《数学分析》习题参考

李升, 陈宝琴

广东海洋大学数学与计算机学院

习题 1.1

1. 证明：假设 $t+r\in\mathbb{Q}$, 则由 $r\in\mathbb{Q}$ 和有理数关于加减法的封闭性可得 $t=(t+r)-r\in\mathbb{Q}$, 与 t 为无理数矛盾！故 $t+r$ 为无理数。其他情况类似可证。

2. 证明：

$$(1)\quad |a_1+a_2+\cdots+a_n|=|a_1+(a_2+\cdots+a_n)|\le|a_1|+|a_2+(a_3+\cdots+a_n)|$$
$$\le|a_1|+|a_2|+|a_3+\cdots+a_n|\le\cdots\le|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

(2) 由 (1) 可得，$|a_2+\cdots+a_n|\le(|a_2|+\cdots+|a_n|)$, 故

$|a_1+a_2+\cdots+a_n|=|a_1+(a_2+\cdots+a_n)|\ge|a_1|-|a_2+a_3+\cdots+a_n|\ge|a_1|-|a_2|-\cdots-|a_n|.$

3.(1)$|x-1|+|x-a|+|x-3|\ge|(x-1)-x-3)|=2.$

(2) 注意到 $0\le|a+x|\le|a|+|x|$, 故

$$\frac{|a+x|}{1+|a+x|}=1-\frac{1}{1+|a+x|}\le1-\frac{1}{1+|a|+|x|}=\frac{|a|+|x|}{1+|a|+|x|}\le\frac{|a|+|x|}{1++|x|}.$$

4. 由于 $x>0,y>0,a\ne b$，故

$$\left(\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a+x}{b+x}-1\right)=\frac{-(b-a)^2x}{b(b+x)^2}<0.$$

即证命题成立.

5. 当 $a=b$ 时，结论显然成立。否则，不妨假设 $a>b$, 则

$$(\sqrt[n]{a-b}+\sqrt[n]{b})^n=(a-b)+n\sqrt[n]{(a-b)^{n-1}}\sqrt[n]{b}+\cdots+b\ge0,$$

即 $\sqrt[n]{a-b}+\sqrt[n]{b}\ge\sqrt[n]{a}$, 故 $|\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}|=\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\le\sqrt[n]{a-b}=\sqrt[n]{|a-b|}$, 即证命题成立.

6. 必要性显然成立，充分性：假设 $a\ne b$, 不妨设 $a>b$，则对 $\varepsilon_0=\frac{a-b}{2}>0,|a-b|=a-b>\varepsilon_0$, 与已知矛盾！故 $a=b$.

7. 当 $n=1$ 时，结论显然成立. 当 $\ngeq 2$ 时，注意到 $-1<a-1<0,\frac{1}{a}>1,a^n>0$，故

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n=\left[1+\left(\frac{1}{a}-1\right)\right]^n\ge1+n\left(\frac{1}{a}-1\right)>n\left(\frac{1}{a}-1\right),$$

整理即可证明命题成立.

8. 充分性显然. 必要性：假设 $h \neq 0$, 则 $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h$，与 $(1+h)^2 = 1+2h$ 对任意 $n \geq 2$ 和 $h > -1$ 成立矛盾！故 $h = 0$.

习题 1.2

1.（1）书写格式一：$\forall \varepsilon > 0$, 要使

$$\left|\frac{n^2+1}{n^2} - 1\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

成立，只需 $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 故存在 $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1 > 0$, 当 $n > N$ 时, 都有

$$\left|\frac{n^2+1}{n^2} - 1\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

成立, 即证.

（1）书写格式二：$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1 > 0$, 当 $n > N$ 时, 都有

$$\left|\frac{n^2+1}{n^2} - 1\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

成立, 即证.

（2）-（6）仅给出找 N 的提示如下：

(2) $\left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| = \frac{7}{3(3n-2)} \leq \frac{7}{3(3n-2n)} = \frac{7}{3n}$。

(3) $\left|\frac{\sin n}{n^3} - 0\right| \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n}$。

(4) $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$。

(5) 令 $a = 1+h$, 则 $h > 0$, 对 $n \geq 2$, 由二项式展开易得 $a^n = (1+h)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$, 故 $\left|\frac{n}{a^n}\right| \leq \frac{2}{(n-1)h^2}$.

(6) 令 $\left|\frac{n!}{n^N} - 0\right| = \frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

2.(1) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 都有

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$

成立, 即证 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

(2) 反例:$a_n = (-1)^n$.

3.$a_n \not\to a\ (n \to \infty) \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists n_0 > N, s.t.\ |a_n - a| \geq \varepsilon_0$.

4. 证明：注意到 $|a_{2k} - 1| = \frac{1}{2k}$ 且由分子有理化放缩可得 $|a_{2k_1} - 1| < \frac{1}{2k-1}$, 即对 $\forall n$, 都有 $|a_n - 1| < \frac{1}{n}$. 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1 > 0$, 当 $n > N$ 时, 都有 $|a_n - 1| < \varepsilon$ 成立, 即证.

5. 证明：$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 都有 $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ 成立 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$, 至多只有 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 在 $U(a;\varepsilon)$ 外.

习题 1.3

1. 直接利用定理 1.3.6 证明中记号和公式（1.3.8）和公式（1.3.9）。由定理 1.3.4 的注及 $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ 可知 $\exists N_3 > 0$, 当 $n > N$ 时,$|b_n| > |b|/2$. 取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 则当 $n > N$ 时, 由公式（1.3.8）和公式（1.3.9）也成立。故

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{ba_n - ab_n}{bb_n}\right| \leq \frac{|b(a_n - a)| + |a(b_n - b)|}{|bb_n|} \leq \frac{2(|b| + |a|)}{|b|^2}\varepsilon$$

即证.

2. 证明：由已知，对 $\varepsilon_0 > \frac{b-a}{2} > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $|a_n - a| < \varepsilon_0$ 成立。从而当 $n > N$ 时,$a_n < a + \varepsilon_0 <]$, 即证.

3. 解：

(1) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 + 3n^{-1} - 2n^{-2} + n^{-4}}{3 + 5n^{-1} + 7n^{-3} - 9n^{-4}} = \dfrac{5}{3}$.

(2) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} + \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} + \cdots + \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{20} = 20$.

(3) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\frac{2}{5})^n + 1 + (\frac{1}{5})^n}{(\frac{3}{5})^n + 5} = \dfrac{1}{5}$.

(4) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

(5) (分子有理化 + 抓大头) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n^2 + n) - (2n)^2}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} + 1 = \dfrac{5}{4}$.

(6) (裂项相消) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{2}$.

(7) 当 $x = 1$ 时, 原式 $= \dfrac{1}{2}$.当 $|x| < 1$ 时, 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} a^n \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1 + a^n} = 0$.

当 $|x| < 1$ 时, 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1 + a^{-n}} = 1$.

(8) 注意到, 当 $t \neq 1$ 时,$t + t^2 + \cdots + t^n = \dfrac{t - t^{n+1}}{1 - t}$.

当 $a = 1$ 时,$0 < b < a < 1$, 故原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \dfrac{b - b^{n+1}}{1 - b} = 0$.

当 $a > 1$ 时, 若 $b = 1$, 则原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(1-a)}{a - a^{n+1}} = 0$;

若 $b \neq 1$, 则原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-a)}{a - a^{n+1}} \dfrac{b - b^{n+1}}{1 - b} = 0$.

当 $a < 1$ 时, 则原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-a)}{a - a^{n+1}} \dfrac{b - b^{n+1}}{1 - b} = \dfrac{b(1-a)}{a(1-b)}$.

(9) (分子、分母有理化 + 抓大头) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \dfrac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}}{3} = \dfrac{1}{3}$.

(10) (错位相减) 令 $S_n = \frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \cdots + \frac{2n-1}{a^n}$, 则

$$(1 - \frac{1}{a})S_n = \frac{1}{a} + 2\left(\frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n}\right) + \frac{2n-1}{a^{n+1}},$$

整理取极限即可得到, 原式 $= \frac{a+1}{(a-1)^2}$.

4.(1) 假设 $\{a_n + b_n\}$, 则结合 $bn = (a_n + b_n) - a_n$ 及 $\{a_n\}$ 收敛可知 $\{b_n\}$ 收敛，矛盾！故 $\{a_n + b_n\}$ 发散。类似可证 $\{a_n - b_n\}$ 也发散

(2) $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = n$.

5. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n - a = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $n > N$ 时, $||a_n| - 0| = |a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

(3) $\{b_n\}$有界, $\exists M>0, s.t.\ \forall n\in\mathbb{N}^+, |b_n|\le M.$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0,$ 当 $n>N$ 时, $|a_n-0|<\dfrac{\varepsilon}{M} \Leftrightarrow |b_na_n-0|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|a_nbn|=0$

6. 依定义，记 $\varepsilon=1/G$ 易证。其中 ε 和 G 分别刻画任意小和任意大.

7. 令 $b_n=a_n-a$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$, 再由本节例 4 可证.

8. 注意到

$$\left|\frac{a_{n+1}}{n+1}-0\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1+\cdots+a_n}{n(n+1)}+\frac{a_1+\cdots+a_n}{n(n+1)}\right|\le\left|\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1+\cdots+a_n}{n(n+1)}\right|+\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n(n+1)}\right|$$

再利用定义即可完成证明.

习题 1.4

1.(1)$\{n^3\}$ 无界;（2）子列 $\{sin(\frac{3k}{3}\pi)\}$ 和 $\{sin(\frac{6k+1}{3}\pi)\}$ 分别收敛于 1 和 $\frac{1}{2}$;(3) 子列 $\{(2k)^{9^k}\}$ 无界; (4) 和 (5) 的奇偶子列收敛于不同的极限.

2. 证明：必要性由定理 1.4.1 即证。

充分性：设 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} a_{2n}=a$, 则 $\forall\varepsilon>0, \exists N_1, N_2>0,$ 当 $n>N_1$ 时,

$$|a_{2n-1}-a|<\varepsilon,$$

当 $n>N_2$ 时,

$$|a_{2n}-a|<\varepsilon,$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时,

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

即证.

3. 证明：必要性由定理 1.4.1 即证。

充分性：设 $\{a_{2n-1}\},\{a_{2n}\},\{a_{3n}\}$ 都收敛，则由定理 1.4.1 可得

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} a_{6n+3}=\lim_{n\to\infty} a_{6n}=\lim_{n\to\infty} a_{2n},$$

进而由第 2 题结论即证.

4. 证明：充分性由推论 1.4.2 即证。必要性：数列 $\{a_n\}$ 就是它的一个发散子列.

习题 1.5

1. 略

2.(1)$\sup S=1,\inf S=-1$. 证明如下：

1° 显然，$\forall x=(-1)^n\frac{n}{n+1}=(-1)^n(1-\frac{1}{n+1})\in S$, 满足 $x\in(-1,1)$;

2° $\exists x_{2k}=\frac{2k}{2k+1}\in S,\text{s.t.},\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=1$;

$\exists x_{2k-1}=\frac{2k-1}{2k}\in S,\text{s.t.}\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=-1$,

即证 $\sup S=1,\inf S=-1$.

(2)$2\sqrt{2};-2\sqrt{2}$.

(3)$1;0$.

(4)$1;\frac{3}{4}$.

3.(1)$\exists x_0\in A,y_0\in B,\text{s.t.}\ \forall x\in A,x\geq y_0$, 即 A 有下界，从而有下确界；$\forall y\in B,y\geq y_0$, 即 B 有上界，从而有上确界。

(2) 假设 $\inf A=a<b=\sup B$, 则对 $\varepsilon_0=\frac{b-a}{2}>0,\exists x_1\in A,y_1\in B,\text{s.t.}y_1>b-\varepsilon_0=\frac{a+b}{2}=a+\varepsilon_0>x_1$. 这与已知矛盾！故 $\inf A\geq\sup B$.

4. 证明：记 $a=\inf A,b=\inf B,s_0=\min\{a,b\}$, 则 $\forall x\in S,x\geq s_0$. 而对 $\forall\varepsilon>0,\exists a_0\in A,b_0\in B.\text{s.t.}\ a_0<a-\varepsilon$ 且 $b_0<b-\varepsilon$.

故 $\exists x_0=\min\{a_0,b_0\}\in S,\text{s.t.}$

$$x_0<\min\{a-\varepsilon,b-\varepsilon\}=\min\{a_0,b_0\}+\varepsilon=s_0-\varepsilon$$

即证 s_0 为 S 的下确界，从而 $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

5. 证明：(1) 记 $a=\inf S,b=\sup S^-$, 则

1° $\forall x\in S$, 有：$-x\in S^-$, 故 $-x\leq b$, 即 $x\geq -b$, 也就是说 $-b$ 为 S 的一个下界;

2° $\forall\varepsilon>0,\exists -x_0\in S^-$, 即 $x_0\in S,\text{s.t.}\ -x_0>b-\varepsilon$, 即 $x_0<-b+\varepsilon$, 这表明 $-b$ 为 S 的下确界，$\therefore -b=a$, 即 $\sup S^-=-\inf S$.

(2) 类似 (1) 的方法可证。

习题 1.6

1. 注意，应用迫敛性定理，应做到"两边夹，夹紧夹稳“.

(1) $1=\sqrt[n]{1}\geq\sqrt[n]{1-\frac{1}{2n}}\geq\sqrt[n]{1-\frac{1}{2}}=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\to 1,n\to\infty$;

(2) $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\cdot n\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2}}\cdot n=1$;

(3) $1\leq\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}\leq\sqrt[n]{2}$;

(4) 记 $a=\max\{a_1,\ldots,a_m\}$, 则 $a\leq\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_n^n}=\sqrt[n]{ma^n}=\sqrt[n]{m}a$.

2. 只需证明充分性. 设 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子列, 则 $\exists M>0, |a_{n_k}|\le M, \quad \forall k\in\mathbb{N}^+$, 又因为 $\{a_n\}$ 单调递增, 故 $\forall k\in\mathbb{N}^+$,

$$a_k \le a_{n_k} \le |a_{n_k}| \le M.$$

即 $\{a_k\}$ 有上界. 由单调有界定理可知 $\{a_k\}$ 收敛, 即证.

3. (1) 易知, 当 $n>n_0\ge 2(|b|+1)>2b$ 时,

$$0\le \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b}{n+1}<\frac{b}{n}<\frac{1}{2}.$$

即当 $n>n_0$ 时,$\{a_n\}$ 单调递减, 又因为 $a_n\ge 0$, $\{a_n\}$ 收敛. 注意到当 $n>n_0$ 时,

$$0\le a_n\le \frac{1}{2}a_{n-1}\le \frac{1}{4}a_{n-2}\le\cdots\le \frac{1}{2^{n-n_0}}a_{n_0}.$$

(2) $\because 0\le a_n\le \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad \forall n\in\mathbb{N}^+$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3})^n=0, \quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

(3) $\because a_n=3^{1-2^{-n}}<3, \quad \therefore \{a_n\}$ 单调递增有上界 3，从而收敛。

(令 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, 则 $a\ge a_1=\sqrt{3}>0$, 且

$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3a_n}=\sqrt{3a}\Rightarrow a=3(a=0$ 舍去.)

事实上，$a_n=3^{1-2^{-n}}\to 3(n\to\infty)$)

(4) 易知 $a_n\ge 0, a_{n+1}=2-\frac{1}{1+a_n}<2$, 即 $\{a_n\}$ 有上界。

注意到 $a_2>a_1$, 故 $a_3=2-\frac{1}{1+a_2}>2-\frac{1}{1+a_1}=a_2$. 猜想 $\{a_n\}$ 单调递增。假设 $a_{k+1}>a_k$, 则

$$a_{k+2}=2-\frac{1}{1+a_{k+1}}>2-\frac{1}{1+a_k}=a_{k+1}$$

即 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界，从而收敛。令 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, 则

$$a=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a_n}{1+a_n})=1+\frac{a}{1+a}$$

$\Rightarrow a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$, 舍去)

4.(1)original formula $=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{-1}{n})^{-n}]^{-1}=e^{-1}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{2}{n-1})^{\frac{n-1}{2}}]^{\frac{2}{n-1}}=e^{-2}$

法二：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n/\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{e}{e^{-1}}=e^2$

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$

(4) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n})^3=e\cdot 1=e$

5.$\because (n+2)n<(n+1)(n+1)$ 且 $(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$

$\therefore (1+\frac{1}{n})^{n-1} < \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = (1+\frac{1}{n+1})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} < (1+\frac{1}{n+1})^n$

即证 $\{(1+\frac{1}{n+1})^n\}$ 为递增数列。

6.(1)$|a_{n+p}-a_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$

(2) 类似 (1)

(3) 参考例 4;

(4) 参考例 5 并注意到 $\alpha \leqslant 1$, 故 $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}, \varepsilon_0$ 取 $\frac{1}{2}, n_0 = p_0$.

8.(1) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$

(2)

$$\begin{aligned}1 \leqslant \frac{1}{n!}\sum_{n=1}^{n} k! &= \frac{1}{n!} + \frac{2!}{n!} + ... + \frac{(n-1)!}{n!} + 1 \\ &\leqslant \frac{1}{n(n-1)}(n-1) + \frac{1}{n} + 1 = 1 + \frac{2}{n} \to 1 (n\to\infty)\end{aligned}$$

$\therefore$ 原式 $=1$

(3) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{n+1}{n^2})^{\frac{n^2}{n+1}}]^{\frac{n+1}{n}} = e^1 = e.$

(4) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdots 2^{\frac{1}{2^n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}} = 2$

(5) 考虑展开极限式子:

$$\begin{aligned}&(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+\alpha^4)\cdots(1+\alpha^{2n}) \\ &= 1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{1+2+4+\cdots+2^n} \\ &= (\text{each item select } 1) \\ &\quad +(\text{the first item select } \alpha, \text{others select } 1) \\ &\quad +(\text{the first item select } 1, \text{the second item select } \alpha^2, \text{others select } 1) \\ &\quad +\cdots \\ &= 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^{2^{n+1}-1} = \frac{1-\alpha^{2^n(2^{n+1}+1)}}{1-\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{original formula} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\alpha^{2^n(2^{n+1}+1)}}{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

复习题一

1. 考虑 $r > s$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(s+\frac{1}{n}\sqrt{2}) = s$, 易知 $\exists n_0, \text{s.t.}\ \ s < s+\frac{1}{n_0}\sqrt{2} < r$.

2. 略 (上网可找到大量证明)

3.$\because \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时，$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$

$\therefore \sqrt[n]{a_1\cdots a_N}(a-\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1\cdots a_N} \leqslant \sqrt[n]{a_1\cdots a_N}(a+\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}}$

由迫敛性定理即可证明

$$a-\varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \leqslant a+\varepsilon$$

由 ε 的任意性即证。

4.(1)0;

(2)1;

(3)0;(注意到 $e^n > (1+1)^n > 1+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$)

(4)$(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3})-(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}) = \frac{2}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}} - \frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}} \to 0, n\to\infty$

(5)e; $(e \leqslant \sqrt[n]{n^3+e^n} \leqslant \sqrt[n]{2}e)$

(6)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{n^2+2n}(1+\cdots+n) \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n^2+n+1}(1+2+\cdots+n)\\ 1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

5. 若 $x_0 \in \mathbb{Q}$, 取 $a_n = \frac{n}{n+1}x_0, b_n = x_0+\frac{1}{n}\sqrt{2}$

若 $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 取 $a_n' = \frac{1}{n}\lfloor nx_0\rfloor, b_n = \frac{n}{n+1}x_0$

6. 原题有误，应为 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+bn+6}-n) = 3$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+bn+b}-n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a-1)n^2+bn+6}{\sqrt{an^2+bn+b}+n}$ 存在可知 $a-1=0$.

即 $a=1$. 再由

$$3 = \lim_{n\to\infty}\frac{bn+6}{\sqrt{an^2+bn+6}+n} = \frac{b}{2}$$

可得 $b=6$.

7. 证明：假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n+1)-\sin(n-1)}{2\sin 1} = 0$

进而

$$a = \lim_{n\to\infty}\sin 2n = \lim_{n\to\infty}2\sin n\cdot\cos n = 0$$

$$a^2 = \lim_{n\to\infty}\sin^2 n = \lim_{n\to\infty}(1-\cos^2 n) = 1$$

矛盾！故 $\{\sin n\}$ 发散，同理可证 $\{\cos n\}$ 发散。

8. 证明：显然 0 为 E 的一个下界，故 E 必有下确界 β，由确界的数列刻画，$\exists x_n \in E(n = 1,2,\cdots), \text{s.t.}\ \ \lim\limits_{n\to\infty}x_n = \beta$.

故对 $\varepsilon_0=\frac{1}{3}>0, \exists N\in\mathbb{N}^+$, 当 $n>N$ 时

$$|x_n-\beta|<\varepsilon_0=\frac{1}{3}$$

即

$$\beta-\frac{1}{3}<x_n<\beta+\frac{1}{3}$$

注意到 x_n 为整数，区间 $[\beta-\frac{1}{3},\beta+\frac{1}{3}]$ 长度为 $\frac{2}{3}<1$, 故当 $n>N$ 时，$x_n=x_{N+1}$, 从而

$$\beta=\lim_{n\to\infty}x_n=x_{N+1}\in E$$

9. 类似 8 可证。

10. 收敛数列必有界，即有上界且有下界，从而必有上确界和下确界。

11. 依定义证明，略。

12. 由 $|a_n|\leqslant|a_n-b_n|+|b_n|$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0, \{b_n\}$ 有界易知 $\{a_n\}$ 有界，又因为 $\{a_n\}$ 单调，故 $\{a_n\}$ 收敛，再由 $b_n=a_n-(a_n-b_n)$ 即可完成证明。

13. 易知 $\{b_n\}$ 收敛，再由 $|a_{n+p}-a_n|\leqslant|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|=|b_{n+p}-b_n|$ 及 Cauchy 收敛准则即可完成证明。

14. 先验证 a_n 单调递增可得 $\{a_n\}$ 收敛，再利用 Cauchy 收敛准则及

$$\begin{aligned}|b_{n+p}-b_n|&=|2\left(a_{n+p+1}-a_{n+p}\right)-2\left(a_{n+1}-a_n\right)|\\&\leqslant 2\left|a_{n+p+1}-a_{n+1}\right|+\left|a_{n+p}-a_n\right|\end{aligned}$$

即可完成证明。

15. 数学归纳法

16. 反证法，或构造法 (利用 N 的任意性)

17.(1)$a_n=\frac{1\times3}{2^2}\cdot\frac{2\times4}{3^2}\cdot\frac{3\times5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$

(2) 当 $k=2$ 时，$a_n=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$

当 $k>2$ 时，$a_n=\frac{1}{n^{k-2}}\cdot[\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}]\to0(n\to\infty)$

18. 令 $b=\frac{1}{a}>1$, 则 $b=1+h, h>0$ 且 $(1+h)^n\leqslant C_n^{k+1}h^{k+1}$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^ka^n=0$.

