第五部分 图论

本部分主要内容

- 图的基本概念
- 欧拉图、哈密顿图
- 树
- 平面图

第十四章 图的基本概念

主要内容

- 图
- 通路与回路
- 图的连通性
- 图的矩阵表示

14.1 图

在日常生活、生产活动及科学研究中，人们常用点表示事物，用点与点之间是否有连线表示事物之间是否有某种关系，这样构成的图形就是图论中的图.

其实，集合论中二元关系的关系图都是图论中的图. 在这些图中，人们只关心点之间是否有连线，而不关心点的位置，以及连线的曲直，这是图论中的图与几何学中的图形的本质区别.

无向图

定义14.1 一个无向图G是一个有序的二元组 $<V,E>$, 其中

(1) $V\neq\varnothing$为顶点集，元素称为顶点

(2) E为$V\&V$的有穷多重子集，称作边集，其元素称为无向边，简称边

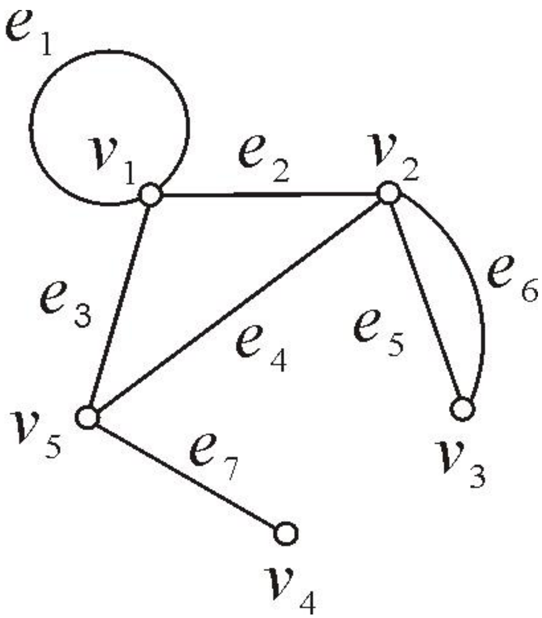
- 多重集合——元素可以重复出现的集合
- 无序积——$A\&B=\{\{x,y\}\mid x\in A\wedge y\in B\}$，无序对$\{x,y\}$，记为$(x,y)$（$=(y,x)$）

