第十六章 树

主要内容

- 无向树及其性质
- 生成树
- 根树及其应用

16.1 无向树及其性质

定义16.1

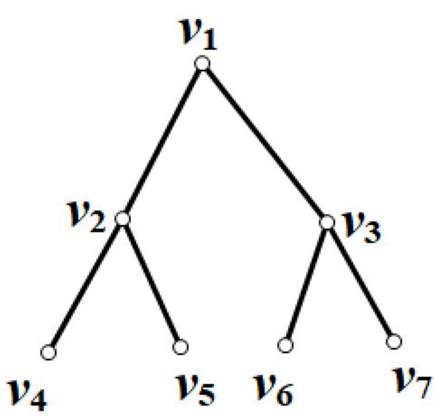
(1) 无向树（树）——连通无回路的无向图

(2) 平凡树——平凡图

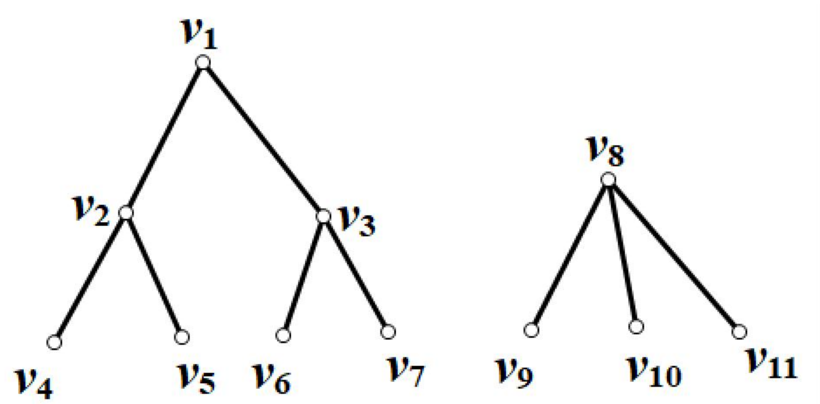
(3) 森林——至少由两个连通分支（每个都是树）组成

(4) 树叶——悬挂顶点（1度顶点）

(5) 分支点——度数≥2的顶点



T_1 : 树



T_2: 森林

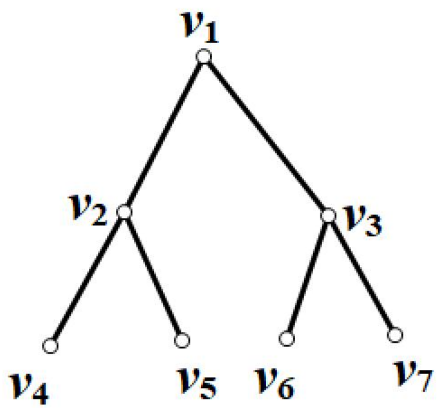
注意：

由树的定义——连通无回路的无向图可知：

1、树无孤立点，无环、无平行边；

2、本章的回路指初级回路和简单回路.

（即不包含类似 $v_1v_3v_1$ 这种回路）



无向树的等价定义

定理16.1 设$G=<V,E>$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树

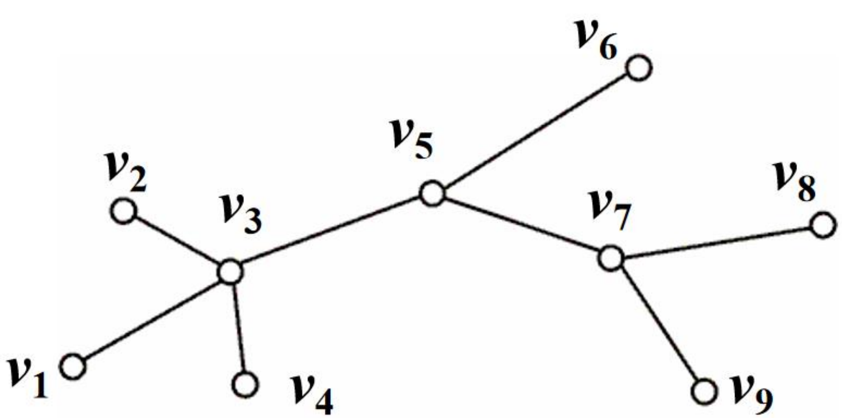
(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.



