Ujian Tengah Semester

Tahun 2021

MATERI

1. Menyelesaikan pertidaksamaan yang melibatkan nilai mutlak.
2. Mensketsa grafik fungsi.
3. Fungsi komposisi dan menentukan domain dan rangenya.
4. Mencari nilai limit kiri dan nilai limit kanan fungsi.
5. Mencari nilai limit fungsi di tak hingga.
6. Menentukan kekontinuan fungsi pada suatu titik.
7. Menyelesaikan masalah turunan implisit.
8. Menyelesaikan permasalahan maksimum dan minimum.

SOAL

1. Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ dan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ dari:
   a. $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$ pada titik $(1, 1)$.
   b. $y^4 + \cos(x^2y^3) + 3y^2 + x^2 = 5$ pada titik $(0, 1)$.
2. Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 - 3$. Tentukanlah:
   a. $h(x)$ jika diketahui $h(x) = (f \circ g)(x)$.
   b. Domain dari $h(x)$.
   c. Apakah $h(x)$ termasuk fungsi ganjil, genap atau bukan keduanya?
   d. Gambar grafik dari $h(x)$.
3. Tangki tanpa tutup bervolume 1125 cm^3, dengan alas persegi bersisi x cm dan kedalaman y cm. Permukaan atas tangki sejajar dengan tanah. Tangki akan dibangun untuk menampung air hujan. Biaya pembuatan tangki tidak hanya melibatkan material pembuatan tangki namun juga biaya penggalian tanah yang sebanding dengan hasil kali xy. Jika biaya total adalah $C = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$ rupiah per cm^2, berapakah ukuran x dan y yang meminimumkan biaya?
4. Tentukan nilai a dan b agar fungsi berikut kontinu untuk setiap bilangan real x.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5b, & x \leq 0, \\ x^2 + 3a - b, & 0 < x \leq 2, \\ 3x - 5, & x > 2. \end{cases}$$

5. Diketahui panjang jalan antara kota A dan kota B adalah 100 km, dengan batas kecepatan tempuh adalah 100 km/jam. Misalkan mobil X berangkat dari kota A menuju kota B pada jam keberangkatan yang sama dengan mobil Y berangkat dari kotab B menuju kota A. Kedua mobil berpapasan disuatu titik setelah menempuh 30 menit waktu perjalanan.
   a. Tunjukkan bahwa salah satu mobil memiliki kecepatan tempuh melebihi 100 km/jam.
   b. Andaikan selama perjalanan kecepatan tempuh mobil X tidak pernah melebihi 90 km/jam, berapakah kecepatan tempuh sesaat mobil Y selama perjalanan?

PEMBAHASAN

1. a. Pertama akan dicari $\dfrac{dy}{dx}$ dari $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$ pada titik $(1, 1)$.
   Turunkan secara implisit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3\right) &= \frac{d}{dx}(0) \\ \iff \frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(3x^2y\right) + \frac{d}{dx}\left(-6xy^2\right) + \frac{d}{dx}\left(2y^3\right) &= 0 \end{aligned}$$

   Selesaikan masing-masing turunan:

   1)
$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$$

   2)
$$\frac{d}{dx}\left(3x^2y\right) = \frac{d}{dx}\left(3x^2\right)y + 3x^2\frac{d}{dx}(y) = 6xy + 3x^2y'$$

   3)
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(-6xy^2\right) &= \frac{d}{dx}(-6x)y^2 + (-6x)\frac{d}{dx}\left(y^2\right) && \text{aturan perkalian} \\ &= (-6)y^2 - 6x\left(2y\frac{d}{dx}(y)\right) && \text{aturan rantai} \\ &= -6y^2 - 12xyy' \end{aligned}$$

   4) Gunakan aturan rantai

$$\frac{d}{dx}\left(2y^3\right) = 6y^2\frac{d}{dx}(y) = 6y^2y'$$

   Diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(3x^2y\right) + \frac{d}{dx}\left(-6xy^2\right) + \frac{d}{dx}\left(2y^3\right) &= 0 \\ \iff 3x^2 + \left(6xy + 3x^2y'\right) + \left(-6y^2 - 12xyy'\right) + 6y^2y' &= 0 \end{aligned}$$

Subtitusi $x = 1$ dan $y = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} & 3(1)^2 + (6(1)(1) + 3(1)^2 y') + (-6(1)^2 - 12(1)(1)y') + 6(1)^2 y' = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & 3 + 6 + 3y' - 6 - 12y' + 6y' = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & 3 - 3y' = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & y' = 1 \end{aligned}$$

