



主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应



定义7.15 设 R 为非空集合上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 称 x 等价于 y , 记做 $x \sim y$.

实例 设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, 如下定义 A 上的关系 R :

$$R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3}\}$$

其中 $x \equiv y \pmod{3}$ 叫做 x 与 y 模 3 相等, 即 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等.

不难验证 R 为 A 上的等价关系, 因为

- (1) $\forall x \in A$, 有 $x \equiv x \pmod{3}$
- (2) $\forall x, y \in A$, 若 $x \equiv y \pmod{3}$, 则有 $y \equiv x \pmod{3}$
- (3) $\forall x, y, z \in A$, 若 $x \equiv y \pmod{3}$, $y \equiv z \pmod{3}$, 则有 $x \equiv z \pmod{3}$



定义7.16 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, $\forall x \in A$, 令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge x R y\}$$

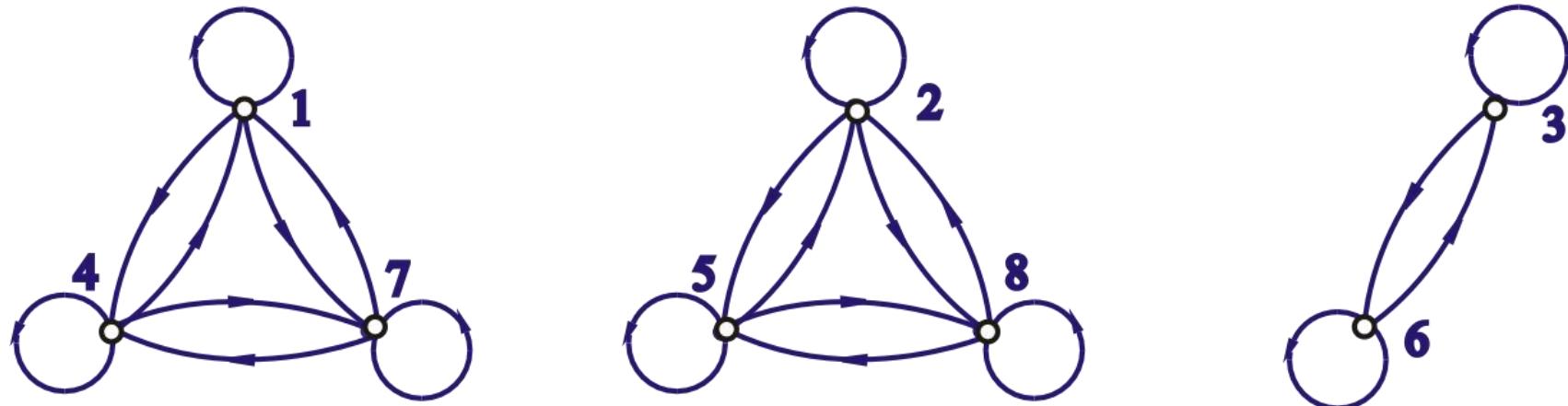
称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类, 简称为 x 的**等价类**, 简记为 $[x]$ 或 \bar{x}

实例 $A=\{1, 2, \dots, 8\}$ 上模3等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$



模 3 等价关系的关系图



定理7.14 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

- (1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是 A 的非空子集
- (2) $\forall x, y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x] = [y]$
- (3) $\forall x, y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交
- (4) $\bigcup \{[x] \mid x \in A\} = A$



定理7.14 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

- (1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是 A 的非空子集
- (2) $\forall x, y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x] = [y]$

\mathcal{R}

证 (1) 由等价类的定义可知, $\forall x \in A$ 有 $[x] \subseteq A$. 又由等价关系的自反性可知 $x \in [x]$, 即 $[x]$ 非空.

(2) 任取 z , 则有

$$\begin{aligned} z \in [x] &\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \Rightarrow \langle z, x \rangle \in R \text{ (对称性)} \Rightarrow \\ &\langle z, x \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle z, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow z \in [y] \end{aligned}$$

从而证明了 $z \in [y]$, 故 $[x] \subseteq [y]$.

同理可证 $[y] \subseteq [x]$.



