第十五章 欧拉图与哈密顿图

主要内容

- 欧拉图
- 哈密顿图
- 带权图与货郎担问题

第十五章 欧拉图与哈密顿图

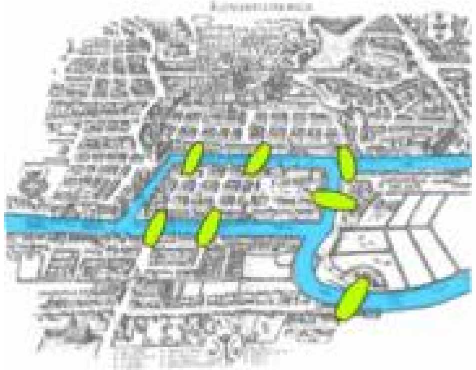
预备知识

- 无向图$G = <V,E>$
- $d(v)$, $d^+(v)$, $d^-(v)$
- 奇度顶点与偶度顶点
- 连通，通路，回路

历史背景

Leonhard Euler:1707~1783

莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler），瑞士数学家和物理学家，18世纪数学界最杰出的人物之一。1736年，欧拉发表论文解决了著名的哥尼斯堡七桥问题，该论文是图论的起源.



→

哥尼斯堡七桥问题:

- 如何将左边图所示的七桥问题转换为点和边来描述?
- 一个游人怎样才能不重复地一次走遍七座桥，最后又回到出发点呢?

欧拉图定义

定义15.1

(1) 欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

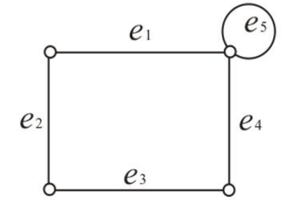
(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

几点说明:

①规定平凡图为欧拉图.

②欧拉通路是生成的简单通路，欧拉回路是生成的简单回路.

③环不影响图的欧拉性.



无向欧拉图的判别法

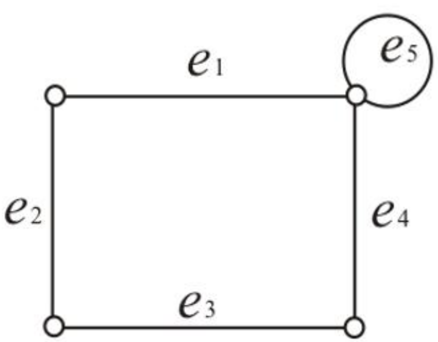
定理15.1 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度顶点.

证 若G为平凡图，结论显然成立. 下设G为 n 阶 m 条边的无向图.

必要性 设C为G中一条欧拉回路.

(1) 由于回路经过了G中所有的顶点，故G连通显然.

(2) $\forall v_i \in V(G)$，v_i在C上每出现一次获2度，所以v_i为偶度顶点. 由v_i的任意性，结论为真.



无向欧拉图的判别法

定理15.1 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度顶点.

证

充分性（构造性证明） 对边数m做归纳法（第二数学归纳法）.

1、m=1时，G为一个环，则G为欧拉图.

