorliegen. Nebenbedingungen ergeben sich beim Filterentwurf durch einseitige Frequenzgangforderungen, sowie durch Restriktionen, die an die Parameterwerte der Übertragungsfunktion $H(z)$ gestellt werden. Eine sehr wichtige Restriktion an den Variationsbereich der Parameter einer Funktion $H(z)$ liefert die Stabilitätsbedingung, die verlangt, daß die Polstellen von $H(z)$ innerhalb des Einheitskreises der komplexen z -Ebene liegen müssen.

Nebenbedingungen, die sich aus einseitigen Frequenzgangforderungen oder Parameterrestriktionen ergeben, können immer durch Ungleichungen der Form

$$g(\vec{p}, \kappa) \leq 0 \quad \text{mit} \quad \kappa \in [a, b]$$

ausgedrückt werden. Zum Beispiel $-a(\Omega) + A_{\min} \leq 0$, wenn eine Mindestdämpfung nicht unterschritten werden soll, oder $|z_\infty| - 1 < 0$, wenn z_∞ eine Polstelle von $H(z)$ ist.

Die eigentliche restringierte Aufgabe besteht nun darin, das Minimum der Maximumsfunktion $e(\vec{p})$ unter Beachtung der Nebenbedingungen $g_\mu(\vec{p}, \kappa) \leq 0$ ($\mu = 1, \dots, k$) zu finden. Es muß also ein Vektor \vec{p}_{min} gefunden werden, mit dem die Ungleichungen⁸

$$\begin{aligned} e(\vec{p}_{min}) &\leq e(\vec{p}) \quad \forall \vec{p} \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}^n \\ g_\mu(\vec{p}_{min}, \kappa) &\leq 0 \quad \forall \mu \in \{1, \dots, k\} \end{aligned}$$

erfüllt werden, wobei \mathcal{M} die Lösungsmenge (Gebiet der erlaubten Parametervektoren \vec{p}), n die Zahl der Approximationsparameter und k die Zahl der Nebenbedingungen⁸ ist.

Unterschiedliche Gewichtungen der einzelnen Fehlerfunktionen $\phi_\nu(\vec{p})$ bzw. Ungleichungen $g_\mu(\vec{p}, \kappa)$ erreicht man, in dem jede Funktion und Ungleichung mit einem Gewichtungsfaktor w_ν bzw. w_μ multipliziert wird. Minimiert man die L_∞ -Norm der gewichteten Fehlersumme,

$$\left\| \sum_{\nu=1}^r w_\nu \phi_\nu(\vec{p}) \right\| \rightarrow \text{Min.}$$

so hat dies den Nachteil, daß nicht alle Möglichkeiten zur Verkleinerung einer Funktion $\phi_\nu(\vec{p})$ zu Lasten einer Vergrößerung anderer Fehlerfunktionen ausgeschöpft werden können⁹. Dieser Nachteil wird vermieden, wenn man die Tschebyscheff-Norm des Vektors

$$\|w_1\phi_1(\vec{p}), w_2\phi_2(\vec{p}), \dots, w_r\phi_r(\vec{p})\|_\infty \rightarrow \text{Min.}$$

verkleinert¹⁰. Hierdurch kann beim Filterentwurf z.B. Gruppenlaufzeittoleranz gegen Dämpfungstoleranz ausgetauscht werden, was bei einer gewichteten Fehlersumme nur eingeschränkt möglich ist.

Alle gebräuchlichen numerischen Verfahren zur Lösung kontinuierlicher Approximationsaufgaben auf reellen Intervallen ermitteln auf geeignete Weise Stützstellen, wodurch das kontinuierliche Problem diskretisiert wird. Grundsätzliche Zielsetzung dabei ist, mit der Lösung der diskreten Aufgabe, dem bestmöglichen Ergebnis der eigentlich kontinuierlichen Aufgabe beliebig nahe zu kommen¹¹. Die Übereinstimmung von diskreter und kontinuierlicher Lösung hängt am Ende nur von der Genauigkeit ab, mit der die diskreten Stützstellen an die Orte der maximalen Fehlerabweichungen im Approximationsintervall gelegt werden. Hieraus ergibt sich für die Tschebyscheff-Approximationsaufgabe nach der Diskretisierung als zu minimierende skalare Zielfunktion

$$e(\vec{p}) = \max_{i,\nu} |w_\nu (d_\nu(\kappa_i) - f_\nu(\vec{p}, \kappa_i))| \text{ mit } \{\kappa_i \in [a, b] : i \in \{1, \dots, m\}; \nu \in \{1, \dots, r\}\},$$

wobei m die Gesamtzahl der Stützstellen im Approximationsintervall $[a, b]$ ist.

⁸Parameterrestriktionen sind als unabhängig von κ zu betrachten.

⁹Genauer werden die Zusammenhänge in [6] Seite 21 bis 26 erläutert.

¹⁰TOPT arbeitet nach diesem Prinzip

¹¹Das Ergebnis der kontinuierlichen Aufgabe wird durch die Lösung der diskreten Aufgabe ebenfalls approximiert.

Die Diskretisierung führt zu überbestimmten Gleichungs- bzw. Ungleichungssystemen der Art

$$\begin{pmatrix} \vec{\psi}(\vec{p}) = \vec{d}(\kappa_{1\dots m_G}) - \vec{f}(\vec{p}, \kappa_{1\dots m_G}) \\ 0 \geq \vec{g}(\vec{p}, \kappa_{1\dots m_U}) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \vec{\phi}_1(\vec{p}) = w_1(\vec{d}_1(\kappa_{i_1}) - \vec{f}_1(\vec{p}, \kappa_{i_1})) \\ w_2 \vec{\phi}_2(\vec{p}) = w_2(\vec{d}_2(\kappa_{i_2}) - \vec{f}_2(\vec{p}, \kappa_{i_2})) \\ \vdots \\ w_r \vec{\phi}_r(\vec{p}) = w_r(\vec{d}_r(\kappa_{i_r}) - \vec{f}_r(\vec{p}, \kappa_{i_r})) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \geq w_{r+1} g_1(\vec{p}, \kappa_{i_1}) \\ \vdots \\ 0 \geq w_{r+k} g_k(\vec{p}, \kappa_{i_\mu}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.1.123)$$

mit

$$\begin{aligned} \kappa_{i_1}, \kappa_{i_2}, \dots, \kappa_{i_r} &\in [a, b] \\ i_1 \in [1, \dots, m_1], i_2 \in [1, \dots, m_2], \dots, i_r &\in [1, \dots, m_r] \\ \kappa_{i_1}, \kappa_{i_2}, \dots, \kappa_{i_k} &\in [a, b] \\ i_\mu &\in [1, \dots, m_\mu] \end{aligned}$$

Jede Stützstelle liefert eine Zeile im System (4.1.123). Die Anzahl der Gleichungen beträgt somit $m_G = \sum_{j=1}^r m_j$, die Zahl der Ungleichungen $m_U = \sum_{j=1}^\mu m_j$ und das Gesamtsystem (4.1.123) weist insgesamt $m = m_G + m_U$ Zeilen auf.

$w_\nu \vec{\phi}_\nu(\vec{p})$ sind Vektoren, deren Komponenten gleich den gewichteten Differenzwerten (Fehlerwerten) zwischen den Sollfunktionen $\vec{d}_\nu(\kappa_{i_\nu})$ und der Approximationsfunktionen $\vec{f}_\nu(\vec{p}, \kappa_{i_\nu})$ an den Stützstellen $\kappa_{1_\nu}, \dots, \kappa_{m_\nu}$ sind, und skalaren Fehlerfunktionen des Parametervektors \vec{p} entsprechen. $\vec{\psi}(\vec{p})$ ist der Fehlervektor, der sich aus allen gewichteten Fehlerwerten ergibt.

Sowohl die Punkte der ausgewählten Stützstellen als auch deren Anzahl in den Approximationsintervallen können für jede der r Zielfunktionen und k Ungleichungen unterschiedlich sein. Außerdem können die Gewichtungsfaktoren für jede Zielfunktion, Nebenbedingung und zudem auf verschiedenen Teilintervallen unterschiedlich sein. TOPT bildet die Fehlergewichtungen aus den Reziprokwerten den Toleranzwerte (siehe Forderungsdatei). So kann z.B. eine Approximationsaufgabe darin bestehen, verschiedenartige Zielfunktionen (z.B. Dämpfung und Gruppenlaufzeit) auf verschiedenen Teilintervallen von $[a, b]$ ($0 \leq \Omega \leq \pi$) mit unterschiedlicher Gewichtung (Toleranz) gleichzeitig anzunähern.

Die Gesamtzahl der Ungleichungen resultiert zum einen aus der Zahl einseitiger Frequenzgangforderungen, die wiederum auf unterschiedlichen Teilintervallen und mit jeweils unterschiedlicher Stützstellenzahl auftreten können, zum anderen aus den Parameterrestriktionen (die nicht von κ abhängen). Im Fall einer *nicht* restringierten Approximationsaufgabe besteht (4.1.123) nur aus dem oberen Gleichungssystem.

Die Fehlerfunktion $e(\vec{p})$ ist nun gleich der zu minimierenden skalaren Zielfunktion

$$e(\vec{p}) = |w_j \phi_j(\vec{p})| = \max_{i,\nu} |w_\nu (d_\nu(\kappa_j) - f_\nu(\vec{p}, \kappa_j))|$$

mit $\{\kappa_j \in [a, b] : j \in \{1, \dots, m_G\} \quad \nu \in \{1, \dots, r\}\}$.

Durch Linearisierung der nichtlinearen Minimierungsaufgabe um einen Startpunkt \vec{p}_0 erhält man

ein lineares, überbestimmtes Gleichungssystem, das erst durch die Minimumsforderung lösbar wird. Hierzu müssen die Gradienten der Zielfunktionen und Nebenbedingungsvorschriften berechnet werden. Nach der Linearisierung gilt für die zu minimierende skalare Funktion

$$\begin{aligned} e(\vec{p}) &= |w_j \phi_j(\vec{p}_0 + d\vec{p})| = \max_j |\vec{d}(\kappa_j) - \vec{f}(\vec{p}_0 + d\vec{p}, \kappa_j)| \rightarrow \text{Min.} \\ &\simeq || \underbrace{\vec{d}(\kappa_j) - \vec{f}(\vec{p}_0, \kappa_j)}_{\vec{b}(\vec{p}_0, \kappa_j)} - J(\vec{p}_0, \kappa_j)d\vec{p} ||_\infty \quad j \in \{1, \dots, m_G\} \end{aligned}$$

und die Ungleichungen

$$\vec{g}(\vec{p}_0 + d\vec{p}) \simeq \vec{g}(\vec{p}_0) + B(\vec{p}_0)d\vec{p} \leq 0$$

Die *restringierte Tschebyscheff-Approximationsaufgabe* läßt sich nun folgendermaßen formulieren:

Minimiere die Maximumsfunktion

$$e(\vec{p}) = \max_j |\vec{b}(\vec{p}, \kappa_j) - J(\vec{p}, \kappa_j)d\vec{p}| = \lambda \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathcal{R} \quad j \in \{1, \dots, m_G\}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\left. \begin{aligned} |\vec{b}(\vec{p}, \kappa_j) - J(\vec{p}, \kappa_j)d\vec{p}| &\leq \lambda \\ \vec{g}(\vec{p}) + B(\vec{p})d\vec{p} &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall \vec{p} \in \mathcal{M} \quad j \in \{1, \dots, m_G\}$$

oder durch auflösen der Betragsungleichung

$$\left. \begin{aligned} -J(\vec{p})d\vec{p} - \vec{1}\lambda &\leq -\vec{b}(\vec{p}) \\ J(\vec{p})d\vec{p} - \vec{1}\lambda &\leq \vec{b}(\vec{p}) \\ B(\vec{p})d\vec{p} - \vec{0} &\leq -\vec{g}(\vec{p}) \end{aligned} \right\} \quad \forall \vec{p} \in \mathcal{M}. \quad (4.1.124)$$

Die ersten beiden Ungleichungen aus (4.1.124) berücksichtigen einerseits unterschiedliche Fehler vorzeichen, andererseits beinhalten sie die Forderung, daß die Beträge aller Fehlerwerte kleiner oder gleich einem Maximalwert λ sein müssen. Im Falle einer *nicht* restringierten Approximationsaufgabe entfällt die letzte Ungleichung in (4.1.124).

In (4.1.124) bedeuten im einzelnen

- $\vec{b}(\vec{p})$ Vektor der gewichteten Fehlerwerte an den Stützstellen mit den skalaren Komponenten $w_j b_j(\vec{p}) = w_j (d_j(\vec{p}) - f_j(\vec{p}, \kappa_j)) \quad j \in \{1, \dots, m_G\}$. Dimension m_G .
- $J(\vec{p})$ Matrix der partiellen Ableitungen oder Jacobimatrix¹². Ihre Zeilenvektoren \vec{j}_j^T sind Gradienten des skalaren Funktionen $w_j f_j(\vec{p}, \kappa_j)$. Dimension $m_G \times n$.
- \vec{p} Parametervektor. Dimension n .
- $d\vec{p}$ Korrekturvektor. Dimension n .
- $\vec{g}(\vec{p})$ Vektor der gewichteten Nebenbedingungsfunktionen $w_j g_j(\vec{p})$. Dimension m_U .
- $B(\vec{p})$ Matrix der partiellen Ableitungen der $w_j g_j(\vec{p})$.
Dimension $m_U \times n$

Das Minimum der Maximumfunktion $e(\vec{p}) = \lambda$ kann unter anderem durch bekannte Verfahren der linearen Programmierung (z.B. dem Simplexalgorithmus), ausgehend von Gl. (4.1.124), ermittelt werden (Entsprechende Hinweise hierzu findet man z.B. in [9]).

TOPT bestimmt das Minimum der Fehlerfunktion $e(\vec{p})$ iterativ. Hierzu werden nach einem bestimmten Verfahren, ausgehend von einem Startpunkt \vec{p}_0 , Verbesserungsvektoren $d\vec{p}$ berechnet¹³. Mit dem errechneten Korrekturvektor $d\vec{p}$ (Ergebnis des linearen Teilprogramms) wird iterativ eine *eindimensionale* Suche durchgeführt. Dies ist notwendig, weil der Gültigkeitsbereich der Linearisierung durch den Vektor $d\vec{p}$ verlassen werden kann, und keine Verkleinerung der Zielfunktion erreicht wird. Nach erfolgreicher eindimensionaler Suche gilt:

$$\|\vec{b}(\vec{p} + \mu d\vec{p})\|_\infty < \|\vec{b}(\vec{p})\|_\infty \quad \text{mit} \quad \mu \in (0, 1].$$

Iterativ werden von TOPT solange Verbesserungsvektoren errechnet, bis das Minimum der Fehlerfunktion (Maximumfunktion) $e(\vec{p}_{min})$ gefunden ist und dabei keine der Nebenbedingungen mehr verletzt werden. Dabei wird der maximale Fehler nach jedem Iterationsschritt verkleinert (absteigender Algorithmus).

Nähere Einzelheiten zu verschiedenen Minimierungsverfahren können der Dissertation von Herrn Doktor Heinrichmeyer [6] Kapitel 7.4 entnommen werden.

¹³Hinweise zu dem von TOPT verwendeten Verfahren findet man in [12]

4.2 Approximationsfunktionen und Nebenbedingungen beim Filterentwurf

Beim Filterentwurf leiten sich, wie bereits erwähnt, die Approximationsfunktionen $f_\nu(\vec{p}, \kappa)$ und Nebenbedingungsfunktionen $g_\mu(\vec{p})$ aus der Übertragungsfunktion $H(\vec{p}, e^{j\Omega})$ eines Filters ab. Im einzelnen sind dies die Dämpfungs-, Phasen- und Gruppenlaufzeitfunktionen $a(\vec{p}, \Omega)$, $b(\vec{p}, \Omega)$ und $\tau(\vec{p}, \Omega)$. Die Komponenten des Vektors \vec{p} ergeben sich aus den Koeffizienten, Pol- bzw. Nullstellen der Übertragungsfunktion $H(\vec{p}, e^{j\Omega})$, die Gegenstand der Approximation sind (frei).

In Kapitel 3.3 ist bereits erläutert worden, daß eine Systemfunktion in Linearfaktoren (Teilsysteme) 1-ter und 2-ter Ordnung zerlegt werden kann. Hieraus folgt unmittelbar, daß die Funktionen $a(\vec{p}, \Omega)$, $b(\vec{p}, \Omega)$ und $\tau(\vec{p}, \Omega)$ entsprechend den Gleichungen (3.3.61) bis (3.3.63) als Summe von Teilfunktionen darstellbar sind. Für ein Filter, dessen Funktion $H(\vec{p}, e^{j\Omega})$ aus k Teilsysteme 1-ter und bzw. oder 2-ter Ordnung besteht, gilt also

$$\left. \begin{aligned} a(\vec{p}, e^{j\Omega}) &= \sum_{i=1}^k a_i(\vec{p}_i, e^{j\Omega}) \\ b(\vec{p}, e^{j\Omega}) &= \sum_{i=1}^k b_i(\vec{p}_i, e^{j\Omega}) \\ \tau(\vec{p}, e^{j\Omega}) &= \sum_{i=1}^k \tau_i(\vec{p}_i, e^{j\Omega}) \end{aligned} \right\} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 \\ \vdots \\ \vec{p}_k \end{pmatrix}.$$

Sollen vorgegebene Frequenzgänge der Filtereigenschaften approximiert werden, so bedeutet dies, daß die den Approximationsfunktionen $f_\nu(\vec{p}, \kappa)$ und Nebenbedingungsfunktionen $g_\mu(\vec{p}, \kappa)$ entsprechenden Filterfunktionen sich jeweils aus einer Summe von Teilfunktionen zusammensetzen. Der Parametervektor \vec{p} besteht dabei aus den Parametervektoren der Teilsysteme.

Bedingt durch die Linearisierung der Approximationsaufgabe werden die partiellen Ableitungen der skalaren Filterfunktionen $a(\vec{p}, e^{j\Omega})$, $b(\vec{p}, e^{j\Omega})$ und $\tau(\vec{p}, e^{j\Omega})$ nach den Komponenten des Vektors \vec{p} benötigt. In Kapitel 4.3 werden Formeln für die Frequenzgänge $a(\vec{p}, \Omega)$, $b(\vec{p}, \Omega)$ und $\tau(\vec{p}, \Omega)$ und die partiellen Ableitungen nach deren Parameter für die wichtigsten Teilsysteme angegeben.

Im Programm TOPT sind die Vorschriften zur Berechnung der skalaren Fehlerfunktionen an den Stützstellen und der partiellen Ableitungen der Fehlerfunktionen nach den Approximationsparametern als Unterprogramme realisiert. Die Unterprogramme wurden im Rahmen dieser Arbeit um die für den Entwurf diskreter Systeme (Filter) relevanten Funktionen erweitert.