Diperoleh $\dfrac{dy}{dx}$ dari $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$ pada titik $(1, 1)$ adalah 1.
Kedua akan dicari $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ dari $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$ pada titik $(1, 1)$.
Sebelumnya telah diperoleh

$$3x^2 + (6xy + 3x^2y') + (-6y^2 - 12xyy') + 6y^2y' = 0$$

Turunkan lagi secara implisit

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left(3x^2 + (6xy + 3x^2y') + (-6y^2 - 12xyy') + 6y^2y'\right) = \frac{d}{dx}(0) \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) + \frac{d}{dx}(6xy) + \frac{d}{dx}\left(3x^2y'\right) + \frac{d}{dx}\left(-6y^2\right) + \frac{d}{dx}(-12xyy') + \frac{d}{dx}\left(6y^2y'\right) = 0 \end{aligned}$$

Selesaikan masing-masing turunan

1)
$$\frac{d}{dx}\left(3x^2\right) = 6x$$

2)
$$\frac{d}{dx}(6xy) = \frac{d}{dx}(6x)y + 6x\frac{d}{dx}(y) = 6y + 6xy'$$

3)
$$\frac{d}{dx}\left(3x^2y'\right) = \frac{d}{dx}\left(3x^2\right)y' + 3x^2\frac{d}{dx}(y') = 6xy' + 3x^2y''$$

4)
$$\frac{d}{dx}\left(-6y^2\right) = -12y\frac{d}{dx}(y) = -12yy'$$

5)
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(-12xyy') &= \frac{d}{dx}(-12xy)y' + (-12xy)\frac{d}{dx}(y') && \text{aturan perkalian} \\ &= \frac{d}{dx}(-12xy)y' - 12xyy'' \\ &= \left(\frac{d}{dx}(-12x)y + (-12x)\frac{d}{dx}(y)\right)y' - 12xyy'' && \text{aturan perkalian} \\ &= (-12y - 12xy')y' - 12xyy'' \end{aligned}$$

6)
$$\frac{d}{dx}\left(6y^2y'\right) = \frac{d}{dx}\left(6y^2\right)y' + 6y^2\frac{d}{dx}(y') = \left(12y\frac{d}{dx}(y)\right)y' + 6y^2y'' = 12y(y')^2 + 6y^2y''$$

Diperoleh

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}\left(3x^2\right)+\frac{d}{dx}(6xy)+\frac{d}{dx}\left(3x^2y'\right)+\frac{d}{dx}\left(-6y^2\right)+\frac{d}{dx}(-12xyy')+\frac{d}{dx}\left(6y^2y'\right)=0 \\
\iff & (6x)+(6y+6xy')+(6xy'+3x^2y'')+(-12yy')+((-12y-12xy')y'-12xyy'') \\
& +(12y(y')^2+6y^2y'')=0
\end{aligned}
$$

Subtitusi $x=1$, $y=1$, dan $y'=1$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
& (6x)+(6y+6xy')+(6xy'+3x^2y'')+(-12yy')+((-12y-12xy')y'-12xyy'') \\
& +(12y(y')^2+6y^2y'')=0 \\
\iff & (6(1))+(6(1)+6(1)(1))+(6(1)(1)+3(1)^2y'')+(-12(1)(1)) \\
& +((-12(1)-12(1)(1))(1)-12(1)(1)y'')+(12(1)(1)^2+6(1)^2y'')=0 \\
\iff & 6+6+6+6+3y''-12-12-12-12y''+12+6y''=0 \\
\iff & -3y''=0 \iff y''=0
\end{aligned}
$$

Diperoleh $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ dari $x^3+3x^2y-6xy^2+2y^3=0$ pada titik $(1,1)$ adalah 0.

$\therefore \dfrac{dy}{dx}$ dan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ dari $x^3+3x^2y-6xy^2+2y^3=0$ pada titik $(1,1)$ adalah 1 dan 0.

---

b. Pertama akan dicari $\dfrac{dy}{dx}$ dari $y^4+\cos\left(x^2y^3\right)+3y^2+x^2=5$ pada titik $(0,1)$.