2、设$m \leq k$（$k \geq 1$）时结论成立，下面证明当$m=k+1$时结论也成立：

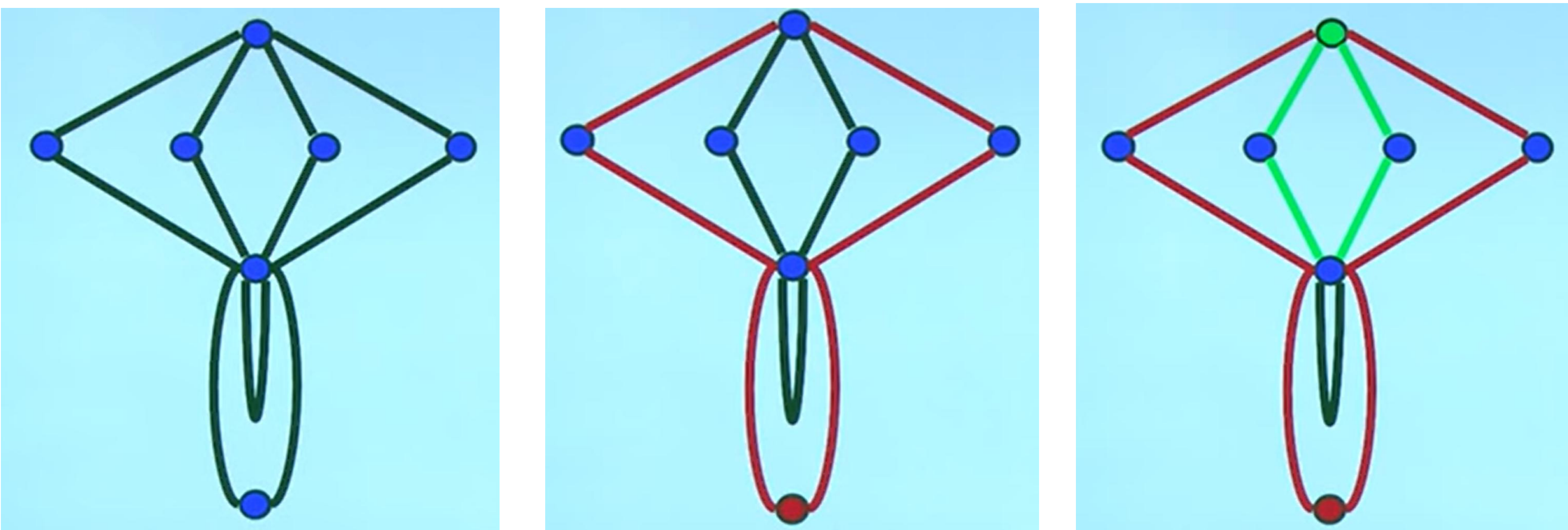
(1) 从任意点出发，构造一条简单回路C;

(2) 若C不包含所有的边，从G中删除C上的所有的边，得到的图如果存在孤立顶点，将其删除，最后得到图G';

(3)显然图G'的边数$m' \leq k$，并且G'是连通的且无奇度顶点的，故G'存在欧拉回路C',由于原图G连通，故C和C'一定有公共顶点;

(4)将C和C'连接起来即可得到G的欧拉回路.

无向欧拉图的判别法



定理15.5 *G*是非平凡的欧拉图当且仅当*G*是连通的且为若干个边不重的圈之并.

无向半欧拉图的判别法

定理15.2 无向图G是半欧拉图当且仅当G 连通且恰有两个奇度顶点.

证 必要性

G是半欧拉图，则存在经过所有顶点的欧拉通路，连通性是显然的. 又因为G不存在欧拉回路，则通路两端点（设为u,v）不同且不相邻，u,v作为通路端点时只获得1度，还可能作为中间点若干次，每次获得2度，故u,v为奇度顶点，其余顶点作为中间端点，显然为偶度顶点.