Neben einseitigen Frequenzgangforderungen ergeben sich weitere Nebenbedingungen durch Einschränkungen der Variationsbereiche von Parameterwerten der Systemfunktion $H(\vec{p}, z)$. Diese sollen im folgenden aufgeführt werden.

Die Stabilitätsbedingung verlangt, daß alle Beträge der Polstellen kleiner 1 sein müssen. Im Falle einer reellen Polstelle $z_\infty \in \mathcal{R}$ gilt also

$$g(z_\infty) < 0 : \begin{cases} z_\infty - 1 < 0 & \forall z_\infty \in [0, 1) \\ -z_\infty - 1 < 0 & \forall z_\infty \in (-1, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial g(z_\infty)}{\partial z_\infty} =: \begin{cases} 1 & \forall z_\infty \in [0, 1) \\ -1 & \forall z_\infty \in (-1, 0) \end{cases}$$

und für eine komplexe Polstelle $z_\infty = \rho_\infty e^{j\psi_\infty}$, $z_\infty \in \mathcal{C}$

$$g(\rho_\infty) < 0 : \rho_\infty - 1 < 0 \quad \forall \rho_\infty \in [0, 1)$$

$$\frac{\partial g(\rho_\infty)}{\partial \rho_\infty} = 1 \quad \forall \rho_\infty \in [0, 1)$$

Bei einem biquadratischen Allpaß folgt aus der Stabilitätsbedingung für die Koeffizienten c_1 und c_0 (siehe Gl. (3.4.115)) zunächst $|c_0| < 1$ und $c_0 > |c_1| - 1$ ¹⁴. Hieraus lassen sich die Ungleichungen

$$g(c_1, c_0) < 0 : \begin{cases} c_0 - 1 < 0 & \forall c_0 \in [0, 1) \\ -c_0 - 1 < 0 & \forall c_0 \in (-1, 0) \\ c_1 - c_0 - 1 < 0 & \forall c_1 > 0 \\ -c_1 - c_0 - 1 < 0 & \forall c_1 < 0 \end{cases}$$

$$\nabla g(c_1, c_0) : \begin{cases} (0, 1) & \forall c_0 \in [0, 1) \\ (0, -1) & \forall c_0 \in (-1, 0) \\ (1, -1) & \forall c_1 > 0 \\ (-1, -1) & \forall c_1 < 0 \end{cases}$$

wenn $-1 < c_0 \leq \frac{c_1^2}{4} < 1$, sowie

$$g(c_1, c_0) < 0 : \begin{cases} c_0 - 1 < 0 & \forall c_0 \in [0, 1) \\ c_1 - c_0 - 1 < 0 & \forall c_1 > 0 \\ -c_1 - c_0 - 1 < 0 & \forall c_1 < 0 \end{cases}$$

$$\nabla g(c_1, c_0) : \begin{cases} (0, 1) & \forall c_0 \in [0, 1) \\ (1, -1) & \forall c_1 > 0 \\ (-1, -1) & \forall c_1 < 0 \end{cases}$$

falls $c_0 > \frac{c_1^2}{4} \geq 0$ ist, ableiten¹⁵.

In [3](Seite 203-204) wird ein Stabilitätstest für Polynome zitiert, der auf einen Satz von Schur-Cohn beruht¹⁶. Bei dem Test wird eine Folge von Polynomen $N_\kappa(z)$, $\kappa = n(-1)0$ nacheinander aus $N_n(z) := N(z)$ rekursiv wie folgt errechnet.

$$N_{\kappa-1}(z) = z^{-1}[N_\kappa(z) - r_\kappa z^\kappa N_\kappa(z^{-1})] = \sum_{\nu=0}^{\kappa-1} c_\nu^{(\kappa-1)} z^\nu, \quad \kappa = n(-1)1$$

¹⁴siehe [1] Seite 95 und 96

¹⁵Wenn beide Parameter "frei" sind, führt TOPT diesen Test durch

¹⁶Zu den mathematischen Grundlagen siehe [10] und [11]

Das absolute Glied in der Klammer verschwindet mit $r_\kappa = \frac{c_0^{(\kappa)}}{c_\kappa^{(\kappa)}}$. Nach dem Satz von Schur-Cohn liegen alle Nullstellen von $N_n(z)$ dann im Inneren des Einheitskreises, wenn $|r_\kappa| < 1$, $\kappa = n(-1)1$ ist. Dies läßt sich in die Forderung überführen, daß die Folge der führenden Koeffizienten der Polynome $N_\kappa(z)$ stets positiv sein muß, daß also $c_\kappa^{(\kappa)} > 0$, $\kappa = n(-1)0$ erfüllt ist. Wie in [3] angegeben, läßt sich der Test unter Verwendung des folgenden Koeffizientenschemas durchführen:

$$\begin{array}{rcl}
 N_n(z) : & c_n^{(n)} & c_{n-1}^{(n)} \quad \dots \quad c_1^{(n)} \quad c_0^{(n)} \\
 z^n N_n(z^{-1}) : & c_0^{(n)} & c_1^{(n)} \quad \dots \quad c_{n-1}^{(n)} \quad c_n^{(n)} \\
 & \hline
 & & \cdot [-c_0^{(n)} / c_n^{(n)} = -r_n] \\
 \\
 N_{n-1}(z) : & c_{n-1}^{(n-1)} & c_{n-2}^{(n)} \quad \dots \quad c_1^{(n-1)} \quad c_0^{(n-1)} \\
 z^{n-1} N_{n-1}(z^{-1}) : & c_0^{(n-1)} & c_1^{(n-1)} \quad \dots \quad c_{n-2}^{(n-1)} \quad c_{n-1}^{(n-1)} \\
 & \hline
 & & \cdot [-c_0^{(n-1)} / c_{n-1}^{(n-1)} = -r_{n-1}] \\
 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \hline
 \\
 N_1(z) : & c_1^{(1)} & c_0^{(1)} \\
 z N_1(z^{-1}) : & c_0^{(1)} & c_1^{(1)} \\
 & \hline
 & & \cdot [-c_0^{(1)} / c_1^{(1)} = -r_1] \\
 \\
 N_0(z) : & c_0^{(0)} & \\
 & & \\
 & & (4.2.125)
 \end{array}$$

Die jeweils zweite Zeile in den obigen Gruppen wird mit dem rechts angegebenen Faktor multipliziert. Wird sie nun zur ersten Zeile addiert, so ergibt sich die erste Zeile der nächsten Gruppe, d.h. es folgen die Koeffizienten des reduzierten Polynoms.

Die Werte $c_n^{(n)}, \dots, c_0^{(n)}, c_{n-1}^{(n-1)}, \dots, c_0^{(n-1)}, \dots, c_0^{(0)}$ des Schemas kann man als Funktionen

$$g_n^{(n)}(\vec{p}), \dots, g_0^{(n)}(\vec{p}), g_{n-1}^{(n-1)}(\vec{p}), \dots, g_0^{(n-1)}(\vec{p}), \dots, g_0^{(0)}(\vec{p})$$

des Koeffizientenvektors $\vec{p} = (c_0, c_1, \dots, c_n)$ auffassen. Für ein stabiles Polynom müssen alle Werte der Funktionen

$$g_n^{(n)}(\vec{p}), g_{n-1}^{(n-1)}(\vec{p}), \dots, g_1^{(1)}(\vec{p}), g_0^{(0)}(\vec{p}) \quad \forall \vec{p} \in \mathcal{M} \quad (4.2.126)$$

positiv sein (\mathcal{M} Gebiet der erlaubten Koeffizientenvektoren). Diese Positivitätsbedingungen für ein stabiles Polynom können als Nebenbedingungen aufgefaßt werden, die es genau wie einseitige Frequenzgangforderungen einzuhalten gilt. Hieraus ergeben sich also weitere Ungleichungen.

Durch die Linearisierung der Minimierungsaufgabe bedingt, benötigt man die partiellen Ableitungen der Funktionen 4.2.126 nach den Koeffizienten c_0, \dots, c_n . Diese lassen sich ausgehend von den Gradienten der ersten Zeile des Schemas 4.2.125 sequentiell berechnen, wie im folgenden kurz gezeigt werden soll.

Ausgehend von den Ableitungen der ersten Zeile des Schemas

$$\begin{aligned}\nabla g_n^{(n)}(\vec{p}) &= (0, 0, \dots, 1) \\ &\vdots \\ \nabla g_1^{(n)}(\vec{p}) &= (0, 1, \dots, 0) \\ \nabla g_0^{(n)}(\vec{p}) &= (1, 0, \dots, 0)\end{aligned}$$

folgt durch Anwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned}\nabla g_{n-1-\nu}^{(n-1)}(\vec{p}) &= \nabla g_{n-\nu}^{(n)}(\vec{p}) - \nabla \left(\frac{g_0^{(n)}(\vec{p})}{g_n^{(n)}(\vec{p})} g_\nu^{(n)}(\vec{p}) \right) \\ \nabla g_{n-1-\nu}^{(n-1)}(\vec{p}) &= \nabla g_{n-\nu}^{(n)}(\vec{p}) - \left\{ \nabla \left(\frac{g_0^{(n)}(\vec{p})}{g_n^{(n)}(\vec{p})} \right) g_\nu^{(n)}(\vec{p}) + \nabla g_\nu^{(n)}(\vec{p}) \left(\frac{g_0^{(n)}(\vec{p})}{g_n^{(n)}(\vec{p})} \right) \right\} \\ \nabla \left(\frac{g_0^{(n)}(\vec{p})}{g_n^{(n)}(\vec{p})} \right) &= \frac{\nabla g_0^{(n)}(\vec{p})}{g_n^{(n)}(\vec{p})} - \frac{g_0^{(n)}(\vec{p})}{(g_n^{(n)}(\vec{p}))^2} \nabla g_n^{(n)}(\vec{p})\end{aligned}$$

Mit den Gradienten $\nabla g_{n-\nu}^{(n)}(\vec{p})$, $\nabla g_\nu^{(n)}(\vec{p})$ und $\nabla \left(\frac{g_0^{(n)}(\vec{p})}{g_n^{(n)}(\vec{p})} \right)$ können nun der Gradienten $\nabla g_{n-1-\nu}^{(n-1)}(\vec{p})$ berechnet werden. Auf analoge Weise errechnen sich die Gradienten der Funktionen einer Zeile $n - \nu$ des Schemas 4.2.125 nacheinander aus den Gradienten der vorherigen Zeile $n - \nu + 1$.

Nachteilig bei diesem Test ist, daß einer der Werte $c_n^{(n)}$, $c_{n-1}^{(n-1)}$, \dots , $c_0^{(0)}$ im Laufe der Iterationen zu Null werden kann und damit zu undefinierten Quotienten $c_0^{(n-\nu)}/c_{n-\nu}^{(n-\nu)}$ mit $c_{n-\nu}^{(n-\nu)} = 0$ führt. Wählt man die Startwerte $c_n^{(n)}$ und $c_0^{(n)}$ beide zu 1, so ergibt sich $c_{n-1}^{(n-1)}$ zu Null und das Programm bricht ebenfalls ab (floating point exception). Die Stabilitätsbedingung verlangt ohnehin, daß $|r_\kappa| < 1$, $\kappa = n(-1)1$ sein muß. Bei der Wahl von Startwerten empfiehlt sich darauf zu achten, daß $|c_0/c_n| < 1$ gilt.

Beispiel:

$$\begin{aligned}N_3(z) : & 4.000000 \quad 3.000000 \quad 2.000000 \quad 1.000000 \\ z^3 N_3(z^{-1}) : & \underline{1.000000 \quad 2.000000 \quad 3.000000 \quad 4.000000} \quad \cdot [-1/4 = -r_3] \\ \\ N_2(z) : & 3.750000 \quad 2.500000 \quad 1.250000 \quad 0.000000 \\ z^2 N_2(z^{-1}) : & \underline{1.250000 \quad 2.500000 \quad 3.750000} \quad \cdot [-1.25/3.75 = -r_2] \\ \\ N_1(z) : & 3.333333 \quad 1.666667 \quad 0.000000 \\ z N_1(z^{-1}) : & \underline{1.666667 \quad 3.333333} \quad \cdot [-1.66/3.33 = -r_1] \\ \\ N_0(z) : & 2.500000\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}g_3(\vec{p}) = c_3^{(3)} &= 4 > 0 \\ g_2(\vec{p}) = c_2^{(2)} &= 3.75 > 0 \\ g_1(\vec{p}) = c_1^{(1)} &= 3.33 > 0 \\ g_0(\vec{p}) = c_0^{(0)} &= 2.5 > 0,\end{aligned}$$

und für die Gradienten

$$\begin{aligned}
\nabla g_\nu(\vec{p}) &= \left(\frac{\partial g_\nu}{\partial c_0}, \frac{\partial g_\nu}{\partial c_1}, \frac{\partial g_\nu}{\partial c_2}, \frac{\partial g_\nu}{\partial c_3} \right) \\
\nabla g_3(\vec{p}) &= \left(0.000000, 0.000000, 0.000000, 1.000000 \right) \\
\nabla g_2(\vec{p}) &= \left(0.500000, 0.000000, 0.000000, 1.062500 \right) \\
\nabla g_1(\vec{p}) &= \left(-0.055556, -0.666667, 0.166667, 1.055556 \right) \\
\nabla g_0(\vec{p}) &= \left(-0.125000, -0.000000, -0.625000, 1.125000 \right)
\end{aligned}$$

Da die Zahlen $c_0^{(0)}, \dots, c_3^{(3)}$ positiv sind, ist das Polynom stabil.

Ein weiteres Stabilitätstheorem für diskrete Systeme, das ebenfalls zu einem Stabilitätstest für Polynome führt, wird von H. Schüssler [4] angegeben. Für die numerische Durchführung dieses Tests gibt P. Steffen [5] einen Algorithmus an. Auch dieser Test führt auf die Überprüfung der Positivität errechneter Werte, die aus den Koeffizienten eines zu untersuchenden Polynoms gewonnen werden¹⁷. Die zur Linearisierung der aufgestellten Nebenbedingungen notwendigen Ableitungen nach den Koeffizienten können ähnlich wie bei dem obigen Test ausgehend von den Gradienten der aufgestellten Spiegel- bzw. Antispielpolynome nacheinander berechnet werden. Bei dem von P. Steffen angegebenen Algorithmus zur Durchführung des Stabilitätstests tritt der Nachteil des obigen Tests (Division durch Null) nicht auf.

¹⁷Leider war aus zeitlichen Gründen eine Implementierung in TOPT nicht mehr möglich

4.3 Partielle Ableitungen der Filterfunktionen

Die Frequenzgänge der aus einer Übertragungsfunktion $H(e^{j\Omega})$ abgeleiteten Funktionen für Dämpfung $a(\Omega)$, Phase $b(\Omega)$ und Gruppenlaufzeit $\tau(\Omega)$ werden neben ihrer Abhängigkeit von der unabhängigen Frequenzvariablen Ω durch die Parameter der Systemfunktion (Pol- bzw. Nullstellen, Koeffizienten der (Teil-) Polynome) $H(e^{j\Omega})$ bestimmt.

Mehrfach erwähnt wurde bereits die Tatsache, daß eine Systemfunktion $H(e^{j\Omega})$ in ein minimalphasiges System $H_M(e^{j\Omega})$ und gegebenenfalls einen Allpaßanteil $H_A(e^{j\Omega})$ aufgeteilt werden kann. Die Funktionen $H_M(e^{j\Omega})$ und $H_A(e^{j\Omega})$ können ihrerseits in Teilsysteme 1-ter und 2-ter Ordnung (im weiteren sollen hiermit Linearfaktoren mit einfacher reeller Nullstelle bzw. quadratische Glieder mit konjugiert komplexen Nullstellen bezeichnet werden) zerlegt werden. Insgesamt setzen sich die Funktionen $a(\Omega)$, $b(\Omega)$ und $\tau(\Omega)$ eines Gesamtsystems $H(e^{j\Omega}) = H_M(e^{j\Omega})H_A(e^{j\Omega})$ nach (3.3.61) bis (3.3.63) aus den Frequenzgängen einzelner Teilsysteme zusammen.

Im folgenden werden Formeln für die Frequenzgänge der wichtigsten Teilsysteme angegeben. Außerdem sind die für eine Linearisierung der Approximationsfunktionen notwendigen partiellen Ableitungen nach den Parametern der Teilsystemfunktionen aufgeführt. Zur Kennzeichnung der einzelnen Systeme sind die mnemonischen Abkürzungen der eigentlichen Bezeichnungen, wie sie auch in der Startwertedatei von TOPT erforderlich sind, verwendet worden. Weiterhin soll durch eine Konstante v das Vorzeichen einer Teilsystemfunktion festgelegt werden, welches kennzeichnet, ob das System in den Zähler oder Nenner von $H(e^{j\Omega})$ gehört.

$$v = \begin{cases} +1 & : \text{ wenn } z_{pn} = z_0 & \text{eine Nullstelle von } H(e^{j\Omega}) \text{ ist} \\ -1 & : \text{ wenn } z_{pn} = z_\infty & \text{eine Polstelle von } H(e^{j\Omega}) \text{ ist} \end{cases}$$

SINGL,

REELL: Linearer Term mit einfacher reeller Nullstelle ($z - z_{pn}$)

$$z_{pn} = \alpha_{pn} = \alpha \quad \text{und} \quad \alpha \in \mathcal{R}$$

$$a(\alpha, \Omega) = -10 \, v \, \log((\cos(\Omega) - \alpha)^2 + \sin^2(\Omega))$$

$$\frac{\partial a(\alpha, \Omega)}{\partial \alpha} = v \, \frac{20}{\ln 10} \, \frac{\cos(\Omega) - \alpha}{(\cos(\Omega) - \alpha)^2 + \sin^2(\Omega)}$$

$$b(\alpha, \Omega) = v \, \arctan\left(\frac{\sin(\Omega)}{\cos(\Omega) - \alpha}\right)$$

$$\frac{\partial b(\alpha, \Omega)}{\partial \alpha} = v \, \frac{\sin(\Omega)}{(\cos(\Omega) - \alpha)^2 + \sin^2(\Omega)}$$

$$\tau(\alpha, \Omega) = v \, \frac{1 - \alpha \cos(\Omega)}{1 - 2 \alpha \cos(\Omega) + \alpha^2}$$

$$\frac{\partial \tau(\alpha, \Omega)}{\partial \alpha} = v \, \frac{\cos(\Omega) (1 + \alpha^2) - 2 \alpha}{(1 - 2 \alpha \cos(\Omega) + \alpha^2)^2}$$

KOMPK,

KOMPLEX_KAR: Quadratischer Term $(z - z_{pn_1})(z - z_{pn_2})$ mit konjugiert komplexen Nullstellen z_{pn_1}, z_{pn_2} in kartesischen Koordinaten.

