离散数学

高等教育出版社

课程导论

离散数学是数学的几个分支的总称，以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，其研究对象一般地是有限个或可数无穷个元素。

因此，它充分描述了计算机科学离散性的特点，**大量用于计算机科学与技术领域的建模和分析。**

课程导论

由于计算机是一个离散结构，它只能处理**离散的或离散化了的数量关系。**

因此，无论计算机科学本身，还是与计算机科学及其应用密切相关的现代科学研究领域，都面临着如何**对离散结构建立相应的数学模型**，又如何**将已用连续数量关系建立起来的数学模型离散化**，从而可由计算机加以处理。

课程导论

“用一组基本的指令来编制一个计算机程序，非常类似于从一组公理来构造一个数学证明。”

——D.E.Knuth

“我现在年纪大了，搞了这么多年的软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了。我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点工夫的话，我就不会犯这么多的错误。不少东西逻辑学家早就说过了，可是我不知道。要是我能年轻二十岁的话，我就回去学逻辑。”

—— E.W.Dijkstra

课程导论

课程特点：

- 内容多且杂
- 比较抽象
- 强调逻辑性和严谨性

课程导论

学习建议：

- 多思考，多练习，多提问
- 重视对基础概念的理解，活学活用，不要死记硬背
- 转变学习思维，化被动为主动，培养自学能力，加强逻辑性训练
- 善于利用丰富的线上资源，把握已有的线下资源
- 重视学习过程，而不局限于课程内容本身，注重知识的积累，而不只求短期效应
- 摆正心态，初次学习感觉困难才是常态，关键是你是否愿意迎难而上！

课程导论

课程主要学习内容：

◆ 理论部分（40学时）

1、数理逻辑：　数字电子技术、计算机组成原理
2、集合论：　数据库原理
3、图论：　数据结构、算法设计与分析、编译原理

◆ 实验部分（8学时，MATLAB）

命题逻辑的运算　　图的矩阵表示　　最短路径算法

课程导论

教学目标：

离散数学是数据结构、算法分析与设计、数据分析等课程的先修课程。

通过本课程的学习，培养学生的**抽象思维和严密的逻辑推理能力**，为学习后续课程**作必要的理论准备**，并为学生今后处理离散信息，从事计算机的软件开发和研究打下**理论基础**。

课程导论

课程考核

- 平时成绩（40%）：80分+加分-扣分
  - 考勤：缺勤1次扣5分，请假1次扣3分
  - 作业提交和完成情况：缺交1次扣5分，敷衍完成扣3分
  - 课堂和平时表现（线上线下）：视情况加分，上限10分
  - 期末复习的努力程度：视情况加分，上限10分
- 期末成绩（60%）

求放过

课程导论

作业批改：布置作业后，在下一次上课前会发布参考答案到企微班群，大家用红笔自行批改

作业提交：在学习通班群作业处线上提交已批改过的作业照片，一周提交1次

作业批改加分：期末前2周收集纸质作业进行平时表现加分，加分依据：完成度、正确度、批改作业的态度

注：用作业本写作业，方便后续收集检查

课程导论

期望

- 课前：预习核心知识点
- 课中：尽量吸收，多互动
- 课后：及时复习，按时认真的完成作业

第一部分 数理逻辑

主要内容

- 第1章 命题逻辑基本概念
- 第2章 命题逻辑等值演算
- 第3章 命题逻辑推理理论

主要内容

- **1.1 命题与联结词**

  命题的概念、真值、分类；联结词、命题符号化

- **1.2 命题公式及其赋值**

  命题公式的概念、赋值、分类；利用真值表给出命题公式的成真赋值和成假赋值，判断公式的类型

1.1 命题与联结词

【命题与真值】

1. 命题：非真即假的陈述句
2. 命题的真值：陈述句所表达的判断结果
3. 真值的取值：只取两个，真或假
4. 真命题与假命题

判断给定句子是否为命题：
1. 是否为陈述句
2. 真值是否唯一

注意：

1. 感叹句、祈使句、疑问句都不是命题

2. 陈述句中的悖论，真值不惟一的不是命题

命题概念

例1 判断下列句子是否为命题.

(1) $\sqrt{2}$是有理数. 是（假命题）

(2) $2 + 5 = 7$. 是（真命题）

(3) $x + 5 > 3$. 不是（真值不唯一）

(4) 你去教室吗? 不是（疑问句）

(5) 这个苹果真大呀! 不是（感叹句）

(6) 请不要讲话! 不是（祈使句）

(7) 2050年湛江元旦下大雪. 是（真值唯一）

(8) 我正在说假话 不是（悖论）

像(8)这样由真能推出假、又由假能推出真，从而既不能为真，也不能为假的陈述句称作悖论

命题分类

【命题分类】

1. 简单命题（原子命题）：最小的基本单位，不能被分解成更简单的命题

2. 复合命题：由简单命题通过联结词联结而成的命题

【简单命题符号化】

- 用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ $(i \geq 1)$表示简单命题
- 用“1”表示真，用“0”表示假

例如，令

p：$\sqrt{2}$是有理数　　　　则 p 的真值为0

q：$2 + 5 = 7$　　　　则 q 的真值为1

命题分类的实例

例2　判断下列陈述句是简单命题还是复合命题，并将各陈述句出现的原子命题符号化.