19. 注意到 $b_n=a_1(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\cdots+a_k(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$ 和 $\sqrt{n+j}-\sqrt{n}\to0(n\to\infty)$ 即可完成证明。

20. 令 $b_n=a_n-a$, 利用类似 p16 例 4 的方法可证。

21. 令 $\alpha_n=a_n-a$, 或 $\beta_n=b_n-b$。

22. 注意到 $\frac{k-1}{k}<(\frac{2k-1}{2k})^2<\frac{2k-1}{2k+1}$ 即可完成证明。

23. 必要性显然；充分性利用反证法：假设 $\{a_n\}$ 发散，则对 $a, \exists\varepsilon_0>0, \forall N_k\in\mathbb{N}^+, \exists n_k>N_k(k=1,2,\cdots)$, s.t. $|a_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_0$.

这表明 $\{a_{n_k}\}$ 的任意子列都不可能收敛于 a, 与已知矛盾。

24,25. 略 ($a_n\searrow$ 且 $a_n\geqslant 0$ 故 $\{a_n\}$ 收敛，

故 $\{b_n\}=\{2a_{n+1}-a_n\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2a_{n+1}-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 从而由 $b_{n+1}=\frac{a_n\cdot b_n}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}b_{n-1}=\cdots=\frac{a_1b_1}{a_{n+1}}$ 可得 $a=\sqrt{a_1b_1}$)

26. 略

习题 2.1

1.(1)$(0,\sqrt{3})$;(2)$(1,+\infty)$;(3)$(\frac{5}{e},5e)$;(4)$(0,+\infty)$

2.(1)×;(2)√;(3)×;

3.(1)

$$f(g(x))=\begin{cases}g(x), & g(x)\geqslant 0\\ 2g(x), & g(x)<0\end{cases}=\begin{cases}2\cdot(-3x), & x\geqslant 0\\ 2\cdot 5x, & x<0\end{cases}=\begin{cases}-6x, & x\geqslant 0\\ 10x, & x<0\end{cases}$$

(2)

$$g(f(x))=\begin{cases}-3f(x), & f(x)\geqslant 0\\ 5f(x), & f(x)<0\end{cases}=\begin{cases}-3\cdot x, & x\geqslant 0\\ 5\cdot 2x, & x<0\end{cases}=\begin{cases}-3x, & x\geqslant 0\\ 10x, & x<0\end{cases}$$

4.(1)$y=u^3, u=\arccos v, v=\sqrt{s}, s=1-t, t=x^2$

(2)$y=\ln u, u=v-1+\sqrt{v}, v=1+t, t=x^2$

(3)$y=u^2, u=\sin v, v=t^3, t=x+2$

(4)$y=3^u, u=v^3, v=\tan x$.

5.(1,2) 若 $\forall M>0, \exists x_0\in D$, s.t. $f(x_0)>M(<-M)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上无上 (下) 界，对 $f(x)=\frac{1}{x^3}, x\in(0,1), \forall M>0, \exists x_0=(\frac{1}{1+M})^{\frac{1}{3}}\in(0,1)$.s.t. $f(x_0)=1+M>M$, 即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上无界。

6.(1) 奇函数；(2) 偶函数；(3$\star$) 奇函数 (有理化并注意到 $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$).(4) 非奇非偶函数。

7. 利用 $\sin x_1-\sin x_2=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}$.

8.$\forall x_1>x_2\in\mathbb{R}$, 有 $\lfloor x_1\rfloor\geqslant\lfloor x_2\rfloor$, 且对 $x_1,x_2\in[k,k+1), k\in\mathbb{Z}$, 有 $\lfloor x_1\rfloor=\lfloor x_2\rfloor$

9.(1)$\cos\frac{x}{3}$ 周期为 6π, $\sin 2x$ 周期为 π, 故 $T=6\pi$.

(2)$g(x)=\frac{1}{2}(1-\cos 2x), \therefore T=2\pi$.

10,12,13 略

11. 只需证明 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 和 $h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 分别为奇函数和偶函数并注意到 $f(x)=g(x)+h(x)$ 即可。

习题 2.2

1. (1)$\forall\varepsilon>0$, 要使

$$\left|\frac{x+3}{x-1}-1\right|=\frac{4}{|x-1|}\overset{(x<0)}{=\!=\!=}\frac{4}{|x|+1}<\frac{1}{|x|}<\varepsilon$$

成立，只要 $x<-\frac{4}{\varepsilon}$ 即可，故 $\exists X=\frac{4}{\varepsilon}>0$，当 $x<-X$ 时，有

$$\left|\frac{x+3}{x-1}-1\right|<\varepsilon$$

$$\therefore\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x-1}=1$$

$\because\forall\varepsilon>0,\exists X=\frac{4}{\varepsilon}>0$, 当 $x<-X$ 时

$$|\frac{x+3}{x-1}-1|=\frac{4}{|x-1|}<\frac{4}{|x|}<\varepsilon$$

$\therefore\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x-1}=1$.
(关键是找到 X，要注意适当放缩)
(2)$\left|\frac{3x^2+x+2}{2x^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{|x+7|}{2|2x^2-1|}\overset{(x>1)}{<}\frac{x+7x}{2(2x^2-x^2)}=\frac{4}{x}$
(3)$|\frac{2x^3+3x+4}{x^3-1}-2|=|\frac{3x-2}{x^3-1}|\leqslant\frac{3|x|+2}{\left||x^3|-1\right|}\overset{(|x|>\sqrt[3]{2})}{<}\frac{5|x|}{|x|^3-\frac{1}{2}|x|^3}<\frac{10}{|x|}$.
(4)$|\frac{x^4-5x^3+3x^2+x-2}{x^5}-0|\overset{(x>1)}{<}\frac{x^4+5x^4+3x^4+x^4+2x^4}{x^5}=\frac{12}{x}$

2. 注意到 $\arctan x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 和 $\tan(\frac{\pi}{2}-\arctan x)=\frac{1}{x}$, 可知对 $\forall\varepsilon>0$,

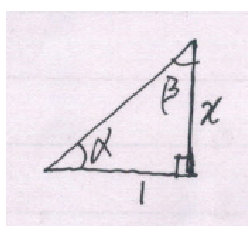

图 1: 习题 2.2　题 2 图

$$|\arctan x-\frac{\pi}{2}|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}-\arctan x<\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow\tan(\frac{\pi}{2}-\arctan x)<\tan\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{x}<\tan\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow x>\frac{1}{\tan\varepsilon}$$

.

3. 略

4. 示例：若 $\forall A\in\mathbb{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall x>0,\exists x_0\in\mathrm{D},x_0>X,\mathrm{s.t.}$

$$|f(x_0)-A|\geqslant\varepsilon_0$$

. 则称 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时不收敛。

习题 2.3

1.(1)$\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{2x-3}{x-1}-1\right|=\frac{|x-2|}{|x-1|}<2|x-2|<\varepsilon$$

成立，只要 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$ 且 $|x-2|<\frac{1}{2}$，

(注意为放大 $|x-1|$, 限制 $|x-2|$)

($|x-2|<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<|x-1|<\frac{3}{2}$)

取 $\delta=\min\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{2}\}$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{2x-3}{x-1}-1\right|<\varepsilon$$

$$\therefore\lim_{x\to2}\frac{2x-3}{x-1}=1$$

(2)$\left|\frac{3x^2-x-2}{x^2-1}-\frac{5}{2}\right|=\frac{1}{2|x+1|}|x-1|\overset{(|x-1|<1)}{<}\frac{1}{2}|x-1|<\varepsilon\Rightarrow\delta.$

(3)$|\sqrt{1-x^2}-0|=\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}\overset{0<1-x<1}{<}\sqrt{2}\sqrt{1-x}<\varepsilon\Rightarrow\delta.$

(4)$|\sqrt{1-x^2}-0|=\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\overset{-1<x<0}{<}\sqrt{2}\sqrt{1+x}<\varepsilon\Rightarrow\delta.$

2. 注意到 $\big||f(x)|-0\big|=|f(x)|=|f(x)-0|$ 即容易完成证明。

3. 提示：当 $a=1$ 时显然成立。当 $a>1$ 时，限制 $0<x<\frac{1}{2}$, 则

$$|a^x-1|<a^{\frac{1}{[\frac{1}{x}]}}-1<\frac{a-1}{[\frac{1}{x}]}<\frac{a-1}{\frac{1}{x}-1}\Rightarrow\delta.$$

4. 提示：考虑 $\varepsilon=\frac{1}{a}>0$ 即可。

5. 设 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义,若 $\forall A\in\mathbb{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x_0\in U^\circ(x_0;\delta)\mathrm{s.t.}\quad|f(x_0)-A|\geqslant\varepsilon_0$. 则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不收敛。

6. 注意到 $\big||f(x)|-A|\leqslant|f(x)-A|$ 即可。

反例：$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

习题 2.4

1.(1)(2) 注意到此时，分子分母均趋于 ∞，故应抓“大头”。

(1) 同时除以"x^5",$\underline{\frac{4}{5}}$;(2) 同时除以 x^{130}, $\underline{\frac{2^{50}\cdot 5^{80}}{6^{130}}}$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}=-\frac{1}{2}$

(注意 $x\to-\infty$, 可视为 $x<0$，此时 $x=-\sqrt{x^2}$, 而 $\frac{\sqrt{b}}{x}=-\sqrt{\frac{b}{x^2}}$.)

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2+x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{\sqrt{2+x^2}}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{k-1}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)}=\frac{k}{n}$.

(5) 当 $3<x<4$ 时，$[x]\equiv3$, 原式 $=0$;

(7) 当 $2<x<3$ 时，$[x]=2$, 原式 $=1$.

(8),(9) 分子分母同时有理化：$\underline{3}$; $\underline{-\frac{3}{4}}$; (10)$\underline{\frac{\pi}{2}}$; (11)$\underline{\tan x_0}$.

(12)(此题勿误用错位相减法，n 为常数，展开为 n 个极限即可)　　$\underline{0}$.

2. 略 (参考 Th1.3.5 的证明。)

3. 注意到 $|[f(x)g(x)]-AB|=|(f(x)-A)g(x)+A(g(x)-B)|\leqslant|g(x)|\cdot|f(x)-A|+|A||g(x)-B|$.

4. 略。

5.(1) 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(a-b+1)x+(b-1)}{x-1}=0\Rightarrow\begin{cases}1-a=0\\a-b+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$ (事实原式 $=a-b+1=0$).

(2) 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2+(1-2ab)+(1-b^2)}{\sqrt{x^2+x+1}+ax+b}=0\Rightarrow\begin{cases}1-a^2=0\\1-2ab=0\\a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$ (注意到原式左边当 $a\leqslant0$ 时，必趋于正无穷，故 $a>0$).

习题 2.5

1.(1)$\frac{1}{3x}(2x-1)\leqslant\frac{[2x]}{3x}<\frac{1}{3x}\cdot2x=\frac{2}{3}\Rightarrow\underline{\frac{2}{3}}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}[1+\frac{1}{x^2}\cos(2x-3)]=1+0=1$.

(3)$(x-1)\sin\frac{1}{x}<[x]\sin\frac{1}{x}<x\sin\frac{1}{x}\Rightarrow\underline{1}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1+\arctan x}{x^3-1})=1+0=1$.

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}\cdot3=3$.

(6) 原式 $=\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot\frac{x^2}{2(\sin\frac{x}{2})^2}=2$.

(7) 切割代弦。

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos3x}\cdot\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$.

(8) 令 $t=x-\pi$，则 $x\to\pi\Leftrightarrow t\to 0$. 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{(t+\pi)\sin(t+\pi)}{t}=-\pi$.

(9) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\frac{-1}{x})^{-x}]^{-1}=e^{-1}$.

(10) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$.

(11) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\frac{5x}{1-3x})^{\frac{1-3x}{5x}}]^{\frac{5}{1-3x}}\left(=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}[1+(-3x)]^{\frac{1}{x}}}=\frac{e^2}{e^{-3}}\right)=e^5$.

(12)$\underline{e^{12}}$.

2. 参考 Th2.5.2 的证明即可。

3. 注意本题是将数列极限转化为函数极限处理，只需当 $n\to\infty$ 转化为 $x\to+\infty$. 并将 n 换为 x 即可处理。如：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{3n}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{\pi}{3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3x}}{\frac{\pi}{3x}}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.

(2)-(4) 类似:$\underline{e^{-1}}$; $\underline{\frac{9}{2}}$; $\underline{e}$.

4. 提示：考虑 $x_n'=\frac{[nx_0]}{n}\in\mathbb{Q},x_n''=\frac{[nx_0]+\sqrt{2}}{n}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},n=1,2,3,...$

5. 证明：$\forall x_0\in\mathbb{R},f(x_0)=f(x_0+T)=\cdots=f(x_0+kT)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_0+nT)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

6.① $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x_1',x_2'\in(x_0,x_0+\delta)$, s.t.

$$|f(x_1')-f(x_2')|\geqslant\varepsilon_0$$

. ②注意到 $n\pi\to 0(n\to\infty),|\cos n\pi-\cos(n+1)\pi|=2=\varepsilon_0$, 取 $x_1'=\frac{1}{n_0\pi},x_2'=\frac{\pi}{n_0+1}$ 即可，其中 n_0 由 δ 决定：$\frac{1}{n_0\pi}<\delta$.

7. 类似 Th2.5.6 可证。

8. 证明：必要性：令 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 则对 $\varepsilon=1>0,\exists X>|a|$, 当 $x>X$ 时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon=1,$$

故当 $x>X$ 时，$f(x)<A+1$.

又 $\because f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上递增，$\therefore\forall x\in(a,x],f(x)\leqslant f(X)\leqslant f(X+1)<A+1$，这就证明了 $(A+1)$ 为 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 的一个上界。

充分性：假设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有上界，则由确界原理可知 $f(x)$ 的上确界存在。记

$$\sup_{x\in(a,+\infty)}f(x)=A,$$

则 $\forall\varepsilon>0,\exists X\in(a,+\infty)$, 使得 $f(X)>A-\varepsilon$. 又因为 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 单调递增。故当 $x>X$ 时，

$$A-\varepsilon<f(X)\leqslant f(x)\leqslant A<A+\varepsilon$$

即当 $x > X$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A.$

9.10 类似 8 可证。

习题 2.6

1. 提示：$|f(x)g(x)| \leqslant M|f(x) - 0| < M\varepsilon$, 其中 $|g(x)| \leqslant M$.

2.$\forall M > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0$,

当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，$|f(x)| > \sqrt{M}$.

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，$|g(x)| > \sqrt{M}$.

故当 $0 < |x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时，$|f(x)g(x)| > M$, 即证。

3. 提示：$|g(x)| \leqslant M_1, \quad |f(x)| > M + M_1$, 而

$$|f(x) + g(x)| \geqslant |f(x)| - |g(x)| > M.$$

4.(1) 原式 $= \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2\cdot x}(\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}) = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (\cos x - 1)$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to0} \frac{x}{x^3} \cdot (-\frac{x^2}{2}) = -\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} \sin \frac{1}{x} = 0$(无穷小 • 有界量 = 无穷小)

5.(1)$2x^3 \tan x \sim 2x^4, x \to 0, k = 4.$

(2)$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) = \frac{x^3}{1-x} \sim x^3, x \to 0, k = 3.$

(3)$\sqrt[3]{2x^5 - 7x^2} = x^{\frac{2}{3}}(2x^3 - 7)^{\frac{1}{3}} \sim -\sqrt[3]{7}x^{\frac{2}{3}}, k = \frac{2}{3}.$

(4)$\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - 2x^2} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-2x^2}} \sim \frac{3}{2}x^2, k = 2.$

6.$f(x) \sim g(x)(x \to x_0) \Leftrightarrow f(x) = o(1), g(x) = o(1), (x \to x_0)$ 且

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \text{即} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$$
$$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))(x \to x_0).$$

复习题二

1. 都相等。

2. 证明：显然，$f(f(x)) < f(g(x)) < g(g(x)) < h(g(x)) < h(h(x)).$

3. 证明：$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2), g(x_1) < g(x_2)$, 故

$$\varphi(x_1) = \max\{f(x_1), g(x_1)\} \leqslant \max\{f(x_2), g(x_2)\} = \varphi(x_2).$$
$$\psi(x_1) = \min\{f(x_1), g(x_1)\} \leqslant \min\{f(x_2), g(x_2)\} = \psi(x_2).$$

4. 易得 $(f\circ f(x))=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}},(f\circ f\circ f)(x)=\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$, 由数学归纳法可证 n 个的情况：

$$f\circ f\circ\cdots\circ f(x)=\frac{x}{\sqrt{nx^2+1}}.$$

5. 由 $(f\circ g)(x)=ag(x)+b=x\Rightarrow g(x)=\frac{1}{a}(x-b)$, 此时

$(g\circ f)(x)=\frac{1}{a}(f(x)-b)=\frac{1}{a}[(ax+b)-b]=x$, 即证 $g(x)=\frac{1}{a}(x-b)$.

6.(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1(x\to+\infty,"x>0",x=\sqrt{x^2})$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x(x+2)}+\sqrt{x(x+1)}}=\frac{1}{2}$;

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$(此时 $x\to-\infty,"x<0",x=-\sqrt{x^2}$)

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x(x+2)}+\sqrt{x(x+1)}}=-\frac{1}{2}$.

(5)$b(\frac{1}{x}-1)<[\frac{b}{x}]<\frac{b}{x}\Rightarrow\frac{x}{a}(\frac{b}{x}-b)<\frac{x}{a}[\frac{b}{x}]<\frac{x}{a}\cdot\frac{x}{b}=\frac{b}{a}\Rightarrow$ original formula $=\frac{b}{a}$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}})=0$.(抓大头 $\sqrt{x}$.)

(7) 当 $0<x<a$ 时，$[\frac{x}{a}]=0,\frac{b}{x}[\frac{x}{a}]=0$, 故原式 $=0$.

(8) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}\Big/(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x})=\frac{1}{2}$. 抓大头 $\sqrt{x}$.

(9) 此题利用初等方法较难处理，可考虑令 ($m=n$, 原式 $=0$, 设 $n<m$)

$g(x)=n(1+x+\cdots+x^{m-1})-m(1+x+\cdots+x^n)\triangleq(1-x)(a_0+a_1x+\cdots+a_{m-2})$, 待定 $a_0,\ldots,a_{m-2}$.

求得 $a_0=m-n,a_1=2(m-n),\ldots,a_k=n(m-n),k\leqslant n-1$,

$a_l=n(m-n)+(l-n+1)n,l\geqslant n$.

将之代入

$$\frac{n}{1-x^n}-\frac{m}{1-x^m}=\frac{n(1+x+\cdots+x^{m-1})+m(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

即可求得原式 $=\frac{m-n}{2}$.

7. 作商后依定义即可证。

8.$\forall\varepsilon>0,\exists U>0$, 当 $|u|>U$ 时，$|f(u)-A|<\varepsilon$,

对上述 $U,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|g(x)|>U$,

即当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(g(x))-A|<\varepsilon$, 即证 $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=A$.

9. 假设 $y=\cos\sqrt{x}$ 是周期函数且周期为 $T>0$, 则

$$1=\cos\sqrt{0}=\cos\sqrt{0+T}=\cos\sqrt{0+2T},$$

即 $\sqrt{T}=2k_1\pi,\sqrt{2T}=2k_2\pi,k_1,k_2\in\mathbb{N}^+$, 故

$$4k_1^2\pi^2=T=\frac{1}{2}\cdot 2T=2k_2^2\pi^2$$

$\therefore k_2 = \sqrt{2}k_1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 矛盾，这表明 $\cos\sqrt{x}$ 不是周期函数。

10. 证明：$\forall x \in (0,+\infty)$, 注意到 $3^n x \to +\infty (n \to \infty)$, 故由归结原则可得 $f(x) = f(3x) = \cdots = f(kx) = \lim\limits_{n\to\infty} f(3^n x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, 由 x 的任意性即证 $f(x) \equiv A, \forall x \in (0,+\infty)$.

11. 注意到：$\forall x \in (-1,0), x^{3n} \to 0 (n \to \infty)$, 而 $\forall x \in (-\infty,-1), x^{3n} \to -\infty (n \to \infty)$, 故类似第 10 题的方法可完成证明。

事实上，

$\forall x \in (-1,0), f(x) = f(3x) = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} f(3^n x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(-1)$,

$\forall x \in (-\infty,-1), f(x) = f(3x) = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} f(3^n x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = f(-1)$,

由 x 的任意性即证命题成立。

12. 证明：必要性：令 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, 则对 $\varepsilon_0 = 1, \exists X > 0$, 当 $x < -X$ 时，

$$|f(x) - A| < 1 \Leftrightarrow A - 1 < f(x) < A + 1$$

又 $\because f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 内递增，故 $f(x) \geqslant f(-x)$，取

$L = \min\{A-1, f(x)\}, \forall x \in (-\infty,b)$，有 $f(x) \geqslant L$, 即证 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 内有下界。

充分性：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 内有下界，则必存在下确界，令 $A = \sup_{x\in(-\infty,b)} f(x)$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \ \text{s.t.} \ -X \in (-\infty,b)$,

s.t. $f(-X) < A + \varepsilon$.

另一方面，由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 内递增，故当 $x < -X$ 时，

$$A - \varepsilon < A \leqslant f(x) < f(-X) < A + \varepsilon$$

也就是

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A.$.

13. 仅证明 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A. \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N_1$ 时，

$$A - \varepsilon < f(x_n') < A + \varepsilon$$

对 $\delta = x_{N_1+1} - a > 0$, 当 $0 < x - a < \delta$ 时，$x < x_{N_1+1}$, 由 $f(x)$ 在 (a,b) 递减可知

$$f(x) > f(x_{N_1+1}) > A - \varepsilon$$

. 另一方面，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = a$, 故存在 $N_2 > N_1, \ \text{s.t.} \ x - a > x_{N_2} - a$,

即 $x_{N_2} > x$, 从而 $f(x) < f(x_{N_2}) < A + \varepsilon$,

$\therefore$ 当 $0 < x - a < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,

即证 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$.