$$z_{pn_1} = z_{pn_2}^* = \alpha_{pn_1} + j\beta_{pn_1} = (\alpha_{pn_2} + j\beta_{pn_2})^* = \alpha + j\beta \quad \text{und} \quad z, z_{pn_1}, z_{pn_2} \in \mathcal{C}$$

$$a(\alpha, \beta, \Omega) = -10 v \log((\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cos(\Omega) + \cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega))^2 + 4\sin^2(\Omega)(\cos(\Omega) - \alpha)^2)$$

$$\frac{\partial a(\alpha, \beta, \Omega)}{\partial \alpha} = v \frac{40}{\ln 10} \frac{\cos(\Omega) (3\alpha^2 + \beta^2 + 1 - 2\alpha \cos(\Omega)) - \alpha (\alpha^2 + \beta^2 + 1)}{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cos(\Omega) + \cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega))^2 + 4\sin^2(\Omega)(\cos(\Omega) - \alpha)^2}$$

$$\frac{\partial a(\alpha, \beta, \Omega)}{\partial \beta} = v \frac{40}{\ln 10} \frac{-\beta (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cos(\Omega) + \cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega))}{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cos(\Omega) + \cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega))^2 + 4\sin^2(\Omega)(\cos(\Omega) - \alpha)^2}$$

$$b(\alpha, \beta, \Omega) = v \arctan\left(\frac{2 \sin(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha)}{\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega)}\right)$$

$$\frac{\partial b(\alpha, \beta, \Omega)}{\partial \alpha} = v \frac{2 \sin(\Omega) (1 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha \cos(\Omega))}{(2 \sin(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha))^2 + (\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega))^2}$$

$$\frac{\partial b(\alpha, \beta, \Omega)}{\partial \beta} = v \frac{4 \sin(\Omega) \beta (\alpha - \cos(\Omega))}{(2 \sin(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha))^2 + (\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega))^2}$$

$$\tau(\alpha, \beta, \Omega) = v \frac{1 - \alpha \cos(\Omega) (3 + \alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 - \beta^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2) \cos^2(\Omega)}{(\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega))^2 + 4 \sin^2(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha)^2}$$

$$= v \frac{Z\tau(\alpha, \beta, \Omega)}{N\tau(\alpha, \beta, \Omega)}$$

$$\frac{\partial \tau(\alpha, \beta, \Omega)}{\partial \alpha} = v \frac{(2\alpha + 4\alpha \cos^2(\Omega) - \cos(\Omega) (3 + 3\alpha^2 + \beta^2)) N\tau(\alpha, \beta, \Omega) - (2 \sin(\Omega) (1 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha \cos(\Omega))) Z\tau(\alpha, \beta, \Omega)}{((\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega))^2 + (2 \sin(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha))^2)^2}$$

$$\frac{\partial \tau(\alpha, \beta, \Omega)}{\partial \beta} = v 4\beta \frac{(2 \cos^2(\Omega) - \alpha \cos(\Omega) - 1) N\tau(\alpha, \beta, \Omega) - 2(\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega)) Z\tau(\alpha, \beta, \Omega)}{((\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega))^2 + (2 \sin(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha))^2)^2}$$

KOMPP,

KOMPLEX_POL: Quadratischer Term $(z - z_{pn_1})(z - z_{pn_2})$ mit konjugiert komplexen Nullstellen z_{pn_1}, z_{pn_2} in Polardarstellung.

$$z_{pn_1} = z_{pn_2}^* = \rho_{pn_1} e^{j\psi_{pn_1}} = \left(\rho_{pn_2} e^{-j\psi_{pn_2}} \right)^* = \rho e^{j\psi} \quad \text{und} \quad z \in \mathcal{C}$$

$$a(\rho, \psi, \Omega) = -10 v \log((\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) - 2\rho \cos(\psi) \cos(\Omega) + \rho^2)^2 + 4\sin^2(\Omega)(\cos(\Omega) - \rho \cos(\psi))^2)$$

$$\frac{\partial a(\rho, \psi, \Omega)}{\partial \rho} = -v \frac{40}{\ln 10} \frac{2\rho \cos^2(\psi) - \cos(\Omega) \cos(\psi)(1+3\rho^2) + \rho(\rho^2+1-2\sin^2(\Omega))}{(\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) - 2\rho \cos(\psi) \cos(\Omega) + \rho^2)^2 + 4\sin^2(\Omega)(\cos(\Omega) - \rho \cos(\psi))^2}$$

$$\frac{\partial a(\rho, \psi, \Omega)}{\partial \psi} = -v \frac{40}{\ln 10} \frac{\rho \sin(\psi)(\cos(\Omega)(1+\rho^2) - 2\rho \cos(\psi))}{(\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) - 2\rho \cos(\psi) \cos(\Omega) + \rho^2)^2 + 4\sin^2(\Omega)(\cos(\Omega) - \rho \cos(\psi))^2}$$

$$b(\rho, \psi, \Omega) = v \left(2\Omega + \arctan\left(\frac{\rho \sin(\Omega - \psi)}{1 - \rho \cos(\Omega - \psi)}\right) + \arctan\left(\frac{\rho \sin(\Omega + \psi)}{1 - \rho \cos(\Omega + \psi)}\right) \right)$$

$$\frac{\partial b(\rho, \psi, \Omega)}{\partial \rho} = v \left(\frac{\sin(\Omega - \psi)}{1 - 2\rho \cos(\Omega - \psi) + \rho^2} + \frac{\sin(\Omega + \psi)}{1 - 2\rho \cos(\Omega + \psi) + \rho^2} \right)$$

$$\frac{\partial b(\rho, \psi, \Omega)}{\partial \psi} = v \rho \left(\frac{\rho - \cos(\Omega - \psi)}{1 - 2\rho \cos(\Omega - \psi) + \rho^2} - \frac{\rho - \cos(\Omega + \psi)}{1 - 2\rho \cos(\Omega + \psi) + \rho^2} \right)$$

$$\tau(\rho, \psi, \Omega) = v \left(\frac{1 - \rho \cos(\Omega - \psi)}{1 - 2\rho \cos(\Omega - \psi) + \rho^2} + \frac{1 - \cos(\Omega + \psi)}{1 - 2\rho \cos(\Omega + \psi) + \rho^2} \right)$$

$$\frac{\partial \tau(\rho, \psi, \Omega)}{\partial \rho} = v \left(\frac{\cos(\Omega - \psi)(\rho^2 + 1) - 2\rho}{(1 - 2\rho \cos(\Omega - \psi) + \rho^2)^2} + \frac{\cos(\Omega + \psi)(\rho^2 + 1) - 2\rho}{(1 - 2\rho \cos(\Omega + \psi) + \rho^2)^2} \right)$$

$$\frac{\partial \tau(\rho, \psi, \Omega)}{\partial \psi} = v \rho (1 - \rho^2) \left(\frac{\sin(\Omega - \psi)}{(1 - 2\rho \cos(\Omega - \psi) + \rho^2)^2} - \frac{\sin(\Omega + \psi)}{(1 - 2\rho \cos(\Omega + \psi) + \rho^2)^2} \right)$$

KOEFF: Polynom n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_\nu \in \mathcal{R}$.

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad \text{mit} \quad a_\nu \in \mathcal{R} \quad \text{und} \quad \nu \in (0, 1, 2, \dots, n-1, n) \\ P(z) &= a_0 + z(a_1 + z(a_2 + z(\dots (a_{n-1} + z a_n)))) \quad \text{mit} \quad z = \cos(\Omega) + j \sin(\Omega) \quad . \end{aligned}$$

Dämpfung $a(\Omega)$, Phase $b(\Omega)$ und die Gruppenlaufzeit $\tau(\Omega)$ sowie deren partiellen Ableitungen nach den Koeffizienten a_ν ($\nu \in (0, 1, \dots, n)$) können aus dem Real- und Imaginärteil von

$P(\Omega)$ berechnet werden. Mit $P(\Omega) = Re_g(\Omega) + j Im_g(\Omega)$ gilt

$$a(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, \Omega) = -v \log(Re_g^2(\Omega) + Im_g^2(\Omega)).$$

$$\frac{\partial a(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, \Omega)}{\partial a_\nu} = -v \frac{20}{\ln 10} \left(Re_g(\Omega) \frac{\partial Re_g(\Omega)}{\partial a_\nu} + Im_g(\Omega) \frac{\partial Im_g(\Omega)}{\partial a_\nu} \right)$$

$$b(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, \Omega) = v \arctan\left(\frac{Im_g(\Omega)}{Re_g(\Omega)}\right)$$

$$\frac{\partial b(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, \Omega)}{\partial a_\nu} = v \left(\frac{\frac{\partial Im_g(\Omega)}{\partial a_\nu} Re_g(\Omega) - \frac{\partial Re_g(\Omega)}{\partial a_\nu} Im_g(\Omega)}{Re_g^2(\Omega) + Im_g^2(\Omega)} \right)$$

$$\tau(\Omega) = \frac{\frac{d Im_g(\Omega)}{d\Omega} Re_g(\Omega) - \frac{d Re_g(\Omega)}{d\Omega} Im_g(\Omega)}{Re_g^2(\Omega) + Im_g^2(\Omega)}$$

$$Z_\tau(a_n, \dots, a_0, \Omega) = \frac{d Im_g(\Omega)}{d\Omega} Re_g(\Omega) - \frac{d Re_g(\Omega)}{d\Omega} Im_g(\Omega)$$

und

$$N_\tau(a_n, \dots, a_0, \Omega) = Re_g^2(\Omega) + Im_g^2(\Omega)$$

folgt

$$\frac{\partial \tau(a_n, \dots, a_0, \Omega)}{\partial a_\nu} = v \frac{\frac{\partial Z_\tau(a_n, \dots, a_0, \Omega)}{\partial a_\nu} N_\tau(\Omega) - \frac{\partial N_\tau(a_n, \dots, a_0, \Omega)}{\partial a_\nu} Z_\tau(\Omega)}{(N_\tau(a_n, \dots, a_0, \Omega))^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_\tau(a_n, \dots, a_0, \Omega)}{\partial a_\nu} &= \frac{\partial}{\partial a_\nu} \left(\frac{d Im_g(\Omega)}{d\Omega} \right) Re_g(\Omega) + \frac{\partial Re_g(\Omega)}{\partial a_\nu} \frac{d Im_g(\Omega)}{d\Omega} \\ &- \frac{\partial}{\partial a_\nu} \left(\frac{d Re_g(\Omega)}{d\Omega} \right) Im_g(\Omega) - \frac{d Re_g(\Omega)}{d\Omega} \frac{\partial Im_g(\Omega)}{\partial a_\nu} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_\tau(a_n, \dots, a_0, \Omega)}{\partial a_\nu} = 2 Re_g(\Omega) \frac{\partial Re_g(\Omega)}{\partial a_\nu} + 2 Im_g(\Omega) \frac{\partial Im_g(\Omega)}{\partial a_\nu}$$

Aus der Darstellung des Polynoms mittels des Hornerschemas läßt sich leicht ein Algorithmus zur Berechnung des Real- und Imaginärteils von $P(\Omega)$ finden.

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Schritt: } P_1(\Omega) &= \underbrace{a_n \cos(\Omega) + a_{n-1}}_{Re_1(\Omega)} + j \underbrace{a_n \sin(\Omega)}_{Im_1(\Omega)} \\
 2. \text{ Schritt: } P_2(\Omega) &= \underbrace{Re_1(\Omega) \cos(\Omega) - Im_1(\Omega) \sin(\Omega) + a_{n-2}}_{Re_2(\Omega)} \\
 &+ j \underbrace{(Re_1(\Omega) \sin(\Omega) + Im_1(\Omega) \cos(\Omega))}_{Im_2(\Omega)} \\
 &\vdots \\
 n. \text{ Schritt: } P(\Omega) = P_n(\Omega) &= \underbrace{Re_{n-1}(\Omega) \cos(\Omega) - Im_{n-1}(\Omega) \sin(\Omega) + a_0}_{Re_n(\Omega) = Re_g(\Omega)} \\
 &+ j \underbrace{(Re_{n-1}(\Omega) \sin(\Omega) + Im_{n-1}(\Omega) \cos(\Omega))}_{Im_n(\Omega) = Im_g(\Omega)} \\
 P(\Omega) &= Re_g(\Omega) + j Im_g(\Omega)
 \end{aligned}$$

wobei $P_1, \dots, P_n(\Omega)$ den Teilpolynomen des Hornerschemas entsprechen.

Die partiellen Ableitungen des Real- bzw. Imaginärteils von $P(\Omega)$ nach den Koeffizienten a_ν lassen sich ebenfalls rekursiv bestimmen (Zum Beispiel für a_n).

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Schritt: } P'_1(\Omega) &= \underbrace{\cos(\Omega)}_{Re'_1(\Omega)} + j \underbrace{\sin(\Omega)}_{Im'_1(\Omega)} \\
 2. \text{ Schritt: } P'_2(\Omega) &= \underbrace{Re'_1(\Omega) \cos(\Omega) - Im'_1(\Omega) \sin(\Omega)}_{Re'_2(\Omega)} \\
 &+ j \underbrace{(Re'_1(\Omega) \sin(\Omega) + Im'_1(\Omega) \cos(\Omega))}_{Im'_2(\Omega)} \\
 &\vdots \\
 n. \text{ Schritt: } P'_n(\Omega) &= \underbrace{Re'_{n-1}(\Omega) \cos(\Omega) - Im'_{n-1}(\Omega) \sin(\Omega)}_{Re'_n(\Omega) = \frac{\partial Re_g(\Omega)}{\partial a_n}} \\
 &+ j \underbrace{(Re'_{n-1}(\Omega) \sin(\Omega) + Im'_{n-1}(\Omega) \cos(\Omega))}_{Im'_n(\Omega) = \frac{\partial Im_g(\Omega)}{\partial a_n}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P(\Omega)}{\partial a_\nu} = \frac{\partial Re_g(\Omega)}{\partial a_\nu} + j \frac{\partial Im_g(\Omega)}{\partial a_\nu}$$

mit $P'_\nu(\Omega) = (\cos(\Omega) + j\sin(\Omega))^\nu$ $\nu \in (1, 2, \dots, n)$ und $P'_0(\Omega) = 1$. Zur Berechnung der partiellen Ableitung nach a_n sind n Schritte der obigen Art notwendig; entsprechend weniger sind für ein a_ν mit $\nu < n$ durchzuführen. Insgesamt gilt $\frac{\partial \operatorname{Re}_g(\Omega)}{\partial a_\nu} = \operatorname{Re}'_\nu(\Omega)$, $\frac{\partial \operatorname{Im}_g(\Omega)}{\partial a_\nu} = \operatorname{Im}'_\nu(\Omega)$ und speziell $\frac{\partial \operatorname{Re}_g(\Omega)}{\partial a_0} = 1$ sowie $\frac{\partial \operatorname{Im}_g(\Omega)}{\partial a_0} = 0$

Um die Gruppenlaufzeit $\tau(\Omega)$ berechnen zu können, wird die Ableitung von $P(\Omega)$ nach der unabhängigen Frequenzvariablen Ω benötigt. Weiterhin ist es notwendig, zur Berechnung von $\frac{\partial \tau(a_n, \dots, a_0, \Omega)}{\partial a_\nu}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial a_\nu} \left(\frac{d Re_g(\Omega)}{d\Omega} \right)$ und $\frac{\partial}{\partial a_\nu} \left(\frac{d Im_g(\Omega)}{d\Omega} \right)$ zu ermitteln. Es soll kurz skizziert werden, wie man diese Terme rekursiv gewinnen kann.

$$\frac{dP(\Omega)}{d\Omega}:$$

$$1. \text{ Schritt: } \frac{dP_1(\Omega)}{d\Omega} = \underbrace{-a_n \sin(\Omega)}_{\frac{d Re_1(\Omega)}{d\Omega}} + j \underbrace{a_n \cos(\Omega)}_{\frac{d Im_1(\Omega)}{d\Omega}}$$

$$2. \text{ Schritt: } P_2(\Omega) = \underbrace{Re_1(\Omega) \cos(\Omega) - Im_1(\Omega) \sin(\Omega) + a_{n-2}}_{Re_2(\Omega)} + j \underbrace{(Re_1(\Omega) \sin(\Omega) + Im_1(\Omega) \cos(\Omega))}_{Im_2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_2(\Omega)}{d\Omega} &= \underbrace{\left(\frac{d Re_1(\Omega)}{d\Omega} - Im_1(\Omega) \right) \cos(\Omega) - \left(\frac{d Im_1(\Omega)}{d\Omega} + Re_1(\Omega) \right) \sin(\Omega)}_{\frac{d Re_2(\Omega)}{d\Omega}} \\ &+ j \underbrace{\left(\frac{d Re_1(\Omega)}{d\Omega} - Im_1(\Omega) \right) \sin(\Omega) + \left(\frac{d Im_1(\Omega)}{d\Omega} + Re_1(\Omega) \right) \cos(\Omega)}_{\frac{d Im_2(\Omega)}{d\Omega}} \end{aligned}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$n. \text{ Schritt: } P(\Omega) = P_n(\Omega) = \underbrace{Re_{n-1}(\Omega) \cos(\Omega) - Im_{n-1}(\Omega) \sin(\Omega) + a_0}_{Re_n(\Omega)} + j \underbrace{(Re_{n-1}(\Omega) \sin(\Omega) + Im_{n-1}(\Omega) \cos(\Omega))}_{Im_n(\Omega)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP(\Omega)}{d\Omega} = \frac{dP_n(\Omega)}{d\Omega} &= \underbrace{\left(\frac{d Re_{n-1}(\Omega)}{d\Omega} - Im_{n-1}(\Omega) \right) \cos(\Omega) - \left(\frac{d Im_{n-1}(\Omega)}{d\Omega} + Re_{n-1}(\Omega) \right) \sin(\Omega)}_{\frac{d Re_g(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d Re_n(\Omega)}{d\Omega}} \\ &+ j \underbrace{\left(\frac{d Re_{n-1}(\Omega)}{d\Omega} - Im_{n-1}(\Omega) \right) \sin(\Omega) + \left(\frac{d Im_{n-1}(\Omega)}{d\Omega} + Re_{n-1}(\Omega) \right) \cos(\Omega)}_{\frac{d Im_g(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d Im_n(\Omega)}{d\Omega}} \end{aligned}$$

$$\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d Re_g(\Omega)}{d\Omega} + j \frac{d Im_g(\Omega)}{d\Omega}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_\nu} \left(\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} \right):$$

Begonnen wird diesmal mit dem Koeffizienten a_0 . Aufgrund der Tatsache, daß $\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} = (na_n(\cos(\Omega) + j\sin(\Omega))^{n-1} + \dots + a_1)(-\sin(\Omega) + j\cos(\Omega))$ gilt, müssen die Exponenten ν ($\nu \in (1, 2, \dots, n)$)

berücksichtigt werden.