Turunkan secara implisit:

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}\left(y^4+\cos\left(x^2y^3\right)+3y^2+x^2\right)=\frac{d}{dx}(5) \\
\iff & \frac{d}{dx}\left(y^4\right)+\frac{d}{dx}\left(\cos\left(x^2y^3\right)\right)+\frac{d}{dx}\left(3y^2\right)+\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=0
\end{aligned}
$$

Selesaikan masing-masing turunan:

1)
$$\frac{d}{dx}\left(y^4\right)=4y^3\frac{d}{dx}(y)=4y^3y'$$

2)
$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\cos\left(x^2y^3\right)\right) &= -\sin\left(x^2y^3\right)\frac{d}{dx}\left(x^2y^3\right) && \text{aturan rantai} \\
&= -\sin\left(x^2y^3\right)\left(\frac{d}{dx}\left(x^2\right)y^3+x^2\frac{d}{dx}\left(y^3\right)\right) && \text{aturan perkalian} \\
&= -\sin\left(x^2y^3\right)\left(2xy^3+x^2\left(3y^2\frac{d}{dx}(y)\right)\right) && \text{aturan rantai} \\
&= -\sin\left(x^2y^3\right)\left(2xy^3+3x^2y^2y'\right)
\end{aligned}
$$

3)
$$\frac{d}{dx}\left(3y^2\right)=6y\frac{d}{dx}(y)=6yy'$$

4)

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(y^4\right) + \frac{d}{dx}\left(\cos\left(x^2y^3\right)\right) + \frac{d}{dx}\left(3y^2\right) + \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &4y^3y' + \left(-\sin\left(x^2y^3\right)(2xy^3 + 3x^2y^2y')\right) + 6yy' + 2x = 0 \end{aligned}$$

Subtitusi $x = 0$ dan $y = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} &4y^3y' + \left(-\sin\left(x^2y^3\right)(2xy^3 + 3x^2y^2y')\right) + 6yy' + 2x = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &4(1)^3y' + \left(-\sin\left((0)^2(1)^3\right)(2(0)(1)^3 + 3(0)^2(1)^2y')\right) + 6(1)y' + 2(0) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &4y' + (-\sin(0)(0+0)) + 6y' + 0 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &10y' = 0 \iff y' = 0 \end{aligned}$$

Diperoleh $\frac{dy}{dx}$ dari $y^4 + \cos\left(x^2y^3\right) + 3y^2 + x^2 = 5$ pada titik $(0, 1)$ adalah 0.

c. Kedua akan dicari $\frac{d^2y}{dx^2}$ dari $y^4 + \cos\left(x^2y^3\right) + 3y^2 + x^2 = 5$ pada titik $(0, 1)$.
Sebelumnya telah diperoleh

$$4y^3y' + \left(-\sin\left(x^2y^3\right)(2xy^3 + 3x^2y^2y')\right) + 6yy' + 2x = 0$$

Turunkan secara implisit:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(4y^3y' + \left(-\sin\left(x^2y^3\right)(2xy^3 + 3x^2y^2y')\right) + 6yy' + 2x\right) = \frac{d}{dx}(0) \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{d}{dx}\left(4y^3y'\right) + \frac{d}{dx}\left(-\sin\left(x^2y^3\right)(2xy^3 + 3x^2y^2y')\right) + \frac{d}{dx}(6yy') \\ &+ \frac{d}{dx}(2x) = 0 \end{aligned}$$

Selesaikan masing-masing turunan:

1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(4y^3y'\right) &= \frac{d}{dx}\left(4y^3\right)y' + 4y^3\frac{d}{dx}(y') && \text{aturan perkalian} \\ &= \left(12y^2\frac{d}{dx}(y)\right)y' + 4y^3y'' && \text{aturan rantai} \\ &= 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(6yy') &= \frac{d}{dx}(6y)y' + 6y\frac{d}{dx}(y') && \text{aturan perkalian} \\ &= 6\frac{d}{dx}(y)y' + 6yy'' \\ &= 6(y')^2 + 6yy'' \end{aligned}$$

3)

$$\frac{d}{dx}(2x) = 2$$

4)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\big(-\sin\big(x^2y^3\big)(2xy^3 + 3x^2y^2y')\big) \\
&= \frac{d}{dx}\big(-\sin\big(x^2y^3\big)\big)(2xy^3 + 3x^2y^2y') + \big(-\sin\big(x^2y^3\big)\big)\frac{d}{dx}\big(2xy^3 + 3x^2y^2y'\big) \quad * \\
&= \big(-\cos\big(x^2y^3\big)\big(2xy^3 + x^2 3y^2y'\big)\big)(2xy^3 + 3x^2y^2y') \\
&\quad + \big(-\sin\big(x^2y^3\big)\big)\big(2y^3 + 12xy^2y' + 6x^2y(y')^2 + 3x^2y^2y''\big) \\
&= \Big(-\cos\big(x^2y^3\big)\big(2xy^3 + x^2 3y^2y'\big)^2\Big) \\
&\quad + \big(-\sin\big(x^2y^3\big)\big)\big(2y^3 + 12xy^2y' + 6x^2y(y')^2 + 3x^2y^2y''\big)
\end{aligned}$$