充分性 （利用定理15.1）

设u,v为G 中的两个奇度顶点，令

$$G' = G \cup (u,v)$$

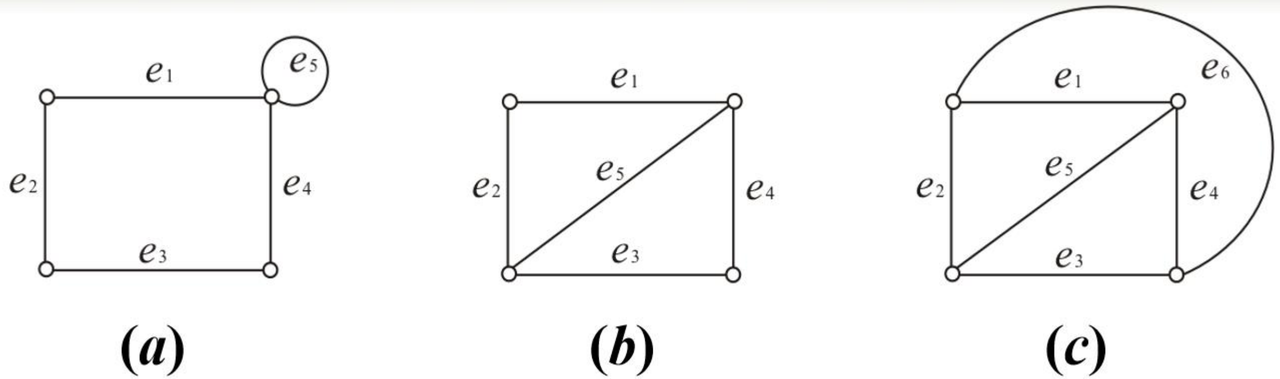
则G' 连通且无奇度顶点，由定理15.1知G'为欧拉图，因而存在欧拉回路C，令

$$\Gamma = C - (u,v)$$

则Γ为 G 中欧拉通路.

无向欧拉图实例

例 判断下面各无向图是否是欧拉图或欧拉半图?

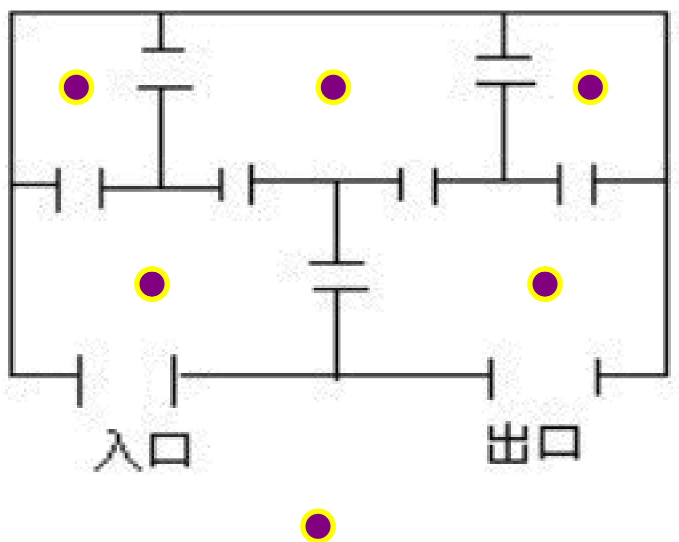


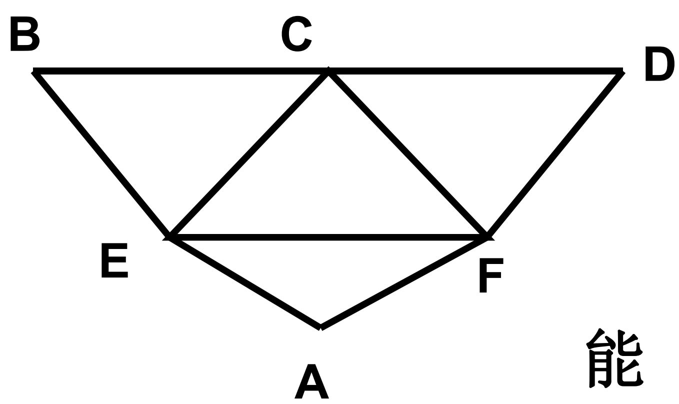
(*a*) 为欧拉图，(*b*)半欧拉图，(*c*)不是欧拉图，也不是半欧拉图.