$$1. \text{ Schritt: } P_1(\Omega) = a_0$$

$$\frac{dP_1(\Omega)}{d\Omega} = 0 \quad \text{somit} \quad \frac{\partial}{\partial a_0} \left(\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} \right) = 0$$

$$2. \text{ Schritt: } P_2(\Omega) = a_1 \cos(\Omega) + a_0 + j a_1 \sin(\Omega)$$

$$\frac{dP_2(\Omega)}{d\Omega} = -a_1 \sin(\Omega) + j a_1 \cos(\Omega)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} \right) = \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{dP_2(\Omega)}{d\Omega} \right) = \underbrace{-\sin(\Omega)}_{Re_2''(\Omega)} + j \underbrace{\cos(\Omega)}_{Im_2''(\Omega)}$$

$$3. \text{ Schritt: } P_3(\Omega) = a_2 (\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega)) + a_1 \cos(\Omega) + a_0 + j (2a_2 \sin(\Omega) \cos(\Omega) + a_1 \sin(\Omega))$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_3(\Omega)}{d\Omega} &= a_2 (-4 \sin(\Omega) \cos(\Omega)) - a_1 \sin(\Omega) \\ &+ j (2a_2 (\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega)) + a_1 \cos(\Omega)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} \right) = \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{dP_3(\Omega)}{d\Omega} \right) = 2 \underbrace{(-2 \sin(\Omega) \cos(\Omega))}_{Re_3''(\Omega)} + j 2 \underbrace{(\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega))}_{Im_3''(\Omega)}$$

allgemein gilt ohne Berücksichtigung der Exponenten

$$Re_3''(\Omega) = Re_2''(\Omega) \cos(\Omega) - Im_2''(\Omega) \sin(\Omega)$$

$$Im_3''(\Omega) = Re_2''(\Omega) \sin(\Omega) + Im_2''(\Omega) \cos(\Omega)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$n.$ Schritt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} \right) &= \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{dP_n(\Omega)}{d\Omega} \right) = n \underbrace{(Re_{n-1}''(\Omega) \cos(\Omega) - Im_{n-1}''(\Omega) \sin(\Omega))}_{Re_n''(\Omega)} \\ &+ j n \underbrace{(Re_{n-1}''(\Omega) \sin(\Omega) + Im_{n-1}''(\Omega) \cos(\Omega))}_{Im_n''(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_\nu} \left(\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} \right) = n (Re_\nu''(\Omega) + j Im_\nu''(\Omega))$$

ALLR,**ALLPASSREAL:**

Allpaß 1-ter Ordnung mit reeller Pol- bzw. Nullstelle.

$$H_A^{(1)}(z) = z \frac{z^{-1} - z_{\infty}^*}{z - z_{\infty}} \quad \text{mit} \quad z_{\infty} = \alpha_{\infty} \quad \text{und} \quad \alpha_{\infty} \in \mathcal{R}.$$

ALLK,**ALLPASSKOMPL:**

Allpaß 2-ter Ordnung mit konjugiert komplexen Pol- bzw. Nullstellen in kartesischen Koordinaten.

$$H_A^{(2)}(z) = z^2 \frac{(z^{-1} - z_{\infty_1}^*)(z^{-1} - z_{\infty_2}^*)}{(z - z_{\infty_1})(z - z_{\infty_2})}$$

$$\text{mit} \quad z_{\infty_1} = \alpha_{\infty_1} + j\beta_{\infty_1}, \quad z_{\infty} = z_{\infty_1} = z_{\infty_2}^* \quad \text{und} \quad z_{\infty} \in \mathcal{C}$$

$$H_A^{(2)}(z) = \frac{1 - z(z_{\infty}^* + z_{\infty}) + |z_{\infty}|^2 z^2}{z^2 - z(z_{\infty} + z_{\infty}^*) + |z_{\infty}|^2}$$

POLALLK,**POLALLPASSKOMPL:**

Allpaß 2-ter Ordnung mit konjugiert komplexen Pol- bzw. Nullstellen in Polarkoordinaten.

$$H_A^{(2)}(z) = z^2 \frac{(z^{-1} - z_{\infty_1}^*)(z^{-1} - z_{\infty_2}^*)}{(z - z_{\infty_1})(z - z_{\infty_2})} \quad \text{mit} \quad z_{\infty_1} = \rho_{\infty_1} e^{j\psi_{\infty_1}},$$

$$z_{\infty_1} = z_{\infty_2}^* \quad \text{und} \quad z_{\infty_1}, z_{\infty_2} \in \mathcal{C}.$$

BIQU:

Allpaß 2-ter Ordnung, dargestellt als biquadratische Übertragungsfunktion.

$$H_A^{(2)}(z) = \frac{1 + c_1 z + c_0 z^2}{z^2 + c_1 z + c_0} \quad \text{mit} \quad c_0, c_1 \in \mathcal{R}$$

Nach Gleichung (3.4.96) lautet allgemein die Übertragungsfunktion eines Allpasses n -ter Ordnung

$$H_A(z) = z^n \frac{N(z^{-1})}{N(z)} \quad \text{bzw.} \quad H_A(e^{j\Omega}) = e^{jn\Omega} \frac{N(e^{-j\Omega})}{N(e^{j\Omega})} \quad \text{mit} \quad z = e^{j\Omega}.$$

Aus Gleichung (3.4.98) geht hervor, daß sich z.B. der Phasenfrequenzgang eines Allpasses n -ter Ordnung aus dem Phasengang des Nennerterms $N(\Omega) = N_R(\Omega) + j N_I(\Omega)$ von $H_A(e^{j\Omega})$ ermitteln läßt. Der besseren Übersicht wegen, seien hier die allgemeinen Beziehungen für den Frequenzgang der Phase und der Gruppenlaufzeit wiederholt.

$$b_A(\Omega) = -n\Omega + 2 \arctan \left(\frac{N_I(\Omega)}{N_R(\Omega)} \right)$$

$$\tau_A(\Omega) = -n + 2 \frac{\frac{d N_I(\Omega)}{d\Omega} N_R(\Omega) - \frac{d N_R(\Omega)}{d\Omega} N_I(\Omega)}{N_R^2(\Omega)}$$

Die Ermittlung der Frequenzgänge von Phasen- und Gruppenlaufzeit läßt sich also zurückführen auf die Bestimmung der Frequenzgänge der Nennerterme, wenn man außerdem noch die Summanden $-n\Omega$ bzw. $-n$ beachtet.

Ein einfacher reeller Allpaß hat im Nenner ein lineares Glied 1-ter Ordnung, während ein komplexer Allpass im Nenner ein Teilsystem 2-ter Ordnung aufweist, welches beim biquadratischen System durch ein Polynom 2-ten Grades ausgedrückt wird, dessen Koeffizient c_2 immer gleich 1 ist.

Exemplarisch seien hier die endgültigen Formeln für Allpässe 1-ter und 2-ter Ordnung aufgelistet.

$n = 1$:

$$b_A^{(1)}(\alpha, \Omega) = -\Omega + 2 \arctan\left(\frac{\sin(\Omega)}{\cos(\Omega) - \alpha}\right)$$

$$\frac{\partial b_A^{(1)}(\alpha, \Omega)}{\partial \alpha} = 2 \frac{\sin(\Omega)}{(\cos(\Omega) - \alpha)^2 + \sin^2(\Omega)}$$

$$\tau_A^{(1)}(\alpha, \Omega) = -1 + 2 \frac{1 - \alpha \cos(\Omega)}{1 - 2\alpha \cos(\Omega) + \alpha^2}$$

$$\frac{\partial \tau_A^{(1)}(\alpha, \Omega)}{\partial \alpha} = 2 \frac{\cos(\Omega) (1 + \alpha^2) - 2\alpha}{(1 - 2\alpha \cos(\Omega) + \alpha^2)^2}$$

$n = 2$:

$$b_A^{(2)}(\alpha, \beta, \Omega) = -2\Omega + 2 \arctan \left(\frac{2 \sin(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha)}{\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega)} \right)$$

$$\frac{\partial b_A^{(2)}(\alpha, \beta, \Omega)}{\partial \alpha} = 2 \frac{2 \sin(\Omega) (1 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha \cos(\Omega))}{(2 \sin(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha))^2 + (\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega))^2}$$

$$\frac{\partial b_A^{(2)}(\alpha, \beta, \Omega)}{\partial \beta} = 2 \frac{4 \sin(\Omega) \beta (\alpha - \cos(\Omega))}{(2 \sin(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha))^2 + (\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega))^2}$$

$$\begin{aligned} \tau_A^{(2)}(\alpha, \beta, \Omega) &= -2 + 2 \frac{1 - \alpha \cos(\Omega) (3 + \alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 - \beta^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2) \cos^2(\Omega)}{(\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega))^2 + 4 \sin^2(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha)^2} \\ &= -2 + 2 \frac{Z\tau(\alpha, \beta, \Omega)}{N\tau(\alpha, \beta, \Omega)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tau_A^{(2)}(\alpha, \beta, \Omega)}{\partial \alpha} = 2 \frac{(2\alpha + 4\alpha \cos^2(\Omega) - \cos(\Omega) (3 + 3\alpha^2 + \beta^2)) N\tau(\alpha, \beta, \Omega) - (2 \sin(\Omega) (1 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha \cos(\Omega))) Z\tau(\alpha, \beta, \Omega)}{((\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega))^2 + (2 \sin(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha))^2)^2}$$

$$\frac{\partial \tau_A^{(2)}(\alpha, \beta, \Omega)}{\partial \beta} = 2 \frac{4\beta (2\cos^2(\Omega) - \alpha \cos(\Omega) - 1) N\tau(\alpha, \beta, \Omega) - 2(\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega)) Z\tau(\alpha, \beta, \Omega)}{((\cos^2(\Omega) - \sin^2(\Omega) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \sin(\Omega))^2 + (2 \sin(\Omega) (\cos(\Omega) - \alpha))^2)^2}$$

Analoge Verhältnisse ergeben sich, wenn die Parameter in Polarkoordinaten vorliegen. Im Fall einer biquadratischen Übertragungsfunktion für einen Allpaß 2-ter Ordnung werden die notwendigen Ableitungen des Nennerterms $N(\Omega)$ analog zur bereits besprochenen Vorgehensweise bei Polynomen (KOEFF) bestimmt.

5 Beispiele

5.1 Phasenentzerrung bei einem Cauer-Tiefpasses 8-ter Ordnung

Gegeben sei die Übertragungsfunktion $H_C(z)$ eines Cauer-Tiefpasses 8-ter Ordnung. Der Phasengang im Durchlaßbereich, des als gegeben zu betrachtenden Tiefpasses soll linearisiert werden. Diese Forderung läßt sich ebenso durch eine konstante Gruppenlaufzeit im Durchlaßbereich des Filters umschreiben. Von der Systemfunktion $H_C(z)$ des Filters sind die Koeffizienten des Zähler- und Nennerpolynoms bekannt. Es sei also

$$H_C(z) = \frac{0.0076z^8 + 0.0009z^7 + 0.0189z^6 + 0.0078z^5 + 0.0224z^4 + 0.0078z^3 + 0.0189z^2 + 0.0009z + 0.0076}{z^8 - 4.251z^7 + 9.601z^6 - 13.907z^5 + 13.975z^4 - 9.853z^3 + 4.756z^2 - 1.438z + 0.211}$$

gegeben.

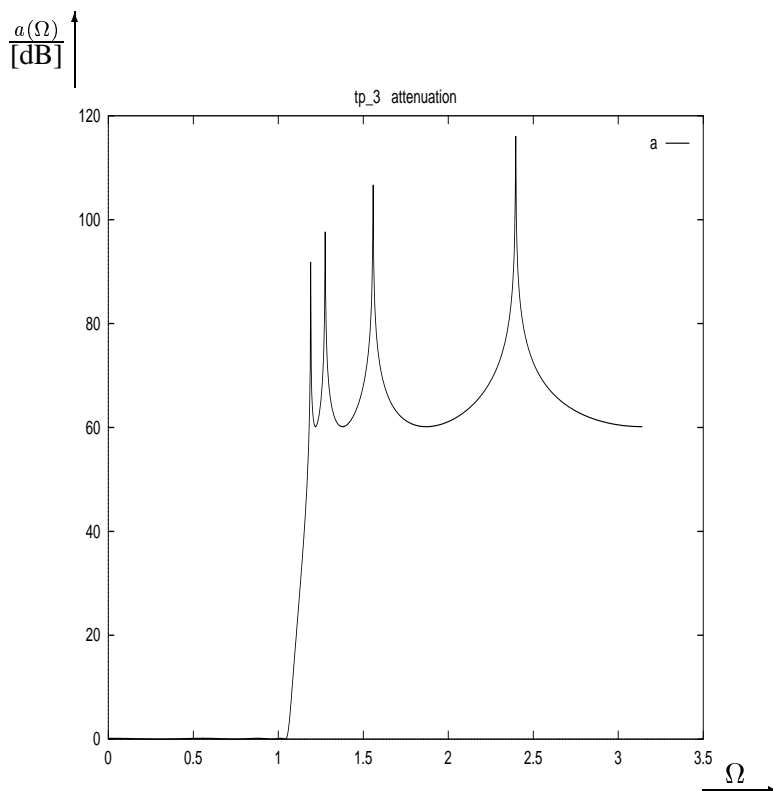


Abbildung 9: Dämpfungsverlauf $a(\Omega)$ des Cauer-Tiefpasses 8-ter Ordnung

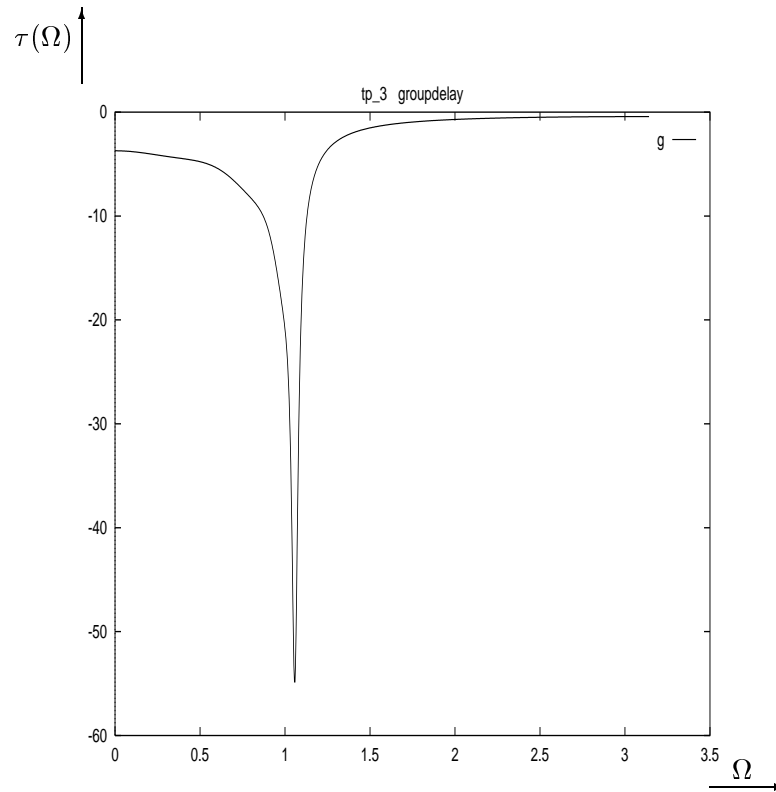
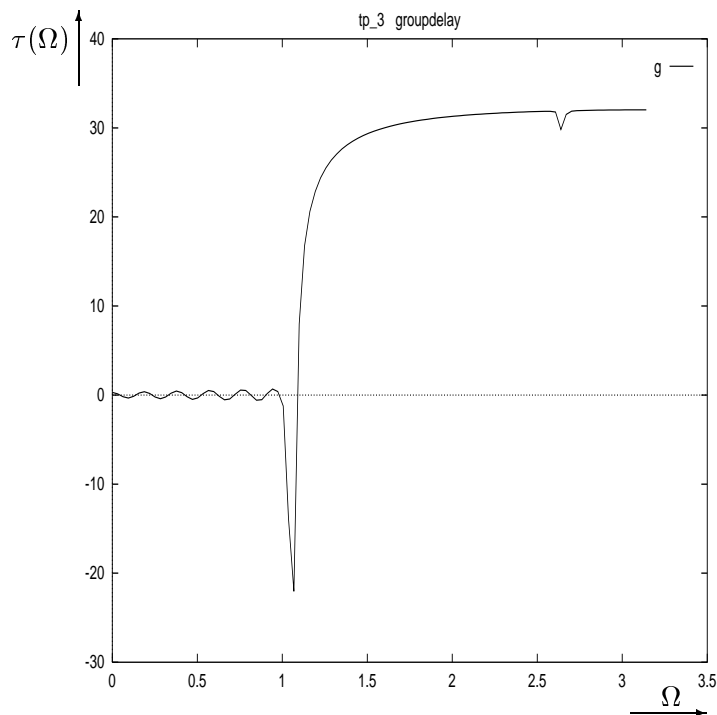


Abbildung 10: Frequenzgang der Gruppenlaufzeit $\tau(\Omega)$ des Cauer-Tiefpasses 8-ter Ordnung

Dem Tiefpaß werden sechs Allpässe 2-ter Ordnung sowie ein weiterer Allpass 1-ter Ordnung in Serie geschaltet. Da die Allpässe das Dämpfungsverhalten des Filters nicht beeinflussen, sind deren Parameter so zu bestimmen, daß eine möglichst konstante Gruppenlaufzeit im Durchlaßbereich des Gesamtsystems erreicht wird. Um zu gewährleisten, daß die endgültigen Teilsystemfunktionen der Allpässe stabile und damit realisierbare Systeme beschreiben, werden die Approximationsparameter der komplexen Allpässe in Polarkoordinaten vorgegeben. Die optimalen Allpaßparameter können dann von TOPT unter Berücksichtigung der Stabilitätsbedingung ermittelt werden. Somit ist

$$H(z) = H_C(z) H_A(z)$$

Auf Seite 66 wird zunächst die Startwertedatei, in der die Strukturen der Übertragungsfunktionen $H_C(e^{j\Omega})$ und $H_A(e^{j\Omega})$ vorgegeben werden, gezeigt. Die Allpaßparameter sind gleichzeitig die Startwerte der Approximation. Danach ist die Forderungsdatei angegeben, in der der zu ap-

Abbildung 11: Verlauf der Gruppenlaufzeit $\tau(\Omega)$ des Gesamtsystems

proximierende Frequenzgang beschrieben wird. Gefordert wird eine konstante Gruppenlaufzeit von 0. Da man den Betrag der endgültigen (quasi konstanten) Gruppenlaufzeit noch nicht kennt, dient diese Forderung lediglich dazu, ein Approximationsziel zu definieren. Damit das Ziel erreicht werden kann, wird eine konstante Gruppenlaufzeit addiert, dessen Parameter gleichzeitig Gegenstand der Approximation ist.

Die Abbildungen 11 und 12 zeigen, wie die Gruppenlaufzeit der Reihenschaltung, bis auf eine unvermeidbare Restwelligkeit, quasi konstant bleibt.