例　设

$V=\{v_1, v_2, \ldots,v_5\}$,

$E=\{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

则 $G=<V,E>$为一无向图



有向图

定义14.2 一个有向图D 是一个有序的二元组 $<V,E>$, 其中

(1) $V\neq\varnothing$为顶点集，元素称为顶点

(2) E是笛卡尔积$V\times V$ 的有穷多重子集，称作边集，其元素称为有向边，简称边

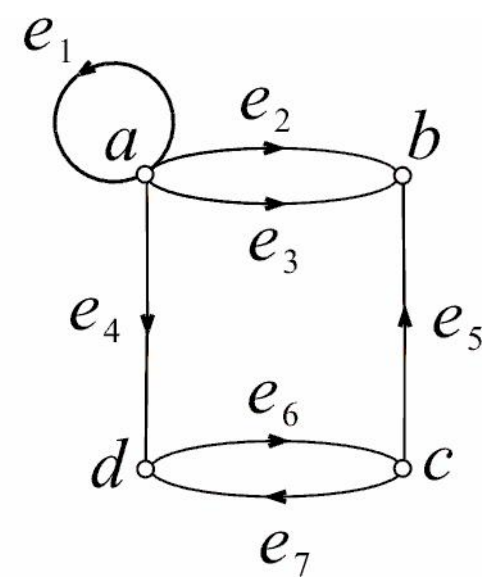
例 设

$V = \{a, b, c,d\}$,

$E = \{<a,a>,<a,b>,<a,b>,<a,d>,$

$<c,b>,<c,d>,<d,c>\}$

则 D = $<V,E>$为一有向图



相关概念和规定

1. 图

① 用G泛指图（无向的或有向的）

② $V(G)$、$E(G)$：G的顶点集和边集

$|V(G)|$、$|E(G)|$：G的顶点数和边数

2. 阶：顶点数

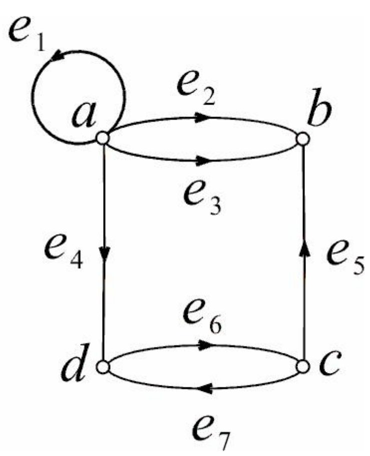
① n阶图：n个顶点

3. 零图：不含边

① n 阶零图：N_n

② 平凡图：N_1（只有一个顶点，没有边）

4. 空图：顶点集为空集，记作$\varnothing$



相关概念和规定

5. 标定图：每一个顶点和每一条边都指定了符号

6. 有向图的基图：将有向图的各条有向边改成无向边

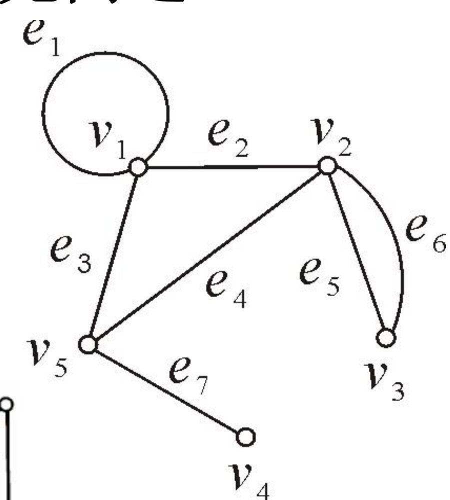
7. 顶点与边的关联关系

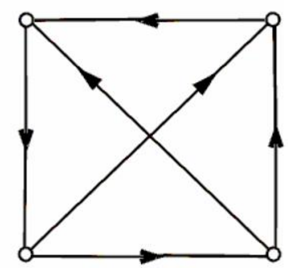
① 关联：顶点v_i,v_j为边e_k的端点

② 边与顶点的关联次数：0、1、2

② 环：与某一顶点关联次数为2的边

③ 孤立点：没有边关联的顶点





8. 顶点之间、边之间的相邻关系

① 两顶点相邻：有边连接

② 两边相邻：有公共端点（一边终点是另一边的始点）

相关概念

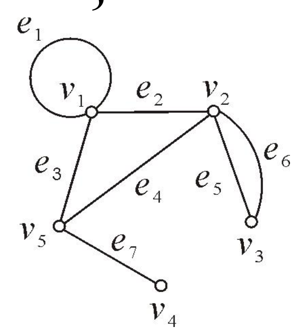
9. 邻域与关联集

① $\forall v \in V(G)$ (G为无向图)

v的邻域 $N_G(v)=\{u \mid u \in V(G) \wedge (u,v) \in E(G) \wedge u \neq v\}$

v的闭邻域 $\overline{N_G}(v)=N(v) \cup \{v\}$

v 的关联集 $I_G(v)=\{e \mid e \in E(G) \wedge e\text{与}v\text{关联}\}$



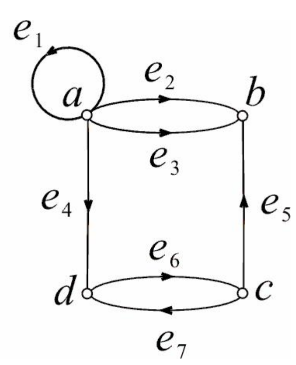
② $\forall v \in V(D)$ (D为有向图)

v的后继元集 $\Gamma_D^+(v)=\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle v,u \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

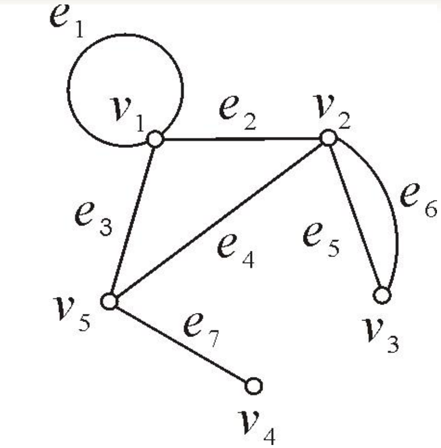
v的先驱元集 $\Gamma_D^-(v)=\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle u,v \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v的邻域 $N_D(v)=\Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$