在(*c*)中各至少加几条边才能成为欧拉图? 2条

练习 1

下图是某展览厅的平面图，它由五个展室组成，任两展室之间都有门相通，整个展览厅还有一个进口和一个出口，问游人能否一次不重复地穿过所有的门，并且从入口进，从出口出？

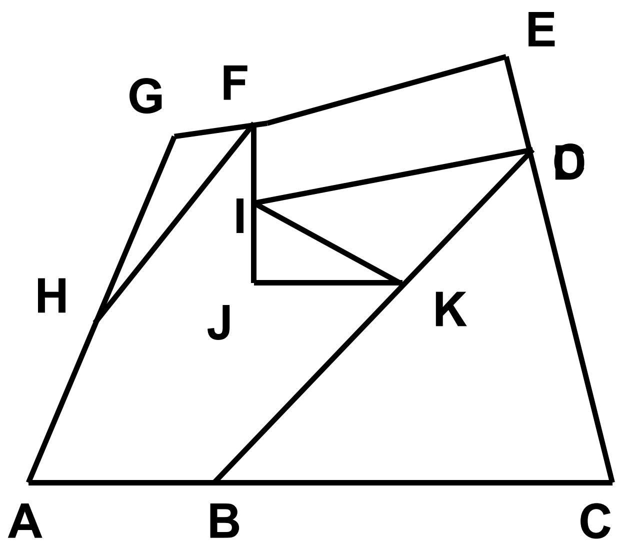




能

练习 2

下图是一个公园的平面图. 要使游客走遍每条路而不重复，问出入口应设在哪里？



H或B

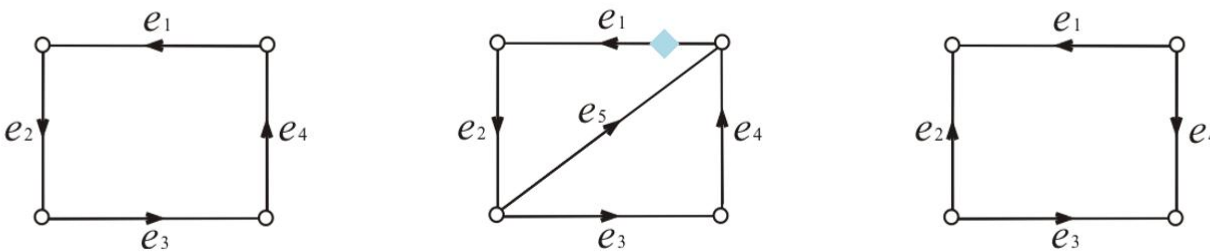
有向欧拉图的判别法

定理15.3 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

定理15.4 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的，且D中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度.

有向欧拉图实例

例 判断下面各有向图是否是欧拉图或欧拉半图?



(*d*)　　(*e*)　　(*f*)

(*d*) 为欧拉图，(*e*)半欧拉图，(*f*)不是欧拉图，也不是半欧拉图.

在(*f*)中各至少加几条边才能成为欧拉图?　4条

求欧拉回路的简单算法——Fleury算法

基本思想：能不走桥就不走桥

Fleury 算法

输入：欧拉图 G.

1. 任取 $v_0 \in V(G)$，令 $P_0 = v_0$，$i = 0$.
2. 设 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_i v_i$，

   如果 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中没有与 v_i 关联的边，则计算停止；否则按下述条件从 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中任取一条边 e_{i+1}：

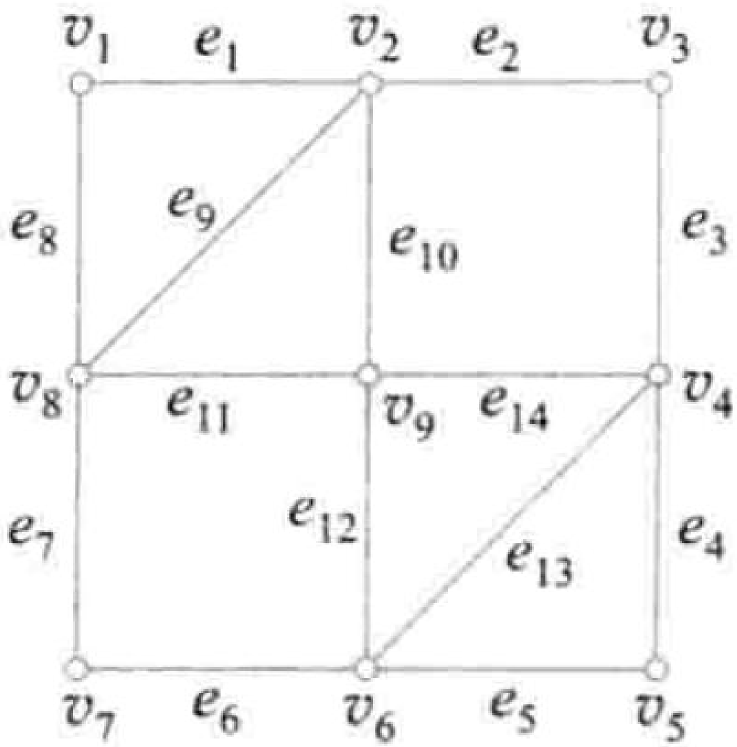
   (a) e_{i+1} 与 v_i 相关联；

   (b) 除非无别的边可供选择，否则 e_{i+1} 不应该为 $G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中的桥.