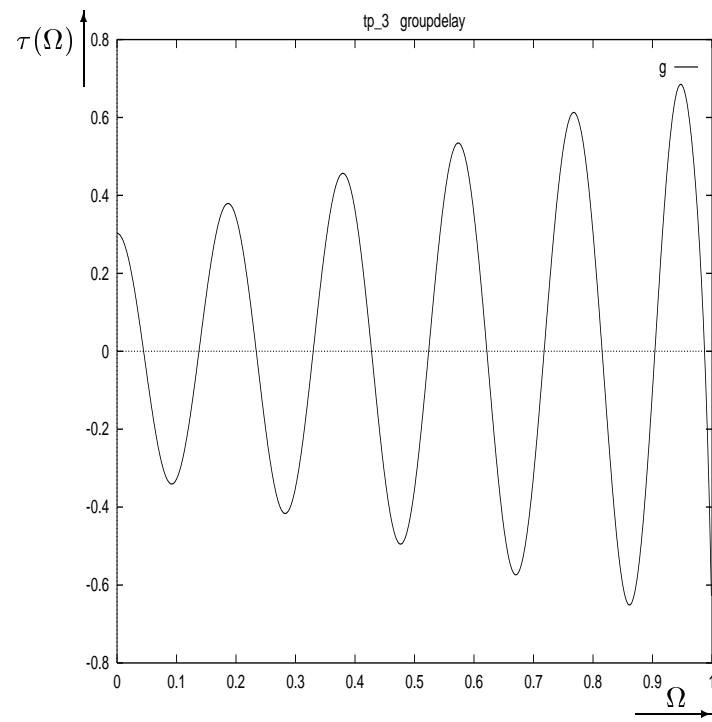


Abbildung 12: Verlauf der Gruppenlaufzeit $\tau(\Omega)$ im Durchlaßbereich des Gesamtsystems. Der lineare Anstieg der Gruppenlaufzeitfehler ist Folge der vorgegebenen Aufweitung des Toleranzschlauches.

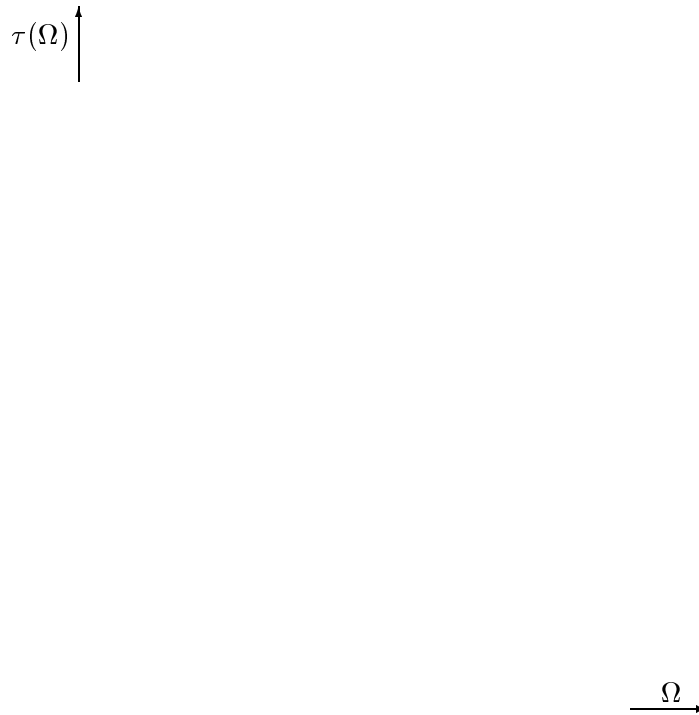


Abbildung 13: Optimales Approximationsergebnis. Die Gruppenlaufzeit weist 13 Extremstellen im Approximationsintervall auf.

Durch Variation der Anfangswerte und Erhöhung der "magischen" Konstanten "SUCHMAX" von 10 auf den Wert 50, welche die maximale Anzahl der eindimensionalen Suchschritte (Iterationen) bei der Bestimmung eines Verbesserungsvektors (linienhafte Suche) beschränkt, konnte eine optimale Lösung im Sinne des Alternantensatzes gefunden werden. Das Ergebnis wird auf Seite 67 angegeben.

Abgesehen von der konstanten Gruppenlaufzeit hat die Approximationsfunktion mit 12 "freien" Parametern auch 12 Freiheitsgrade. Somit kann im Sinne des Alternantensatzes an 13 alternierenden Extremstellen der (betragsmäßig gleiche) Fehler minimiert werden. Hierbei ist zu beachten, daß die Zunahme der Fehleramplitude durch die lineare Abnahme der Fehlergewichtung bedingt ist. Betragsgleiche Fehlerwerte ergeben sich durch Multiplikation der Fehleramplituden mit den entsprechenden Gewichtungsfaktoren, die sich aus den Reziprokwerten der Toleranzwerte (siehe Forderungsdatei) errechnen.

Erwähnenswert ist bei dieser Lösung, daß zwei biquadratische Allpässe verwendet wurden, deren Koeffizienten TOPT unter Berücksichtigung der Stabilitätsbedingung (siehe z.B. [1] Seite 95 bis 96) ermittelt. Weiterhin zeigte sich (wie bereits bei der ersten Lösung), daß auf das Allpaßglied 1-ter Ordnung verzichtet werden kann.

```

polallpasskompl frei frei (      /* Startwertedatei */
    0.8 -0.1 -1
    0.8 -0.3 -1 /* Betrag Winkel Vielfachheit */
    0.8 0.6 -1
    0.8 0.7 -1
    0.8 0.1 -1
    0.8 0.0 -1
)
allr frei ( -0.99 -1 ) /* Betrag Vielfachheit */
gruk frei ( 15.0 )
koeff fest -1 (
0.21114574700325219 /*  $a_{0_N}$  */
-1.4385345132983439
4.756751595109308
-9.8530292383980704
13.975082057733028
-13.907022493041893
9.6019238193289809
-4.2513976000123588
1 /*  $a_{8_N}$  */
)
koeff fest 1 (
0.0076182999999999996 /*  $a_{0_Z}$  */
0.00091302887634584629
0.018909426060989373
0.0078755566483905968
0.022454076274813382
0.0078755566487321849
0.018909426061424483
0.00091302887667993318
0.0076183000003811117 /*  $a_{8_Z}$  */
)
ende

z_Approximation /* Forderungsdatei */
Optimierkonstanten (
Maxbetrag = 0.9999 /* Der Betrag der ermittelten Polstellen darf 0.9
Restriktionsgewicht = 1000 /* überschreiten. */
)

Gru == (
    inter (
        0.0 0.3 0.001;
        150; /* Auf dem Intervall 0.001 bis 1.0 werden 150 Stützstellen
        0.0 0.7 1.0; /* gebildet. Gleichzeitig wird der Toleranzbereich von 0.3
        ) /* auf 0.7 aufgeweitet, was einer Lockerung der Restriktion
    ) /* zur Durchlaßgrenze hin bedeutet. */
)
ende

POLALLPASSKOMPL FREI FREI ( /* Ergebnis */

```

```

9.9990000000000001e-01  -2.512635243504602e+00  -1
8.604687962147191e-01  -4.791553210643849e-01  -1
8.74179373647404e-01   8.717715095274515e-01  -1
8.641484352898127e-01   6.71384279641314e-01  -1
8.560322534331984e-01  -2.84696389199996e-01  -1
8.540315452778181e-01   .09351056778960235  -1
)
ALLPASSREAL FREI (
-9.9990000000000001e-01  -1 /* hat quasi eine konstante Phase von  $\pi$ , und kann */
) /* deshalb entfallen (siehe Seite 31) */
GRUPPENLAUFZEITKON FREI (
3.325876142635325e+01
)
KOEFF FEST -1 (
2.111457470032522e-01
-1.438534513298344e+00
4.756751595109308e+00
-9.85302923839807e+00
1.397508205773303e+01
-1.390702249304189e+01
9.601923819328981e+00
-4.251397600012359e+00
1
)
KOEFF FEST 1 (
.0076183
.0009130288763458463
.01890942606098937
.007875556648390597
.02245407627481338
.007875556648732185
.01890942606142448
.0009130288766799332
.007618300000381112
)
ENDE
T-Norm = 1.009539e+00 Abbruchgrund: Lineare Suche nach 10 Schritten gescheitert!
Iterationen = 120

POLALLPASSKOMPL FREI FREI ( /* optimales Ergebnis */
8.51139229411673e-01  2.441068065631413e-01  -1
8.502947875189751e-01  .08069487916619885  -1
8.585089459119459e-01  7.37404800688557e-01  -1
8.745147450754047e-01  9.021040061115416e-01  -1
)
BIQU FREI FREI (
-1.439516930967275e+00  7.347567998841125e-01  -1 /*  $c_1$   $c_0$  */
-1.565575089211809e+00  7.284622702431225e-01  -1
)

```

```
GRUPPENLAUFZEITKON FREI (  
3.821519331911023e+01  
)
```

5.2 Tschebyscheff-Tiefpaß 8-ter Ordnung

Es soll ein Tschebyscheff-Tiefpaß mit folgenden Eckdaten

$$\begin{aligned}
 \text{untere Grenzfrequenz: } f_G &= 13,7 \text{ KHz} \\
 \text{Sperrgrenze: } f_S &= 19,7 \text{ KHz} \\
 \text{Abtastfrequenz: } f_T &= 100 \text{ KHz} \\
 \text{Maximaldämpfung im Durchlaßbereich: } A_{max} &= 1,6 \text{ [dB]} \\
 \text{Minstdämpfung im Sperrbereich: } A_{min} &= 60 \text{ [dB]}
 \end{aligned}$$

entworfen werden.

Um den notwendigen Filtergrad für das diskrete System zu ermitteln, wird eine Transformation in den φ -Bereich vorgenommen¹⁸. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \varphi_S &= \tan\left(\pi \frac{13,7}{100}\right) = 0.4591 \\
 \varphi_D &= \tan\left(\pi \frac{19,7}{100}\right) = 0.712
 \end{aligned}$$

Aus der Beziehung

$$n \geq \frac{\operatorname{ar} \cosh \sqrt{\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}}}{\operatorname{ar} \cosh\left(\frac{\varphi_S}{\varphi_D}\right)}$$

gewinnt man den notwendigen Grad der Systemfunktion, der in diesem Fall mindestens 8 sein muß. Damit lautet allgemein die Systemfunktion im z -Bereich

$$H_T(z) = K \frac{(z+1)^8}{(z-z_{\infty_1})(z-z_{\infty_1}^*)(z-z_{\infty_2})(z-z_{\infty_2}^*)(z-z_{\infty_3})(z-z_{\infty_3}^*)(z-z_{\infty_4})(z-z_{\infty_4}^*)}$$

Mit TOPT sind die Parameter $z_{\infty_1}, \dots, z_{\infty_4}$ so zu optimieren, daß das vorgegebene Toleranzschema der Dämpfung eingehalten und der geforderte konstante Dämpfungsfrequenzgang im Durchlaßbereich bestmöglich approximiert wird. Die errechneten Data der Übertragungsfunktion $H_T(z)$ lauten:

$$\begin{aligned}
 K &= 0.0000001034796 \\
 z_{\infty_1} &= 0.956768e^{j0.39054} \\
 z_{\infty_2} &= 0.922263e^{j0.09285} \\
 z_{\infty_3} &= 0.934669e^{j0.26296} \\
 z_{\infty_4} &= 0.984824e^{j0.45822}
 \end{aligned}$$

¹⁸Analog zur Vorgehensweise in Kurseinheit 10 [2]

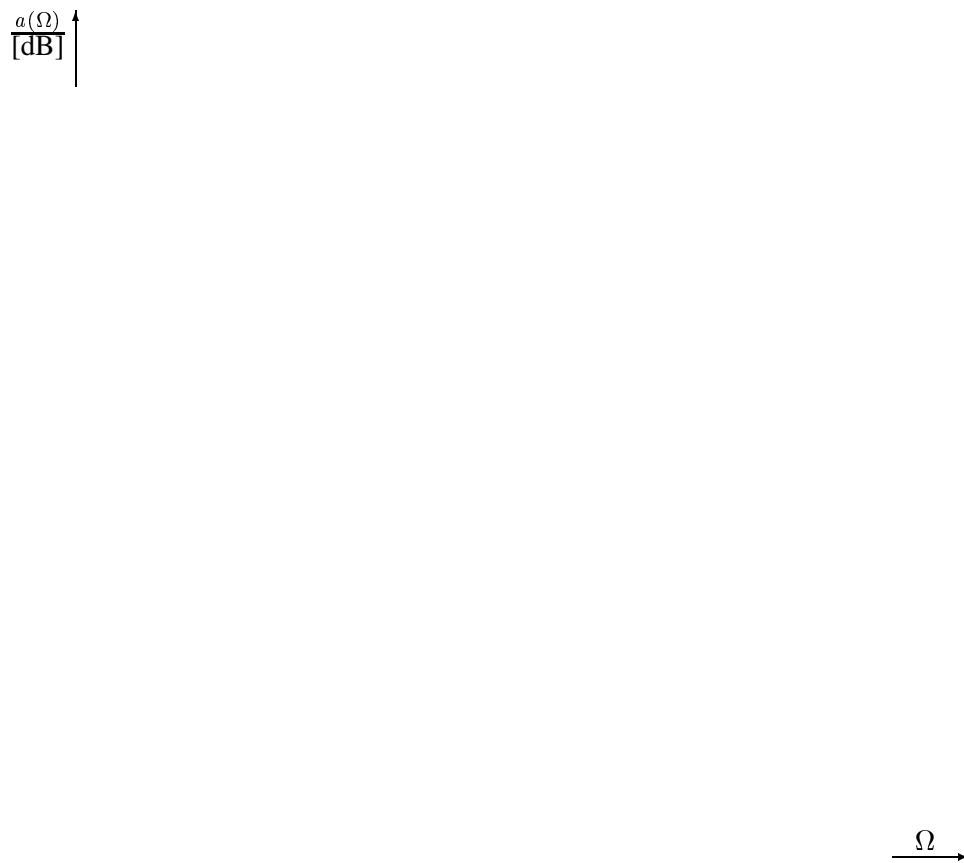


Abbildung 14: Dämpfungsverlauf $a(\Omega)$ des Tschebyscheff-Tiefpasses 8-ter Ordnung vor der Parameteroptimierung

Bild (14) zeigt den Dämpfungsverlauf, der sich aus den Startwerten ergibt, Bild (15) den Frequenzgang der optimierten Systemfunktion. Aus Bild (16) geht hervor, daß der durch den Fehlgewichtungsfaktor 0, 2 (siehe Forderungsdatei Seite 72) angestrebte Minimalfehler (zulässige Maximaldämpfung) im Durchlaßbereich nicht erreicht wird. Dennoch wird ein optimales Approximationsergebnis erzielt, denn es werden an $n + 1 = 8 + 1 = 9$ ¹⁹ Stützstellen im Durchlaßbereich die Maximalfehler minimiert. Das Ergebnis steht im Einklang mit dem Alternantensatz²⁰.

¹⁹ n gleich Anzahl Parameter

²⁰siehe Seite 15 [6]

Abbildung 15: Dämpfungsverlauf $a(\Omega)$ des Tschebyscheff-Tiefpasses 8-ter Ordnung

```

komplex_pol frei frei (      /* Startwertedatei */
    0.85 0.42 -1
    0.8  0.25 -1
    0.75 0.1  -1
    0.7  0.01 -1
)
reell fest (
    -1.0 8
)
konst frei (0.00001)
ende

```

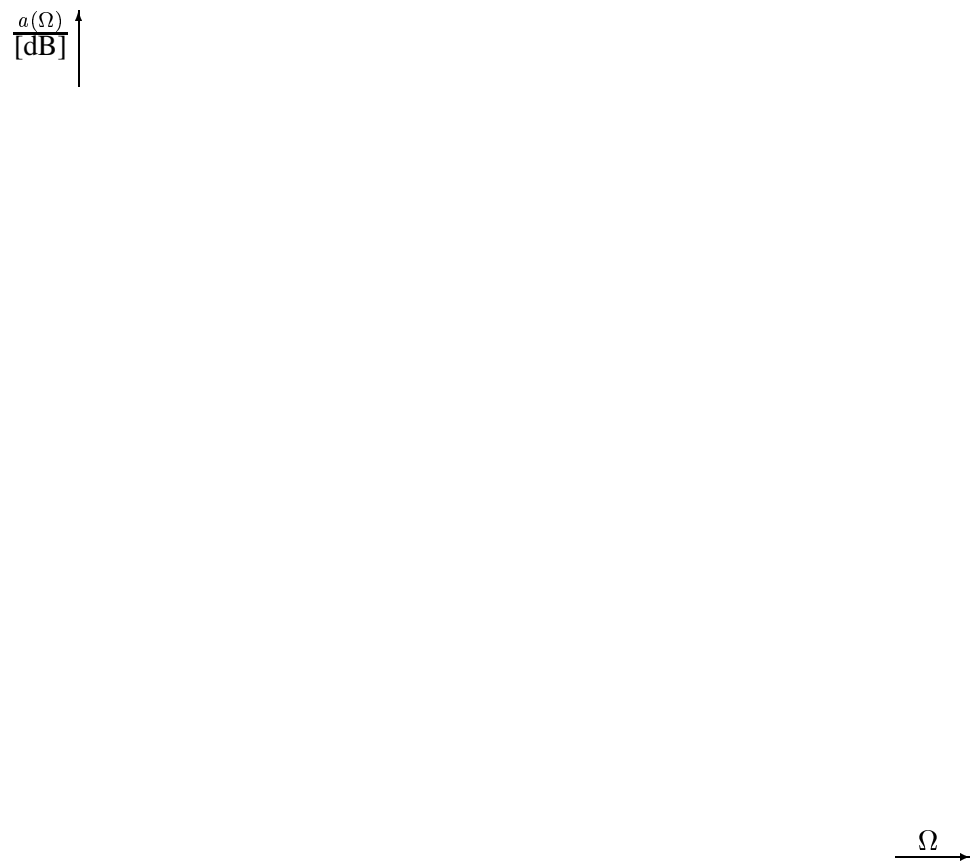


Abbildung 16: Dämpfungsverlauf $a(\Omega)$ des Tschebyscheff-Tiefpasses 8-ter Ordnung im Durchlaßbereich

```

z_Approximation      /* Forderungsdatei */
Optimierkonstanten (
Maxbetrag = 0.99
Restriktionsgewicht = 1000)
Dae == (
    inter
        0.1    0.2 0.001;
        180;
        0.1    0.2 0.46;
    )
)
Dae >= (
    inter
        60.0   0.1 0.712;

```



```

      80;
      60.0  0.  1  3.0;
    )
  )
ende

KOMPLEX_POL FREI FREI (      /* Ergebnis */
9.567681423350079e-01  -3.905434930339225e-01  -1
9.222638397647602e-01  -.0928583806487253      -1
9.34669739128813e-01   2.629687602132927e-01  -1
9.848244763798123e-01  -4.582254284403272e-01  -1
)
KON FREI ( 1.034796733605256e-07 )
REELL FEST ( -1 8 )
ENDE
T-Norm = 2.619716e+00 Abbruchgrund: relative Verbesserung in 4 Schritten < .0001 !
Iterationen = 29

```

5.3 Cauer-Tiefpasses 8-ter Ordnung

Dieses Beispiel soll demonstrieren, wie die Pol- bzw. Nullstellen der Übertragungsfunktion $H_C(z)$ eines Cauer-Tiefpasses 8-ten Grades ermittelt werden können. Das vorgegebene Dämpfungstoleranzschema wurde an das von Beispiel 1 angelehnt. Es gilt, die Parameter $z_{0_1}, \dots, z_{0_4} \in \mathcal{C}$ und $z_{\infty_1}, \dots, z_{\infty_4} \in \mathcal{C}$ von

$$H_C(z) = K \frac{(z - z_{0_1})(z - z_{0_1}^*)(z - z_{0_2})(z - z_{0_2}^*)(z - z_{0_3})(z - z_{0_3}^*)(z - z_{0_4})(z - z_{0_4}^*)}{(z - z_{\infty_1})(z - z_{\infty_1}^*)(z - z_{\infty_2})(z - z_{\infty_2}^*)(z - z_{\infty_3})(z - z_{\infty_3}^*)(z - z_{\infty_4})(z - z_{\infty_4}^*)}$$

hinsichtlich einer Minimaldämpfung im Durchlaßbereich unter Berücksichtigung des vorgegebenen Toleranzschemas zu optimieren. Das Ergebnis findet man auf Seite 77.