定理16.1 证明(1)⇒(2)

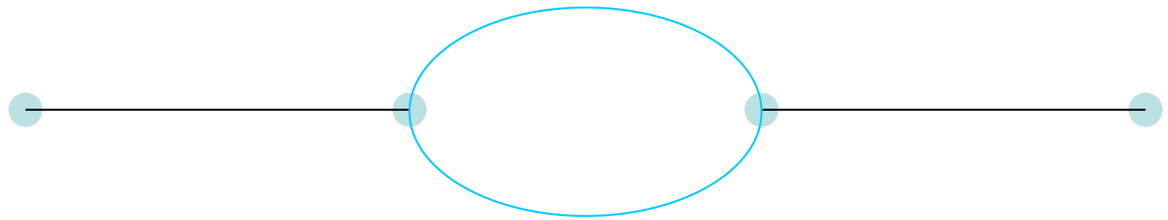
证明: (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(6)⇒(1)

(1) G是树(连通无回路)

(2) G中任意两个顶点之间存在唯一路径

(1)⇒(2)

由G的连通性及定理14.5的推论可知, $\forall u,v \in V$, u与v之间一定存在路径. 若路径不唯一, 如存在u与v之间的两条路径Γ_1和Γ_2, 则必存在Γ_1和Γ_2上的边构成的回路，与G中无回路矛盾.



定理16.1 证明(2)⇒(3)

(2) G中任意两个顶点之间存在唯一路径

(3) G中无回路 且 $m=n-1$

(2)⇒(3)

①证明G无回路：

反证法: 假设G有回路（简单或初级），则G上必有圈.

若圈长度为1，即该圈为关联某顶点v的环，则存在v到v的长度为0和1的两条不同路径；与条件矛盾.

若圈长度≥2，⇒ 圈上的任何两点间存在两条不同路径, 与条件矛盾.

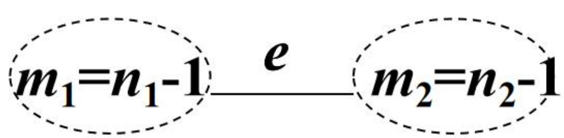
②证明$m=n-1$(归纳法):

$n=1$时, G为平凡图，$m=0$，结论显然成立.

设$n \le k(k \ge 1)$时结论成立.

当$n=k+1$时, 任选一边$e=(u,v)$, 则$G-e$有2个连通分支, 因为u到v之间存在的唯一路径被删除了.

故$m=m_1+m_2+1=(n_1-1)+(n_2-1)+1=n_1+n_2-1=n-1$.



定理16.1 证明(3)⇒(4)

(3) G无圈且$m=n-1$

(4) G连通且$m=n-1$

(3)⇒(4):

只需证G连通（反证法）.

G无圈，若G不连通，不妨设G有$s(s\geq 2)$个连通分支, 则每个连通分支均无回路，故每个连通分支都是树（定义）, 所以

$m=m_1+m_2+\ldots+m_s=(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_s-1)=n_1+n_2+\ldots+n_s-s=n-s$,

又$s\geq 2$，与$m=n-1$矛盾.

$m_1=n_1-1$ $m_2=n_2-1$ ------ $m_s=n_s-1$

定理16.1 证明(4)⇒(5)

(4) G**连通且**$m=n-1$

(5) G**连通且所有边是桥**

(4)⇒(5):

$\forall e \in E$, $G-e$含有n个顶点、$n-2$条边, 故$G-e$一定不连通(因为若G是n阶无向连通图⇒$m \geq n-1$), 所以$\{e\}$是割边.

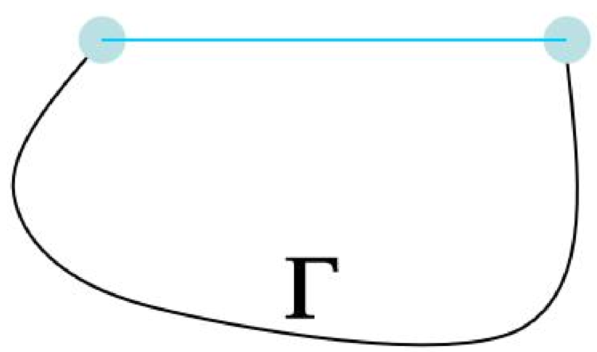
定理16.1 证明(5)⇒(6)

(5) G连通且所有边是桥

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

(5)⇒(6):

所有边是桥⇒G无回路，又因G连通，故G是树. 由(1)⇒(2)知，$\forall u,v\in V$, G连通, u,v之间有唯一路径Γ, 则$\Gamma\cup(u,v)$是唯一的圈.



