关系的基本运算

定义7.6 设R是二元关系.

(1)R中所有有序对的第一元素构成的集合称作R的定义域，记作 dom$R$，形式化表示为

$$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y\,(\langle x,y\rangle \in R) \}$$

(2)R中所有有序对的第二元素构成的集合称作R的值域，记作ran$R$，形式化表示为

$$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x\,(\langle x,y\rangle \in R) \}$$

(3)R的定义域和值域的并集称作R的域，记作fld$R$，形式化表示为

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例5 设关系R={<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>}, 则dom$R$、ran$R$、fld$R$为？

$$\mathrm{dom}R = \{1, 2, 4\}$$
$$\mathrm{ran}R = \{2, 3, 4\}$$
$$\mathrm{fld}R = \{1, 2, 3, 4\}$$

关系运算(逆与复合)

定义7.7 设R为二元关系，R的逆关系，简称为R的逆，记作R^{-1}，其中

$$R^{-1} = \{ <y, x> \mid <x, y>\in R \}$$

定义7.8 设F、G为二元关系，G对F的右复合记作$F\circ G$，其中

$$F\circ G = \{ <x, y> \mid \exists t\, (<x, t>\in F \wedge <t, y>\in G) \}$$

注：如果把二元关系看作一种作用，复合表示两个作用的连续发生

例6 设$F = \{<3,3>, <6,2>\}$，$G = \{<2,3>\}$，则F^{-1}、$F\circ G$、$G\circ F$为？

$$F^{-1} = \{<3,3>, <2,6>\}$$

$$F\circ G = \{<6,3>\}$$

$$G\circ F = \{<2,3>\}$$

关系运算(练习)

例7 设$R = \{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$，$S = \{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$， 则$\mathrm{dom}R$、$\mathrm{ran}R$、$\mathrm{fld}R$、$R^{-1}$、$R \circ S$、$S \circ R$为？

$\mathrm{dom}R = \{1,2\}$、$\mathrm{ran}R = \{2,3,4\}$、 $\mathrm{fld}R = \{1, 2, 3, 4\}$

$R^{-1} = \{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$

$R \circ S = \{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

$S \circ R = \{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$

关系运算(限制与像)

定义7.9 设R为二元关系, A是集合,

(1) R在A上的限制记作 $R\upharpoonright A$, 其中

$$R\upharpoonright A = \{ <x,y> \mid xRy \wedge x \in A \}$$

(2) A在R下的像记作$R[A]$, 其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\upharpoonright A)$$

说明:

- R在A上的限制 $R\upharpoonright A$是 R 的子关系, 即 $R\upharpoonright A \subseteq R$
- A在R下的像 $R[A]$ 是 ran$R$ 的子集, 即 $R[A] \subseteq \mathrm{ran}R$

实例

例8 设$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$, 则 $R\restriction\{2,3\}$、$R\restriction\{1\}$、$R\restriction\varnothing$、 $R[\{1\}]$ 、$R[\{3\}]$、 $R[\varnothing]$为？

$$R\restriction\{2,3\} = \{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$$

$$R\restriction\{1\} = \{<1,2>,<1,3>\}$$

$$R\restriction\varnothing = \varnothing$$

$$R[\{1\}] = \{2,3\}$$

$$R[\{3\}] = \{2\}$$

$$R[\varnothing] = \varnothing$$

关系运算的性质

定理7.1 设F是任意的关系，则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取x,

$$x\in\mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F) \Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系运算的性质

定理7.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in(F\circ G)\circ H \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\circ G \land <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(\exists s\,(<x,s>\in F \land <s,t>\in G) \land <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,\exists s\,(<x,s>\in F \land <s,t>\in G \land <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \land \exists t\,(<s,t>\in G \land <t,y>\in H)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \land <s,y>\in G\circ H) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\circ(G\circ H)
\end{aligned}
$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