v的闭邻域 $\overline{N}_D(v)=N_D(v) \cup \{v\}$



多重图与简单图



定义14.3

(1) 无向图

①平行边：关联同一对顶点

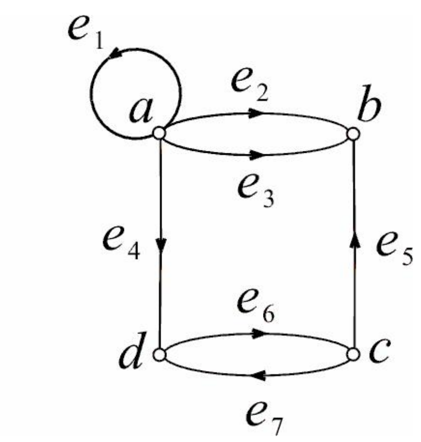
②重数：平行边的条数

(2) 有向图

①平行边：始点与终点均相同的边（注意方向性）

(3) 多重图: 含平行边

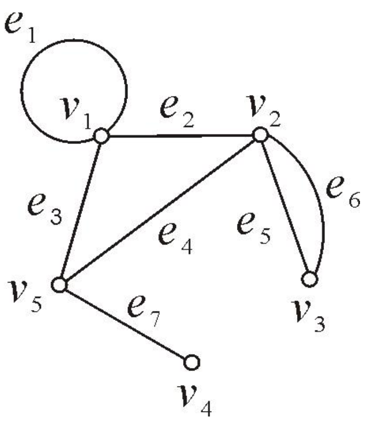
(4) 简单图：不含平行边、不含环



顶点的度数

定义14.4

(1) 设$G=\langle V,E\rangle$为无向图, $\forall v\in V$, 称v作为边的端点的次数$d(v)$为v的度数, 简称度



(2) 设$D=\langle V,E\rangle$为有向图, $\forall v\in V$,

$d^+(v)$——v的出度（v作为边的始点的次数）

$d^-(v)$——v的入度（v作为边的终点的次数）

$d(v)$——v的度或度数($d^+(v) + d^-(v)$)

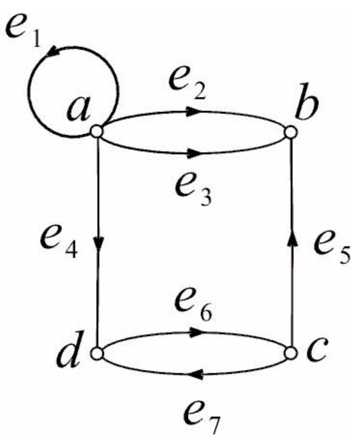
(3) 最大度：$\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v\in V(G)\}$

最小度：$\delta(G)=\min\{d(v) \mid v\in V(G)\}$

(4) $\Delta^+(D)$, $\delta^+(D)$, $\Delta^-(D)$, $\delta^-(D)$, $\Delta(D)$, $\delta(D)$

(5) 奇度顶点与偶度顶点

(6) 悬挂顶点：度数为1



握手定理(图论的基本定理)

定理14.1 设$G=<V,E>$为任意无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

证 G中每条边 (包括环) 均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，m 条边共提供 $2m$ 度.

定理14.2 设$D=<V,E>$为任意有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

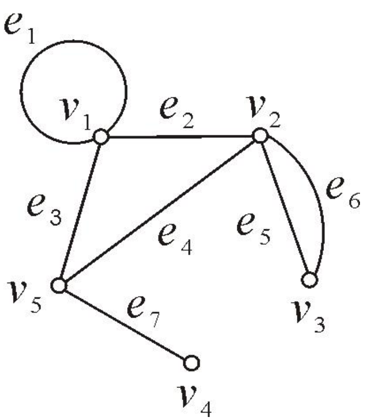
握手定理推论

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

证 设$G=\langle V,E\rangle$为任意图，令

$$V_1=\{v \mid v\in V\wedge d(v)\text{为奇数}\}$$

$$V_2=\{v \mid v\in V\wedge d(v)\text{为偶数}\}$$



则$V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)$$

由于$2m$, $\sum_{v\in V_2}d(v)$均为偶数，所以$\sum_{v\in V_1}d(v)$为偶数，但因为V_1中顶点度数为奇数，所以$|V_1|$必为偶数.

握手定理应用

例1 无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点度数均小于3，则G的阶数n为?