   设 $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$，把 $e_{i+1} v_{i+1}$ 加入 P_i 得到 P_{i+1}.
3. 令 $i = i+1$，返回 2.

求欧拉回路的算法——Fleury算法

练习： 利用Fleury算法求下图的欧拉回路：

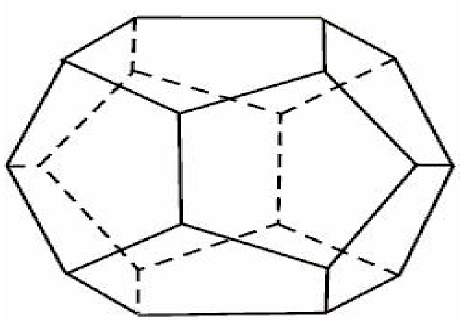


(a)

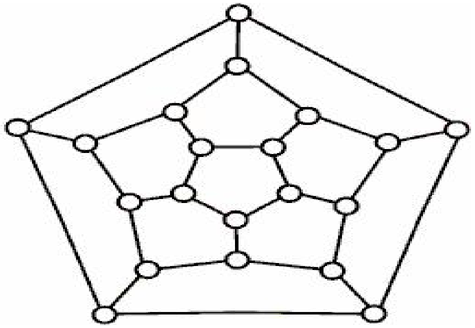
15.2 哈密顿图

1859年爱尔兰数学家威廉·哈密顿(William Hamilton)设计出一个在正十二面体（如图(1)所示）上的游戏——周游世界问题. 他将 20 个顶点看作 20 个城市，每一条棱看作一条公路，要求从一个城市出发，沿着公路经过每一个城市一次且仅一次，最后回到出发的城市. 可以把正十二面体的一个面撕开，平摊到平面上，如图 (2)所示.

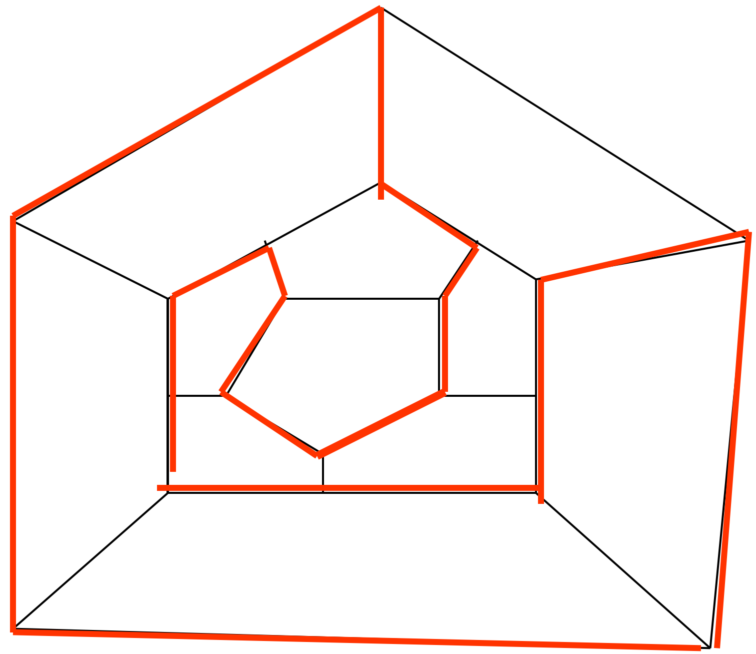
问题变成要在图(2)中找一条经过每一个顶点且恰好一次的回路. 这就是哈密顿回路的来源.