14. 提示：$f(x) > Kf(x-1) > K^2 f(x-2) > \cdots > K^n f(x-n) \geqslant K^n a$, 其中 n 满足 $n + X \leqslant x$, 或 $n = [x - X]$.

15.$(f\circ g)(x) = \sqrt[3]{g(x)-1} = x \Rightarrow g(x) = x^3 + 1$.

16,17,20. 略。

18.$\because \forall x \in D, \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \geqslant f(x) + \inf_{x\in D} g(x)$,($\inf_{x\in D} g(x)$ 是常数)，故

$$\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \geqslant \sup_{x\in D}\{f(x) + \inf_{x\in D} g(x)\} = \sup_{x\in D} f(x) + \inf_{x\in D} g(x)$$

类似地可证明另一个不等式。

19. 类似 Th2.4.7 的证明。

21. 反证法。假设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \neq 0$, 则易知 $\exists x_n (n = 1, 2, \dots), x_n \to 0 (n\to\infty)$

(?)　　但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n} = a \neq 0$, 从而

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(\frac{x_n}{2})}{x_n} = \frac{a}{2} \neq 0$, 这与已知矛盾，即证。

22. 假设 $f(x)$ 不恒为常数，则 $\exists a \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}$, s.t. $f(x_0) = a$, 即 $f(x_0) - a = 0$, 记 $f(x)$ 的周期为 $T > 0$, 则 $x_0 + T, x_0 + 2T, \dots, x_0 + nT, \dots$ 均为 $f(x) - a$ 的零点，即 $f(x) - a$ 有无穷多个零点，这与 $f(x)$ 为有理数矛盾！故 $f(x) \equiv C, \forall x \in \mathbb{R}$.

23. 提示：对 $x_{N_1+1} < X < x < x_{N_2}, A - \varepsilon < f(x_{N_1+1}) < f(x) < f(x_{N_2}) < A + \varepsilon$.

24. 类似 Th2.5.2 的证明。

习题 3.1

1.(1) 易证 $x_0 \neq \frac{3}{2}$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，即 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续，又 $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x) = 3 = f(\frac{3}{2})$, 即 $f(x)$ 在 $x = \frac{3}{2}$ 处连续。

(2)$\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$, 且当 $x_0 \neq 0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处连续，即证 $f(x)$ 处处连续。

(3) 只需考虑分段点 $x = 2$，而 $\lim\limits_{x\to 2^-}(5 - x^2) = 1 \neq 7 = \lim\limits_{x\to 2^+}(2x+3)$, 即 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处不连续，在 $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ 处处连续。

(4) 类似 (1),$f(x)$ 仅在 $x = 0$ 处 $(3x = -x \Rightarrow x = 0)$ 连续。

(5) 在除 $\{0\}$ 外的 $\mathbb{R}$ 上连续。

2. 注意到连续必极限存在，由 P68.4 或 P79 例 2 的方法可证。

3. 要 $f(x)$ 连续，则 $a + 4 = \lim\limits_{x\to 2^+}(2x + a) = f(2) = 5 - 2^2 = 1 \Rightarrow a = -3$.

4. 类似 P54.5，考虑 $\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leqslant \big|f(x) - f(x_0)\big|$ 即可完成证明。

5. 不一定，如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续，但 $|f(x)|\equiv 1,\forall x\in\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续。

习题 3.2

1.(1)(2) 可去间断点：$\underline{x=1}$ $\quad$ $\underline{x=0}$

(1)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^3+x^2+x+1)=4.$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

(3)(4) 跳跃间断点：$\underline{x=0}$ $\quad$ $\underline{x=k\in\mathbb{Z}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{sgn}x=-1\neq 1=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{sgn}x \quad (x=0)$

(4) $\lim\limits_{x\to k^-}[x]=k-1\neq k=\lim\limits_{x\to k^+}[x] \quad (x=k,k\in\mathbb{Z}).$

(5) 可疑间断点有 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 和 $x=0,k\in\mathbb{Z}.$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=-1\neq 1=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{|x|}\Rightarrow x=0$ 为跳跃间断点。

$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{|x|}\tan x=\infty\Rightarrow x=k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 为第二类间断点。

(6) 第二类间断点；(7,8,9) 略。

(10)$x=3$ 为跳跃间断点，而由 $\lim\limits_{x\to 9}3x=27$ 和 $\lim\limits_{x\to 9^+}\sin\frac{1}{x-9}=\lim\limits_{t\to 0}\sin\frac{1}{t}$ 不存在可知 $\lim\limits_{x\to 9^+}3x\sin\frac{1}{x-9}$ 不存在，即 $x=9$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点。

2. 应先求出 $f(x)$，

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=-1,$

当 $|x|<1$ 时，$f(x)=x,$ 当 $x=1$ 时，$f(x)=0,$

当 $x=-1$ 时，$f(x)=-1,$ 即

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x>1\\ 0, & x=1\\ x, & -1<x<1\\ -1, & x\leqslant -1,\end{cases}$$

则由 $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=-1=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-1\neq 1=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ 可知 $f(x)$ 仅在 $x=1$ 处不连续，$x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点。

习题 3.3

1,2 类似 P86 例 3 可证。

3. 利用 $\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$ 和

$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$ 以及 $\frac{f(x)+g(x)}{2},\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$ 的连续性即可完成证明，为此只需证明 $\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$ 连续。

$\forall x_0 \in [a,b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时，

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$$

当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时，

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2$$

故当 $|x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时，

$$\big||f(x) - g(x)| - |f(x_0) - g(x_0)|\big| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

即证 $\frac{1}{2}|f(x) - g(x)|$ 在 x_0 处连续，用 x_0 的任意性可知函数在 $[a,b]$ 上连续。

4.$x \to 0, \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \frac{1}{\ln a}(a^x - 1) \sim x$.

故

(1) 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x \cdot x} = 1$

(2) 原式 $= \lim\limits_{x \to b} \frac{a^b(a^{x-b} - 1)}{x - b} = \lim\limits_{x \to b} \frac{a^b(x-b)\ln a}{x - b} = a^b \ln a$

(3) 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{3 + xe^{2x}}{1 + x^3 + x} = \frac{3}{1} = 3$.

(4) 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(5) 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

(6) 原式 $= \lim\limits_{x \to +\infty} \arcsin(\sqrt{x + x^2} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \arcsin \frac{x}{\sqrt{x + x^2} + x}$

$= \arcsin(\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x + x^2} + x}) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

5. 证明：$\forall x \in [a,b]$, 若 $x \in [a,b] \cap Q$, 则 $f(x) = C$, 若 $x \notin [a,b] \cap Q$, 则 $\exists x_n \in [a,b] \cap Q, n = 1, 2, \ldots,$ s.t. $x_n \to x (n \to \infty)$, 从而 $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = C$, 由 x 的任意性即证命题成立。

习题 3.4

1. 令 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b), \\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x), & x = b, \end{cases}$ 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而在 $[a,b]$ 上有界。故 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有界。

2. 依题设，若 $\forall x \in (a,b), f(x) = 0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内取到最大值 0. 否则，取 $x_0 \in (a,b)$, s.t. $f(x_0) \neq 0$, 对 $M_0 = |f(x_0)| > 0, \exists \delta_1, \delta_2 \in (0, \frac{b-a}{2})$, 使得当 $0 < a - x < \delta_1$ 时，$f(x) < -M_0$，当 $0 < b - x < \delta_2$ 时，$f(x) < -M_0$. 又因为 $f(x)$ 在 $[a + \delta_1, b - \delta_2], f(x_1) = M_1$. 令 $M = \max\{M_1, M_2\}$, 则易知 M 为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的最大值，在 $x = x_1$ 或 $x = x_2$ 处取到。

3. 反证法。假设 $\exists x_0 \in (a,b]$, s.t. $f(x_0) < 0$, 则 $f(a)f(x_0) < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 上有零点，这与已知条件 $f(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$ 矛盾，故在 $[a,b]$ 上必有 $f(x) > 0$.

4.$\because \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + px^2 + qx + r) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + px^2 + qx + r) = -\infty$

$\therefore$ 对 $M=1>0, \exists X_1, X_2>0$, 当 $x>X_1$ 时，$f(x)>1$, 当 $x<-X_2$ 时，$f(x)<-1$, 从而 $f(X_1+1)f(-(X_2+1))<0$, 这表明 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ 在 $[-X_2-1, X_1+1]$ 上有零点，即证。

5. 略

6. 提示：$|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}|=|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}|=g(x_1,x_2)$，则在 $(a,1](0<a<1)$ 上，

$g(x_1,x_2)<\frac{1}{a^2}|x_1-x_2|$, 此时,$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=a^2\varepsilon$ 即可。

但在 $(0,1)$ 上，$\exists\varepsilon_0=1>0, \forall\delta>0(\delta<1), \exists x'_\delta=\delta, x''_\delta=\frac{\delta}{2}$, s.t.

$|x'_\delta-x''_\delta|<\delta$, 但 $g(x'_\delta,x''_\delta)=\frac{1}{\delta}>\varepsilon_0$.

7. 注意到 $|\sin x_1-\sin x_2|=2|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}|\leqslant|x_1-x_2|, \forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$ 即可。

8. 令 $F(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\in(0,1),\\ 1, & x=0,1\end{cases}$ 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，从而一致连续 (Th3.4.5)。再由性质 3.4.2 可知 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内一致连续。即证。

9. 由题设，$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\frac{1}{M}\varepsilon, \forall x_1,x_2\in I$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|<\varepsilon$$

即 $f(x)$ 在 I 上一致连续。

10. 证明：令 $f(x)=x^3+4x^2-3x-1$, 则 $f(-6)=-155, f(-1)=5, f(0)=-1$ 且 $f(1)=1$. 易知 $f(x)$ 在 $(-6,-1),(-1,0),(0,1)$ 上必分别有至少一个零点。

即 $x^3+4x^2-3x+1=0$ 至少有 3 个实根，又 x^3+4x^2-3x+1 至多有 3 个实根，即证命题成立。

11.(1) 令 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 则易证存在 $X>|a|$, 当 $x>X$ 时，$|f(x)|\leqslant|A|+1$。而在 $[a,X]$ 上，$f(x)$ 有界，故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有界。

(2) 若 $\forall x\in[a,+\infty), f(x)\equiv A$, 则 A 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最大值和最小值。否则，$\exists x_0\in[a,+\infty)$, s.t. $f(x_0)\neq A$. 不妨设 $f(x_0)>A$, 则对 $\varepsilon=\frac{1}{2}[f(x_0)-A], \exists X_1>|x_0|+|a|>0$, 当 $x>X$ 时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon\Rightarrow f(x)<A+\varepsilon<f(x_0)$$

设 M 为 $f(x)$ 在 $[a,X_1]$ 上的最大值，则 $\forall x\in[X_1,+\infty), f(x)<f(x_0)\leqslant M$,

即 M 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的最大值。

(3) 类似例 8 的思想方法可证。

复习题三

1.(1) 参考 P79. 例 2

(2) 提示：$\lim\limits_{x\to0}x[x]=0=f(0)$; 而对 $\forall k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \lim\limits_{x\to k^-}x[x]=k(k-1)\neq k^2=\lim\limits_{x\to k^+}x[x]$.

2. 由已知，应用无穷小的性质可得，当 $\Delta x \to 0$ 时，

$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - A = o(1)$, 即 $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = [A+o(1)]\Delta x$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = \lim\limits_{\Delta x\to 0}[A+o(1)]\Delta x = 0$, 即证。

3. 只需考虑 $x = \pm a$ 的连续性。

4.$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, \exists x'_n, x''_n (n=1,2,\dots) \in I \cap \mathbb{Q}$, s.t. $x'_1 < x''_1$

$x'_1 > x'_2 > \cdots > x'_n > \dots, \quad x''_1 < x''_2 < \cdots < x''_n < \dots$, 则

$$f(x_1) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) \geqslant f(x'_1) > f(x''_1) \geqslant \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = f(x_2),$$

即证 $f(x)$ 在 I 上严格递减。

5. 证明：由 $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$ 得 $f(0)=0$，则 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x) - f(x)] = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)-f(x)] = \lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x) = f(0) = 0$$

即证 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。往证 $f(x) = Cx$, 为此先证明 $f(n) = Cn$.

事实上，$\forall n \in \mathbb{N}^+, f(n) = f(n-1)+f(1) = f(n-2)+2f(1) = \cdots = nf(1) = Cn$,

又 $\because f(-n)+f(n) = f(-n+n) = f(0) = 0, \therefore f(-n) = -n\cdot C$

而由 $f(1) = f(n\cdot \frac{1}{n}) = f(\frac{n-1}{n}) + f(\frac{1}{n}) = \cdots = nf(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}f(1)$

这就可以证明所有有理数 $r = \frac{p}{q}, p, q$ 互质，满足

$$f(\frac{p}{q}) = f(p\cdot\frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q}f(1) = rf(1)$$

最后，$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 取有理点列 $\{r_n\}, r_n \to x_0 (n\to\infty), \lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) = f(x_0)$,

由归结原则，有 $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = f(1)\lim\limits_{n\to\infty} r_n = f(1)x_0$,

由 x_0 的任意性即证结论成立。

6. 证明：令 $F(x) = f(x) - x$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。若 $F(a)F(b) = 0$, 则已证。

否则，由 $f([a,b]) \subset [a,b]$ 可知 $f(a) > a$ 且 $f(b) < b$, 从而有 $F(a)F(b) < 0$. 由零点定理，$F(x)$ 在 (a,b) 内必存在零点。即证命题成立。

7. 证明：令 $f(x) = x^3+px+q = x(x^2+p)+q$, 则由 $x^2+p \geqslant p > 0$ 可知当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) \geqslant q$, 当 $x < 0$ 时 $f(x) < q$. 这表明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的取值至多改变一次正负号，即 $f(x)$ 至多只有一个零点。又因为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ 且 } \lim_{x\to-\infty} = -\infty.$$

易知必 $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, s.t. $f(x_1) > 0$ 且 $f(x_2) < 0$,由零点定理,$\exists x_0 \in (x_1, x_2)$, s.t. $f(x_0) = 0$. 这就完成了命题的证明。

8. 证明：假设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有间断点 x_0，则由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减及 Th3.2.1 可知 x_0 为跳跃间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A > B = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, 进而 $\forall x\in(a,x_0), f(x)\geqslant \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A.\forall x\in[x_0,b), f(x)\leqslant \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\leqslant B.$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的取值至多只有一个 $f(x_0)\in(B,A)$, 这与值域为 $[f(b),f(a)]$ 矛盾！故 $\forall x_0\in(a,b), f(x)$ 在 x_0 处连续。同理可证 $f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处连续。即证命题成立。

9. 证明：依题设，存在数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 使得 $|f(x_n)|\leqslant\frac{2}{3}|f(x_{n-1})|, \forall n\in\mathbb{N}^+$. 由于 $\{x_n\}$ 为有界数列 $(a\leqslant x_n\leqslant b)$. 故由致密星定理，其必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 而由引理 1.6.1，可选取 $\{x_{n_k}\}$ 的一个单调子列 $\{x_{n_k}\}$, s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = x_0\in[a,b]$, 从而

$$|f(x_0)| = \lim_{k\to\infty}|f(x'_{n_k})| = \lim_{k\to\infty}|(\frac{2}{3})^k f(x'_{n_1})| = 0.$$

10. 利用
$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &= |(f(x_1)-g(x_1))+(g(x_1)-g(x_2))+(g(x_2)-f(x_2))|\\ &\leqslant |f(x_1)-g(x_1)|+|g(x_1)-g(x_2)|+|g(x_2)-f(x_2)|\end{aligned}$$

并结合已知条件即可完成证明。

11. 证明：若 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$, 都有 $f(x_0)=0$. 则 $f(x)$ 已取到最大值 0. 否则，取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$, s.t. $f(x_0)\neq 0$. 并记 $M_1 = |f(x_0)|>0$, 那么 $\exists\delta>0$, 当 $0<x-a<\delta$ 时，$f(x)<-M;\exists X>0$, 当 $x>X$ 时，$f(x)<-M_1$. 显然 $x_0\in[\delta,X]$. 对 $f(x)$ 在 $[\delta,X]$ 上应用最值定理，可知 $\exists x_1\in[\delta,X]$, s.t. $f(x_1)=M\geqslant f(x),\forall x\in[\delta,X]$, 特别地，$M\geqslant f(x_0)\geqslant= -M$，故 $f(x)\leqslant M = f(x_1)$, 对 $\forall x\in(a,+\infty)$ 都成立。

12. 参考 P95 例 6 即可完成证明。

13. 考虑 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,+\infty),\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x), & x=a,\end{cases}$ 并由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在分为 $[a,X+1],[X,+\infty]$ 验证一致连续性。（参考 P95. 例 8）

反例：$f(x)=\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在。

14. 利用函数极限的局部有界性和连续函数的有界性证明 $f(x)$ 有界。利用 Cauchy 收敛准则处理 $|x|>X$, 一致收敛定理处理 $[-X-1,X+1]$, 可证明一致收敛性。

15. 由函数极限保号性及零点定理可证。

16. 注意到 $m\leqslant\min\{f(x_1),\dots,f(x_k)\}\leqslant\lambda_1 f(x_1)+\dots+\lambda_k f(x_k)\leqslant\max\{f(x_1),\dots,f(x_k)\}\leqslant M$.

17. 令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{a}{k})$, 当 $k=1$ 时，$\exists\xi=0\in[0,a], F(0)=0$. 当 $k\geqslant 2$ 时，注意到 $F(0)+\dots+F(\frac{k-2}{k}a)+F(\frac{k-1}{k}a)=0$, 则必存在某个为 0 或两个异号。

18. 类似 17 可证。

习题 4.1

1. 略

2. 在平行条件下，$f'(x_0)=1=g'(x_0)=2x_0\Rightarrow x_0=1/2$.

3. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)=4$.

4. 略

5.$\because\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{-\frac{2}{3}}=\infty,\therefore f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导。

6. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{[\Delta x+(\Delta x)^2]-0}{\Delta x}=1\neq 0=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\cos x-1)-0}{x}$, 即 $f'_-(0)=1, f'_+(0)=0$，但 $f'(0)$ 不存在。

7. 略

8.?

习题 4.2

1.(1)$f'(a)$;(2)$f'(a)$;(3)$\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+2t)-f(a)}{t}=2\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+2t)-f(a)}{2t}=2f'(a)$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2}\frac{f(2t+a)-f(t+a)}{t}=\frac{1}{2}f'(a)$.

(5) 类似 (4),$(\alpha-\beta)f'(a)$;(6)$f'(a)$.

2.(1)$y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}+4x$;

(2)$y'=\frac{1}{(1+\cos x)^2}[10^x\ln 10(1+\cos x)+10^x\cdot\sin x]$;

(3)$y'=(\frac{2a}{a+x}-1)'=\frac{-2a}{(a+x)^2}$ (先处理后求导相对容易)

(4)$y'=[\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-2)}]'=\left(\frac{x(x-2)+(x-2)+3}{x-2}\right)'=(x+1+\frac{3}{x-2})'=1-\frac{3}{(x-2)^2},\qquad(x\neq -1)$;

(5)$y'=(\tan x+x\sec^2 x)-\cos x$;

(6)$y'=\frac{7}{2\sqrt{x}}(1+3x^2)+6x(2+7\sqrt{x})$;

(7)$y'=(\frac{2}{1+\ln x}-1)'=-\frac{2}{(1+\ln x)^2 x}$;

(8)$y'=2x\arccos x\cdot\ln x+x^2\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ln x+x\arccos x$.

3.(1)$y'=10\cdot(3x^2-2)^9\cdot(3x^2-2)'=60x(3x^2-2)^9$;

(2)$\ln y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)\Rightarrow\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x^2}$

$\Rightarrow y'=\frac{1}{1-x^2}y=\frac{1}{1-x^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

(3)$y'=\frac{1}{3}(x^2+x+2)^{-\frac{1}{3}}\cdot(2x+1)$;

(4)$y'=2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x$;

(5)$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})]$;

(6)$y'=3a\sin^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}=a\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$;

(7)$\frac{1}{(x^2-\sin x)\ln 3}(2x-\cos x)$;

(8$\star$)$y'=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(9)$y' = \ln||\cdot||^{x^2+2x}\cdot(2x+2)$;

(10)$y' = ae^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

(11)$y' = \sqrt{a^2-x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} + a^2\frac{\frac{1}{a}}{-\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \ldots$;

(12)$y' = [\arctan\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\ln(x-a) - \frac{1}{2}\ln(x+a)]'$

$= \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\cdot\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+a} = \frac{a}{a^2+x^2} + \frac{1}{x^2-a^2}$;

(13$\star$)$\ln y = \frac{1}{x}\ln x \Rightarrow y'/y = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$;

(14$\star$)$\ln y = x^x, y'/y = (x^x)' = x\cdot x^{x-1} + x^x\ln x \Rightarrow y' = e^{x^x}x^x(1+\ln x)$;

(15$\star$)$\ln y = x\ln\sin x, y'/y = \ln\sin x + x\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x \Rightarrow y' = (\sin x)^x[\ln\sin x + x\tan x]$;

(16)$\ln y = \sum_{k=1}^n \alpha_k\ln(x-a_k), y'/y = \sum_{k=1}^n\frac{\alpha_k}{x-a_k} \Rightarrow y' = y\sum_{k=1}^n\frac{\alpha_k}{x-a_k}$;

4.(1)$f'(x) = 3x^2, f'(2x+1) = f'(u)|_{u=2x+1} = 3(2x+1)^2, f'(2x-1) = 3(2x-1)^2$;

(2)$f(u) \xlongequal{u=2x+1,\quad x=\frac{u-1}{2}} (\frac{u-1}{2})^3 = \frac{1}{8}(u-1)^3, \therefore f'(x) = \frac{3}{8}(x-1)^2, f(2x+1) = \frac{3}{2}x^2, f(2x-1) = \frac{3}{2}(x-1)^2$;

5. 依定义验证，分别为 $m\geqslant 1, m\geqslant 2, m\geqslant 3$.

