作业 10 月 25 日

October 24, 2024

练习 1. 证明 n 维向量 $Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ 和 $n\times n$ 矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ 的范数有如下性质:

(1) $\left\|AY\right\| \le \left\|A\right\|\cdot\left\|Y\right\|$;

(2) $\left\|AB\right\| \le \left\|A\right\|\cdot\left\|B\right\|$.

其中,

$$\|Y\|=\sum_{i=1}^{n}|y_i|,\quad \|A\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

练习 2. 设 $A(x)=(a_{ij}(x))_{n\times n}$, 其中 $a_{ij}(x), 1\le i,j\le n$ 关于 x 可导. 设 $D(x)=\det(A(x))$, 则有

$$\frac{dD(x)}{dx}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a'_{k1}(x) & a'_{k2}(x) & \cdots & a'_{kn}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

练习 3. 如果方程组 $\dfrac{dY}{dx}=A(x)Y$ 与 $\dfrac{dY}{dx}=B(x)Y$ 有一个相同的基本解矩阵, 则 $A(x)\equiv B(x)$

练习 4. 求解常系数齐次线性微分方程组

(1) $\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix} -2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}y,\quad y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}$;

(2) $\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}y,\quad y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}$;

(3) $\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3\\ 4 & -5 & 3\\ 4 & -4 & 2\end{pmatrix}y,\quad y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$;

(4) $\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}y,\quad y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$;