(1) $\sqrt{7}$是有理数.	简单，p
(2) $\sqrt{7}$是有理数是不对的.	复合，非p
(3) $\sqrt{2}$和$\sqrt{5}$都是无理数.	复合，t_1且t_2
(4) $\sqrt{2}$与$\sqrt{5}$之和是无理数.	简单，t
(5) 5或7是素数.	复合，r或s
(6) 如果5是素数，则7也是素数.	复合，如果r，则s
(7) 5是素数当且仅当7是素数	复合，r当且仅当s

否定、合取、析取联结词

定义1.1　设 p为命题，复合命题“非p”(或“p的否定”)称为p的否定式，记作$\neg p$，符号$\neg$称作否定联结词. 规定$\neg p$ 为真当且仅当p为假.

定义1.2　设p,q为两个命题，复合命题“p并且q”(或“p与 q”)称为p与q的合取式，记作$p\wedge q$，$\wedge$称作合取联结词. 规定$p\wedge q$为真当且仅当p与q同时为真.

定义1.3　设p, q为两个命题，复合命题“p或q”称作p与q的析取式，记作$p\vee q$，$\vee$称作析取联结词. 规定$p\vee q$为假当且仅当p与q同时为假.

否定、合取、析取联结词

表1.1　联结词¬，∧，∨的定义

p　q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
0　0	1	0	0
0　1	1	0	1
1　0	0	0	1
1　1	0	1	1

合取联结词的实例

例3 将下列命题符号化.

(1) 吴颖既用功又聪明.

(2) 吴颖不仅用功而且聪明.

(3) 吴颖虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

解 令p:吴颖用功, q:吴颖聪明

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge q$

(3) $\neg p \wedge q$

合取联结词的实例

解

(4) 设p:张辉是三好生，q:王丽是三好生

$p \wedge q$

(5) p:张辉与王丽是同学

(1)—(3) 说明描述合取式的灵活性与多样性

(4)—(5) 要求分清“与”所联结的成分

析取联结词的实例

例4 将下列命题符号化

(1) 2 或 4 是素数.

(2) 2 或 3 是素数.

(3) 4 或 6 是素数.

(4) 小元只能拿一个苹果或一个梨.

(5) 王小红生于 1975 年或 1976 年.

析取联结词的实例

解

(1) 令p:2是素数, q:4是素数, $p\vee q$

(2) 令p:2是素数, q:3是素数, $p\vee q$

(3) 令p:4是素数, q:6是素数, $p\vee q$

(4) 令p:小元拿一个苹果, q:小元拿一个梨

$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

(5) p:王小红生于 1975 年, q:王小红生于1976 年,

$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$ 或 $p\vee q$

注意:

(1)—(3) 为相容或（用它联结的两个命题可以同时为真）

(4)—(5) 为排斥或（只有当一个为真，另一个为假时，才为真）

符号化时(5)可有两种形式，而(4)则不能

蕴涵联结词

定义1.4　设p, q为两个命题，复合命题“如果p, 则q”称作p与q的蕴涵式，记作$p \to q$，并称p是蕴涵式的前件，q为蕴涵式的后件，$\to$称作蕴涵联结词. 规定：$p \to q$为假当且仅当p为真q为假.

注意：1. $p \to q$ 的逻辑关系：q为 p 的必要条件

2. “如果 p, 则 q” 有很多不同的表述方法：

若p，就q 只要p，就q	$p \to q$	只有q 才p 除非q, 才p 除非q，否则非p p仅当q

3. 当 p 为假时，$p \to q$恒为真

蕴涵联结词

表1.2　联结词→的定义

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

蕴涵联结词的实例

例5 设 p：天冷，q：小王穿羽绒服，将下列命题符号化

(1) 只要天冷，小王就穿羽绒服. $p \to q$

(2) 因为天冷，所以小王穿羽绒服. $p \to q$

(3) 若小王不穿羽绒服，则天不冷. $p \to q$

(4) 只有天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(5) 除非天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(6) 除非小王穿羽绒服，否则天不冷. $p \to q$

(7) 如果天不冷，则小王不穿羽绒服. $q \to p$

(8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. $q \to p$

注意： $p \to q$ 与 $\neg q \to \neg p$ 等值（真值相同）

等价联结词

定义1.5　设 p, q 为两个命题，复合命题“p当且仅当q”称作p与q的等价式，记作$p\leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$称作等价联结词. 规定$p\leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同时为真或同时为假.