6. 利用复合函数求导法可得。

7. 只需验证 $x=\pm1$ 处 $f'(1) = f'(-1) = 0$ 即可。

8.(1) 设 $f(x)$ 为偶函数，则 $\forall x\in D_f$, 有 $-x\in D_f$, 且 $f(-x) = f(x)$,

$$f'(-x) = \lim_{h\to0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = -f'(x),$$

即证 $f'(x) = -f'(-x)$, 即 $f'(x)$ 为奇函数。

(2) 同 (1) 可证。

习题 4.3

1. 利用 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ 即可。

(1)$\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$;

(2)$\mathrm{d}y = \frac{1}{9\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}}\mathrm{d}x$;

(3)$\mathrm{d}y = [\frac{\sin 2x}{\sin x^2} - \frac{2x\sin^2 x\cos x^2}{\sin^2 x}]\mathrm{d}x$;(注：$2\sin x\cos x = \sin 2x$)

(4)$\mathrm{d}y = [ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx]\mathrm{d}x$;

2. 一般地，可取 $f(x)$ 时，也可取 $f(x)+C$, 要利用逆向思维：

$$f'(u)g'(v)h'(x)\mathrm{d}x = f'(u)g'(v)\mathrm{d}v = f'(u)\mathrm{d}u = dy,$$

其中，$y = f(u), u = g(v), v = h(x)$.

(1)$\sqrt{x}$;

(2) $\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\cdot a\cdot \mathrm{d}(\frac{x}{a})$

$= \mathrm{d}(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a})$;

(3) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\mathrm{d}(1-x^2)}{2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{d}(-\sqrt{1-x^2})$;

(4) $\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}(1+e^x) = \mathrm{d}(\ln(1+e^x))$;

(5) $2e^{\sin^2 x}\sin x\cos x\mathrm{d}x = e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\mathrm{d}\sin x$

$= e^{\sin^2 x}\mathrm{d}\sin^2 x = \mathrm{d}(e^{\sin^2 x})$;

其余略。

习题 4.4

1.(1) $y'' = -a^2\sin ax - b^2\cos bx, \mathrm{d}^2 y = y''\mathrm{d}x$;

(2) $y = \frac{(x+1)^2-2(x+1)-2}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}$

$y' = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3} - \frac{6}{(x+1)^4}; y'' = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{12}{(x+1)^4} + \frac{24}{(x+1)^5}$.

2.(1) $y = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})$;(预处理非常重要)

$\star$ 重要公式 $(\frac{1}{1-x})^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, (\frac{1}{1+x})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$,

由此即得$y^{(n)} = \dots$;

(2) $y = \frac{(x^n-1)+1}{1-x} = -(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1) + \frac{1}{1-x}, \therefore y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$;

(3) 利用 $\cos x + \sin x = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x) = \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$,

$\Rightarrow y' = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$y'' = \sqrt{2}e^x[\sin(x+\frac{\pi}{4}) + \cos(x+\frac{\pi}{4})] = (\sqrt{2})^2 e^x\sin(x+\frac{\pi}{4}\cdot 2)$

$\dots, y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x\sin(x+\frac{n}{4}\pi)$;

(4) 利用莱布尼茨公式计算：令 $u(x) = e^{-x}, v(x) = x^2+2x+2$,

并注意到 $u^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}, v'(x) = 2x+2, v''(x) = 2, v'''(x) = 0$,

即得 $[(x^2+2x+2)e^{-x}]^{(n)} = (-1)^n e^{-x}[x^2-(2n-1)x+n^2+2-3n] (n\geqslant 3)$.

3.(1) $y' = -\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x}), y'' = \frac{2}{x^3}f'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^4}f''(\frac{1}{x})$,

$y''' = \frac{-6}{x^4}f'(\frac{1}{x}) + \frac{6}{x^5}f''(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^6}f'''(\frac{1}{x})$;

(2) 略。

4. 依定义验证。

5,6. 略。

习题 4.5

$\star$ 牢记$\mathrm{d}y,\mathrm{d}x$有独立意义，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}$.

1.(1)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}(b\sin t)}{\mathrm{d}(a\cos t)}=\dfrac{b\cos t\mathrm{d}t}{-a\sin t\mathrm{d}t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$;

(2)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\tan^2 t|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$;

(3)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{-2}{(1+t)^2}}{-\frac{1}{(1+t)^2}}=-2$.

4.(1$\star$)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\tan t\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}(-\tan t)}{\mathrm{d}(a\cos t)}=\dfrac{1}{3\sin t\cos^4 t}$;

4.(2)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}(\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t})}{\mathrm{d}(e^t\cos t)}=\dfrac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$.

5.垂直时，$k_1k_2=-1$.

复习题四

9$\star$.f 在 $x=3$ 处可导，故必连续，从而有

$$3a+b=\lim_{x\to 3^-}(ax+b)=f(3)=9,$$

进而有

$$a=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)a}{x-3}=f'_-(3)=f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}(x^2)'=6,$$

$$\therefore\begin{cases}a=6\\b=-9\end{cases}$$

习题 5.1

1.$\forall x\in\mathbb{R},f(x)=|x|\geqslant 0=f(0),\therefore f(x)$ 以 $x=0$ 为极小值点。又因为 $f'(0)$ 不存在，$\therefore x=0$ 不是 $f(x)$ 的稳定点。

2. 假设 $f'(x)=D(x)$, 则由 Th5.1.2, 对 $\eta=\frac{1}{2}\in(f'(\sqrt{2}),f'(1))=(0,1),\exists\xi\in(1,\sqrt{2}),\text{s.t. } D(\xi)=f'(\xi)=\eta=\frac{1}{2}$, 这与 $D(x)$ 的定义矛盾。

3. 不妨设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内单调递增，则由 P65 例 8 可知，$\forall x_0\in(a,b)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 均存在。故 $f(x)$ 以 x_0 为连续点或第一类间断点。由 P131 例 1,$f'(x)$ 不能有第一类间断点，矛盾！

习题 5.2

1.(1) 假设方程在 [-1,1] 上有两个不同的实根，即 $\exists x_1, x_2 \in [-1,1], x_1 < x_2$ s.t. $f(x) = x^3 + 3x + c$ 满足 $f(x_1) = 0 = f(x_2)$, 则由于 $f(x)$ 此时在 $[x_1, x_2]$ 上满足罗尔中值定理，故存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, s.t. $f'(\xi) = 0$, 这与 $f'(\xi) = 3(\xi^2 - 1) < 0$ 矛盾！故方程在 [-1,1] 上至多有一个实根。

(2) 假设方程有 4 个不同的实根 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 即 $f(x) = e^x - (ax^2 + bx + c)$ 有 4 个零点 x_1, x_2, x_3, x_4, 则由罗尔中值定理可知，$\exists y_i \in (x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, 3$, s.t. $f'(y_i) = 0$, 再次应用罗尔中值定理可得，$\exists z_i \in (y_1, y_2), z_2 \in (y_2, y_3)$, s.t. $f''(z_1) = f''(z_2) = 0$, 同理，$\exists \xi \in (z_1, z_2)$, s.t. $f'''(\xi) = 0$, 这与 $f'''(x) = e^x > 0$ 矛盾！

2. 易知 $f'(x) = 0$ 恰好有 3 个根，分别在 (1,2),(2,3),(3,4) 上。

3.(1) 令 $f(t) = e^t$, 则 $f(x) - f(0) = e^{\xi}(x - 0), \ldots$

(2) 令 $f(t) = \tan t$, 则 $\tan x - \tan 0 = \frac{1}{\cos^2 \xi} \cdot (x - 0), \ldots$

(3) 令 $f(t) = \sin t$, 则 $\sin x - \sin y = \cos \xi \cdot (x - y), \ldots$

4.(1) 令 $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \arctan \frac{x^2}{1-x^2}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + (\frac{x^2}{1-x^2})^2} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2} [2x(1-x^2) - x^2 \cdot (-2x)] = 0$$

$\therefore f(x) \equiv C = f(0) = 0$. 即证。

(2) 令 $f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2} + \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, 则 $\forall x \in (0,1), f'(x) = 0$, 故 $f(x) \equiv C = f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

5. 令 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b), \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x), & x = a, \\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x), & x = b, \end{cases}$ 则 $F(x)$ 在 (a,b) 内可导，从而在 (a,b) 内连续。又 $\because F(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = F(b), \therefore F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。应用罗尔中值定理可知，存在 $\xi \in (a,b)$, s.t. $f'(\xi) = F'(\xi) = 0$.

6. 依题设，$\forall x \in U_-(a), f(x)$ 在 $[x,a]$ 上连续，在 (x,a) 内可导，由拉格朗日中值定理，$\exists \xi \in (x,a)$, s.t.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

从而

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} f'(\xi) = \lim_{\xi \to a^-} f'(\xi) = \lim_{x \to a^-} f'(x) = l$$

同理可证 $f'_+(a) = l$, 即 $f'_-(a) = l$, 从而 $f'(a) = l$.

7. 令 $\begin{cases} f(x)=\sin\ln x, \\ g(x)=\ln x \end{cases}$ 则 $\begin{cases} f(x) \\ g(x) \end{cases}$ 在 $[1,e]$ 上连续，$(1,e)$ 内可导，从而存在，$\xi\in(1,e)$ s.t.

$$\sin 1=\frac{\sin\ln e-\sin\ln 1}{\ln e-\ln 1}=\frac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}=\cos\ln\xi,$$

即证。

8. 依题设，$\exists M>0$, s.t. $\forall x\in(a,+\infty),|f'(x)|\leqslant M,\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon/M>0,\forall x_1,x_2\in(a,+\infty)$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||x_1-x_2|<\varepsilon,$$

其中第一个等号成立是由于 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$(或 $[x_2,x_1]$) 上满足拉格朗日中值定理的条件，ξ 为介于 x_1 和 x_2 之间的中值点。

9. 类似 Th5.2.3 可证。

10. 对 $f(x)$ 分别在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，可知存在 $x_1\in(a,c),x_2\in(c,b)$, s.t.

$$f'(x_1)(c-a)=f(c)-f(a)=f(c)=[f(b)-f(c)]=-f'(x_2)(b-c)$$

注意到 $f(c)>0$, 故 $f'(x_1)>0$ 且 $f'(x_2)<0$, 对 $f'(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上再次应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, s.t.

$$f''(\xi)=\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}<0,$$

即证。

11.$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，必在 $[0,1]$ 上连续，从而 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上也连续。$\forall t\in[0,1]$, 记 $M_t=\max\limits_{x\in[0,t]}|f(x)|=|f(x_t)|$. 在 $[0,x_t]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,x_t)$, s.t.

$$M=|f(x_t)|=|f(x_t)-f(0)|=|f'(\xi)||x_t-0|\leqslant|f(\xi)||x_t|\leqslant|f(x_t)||x_t|=M|x_t|.$$

注意到 $|x_t|<1$, 故上式当且仅当 $M=0$ 时成立，故 $f(x)\equiv 0,\forall x\in[0,t]$, 由 t 的任意性即证 $f(x)\equiv 0,x\in[0,1),\therefore f(1)=f(0)+f'(\xi)\cdot 1=0$, 即证。

12. 令 $f(t)=e^tf(t)$ 即证。

习题 5.3

1.(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$;

(2) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} a^x \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-a^{\sin x - x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} a^{\sin x - x} \ln a$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} a^{\sin x - x} \cdot \ln a = \dfrac{1}{6} \ln a;$

(2) 原式 $= e^{-\frac{1}{6}}$

$$\because \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin x - \ln x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x - \sin x}{2x\cdot x\cdot \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{6x^2} = \frac{-1}{6}$$

(4) 原式 $= \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t}(e^t - 1) = 1(\because e^t - 1 \sim t, t\to 0);$

(5) 原式 $= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec^2 x}{\sec x \tan x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sin x} = 1;$

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x\ln x + x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} \dfrac{1}{\ln x + 2} = \dfrac{1}{2};$

(7) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} = \dfrac{-1}{3};$

(8) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arcsin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3x^2}(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{6x} \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1}{6};$

(9) $\because [(1+x)^{\frac{1}{x}}]' = (1+x)^{\frac{1}{x}}[\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)]$ (对数求导法)

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}[\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)]$

$= e\cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - (x+1)\ln(1+x)}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1+x} = e\cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - 1 - \ln(1+x)}{2x} = -\dfrac{1}{2}e;$

(10)原式 $= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\pi - 2\arctan x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{-2}{1+x^2}}{-\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x(\ln x)^2}{1+x^2}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2(\ln x)^2 + 4\ln x}{2x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2\frac{1}{x}\ln x + \frac{4}{x}}{2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0;$

(11) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^-} \ln[1 + (x-1)]\ln(1-x) = \lim\limits_{t\to 0^-} \ln(1 + (-t))\ln t$

$= \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\ln t}{(-t)^{-1}} = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\frac{1}{t}}{-2t^{-2}} = 0;$

(12) $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{2}{\pi}\arctan x = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{-x^2}{1+x^2} = \frac{-2}{\pi}$$

$\therefore$ 原式 $= e^{-\frac{\pi}{2}}$;

(13)原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to0} = \dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{6x^2} = \frac{1}{3}.$$

(14) 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2x}(e^x-\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}})$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+2x}}\cdot\frac{e^x\sqrt{1+2x}-1}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2}(e^x\sqrt{1+2x}+e^x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x}}) = 1.$$

2. 应用洛必达法则的条件之一是 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{g(x)}$ 存在...

3. $f'(0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{g(x)}{x}-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{g''(x)}{2} = \dfrac{1}{2}g''(0)$;

4. $\because \lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{2xe^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{2e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{4xe^{x^2}} = 0$,

$\therefore$ 对 $\varepsilon_0 = 1, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时，$|x^3e^{-x^2}| < 1$.

又 $\because x^3e^{-x^2}$ 在 $[-2X, 2X]$ 上连续，$\therefore \exists M_1 > 0, |x^3e^{-x^2}| \leqslant M_1, \forall x \in [-2X, 2X]$,

从而对 $M = M_1 + 1$, 有

$$|x^3e^{-x^2} \leqslant M, \forall x \in \mathbb{R}.$$

5.(1) 连续应用洛必达法则即可。

(2) 不一定成立，试考虑 $f(x) = \begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

6. $\because \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\cos 3x+a+3bx^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-9\sin 3x+6bx}{6x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-27\cos 3x+6b}{6} = 0$

$\therefore 6b = \lim\limits_{x\to0} +27\cos 3x = +27$, 即$b = \dfrac{9}{2}$, 且 $\lim\limits_{x\to0} -3\cos 3x = -3$.

7. 证明：

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, 且$e^xf(x), g(x) = e^x$在$(a, +\infty)$内可导,

$\therefore$ 由 Th5.3.3, 有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{e^x} = 0.$$

8. 证明：

$$\because \lim_{x\to 0^+} f(x)\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} f'(x)\cdot[-x(\ln x)^2]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} f'(x)\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln(x)^2}{\frac{1}{x}} = \cdots = 0$$

$\therefore$ 原式 $= e^0 = 1.$

习题 5.4

$1\star.(1) f(x) = \cos x^2 = 1 - \frac{1}{2!}(x^2)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}(x^2)^{2n} + o((x^2)^{2n})$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^{4n} + o(x^{4n}), x \to 0;$$

$(2) f(x) = \ln[1+(-x)] = -x - \frac{7}{2}(-x)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n + o(x^n)$

$$= -[x + \cdots + \frac{1}{n}x^n + o(x^n)], x \to 0;$$

$(3) f(x) = e^{-x} = 1 + (-x) + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n + o(x^n), x \to 0;$

$(4) f(x) = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^n(n+1)x^n, \quad x \to 0.$

$2.(1) f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5), \quad x \to 0;$

$(2) x/(e^x - 1) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}x^2 + o(x^3), \quad x \to 0.$

$3\star.(1) \because e^x \sin x = [1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)][x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)] = x(1+x) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0$

$\therefore$ 原式 $= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$.(展开由分母次数决定)

$(2) \because \cos - e^{-\frac{x^2}{2}} = [1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)] - [1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)] = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$

$\therefore$ 原式 $= -\frac{1}{12}.$

$(3) \sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x} = 2(1 + \frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}} + 2(1 - \frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$

$= 2[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{3}{4})^2 + o(x^2)]$

$+ 2[1 + \frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{4}x) + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(-\frac{3}{4}x)^2 + o(x^2)]$

$\therefore$ 原式 $= -\frac{9}{32}.$

$(4) 2\cos x + e^{x^2} - 3 = 2[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)] + (1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - 3)$

$= \frac{7}{12}x^4 + o(x^4), \therefore$ 原式 $= \frac{7}{12}.$

5.法一：当$x>0$时,$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}e^{\theta x}x^3>1+\frac{x^2}{2}+(x+\frac{1}{6}x^3)$

$$\geqslant 1+x^2/2+2\cdot\sqrt{x\cdot\frac{1}{16}x^3}=1+x^2,\quad 0<\theta<1;$$

法二：,$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}e^{\theta x}x^3>1+\frac{x^2}{2}+(x+\frac{1}{6}x^3)$

$$\geqslant 1+x^2/2+2\cdot\sqrt{x\cdot\frac{1}{6}x^3}=1+x^2/2+2\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}x^2>1+x^2,\quad x>0.$$

6. 验证 Cauchy 中值定理条件后应用该定理即可。

7. 写法一：假设 $e=p/q,p,q\in\mathbb{Z}^+,p,q$ 互素，对 e^x 取 $n=q$ 阶麦克劳林公式，得

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{q!}x^q+\frac{1}{(q+1)!}e^{\theta x},\quad 0<\theta<1.$$

$\therefore p/q=2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{(q+1)!}e^{\theta}.$

进而有

$$[p/q-(2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!})]\cdot q!=\frac{1}{q+1}e^{\theta},$$

显然上式左端为整数，右端为非整数，矛盾！

写法二：假设 e 为有理数，则 $\exists p,q\in\mathbb{Z},p,q$ 互素， s.t. $e=p/q$.(由于 e^x 存在任意 $k(k\in\mathbb{N})$ 阶导数，故)

$$\because e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1},\quad 0<\theta<1,x\in\mathbb{R}.$$

$$\therefore p/q=e^1=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}$$

对上式两边同时乘以 $n!(n>p)$, 则有

$$(\frac{p}{q}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!})n!=\frac{1}{n+1}e^{\theta}$$

显然上式左端是一个整数，而右端是一个非整数，矛盾！

8. 令$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)h^n$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)h^{n+1}$$

写法一：

$$\therefore \lim_{h\to 0}\theta f^{(n+1)}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)}{n+1}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)$$

又$\because f^{(n+1)}(a)\neq 0,\therefore \lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$

写法二：

$$\therefore \frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h),0<\theta<1,0<\theta_1<1$$

上式两边同时令$h\to 0,\lim\limits_{h\to\theta}\theta f^{(n+1)}(a)=\dfrac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)$,即证$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

9.(仅有 $x=\frac{1}{2}$ 处的导数，故在 $x=\frac{1}{2}$ 处展开)

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-\frac{1}{2})^3,\xi\in(0,1)$$

代入 $f'(\frac{1}{2})=0$ 并计算可得

$$1=f(2)-f(1)=\frac{1}{24}f'''(\xi)$$

$\therefore |f'''(\xi)|\geqslant 24.$

习题 5.5

1.(1) 求导:$f'(x)=4(x-\frac{3}{2})$

★ 找点：$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$, 无 $f'(x)$ 不存在的点

定符号：当 $x>\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)<0,f(x)\downarrow$

当 $x<\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)>0,f(x)\uparrow$

余略

2★(1)① 求导：$f''(x)=\frac{2}{x^3}$

②找点：$f''(0)$ 不存在，无 $f''(x)$ 的零点

③定符号：当 $x>0$ 时，$f''(x)>0,f(x)$ 为下凸函数。

当 $x<0$ 时，$f''(x)<0,f(x)$ 为上凸函数。

拐点为 $(0,f(0))$(由于 $f(0)$ 不存在，故实际上拐点不存在)

余略

3.(1) 令 $f(t)=\ln(1+t)-(t-\frac{t^2}{2}),f'(t)=\frac{t^2}{1+t}>0\Rightarrow f(t)\uparrow,f(t)>f(0)=0$

(2) 略 (两个辅助函数)

(3) 注意 $e^{\frac{x+y}{2}}=e^{\frac{1}{2}x+(1-\frac{1}{2})y}$ 引入 $f(t)=e^t,\because f''(t)=e^t>0$

$\therefore f(t)$ 为下凸函数，故 $f(\frac{1}{2}x+(1-\frac{1}{2})y)\leq\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$

(4) 略。可用 $cauchy$ 中值定理，$Taylor$ 公式，单调性定理

4. 依定义验证即可

5.f‘$'''(a)\neq 0$ 则，’$f''(x)$ 在 $U(a)$ 内保号，从而，$f''(x)$ 在 $U(a)$ 内单调性不变，不妨设 $f''(x)$ 单调递增，则由 $f''(a)=0$ 可知，当 $x\in U_-(a)$ 时 $f''(x)\leq 0$ 从而 $f(x)$ 为上凸函数；当 $x\in U_+(a)$ 是，$f''(x)\geq 0$, 从而 $f(x)$ 为下凸函数，这表明 a 为拐点的横坐标。

6. 令 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$ 则 $f'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$ 当 $-1<x<0$,$f'(x)<0, f(x)\downarrow$;

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0, f(x)\uparrow$. 故当 $x>-1$ 时，$f(x)\geq f(0)=0$

再令 $g(x)=\ln(1+x)-x$, 则 $g'(x)=\frac{x}{1+x}$,……

7. 此题若视 x 为自变量较难处理，故令 $f(h)=(1+h)^x-(1+xh)$，

则 $f'(h)=x(1+h)^{x-1}-x=x[(1+h)^{x-1}-1]$, 当 $-1<h<0$ 时,$f'(h)<0$

当 $h>0$ 时，$f'(h)>0$ 故当 $h>-1$ 时,$f(h)\geq f(0)=0$ 即证

8. 利用下凸函数的定义 (p157 中注 $k_{AB}\leq k_{BC}$……) 分情况讨论即可

9. 令 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}b^p-xb$（(即视 a 为变量，也可视 b 为变量)

则由 $f'(x)x^{p-1}-b=0\Rightarrow x=\sqrt[p-1]{b}\triangleq c$ 易知 $f(x)$ 在 $(0,c)$ 上递减，

在 $(c,+\infty)$ 上递增，故 $f(x)\geq f(c)=\frac{1}{p}x^q+\frac{1}{q}b^q-b\cdot\sqrt[p-1]{b}=0, \forall x>0$

即证 $f(a)\geq 0$, 也就是

$$\tfrac{1}{p}a^p+\tfrac{1}{q}b^q-ab\geq 0$$

10. 需要利用第 9 题结论，令 $a_i=a_i/(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}, d_i=b_i/(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