定理16.1 证明(6)⇒(1)

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

(1) G是树(连通无回路)

(6)⇒(1):

只要证明G是连通的即可. 由于$\forall u,v\in V$, $G\cup(u,v)$后产生唯一的圈C, 则C-(u,v)是u,v之间的路径，故$u\sim v$. 由u,v的任意性可知，G是连通的.

无向树的性质

定理16.2 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶.

证 设T有x片树叶，由握手定理可知，

$$2(n-1)=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x\geq 2$.

例题

例1 已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

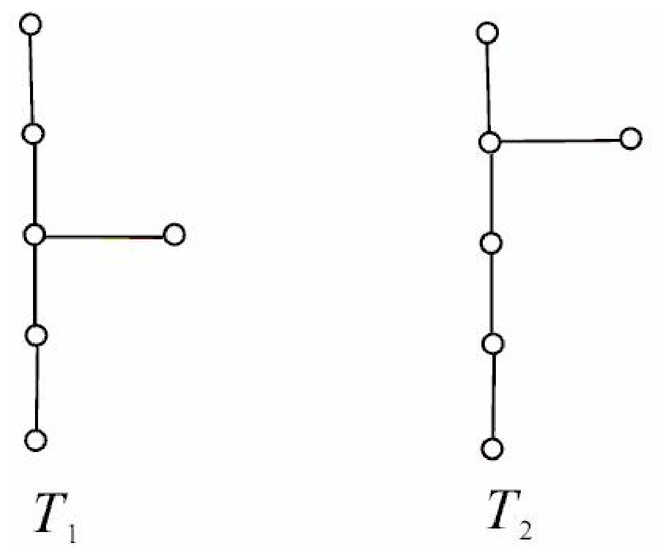
解 解本题用树的性质$m=n-1$，握手定理.

设有x片树叶，于是 $n = 1+2+x = 3+x$,

$$\underline{2m} = 2(n-1) = 2\times(2+x) = \underline{1\times3+2\times2+x}$$

解出$x = 3$，故T有3片树叶.

T 的度数列应为 1, 1, 1, 2, 2, 3，易知3度顶点与1个2度顶点相邻与和2个2度顶点均相邻是非同构的，因而有2棵非同构的无向树T_1, T_2，如图所示.



例题

例2 已知无向树T有5片树叶，2度与3度顶点各1个，其余顶点的度数均为4，求T的阶数n，并画出满足要求的所有非同构的无向树.

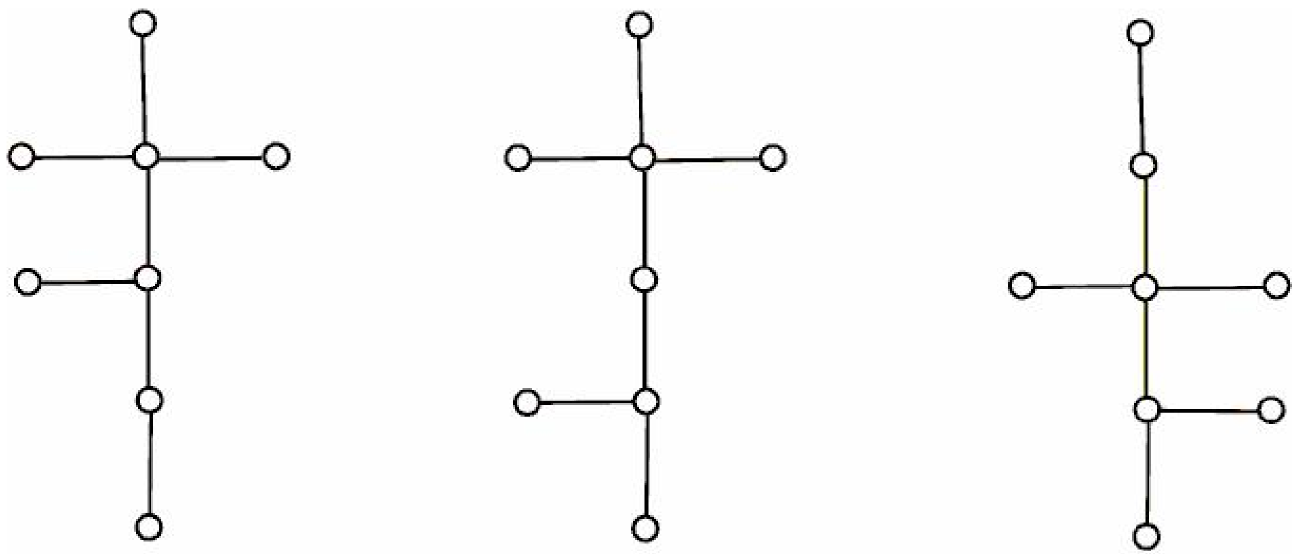
解 设T的阶数为n, 则边数为$n-1$，4度顶点的个数为$n-7$.
由握手定理得