$p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系：p与q互为充分必要条件

例6 求下列复合命题的真值

(1) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6$.　1

(2) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 3 是偶数.　0

(3) $2 + 2 = 4$ 当且仅当太阳从东方升起.　1

(4) $2 + 2 = 4$ 当且仅当美国位于非洲.　0

(5) 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的充要条件是它在 x_0 连续.　0

等价联结词

表1.3　联结词↔的定义

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

联结词的优先顺序

反复使用联结词集$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$中的联结词可以组成更复杂的复合命题，此外还可以使用圆括号（）.

例如，复合命题$(q\rightarrow p)\wedge q\rightarrow p$.

在求这种复杂的复合命题的真值时，将圆括号包括在内，我们规定优先顺序为（），$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；对同一优先级，从左到右顺序进行.

复合命题真值求解的实例

例6 令

p: 北京比天津人口多. 1

q: 2+2=4. 1

r: 乌鸦是白色的 0

求下列复合命题的真值.

(1) $((\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\rightarrow r$ 1

(2) $(q\vee r)\rightarrow(p\rightarrow\neg r)$ 1

(3) $(\neg p\vee r)\leftrightarrow(p\wedge\neg r)$ 0

小 结 1

- 非真即假的陈述句叫做**命题**，通常用**小写字母**$p, q, r, \ldots$ 表示.
- 命题的真值有两个，真值为真的命题称作**真命题**，真值为假的命题称作**假命题**. 用“1”表示真，用“0”表示假.
- 若一个命题不能被分解成更简单的命题，则称该命题为**简单命题**或**原子命题**.
- 由简单命题**通过联结词**联结而成的命题称为**复合命题**.

表1.4 联结词¬，∧，∨，→，↔的定义

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\to q$	$p\leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

1.2 命题公式及其赋值

命题变项与合式公式（基础概念）

- 命题变项
- 合式公式
- 合式公式的层次

公式的赋值（重点掌握）

- 公式赋值
- 公式类型
- 真值表

命题变项与合式公式

命题常项（命题常元）：真值确定的简单命题，相当于常数

命题变项（命题变元）：取值为1或0的变元，相当于变量

命题常项与变项均用 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots,$ 等表示.

将命题变项用联结词和圆括号按照一定的逻辑关系联结起来的符号串称作合式公式.

定义1.6 合式公式（简称公式）的递归定义:

(1) 单个命题变项是合式公式, 称作原子命题公式

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是

(4) 只有有限次地应用(1)—(3) 形成的符号串是合式公式

合式公式的层次

定义1.7

(1) 若公式A是单个命题变项，则称A为0层公式.

(2) 称 A 是 n+1(n≥0) 层公式是指下面情况之一：

(a) $A=\neg B$, B 是 n 层公式；

(b) $A=B\wedge C$, 其中B,C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n=\max(i,j)$；

(c) $A=B\vee C$, 其中 B,C 的层次及 n 同(b)；

(d) $A=B\rightarrow C$, 其中B,C 的层次及 n 同(b)；

(e) $A=B\leftrightarrow C$, 其中B,C 的层次及 n 同(b).

(3) 若公式A的层次为k, 则称A为k层公式.

例如 公式 $A=p$，$B=\neg p$，$C=\neg p\rightarrow q$，$D=\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$，

$E=((\neg p\wedge q)\rightarrow r)\leftrightarrow(\neg r\vee s)$

分别为0层，1层，2层，3层，4层公式.

公式赋值

定义1.8 设$p_1, p_2, \ldots, p_n$是出现在公式A中的全部命题变项，给$p_1, p_2, \ldots, p_n$各指定一个真值，称为对A的一个赋值或解释. 若使A为1, 则称这组值为A的成真赋值; 若使A为0, 则称这组值为A的成假赋值.

几点说明：

- A中仅出现 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，给A赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指
  $p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \ldots, p_n=\alpha_n$, α_i=0或1, α_i之间不加标点符号
- A中仅出现 $p, q, r, \ldots$, 给A赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指
  $p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3 \ldots$
- 含n个命题变项的公式有2^n个赋值.

例如 000, 010, 101, 110是$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$的成真赋值
001, 011, 100, 111是成假赋值.

真值表

定义1.9 将命题公式A在所有赋值下取值的情况列成表, 称作A的真值表.

构造真值表的步骤:

(1) 找出公式中所含的全部命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$(若无下角标则按字母顺序排列), 列出2^n个全部赋值, 从00…0开始, 按二进制加法, 每次加1, 直至11…1为止.

(2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次.