定理7.14 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

(3) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交

\textcircled{R}

证 (3) 反证法. 假设 $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, 则存在 $z \in [x] \cap [y]$, 从而有 $z \in [x] \wedge z \in [y]$, 即 $\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$ 成立. 根据 R 的对称性和传递性必有 $\langle x, y \rangle \in R$, 与 xRy 矛盾



定理7.14 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

$$(4) \cup \{[x] \mid x \in A\} = A$$

\mathbb{R}

证 (4) 先证 $\cup \{[x] \mid x \in A\} \subseteq A$. 任取 y ,

$$\begin{aligned} y \in \cup \{[x] \mid x \in A\} &\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge y \in [x]) \\ &\Rightarrow y \in [x] \wedge [x] \subseteq A \Rightarrow y \in A \end{aligned}$$

从而有 $\cup \{[x] \mid x \in A\} \subseteq A$

再证 $A \subseteq \cup \{[x] \mid x \in A\}$. 任取 y ,

$$y \in A \Rightarrow y \in [y] \wedge y \in A \Rightarrow y \in \cup \{[x] \mid x \in A\}$$

从而有 $\cup \{[x] \mid x \in A\} \subseteq A$ 成立.

综上所述得 $\cup \{[x] \mid x \in A\} = A$.



定义7.17 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集, 记做 A/R ,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例

设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, A 关于模3等价关系 R 的商集为

$$A/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$$

A 关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{8\}\}, \quad A/E_A = \{\{1, 2, \dots, 8\}\}$$



定义7.18 设 A 为非空集合,若 A 的子集族 $\pi(\pi \subseteq P(A))$ 满足:

- (1) $\emptyset \notin \pi$
- (2) $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$
- (3) $\bigcup \pi = A$

则称 π 是 A 的一个**划分**,称 π 中的元素为 A 的**划分块**.

例10 设 $A = \{a, b, c, d\}$,给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ 如下:

$$\pi_1 = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$$

$$\pi_2 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

$$\pi_3 = \{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$$

$$\pi_4 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$

$$\pi_5 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

$$\pi_6 = \{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$$

则 π_1 和 π_2 是 A 的划分,其他都不是 A 的划分.



比较商集和划分的的定义，且由定理7.14，易见商集就是 A 的一个划分，并且不同的商集将对应于不同的划分. 反之，任给 A 的一个划分 π ，定义 A 上的关系 R :

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \text{ 与 } y \text{ 在 } \pi \text{ 的同一划分块中} \}$$

易证 R 为 A 上的等价关系，且该等价关系所确定的商集就是 π .

A 上的等价关系 R (A 关于 R 的商集)

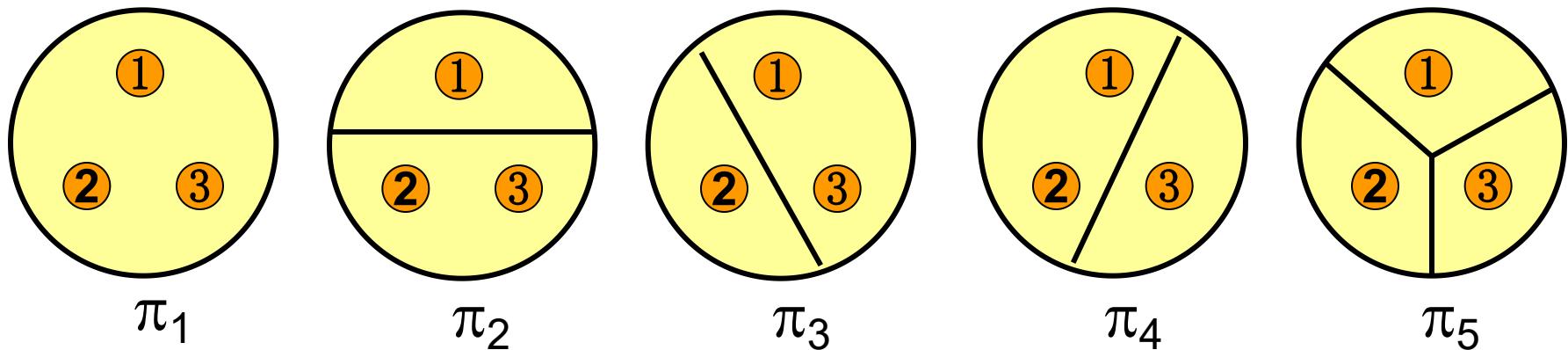


A 上的划分



例11 给出 $A=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系

解 先做出 A 的划分, 从左到右分别记作 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.