则由 young 不等式得 $c_id_i\leq\frac{1}{p}c_i^p+\frac{1}{q}d_i^q, i=1,2……,n.$

故 $\quad\sum_{i=1}^n c_id_j\leq\frac{1}{p}\sum_{i=1}^n c_i^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^n d_i^q$

代入 c_i,d_j 并由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 即证命题成立

习题 5.6

1.(1)① 求导:$f'(x)=-\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$

② 找点：$f'(x)=0$(无)$f'(x)$ 不存在的点:$x=2$

$$\left.\begin{array}{l}③定符号：当x>2时\ f'(x)<0, f(x)\downarrow,\\ 当x<2时\ f'(x)>0, f(x)\uparrow\end{array}\right\} f(x)\text{ 在 } x=2 \text{ 有极大值 } f(2)=1$$

(2,4) 略

$$(3)f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 不存在, & x=0\end{cases}\Rightarrow \text{可疑点 } x=0 \text{ 又 }\begin{cases}当x<0时, & f'(x)<0, f(x)\downarrow\\ 当x>0时, & f'(x)>0, f(x)\uparrow\end{cases}$$

2. 由 $Th5.6.1$ 即证

3. 最值: 极值 (可疑即可，不必确立) 与端点取值比较即得

(1)$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$ 可疑点 $x=1, x=\frac{3}{4}$

又 $\because f(-8)=-5, f(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}, f(1)=1\therefore$ 最大值为 $\frac{5}{4}$ 最小值为 -5

余略

$$4. f(x)=|x|\cdot|2x^2-9x+12|=|x|\cdot(2x^2-9x+12)=\begin{cases}2x^3-9x^2+12x, & x\geq 0\\ -(2x^3-9x^2+12x), & x<0\end{cases}$$

其中，$2x^2-9x+12=2(x-\frac{9}{4})^2+12-\frac{81}{8}>0$

$$\because f'(x)=\begin{cases}6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & x>0\\ \text{不存在}, & x=0,\\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & x<0\end{cases}\qquad \text{可疑点：}\ \text{x=0,1,2}$$

比较 $f(-\frac{1}{4}),f(\frac{5}{2}),f(0),f(1),f(2)$ 即得最大值为 $f(1)=5$ 最小值为 $f(0)=0$

6.$f'(x)=3ax^2+2bx+c, f''(x)=6ax+2b$ 由于 $f(x)$ 处处可导，由费马引理可知 $f'(-1)=f'(-2)=0$，即

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}3a-2b+c=0\\ 12a+4b+c=0\end{cases}\quad (\Rightarrow \quad 9a+b=0)\\ \text{由}f(-1)-8\text{及}f(2)=-19\text{可得}\\ \begin{cases}-a+b-c+d=9\\ 8a+4b+c+d=-19\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}a=2,\quad b=-3,\\ c=-12,\quad d=1\end{array}$$

7. 证明：(由导数的定义及极限的局部保号性可知 $\exists U(a),\forall x\in U(a), f^{(n)}(a)$ 在 $U(a)$ 恒大于或恒小于 0, 从而 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $U(a)$ 内单调性不变，……这种思路难以说清楚）

先给出 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的 $Taylor$ 展开式:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$$
$$=f(a)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n, \xi \text{ 介于 } x \text{ 和 } a \text{ 之间}$$

从而 $f(x)-f(a)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$

注意到 $f^{(n)}(a)\neq 0$ 不妨设 $f^{(n)}(a)=A>0$ 则 $\exists\delta>0$ 当 $x\in(a;\delta)\triangleq U(a)$ 时，$f^{(n)}(x)>\frac{A}{2}>0$ 此时，由于 $\xi\in U(a)$ 故 $f^{(n)}(\xi)>0$.

(1) 当 $n=2k+1$ 时，$\forall x\in(a-\delta,a), f(x)-f(a)<0,\forall x\in(a,a+\delta)$,

$f(x)-f(a)>0$ 即 a 不是 $f(x)$ 的极值点。

(2) 当 $n=2k$ 时，$\forall x\in U(a), f(x)-f(a)\geq 0$ 即 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点。

类似可证 $f^{(n)}(a)=A<0$ 的情况

8. 令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, 则 $f'(x)=\frac{1}{x}(\ln x-1)=0\Rightarrow x=e$ 再在 $[2,3]$ 上考虑即可:$\sqrt[3]{3}$

复习题 5

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)f'(a)-f(x)-f(a)}{[(x-a)f'(a)][f(x)-f(a)]}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(a)-f'(x)}{f'(a)[f(x)-f(a)]+f'(x)(x-a)f'(a)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{-f''(x)}{2f'(a)f'(x)+f''(x)f'(a)(x-a)}=\frac{-f''(a)}{2f'^2(a)}$

2.$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln f(x)}$ 而 $\lim\limits_{x\to 0}\ln f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}[ln(a_1^x+\ldots\ldots+a_n^x)-\ln n]\quad(\frac{0}{0})$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+\ldots\ldots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+\ldots\ldots+a_n^x}=\frac{1}{n}\ln a_1\ldots\ldots a_n$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt[n]{a_1 + \ldots\ldots a_n}$$

当 $x > 1$ 时，$(\frac{1}{n})^{\frac{1}{x}} \max ax\{a_1, \ldots, a_n\} \leqslant (\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n})^{\frac{1}{x}} \leqslant \max\{a_1, \ldots, a_n\}$, 且 $\lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{n})^{\frac{1}{x}} = 1$,

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} f(x) = \max\{a_1, \ldots, a_n\};$$

当 $x < -1$ 时，$\min\{a_1, \ldots, a_n\} \leqslant (\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n})^{\frac{1}{x}} \leqslant (\frac{1}{n})^{\frac{1}{x}} \min\{a_1, \ldots, a_n\}$ 且 $\lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{n})^{\frac{1}{x}} = 1$.

$$\therefore \lim_{x\to-\infty} f(x) = \min\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

3, 令 $f(x) = a^x$ 则 $f'(x) = a^x \ln a$ 由 *lagrange* 中值定理，$\exists \xi \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$

$s.t \qquad f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n+1}) = a^\xi \ln a(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = a^\xi \ln a \cdot \frac{1}{n(n+1)}$

整理后即可证

4. 等式在 $[a, x]$ $f(t)$ 和 $g(t)$ 满足 *cauchy* 中值定理的条件,且 $g(x) > g(a)$ 故 $\exists \xi \in (a, x), s.t$

$\frac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)} = |\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}| = |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}| < 1$, 即证

(这里 $g(x) > g(a)$ 是因为 $g'(t) > |f'(t)| \geq 0, g(t)$ 在 $[a, x]$ 上严格单调递增)

5.(1) 原式 $= \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan 3x - \arctan \frac{3x}{1+x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} [\frac{3}{1+9x^2} - \frac{3}{(x+1)^2+9x^2}] \cdot \frac{1}{2x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-3[1+9x^2-(x+1)^2-9x^2]}{(1+9x^2)[(1+x^2)+9x^2]} \cdot \frac{1}{2x} = 3$

(2) 原式 $= \lim_{x\to 1^-} (1+x)^{\frac{1}{\ln(1-x)}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{\ln(1-x)}} = \lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$

$= \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{\ln(1-x)}\ln(1-x)} = e^1 = e$

(3) 原式 $=\lim_{x\to 0} \frac{1}{3x^2}(\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}})$

$=\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\frac{1}{2}x^2)-(1-\frac{1}{2}4x^2)}{3x^2}$

$=1$

(4) 原式 $=\lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0}(e^x + xe^x) \cdot \sqrt{1+x^2} = 1$

6.$f(t) = \sqrt{t}$ 在 $[x, x+1]$ 上满足 Lagrange 中值定理条件，故 $\exists \xi \in (x, x+1)$

s.t. $\qquad \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{\Theta(x)+x}}$, 其中 $0 < \Theta(x) < 1$

另一方面 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\therefore 2\sqrt{\Theta(x)+x} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \Rightarrow 4\Theta(x) + 4x = 2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x}$

即 $\Theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \qquad (\bigstar)$

$\therefore \ \frac{1}{4} \leq \Theta(x) \leq \frac{1}{2}$

(2) 易证 $\lim_{x\to 0} \Theta(x) = \frac{1}{4}, \lim_{x\to+\infty} \Theta(x) = \frac{1}{2}$,(由 $\bigstar$)

7.$f(x)$ 在 (a, b) 内有界，故存在 $M > 0.s.t|f(x)| \leq M, \forall x \in (a, b)$

仅取三点 $x_0 < x_1 < x \in (a, b)$, 则由 $f(x)$ 在 (a, b) 为下凸函数，得

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

关于 x 单调递增，且

$$g(x)\le\frac{M-f(x_0)}{x-x_0}$$

即 $g(x)$ 有界，从而 $\lim\limits_{x\to b^-}g(x)$ 存在，记 $A=\lim\limits_{x\to b^-}g(x)$ 则

$$\lim_{x\to b^-}f(x)=\lim_{x\to b^-}[(x-x_0)g(x)+f(x_0)]=A(b-x_0)+f(x_0)$$

即 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，同理可证 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在

8. 证明: 记 $a_1=\frac{a+c}{2},b_1=\frac{b+d}{2}$ 则 $[c,d]\subseteq[a_1,b_1]\subseteq(a,b)$

由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内为下凸函数，故 $\forall x_1,x_2\in[c,d]$

$$t\triangleq\frac{f(c)-f(a_1)}{c-a}\le\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\le\frac{f(b_1)-f(d)}{b_1-d}\triangleq k$$

记 $L=max\{|t|,|k|\}$ 对上式取绝对值即可证

9. 证明：记 $d=\frac{a+b}{2}$ 并在 $x=c$ 处取 $f(x)=2$ 阶 Taylor 公式，有

$$f(x)=f(d)+f'(d)(x-d)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-d)^2$$

代入 $x=a$ 和 $x=b$ 后求和整理，并取 $c=\xi$ 即证

10.$f'(x)=(\ln(1+x)-\ln x+\frac{-1}{1+x})(1+\frac{1}{x})^x$ 再令 $g(x)=\ln(1+x)-\ln x+\frac{-1}{1+x}$

则 $g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{x(1+x)^2}<0$ 即 $g(x)\downarrow$

又 $\because\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0,\therefore g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0,f(x)\uparrow$

11. 令 $f(x)=xe^{-x}-k$ 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且有任意阶导数

由 $f'(x)=(1-x)e^{-x}=0\Rightarrow x=1$ 此时，$f''(1)=\frac{-1}{e}<0$ 故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的唯一极值点，且为极大值点，从而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取到最大值 $f(1)$

(1) 当 $k=\frac{1}{e}$ 时,$f(1)=0,f(x)=0$ 有一个唯一零点，即方程有唯一的解 $x=1$

(2) 当 $k>\frac{1}{e}$ 时,$f(1)=\frac{1}{e}-k<0$, 从而 $f(x)<0,\forall x\in R$, 方程无解

(3) 当 $k<\frac{1}{e}$ 时,$f(1)=\frac{1}{e}-k>0$, 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-k<0,f(0)=-k<0$

易知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上各有一个零点，从而方程有两个解

12. 依定义验证 (数学归纳法)

13. 令 $f(x)=e^x-x^2+2ax-1$ 则 $f'(x)=e^x-2x+2a,f''(x)=e^x-2$

故当 $x>\ln 2$ 时，$f'(x)\uparrow$, 当 $x<\ln 2$ 时，$f'(x)\downarrow$ 从而 $f'(x)$ 在 $x=\ln 2$ 取到最小值。$f'(\ln 2)=2[a-\ln 2+1]>0$ 即 $\forall x>0,f'(x)>0$

从而 $f(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增，$f(x)>f(0)=0$

14.$\forall x\in(0,+\infty)$，对 $\forall h\in(0,x),\xi_1\in(x,x+h),\xi_2\in(x-h,x),s,t$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2$$

$\therefore 2hf'(x)=[f(x+h)-f(x-h)]-\frac{1}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]h^2$

$$\therefore |f'(x)|\le \frac{1}{2h}[2M_0+h^2M_2]=\frac{1}{h}M_0+\frac{M_2h}{2},\forall x\in(0,+\infty)$$

因此 $\quad M_1\le \frac{1}{h}M_0+\frac{h}{2}M_2\le 2\sqrt{\frac{1}{h}M_0\cdot\frac{h}{2}M_2}=\sqrt{2M_0M_2}$

15. 当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\frac{1}{x^2}[xf'(x)-f(x)]$ 当 $x\neq 0$ 时

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}f(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}$$

又 $\because \lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)+f'(x)-f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)=g'(a)$

$\therefore g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

16.(1)$\because \lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ 应用 $Th5.3.2$ 并由 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 和 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在可得

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

(2) 同 (1) 可证

17. 假设 $\forall x\in(-\infty,+\infty),f''(x)\neq 0$ 则 $f''(x)>0$ 或 $f''(x)<0$ 恒成立

(否则由达布定理 (Th5.1.2)) 必存在 $\xi\in(-\infty,+\infty),f''(\xi)=0)$, 从而 $f'(x)$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调递增 (减). 故 $\exists x_0\in(-\infty,+\infty),s.t,f(x_0)\neq 0$

下面不妨设 $f''(x)>0$ 则 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的下凸函数，

故对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

则当 $f'(x_0)>0$ 时，$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 当 $f'(x_0)<0$ 时，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

这与 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界矛盾！

18. 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0<k_1<1=f(1)$ 故由介值定理

$\exists a_1\in(0,1),s.t.f(a_1)=k_1$ 再由 $f(a_1)=k_1<k_1+k_2<1=f(1),\exists a_2\in(a_1,1).s.t,f(a_2)=k_1+k_2$ 依此类推，可得 $0=a_0<a_1<a_2<\text{……}<a_n=1,s.t.f(a_j)=\sum_{i=1}^{j}k_i,j=1,2\text{……}n$ 对 $f(x)$ 依次在 $[a_i,a_{i+1}](i=0,1,\text{……}n-1)$ 上应用 *Lagrange* 可知，$\exists t_i\in(a_i,a_{i+1}),i=1,\text{……}n-1\ s.t$

$$f'(t_i)=\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}=\frac{k_i}{a_{i+1}-a_i}$$

整理即证命题成立

19. 令 $F(x)=e^{-x}f(x)$ 则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $F'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))\le 0$, 从而 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，即 $\forall x\in[0,+\infty),F(x)\le F(0)=0$ 又 $\because F(x)=e^{-x}f(x)\ge 0,\therefore e^{-x}f(x)\equiv 0$ 即 $f(x)\equiv 0,\forall x\in[0,+\infty)$

20.$\because \lim\limits_{x\to x_0} v(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln u}{u^{-c}}=0, \therefore$ 由复合函数运算法则有

$\because \lim\limits_{x\to x_0}\frac{v(x)\ln u(x)}{\frac{v(x)}{u^c(x)}}=\because \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln u(x)}{u^{-c}(x)}=0$

又 $\because \frac{v(x)}{u(x)}$ 在 $U^0(x_0;\delta)$ 内有界，$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} v\ln u=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{v\ln v}{\frac{v}{u^c}}\cdot\frac{v}{u^c}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)}=e^0=1$

21. 类似第 20 题的方法可证

习题 7.1

1.(2)$\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}[\cos(x-3x)-\cos(x+3x)]$.

(3)$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

(4)$x^4+3=x^2(x^2+1)-(x^2+1)+4$.

(5)$\cot^2 x=\csc^2 x-1$.

(6)$1=\sec^2 x-\tan^2 x,\quad \cos^2 x=1/\sec^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

(8)$\frac{1-x+x^2}{x+x^3}=\frac{(1+x^2)-x}{x(1+x^2)}$.

(9)$\sqrt{x\sqrt{x}}=(x\cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{4}}$.

(10)$5^x e^x=(5e)^x$.

(11)$(2^x+3^{-x})^2=(2^x)^2+2\cdot 2^x\cdot 3^{-x}+(3^{-x})^2=4^x+2\cdot(\frac{2}{3})^x+(\frac{1}{9})^x$.

(12)$(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x(=1-\sin 2x)$.

2. 即 $f'(x)=e^{3x},\quad \therefore f(x)=\int e^{3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{3x}+C$, 代入 $x=0, f(0)=1\Rightarrow C=\frac{2}{3}$.

3.

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C_1, & x<0\\ \int(2x+1)dx=x^2+x+C_2, & x>0\end{cases}$$

由于 $(\int f(x)\mathrm{d}x)'=f(x)$, 故 $\int f(x)dx$ 在 $x=0$ 处连续。

故 $1+C_1=C_2$，从而可取

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}e^x, & x<0\\ x^2+x+1, & x>0\end{cases}$$

习题 7.2

1.(1) $\tan x=\sin x/\cos x, \sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$.

(3) $\cot x=\cos x/\sin x, \cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$.

(2) 法一类似 P7 例 6；(4) 类似。

法二：

$$\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x + \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$
$$= \ln|\sin\frac{x}{2}| - \ln|\cos\frac{x}{2}| + C = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C.$$

(5) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

(6) $\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{d}(4x+5)$.

(7) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

(8)$\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln x + 3)$.

(9)(11) $x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}(x^3+C)$.

(12)$x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}x^2$.

(10) 注意到 $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \csc^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

(13) $\sin x\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.

(14) 利用 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

(15) $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}(\sqrt{x}+1)$.

(16)

$$I = \int \frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{-\mathrm{d}e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}.$$

2.(1) 令 $t^6 = x-1$, 则 $I = \int \frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5\mathrm{d}t$,

再利用 $t^8 = t^6(1+t^2) - t^2(1+t^2) + (t^2+1) - 1$.

(2) 令 $x = a\tan t$, 则，$I = \int \frac{1}{|a^3\sec^3 t|}\cdot a\sec^2 t\mathrm{d}t = ...$ $\quad (1+\tan^2 t = \sec^2 t)$.

(3)$I = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-(\sqrt{2})^2}}$.

(6)$I = \int \sqrt{2^2-(x+1)^2}\mathrm{d}x$(公式法或三角代换)

2.(4) 原式 $= \int \frac{\mathrm{d}x}{|a|\sqrt{1-(\frac{x}{|a|})^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{|a|})}{\sqrt{1-(\frac{x}{|a|})^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C$.

(5) 令 $\sqrt{x} = t$, 原式 $= \int \frac{\cos t}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int \cos t\mathrm{d}t = 2\sin\sqrt{x} + C$.

(7) 原式 $\xlongequal{t=x-1} \int \frac{(t+1)^3+5}{t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{t^3+3t^2+3t+6}{t^2}\mathrm{d}t$

$= \int (t+3+3t^{-1}+6t^{-2})\mathrm{d}t = \cdots = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \ldots.$

(8) 原式 $\xlongequal{t=\sqrt{x-1}} \int \frac{t+1}{t-1}\cdot 2t\mathrm{d}t = \int \frac{2t(t-1)+4(t-1)+4}{t-1}\mathrm{d}t$

$= t^2 + 4t + 4\ln|t-1| + C = \ldots.$

3.(1) 原式 $= \int x\mathrm{d}(-\cos x) = -x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x + C$;

(2) 原式 $= \frac{1}{3}\int \arctan x\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x(x^2+1)-x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} = \dots$$

(3) 原式 $= \frac{1}{2}\int \ln^2 x \mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
$= \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2}\int \ln x \mathrm{d}x^2 = \dots$

(4) 原式 $= 2\int \arcsin x \mathrm{d}\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int \sqrt{1-x}\mathrm{d}x$$
$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C;$$

(5)$I = \frac{1}{3}\int e^{2x}\mathrm{d}\sin 3x = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\mathrm{d}x$
$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}\int e^{2x}\mathrm{d}\cos 3x = \frac{1}{3}e^{2x}(\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x) + I$$
$$\Rightarrow I = \frac{1}{13}e^{2x}(2\cos 3x + 3\sin 3x) + C;$$

(6) 原式 $= I = x\sin(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - I$$
$$\therefore I = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C;$$

(7) 原式 $= \frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{4}(x^2 + x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x) + C;$

(8) 原式 $\xlongequal{t=\sqrt{x}} \int t \cdot (\ln t^2)^2 \cdot 2t\mathrm{d}t = 8\int t^2 \ln^2 t\mathrm{d}t$
$= \frac{8}{3}\int \ln^2 t\mathrm{d}(t^3) = \dots$

(9) 原式 $\xlongequal{t=\sqrt{3-2x}} \int e^t \cdot (-t)\mathrm{d}t = \dots;$

(10) 原式 $\xlongequal{t=\sqrt[3]{x}} \int \cos t \cdot 3t^2\mathrm{d}t = \dots;$

4. 类似例 16，分部积分可得。

5. 代入 4 中的公式可得。

习题 7.3

1.(1) 利用 $x^5 = x^4(1+x) - x^3(1+x) + x^2(1+x) - x(1+x) + (1+x) - 1;$

(2) 法一：令 $R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = 1;$

法二：$1 = (1-x) + x$;(用处不大)

(3) 法一：$R(x) = A/(x+2) + B/(x+2)^2 + C/(x+2)^3 + D/(x+2)^4, (\times);$

法二：平移代换，令 $t = x+2.(\surd);$

(4) 注意到分母仍可分解，令 $1 + x^4 = (x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$
$\Rightarrow a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$. 此时，$x^2 + \sqrt{2}x + 1 > 0, x^2 - \sqrt{2}x + 1 > 0,$

$$\frac{1+x}{1+x^4}=\frac{1-x}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$，作分解后，出现形如

$$I_1=\int\frac{b\mathrm{d}x}{x^2+ax+1}=\int\frac{\frac{b}{2}\mathrm{d}(x+\frac{a}{2})}{(x+\frac{a}{2})^2+(1-\frac{a^2}{4})}\text{(对比}\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+C}\text{)}$$

$$I_2=\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+ax+1}=\int\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+ax+1)-\frac{a}{2}\mathrm{d}x}{x^2+ax+1}=\dots$$

(5)$I_1=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$

$$I_2=\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$I_3=\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

(对 I_3 也可用三角代换，即令 $x=\tan t$)

(6)$1-x^3=-(x-1)(x^2+x+1)$;

(7)$R(x)=\frac{1}{x^3(1+x^2)}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^3(1+x^2)}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x(1+x^2)}$ 再分解;

(8)$\frac{x^2}{1-x^4}=\frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2})=\dots$

2.(1) 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则 $I=\int\frac{1}{3+\frac{10t}{1+t^2}}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int(\frac{3}{3t+1}-\frac{1}{t+3})\mathrm{d}t=\dots$

(2)$I=\int\frac{1}{\frac{1}{\cos^2x}+1}\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2x\mathrm{d}x}{\sec^x+1}=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2x+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C$;

(3) 注意到$I=\int\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$, 且 $\cos x=\frac{\cos x-\sin x}{2}+\frac{\cos x+\sin x}{2}$,

$$I=\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\frac{-1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}=\frac{1}{2}x-\ln|\cos x-\sin x|+C\ \text{(法二：令}t=\tan\frac{x}{2},\dots)$$

(4) 注意到 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}[(\sin x+\cos x)^2-1]$, 故

$I=\frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x-\underline{\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x}$(利用 $t=\tan\frac{x}{2}$ 处理);

3.(1) 令 $\sqrt{x^2+x+2}=xt+\sqrt{2}$, 则 $x=\frac{2\sqrt{2}t}{1-t^2},\mathrm{d}x=\dots$

法二：$I=\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^2\cdot 2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{x}+\frac{1}{4})}{\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{4})^2+(\frac{\sqrt{7}}{4})^2}}=\cdots$，代入附录中对应公式。

(2)$I=\int\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})=\dots$

(3)$I=\int\frac{1+t^3}{1-t^3}\cdot t\cdot\mathrm{d}\frac{1-t^3}{1+t^3}=\dots$, 其中 $t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

(4)$I=\int\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})=\dots$

复习题七

1.$\int xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=xf(x)+(1+\sin x)\ln x+C$;

2.$xf'(x^2)=1\Leftrightarrow[f(x^2)]'=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int[f(x^2)]'\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(x^2)=\frac{1}{2}x+C$,

从而 $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}+C$; 又 $\because f(1)=1\Rightarrow C=\frac{1}{2}$, 故 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2}$;

3.$\because[f(x)e^{-x}+C]'=[f'(x)-f(x)]e^{-x},\therefore\int[f'(x)-f(x)]e^{-x}\mathrm{d}x=f(x)e^{-x}+C$.