$$2m = 2(n-1) = 5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$$

解出$n = 8$，4度顶点为1个.

例题

T的度数列为1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4，共有3棵非同构的无向树，如图所示.



T_1　　T_2　　T_3

16.2 生成树

定义16.2 设G为无向图

(1) G的生成树T ——T是G的生成子图并且是树

(2 树枝 ——G的在T中的边

(3) 弦 ——G的不在T中的边

(4) 余树$\overline{T}$ ——T的所有弦的导出子图

注：1、$\overline{T}$不一定连通，也不一定不含回路

2、G的生成树可能不唯一，但生成树所含的边数一定是唯一的.

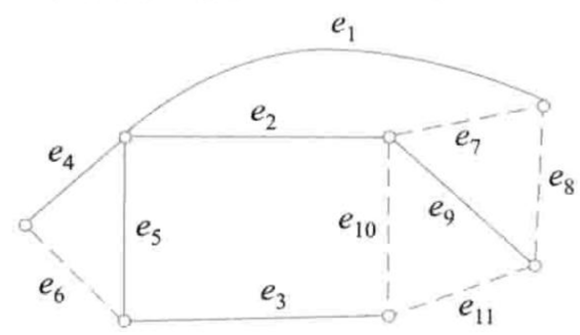


图 16.3

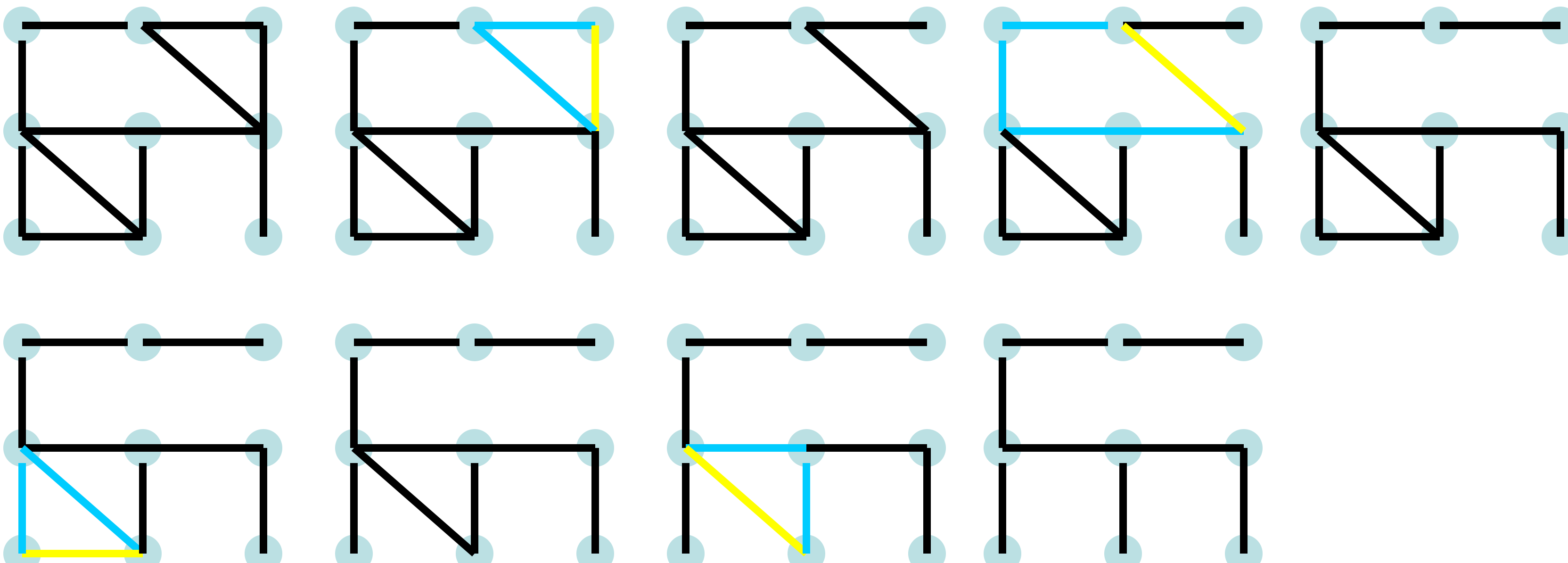
定理16.3

定理16.3 无向图*G*有生成树当且仅当*G*连通

证明： 必要性，显然.

充分性，破圈法（构造性证明）.

（若中含圈，任取一圈，删除圈上任意一条边；重复这个过程直至*G*中无圈）



定理16.3推论及定理16.4

定理16.3 无向图G有生成树当且仅当G连通

推论 设G是n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$

定理16.4 设T为无向连通图G的一颗生成树，e为T的任意一条弦，则$T \cup e$中含只有一条弦e其余边均为树枝的圈. 不同的弦对应的圈也不同.

证 设$e=(u,v)$，由定理16.1可知，在T中存在u到v的惟一路径Γ，则$\Gamma \cup e$为所求的圈. 显然，不同的弦端点不同，对应的圈自然也不同.

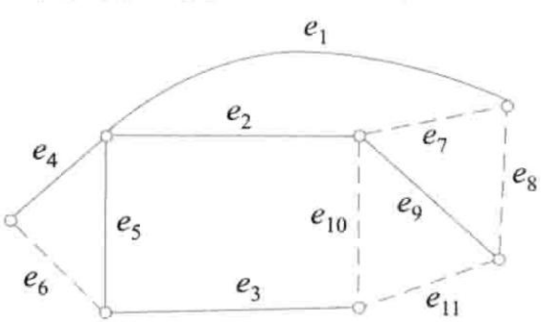


图 16.3

