广东海洋大学 2016-2017 学年第 2 学期

《数学分析 2》课程试题 (A 卷) 参考答案

一、填空题 (共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分)

1	2	3	4	5
$\frac{1}{12}$	0	$x^2-\frac{8}{3}$	$-2x\sin x^4$	1

二、判断题 (共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分)

1	2	3	4	5
×	√	×	√	√

三、计算题 (共 8 小题，每小题 7 分，共 56 分)

1. 计算积分 $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\cos\ln x\mathrm{d}x$。

解. 由分部积分法得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^{e}\cos\ln x\mathrm{d}x &= x\cos\ln x|_{\frac{1}{e}}^{e}+\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sin\ln x\mathrm{d}x \quad ------2'\\ &=\left(e-\frac{1}{e}\right)\cos 1+x\sin\ln x|_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}\cos\ln x\mathrm{d}x \quad ------4'\\ &=\left(e-\frac{1}{e}\right)\cos 1+\left(e+\frac{1}{e}\right)\sin 1-I, \quad ------6'\end{aligned}$$

因此,

$$I=\frac{1}{2}\left[\left(e-\frac{1}{e}\right)\cos 1+\left(e+\frac{1}{e}\right)\sin 1\right]. \quad ------7'$$

2. 判断反常积分 $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性，如果收敛，计算反常积分的值。

解. 函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[0,1)$ 连续，1 是其瑕点。取 $\varepsilon\in(0,1)$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)\\ &=-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon} \quad ------2'\\ &=1-\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}, \quad ------4'\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}[1-\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}]=1, \quad ------6'$$

所以所求反常积分收敛，其值为 1。 $------7'$

3. 计算不定积分 $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$。

解. 由分部积分法得

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x =&2\int \arcsin x \mathrm{d}\sqrt{x+1} \quad ------2' \\ =&2\sqrt{x+1}\arcsin x-2\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \quad ------4' \\ =&2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(1-x) \quad ------6' \\ =&2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C. \quad ------7'\end{aligned}$$

4. 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{\int_0^x t^3e^t\mathrm{d}t}$

解. 显然，当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{xe^x}{\int_0^x t^3e^t\mathrm{d}t}$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式。 $------1'$
由 *L'Hospital* 法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{\int_0^x t^3e^t\mathrm{d}t}=&\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)e^x}{x^3e^x} \quad ------3' \\ =&\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^3} \quad ------4' \\ =&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^2} \quad ------6' \\ =&0. \quad ------7'\end{aligned}$$

5. 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}, x\in\mathbb{R}$，计算积分 $\int_0^\pi S(t)\mathrm{d}t$。

解. 由于

$$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\leqslant\frac{1}{n^3},\forall x\in[0,\pi],n=1,2,...,$$

并且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛，由 M 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $[0,\pi]$ 上一致收敛于 $S(x)$。 $------3'$
又因为每一项 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，函数项级数可以逐项积分， $------5'$
于是有

$$\int_0^\pi S(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n^3}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi\frac{\sin nt}{n^3}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4}. \quad ------7'$$

6. 已知 $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+..., x\in(-1,1),\alpha\in\mathbb{R}$,
求函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ 的 Maclaurin 展开式, 并确定其收敛域。

解. 由于

$$f(x)=-\frac{1}{2}(1-2x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}}, \quad ------1'$$

并且

$$
\begin{aligned}
(1-2x)^{\frac{1}{2}} =& 1-x-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{n!}x^n, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad ------2' \\
(1-2x)^{-\frac{1}{2}} =& 1+x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^n, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad ------3'
\end{aligned}
$$

所以

$$
f(x)=x+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!+(2n-1)!!}{n!}x^n=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).
$$

$------4'$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时, 由 *Raabe* 判别法知级数 $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)$ 发散; $\quad ------5'$

而当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，由 *Leibniz* 判别法知级数 $-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}\frac{1}{(-2)^{n+1}}=-\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)$ 收敛。 $\quad ------6'$

因此 $f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$ 的收敛域是 $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。 $\quad ------7'$

7. $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上定义为 $f(x)=\begin{cases}2x, & -\pi<x\leqslant 0,\\ x, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 以 2π 为周期的 Fourier 级数，并讨论其收敛性。

解. 先计算 $f(x)$ 的 *Fourier* 系数:

$$
\begin{aligned}
a_0 =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x\right)=-\frac{\pi}{2}, \quad ------1' \\
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2x\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x\right)=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}, \\
& ------2' \\
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2x\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x\right)=(-1)^{n-1}\frac{3}{n}. \\
& ------3'
\end{aligned}
$$

所以

$$
f(x)\sim-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+(-1)^{n-1}\frac{3}{n}\sin nx\right]. \quad ------4'
$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上连续且逐段可微， $\quad ------5'$

所以这个 *Fourier* 级数在 $x\neq(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$ 处收敛到 $f(x)$， $\quad ------6'$

而在 $x=(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$ 处收敛到 $\frac{\pi-2\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$。 $\quad ------7'$

8. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{1}{n}$ 的敛散性 (绝对收敛、条件收敛、发散)。

解． 显然，$\tan\frac{1}{n}>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{1}{n}$ 是交错级数。由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1, \quad ------2'$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{1}{n}$ 不绝对收敛。 $------3'$
而数列 $\{\tan\frac{1}{n}\}$ 单调递减且 $\lim_{n\to\infty}\tan\frac{1}{n}=0$，由 *Leibniz* 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{1}{n}$ 收敛， $------5'$
因而是条件收敛。 $------7'$

四、证明题 (共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)^2\mathrm{d}t$，证明：$F'''(x)=2f(x), x\in[a,b]$。

证明． 易知，

$$F(x)=x^2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-2x\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t+\int_a^x t^2f(t)\mathrm{d}t, \quad ------1'$$

所以

$$\begin{aligned}F'(x)=&2x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)-2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-2x^2f(x)+x^2f(x)\\=&2x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t, \quad ------3'\\F''(x)=&2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)-2xf(x)=2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad ------5'\\F'''(x)=&2f(x). \quad ------7'\end{aligned}$$

由此得证。 □

2. 设 $a_n>0$，$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0$，证明：交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛。

证明． 由题设，存在 $r>0$，使得 $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=2r>r>0$，由数列极限保号性知，存在 $N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时有 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>r$，即

$$a_{n+1}<\frac{a_n}{1+\frac{r}{n}}, n>N. \quad ------2'$$

从而当 $n>N$ 时 $a_{n+1}<a_n$，即 $\{a_n\}$ 单调递减， $------3'$
并且有

$$\begin{aligned}0<a_n<&\frac{a_{n-1}}{1+\frac{r}{n-1}}<\frac{a_{n-2}}{\left(1+\frac{r}{n-1}\right)\left(1+\frac{r}{n-2}\right)}<...<\frac{a_N}{\left(1+\frac{r}{n-1}\right)...\left(1+\frac{r}{N}\right)}\\<&\frac{a_N}{\left(1+\frac{r}{n-1}\right)^{n-N}}\to 0, n\to\infty,\end{aligned}$$

由迫敛性定理知 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。 $------6'$
由 *Leibniz* 判别法知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛。 $------7'$ □