概率论与数理统计作业 Chap4

April 8, 2025

练习 1. 某地区一个月内发生重大交通事故数 X 服从如下分布

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0.301	0.362	0.216	0.087	0.026	0.006	0.002

试求该地区发生重大交通事故的月平均数.

解.

$$E(X) = 1 \times 0.362 + 2 \times 0.216 + 3 \times 0.087 + 4 \times 0.026 + 5 \times 0.006 + 6 \times 0.002 = 1.201.$$

练习 2. 某厂推土机发生故障后的维修时间 T 是一个随机变量 (单位: 小时), 其密度函数为

$$f(t) = \begin{cases} 0.02e^{-0.02t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$$

试求平均维修时间.

解.

$$E(T) = \int_0^{+\infty} 0.02te^{-0.02t}\,dt = -te^{-0.02t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-0.02t}\,dt = -\frac{1}{0.02}e^{-0.02t}\Big|_0^{+\infty} = 50.$$

故其平均维修时间为 50 小时.

练习 3. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

如果 $E(X) = \frac{2}{3}$, 求 a 和 b.

解. 由 $\int_0^1 (a + bx^2)\,dx = 1$ 得

$$a + \frac{1}{3}b = 1. \tag{1}$$

又由

$$\frac{2}{3} = E(X) = \int_0^1 x(a + bx^2)\,dx$$

得

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b = \frac{2}{3}. \tag{2}$$

联立 (1)(2), 解得 $a = \frac{1}{3}, b = 2$.

练习 4. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求 $\frac{1}{X^2}$ 的数学期望.

解.

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2\,dx=\frac{3}{4}.$$

练习 5. 设随机变量 X 满足 $E(X)=\mathrm{Var}(X)=\lambda$, 已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$, 试求 λ.

解.

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\mathrm{Var}(X)+[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2,\\ 1&=E[(X-1)(X-2)]=E[X^2-3X+2]\\ &=E(X^2)-3E(X)+2\\ &=E(X^2)-3\lambda+2\\ &=\lambda^2-3\lambda+2+\lambda\end{aligned}$$

于是,

$$\lambda^2-2\lambda+1=0,$$

从中解得 $\lambda=1$.

练习 6. 假设有 10 只同种电器元件, 其中有两只不合格品. 装配仪器时, 从这批元件中任取一只, 如是不合格品, 则扔掉重新任取一只; 如仍是不合格品, 则扔掉再取一只, 试求在取到合格品之前, 已取出的不合格品数的方差.

解. 记 X 为取到合格品之前, 已取出的不合格品数, 则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{8}{10}$	$\frac{16}{90}$	$\frac{2}{90}$

由此得

$$E(X)=\frac{2}{9},\quad E(X^2)=\frac{4}{15},\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{4}{15}-\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{88}{405}=0.2173.$$

练习 7. 已知 $E(X)=-2$, $E(X^2)=5$, 求 $\mathrm{Var}(1-3X)$.

解.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(1-3X)&=9\mathrm{Var}(X)=9[E(X^2)-(E(X))^2]\\ &=9[5-(-2)^2]=9[5-4]=9.\end{aligned}$$

练习 8. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x\le 0,\\ 1-x, & 0<x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求 $\mathrm{Var}(3X+2)$.

解. 因为

$$E(X) = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0,$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6},$$

所以 $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{6}$, 由此得 $\mathrm{Var}(3X+2) = 9\mathrm{Var}(X) = 1.5$.

练习 9. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 $E(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$，试求 $E(X-Y)^2$.

解. 因为 $E(X-Y) = 0$, 所以 $E(X-Y)^2 = \mathrm{Var}(X-Y) = 2\sigma^2$.

练习 10. 设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} x(1+3y^2)/4, & 0 < x < 2, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $E(Y/X)$.

解.

$$E(Y/X) = \int_{0}^{1}\int_{0}^{2} \frac{y}{x} \cdot \frac{x(1+3y^2)}{4}\,dx\,dy = \int_{0}^{1} \frac{y(1+3y^2)}{2}\,dy = \frac{5}{8}.$$

练习 11. 一商店经销某种商品，每周进货量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从区间 $(10, 20)$ 上的均匀分布。商店每售出一单位商品可得利润 1000 元；若需求量超过了进货量，则可从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利润为 500 元。试求此商店经销该种商品每周的平均利润。

解. 记 Z 为此商店经销该种商品每周所得的利润，由题设知 $Z = g(X, Y)$，

其中

$$g(x,y) = \begin{cases} 1000y, & y \le x, \\ 1000x + 500(y-x), & y > x. \end{cases}$$

由题设条件知 (X, Y) 的联合概率密度为

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & 10 \le x \le 20, 10 \le y \le 20, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E(Z)} = Eg\,(X,Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g\,(x,y)\,p_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int\int_{y \le x} 1000y p_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\int_{y>x} 500(x+y)p_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 10\int_{10}^{20}\mathrm{d}y\int_{y}^{20} y\mathrm{d}x + 5\int_{10}^{20}\mathrm{d}y\int_{10}^{y}(x+y)\mathrm{d}x \\
&= 20000/3 + 5 \times 1500 \approx 14166.67.
\end{aligned}$$

练习 12. 设随机变量 X 和 Y 独立同服从参数为 λ 的泊松分布，令

$$U = 2X + Y, \quad V = 2X - Y.$$

求 U 和 V 的相关系数 $\rho(U, V)$.

解. 因为

$$\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(2X+Y) = 4\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 5\lambda,$$

$$\mathrm{Var}(V) = \mathrm{Var}(2X-Y) = 4\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 5\lambda.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U,V) &= \mathrm{Cov}(2X+Y, 2X-Y)\\ &= \mathrm{Cov}(2X,2X) + \mathrm{Cov}(Y,2X) - \mathrm{Cov}(2X,Y) - \mathrm{Cov}(Y,Y)\\ &= 4\mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) = 3\lambda,\end{aligned}$$

由此得

$$\rho(U,V) = \frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{\mathrm{Var}(U)}\sqrt{\mathrm{Var}(V)}} = \frac{3\lambda}{5\lambda} = \frac{3}{5}.$$