



2、判断公式类型： A 为矛盾式当且仅当 $A \Leftrightarrow 0$
 A 为重言式当且仅当 $A \Leftrightarrow 1$

例4 用等值演算法判断下列公式的类型

- (1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$
- (2) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- (3) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$



解 (1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

$$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q) \quad (\text{德摩根律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q) \quad (\text{交换律, 结合律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 0 \quad (\text{矛盾律})$$

$$\Leftrightarrow 0 \quad (\text{零律})$$

矛盾式



$$(2) \quad (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \neg p) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad (\text{交换律})$$

$$\Leftrightarrow 1$$

重言式



$$(3) \quad ((\textcolor{blue}{p} \wedge q) \vee (\textcolor{blue}{p} \wedge \neg q)) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (\textcolor{blue}{p} \wedge (q \vee \neg q)) \wedge r \quad (\text{结合律、吸收律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 1 \wedge r \quad (\text{排中律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge r \quad (\text{同一律})$$

可满足式，101、111是成真赋值，100、110、001、011、000、010是成假赋值。



3、化简语句

例5 化简语句：“情况并非如此：如果他不来，那么我也不去”

解 p : 他来 q : 我去

$$\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge q$$

我去了，而他没来



例6 化简语句：“不得不说如果不是因为他是不得已而为之而且没有造成恶劣后果的话我是不会原谅他的”

解 p : 他这么做 q : 他造成恶劣后果 r : 我原谅他

$$\begin{aligned}& \neg\neg(\neg(\neg\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \\& \Leftrightarrow \neg(\neg\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r \\& \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r \\& \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r \\& \Leftrightarrow r \rightarrow (p \wedge \neg q)\end{aligned}$$

我原谅他，是因为他这么做了而且没有造成恶劣后果



4、化简程序

例7 化简程序

```

If A $\wedge$ B then
  { If B $\vee$ C then
    X
    Else
      Y
    End }
Else
  {If A $\wedge$ C then
    Y
    Else
      X
    End}
End

```



$$\begin{aligned}
 & ((A \wedge B) \wedge (B \vee C)) \rightarrow X \\
 & \wedge ((A \wedge B) \wedge \neg(B \vee C)) \rightarrow Y \\
 & \wedge ((\neg(A \wedge B) \wedge (A \wedge C)) \rightarrow Y) \\
 & \wedge ((\neg(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge C)) \rightarrow X)
 \end{aligned}$$



$$(\neg(A \wedge \neg B \wedge C) \rightarrow X) \wedge ((A \wedge \neg B \wedge C) \rightarrow Y)$$



```

If A $\wedge$  $\neg$ B $\wedge$ C then
  Y
  Else
    X
  End

```



5、解决实际的逻辑问题

课本P25页
例2.6



课本P23页

例2.3（从左边演算）

例2.5（写出所用的基本等值式）



- 由已知的等值式推演出新的等值式的过程称为**等值演算**.
- 等值演算法以**基本等值式**为基础，应用**代入规则**（类似换元）、**置换规则**（类似等值替换），逐步推演.
- 等值演算的**应用**：
 - (1)判断公式的类型；
 - (2)证明两个公式等值，但不能直接证明两个公式不等值(可利用等值演算化简后)；
 - (3)化简语句
 - (4)化简程序
 - (5)解决实际的逻辑问题



基本概念：

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

$p, \neg q, p \vee \neg q, p \vee q \vee r, \dots$

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

$p, \neg q, p \wedge \neg q, p \wedge q \wedge r, \dots$

(4) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

$p, \neg p \wedge q, p \vee \neg q, (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$p, p \vee \neg q, \neg p \wedge q, (p \vee q) \wedge \neg p \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

注意：单个文字既是简单析取式，又是简单合取式



定理2.1

- (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.
- (2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

定理2.2

- (1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式.
- (2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.



定理2.3 (范式存在定理)

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式，但一般不惟一。



求公式 A 的范式的步骤：

(1) 消去 A 中的 $\rightarrow, \leftrightarrow$ (若存在)

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

(2) 否定联结词 \neg 的内移或消去

$$\neg \neg A \Leftrightarrow A$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

(3) 使用分配律

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

求合取范式

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

求析取范式



例8 求下列公式的析取范式与合取范式

$$(1) (p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$$

$$(2) (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$$

解 (1) $(p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \quad (\text{消去}\rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r \quad (\text{结合律})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \quad (\text{结合律})$$

析取范式

合取范式



$$(2) (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \rightarrow r \quad (\text{消去第一个}\rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee r \quad (\text{消去第二个}\rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \quad (\text{否定号内移——德摩根律}) \quad \text{析取范式}$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad (\vee \text{对} \wedge \text{分配律}) \quad \text{合取范式}$$



课本P28页 例2.7

求下面公式的析取范式与合取范式：

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$$