基本回路系统

定义16.3 设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，设$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{m-n+1}$为$T$的弦. C_r (r=1, 2, …, $m-n+1$)为T添加弦e'_r产生的只含弦e'_r其余边均为树枝的圈. 称C_r为G的对应树T的弦e'_r的基本回路或基本圈. 并称$\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$为$G$对应$T$的基本回路系统，称$m-n+1$为$G$的圈秩，记作$\xi(G)$.

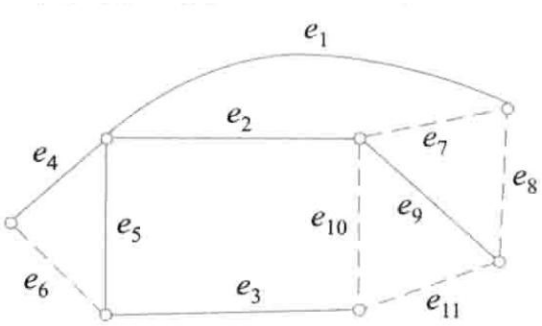


图 16. 3

在图16.3中，对应生成树的弦$e_6, e_7, e_8, e_{10}, e_{11}$的基本回路为:

$C_1=e_6e_4e_5$、$C_2=e_7e_2e_1$、$C_3=e_8e_9e_2e_1$

$C_4=e_{10}e_3e_5e_2$、$C_5=e_{11}e_3e_5e_2e_9$

圈秩$\xi(G)=5$，基本回路系统为$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$

注意: 无向连通图G的圈秩与生成树的选取无关，但不同生成树对应的基本回路系统可能不同.

基本割集系统

定理16.5 设T是连通图G的一棵生成树，e为T的树枝，则G中存在只含树枝e，其余边都是弦的割集，且不同的树枝对应的割集也不同.

证 由定理16.1可知，e是T的桥，因而$T-e$有两个连通分支T_1和T_2，令$S_e=\{e \mid e\in E(G)$且 e 的两个端点分别属于$V(T_1)$和$V(T_2)\}$，由构造显然可知S_e为G的割集，$e\in S_e$且S_e中除e外都是弦，所以S_e为所求. 显然不同的树枝对应的割集不同.