4.(1)$\because\int g(x)\mathrm{d}x=\int xf(x)\mathrm{d}x=\int xF'(x)\mathrm{d}x=xF(x)-\int F(x)\mathrm{d}x$,

注意到 $F'(x)$ 存在，故 $F(x)$ 连续，从而上式第三个积分存在，即证。

(2)$\int h(x)\mathrm{d}x=\int\frac{F'(x)}{F(x)}\mathrm{d}x=\ln|F(x)|+C$.

5.(1) 利用 $\cos^4x=(\frac{1+\cos 2t}{2})^2=\frac{1}{4}+\cos 2t+\frac{1}{4}\cos^2 2t=\frac{1}{4}+\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{8}$;

(2) 令 $x=t^6$, 则 $I=\int\frac{t^6+t^3-2}{t^2-1}\cdot 6t^5\mathrm{d}t\dots$;

(3)$I=\int\frac{\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x\frac{\cos^3x}{\cos^4x}}}=\int\frac{1}{\sqrt{\tan x}}\mathrm{d}\tan x=2\sqrt{\tan x}+C$;

(4)$I=\int\ln\cos x\cdot\csc^2x\mathrm{d}x=-\cot x\ln\cos x+\int\cot x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\dots$

(5) 令 $t=\sqrt{x}$, 则 $x=t^2,I=\int 2t\sin t\mathrm{d}t=\dots$

(6) 令 $t=1-\sqrt[3]{x}$, 则 $x=(t+1)^3,I=\int\frac{1}{t}\cdot 3(t+1)^2\mathrm{d}t=\dots$

(7)$\frac{1}{\sin^4x}=\csc^4x=\csc^2x\cdot\csc^2x=(1+\cot^2x)\cdot\csc^2x$,

而 $\csc^2x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cot x$;

(8)$I=\int e^{-x}\frac{(1+x^2)+2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\underline{\int\frac{e^{-x}}{1+x^2}\mathrm{d}x}+\int e^{-x}\cdot(-\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2})=-e^{-x}\frac{1}{1+x^2}+C$;(划线部分保留)

(9)$x^2+2x=(x+1)^2-1$;

(10)$x^5=x^3(1+x^2)-x(1+x^2)+x$;

(11)$t=x+1$(平移代换);

(12) 易知 $x^3-3x^2+4=(x+1)(x^2+ax+4)\Rightarrow a=-4$. 故 $x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2,\dots$

(13) 令 $t=\sqrt{x}$, 则 $I=\int 2t\arctan t\mathrm{d}t=\dots$

(14)$I=\int\arccos x\mathrm{d}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\arccos x+\int\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{x}\arccos x+\int\frac{-\mathrm{d}(\frac{1}{x})}{\sqrt{(\frac{1}{x})^2-1}}=\dots$

(15)$[x\ln\ln x]'=\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}$;

(16)$I=\int\sec x\mathrm{d}\tan x=\sec x\tan x-\int\tan^2x\sec x\mathrm{d}x$

$=\sec x\tan x-\int(\sec^2x-1)\sec x\mathrm{d}x=\sec x\tan x+\int\sec x\mathrm{d}x-I$;

(17)$I=\int\frac{1}{2\sin x\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{2\sin x\cos^2x}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{2\cos^2x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x}$(再化"1"$=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}$);

(18)$1=(1+x^{10})-x^{10}$;

(19)$I=\int\frac{(1+x)e^x\mathrm{d}x}{xe^x(1+xe^x)}=\int\frac{\mathrm{d}(xe^x)}{xe^x(1+xe^x)}\xlongequal{u=xe^x}\int(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u})\mathrm{d}u=\dots$

(20)$I=\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}\sqrt{x^2+1}$;

(21)$\tan^3 x/\sqrt{\cos x}=\sin^3 x/\cos^3 x\sqrt{\cos x}=\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^{7/2}x}$(凑微分);

(22)$I_n=\int\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}(n\geqslant 2)$;

6. $0=f'(1)=a+b+c;0=f''(-1)=-2a+b$,

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+C_1, f(1)=16$, 且 $f(-1)=0$.

习题 8.1

2. 记 $a=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, 则 $a=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2+\frac{a}{3})\mathrm{d}x\Rightarrow a=8$.

3. 类似例 4 可证 (1), 类似例 5 可证 (2).

4. 依定义，讨论 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i(\xi_{i_0}=\frac{1}{2}$ 或 $\forall i,\xi_i\neq\frac{1}{2}$ 进行讨论)

5. 类似推论 8.1.2 可证。

6.$\because f^2(x)\geqslant 0$, 若 $f(x)\not\equiv 0$, 则 $f^2(x)\not\equiv 0$, 从而由推论 8.1.2，$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x>0$, 与已知条件矛盾，故 $f(x)\equiv 0,\forall x\in[a,b]$.

7.(1) 注意到 $\forall x\in(0,1), 1<e^{3x^2}<e^3$, 故 $1<\int_0^1 e^{3x^2}\mathrm{d}x<e^3$;

(2) 注意到 $\forall x\in(0,\frac{\pi}{3}),\frac{1}{3}<1-\frac{2}{3}\cos^2 x<\frac{5}{6}$.

习题 8.2

1.(1)$(\int_{x^2}^1\sin t\mathrm{d}t)'=-2x\sin x^2$;

(2)$(\int_0^{x^2}e^{t^2}\mathrm{d}t)'=2xe^{x^4}$.

2. 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $F(a)=F(b)=0$, 故由 Roll 中值定理可知 $\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $F'(\xi)=0$, 即 $f(\xi)-g(\xi)=0$, 即证。

3. 解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+xe^x}{x^3e^x}=0$;

4.(1)$I=(\frac{x^3}{3}+x^2-3x)|_0^2=\frac{2}{3}$;

(2)$\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C\Rightarrow\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\pi}{6}$;

(3)$I=\int_{\frac{1}{e}}^1\frac{-\ln x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^e\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(\ln x)^2|_{\frac{1}{e}}^1+\frac{1}{2}(\ln x)^2|_1^e=1$;

(4)$I=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})|_0^1=\frac{e^2-1}{2e}$.

习题 8.3

1,2. 参考课堂笔记。

3.(1)$I=\int_2^1\frac{(2-t)^2}{t^{100}}\cdot\mathrm{d}(2-t)=$(书中答案有误);

(2)$I\xlongequal{x=2\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\mathrm{d}t$(注意绝对值号)

$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t$(偶倍奇零)

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=2\pi$;

(3)$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\sin x\mathrm{d}x=\frac{-2}{3}\cos^3 x|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$;

(4) 由例 3，$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\right)=\frac{\pi}{4}$;

(5)$I=\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\sqrt{2}$;

(6)$I\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=\frac{\pi}{4}-u}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln[1+\tan(\frac{\pi}{4}-u)]\mathrm{d}u$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u})\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

5.(1)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{2+x}\mathrm{d}x=\ln\frac{3}{2}$;

(2)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$;

(3)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\cos(\pi\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\cos\pi x\mathrm{d}x=0$;

(4)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^k\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^k\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}$.

6,7. 略。

习题 8.5

1. 对 $f(x)=\frac{1}{1+\tan x},g(x)=x$ 应用 Th8.5.2 , 存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$, s.t.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\tan x}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\tan\xi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\tan\xi}\cdot\frac{\pi^2}{32},$$

注意到 $\tan\xi\in(0,1)$, 即证。

2.$\because\forall n\in\mathbb{N}^+,\exists\xi_n\in(0,1)$, s.t.

$$\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\xi_n^2}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\xi_n^2},$$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$.

3. $\because\forall n\in\mathbb{N}^+,\exists\xi_n\in(0,\frac{1}{n})$, s.t.

$$\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\frac{n^2\mathrm{d}x}{1+(n^2x)^2}=f(\xi_n)\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\mathrm{d}(n^2x)}{1+(n^2x)^2}=f(\xi_n)\arctan n,$$

注意到 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$, 即可完成证明。

4.$\because g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(x)\neq 0$, 故 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，

$\therefore\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.(Th8.5.2)

5. 依题意，应用 Th8.5.2 可得，$\exists\xi\in(a,b)$, s.t.

$$\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sin f(x)\cdot f'(x)\cdot\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{f'(\xi)}\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}f(x),$$

$\therefore |\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x| \leqslant \frac{1}{m}|\cos f(a)-\cos f(b)| \leqslant \frac{2}{m}$.

6.(1) 法一：利用 Th8.5.1;

法二：令 $g(x)=\frac{1}{x}, f(x)=\sin x$, 应用推论 8.5.1，

$\exists \xi \in (a,b)$, s.t. $\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x \mathrm{d}x$, 故

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}|\cos a - \cos\xi| \leqslant \frac{2}{a};$$

(2)$\int_a^b \sin x^2 \mathrm{d}x \xlongequal{t=x^2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t$, 再类似 (1) 可证。

复习题八

1. 记 $a=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t, b=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, 则 $f(x)=x^2-ax+2b$,

$$\because \begin{cases} a=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 (x^2-ax+2b)\mathrm{d}x \\ b=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 (x^2-ax+2b)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{4}{3} \\ b=\frac{2}{3} \end{cases}$$

2. 依题意，$0=g'(x)[\int_x^{ax} f(t)\mathrm{d}t]' = af(ax)-f(x)$,

$\therefore \forall a \in (0,+\infty), af(a\cdot 1)=f(1)$, 即 $f(a)=\frac{1}{a}f(1)$,

即证 $\forall x\in(0,+\infty), f(x)=\frac{c}{x}$, 其中，$c=f(1)$.

3.(1)$I=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+\frac{i}{n})^3}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2}|_0^1=\frac{3}{8}$;

(2)$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{2xe^{x^2}}=0$.

4.$F'(x)=[\int_a^x f(t)(x^2-2xt+t^2)\mathrm{d}t]'=[x^2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-2x\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t+\int_a^x t^2f(t)\mathrm{d}t]'$

$$=2x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t$$

$F''(x)=2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\underline{(+2xf(x)-2xf(x))}, F'''(x)=2f(x)$.

5.(1) 易证 (求导法)$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x, 0<x<\frac{\pi}{2}$;

(2) 利用求导法：$(\ln x/\sqrt{x})$ 在 $(e,4e)$ 上的最大值为 $\frac{2}{e}$, 最小值为 $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

6. 假设 $\forall [c,d]\subseteq[a,b], f(x)\leqslant 0$, 则对 $[a,b]$ 的任意分割及介点集，$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant 0$, 故 $\lim\limits_{||T||\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant 0$, 这与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$ 矛盾！

7. 令 $g(x)=f(x)$, 则 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0, f^2(x)\geqslant 0$. 若 $f(x)\not\equiv 0$, 则 $f^2(x)\not\equiv 0$, 由推论 8.1.2，$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x>0$, 矛盾！

8. 利用可积准则 I 和准则 II 可证。

9. 注意到 $|f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x_k - f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$, 利用可积定义即可完成证明。

10. 类似 Th8.5.2 证明，只需证明 $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

11. 利用公式 (8.3.4) 易证。

12.(1)$\ln(1+n)=\int_0^n \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=(\int_0^1+\int_1^2+\cdots+\int_{n-1}^n)\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$

$$<\int_0^1 \frac{1}{1+0}\mathrm{d}x+\int_1^2 \frac{1}{1+1}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n \frac{1}{1+(n-1)}\mathrm{d}x$$

$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=1+\int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n.$$

(2) 由 (1) 及两边夹即证。

13. 应用 Th8.5.1,$\exists\xi_1\in(\frac{2}{3},1)$, s.t. $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=3\cdot f(\xi_1)(1-\frac{2}{3})=f(\xi_1)$

即 $f(0)=f(\xi_1)$, 在 $[0,\xi_1]$ 上应用 Roll 定理即证。

14 . 利用可积准则 III 及 $\sqrt{f(x_1)}-\sqrt{f(x_2)}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}}$.

15.(1)$f''(x)\geqslant 0\Rightarrow f(x)$ 为下凸函数，故对 $c=\frac{a+b}{2}\in(a,b)$ 及 $\forall x\in(a,b)$,

$f(x)\geqslant f(c)+f'(c)(x-c)$, 从而由积分单调性，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b f(c)\mathrm{d}x+f'(c)\int_a^b(x-c)\mathrm{d}x=f(c)(b-a)$.

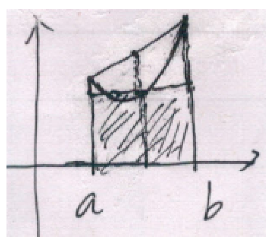

图 2: 复习题八　第 15 题图

(2)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a)=f(x)(x-a)|_a^b-\int_a^b(x-a)f'(x)\mathrm{d}x$①

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-b)=f(x)(x-b)|_a^b-\int_a^b(x-b)f'(x)\mathrm{d}x$②

由 ① 和 ② 可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]-\frac{1}{2}\int_a^b(x-a+x-b)f'(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}(x-a)(x-b)\\&=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]+\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

注意到 $f(x)\leqslant 0$ 及 $f''(x)(x-a)(x-b)\leqslant 0$, 可知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]\leqslant\frac{1}{2}(b-a)f(x),$$

即证。

16. 由推论 8.1.2 及 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 易知 $\exists x_1\in(a,b)$ s.t. $f(x_1)=0$.

假设 $f(x)$ 在 (a,b) 内仅有一个零点 x_1, 则

$$0=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^b f(x)\mathrm{d}x,$$

且 $f(x)$ 在 (a,x_1) 及 (x_1,b) 内不变号，从而

$$\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{x_1}^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0,$$

这表明 $f(x)$ 在 x_1 两边异号，故 $g(x)=(x-x_1)f(x)$ 在 x_1 两侧同号。即 $g(x)$ 在 (a,b) 内仅有一个零点 x_1, 且 $g(x)\geqslant 0$ 或 $g(x)\leqslant 0$ 恒成立。

从而 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\neq 0$, 但

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (x-x_1)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-x_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0,$$

矛盾！故 $\exists x_1,x_2\in(a,b)$, s.t. $f(x_1)=f(x_2)=0$.

17. 易知对 $\forall t\in\mathbb{R},[tf(x)-g(x)]^2$ 可积，且

$$\int_a^b [tf(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$$

即 $t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

故关于 t 的判别法

$$\Delta=[2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

即证。

(2) 两边平方再展开可证。

18. 由 Th8.5.4,$\exists\xi\in(0,2\pi)$, s.t.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x&=f(0)\int_0^{\xi}\sin nx\mathrm{d}x+f(2\pi)\int_{\xi}^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}[f(0)-f(2\pi)](1-\cos n\xi)\geqslant 0\end{aligned}.$$

19.(1) 由 $f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 可得

$$f^2(x)=[\int_a^x f'(t)\cdot 1\cdot \mathrm{d}x]^2 \overset{17.(1)}{\leqslant} \int_a^x f'^2(t)\mathrm{d}t\cdot\int_a^x 1^2\mathrm{d}x$$
$$=(x-a)\int_a^x f'^2(t)\mathrm{d}t\leqslant (x-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

左右再两边同时积分即证。

(2)$\forall x\in(a,b)$,

$$f^2(x)\leqslant\int_a^x f'^2(t)\mathrm{d}t\cdot(x-a)\leqslant\int_a^b f'^2(t)\mathrm{d}t\cdot(b-a),$$

对上式取上确界即证。

20～ 23. 略。

习题 9.2

1.(1) 交点:(-2,2),(2,2).(X 型)

$S_{上}=2\int_0^2(\sqrt{8-x^2}-\dfrac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x=2\pi+\dfrac{4}{3}$,

$S_{下}=8\pi-S_{上}=6\pi-\dfrac{4}{3}$

(2) 交点：(1,1),(2,$\frac{1}{2}$),(2,2)(X 型)$S=\int_1^2[x-\frac{1}{x}]\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-\ln 2$.

(3) 交点：(0,0),(1,e),($1,e^{-1}$)(X 型)$S=\int_0^1(e^x-e^{-x})\mathrm{d}x=e+e^{-1}-2$.

(4)Y 型：$\begin{cases}\ln a\leqslant y\leqslant\ln b\\ 0\leqslant x\leqslant e^y\end{cases}\Rightarrow S=\int_{\ln a}^{\ln b}(e^y-0)\mathrm{d}y=b-a.$

2. 交点 (0,2),(12,-4),Y 型 $S=\int_{-4}^2[(4-2y)-(y^2-4)]\mathrm{d}y=36$.

3.$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|a\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)|\mathrm{d}t=|2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t$

$=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos 2t}{2}\sin^2 2t\mathrm{d}t=3a^2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos 4t}{4}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\cos 2t\mathrm{d}t)$

$=\cdots=\dfrac{3}{8}\pi a^2$.

4.$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=a^2$.

5.$S=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[a(1+\cos\theta)]^2\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a^2$.

6. 略。

7. 注意到点 $(\frac{p}{2},p)$ 处法线斜率为 $-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|_{y=p}=-1$,

法线方程为 $y-p=-(x-\frac{p}{2})$, 交点：$(\frac{p}{2},p),(\frac{9}{2}p,3p)$,Y 型。

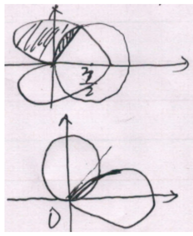

图 3: 习题 9.2 第 8 题图

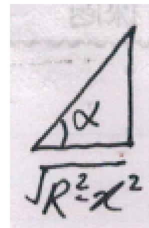

图 4: 习题 9.3 第 1 题图

8.(1)$\begin{cases} r = 3\cos\theta \\ r = 1+\cos\theta \end{cases} \Rightarrow (\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}),(\frac{3}{2},\frac{4}{3}\pi).$

$$S = 2[\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta] = \dots$$

(2)$\begin{cases} r = \sqrt{2}\sin\theta \\ r^2 = \cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$.

$$S = 2[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta] = \dots$$

习题 9.3

1. 依题设 $A(x) = \frac{1}{2}\sqrt{k^2-x^2}\cdot\sqrt{k^2-x^2}\frac{h}{R} = \frac{1}{2}\frac{h}{R}(R^2-x^2)$
   $V = 4\int_0^R A(x)\mathrm{d}x = 2\frac{h}{R}(R^3 - \frac{1}{3}x^3|_0^R) = \frac{4}{3}R^2h(?)$.
2. 截面为正方形，$A(x) = (\sqrt{R^2-x^2})^2 = R^2-x^2, 0 \leqslant x \leqslant a$,
   $V = 8\int_0^a (R^2-x^2)\mathrm{d}x = \frac{16}{3}a^3$.

3.$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{z^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{[ad(z)]^2}+\frac{y^2}{[bd(z)]^2} = 1$, 即以 $Z = z$ 截取椭球所得椭圆的面积为 $\pi abd^2(z)$(P67, 例 4)，从而

$$V = 2\int_0^c \pi abd(z)\mathrm{d}z = 2\int_0^c \pi ab(\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}})^2\mathrm{d}z = \frac{4\pi}{3}abc.$$

4.$V_x = 2\int_0^a \pi y^2\mathrm{d}x = 2\int_0^a b^2(1-\frac{x^2}{a^2})\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi ab^2$, 同理 $V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.

5. 取截面为平行 xy 平面的圆，则 $A(z) = \pi(\sqrt{R^2-z^2})^2, R-H \leqslant z \leqslant R$,

$$V = \int_{R-H}^R \pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z = \pi H^3(R-\frac{H}{3}).$$

6 .$V = 2\int_0^a \pi y^2\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} |(a\sin^3 t)^2\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)|\mathrm{d}t$
$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 t\mathrm{d}t = -6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\mathrm{d}\cos t = \dots = \frac{32\pi}{105}a^3$.

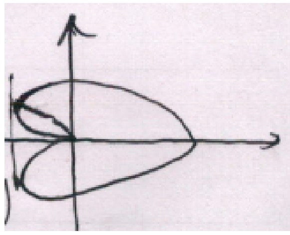

图 5: 习题 9.3 第 7 题图

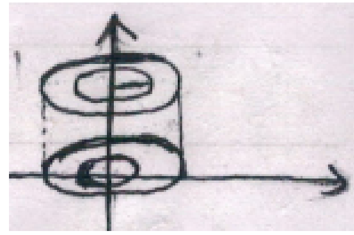

图 6: 习题 9.3 第 8 题图

7.$V=2[\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\pi r^2(\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\pi r^2(\theta)\mathrm{d}\theta]=\frac{8}{3}\pi a^3$.(这里 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 由 $r'(\theta)=0$ 求得，类似 $f'(x)=0$, 即稳定点)

8. 该结论后续要使用。注意到以 $\mathrm{d}x$ 为底，$f(x)$ 为高的矩形绕 y 轴旋转所得小圆环体积 $\mathrm{d}V=2\pi x\cdot f(x)\mathrm{d}x, a\leqslant x\leqslant b$, 即证。

习题 9.4

1.$L=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^a\sqrt{1+(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{e^x+e^{-x}}{2}\mathrm{d}x=\frac{e^a-e^{-a}}{2}$.