Bei der Approximation wird durch eine zusätzliche einseitige Frequenzgangforderung erreicht, daß der Betrag der Übertragungsfunktion $H_C(z)$ den Wert 1 nicht überschreitet. Daraus resultiert, so daß der alternierende Dämpfungsfehler nicht symmetrisch um den Zielwert 0, 2 liegt, aber insgesamt der festgelegte Toleranzbereich von 1 dB eingehalten wird.

Bei diesem Beispiel wird ebenfalls ein optimales Approximationsergebnis erzielt. Das durch die Diskretisierung entstehende Gleichungs- bzw. Ungleichungssystem (analog Gl. (4.1.123)) weist insgesamt 344 Zeilen und 13 Spalten auf. 4 der 344 Zeilen sind durch Parameterrestriktionen bedingt (Betrag der 4 Polstellen muß kleiner 1 bleiben), die übrigen ergeben sich aus den Stützstellen. Aus den insgesamt 13 Parametern (12 durch die Pol- Nullstellen und die Konstante K) resultieren die 13 Spalten des Gesamtsystems. Es kann ein optimales Subsystem mit n Zeilen gefunden werden. Für $n + 1 = n_G + n_U = 14$ Zeilen²¹ des Gesamtsystems gilt: $n_G = 5$ gibt die Zahl der Gleichungen an, die alle denselben Fehlerbetrag aufweisen, $n_U = 9$ entspricht der Zahl der mit dem Gleichheitszeichen erfüllten Nebenbedingungen. Bei diesem Beispiel sind dies die Ungleichungen, die sich durch einseitige Frequenzgangforderungen im Sperr- und Durchlaßbereich des Filters ergeben, da keine Parameterrestriktion mit dem Gleichheitszeichen erfüllt ist.

²¹Weitere Hinweise hierzu findet man in [6] (Insbesondere Kapitel 7.4 Seite 59 - 60)

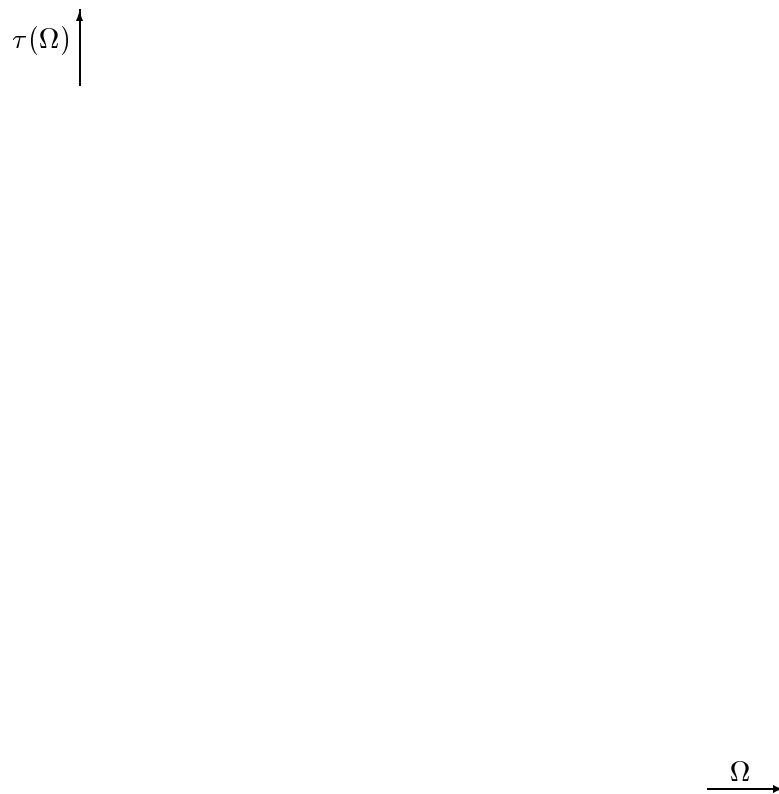


Abbildung 17: Frequenzgang der Dämpfung $a(\Omega)$ des Cauer-Tiefpasses 8-ter Ordnung

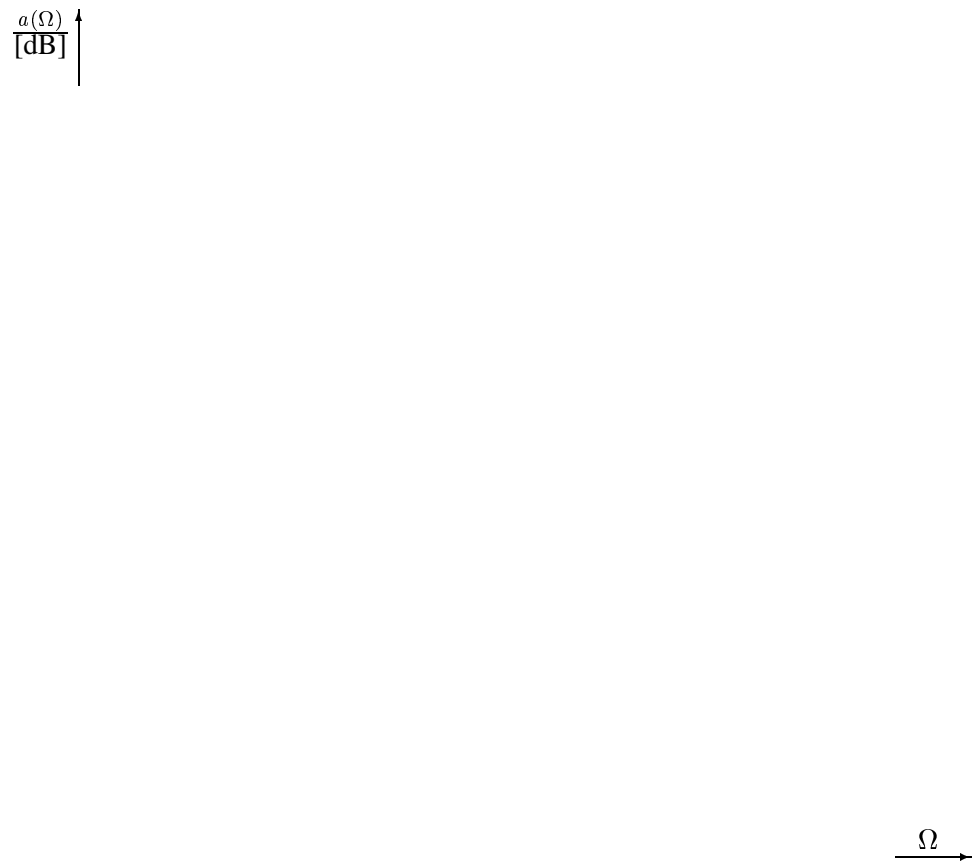


Abbildung 18: Dämpfungsverlauf $a(\Omega)$ des Cauer-Tiefpasses 8-ter Ordnung im Durchlaßbereich

```

komplex_pol frei frei (      /* Startwertedatei */
    0.95 1.0   -1
    0.9  0.9   -1
    0.8  0.7   -1
    0.7  0.3   -1
)
komplex_pol fest frei (      /* Dämpfungspole */
    1.0  1.1   1
    1.0  1.2   1
    1.0  1.4   1
    1.0  2.3   1
)
konst frei (0.006)
ende

z_Approximation(      /* Forderungsdatei */
    Optimierkonstanten (
    Maxbetrag = 0.9999
    Restriktionsgewicht = 1000
    )
    Dae == (
        inter
        0.2 0.3   0.001;
        120;
        0.2 0.3   1.0;
    )
)
    Dae >= (
        inter (
        0.0 0.1   0.001;
        120;
        0.0 0.1   1.0;
        )
    )
    Dae >= (
        inter (
        60.00.2   1.1;
        100;
        60.00.2   3.1415;
        )
    )
)
ende

KOMPLEX_POL FREI FREI (      /* Ergebnis */
    9.85154988331389e-01   1.002204499264427e+00   -1
    9.405694391070023e-01   9.449664975189011e-01   -1
    8.498296077481154e-01   7.679760674447796e-01   -1
    7.268538938660793e-01   3.304735217579657e-01   -1
)

```

5 Beispiele

```
KOMPLEX_POL FEST FREI (          /*Dämpfungspole */
1                               1.107411481650772e+00  1
1                               1.181654666640238e+00  1
1                               1.440261480651449e+00  1
1                               2.301065404726126e+00  1
)
KON FREI (
.006441935403335054
)
ENDE
T-Norm = 1.099823e+00 Abbruchgrund: relative Verbesserung in 4 Schritten < .0001 !
Iterationen = 36
```

5.4 Gleichzeitige Approximation von Dämpfung und Gruppenlaufzeit

Auf den Seiten 293 bis 294 in [3] werden Zahlenwerte für einen Cauertiefpaß 5-ter Ordnung und dessen Dämpfungsfrequenzgang angegeben. Mit TOPT soll versucht werden, basierend auf dem obigen Dämpfungsfrequenzgang, die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion zu ermitteln. Dazu wird aus dem vorgegebenen Verlauf der Dämpfung ein Toleranzschema abgeleitet, daß es im Sinne eines minimalen Maximalfehlers mit einer Approximationsfunktion $a(\Omega)$ zu erfüllen gilt. Als zusätzliche Aufgabe sollen gleichzeitig die Parameterwerte dreier Allpässe 2-ter Ordnung bestimmt werden, die dem Tiefpaß in Serie geschaltet werden. Mit den Allpässen soll wieder erreicht werden, daß die Gruppenlaufzeit der Reihenschaltung im Durchlaßbereich (quasi) konstant wird, was einem linearen Phasengang gleichkommt. Ein Vergleich der von TOPT gelieferten Parameterwerte mit den Zahlenwerten des obigen Beispiels zeigt eine ziemlich genaue Übereinstimmung der in [3] vorgegebenen und der durch die Optimierung gewonnenen Tiefpaßübertragungsfunktionen.

Die Teilsystemfunktionen, welche sich aus den mit TOPT gewonnenen Parametern ergeben, lauten:

$$H_C(z) = K \frac{(z+1)(z+0.382-j0.925)(z-0.046-j0.999)}{(z-0.553)(z-0.5752-j0.6818)(z-0.5506-j0.3979)}$$

$$H_{A_1}(z) = \frac{(1-z0.784e^{j0.695})(1-z0.784e^{-j0.695})}{(z-0.784e^{j0.695})(z-0.784e^{-j0.695})}$$

$$H_{A_2}(z) = \frac{(1-z0.745e^{j0.141})(1-z0.745e^{-j0.141})}{(z-0.745e^{j0.141})(z-0.745e^{-j0.141})}$$

$$H_{A_3}(z) = \frac{(1-z0.754e^{j0.415})(1-z0.754e^{-j0.415})}{(z-0.754e^{j0.415})(z-0.754e^{-j0.415})}$$

$$H(z) = H_C(z) H_{A_1}(z) H_{A_2}(z) H_{A_3}(z)$$

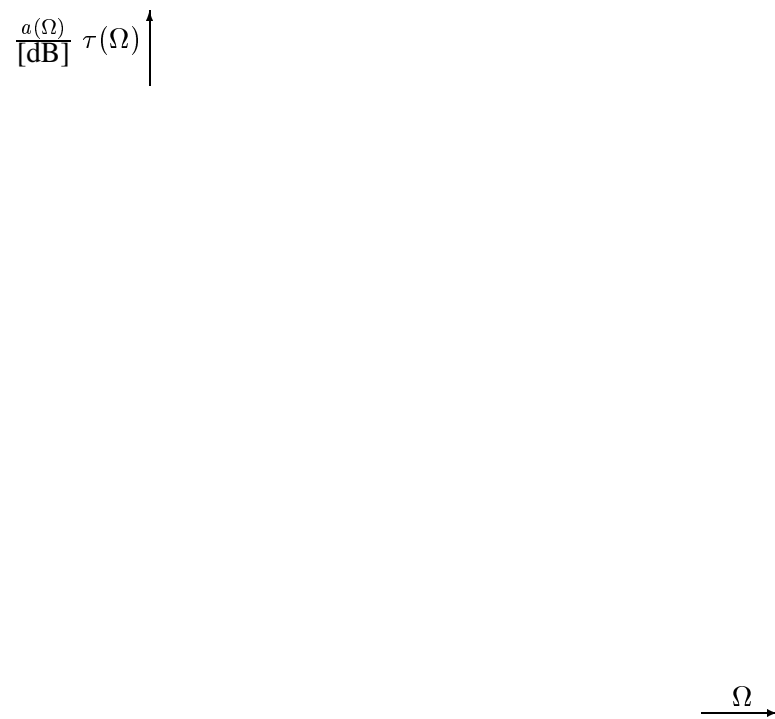


Abbildung 19: Dämpfungs- $a(\Omega)$ und Gruppenlaufzeitverlauf $\tau(\Omega)$ des Gesamtsystems, die sich aus den Startwerten ergeben.

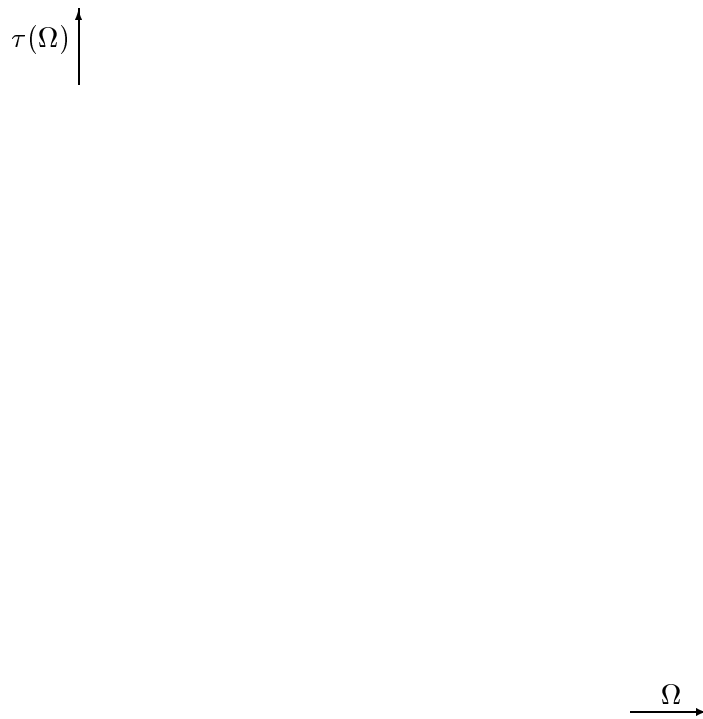


Abbildung 20: Frequenzgang der Dämpfung $a(\Omega)$ des Gesamtsystems (Ergebnis)

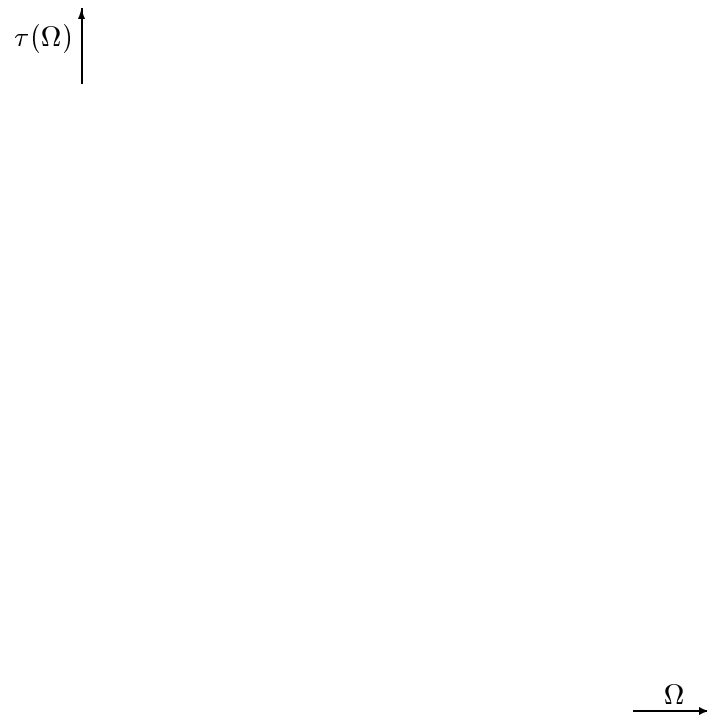


Abbildung 21: Verlauf der Gruppenlaufzeit $\tau(\Omega)$ des minimalphasigen Teilsystems (Cauer-Tiefpaß).

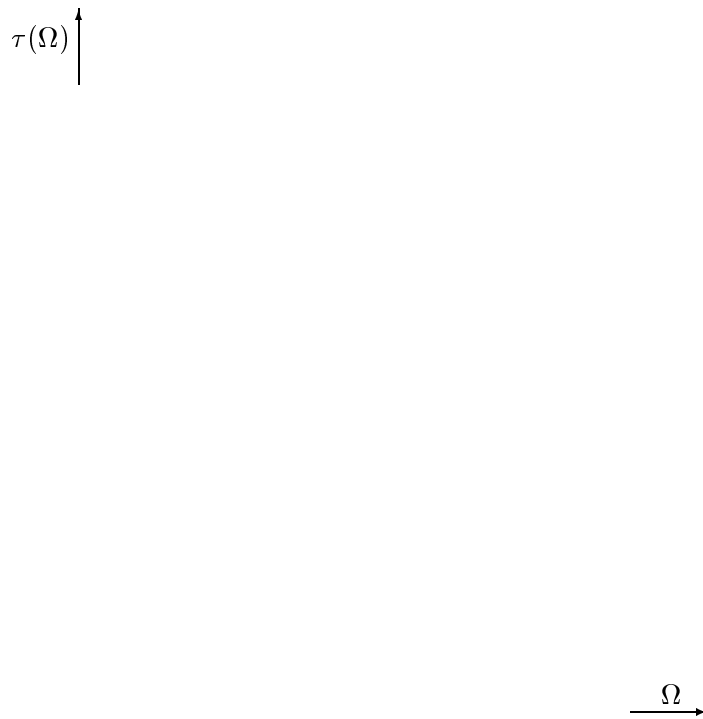


Abbildung 22: Frequenzgang der Gruppenlaufzeit $\tau(\Omega)$ des Gesamtsystems.