π_1 对应 E_A , π_5 对应 I_A , π_2, π_3 和 π_4 分别对应 R_2, R_3 和 R_4 .

$$R_2 = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\} \cup I_A$$

$$R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\} \cup I_A$$

$$R_4 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\} \cup I_A$$



主要内容

● 偏序关系

偏序关系的定义

偏序关系的实例

● 偏序集与哈斯图

● 偏序集中的特殊元素及其性质

极大元、极小元、最大元、最小元

上界、下界、最小上界、最大下界



定义7.19

偏序关系：非空集合 A 上的自反、反对称和传递的关系，记作 \leqslant . 设 \leqslant 为偏序关系，如果 $\langle x, y \rangle \in \leqslant$ ，则记作 $x \leqslant y$ ，读作 x “小于或等于” y .

注：“小于等于”不是指数的大小，而是指在偏序关系中的顺序性

实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系.

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.



定义7.20 设 \leqslant 为非空集合 A 上的偏序关系,

- (1) $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow x \leqslant y \wedge x \neq y$
- (2) $\forall x, y \in A, x$ 与 y 可比 $\Leftrightarrow x \leqslant y \vee y \leqslant x$

注: 任取元素 x 和 y , 可能有下述几种情况发生:

- ① $x < y$ (或 $y < x$)
- ② $x = y$
- ③ x 与 y 不是可比的

定义7.21 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

- (1) $\forall x, y \in A, x$ 与 y 都是可比的, 则称 R 为全序 (或线序)

例: 数集上的小于或等于关系是全序关系, 整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义7.22 集合 A 和 A 上的偏序关系 \leqslant 一起叫做偏序集, 记作 $\langle A, \leqslant \rangle$.

例: $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle, \langle P(A), R_{\subseteq} \rangle$



定义7.23. 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $\forall x, y \in A$, 如果 $x < y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x < z < y$, 则称 y 覆盖 x .

例: $\{1, 2, 4, 6\}$ 集合上整除关系, $1 < 2$, 故2覆盖1; $2 < 4$, 故4覆盖2; 但4不覆盖1, $1 < 2 < 4$.

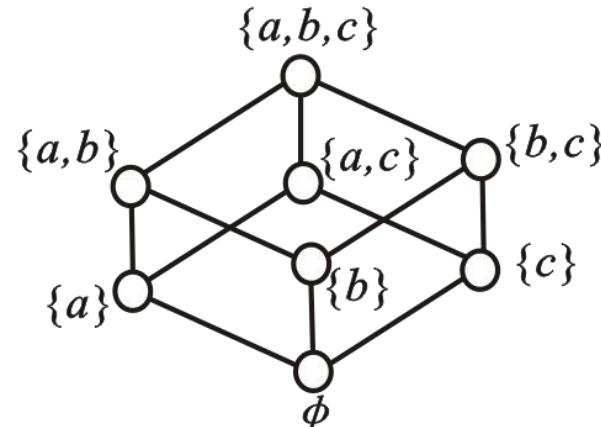
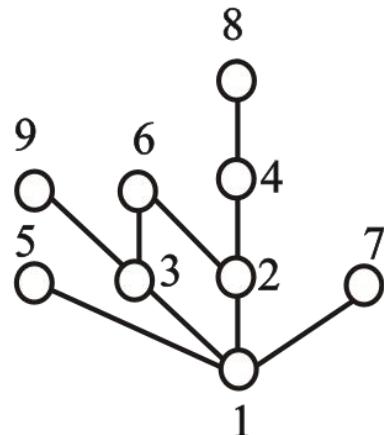
哈斯图:利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的
关系图

哈斯图的画法:

- (1) 排列顶点的顺序, 使得: $\forall x, y \in A$, 若 $x < y$, 则将 x 画在 y 的下方
- (2) 对于 A 中的两个不同元素 x 和 y , 如果 y 覆盖 x , 就用一条线段连接 x 和 y



例12 偏序集 $\langle\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{\text{整除}}\rangle$ 和 $\langle P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq} \rangle$ 的哈斯图.