2.(1)$L=2\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8)$;

(2) 考虑 $x=e^y, 0\leqslant y\leqslant\ln\sqrt{3}, L=\int_0^{\ln\sqrt{3}}\sqrt{1+e^{2y}}\mathrm{d}y=?$

$$\begin{aligned}L&=\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=\tan t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec t}{\tan t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin t\cos^2 t}\mathrm{d}t\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{-\mathrm{d}\cos t}{(1-\cos^2 t)\cos^2 t}=\dots\end{aligned}$$

(3)$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=\cdots=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\mathrm{d}t=6a$;

(4)$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}t\mathrm{d}t=2a\pi^2$;

(5)$L=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\cdots=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}a\pi$;

(6)$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a$.

习题 9.5

1.(1)$V=\int_0^{\pi}2\pi y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\pi}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\mathrm{d}\sin x$,

利用公式

$=2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$.

$$(2)V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a\sin^3 t\sqrt{[(a\cos^3 t)']^2+[(a\sin^3 t)']^2}\mathrm{d}t$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\mathrm{d}t = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

$(3)S_x = 2\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x = 4\pi\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}})^2}\mathrm{d}x = \dots$

利用 $\begin{cases} y = b\sin t \\ x = a\cos t \end{cases}, 0\leqslant t\leqslant 2\pi, S_x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t = \dots$

需分 $a>b, a<b, a=b$ 讨论。

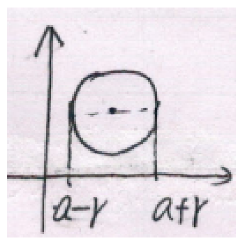

图 7: 习题 9.5　第 1.(4) 题图

$(4)S = S_1+S_2$(直角坐标系下计算复杂)，其中 S_1 为上半部分面积，S_2 为下半部分面积。

$$\begin{cases} x = r\cos t + a \\ y = r\sin t + b \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \pi$$

$$S_1 = 2\pi\int_0^{\pi}(r\sin t+b)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t = \cdots =$$

$$S_2 = \dots$$

2.(1)$S = \int_0^{\pi} 2\pi r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta = 2\pi a^2\int(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \cdots = \frac{32}{5}\pi a^2$;

$$(2)S = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta = 8(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\pi a^2.$$

习题 9.7

1.(1)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2}|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$;

(2)$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}e^{-ax}|_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$;

(3)$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{-a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2+b^2}$;

(4)$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}+\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$;

(5)$I=\int_0^1\frac{-\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}|_0^1=1$;

(6)$\because\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\frac{1}{x\sqrt{(1-x)^2}}=1,\therefore\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(1-x)^2}}$ 发散，故原积分发散。

(7) 由于 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 发散，故原积分发散。

(8)$I=\int_1^e\frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\arcsin(\ln x)|_1^e=\frac{\pi}{2}$.

(9)$I=(\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1)\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}=\arcsin(2x-1)|_0^{\frac{1}{2}}+\arcsin(2x-1)|_{\frac{1}{2}}^1=\pi$;

(10)$I\xlongequal{t=-\ln x}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^p}\mathrm{d}t=(\int_0^1+\int_1^{+\infty})\frac{1}{t^p}\mathrm{d}x$ 发散。

2.$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛但 $\int_0^1(\frac{1}{\sqrt{x}})^2\mathrm{d}x$ 发散。

3. 反证法。假设 $A\neq0$, 不妨假设 $A>0$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Rightarrow\exists X>0$, 当 $x>X$ 时，$f(x)>\frac{A}{2}$, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=+\infty$, 与已知矛盾！即证。

$$4.f(x)=\begin{cases}2^{n+1}(x-n), & n\leqslant x\leqslant n+\frac{1}{2^{n+1}}\\ 2+2^{n+1}(n-x), & n+\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant x\leqslant n+\frac{1}{2^n}\\ 0, & n+\frac{1}{2^n}\leqslant x\leqslant n+1\end{cases},\quad n=0,1,2,\dots$$

习题 9.8

1.(1)(设积分为无穷积分)$\because\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{5}}\frac{1}{\sqrt[5]{x^3+1}}=1,\therefore$ 原积分发散；

(2)$\because\lim\limits_{x\to+\infty}x^3|\frac{x\arctan x}{1+x^4}|=\frac{\pi}{2},\therefore$ 原积分收敛。

(3)$\because\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)^2\frac{1}{(x-1)^2}=1,\therefore\int_0^1\frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$ 发散，原积分发散。

(4) 仅有一个瑕点 $x=0.\because\sqrt{x}\frac{\ln x}{1-x}\to0,x\to0,\therefore$ 原积分收敛。

(5)$I=(\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1+\int_1^2+\int_2^{+\infty})\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}\mathrm{d}x$

注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{x^2(x-1)^2}}=1,\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}=1,$

$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}=1,\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\sqrt{x^2(x-1)^2}}=1$

即可证原积分收敛。

(6)$I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x^2)}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p(1+x^2)}\mathrm{d}x,$

其中，当 $p<1$ 时，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x^2)}$ 收敛；当 $p+2>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 收敛。

(即 $-1<p<1$ 时收敛，$|p|\geqslant1$ 时发散)

(7) 注意到 $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},x\to0$, 易知 $p-2<1$ 即 $p<3$ 时收敛，$p\geqslant3$ 时发散。（事实上：当 $p<3$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}x^{p-2}|\frac{1-\cos x}{x^p}|=\frac{1}{2}$;

当 $p\geqslant3$ 时，$\lim\limits_{x\to0}x^{p-2}|\frac{1-\cos x}{x^p}|=\frac{1}{2}$);

(8)$I=\int_0^1\frac{x^q}{1+x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}\mathrm{d}x$

对于 $\int_0^1\frac{x^q}{1+x^p}\mathrm{d}x,q<1$ 收敛？$\times$ 非瑕积分！

对于 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}\mathrm{d}x$,$p-q>1$ 收敛 $\surd$

即当 $p-q>1$ 时收敛；当 $p-q\leqslant 1$ 时发散。

2.(1)$\because$ $(i)|\int_0^u\sin x\mathrm{d}x|\leqslant 0,(ii)\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{100+x}=0$ 且 $\frac{\sqrt{x}}{100+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调。

$\therefore\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x}{100+x}\mathrm{d}x$ 收敛。

又 $\because|\frac{\sqrt{x}\sin x}{100+x}|\geqslant\frac{\sqrt{x}\sin^2 x}{100+x}=\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}-\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{2(100+x)}$,

且易知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{2(100+x)}$ 发散，$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{2(100+x)}\mathrm{d}x$ 收敛。

$\therefore\int_0^{+\infty}|\frac{\sqrt{x}\sin x}{100+x}|\mathrm{d}x$ 发散，从而原级数条件收敛；

(2)$I\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\mathrm{d}t$, 按 $\begin{cases}2-\alpha>1\\0<2-\alpha\leqslant 1\\2-\alpha\leqslant 0\end{cases}$ 讨论即可。

3. 利用 $|fg|\leqslant\frac{1}{2}(f^2+g^2),|f+g|^2\leqslant 2(f^2+g^2)$.

4. 利用 $\int_a^u h(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^u g(x)\mathrm{d}x$.

5.(1)$I=(\int_0^1+\int_1^{+\infty})f(x)\mathrm{d}x$, 由于 $p>1$, 故 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛。

注意到 $x\to 0,\sin x\sim x$, 故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=1(p>1)$, 即 0 非瑕点；

(2)D' 判别法可证本身收敛，再由 $|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x|>\frac{1}{2x}(1-\cos 2x)$ 可证非绝对收敛。

(3)$\because\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}|(\ln x)^n|=0,\therefore$ 原级数绝对收敛。

(4)$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^\alpha\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

第一项, 当 $\alpha>-1$ 时，绝对收敛；当 $\alpha\leqslant -1$ 时，发散。

第二项，绝对收敛。

习题 10.1

1.(1) $\because S_n=[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\cdots+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})]\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2n+1)}$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}.$$

(2)$S_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\times 2-1}{3^2}+\dfrac{2\times 3-1}{3^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{3^n}$

$\dfrac{1}{3}S_n=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2\times 2-1}{3^3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{3^n}+\dfrac{2n-1}{3^{n+1}}$

$\therefore S_n=\dfrac{3}{2}[\dfrac{1}{3}+2(\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^n})-\dfrac{2n-1}{3^{n+1}}]\to 1.$

(3)$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\Rightarrow S_n=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\to\sqrt{2}-1.$

(4)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=1.$

2.$a_1=S_1=1$, 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}$.

3.$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sin n, \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{3n^2-2}$ 不存在，而 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1\neq 0, \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=e^{-1}, \therefore$ 各个级数均发散。

4.(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 收敛，则由 $b_n=a_n-(a_n-b_n), \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛及 Th10.1.2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，反之亦然。

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 发散，假设 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛及 Th10.1.2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 收敛，矛盾！即证 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，反之亦然。

5. 由 $S_n=a_1-a_{n+1}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$(? 为什么?) 即证。

6.(1) 注意到

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|\leqslant\frac{1}{3^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{3^{n+p}}\leqslant\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3^n}.$$

(2)$\because a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}>\frac{1}{\sqrt{4n^2}}=\frac{1}{2n}$(且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散)，$\therefore \ldots$

对 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}, \forall N>0, \exists n_0=2N, p_0=n_0=2N, \quad \text{s.t.}$

$$|a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\cdots+a_{n_0+p_0}|\geqslant\frac{1}{4}=\varepsilon_0.$$

7. 令 $T_n=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$ 及 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 满足 $S_{2n-1}=T_n+\sigma_{n-1}, S_{2n}=T_n+\sigma_n$, 且

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(T_n+\sigma_{n-1})=\lim_{n\to\infty}(T_n+\sigma_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_{2n},$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，这表明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

8. 不妨设 $a>0$, 则由极限的保号性可知，$\exists N_1\in\mathbb{N}^+$, 当 $n>N_1$ 时，$na_n>\frac{1}{2}a$, 即 $a_n>\frac{1}{2n}a, \forall n>N_1$, 故 $\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}, \forall N\in\mathbb{N}^+, \exists n_0=N_1+N$ 及 $p_0=n_0$ 使得

$$|a_{n_0+1}+\cdots+a_{n_0+p_0}|\geqslant\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

即证 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

9.(1)$A_n\leqslant C_n\leqslant B_n$，对部分和数列应用迫敛性定理即证 (这里不妨假设 $n\geqslant 1$ 时 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$).

(2) 不一定：如 $a_n=-\frac{1}{n}, c_n=0, b_n=\frac{1}{n}$.

10. 令 $b_n=(n+1)a_{n+1}-na_n$, 则由 $\{na_n\}$ 收敛易证 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。

又 $\because a_{n+1}=b_n-n(a_{n+1}-a_n), \therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

习题 10.2

1.(1)$\because \frac{\ln x}{x^p}$ 在 $[2,+\infty)$ 上非负且单调递减趋于 0，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 和 $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}\mathrm{d}x$ 同敛态。注意到

(i) 当 $p>1$ 时，$d=\frac{p+1}{2}>1$, s.t. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^d\frac{\ln x}{x^p}=0$, 故 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p}\ln x\mathrm{d}x$ 收敛。

(ii) 当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{\ln x}{x^p}=+\infty$, 故 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p}\ln x\mathrm{d}x$ 发散。

综上所述，可知，当 $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 发散。

(2) 提示：对 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln x}\mathrm{d}x$, 当 $p>1$ 时，$0<\frac{1}{x^p\ln x}<\frac{1}{x^p}, x>3$; 当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\frac{1}{x^p\ln x}>\frac{1}{x\ln x}$, 后者发散。

(3)$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^p}=\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^p}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p}$.

(4) 当 $\sigma>1$ 时，易证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^\sigma(\ln\ln x)}\Big/\frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)^2}=0$, 利用 (3);

当 $\sigma\leqslant 1$ 时，$\frac{1}{x(\ln x)^\sigma(\ln\ln x)}\geqslant\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)}$, 再利用 (3).

2.(1)$\because 0\leqslant\frac{1}{n+2^n}\leqslant\frac{1}{2^n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛。$\therefore$ 原级数收敛。

(2)$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n^2+1}\Big/\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore$ 原级数发散。

(3) 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n^2}=1$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ 收敛。

(4)$\because\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)\Big/\frac{1}{n}=\ln a$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore$ 原级数发散。

(5)$\because$ 当 $n\geqslant 9$ 时，$0\leqslant\frac{1}{(\ln n)^n}<\frac{1}{2^n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故原级数收敛。

(6)$\because\lim\limits_{n\to\infty}(1-\cos\frac{1}{n})\Big/\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故原级数收敛。

3.(1)$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}<1, \therefore$ 原级数收敛。

(2)$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{3})<1, \therefore$ 原级数收敛。

(3)$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}3(\frac{n}{n+1})^n=3/e>1, \therefore$ 原级数发散。

$$(4)\because\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^n\cdot(n+1)(\frac{\sin\frac{1}{2n+1}}{\sin\frac{1}{2n}})^n\cdot\sin\frac{1}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^n\cdot\lim_{n\to\infty}(\frac{2n}{2n+1})^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1.$$

$\therefore$ 原级数收敛。

4. 利用比值法易证对应级数收敛。

5. 利用 $0\leqslant a_{n+1}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}}a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}b_{n+1}$ 即证。

6. 由 $|a_nb_n|\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2), \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛显然，及 $\frac{|a_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2})$ 即证。

7.$a_n=a_1+(n-1)d$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{\frac{1}{n}}=d$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同敛态，$\therefore\ldots$

8. 由已知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 故对 $\varepsilon=1>0, \exists N$, 当 $n>N$ 时，$|a_n|<1$. 从而 $0\leqslant a_n^2<a_n$, 再由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。反例：$a_n=\frac{1}{n}$.

9.$\because 0\leqslant\sqrt{a_na_{n+1}}\leqslant\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛。

反例：$a_n=\begin{cases}1, & n=2k-1,\\ \frac{1}{n^4}, & n=2k,\end{cases}$ $\{a_n\}\downarrow$, 则由 $a_{n+1}\leqslant\sqrt{a_na_{n+1}}$ 即证。

10. 令 $b_n=(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n), b_0=1, a_0=0, n\geqslant 1$, 则

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} \\ &= \frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_n)} \\ &= \frac{1}{b_{n-1}}-\frac{1}{b_n}, \end{aligned}$$

且 $b_n=1+\sum_{k=1}^n a_k+\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} a_j a_k+\dots+\prod_{j=1}^n a_j\geqslant \sum_{k=1}^n a_k$.

(1) 当 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛时，由 $0\leqslant c_n\leqslant a_n$ 可知 $\sum_{n=1}^\infty c_n$ 收敛，即证。

(2) 当 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 发散时，显然有 $\sum_{n=1}^\infty a_k=+\infty$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$,

从而 $S_n=c_1+c_2+\dots+c_n=1-\frac{1}{b_n}\to 1$, 即证。

11.(1)$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ 原级数发散。

(2)$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{n}{\sqrt{n+1}}\to+\infty\Rightarrow$ 原级数收敛。

(3)$\because 3^{\ln n}=(\ln 3)^n$, 即 $\frac{1}{3^{\ln n}}=\frac{1}{(\ln 3)^n}$, 且 $\ln 3>1,\therefore$ 原级数收敛。

(4)$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(a^{\frac{1}{n+1}}-1)\to-\ln a$, 故

当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时收敛；当 $a>\frac{1}{e}$ 时发散。

习题 10.3

1.(1)$\because \frac{\sqrt{n}}{n+1}\geqslant 0$ 且 $\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\}$ 单调递减趋于 0，$\therefore$ 原级数收敛。

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}\cdot n=+\infty$ 且 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore\sum_{n=1}^\infty\left|(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|$ 发散. 故原级数条件收敛。

(2)$\because\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ 不存在，$\therefore$ 原级数发散。

(3)$\sin\frac{1}{n}\geqslant 0$ 且 $\{\sin\frac{1}{n}\}$ 单调递减趋于 0 ，$\therefore$ 原级数收敛。

又 $\because\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1$ 且 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore$ 原级数条件收敛。

(4) 易证 $\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛且 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散。

(5)$\because\frac{\ln(n+1)}{n}\geqslant 0$ 且 $\{\frac{\ln(n+1)}{n}\}$ 单调递减趋于 0 ，$\therefore$ 原级数收敛。

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{\ln(n+1)}{n}=+\infty$ 且 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$ 发散，故原级数条件收敛。

(6)$\because\left|\frac{1}{3^n}\sin\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{3^n},\forall n\in\mathbb{N}$, 且 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{3^n}$ 收敛。$\therefore$ 原级数收敛且绝对收敛。

2.(1)$\because$ 当 $x\geqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\neq 0,\therefore$ 原级数发散。

当 $0<x<1$ 时，$\sum_{n=1}^\infty x^n$ 收敛，且 $\{\frac{1}{1+x^n}\}$ 单调有界，故由 Abel 判别法可证级数收敛且绝对收敛 (本身非负)

(2) 当 $p>1$ 时，由 $\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}$ 可知原级数绝对收敛。

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由于 $\{\frac{1}{n^p}\}$ 单调趋于 0 且 $|\sum_{k=1}^n\sin kx|\leqslant\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$, 故 $\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin nx}{n^p}$ 收敛。再由 $\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{(\sin nx)^2}{n}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}\cos 2nx$ 易证 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2n}\cos 2nx$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$ 发散，

进而原级数条件收敛。

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin^2 n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n-1}}{2n}-\frac{(-1)^{n-1}\cos 2n}{2n}]$

易证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$(交错级数) 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos 2n}{2n}$(D' 判别法) 收敛。

但由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，$\left|\frac{\sin^2 n}{n}\right|=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2n}{2n}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{\sin^2 n}{n}\right|$ 发散，从而原级数条件收敛。

(4)$\because\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ 单调趋于 0 且 $|\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{3}k|\leqslant 1,\therefore$ 原级数收敛。

又 $\because\ \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n}{3}\pi\right|\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}(\cos\frac{n}{3}\pi)^2=\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{2\sqrt{n}}\cos\frac{2}{3}n\pi\geqslant 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\cos\frac{2\pi}{3}$ 收敛，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n}{3}\pi|$ 发散，从而原级数条件收敛。

3.$\{b_n\}$ 有界，故 $\exists M>0,\ \text{s.t.}\ |b_n|\leqslant M$, 故 $|a_nb_n|\leqslant M|a_n|$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛。即证。

4. 收敛（可参考例 3）

5. 易知 $b_n=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geqslant 0$ 且 $\{b_n\}$ 单调递减，又 $\because\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

$\therefore$ 由 Cauchy 命题得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 收敛。

6. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>0$, 易知 $\exists N$, 当 $n>N$ 时，$a_n>a_{n+1}>0$, 即 $\{a_{N+n}\}$ 单调递减，不妨设 $\{a_n\}$ 单调递减，由 $a_n>0$ 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记为 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant 0$. 若 $a>0$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}=1$, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n-(n+1)a_{n+1}}{a_{n+1}}=0$, 矛盾！故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 即可证。

习题 11.1

1. 易知 $f(x)=x$, 则

法一：由 $|f_n(x)-f(x)|=\frac{x(1+x)}{1+n+x}\leqslant\frac{2}{n}<\varepsilon\Rightarrow N=N(\varepsilon)$, 依一致收敛定义可证 $f_n(x)\rightrightarrows f(x),(n\to\infty),x\in[0,1]$

法二：由 $0\leqslant\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{2}{n}\to 0\quad n\to\infty$ 及 Th11.1.1 可证

(2) 易得 $f(x)=0$

(i)$d(f_n,f)=\sin\frac{1}{n}\to 0,n\to\infty$;(ii)$d(f_n,f)=1\nrightarrow 0,n\to\infty$

(3) 易得 $f(x)=0$, 而令 $g_n(x)=|f_n(x)-f(x)|=nxe^{-nx}$ 且由 $g_n'(x)=ne^{-nx}(1-nx)=0\Rightarrow x=\frac{1}{n}$ 验证可知 $g_n(\frac{1}{n})$ 为 $g_n(x)$ 在 $[0,1]$ 的最大值，$g_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{e}$, 即

$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{e}\nrightarrow 0,n\to\infty$

故 $f_n(n)\not\rightrightarrows f(x)\quad(n\to\infty),x\in[0,1]$

(4) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ \frac{1}{2}, & x=1\end{cases}$

(i) 法一:$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1)}(1-\frac{1}{1+x^n})=\frac{1}{2}$

法二：由 $\{f_n(x)\}$ 均连续,$f(x)$ 不连续，应用 Th11.2.1,$f_n(x)\not\rightrightarrows f(x),x\in[0,1]$

(ii)$0 \le \sup_{x\in[0,r]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,r]} \frac{x^n}{1+x^n} \le r^n \to 0 \Rightarrow \sup_{x\in[0,r]} |f_n(n)-f(n)| \to 0, n\to\infty$, ……

(5) 注意定义区间与 n 的关系则易得 $f(x) = \begin{cases} -1, & -1\le x\le 0 \\ 0, & x=0 \\ 1 & 0\le x\le 1 \end{cases}$

故 $\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)-f(x)| \ge sup_{x\in(0,\frac{1}{n})}|f_n(x)-f(x)| = 1 > 0$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)| \ne 0, f_n(n)$ 在 $[-1,1]$ 上不一致收敛

(也可由 Th11.2.1 证明)

(6)$f(x) = \begin{cases} -1, & x=0 \\ 0, & 0<x<1 \end{cases}$

$sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| \ge sup_{x\in(0,\frac{1}{n+2})}|-(n+1)x+1| \ge 1, \therefore$ ……

(7)$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}} \triangleq f(x), \quad n\to\infty, x\in(0,+\infty)$

$sup_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)| = sup_{x>0}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}})} \geqslant \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}}{2\sqrt{\frac{1}{n^2}}(\sqrt{\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}})} \geqslant 1 \nrightarrow 0$

2.$\forall\varepsilon>0, \exists N_1, N_2>0$, 当 $n>N_1$ 时，$|f_{n+1}+ \ldots\ldots + f_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$

当 $n>N_1$ 时，$\forall p\in N^+$,$|g_{n+1}+\ldots\ldots+g_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$