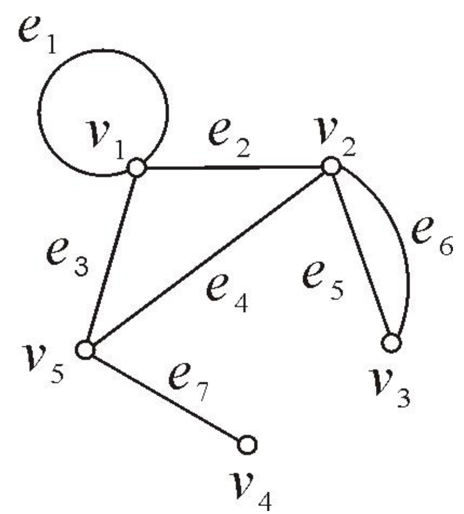
解 由握手定理和题意可得，

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m = 32 \le 3\times 4 + 4\times 3 + 2(n-7),$$

整理得：$32 \le 2n+10$，故$n \ge 11$.

图的度数列

1 . $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为 n 阶无向图G的顶点集，称$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$为$G$的度数列（若顶点标定，则唯一）



例 右图的度数列为4, 4, 2, 1, 3

2. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为有向图$D$的顶点集，

D的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度列：$d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列：$d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

3. 对于任给的非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$,若存在以$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为顶点集的$n$ 阶无向图G，使得 $d(v_i)=d_i$，则称d是可图化的. 若所得到的图是简单图，则称d是可简单图化的.

图的度数列

非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$在什么条件下是可图化的和可简单图化的？

定理14.3 非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$是可图化的当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \text{为偶数.}$$

例 (2, 4, 6, 8)，(1, 2, 3, 6, 5, 3) 是可图化的, 但都不可简单图化.
(5, 5, 4, 4, 2,1)，(3, 3, 3, 4) 是不可图化的.

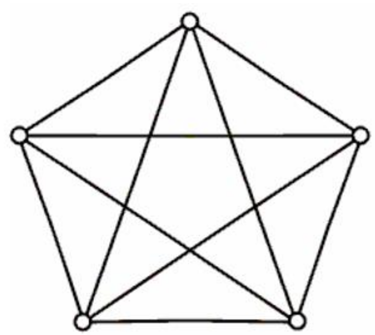
定理14.4 设G为任意n阶无向简单图，则$\Delta(G) \le n-1$

n 阶完全图与竞赛图

定义14.6

(1) n ($n\geq 1$) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的 n 阶无向简单图，记作 $K_n(n\geq 1)$.

简单性质：边数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$



(1)

(1)为K_5

n 阶完全图与竞赛图

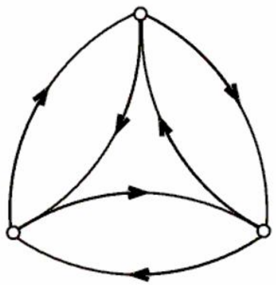
定义14.6

(2) n (n≥1)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的n 阶有向简单图.

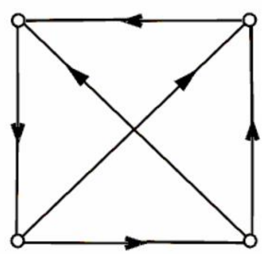
简单性质：$m=n(n-1), \Delta=\delta=2(n-1), \Delta^{+}=\delta^{+}=n-1$

(3) n (n≥1) 阶竞赛图——基图为K_n的n 阶有向简单图.

简单性质：边数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$



(2)



(3)

(2)为3阶有向完全图，

(3)为4阶竞赛图.

n 阶 k 正则图

定义14.7 无向简单图G的k-正则图——所有顶点的度数均为k

简单性质：边数（由握手定理得） $m = \dfrac{nk}{2}$

n阶零图是 0-正则图，n阶无向完全图K_n是 $(n-1)$-正则图.