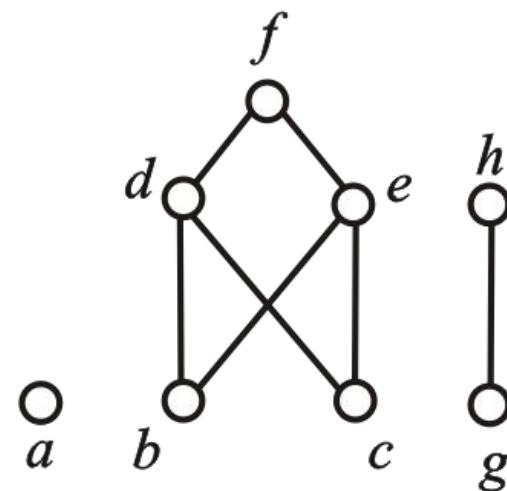


哈斯图的**特点**:

- (1) 每个结点没有环 (自反性)
- (2) 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示, 位置低的元素的顺序在前
- (3) 具有覆盖关系的两个结点之间连边 (反对称性、传递性)



例13 已知偏序集 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图如下图所示, 试求出集合 A 和关系 R 的表达式.



解 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R = \{\langle b, d \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle g, h \rangle\} \cup I_A$



定义7.24 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$

- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最小元**
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最大元**
- (3) 若 $\forall x(x \in B \wedge x \leq y \rightarrow x = y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极小元**
- (4) 若 $\forall x(x \in B \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极大元**

性质:

- (1) 对于有穷集, 极小元和极大元一定存在, 可能存在多个.
- (2) 最小元和最大元不一定存在, 如果存在一定惟一.
- (3) 最小元一定是极小元; 最大元一定是极大元.
- (4) 孤立结点既是极小元, 也是极大元.



定义7.25 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$

- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的上界
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的下界
- (3) 令 $C = \{y \mid y \text{为 } B \text{ 的上界}\}$, C 的最小元为 B 的最小上界或上确界
- (4) 令 $D = \{y \mid y \text{为 } B \text{ 的下界}\}$, D 的最大元为 B 的最大下界或下确界

性质:

- (1) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- (2) 下界、上界存在不一定惟一
- (3) 下确界、上确界如果存在, 则惟一



例14 设偏序集 $\langle A, \leqslant \rangle$, 求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元, 令 $B=\{1,2,3\}$, B 的下界、上界、下确界、上确界.

解

最小元: 1;

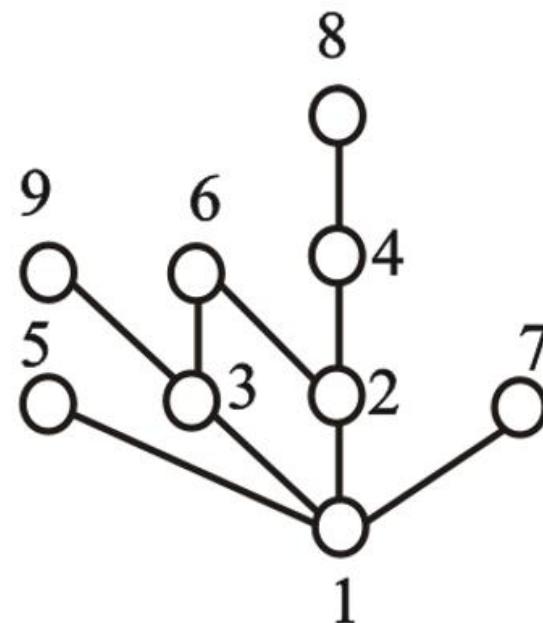
最大元: 不存在;

极小元: 1;

极大元: 5、6、7、8、9;

上界、上确界: 6;

下界、下确界: 1.



整除关系



例15 设偏序集 $\langle A, \leqslant \rangle$, 求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元, 令 $B = \{ \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\} \}$, B 的下界、上界、下确界、上确界.