(1)



(2)



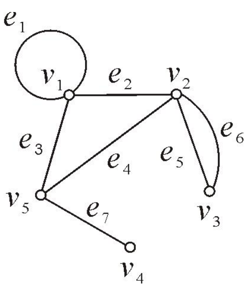
哈密顿图与半哈密顿图

定义15.2

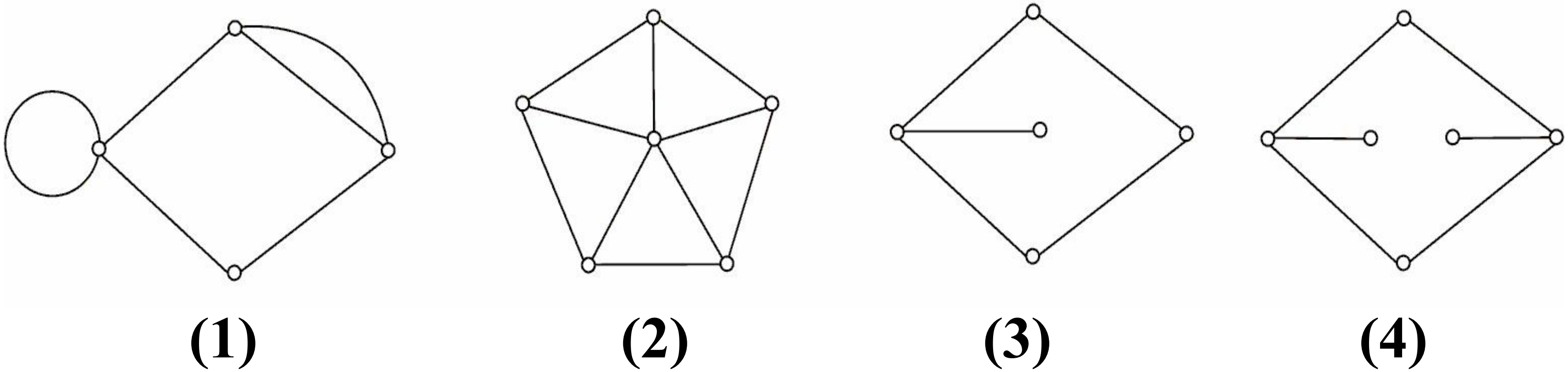
(1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.
(2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.
(3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.
(4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

几点说明:

①平凡图是哈密顿图.
②哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路.
③环与平行边不影响哈密顿性.
④哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上



实例



在上图中，

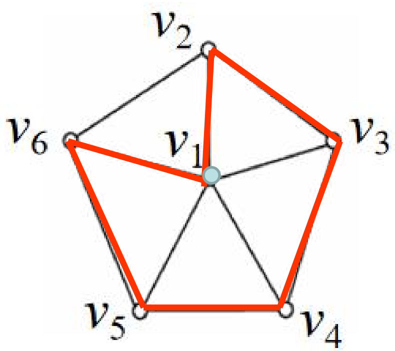
(1)，(2) 是哈密顿图;

(3)是半哈密顿图;

(4)既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图.

无向哈密顿图的一个必要条件

定理15.6 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$，均有 $p(G-V_1)\leq|V_1|$



证 设C为G中一条哈密顿回路

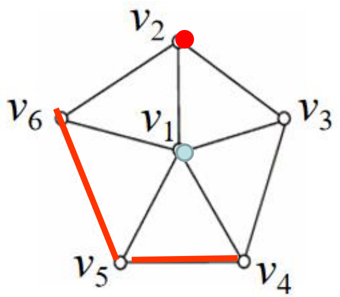
(1) $p(C-V_1)\leq|V_1|$

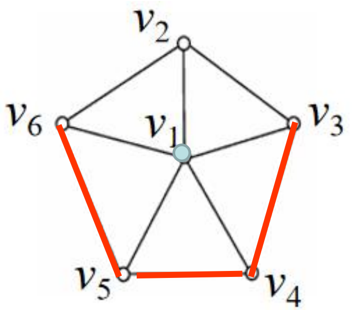
(2) $p(G-V_1)\leq p(C-V_1)\leq|V_1|$

（因为C是G的生成子图）

例 取$C=v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$，$V_1=\{v_1,v_3\}$，显然v_1,v_3在回路C上不相邻，$p(C-V_1)=2=|V_1|$. $p(G-V_1)=1\leq p(C-V_1)$.