证明

定理7.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

(2) 任取$<x,y>$,

$<x,y>\in(F\circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow <y,x>\in F\circ G$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<y,t>\in F \wedge <t,x>\in G)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in G^{-1} \wedge <t,y>\in F^{-1})$

$\Leftrightarrow <x,y>\in G^{-1}\circ F^{-1}$

所以 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

关系运算的性质

定理7.3 设R为A上的关系，则

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

证 任取$\langle x,y \rangle$

$$\langle x,y \rangle \in R \circ I_A$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\langle x,t \rangle \in R \wedge \langle t,y \rangle \in I_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\langle x,t \rangle \in R \wedge t=y)$$

$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in R$$

$$\langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \langle x,y \rangle \in R \wedge y \in A$$

$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,y \rangle \in I_A$$

$$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in R \circ I_A$$

同理可证 $I_A \circ R = R$

关系运算的性质

定理7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H$ (2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F\cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$ (4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

只证 (3) 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in F\circ(G\cap H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G\cap H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G\wedge <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,((<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)\wedge(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in H))$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)\wedge\exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G\wedge <x,y>\in F\circ H$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G\cap F\circ H$$

所以有 $F\circ(G\cap H)=F\circ G\cap F\circ H$

推广

定理7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R\circ(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)=R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup\ldots\cup R\circ R_n$$

$$(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)\circ R=R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup\ldots\cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap\ldots\cap R\circ R_n$$

$$(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\circ R\subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap\ldots\cap R_n\circ R$$

关系运算的性质

定理7.5 设F为关系, A, B为集合, 则

(1) $F\restriction(A\cup B)=F\restriction A\cup F\restriction B$

(2) $F[A\cup B]=F[A]\cup F[B]$

(3) $F\restriction(A\cap B)=F\restriction A\cap F\restriction B$

(4) $F[A\cap B]\subseteq F[A]\cap F[B]$

证明

只证 (1) 和 (4):

$(1) F\restriction(A\cup B)=F\restriction A\cup F\restriction B$

证 (1) 任取$\langle x,y\rangle$

$$\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle\in F\restriction(A\cup B)\\
\Leftrightarrow\ &\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A\cup B\\
\Leftrightarrow\ &\langle x,y\rangle\in F\wedge(x\in A\vee x\in B)\\
\Leftrightarrow\ &(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A)\vee(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in B)\\
\Leftrightarrow\ &\langle x,y\rangle\in F\restriction A\vee\langle x,y\rangle\in F\restriction B\\
\Leftrightarrow\ &\langle x,y\rangle\in F\restriction A\cup F\restriction B
\end{aligned}$$

所以有$F\restriction(A\cup B)=F\restriction A\cup F\restriction B$.

证明

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

证 (4) 任取y,

$y\in F[A\cap B]$

$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle\in F \land x\in A\cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle\in F \land x\in A \land x\in B)$

$\Leftrightarrow \exists x\,((\langle x,y\rangle\in F \land x\in A)\land(\langle x,y\rangle\in F \land x\in B))$

$\Rightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle\in F \land x\in A)\land \exists x\,(\langle x,y\rangle\in F \land x\in B)$

$\Leftrightarrow y\in F[A] \land y\in F[B]$

$\Leftrightarrow y\in F[A]\cap F[B]$

所以有$F[A\cap B]\subseteq F[A]\cap F[B]$.

关系的幂运算

定义7.10

设 R 为 A 上的关系，n为自然数，则 R 的 n 次幂定义为：

(1) $R^0 = \{ <x,x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意：

- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1^0 = R_2^0 = I_A$
- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

布尔积

矩阵乘法：$A_{m\times s}\times B_{s\times n}=C_{m\times n}$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s} a_{ik}\, b_{kj}$$

布尔矩阵的布尔积：$A\odot B=C$

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & If\ \exists k(1\le k\le s),\text{使得 } a_{ik}=1\text{且}b_{kj}=1\\ 0, & Else\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\1&3&2\end{pmatrix}$$

布尔积与普通矩阵乘法的区别：布尔矩阵；逻辑加；逻辑乘；

（1+1=1，1+0=1，0+1=1，0+0=0）

幂的求法

例 9 设$A = \{a,b,c,d\}$, $R = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$, 求$R$的各次幂, 分别用关系矩阵和关系图表示.