$*$ Selesaikan masing-masing turunan ini

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\big(-\sin\big(x^2y^3\big)\big) &= -\cos\big(x^2y^3\big)\frac{d}{dx}\big(x^2y^3\big) && \text{aturan rantai} \\
&= -\cos\big(x^2y^3\big)\left(\frac{d}{dx}\big(x^2\big)y^3 + x^2\frac{d}{dx}\big(y^3\big)\right) && \text{aturan perkalian} \\
&= -\cos\big(x^2y^3\big)\left(2xy^3 + x^2 3y^2\frac{d}{dx}(y)\right) && \text{aturan rantai} \\
&= -\cos\big(x^2y^3\big)\big(2xy^3 + x^2 3y^2y'\big)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\big(2xy^3 + 3x^2y^2y'\big) \\
&= \frac{d}{dx}\big(2xy^3\big) + \frac{d}{dx}\big(3x^2y^2y'\big) \\
&= \left(\frac{d}{dx}(2x)y^3 + 2x\frac{d}{dx}\big(y^3\big)\right) + \left(\frac{d}{dx}\big(3x^2y^2\big)y' + 3x^2y^2\frac{d}{dx}(y')\right) \\
&= \left(2y^3 + 2x(3y^2)\frac{d}{dx}(y)\right) + \left(\left(\frac{d}{dx}\big(3x^2\big)y^2 + 3x^2\frac{d}{dx}\big(y^2\big)\right)y' + 3x^2y^2y''\right) \\
&\quad = (2y^3 + 6xy^2y') + \left(\left(6xy^2 + 3x^2 2y\frac{d}{dx}(y)\right)y' + 3x^2y^2y''\right) \\
&\quad = 2y^3 + 6xy^2y' + 6xy^2y' + 6x^2y(y')^2 + 3x^2y^2y'' \\
&\quad = 2y^3 + 12xy^2y' + 6x^2y(y')^2 + 3x^2y^2y''
\end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(4y^3y'\right)+\frac{d}{dx}\left(-\sin\left(x^2y^3\right)\left(2xy^3+3x^2y^2y'\right)\right)+\frac{d}{dx}(6yy')\\
&+\frac{d}{dx}(2x)=0\\
\iff&\left(12y^2(y')^2+4y^3y''\right)+\left(-\cos\left(x^2y^3\right)\left(2xy^3+x^23y^2y'\right)^2\right)\\
&+\left(-\sin\left(x^2y^3\right)\right)\left(2y^3+12xy^2y'+6x^2y(y')^2+3x^2y^2y''\right)\\
&+\left(6(y')^2+6yy''\right)+2=0
\end{aligned}$$

Subtitusi $x=0$, $y=1$, dan $y'=0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left(12y^2(y')^2+4y^3y''\right)+\left(-\cos\left(x^2y^3\right)\left(2xy^3+x^23y^2y'\right)^2\right)\\
&+\left(-\sin\left(x^2y^3\right)\right)\left(2y^3+12xy^2y'+6x^2y(y')^2+3x^2y^2y''\right)\\
&+\left(6(y')^2+6yy''\right)+2=0\\
\iff&\left(12(1)^2(0)^2+4(1)^3y''\right)+\left(-\cos\left((0)^2(1)^3\right)\left(2(0)(1)^3+(0)^23(1)^2(1)\right)^2\right)\\
&+\left(-\sin\left((0)^2(1)^3\right)\right)\left(2(1)^3+12(0)(1)^2(0)'+6(0)^2(1)(0)^2+3(0)^2(1)^2y''\right)\\
&+\left(6(0)^2+6(1)y''\right)+2=0\\
\iff&(0+4y'')+(-\cos(0)(0))+(-\sin(0)(2))+(0+6y'')+2=0\\
\iff&10y''+2=0\iff y''=-\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Diperoleh $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ dari $y^4+\cos\left(x^2y^3\right)+3y^2+x^2=5$ pada titik $(0,1)$ adalah $-\dfrac{1}{5}$.

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}$ dan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ dari $y^4+\cos\left(x^2y^3\right)+3y^2+x^2=5$ pada titik $(0,1)$ adalah 0 dan $-\dfrac{1}{5}$.

Catatan:

Cara lebih cepat untuk menyelesaikan soal ini, khususnya saat mencari turunan kedua soal 1b adalah saat ketika mencari turunan masing-masing, lakukan subtitusi nilai x, y dan y' pada baris dengan simbol $*$. Hal ini dikarenakan beberapa nilainya akan berujung 0 sehingga penurunan hanya akan membuang waktu.

References

[1] Valberg, D., Purcel, E.J., Rigdon, S.E., (2006). *Calculus*, Prentice Hall, 9th ed.