若$V_1=\{v_1,v_2\}$，显然v_1,v_2在回路C上相邻，$p(C-V_1)=1<|V_1|$.





无向哈密顿图的一个必要条件

推论 设无向图$G=\langle V,E\rangle$是半哈密顿图，对于任意的$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$均有

$$p(G-V_1)\leq|V_1|+1$$

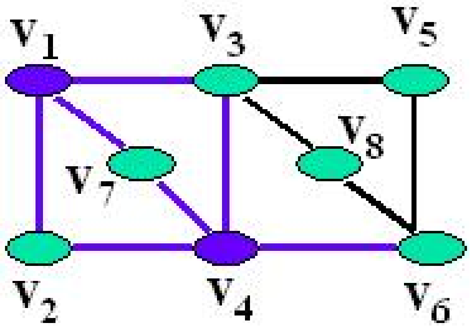
证 令Γ是G中起于u终于v的哈密顿通路，令$G'=G\cup(v,u)$，则G'为哈密顿图. 于是

$$p(G-V_1)=p(G'-V_1-(u,v))\leq|V_1|+1$$

注意：定理15.6及推论仅是判断无向图G是哈密顿图的必要条件，因此，若G是哈密顿图，则一定满足上式；故不满足上式一定不是哈密顿图.

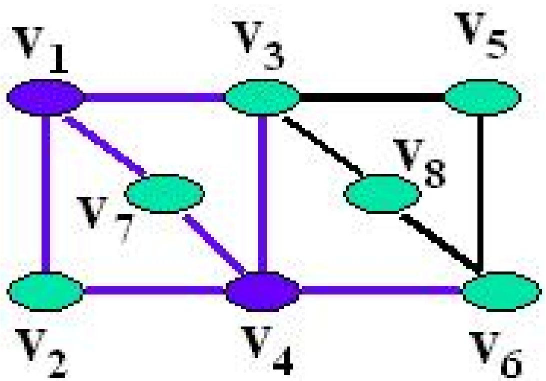
定理应用实例

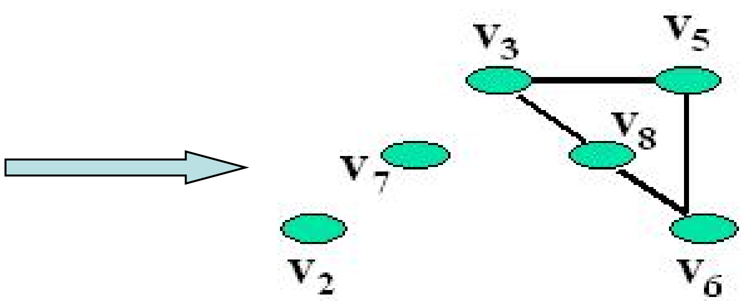
例1　利用定理15.6说明下图不是哈密顿图



不是哈密顿图

取$S=\{v_1,v_4\}$，则：$|S|=2$, $p(G-S)=3$，不满足：$p(G-S)\le|S|$

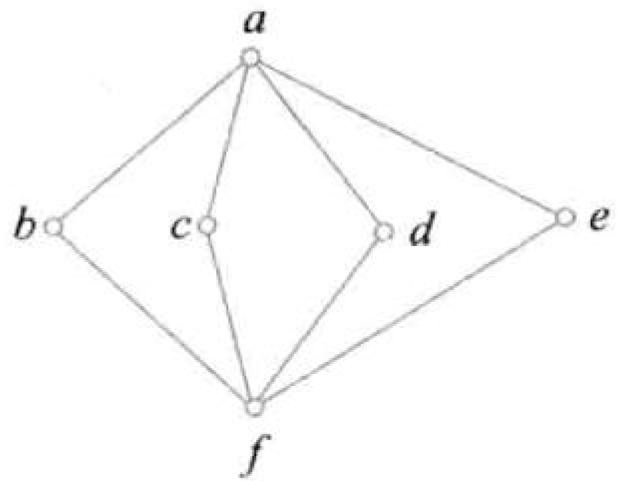




图V-S

定理应用实例

例2 利用定理15.6说明下图不是哈密顿图，也不是半哈密顿图.