5 Beispiele

```

polallpasskompl frei frei (      /* Startwertedatei */
    0.8      0.7      -1
    0.7      -0.14    -1
    0.75     -0.41    -1
)
gruk frei ( 25.0 )
komplex_kar frei frei (
    0.04676726 0.99890581
    -0.38239017 0.92400095
)
komplex_pol frei frei (
    0.5      0.7      -1
    0.5      0.3      -1
)
singl frei (
    -0.6      1
    0.3      -1
)
kon frei (0.009749)
ende

```

```

z_Approximation      /* Forderungsdatei */
Optimierkonstanten (
Maxbetrag = 0.999999
Restriktionsgewicht = 1000)
Dae == (
    inter (
        0.040602  0.001;
        180;
        0.040602  0.78539816;
    )
)
Dae >= (
    inter (
        60.00.5    1.479230;
        100;
        60.00.5    3.1;
    )
)
Gru == (
    inter (
        0.0 0.05  0.001;
        180;
        0.0 0.065 0.78;
    )
)
ende

```

```

POLALLPASSKOMPL FREI FREI (      /* Ergebnis */

```

```

7.84929759810448e-01  6.950010849867503e-01  -1
7.458506759209536e-01  -1.410519828268978e-01  -1
7.540538545096624e-01  -4.151070640227445e-01  -1
)
GRUPPENLAUFZEITKON FREI (
2.123786748259965e+01
)
KOMPLEX_KAR FREI FREI (
-3.82869510847355e-01  9.252860780307454e-01  1
.04678371056164823  9.992216863212153e-01  1
)
KOMPLEX_POL FREI FREI (
8.920339661098648e-01  8.700024107552412e-01  -1
6.793264837558539e-01  6.257920089451917e-01  -1
)
REELL FREI (
-1.001136906456191e+00  1
)
REELL FREI (
5.553024094627896e-01  -1
)
KON FREI (
.00976144134396524
)
ENDE
T-Norm = 1.08987e+00 Abbruchgrund: relative Verbesserung in 4 Schritten < .0001 !
Iterationen = 578

```

5.5 Stabiles Nennerpolynom für die Systemfunktion eines Bandpaßfilters

Ausgehend von der Forderung, einen Bandpaß mit einer Bezugsfrequenz $f_0 = 21,977$ KHz, der normierten Bandbreite $B = 0.091$ und einer maximalen Dämpfung $A_{max} = 0.25$ dB im Durchlaßbereich als digitales Filter zu realisieren, ergibt sich formal die Übertragungsfunktion

$$H(z) = K \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \quad (5.5.127)$$

im z -Bereich. Die Abtastfrequenz sei $F = 60$ KHz. (5.5.127) erhält man durch Anwendung bekannter Transformationsmethoden aus einer bekannten Übertragungsfunktion für den p -Bereich, die formal

$$H(p) = K' \frac{p^2}{b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

lautet und deren Parameter bekannt sind. In [2] Kurseinheit 11 Aufgabe 15.5 b) wird mit gängigen Methoden die Übertragungsfunktion für ein digitales System bestimmt. Das dort angegebene Ergebnis lautet

$$H(z) = 0.0095258 \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^4 + 2.4932z^3 + 3.2669z^2 + 2.1482z + 0.7437} \quad (5.5.128)$$

Führt man den Stabilitätstest, der auf Seite 44 skizziert wird, mit dem Nennerpolynom von Gl. (5.5.128) durch, so erhält man das nachfolgende Schema.

0.743700	2.148200	3.266900	2.493200	1.000000
0.000000	0.294007	0.837306	0.895584	0.446910
0.000000	-0.000000	0.248132	0.344748	0.253493
0.000000	0.000000	-0.000000	0.007290	0.010608
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.005597

Aus dem bekannten Dämpfungsverlauf des Filters im p -Bereich wurde ein Toleranzschema für den z -Bereich abgeleitet. Die Koeffizienten des Nennerpolynoms sollen nun mit TOPT so bestimmt werden, daß die gewonnene Übertragungsfunktion ein stabiles Filter beschreibt. Dabei wurde bei der Approximation des Dämpfungsverlaufs die Stabilitätsbedingung zunächst nicht berücksichtigt.

Ohne gleichzeitige Berücksichtigung der Stabilitätsbedingung für Polynome (4.2.125) werden Koeffizientenwerte errechnet, die zu einem instabilen System führen. Erst die Einführung zusätzlicher Nebenbedingungen bei der Approximation liefert ein stabiles Nennerpolynom. In beiden Fällen wurde von identischen Startwerten ausgegangen. Im Rahmen der erzielbaren Genauigkeit bei der graphischen Darstellung der Dämpfungsverläufe des "stabilen" und des "instabilen" Systems, ist kein Unterschied zwischen den beiden Frequenzgängen erkennbar. Die zu den Stabilitätstests gehörenden Werte lauten

stabiles System:

$$c_4^{(4)} = 0.887861 \quad c_3^{(3)} = 0.394173 \quad c_2^{(2)} = 0.223636 \quad c_1^{(1)} = 0.010076 \quad c_0^{(0)} = 0.005292$$

instabiles System:

$$c_4^{(4)} = 0.800378 \quad c_3^{(3)} = 0.033989 \quad c_2^{(2)} = 0.033336 \quad c_1^{(1)} = -0.149402 \quad c_0^{(0)} = -0.016237$$

Die Systemfunktion des stabilen Filters lautet

$$H(z) = 0.010075 \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^4 + 2.4956z^3 + 3.2702z^2 + 2.15298z + 0.74568}.$$

Aus den Daten des instabilen Ergebnisses folgt

$$H(z) = 0.01179 \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^4 + 2.6884z^3 + 3.8500z^2 + 2.7535z + 1.0219}.$$

Vergleicht man die mit TOPT gewonnenen Übertragungsfunktionen mit Gleichung (5.5.128), so stellt man nur geringe Unterschiede zwischen den Koeffizienten der Nennerpolynome fest. Es ist bekannt, daß winzige Koeffizientenänderungen drastische Nullstellenverschiebungen zur Folge haben können. Dies Beispiel demonstriert, wie sich durch geringe Änderungen der Koeffizientenwerte das Stabilitätsverhalten eines Systems ändern kann, und ohne Stabilitätstests unbrauchbare Resultate ermittelt werden können.

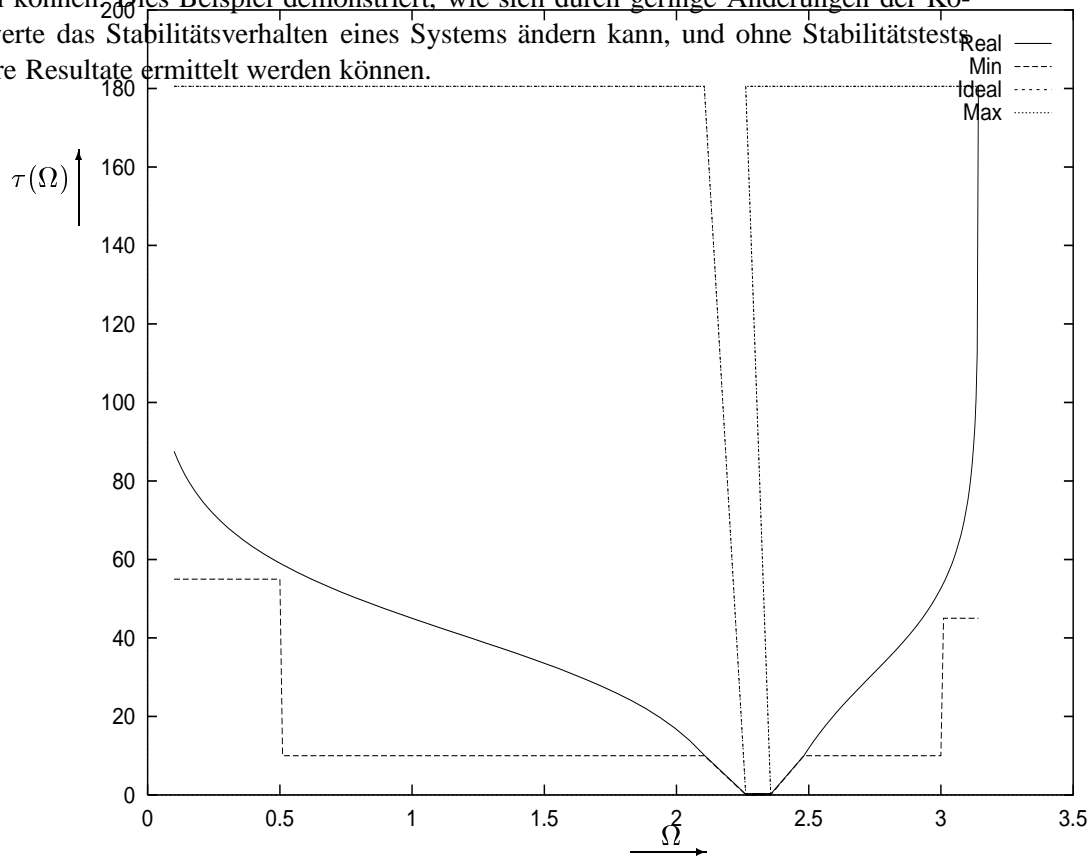
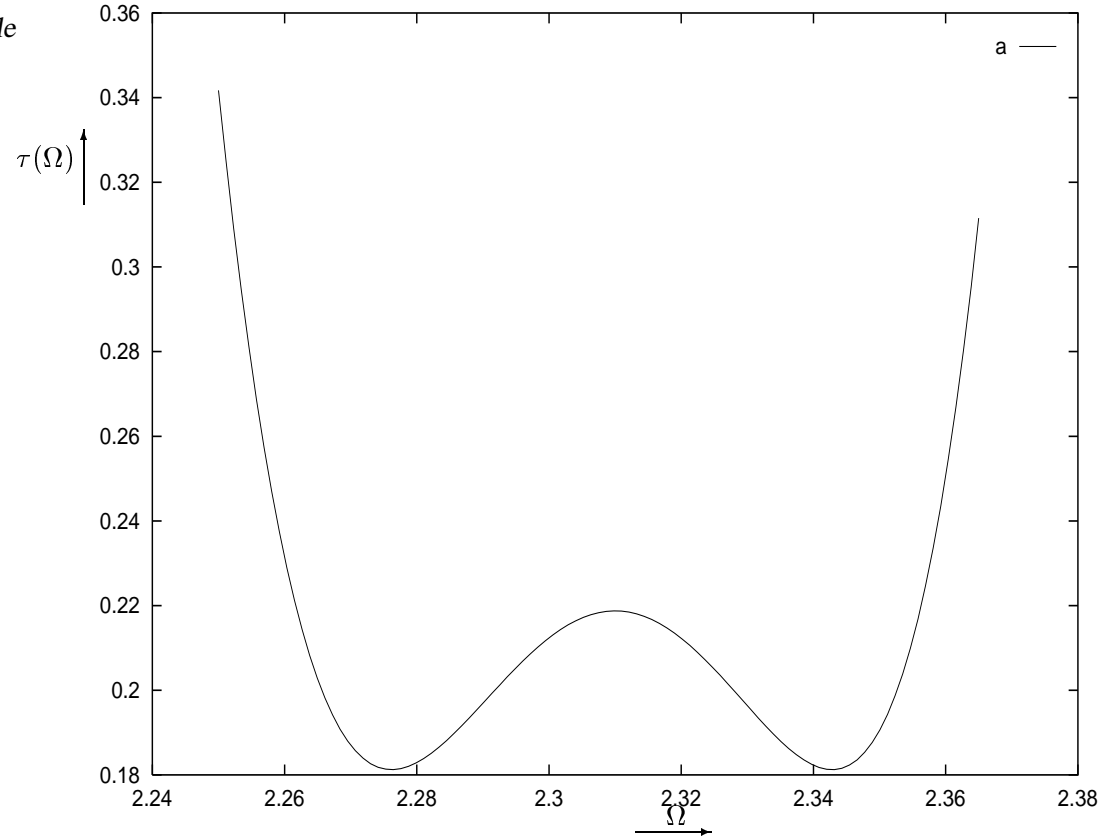


Abbildung 23: Dämpfungsverlauf $a(\Omega)$ des *stabilen* Systems.

Abbildung 24: Durchlaßbereich des *stabilen* Systems.

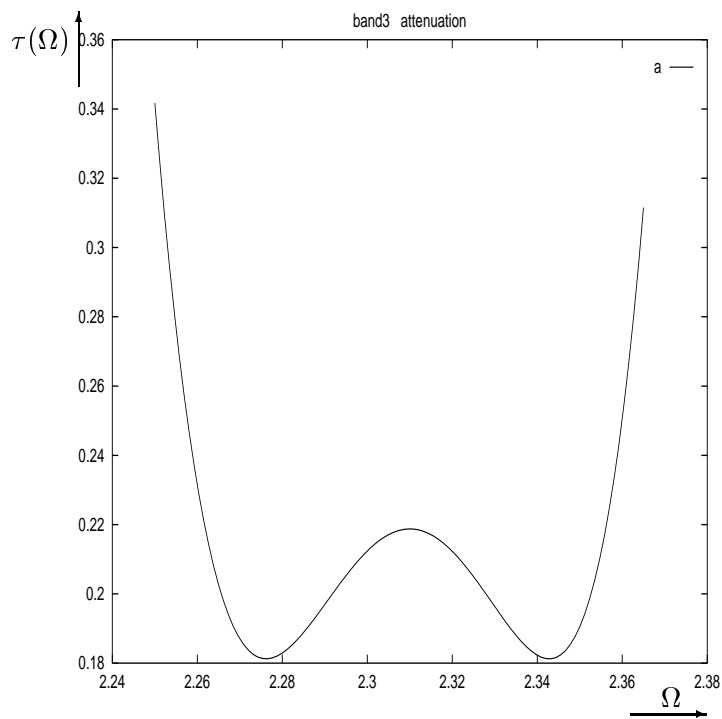


Abbildung 25: Durchlaßbereich des *instabilen* Systems.

5 Beispiele

```

koefffrei -1      (      /* Startwertedatei */
    0.8
    2
    3
    2
    1.1
)

koefffest 1      (
    1.0
    0.0
    -2.0
    0.0
    1.0
)

kon frei (
    0.0095258
)
end

z_Approximation      /* Forderungsdatei */

Optimierkonstanten (
MaxBetrag = 0.0000000 /* Leitet Stabilitätstest ein. Der Wert ist unbedeutend */
Restriktionsgewicht /*1000den Stabilitätstest eines Polynoms */
)

Dae x=
    interx
    55.00.5      0.1;
    30;
    55.00.5      0.50;
)
)

Dae x=
    interx
    10.00.5      0.51;
    30;
    10.00.5      2.104867;
)
)

Dae x=
    interx
    0.2 0.1      2.2619;
    30;
    0.2 0.1      2.3561;
)
)

```

```

)
Dae %=
    inter
    0.0 0.1    2.2619;
    30;
    0.0 0.1    2.3561;
)
)
Dae %=
    inter
    10.0204818;
    30;
    10.00.5    3.0;
)
)

Dae %=
    inter
    45.00.5    3.01;
    30;
    45.00.5    3.1415
;    )
)

ende

KOEFF FREI -1 (    /* instabiles Ergebnis */
8.003779811408565e-01
2.156590024658103e+00
3.015384503022628e+00
2.105592753083694e+00
7.83199360625755e-01
)
KON FREI (
.00923708893531999
)
KOEFF FEST 1 (
1
0.e-01
-2
0.e-01
1
)
ENDE
T-Norm = 1.875569e-01 Abbruchgrund: Eindimensionale Suche nach 50 Schritten gescheitert!
Iterationen = 41

KOEFF FREI -1 (    /* stabiles Ergebnis */

```

5 Beispiele

```
6.620622977173007e-01
1.911547859299533e+00
2.90354140522909e+00
2.215792554482483e+00
8.878611232375576e-01
)
```

```
KON FREI (
.008944855830101371
)
```

```
KOEFF FEST 1 (
1
0.e-01
-2
0.e-01
1
)
```

ENDE

T-Norm = 1.875569e-01 Abbruchgrund: Eindimensionale Suche nach 50 Schritten gescheitert
Iterationen = 55

5.6 Diskretes Psophometerfilter

Bei Heinrichmeyer [6] (Seite 114-117) wird eine optimale Lösung für den Entwurf eines analogen Psophometerfilters vorgestellt und diskutiert. Psophometerfilter werden für die Beurteilung der Qualität von Sprachübertragungen in der Fernmeldetechnik gebraucht. Ein Psophometerfilter bewertet Spektralanteile eines Signals entsprechend ihrer Bedeutung für die Sprachverständlichkeit nach einer Empfehlung der CCITT.

Es soll die Übertragungsfunktion für ein diskretes Psophometerfilter ermittelt werden. Das diskrete System soll mit der Abtastfrequenz $f_A = 20$ KHz arbeiten, so daß der nutzbare Frequenzbereich des digitalen Filters 10 KHz beträgt.

Für den kontinuierlichen Frequenzbereich (ω -Bereich) liegt eine Forderungsdatei vor, in der der Dämpfungsverlauf des analogen Filters beschrieben wird. Die Frequenzwerte aus der vorliegenden Forderungsdatei (ω -Bereich) werden in den diskreten Frequenzbereich transformiert.

Dazu werden zunächst die Frequenzwerte des kontinuierlichen Systems mittels der Vorschrift

$$\psi = j\varphi = j \tan \left(\pi \frac{f}{f_A} \right)$$

in den ψ -Bereich transformiert. Danach erhält man durch Anwendung der *Bilinear-Transformation*²² aus den Frequenzwerten des ψ -Bereichs die entsprechenden Werte für die diskrete Frequenzvariable Ω .

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+\psi}{1-\psi} = \frac{1+j\varphi}{1-j\varphi} \\ &= e^{j2 \arctan(\varphi)} \\ &= e^{j\Omega} \end{aligned}$$

Insgesamt also $\Omega = 2\pi \frac{f}{f_A}$. Zum Beispiel $f = 800$ Hz; $\Omega = 0.2513274124$.

Die Dämpfungswerte werden durch die Frequenztransformation nicht beeinflusst. Auf Seite 101 ist die Forderungsdatei, die Basis für den Entwurf des diskreten Filters ist, angegeben.