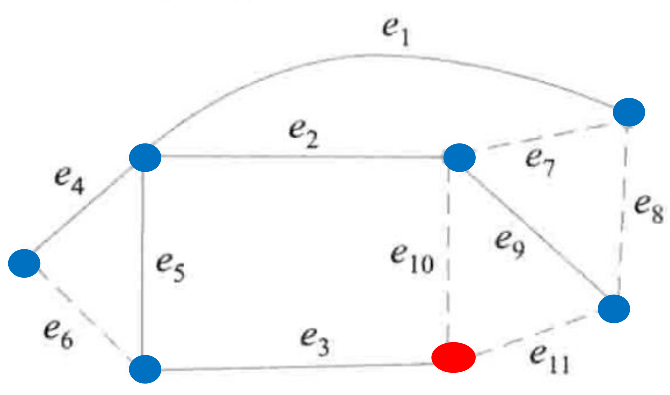


图 16.3

基本割集与基本割集系统

定义16.4 设T是n阶连通图G的一棵生成树，$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1}$为$T$的树枝，$S_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$是由树枝e'_i和弦构成的割集，则称S_i为G的对应树枝e'_i生成的基本割集，. 称$\{S_1,S_2, \ldots, S_{n-1}\}$为$G$对应$T$的基本割集系统，称$n-1$为$G$的割集秩，记作$\eta(G)$.

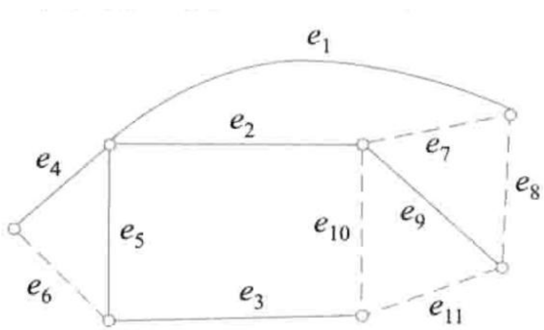


图 16.3

在图16.3中，对应生成树的树枝$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_9$的基本割集为：

$S_1=\{e_1, e_7, e_8\}$、$S_2=\{e_2, e_7, e_8, e_{10}, e_{11}\}$、$S_3=\{e_3, e_{10}, e_{11}\}$

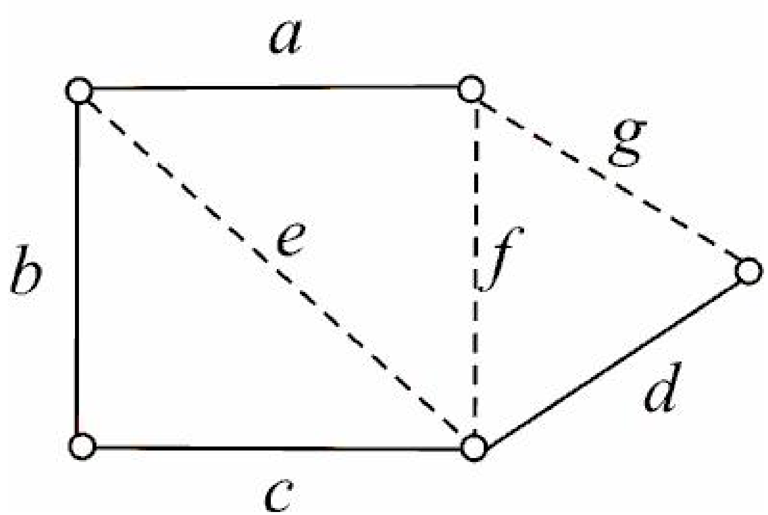
$S_4=\{e_4, e_6\}$、$S_5=\{e_5, e_6, e_{10}, e_{11}\}$、$S_6=\{e_9, e_8, e_{11}\}$

割集秩$\eta(G)=6$，基本割集系统为$\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , S_6\}$

注意: 无向连通图G的割集秩与生成树的选取无关，但不同生成树对应的基本割集系统可能不同.