(3) 对每个赋值依次计算各层次的真值, 直到最后计算出公式的真值为止.

真值表求成真赋值和成假赋值

例7 写出下列公式的真值表, 并求它们的成真赋值和成假赋值:

(1) $(q\rightarrow p)\wedge q\rightarrow p$

(2) $\neg(\neg p\vee q)\wedge q$

(3) $(p\vee q)\rightarrow\neg r$

例7解答

(1) $A = (q \to p) \wedge q \to p$

p q	$q \to p$	$(q \to p) \wedge q$	$(q \to p) \wedge q \to p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

成真赋值: 00, 01, 10, 11;　无成假赋值

例7解答

(2) $B=\neg(\neg p\vee q)\wedge q$的真值表

p q	$\neg p$	$\neg p\vee q$	$\neg(\neg p\vee q)$	$\neg(\neg p\vee q)\wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

成假赋值: 00, 01, 10, 11;　无成真赋值

例7解答

(3) $C = (p \vee q) \rightarrow \neg r$

p q r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

成真赋值: 000, 001, 010, 100, 110;　成假赋值: 011, 101, 111

公式的类型

定义1.10

(1) 若A在它的任何赋值下均为真, 则称A为重言式或永真式;

(2) 若A在它的任何赋值下均为假, 则称A为矛盾式或永假式;

(3) 若A不是矛盾式, 则称A是可满足式.

由例1可知, $(q\rightarrow p)\wedge q\rightarrow p$, $\neg(\neg p\vee q)\wedge q$, $(p\vee q)\rightarrow\neg r$,
分别为重言式, 矛盾式, 非重言式的可满足式 .

注意：重言式是可满足式，但反之不真.

真值表的用途:

求出公式的全部成真赋值与成假赋值, 判断公式的类型

判断公式类型的实例

例8 用真值表判断下面公式的类型

(1) $p\wedge r\wedge\neg(q\rightarrow p)$

(2) $((p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p))\vee r$

(3) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\rightarrow r)$

例8解答

(1) $p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$

p	q	r	$q \rightarrow p$	$\neg(q \rightarrow p)$	$p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

矛盾式

例8解答

(2) $((p\to q)\to(\neg q\to\neg p))\vee r$

p	q	r	$p\to q$	$\neg q\to\neg p$	$((p\to q)\to(\neg q\to\neg p))\vee r$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

重言式

例8解答

(3) $(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$

p q r	$p\to q$	$p\to r$	$(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	0	0	1
1 0 1	0	1	0
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	1	1

非重言式的可满足式

第一章 习题课

主要内容

- 命题、真值、简单命题与复合命题、命题符号化
- 联结词$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$及复合命题符号化
- 命题公式及层次
- 公式的类型
- 真值表及应用

基本要求

- 深刻理解各联结词的逻辑关系, 熟练地将命题符号化
- 会求复合命题的真值
- 深刻理解合式公式及重言式、矛盾式、可满足式等概念
- 熟练地求公式的真值表，并用它求公式的成真赋值与成假赋值及判断公式类型

练习1

1. 将下列命题符号化

(1) 豆沙包是由面粉和红小豆做成的.

(2) 苹果树和梨树都是落叶乔木.

(3) 王小红或李大明是物理组成员.

(4) 王小红或李大明中的一人是物理组成员.

(5) 由于交通阻塞，他迟到了.

(6) 如果交通不阻塞，他就不会迟到.

(7) 他没迟到，所以交通没阻塞.

(8) 除非交通阻塞，否则他不会迟到.

(9) 他迟到当且仅当交通阻塞.

练习1解答

提示：
分清复合命题与简单命题
分清相容或与排斥或
分清必要与充分条件及充分必要条件

答案：(1) 是简单命题　　(2) 是合取式
(3) 是析取式（相容或）(4) 是析取式（排斥或）

设 p: 交通阻塞，q: 他迟到

(5) $p \to q$,　　(6) $\neg p \to \neg q$ 或 $q \to p$

(7) $\neg q \to \neg p$ 或 $p \to q$,　　(8) $q \to p$ 或 $\neg p \to \neg q$

(9) $p \leftrightarrow q$ 或 $\neg p \leftrightarrow \neg q$

可见(5)与(7)，(6)与(8) 相同（等值）

练习2

2. 设 p : 行列式是一个数

q : 太阳从西边落下

r : 美国的首都是旧金山

求下面命题的真值

(1) $(p\vee q)\rightarrow r$ 0

(2) $(q\vee r)\rightarrow(p\rightarrow\neg r)$ 1

(3) $(q\rightarrow r)\leftrightarrow(p\wedge\neg r)$ 0

(4) $(q\rightarrow p)\rightarrow((p\rightarrow\neg r)\rightarrow(\neg r\rightarrow\neg q))$ 0