解 R 与 R^2的关系矩阵分别是:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

幂的求法

R^3和R^4的矩阵是:

$$M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

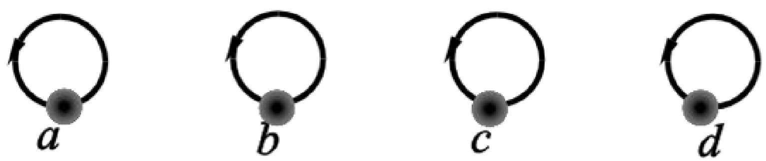
$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

R^0的关系矩阵是

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

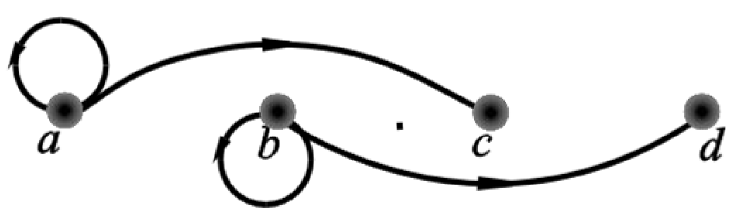
关系图

$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$的关系图如下图所示.

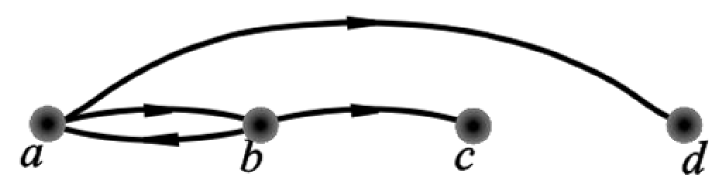


R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

幂运算的性质

定理7.6 设 A 为 n 元集, R 是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R 为A上的关系,

由于$|A|=n$, A上的不同关系只有 2^{n^2}个.

列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$

幂运算的性质

定理7.7 设 R 是 A上的关系， $m, n\in$N, 则

(1) $R^m\circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的$m\in$N, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$R^m\circ R^0 = R^m\circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m\circ R^{n+1} = R^m\circ(R^n\circ R) = (R^m\circ R^n)\circ R = R^{m+n+1} ,$$

所以对一切$m,n\in$N 有 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$.

证明

(2) 对于任意给定的$m \in \mathrm{N}$, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^n$$
$$= R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切$m,n \in \mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

幂运算的性质

定理7.8 设R 是A上的关系，

若存在自然数 s, t $(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$, 则

(1) 对任何 $k\in N$有 $R^{s+k}=R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i\in N$有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$, 其中 $p=t-s$

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q\in N$ 有$R^q\in S$

证 (1) $R^{s+k}=R^s\circ R^k=R^t\circ R^k=R^{t+k}$

(2) 对k归纳. 若k=0, 则有 $R^{s+0p+i}=R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$, 其中$p=t-s$, 则

$$R^{s+(k+1)p+i}=R^{s+kp+i+p}=R^{s+kp+i}\circ R^p$$

$$=R^{s+i}\circ R^p=R^{s+p+i}=R^{s+t-s+i}=R^{t+i}=R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

证明

(3) 任取 $q \in \mathrm{N}$,

若 $q < t$, 显然有 $R^q \in S$,

若$q \geq t$, 则存在自然数 k（$k > 1$）和 i 使得

$$q = s+kp+i, \text{ 其中} 0 \leq i \leq p-1.$$

于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而

$$s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$$

从而证明了 $R^q \in S$.