取$V_1=\{a, f\}$，则：$|V_1|=2, p(G-V_1)=4$，

不满足：$p(G-V_1)\leq|V_1|$

也不满足：$p(G-V_1)\leq|V_1|+1$

无向哈密顿图的一个充分条件

定理15.7 设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则G中存在哈密顿通路.

推论 设G为n $(n\geq3)$ 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad (**)$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

几点说明

由定理15.7的推论可知，K_n（$n\geq3$）均为哈密顿图.

证　由于完全图K_n ($n\geq3$) 中任何两个顶点u,v，均有

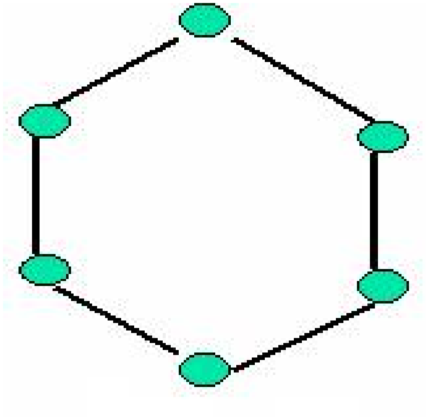
$$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n \quad (n\geq3),$$

所以K_n为哈密顿图.

几点说明

注意： 定理15.7及推论仅是判断无向图G是哈密顿图的充分条件，因此，满足上式一定是哈密顿图，反之不一定成立。

任意两点的度之和为4，n=6，不满足$d(v_i)+d(v_j) \ge n$，但却是哈密顿图，也有哈密顿路径。



是哈密顿图

定理应用实例

例3　在某次国际会议的预备会中，共有8人参加，他们来自不同的国家. 已知他们中任何两个不会说同一种语言的人，与其余会说同一种语言的人数之和大于等于8，试证明能将这8个人排在圆桌旁，使其任何人都能与两边的人交谈.

解　设8个人分别为$v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8$，作无向简单图 $G=<V,E>$，其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$，$E=\{(v_i,v_j)|v_i$与$v_j$会说同一种语言，$1\le i<j\le 8\}$. G为8阶无向简单图，$d(v_i)$为与v_i会说同一种语言的人数.

由已知条件, $\forall v_i,v_j\in V$且$(v_i,v_j)\notin E$, 均有$d(v_i)+d(v_j)\ge 8$. 由定理15.7 的推论可知, G中存在哈密顿回路. 则按照这条哈密顿回路的顺序安排座次即可.

无向哈密顿图的充分条件

定理15.9 n（$n\geq2$）阶竞赛图都有哈密顿通路

n 阶竞赛图：基图为K_n的n 阶有向简单图

证：设D为$n(n>2)$阶竞赛图，对n作归纳证明.

当$n=2$时，D的基图为K_2，结论成立.

设$n=k(k\geq2)$时结论成立. 现在设 $n=k+1$. 设 $V(D)=\{v_1,v_2,\cdots,v_k,v_{k+1}\}$. 令 $D_1=D-v_{k+1}$，易知D_1为k阶竞赛图. 由归纳假设，D_1存在哈密顿通路 $\Gamma_1=v'_1v'_2\cdots v'_k$. 又由下面两图易知$v_{k+1}$可以扩充到$\Gamma_1$中形成$D$中的哈密顿通路$\Gamma=v'_1v'_2\cdots v'_{r-1}v'_{k+1}v'_r\cdots v'_k$或$\Gamma=v'_1v'_2\cdots v'_kv'_{k+1}$