实例

例3 下图实线边所示为生成树，求基本回路系统与基本割集系统



解 弦e, f, g对应的基本回路分别为

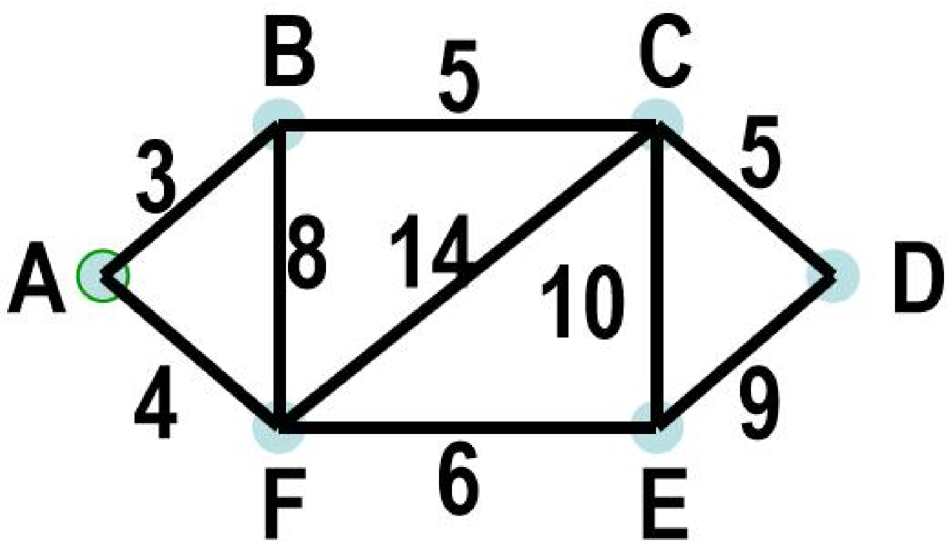
$$C_e = ebc,\ C_f = fabc,\ C_g = gabcd,\ C_{基}=\{C_e, C_f, C_g\}.$$

树枝a, b, c, d对应的基本割集分别为

$$S_a=\{a, f, g\},\ S_b=\{b, e, f, g\},\ S_c=\{c, e, f\ g\},\ S_d=\{d, g\},$$
$$S_{基}=\{S_a, S_b, S_c, S_d\}.$$

连通带权图中的最小生成树

对图的每条边附上权值信息，可得到无向连通带权图，定义为$G=\langle V,E,W\rangle$，其中$W: E\to R$, $W(e)$称为e的权



最小生成树

定义16.5 T是无向连通带权图$G=\langle V,E,W\rangle$的一颗生成树

(1) T的权：$W(T)$——T的各边权之和

(2) 最小生成树——G的所有生成树中权最小的

求最小生成树的一个算法：避圈法（Kruskal算法）

设$G=\langle V,E,W\rangle$，将G中非环边按权从小到大排序：$e_1, e_2, \ldots, e_m$.

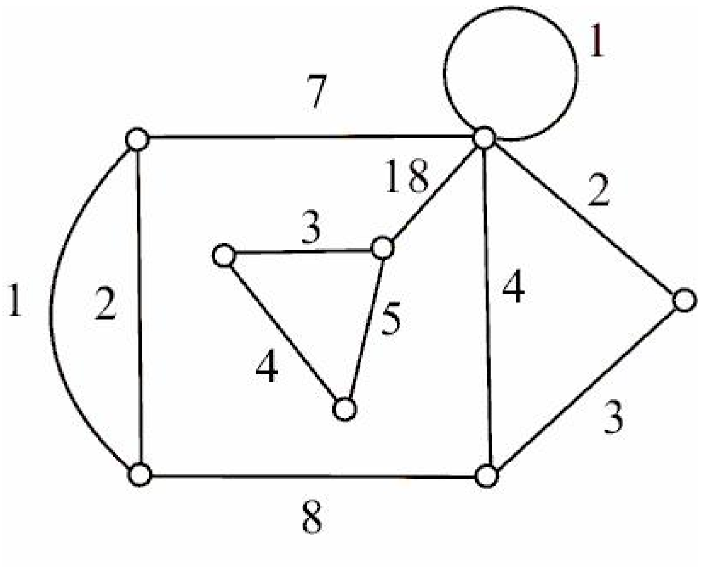
(1) 取e_1在T中

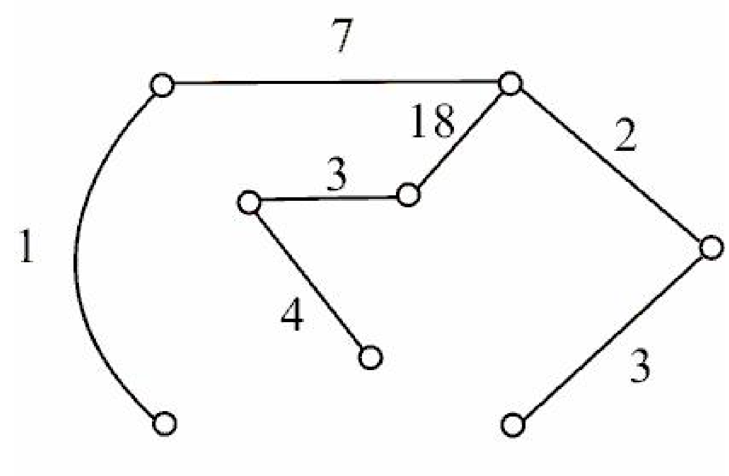
(2) 检查e_2，若e_2与e_1不构成回路，取e_2也在T 中，否则弃e_2.