Das Approximationsergebnis für ein System 9. Ordnung (wie im kontinuierlichen Fall) lautet

$$H(z) = 0.03285 \frac{(z-1)^4 (z-e^{j1.695})(z-e^{-j1.695})(z-e^{j2.37})(z-e^{-j2.37})}{(z-0.98)(z-z_{\infty 1})(z-z_{\infty 1}^*)(z-z_{\infty 2})(z-z_{\infty 2}^*)(z-z_{\infty 3})(z-z_{\infty 3}^*)(z-z_{\infty 4})(z-z_{\infty 4}^*)}$$

$$z_{\infty 1} = 0.854e^{j0.271} \quad z_{\infty 2} = 0.951e^{j0.087} \quad z_{\infty 3} = 0.465e^{j1.599} \quad z_{\infty 4} = 0.791e^{j1.036}$$

Bild (26) zeigt den Dämpfungsverlauf und Bild (27) den Fehlerverlauf des diskreten Systems 9. Grades. Um den Aufwand einer möglichen Realisierung zu reduzieren, wurde versucht den Grad der Übertragungsfunktion zu verkleinern. Dabei zeigte sich, daß wie im kontinuierlichen Fall eine Gradreduzierung mit einer abnehmenden Fehlerreserve verbunden ist. Für ein Filter 8. Ordnung konnte durch Variation der Startwerte zwei Lösungen gefunden werden. Mit der zweiten Lösung wurde zum einen ein kleinerer Maximalfehler erreicht (vergleiche die Bilder

²²siehe [2] Kurseinheit 10.

(29) und (31)), zum anderen konnte der Zählergrad der Übertragungsfunktion weiter verkleinert werden. Es folgt die Übertragungsfunktion für ein System 8. Ordnung (bessere Lösung).

$$H(z) = 0.01583 \frac{(z-1)(z+1)(z-e^{j0.0061})(z-e^{-j0.0061})(z-e^{j1.952})(z-e^{-j1.952})}{(z-z_{\infty_1})(z-z_{\infty_1}^*)(z-z_{\infty_2})(z-z_{\infty_2}^*)(z-z_{\infty_3})(z-z_{\infty_3}^*)(z-z_{\infty_4})(z-z_{\infty_4}^*)}$$

$$z_{\infty_1} = 0.876e^{j0.259} \quad z_{\infty_2} = 0.958e^{j0.089} \quad z_{\infty_3} = 0.748e^{j0.724} \quad z_{\infty_4} = 0.87e^{j1.146}$$

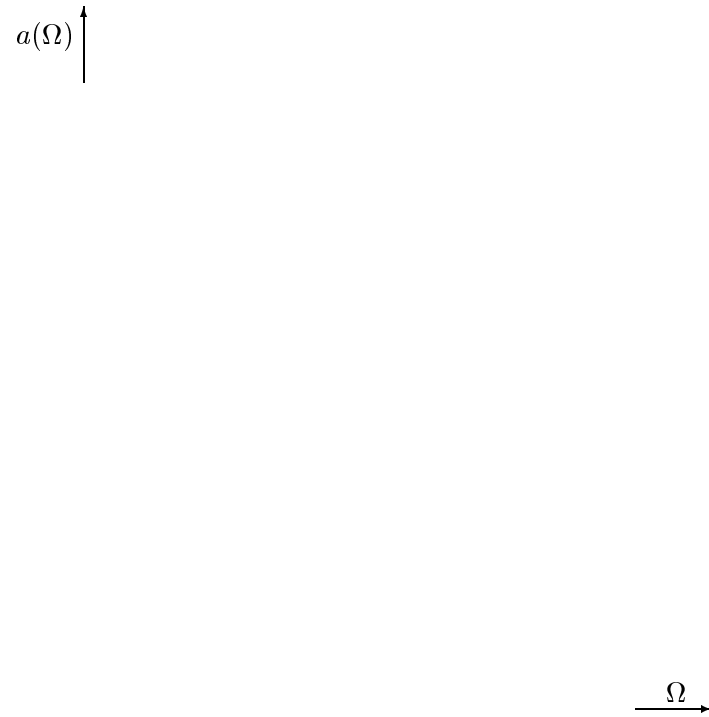


Abbildung 26: Dämpfungsverlauf $a(\Omega)$ des diskreten Psophometerfilters (9. Grades).


$$\xrightarrow{\Omega}$$

Abbildung 27: Fehlerverlauf des diskreten Psophometerfilters (9. Grades).

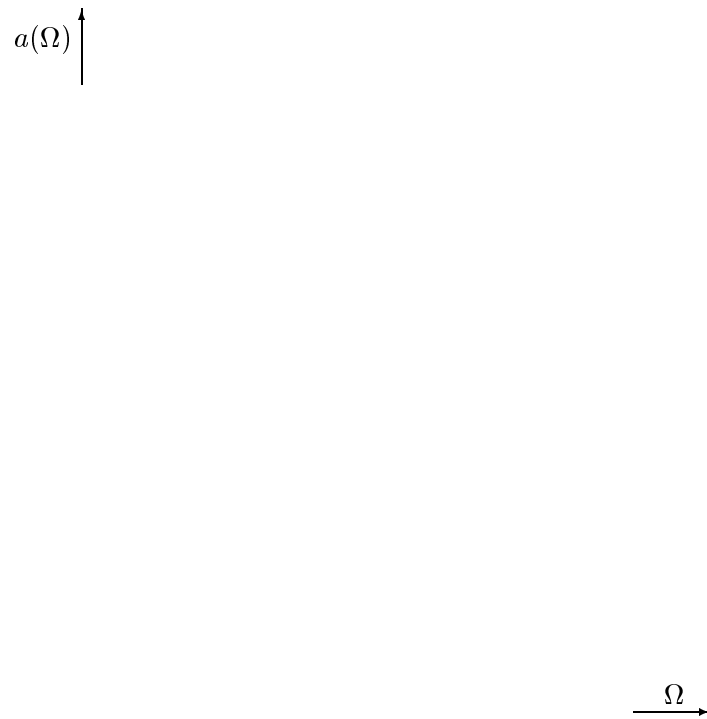


Abbildung 28: Dämpfungsverlauf $a(\Omega)$ des diskreten Psophometerfilters (8. Grades).


$$\xrightarrow{\Omega}$$

Abbildung 29: Fehlerverlauf des diskreten Psophometerfilters (8. Grades).

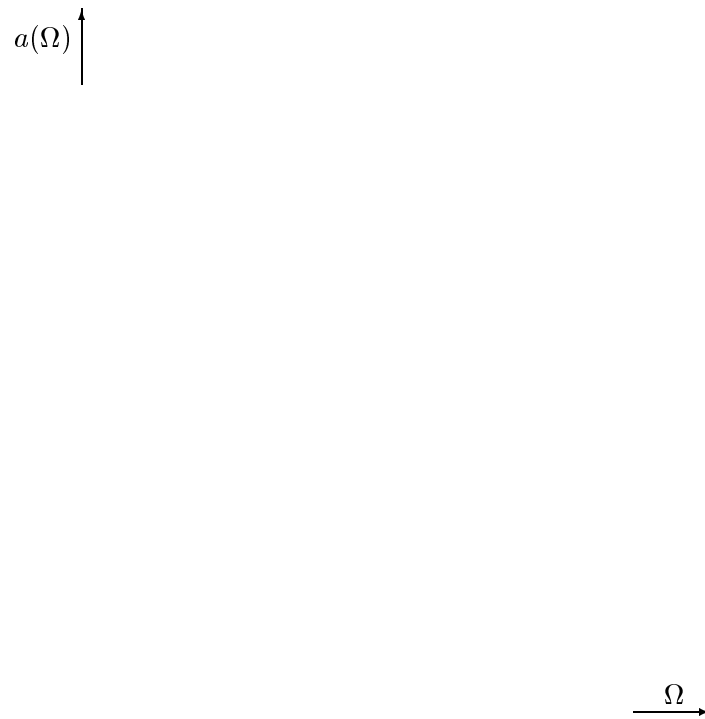


Abbildung 30: Dämpfungsverlauf $a(\Omega)$ des Psophometerfilters (8. Grades, verbesserte Lösung).


$$\xrightarrow{\Omega}$$

Abbildung 31: Fehlerverlauf des Psophometerfilters (8. Grades, verbesserte Lösung).

5 Beispiele

```

komplexfrei frei (      /* Startwertedatei */
    0.8 .05 -1
    0.8 0.1 -1
    0.8 0.4 -1
    0.8 0.7 -1
)
reell frei (
    0.5 -1
)
reell fest (
    1 4
)
komplexfest frei (
    1 1.571 1
    1 2 1
)
ende

FKON FEST ( .03285285952391428 ) /* von FIX */
KOMPLEX_POL FREI FREI (      /* Ergebnis */
8.54342307043979e-01 -2.71263956637347e-01 -1 /* Filter 9-ter Ordnung */
9.517073747636765e-01 .08796242364664003 -1
4.657420832051914e-01 1.599012505252499e+00 -1
7.918469786007128e-01 1.036116243732406e+00 -1
)
REELL FREI (
9.802563931409034e-01 -1
)
KOMPLEX_POL FEST FREI (
1 1.695280108201005e+00 1
1 2.370036123137424e+00 1
)
REELL FEST (
1 4
)
ENDE
T-Norm = 2.695191e-01 Abbruchgrund: Lineare Suche nach 50 Schritten gescheitert!
Iterationen = 53

```

```

z_Approximation /* Psophometerfilter */      /* Forderungsdatei */
logint
Fixpunkt ( 0 0.251327412 ) /* fester Wert bei 800 Hz Abtastfrequenz 20 KHz*/
Optimierkonstanten (
Maxbetrag = 0.9999999999
Restriktionsgewicht = 1000
)
Daempfung >= (
  Intervall (
    85  0      0.001047198;
    10;
    85  0      0.00523597;
  )
  Intervall (
    61  0      0.00523597;
    30;
    61  0      0.015707963;
  )
)
Daempfung == (
  spline 30 stufig (
    63  2      0.015707963;
    20;
    41  2      0.031415927;
    10;
    29  2      0.04712389;
    10;
    21  2      0.062831853;
    15;
    10.6  1    0.094247780;
    15;
    6.3  1     0.125663706;
    15;
    3.6  1     0.157079633;
    10;
    2.0  1     0.188495559;
    10;
    0.0  1     0.251327412; /* FIX */
    10;
    -1.0  1    0.314159265;
    10;
    0.0  1     0.376991118;
    10;
    1.3  1     0.471238898;
    10;
    3    1     0.628318531;
    15;
    4.2  1     0.785398164;
    15;
  )
)

```

5 Beispiele

```

        5.6    2    0.942477796;
        15;
        8.5    3    1.099557429;
        15;
        15     3    1.256637062;
        10;
        22.8   3    1.382300768;
        10;
        27.2   3    1.445132621;
        10;
        31.6   3    1.507964474;
        10;
        36     3    1.570796327;
    )
)
Daempfung >= ( /* oberer Sperrbereich */
    Intervall (
        36    0    1.570796327;
        20;
        36    0    1.884955592;
    )
    Polygon (
        43    0    1.884955592;
        20;
        43    0    3.141592654;
    )
)
ende

FKON FEST ( .02160969582543365 ) /* von FIX */
KOMPLEX_POL FREI      FREI (          /* Ergebnis */
7.770109253259465e-01 .01312027119047772    -1    /* Filter 8-ter Ordnung */
6.932448484674651e-01 .01009391129508749    -1
9.482973438731042e-01 .04038024229076333    -1
8.021559106800057e-01 1.088229168022782e+00   -1
)
KOMPLEX_POL FEST      FREI (
1                      1.797504666537727e+00    1
1                      2.431749715509262e+00    1
)
KON FREI (
1
)
REELL FEST (
1 4
)
ENDE
T-Norm = 5.567636e-01 Abbruchgrund: relative Verbesserung in 4 Schritten < .0001 !
Iterationen = 95

```

```

komplexfrei frei (      /* Startwertedatei */
    0.8 .05 -1          /* Filter 8-ter Ordnung */
    0.8 0.1 -1
    0.8 0.4 -1
    0.8 0.7 -1
)
reell frei (
    -1.0 1
)
reell fest (
    1 1
)
komplexfest frei (
    1 0.006 1
    1 2 1
)
konst frei (
1
)
ende

FKON FEST ( .0158375697053789 ) /* von FIX */
KOMPLEX_POL FREI      FREI (      /* besseres Ergebnis */
8.763580937973897e-01 2.598292447273432e-01 -1 /* Filter 8-ter Ordnung */
9.581922021359908e-01 .08981759559526513 -1
7.480202731330828e-01 7.242001839174014e-01 -1
8.707259813748285e-01 1.146096531073459e+00 -1
)
REELL FREI (
-1.0000000000000013e+00 1
)
KOMPLEX_POL FEST      FREI (
1 .008153346553536991 1
1 1.952513571499141e+00 1
)
KON FREI (
1
)
REELL FEST (
1 1
)
ENDE
T-Norm = 4.447648e-01 Abbruchgrund: Lineare Suche nach 50 Schritten gescheitert!
Iterationen = 25

```

6 Zusammenfassung

In Kapitel 2 und 3 werden die für den Entwurf digitaler Filter notwendigen theoretischen Zusammenhänge und Definitionen angegeben. Kapitel 4 soll einen Einblick in die Problematik der Tschebyscheff-Approximation vermitteln. Die für den Filterentwurf notwendigen Approximationsfunktionen und deren Ableitungen nach den Parametern findet man ebenfalls in Kapitel 4. Die dort angegebenen Funktionen waren Basis für eine Implementierung in TOPT. Beispiele, die die Anwendungsmöglichkeiten von TOPT aufzeigen sollen, sind in Kapitel 5 zusammengestellt. Die in den Beispielen angegebenen "Startwerte-", "Forderungs-" und "Ergebnisdateien" wurden mit aufgelistet, um dem Anwender ergänzend zur Bedienungsanleitung die Handhabung des Programms zu verdeutlichen.

Das Programm TOPT wurde von mir um die für den Entwurf digitaler Filter notwendigen Funktionen (Unterprogramme) erweitert. Vom dem Programm TOPT gibt es eine MS-Windows Version und eine Version, die sich leicht auf Rechnersysteme mit dem Betriebssystem UNIX oder vergleichbaren Betriebssystemen installieren läßt. Das Programm TOPT ist weitgehend modular aufgebaut, so daß die Implementation der Approximationsfunktionen für die z -Ebene relativ unkompliziert war. Zur Implementierung der Stabilitätstests waren jedoch umfangreiche Umstellungen und Erweiterungen der Funktionen zur Analyse der Eingabedaten notwendig (`neuinp.c`, `toptyacc.y`). So wird der Stabilitätstest für biquadratische Allpässe und Polynome zur Zeit nur von der MS-Windows Version durchgeführt. Überlegenswert erscheint, in die UNIX-Version von TOPT den von H. Schüssler angegebenen Stabilitätstest für Polynome zu implementieren, da dieser die auf Seite 46 angegebenen Vorteile aufweist.

Sämtliche Programmierarbeiten wurden von mir auf einem IBM-kompatiblen PC mit dem Betriebssystem LINUX und mit Hilfe der bekannten GNU-Tools bewerkstelligt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde von mir unter anderem ein script erstellt (`teltpplot`), mit dem die vom TOPT erzeugten Graphikdaten für eine flexible Darstellung mit dem Programm *gnuplot* aufbereitet werden. Das script ist in der von John K. Ousterhout [13] entwickelten Kommandosprache *tcltk* entwickelt worden. Im Anhang findet man ein Listing dieses scripts, sowie eine weniger umfangreiche Kurzfassung, die ohne *tcltk* arbeitet.

Ein weiterer Teil meiner Arbeit war die Erstellung einer interaktiven graphischen Oberfläche für TOPT, die ebenfalls mit dem toolkit *tcltk* von John K. Osterhout entwickelt wurde. Hierzu waren Erweiterungen in TOPT notwendig, um eine Interprozeß-Kommunikation für die Übermittlung der Graphikdaten und den Austausch von Steuerkommandos zwischen TOPT und dem Graphikprozeß zu ermöglichen. Die graphische Oberfläche erleichtert einerseits die Handhabung von TOPT, andererseits wird die Visualisierung von Approximationsvorgängen ermöglicht.

Ein Listing des von mir erstellten scripts findet man ebenfalls im Anhang. Um *tktopt* nutzen zu können, muß neben einer X-Windows Umgebung außerdem der seit einiger Zeit verfügbare Interpreter *blt_wish* auf einer Workstation verfügbar sein. Ferner werden von *tktopt* automatisch einige subroutinen aus dem toolkit eingebunden, die einen Teil der Funktionalität von *tktopt* erst ermöglichen.

Das Programm TOPT, das toolkit "tcltk", die scripts "tcltplot" und "tktopt" sowie eine Bedienungsanleitung des Programms TOPT können vom WWW-Server <http://ES-sun2.fernuni-hagen.de> der Fernuniversität Hagen abgerufen werden.

Literatur

- [1] Wupper, Horst: Einführung in die digitale Signalverarbeitung, Heidelberg: Hüthig 1989, ELTEX ISBN 3-7785-1442-3
- [2] Wupper, Horst: Studienkurs Digitale Signalverarbeitung I/II, Fernuniversität Hagen 1983/84
- [3] Schüßler, Hans W.: Digitale Signalverarbeitung - Band I, Springer-Verlag: Berlin Heidelberg New York 1988, ISBN 3-540-18438-4
- [4] Schüßler, Hans W.: A stability theorem for diskrete systems. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 24 (1976) 87-89.
- [5] Steffen, P.: An algorithm for testing stability of diskrete systems. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 25 (1977) 454-456.
- [6] Heinrichmeyer, J. F.: Beiträge zur Tschebyscheff-Approximation zum Systementwurf, Dissertation, Erlangen 1989
- [7] Habeta, Klaus: Höhere Mathematik für Ingenieure und Physiker, Stuttgart: Klett, Band 2, 1978 ISBN 3-12-983270-X
- [8] Gaißmaier, B., Hohnecker, W., Unbehauen, R., Wehrhahn, E.: Optimierungsverfahren für den Schaltungsentwurf, Überblick und vergleichende Beurteilung. Frequenz, Band 29, Heft 4/5 [1975], S. 112-117 und 124-133.
- [9] Fischer, H. J.: Erfahrungen in der Optimierung von Netzwerkfunktionen. Frequenz, Band 36, Heft 9 [1982], 241-246.
- [10] Jury, E.I.: Theory and application of the z-transform method. Huntington, New York: Krieger 1973.
- [11] Åström, K.J.: Introduction to stochastic control theory. New York: Academic Press 1970.
- [12] Lawson, Charles L.: Solving Least Squares Problems. Prentic-Hall, Englewood Cliffs 1974
- [13] Ousterhout, John K.: Tcl and the Tk Toolkit. Addison-Wesley Publishing Company 1994, ISBN 0-201-63337-X