故 $\exists N = N_1+N_2$ 当 $n>N$ 时，$\forall p\in N^+$,$|f_{n+1}+\ldots\ldots+f_{n+p}+g_{n+1}+\ldots\ldots+g_{n+p}|$

$\leqslant |f_{n+1}+\ldots\ldots+f_{n+p}| + |g_{n+1}+\ldots\ldots+g_{n+p}| < \varepsilon$

3.$|f_ng_n - fg| = |(f_n-f)g_n + f(g_n-g)| \leqslant |g_n||f_n-f| + |f||g_n-g|$

$\le M_2|f_n-f| + M_1|g_n-g|$

其中 M_1 为 $|f|$ 的一个上界，M_2 为 $\{g_n(x)\}$ 的一个上界

$$|g_n(x)| \leqslant |g(x)|+1, n>N.$$

4. 依题设 $0\le sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| \le a_n$, 故由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 即得

$\lim\limits_{n\to\infty} sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| = 0$

即证

5.$0 \le sup_{x\in(a,b)}|f_n(x)-f(x)| = sup_{x\in(a,b)}\frac{\left|[nf(x)]-nf(x)\right|}{n} \le sup_{x\in(a,b)}\frac{1}{n} \to 0, n\to\infty$

6. 略

习题 11.2

1. 易知 (参考例 3)$f(x) = 0$

(1) 即需证 $sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| = sup_{x\in[0,1]} n^\alpha x e^{-nx} \to 0.$

由于 $g_n(x)=|f_n(x)-f(x)|$ 在 $x_n=\frac{1}{n}$ 取得最大值 $g_n(\frac{1}{n})n^{\alpha-1}xe^{-1}$(事实上令 $g_n(x)=0\Rightarrow x_n=\frac{1}{n}$ 并易证该结论），故当且仅当 $\alpha<1$ 时

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}e^{-1}=0,$$

使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛

(2) 要使 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 n^\alpha xe^{-nx}dx=\lim\limits_{n\to\infty}[-(n^{\alpha-2}+1)e^{-n}+n^{\alpha-2}]$
$=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_0^1 0dx=0\Rightarrow\quad\alpha<2.$

(3)$\frac{d}{dx}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))=0$ 要使 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha(1-nx)e^{-nx}=0$
对 $\forall x\in[0,1]$ 上，则取 $x=0$ 即可知，$\alpha<0(x\in(0,1])$, 极限恒成立。

2. 注意到 $|f_n(x_n)-f(x_0)|=|(f_n(x_n)-f_n(x_0))+(f_n(x_0)-f(x_0))|$

$$\le \underbrace{|(f_n(x_n)-f_n(x_0)|}_{\text{连续性}}+\underbrace{|f_n(x_0)-f(x_0)|}_{\text{一致收敛性}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,...$$

3. 直接验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to\ x_0} f_n(x)=\lim\limits_{x\to\ x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$
$[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx]'=\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$
是否成立即可，不必验证是否满足 Th11.2.1,Th11.2.3,Th11.2.4 的条件。

4.$|a_m-a_n|=|a_m-f_m(x)+f_m(x)-f(x)+f(x)-f_n(x)+f_n(x)-a_n|$

5. 显然 $g_n(x)=f^{(n)}(x)$ 满足 Th11.2.4 条件，故 $g_n(x)$ 一致收敛于一个连续可微函数 $\varphi(x)$, 且 $\varphi'(x)=g(x)$. 再由 $g_n(x)\rightrightarrows g(x)$

可知 $g'(x)=g(x)$, 解之得 $(\ln g(x)=1)'$, 从而 $g(x)=ce^x$

习题 11.3

1.（1）$S_n(x)=|u_1(x)|+......+|u_n(x)|=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+n^2}\to\frac{1}{1+x^2},n\to\infty$
故原级数在 $[-1,1]$ 上绝对收敛

(2)$\because\forall x\in D,|2^n\sin\frac{x}{3^n}|\le(\frac{2}{3})^n|x|$, 且 $\sum_{n=1}^\infty(\frac{2}{3})^n|x|$ 收敛。
$\therefore$ 原级数收敛

(3)$S_n(x)=x^2(1-\frac{1}{1+nx^2})\to x^2,n\to\infty$ 原级数绝对收敛

(4) 由于 $\forall x\neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^2}{(1+x^2)^n}}=\frac{1}{1+x^2}<1$, 故 $\sum_{n=1}^\infty\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 收敛
又 $\because x=0$ 时，级数显然收敛，$\therefore$ 原级数在 D 上收敛。

2.(1)M 判别法:$|\frac{x^n}{(n-1)!}|\le\frac{r^n}{(n-1)!}$ 且 $\sum_{n=1}^\infty\frac{r^n}{(n-1)!}$ 收敛（比值法）,$\therefore$...

(2)$\because I\quad\{x(\frac{x+n}{n})^n\}$ 对于 $\forall x\in[0,1]$ 关于 n 单调且 $|x(\frac{x+n}{n})^n|<e$
$II\quad\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}$ 收敛，即在 $[0,1]$ 上一致收敛

$\therefore$ 由 Abel 判别法可知原级数在 $[-1,0)$ 上一致收敛

(3) 法一:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}|x|^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(-x)^n\begin{cases}①\{(-x)^n\}在\text{ [-1,0] }上关于n单调且|x|^n\leqslant 1;\\ ②\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}收敛\end{cases}$

法二：①$\{\frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}\}$在 [-1,0] 上关于$n$单调且$\frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}\rightrightarrows 0\quad(n\to\infty),x\in[-1,0)$

②$|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k|\leq 2$

法三:①$\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$在 [-1,0) 上关于n单调且$\frac{1}{\sqrt{n}}\rightrightarrows 0\quad(n\to\infty),x\in(-1,0)$

②$|\sum_{k=1}^{n}(-x)^k|\leq 2$

2.(4)①$\{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\}$在 (-1,1) 上关于$n$单调且$\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\rightrightarrows 0$

②$|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}|\leq 2$

(5)$|\frac{n}{x^n}|\leq\frac{n}{r^n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{r^n}$ 收敛（根值法）

(6)①$\{\frac{1}{n+\sin x}\}$对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$关于 n 单调且$\frac{1}{n+\sin x}\rightrightarrows 0$

②$|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}|\leq 2$

3.$0\leqslant sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)||g(x)|\leq sup_{x\in I}M|S_n(x)-S(x)|\to 0\quad n\to\infty$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}sup_{x\in I}|g(x)S_n(x)-g(x)S(x)|=0\Rightarrow g(x)S_n(x)\Rightarrow g(x)S(x)$，即证

4.$|U_n(x)-U_n(x)|\leq|V_m(x)-V_n(x)|,U_n(x)V_n(x)$ 分别表示 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 的部分和，应用 cauchy 准则即可证

5.

$\left.\begin{array}{l}①\{e^{-nx}\}对\forall x\in[0,+\infty)关于h单调且|e^{-nx}|\leqslant 1,\\ ②\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛\end{array}\right\}\text{A' 判别法}\Rightarrow.$

6. 注意到

$$|u_{n+1}(x)+\ldots\ldots+u_{n+p}(x)|\leq\big||u_{n+1}(x)|+\ldots\ldots+|u_{n+p}(x)|\big|<\varepsilon$$

反之：$u_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}$

7.①$u_n(x)=x^n,v_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}$,A' 判别法；② 当 $x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$

8.$S_n(x)=1-\frac{1}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但极限函数 $S(x)\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}$

在 $x=0$ 处不连续,$\therefore\cdots\cdots$

习题 11.4

1.$\because$ 对 $\forall x\in[0,+\infty),\exists r>x,s.t,x\in[0,r]$ 且由

$|\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}}|\leq\frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}}$ 在 $[0,r]$ 上一致收敛，$\{\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}}\}$ 在 $[0,r]$ 上连续

$\therefore$ 由 Th11.4.1 可知 $f(x)$ 在 $[0,r]$ 上连续，进而在 x 处连续，再由 x 的任意性，即证.

2. 由 M 判别法易知相应级数在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛，故

$$\int_0^{2\pi}(\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx)dx = \int_0^{2\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} r^n \cos nx dx = 2\pi$$

3. 易知级数在 $[\ln 2, \ln 3]$ 上一致收敛 $(|ne^{-nx}| \le \frac{n}{2^n}\cdots)$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}) = \frac{1}{2}$$

4. 由 $|\frac{\sin nx}{n^3}| \le \frac{1}{n^3}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 可知原级数在 $[0,\pi]$ 上一致收敛，故

$$\int_0^{\pi} S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n^3}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4}$$

5 易知级数满足 Th11.4.4 的条件，故

$$f'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3})' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$$

6. 先证一致收敛，再由 Th.11.4.1，故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}$

7. 连接应用 Th11.4.4 及 M 判别法可知逐项求导公式成立

$$f'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4})' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^2}$$

习题 12.1

1.(1)$R = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}} = \frac{1}{3}, \sum_{n=1}^{\infty} n^2 3^n(\frac{1}{3})^n$ 发散，收敛域 $(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$

(2)$R = 1, [-1, 1)$

(3)$R = \lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4}, [\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty, (-\infty, +\infty)$

(5) 缺项：$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{(x+1)^{2n+1}}{(n+1)}/\frac{(x+1)^{2n+3}}{(n+2)}| = |x+1|^2$, 当 $|x+1|^2 < 1$, 即 $|x+1| < 1$ 时，级数收敛，$|x+1| > 1$ 时，级数发散，故 R=1，又 $\because$ 当 $x = -2$ 时，级数收敛，当 $x = 0$ 时，级数发散，故收敛域为 $[-2, 0)$

(6)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+(-3)^n}{n(n+1)}} = 5. \therefore R = \frac{1}{5}$ 收敛区间为，$(\frac{-1}{5}+2, \frac{1}{5}+2) = (\frac{9}{5}, \frac{11}{5})$

又 $\because$ 当 $x = \frac{9}{5}$ 及 $x = \frac{11}{5}$ 时, 级数收敛，收敛域为 $[\frac{9}{5}, \frac{11}{5}]$

(7)$\because 1 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 \le \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + \ldots\ldots + \frac{1}{2n-1}} \le \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \therefore R = 1$

又 $\because$ 当 $x = \pm 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n-1})x^n \ne 0 \Rightarrow$ 级数发散，收敛域为 (-1,1)

(8)$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)^2}}{3^{n+1}}/\frac{x^n}{3^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{3}\begin{cases} +\infty, & |x| > 1 \\ \frac{1}{3}, & |x| = 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases}$

$\therefore R=1$, 收敛域：[-1,1]

2. 易知级数收敛半径为 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$ 故可逐项求导

从而 $y^{(3)}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^{3n}}{(3n)!})^{(3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3(n-1)}}{(3n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=y$

3(1)$x+\frac{x^2}{2}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^{n-1}dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-ln(1-x)$

注意到当 $x=-1$ 时，级数收敛，$x=1$ 级数发散，故 $x\in[-1,1)$

(2) 易知 $R=1$ 收敛域为 $(-1,1)$ 且

$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2n-1})'=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1})'=x(\frac{x}{1-x^2})'=\frac{x+x^3}{(1-x^2)^2}$

(3) 易知 $R=1$, 定义域，即收敛域为 $(-1,1)$, 且

$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})''=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''=x(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2x}{(1-x)^3},x\in(-1,1)$

(4) 令 $\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\Rightarrow A=\frac{1}{2},B=-1,C=\frac{1}{2}$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$

先求和函数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$,（由 3（1））

当 $x\neq 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}t^n)dt=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t}{1-t}dt$

$=\frac{1}{x}\int_0^x(-1+\frac{1}{1-t})dt=-1+\frac{-1}{x}ln(1-x)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}=\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1-t}dt=\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2-1+1}{1-t}dt$

$=\frac{1}{x^2}[-x-\frac{x^2}{2}-ln(1-x)]=\frac{-1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}ln(1-x)$

当 $x=0$ 时，级数和等于 0

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}=-\frac{x^2-2x+1}{2x^2}ln(1-x)+\frac{3}{4}-\frac{1}{2x},\underline{x\in[-1,0)\cup(0,1]}$

另行判定

法二：记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}x^n$ 则 $[x^2S(x)]''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$

故 $[x^2S(x)]'=-\int_0^x\ln(1-t)dt+[x^2S(x)]'|_{x=0}$

$=-t\ln(1-t)|_0^x+\int_0^x\frac{t}{1-t}dt=-x-(x+1)\ln(1-x)$

$[x^2S(x)]=-\int_0^x\{t+(t+1)\ln(1-t)\}dt-[xS(x)]|_{x=0}$

$=(\frac{-1}{2}x^2+x-\frac{1}{2})\ln(1-x)+\frac{3}{4}x^2-\frac{x}{2}\triangleq f(x)$

$\Rightarrow S(x)=\frac{1}{x^2}f(x)$ 　定义域另行求解

4.(1)+(4) 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 易知该级数收敛半径为 R=1

注意到 $n^2x^n=n(n+1)x^n-x^n=x[(x^{n+1})''-(x^n)']$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x(\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})''-\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)')=x[(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})'-(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)']$

$=x[(\frac{x^2}{1-x})''-(\frac{1}{1-x})']=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},x\in(-1,1)$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\frac{-1}{3})^n=-S(-\frac{1}{3})=\frac{3}{32}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=S(\frac{1}{3})=\frac{3}{2}$

(2) 由 3(1).$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-\ln(1-x)$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=-\ln(1-\frac{1}{2})=\ln 2$

(3) 易知，$\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}=2$

5. 略

6. 令 $S_n=a_1+\ldots\ldots a_n$, 由 $a_n>0$ 可知 $\{S_n\}$ 单调递增

易知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，故

$$S_n\le\lim_{x\to1^-}f(x)=s$$

即 $\{S_n\}$ 有上界，从而由单调有界定理，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，进而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，在 $[0,1]$ 上一致收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1^-}a_nx^n=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\lim_{x\to1^-}f(x)=s$

7.(1) 代入 $\ln x=ln[1-(1-x)]$ 及 $\ln(1-x)$ 即可，或对左式求导，导数为 0，再积分

(2) 代入 $x=1$ 即证

习题 12.2

1.(1)$\sin 3x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3x)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1},x\in\mathbb{R}$

(2)$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{3}[-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{1+x}]=\{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1+x})\}\cdot\frac{1}{3}$

$=[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n]\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n]x^n$

$x\in(-1,1)(|\frac{x}{2}|<1$ 且 $|x|<1\Rightarrow|x|<1)$

(3)$\sin 3x=3\sin x-4(sinx)^3\Rightarrow\ldots\ldots$

(4)$\frac{x}{\sqrt{1-3x}}=x\cdot[1+(-3x)]^{\frac{1}{2}}=\ldots\ldots$

(5)$\arctan\frac{x+3}{x-3}=\int_0^x(\arctan\frac{t+3}{t-3})'dt+\arctan\frac{x+3}{x-3}|_{x=0}$

$=\int_0^x\frac{1}{3}\frac{-1}{1+(\frac{t}{3})^2dt}-\frac{\pi}{4}=\ldots\ldots$

(6) 代入 $\arctan x$ 展开式整理可得：

(7)$\frac{1+x}{(1-x)(1+x^2)}=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{1+x^2}=\ldots\ldots$

(8) 利用 $\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ 及逐项积分法

2.(1)$f(x)=ln|4-x||5-x|=ln2+ln|1-\frac{(x-2)}{2}|+ln3+\ln|1-\frac{x-2}{3}|=\ldots\ldots$

(2)$f(x)=\frac{1}{2+x-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\ldots\ldots$

3. 注意到 Th12.2.4 证明中，M 换成 M^n, 极限仍为 0

4. 取 $f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, 则级数和为 $f(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. 注意到：$x^{-x}=e^{-x\ln x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x\ln x)^n}{n!}$ 再逐项积分即可证。

习题 12.3

1.(1)$f(x)=\cos^4 x=(\frac{1+\cos 2x}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

(2)$f(x)=\sin^3 x=\sin x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\sin x-[\frac{1}{4}\sin(x+2x)+sin(x-2x)]=\ldots\ldots$

(3) 此时，$f(x)=\sin x,x\in[0,\pi],T=2\pi,l=T/2=\frac{\pi}{2}$

故 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{4}{\pi}$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos 2nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(2n+1)x+\sin(1-2n)x]dx = \ldots\ldots = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin 2nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(1-2n)x-\cos(2n+1)x]dx = 0$

(4) 在 $[0,2\pi]$ 上，$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3}{2}\pi,2\pi] \\ 0, & x=\frac{\pi}{2}\text{或}\frac{3}{2}\pi \\ -1 & x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\end{cases}$ $f(x)$ 以 2π 为周期。

故 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x) = 0$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi})\cos nxdx$

$= \frac{2}{\pi}(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{3n\pi}{2}) = \begin{cases}0, & n=2k \\ \frac{4}{\pi}\cdot(-1)^k, & n=2k+1\end{cases}$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx = \ldots\ldots = 0$

2(1)$f(x)=x$ 为 $(-\pi,\pi)$ 上的奇函数，$a_n=0,n=0,1,2$ ……

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx]|_0^{\pi} = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}$

(2)$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx = \frac{8}{3}\pi^2$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx = \frac{1}{\pi}[\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx]|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx = \frac{1}{\pi}[-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2}{n}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx]|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}$

2.(3)$a_0 = \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi}2xdx-\int_0^{-\pi}xdx] = \frac{\pi}{2}$

$a_n = \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi}2x\cos nxdx-\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx]$

$= \frac{1}{\pi}[2(x\frac{1}{n}sinnx+\frac{1}{n^2}\cos nx)|_0^{\pi}-(x\frac{1}{n}sinnx+\frac{1}{n^2}\cos nx)]|_0^{\pi}] = \ldots\ldots$

$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}[(-1)^n-1] = \begin{cases}\frac{2}{-n\pi}, & n=2k-1 \\ 0, & n=2k\end{cases}$

$b_n = \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi}2x\sin nxdx-\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx] = \ldots\ldots = \frac{6}{n\pi}\cdot(-1)^n$

(4)$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx = \frac{-1}{x}\int_0^{-\pi}xdx = \frac{-\pi}{2}$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx = \frac{1}{\pi}[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx]|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx = \frac{1}{\pi}[\frac{-x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx]|_{-\pi}^{0} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

3(1) 作奇式周期延拓后，$a_n=0,n=0,1,2,\ldots\ldots$

$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2nxdx = \frac{4}{\pi}[\frac{-x}{2n}\cos 2nx+\frac{1}{4n^2}\sin 2nx]|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{n}\cdot(-1)^{n-1}$

(2) 同理 $a_n=0,n=0,1,2,\ldots\ldots$

$b_n = \frac{4}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{4}}2x\sin 2nxdx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}\sin 2nxdx]dx$

$= \frac{4}{\pi}\left[(\frac{-x}{n}\cos 2nx+\frac{1}{2n^2}\sin 2nx)|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4n}\cos 2nx|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right]$

$= \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n}\cos nx$

从前面的例子及练习可知，熟练掌握：$\int x\cos nxdx$ 及 $\int x\sin nxdx$ 等类型的积分是傅氏展开的必备技能

4(1) 此时 $b_n=0,n=1,2,3,\ldots\ldots$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)dx=\frac{\pi^2}{3}$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t(\pi-t)\cos ntdt=\frac{2}{\pi}[\frac{t(\pi-t)}{n}\sin nt+\frac{\pi-2t}{n^2}\cos nt+\frac{2}{n^3}\sin nt]|_0^{\pi}$

$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^2}$

$b_n=0,n=1,2\ldots\ldots$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^tdt=\frac{2}{\pi}(e^{\pi}-1)$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^t\cos ntdt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+n^2}(e^t\cos nt+n\sin nt)|_0^{\pi}$

$=\frac{2}{\pi(1+n^2)}[(-1)^ne^{\pi}-1]$

5.(1) 按 $f(\pi-x)=-f(x)$ 延拓到 $(0,\pi)$ 再作偶式周期延括.

(2) 按 $f(\pi-x)=-f(x)$ 延拓到 $(0,\pi)$ 再作奇式周期延括.

6.(1)$a_{2n-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cos(2n-1)xdx=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}+\int_0^{\pi}]f(x)cos(2n-1)xdx$

由于 $\int_{-\pi}^{0}f(x)cos(2n-1)xdx\xlongequal{t=x+\pi}\int_0^{\pi}f(t-\pi)\cos[(2n-1)(t-\pi)]dt$

$=\int_0^{\pi}f(t)[-\cos(2n-1)t]dt=-\int_0^{\pi}f(t)\cos(2n-1)tdt$

故 $a_{2n-1}=0$, 同理可证明 $b_{2n-1}=0$

(2) 类似 (1) 可证

习题 12.4

1.(1)$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8}{3}\pi^2$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}t^2cosntdt=\frac{1}{\pi}[\frac{t^2}{n}\sin nt+\frac{2t}{n^2}\cos nt-\frac{2}{n^3}\sin nt]|_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}t^2\sin ntdt=\frac{1}{\pi}[-\frac{t^2}{n}\cos nt+\frac{2t}{n^2}\sin nt+\frac{2}{n^3}\cos nt]|_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n}$

在 $(0,2\pi)$ 内处处收敛

(2)$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-t}{2}dt=0$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-t}{2}\cos ntdt=\frac{1}{\pi}[\frac{\pi-t}{2n}\sin nt+\frac{-1}{2n^2}\cos nt]|_0^{2\pi}=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-t}{2}\sin ntdt=\frac{1}{\pi}[\frac{-\pi+t}{2n}\cos nt-\frac{1}{2n^2}\sin nt]|_0^{2\pi}=\frac{1}{n}$

在 $(0,2\pi)$ 内处处收敛

(3)$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\cos tdt=0$ 事实上，由于 $x\cos x$ 为 $(-\pi,\pi)$ 内的奇函数

故 $a_n=0,n=0,1,2\ldots\ldots$, 当 $n\neq 1$ 时

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos t\sin ntdt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t[\sin(1+n)t-\sin(1-n)t]dt=\frac{(-1)^n\cdot 2n}{n^2-1}$

而 $b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos t\sin tdt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\sin 2tdt=-\frac{1}{2}$

级数在 $(0,2\pi)$ 内处处收敛

(4)$f(x)$ 为 $(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ 上的奇函数，故 $a_n=0,n=0,1,\ldots\ldots$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{4}\sin ntdt = \frac{1}{2n}[1-(-1)^n]$

在 $(-\pi, 0)\cup(0,\pi)$ 内处处收敛，在 $x=0$ 处收敛于 $\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{\pi}{8}$

余略