(3) 再检查$e_3,\ldots$, 直到得到生成树为止.

实例

例4 求图的一棵最小生成树.





所求最小生成树如右图所示，$W(T)$=38.

实例

例 12.1 设有五个居民点(如图 12.1),每条边代表两居民点的道路,数字代表路长.现要在这五个居民点之间设置通信线路网,以保证五个居民点的联络.如果已知设置通信线路代价与道路长成正比,问如何建立该通信联络网,而使联网代价最小.

- 由若干个不同的点(称之为**顶点**或**结点**)与其中某些顶点的连线所组成的图形称为**图**.如图 12.2 中 v_i 为顶点.

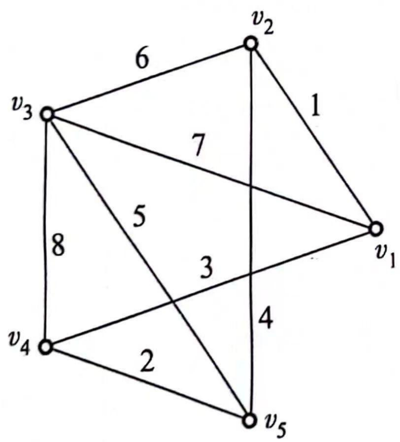


图 12.1

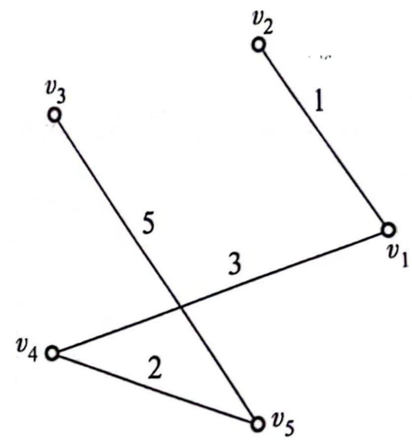


图 12.2

Kruskal算法的MATLAB实现

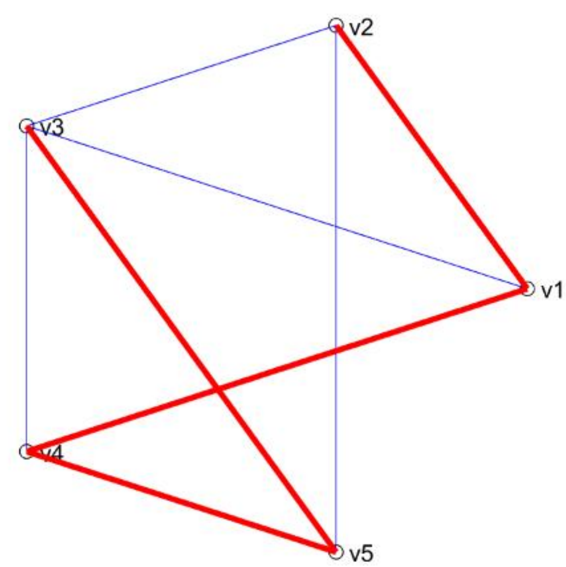
定义带权邻接矩阵W： W的元素w_{ij}表示图G中顶点v_i到v_j的边的权，若v_i到v_j无边，定义权为$w_{ij}=\infty$.

w =

Inf	1	7	3	Inf
Inf	Inf	6	Inf	4
Inf	Inf	Inf	8	5
Inf	Inf	Inf	Inf	2
Inf	Inf	Inf	Inf	Inf

```
clear;w=inf*ones(5);
w(1,[2,3,4])=[1,7,3];
w(2,[3,5])=[6,4];
w(3,[4,5])=[8,5];
w(4,5)=2;
[a,b]=minTreeKr2(w)
```

红色粗线为最小生成树



最小生成树的权为 11