子图

定义14.8 $G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$

(1) $G'\subseteq G$($V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$) —— G'为G的子图，G为G'的母图. 若$V'\subset V$或$E'\subset E$，称G'为G的真子图

(2) 若$G'\subseteq G$且$V'=V$，则称G'为G的生成子图

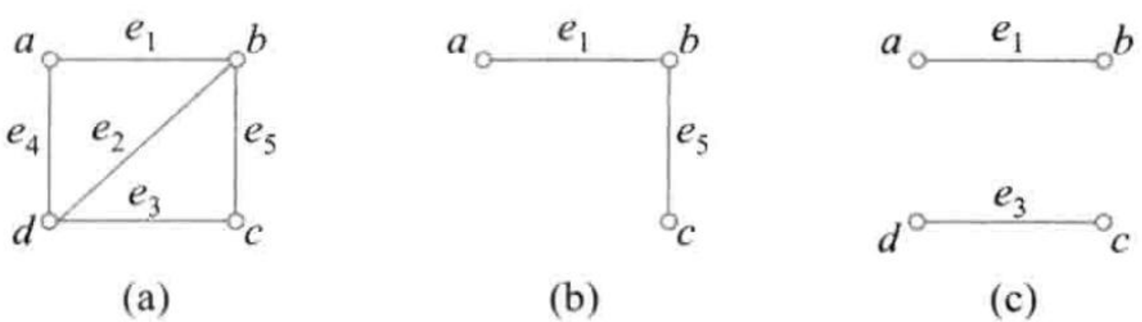


图 14.5

如图14.5，(b)、(c)是(a)的子图，且均为真子图. 其中，(c)是(a)的生成子图.

子图

定义14.8 $G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$

(3) 以V'（$V'\subset V$且$V'\neq\varnothing$）为顶点集，以G中两个端点都在V'中的边组成边集E'的图为G的V'导出的子图，记作$G[V']$

(4) 以E'（$E'\subset E$且$E'\neq\varnothing$）为边集，以E'中边关联的顶点为顶点集的图为G的E'的导出的子图，记作$G[E']$

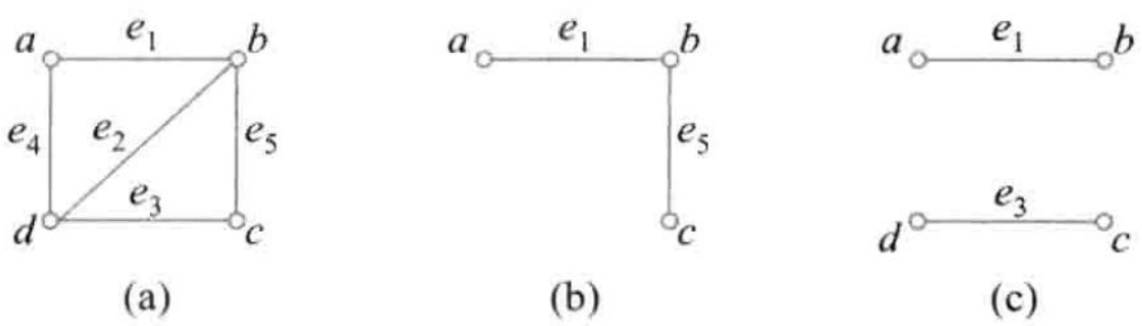


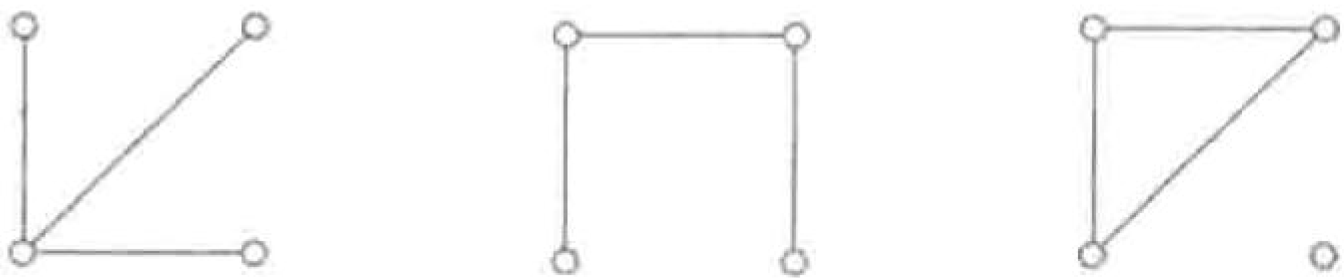
图 14.5

如图14.5，(b)是(a)的{a, b, c}导出的子图.

(c)是(a)的{e1, e3}导出的子图.

补图

定义14.9 设$G=<V,E>$为n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记作$\overline{G}$.



(a) (b) (c)

如上图，(a)与(c)互为补图.