解

最小元: \emptyset ;

最大元: $\{a,b,c\}$;

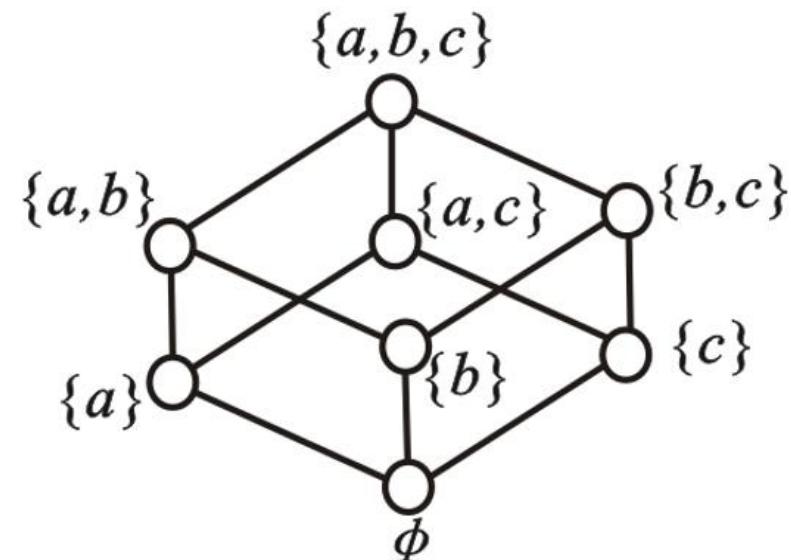
极小元: \emptyset ;

极大元: $\{a,b,c\}$;

上界、上确界: $\{a,b,c\}$;

下界: $\{b\}$ 、 \emptyset ;

下确界: $\{b\}$.



包含关系



例16 设偏序集 $\langle A, \leqslant \rangle$, 求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元, 设 $B = \{b, c, d\}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.

解

极小元: a, b, c, g ;

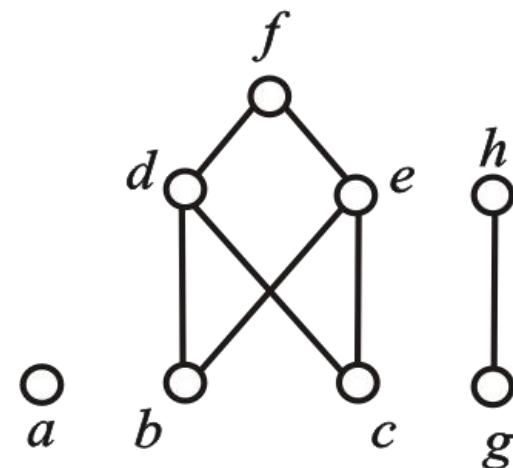
极大元: a, f, h ;

最小元, 最大元: 不存在.

上界: d, f ;

上确界: d ;

下界、下确界: 不存在.





例17 设 X 为集合, $A=P(X)-\{\emptyset\}-\{X\}$, 且 $A\neq\emptyset$. 若 $|X|=n$, $n\geq 2$.
问:

- (1) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 是否存在最大元?
- (2) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 是否存在最小元?
- (3) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 中极大元和极小元的一般形式是什么?
并说明理由.

解 (1) $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 不存在最小元和最大元, 因为 $n\geq 2$.

(2) $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即 $\{x\}, x \in X$.

(3) $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即 $X-\{x\}, x \in X$.



有穷任务集 T , m 台相同的机器,
 T 上存在偏序 \leq , 若 $t_1 < t_2$, 任务 t_1 完成后 t_2 才能开始.
 $\forall t \in T$, $l(t)$ 是 t 需要的时间, $d(t)$ 是 t 的截止时间, $l(t), d(t) \in \mathbb{Z}^+$

开始时间为 0, $\sigma: T \rightarrow \{0, 1, \dots\}$ 表示对任务集 T 的一个调度, $\sigma(t)$ 是 t 的开始时间. 完成所有任务的时间:

$$D = \max\{\sigma(t) + l(t) \mid t \in T\}.$$

可行调度 σ 满足:

- (1) $\forall t \in T, \sigma(t) + l(t) \leq d(t)$ 每个任务都在截止时间之前完成
- (2) $\forall i, 0 \leq i \leq D, |\{t \in T \mid \sigma(t) \leq i < \sigma(t) + l(t)\}| \leq m$ 至多 m 个任务并行
- (3) $\forall t, t' \in T, t < t' \Rightarrow \sigma(t) + l(t) \leq \sigma(t')$ 任务安排满足偏序



例18 $m=2, T=\{t_1, t_2, \dots, t_6\}$

$l(t_i)$ 如图所示, $d(t_i)=7$

