广东海洋大学 2017 —— 2018 学年第 1 学期

《概率论与数理统计》课程试题答案

课程代码：19221302　　√ 考试　√ A 卷　□ B 卷

□ 考查　□ C 卷　□ D 卷

√ 闭卷　□ 开卷　□ E 卷　□ F 卷

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷教师
各题分数	30	15	15	18	12	10						
实得分数												

一．填空题（每题 3 分，共 30 分）

1．同时投掷两枚均匀的骰子，则随机事件“点数之和大于 3”的概率为 11/12

2．在区间 $(0,1)$ 上随机地取两个数，则“取到的两数之差的绝对值大于 0.3”的概率为 0.49

3．若每次射击命中的概率为 0.4，则射击 3 枪至多命中 2 枪的概率为 $1-0.4^3$ （只列式，不计算）

4．设袋中共有 10 个球，其中 7 个红球，3 个黑球。甲乙两人按照甲先、乙后的顺序，分别从袋中不放回地任取 1 球，则乙取得红球的概率为 7/10

5. 若随机事件 A,B 分别满足 $P(\overline{A})=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\overline{B})=0.5$，则 $P(A\cup B)=$ 0.8

6．设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	3
P	0.1	0.1	0.2	0.6

则$Y=X^2-1$的分布律为

Y	-1	0	8
P	0.1	0.3	0.6

7.设随机变量$X\sim P(0.5)$, $Y\sim U(-3,-1)$, 则 $E(X^2+Y)=$ $-5/4$

8．设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\le x\le 1\text{且}0\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,

则边缘密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}4.8x^2-2.4x^3, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

9．已知总体$X\sim N(5,\ 48)$, 又设X_1,X_2,X_3,X_4为来自总体x的样本，

记$\overline{X}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i$，则$\overline{X}\sim$ $N(5,\ 12)$

10．设X_1,X_2,X_3为取自总体 X 的样本，对于以下总体 X 的均值的

估计量 $T_1=(2X_1+X_2+X_3)/4,\ T_2=(X_1+X_2+X_3)/3,$

$T_3=(X_1+X_2+3X_3)/5$，则最有效的估计量是 T_2

二．设随机变量X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}cx^2 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，求

(1)c的值；（3 分） (2)X的分布函数$F(x)$;（7 分）（3）$D(2X-1)$（5 分）

解 （1）由于$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，有$\int_0^1 cx^2dx=1$---------(2 分)

所以$c=3$--------(3 分)

(2) 当$x\le 0$时， $f(x)=0$，则$F(x)=0$

当$0<x<1$时， $F(x)=\int_0^x 3t^2dt=x^3$ ---------(3 分)

当$x\ge 1$时， $F(x)=\int_0^1 3t^2dt=1$

所以$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^3 & 0<x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$ ---------(7 分)

（3）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\frac{3}{4}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx=\frac{3}{5}$ ------------(3 分)

$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80}$

$D(2X-1)=4D(X)=4\times\frac{3}{80}=\frac{3}{20}$ --------(5 分)

三. 盒子里装有 3 个黑球、2 个红球、2 个白球，在其中任取 4 个球。以 X 表示取到黑球的个数，以 Y 表示取到红球的个数。求

(1) X 和 Y 的联合分布律；(8 分) (2) $P\{Y\le 1\mid X=2\}$；(3 分)

(3) 判断 X 和 Y 是否独立？并说明理由。(4 分)

解 （1）由已知 X 可取值 0, 1, 2, 3，Y 可取值 0, 1, 2

$P\{X=0,\ Y=2\}=\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{1}{35}$，　$P\{X=1,\ Y=1\}=\frac{C_3^1C_2^1C_2^2}{C_7^4}=\frac{6}{35}$

$P\{X=1,\ Y=2\}=\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$，　$P\{X=2,\ Y=0\}=\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$ --------(4 分)

同理 $P\{X=2,\ Y=1\}=\frac{12}{35}$，　$P\{X=2,\ Y=2\}=\frac{3}{35}$

$P\{X=3,\ Y=0\}=\frac{2}{35}$，　$P\{X=3,\ Y=1\}=\frac{2}{35}$，$P\{X=3,\ Y=2\}=0$

所以 X 和 Y 的联合分布律为

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

---------(8 分)

（2）由于 X 的边缘分布律为

X	0	1	2	3
P	$1/35$	$12/35$	$18/35$	$4/35$

$$P\{Y \le 1 \mid X=2\} = \frac{P\{X=2, Y \le 1\}}{P\{X=2\}} = \frac{P\{X=2,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}}{P\{X=2\}}$$

$$= \frac{3/35+12/35}{18/35} = \frac{5}{6}$$ ---------(3 分)

(3) X 与 Y 不相互独立性，---------(2 分)

理由如下

存在点 $(x_0, y_0) = (0,0)$， $P(X = x_0, Y = y_0) = 0$

使得 $P(X = x_0) \cdot P(Y = y_0) = \frac{1}{35} \times \frac{1}{7} \ne P(X = x_0, Y = y_0)$ ---------(4 分)

四．总体 X 具有概率密度 $X \sim f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & 0<x<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，其中 θ 是未知参数，

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自总体 X 的一个样本容量为 n 的简单随机样本，求

未知参数 θ 的 (1) 矩估计值；（8 分） (2) 最大似然估计值.（10 分）

解 （1）$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot \theta x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+1}$

解得 $\theta = \frac{\mu_1}{1-\mu_1}$ ---------(4 分)

用样本矩A_1估计总体矩μ_1得 θ 的矩估计量为

$\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$ ---------(8 分)

(2) 由于样本 $X_i \sim f(x_i)=\begin{cases}\theta x_i^{\theta-1}, & 0<x_i<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}[\theta x_i^{\theta-1}], & 0<x_i<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1} & 0<x_i<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

-----(3 分)

显然$L(\theta)$的最大值点一定是$L_1(\theta)=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}$的最大值点，

取对数 $\ln L_1(\theta)=n\cdot\ln\theta+(\theta-1)\cdot\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)$ --------(6 分)

求导数 $\dfrac{d\ln L_1(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}+\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)=\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令$\dfrac{d\ln L_1(\theta)}{d\theta}=0$解得

则 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$ --------(10 分)

五. 一个螺丝钉重量是一个随机变量，期望值是 100 克，标准差是 10 克，求一盒（100 个）同型号螺丝钉的重量超过 10.2 千克的概率？（12 分）$(\Phi(2)=0.9772)$

解 设为第i个螺丝钉的重量，$i=1,2,\cdots,100,$

且它们之间独立同分布，于是一盒螺丝钉的重量为 $X=\sum_{i=1}^{100}X_i$，

且由 $\mu=E(X_i)=100,\ \sigma=\sqrt{D(X_i)}=10,\ n=100,$

知 $E(X)=100\times E(X_i)=10000,\ \sqrt{D(X)}=100,$ ------------（6 分）

由中心极限定理有

$$P\{X>10200\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}>\frac{10200-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right\}=P\left\{\frac{X-10000}{100}>\frac{10200-10000}{100}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X-10000}{100}>2\right\}=1-P\left\{\frac{X-10000}{100}\le 2\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(2)=1-0.97725=0.02275.$$ ---------（12 分）

六. 某种钢丝的折断力 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 与 σ^2 均未知。现抽取了样本容量为 25 的一批钢丝，测得其折断力，得到样本均值 $\overline{x}=210$，样本标准差 $s=36$. 求

（1）均值 μ 的 90%的置信区间（5 分）；

（2）方差 σ^2 的 90%的置信区间.（5 分）。

$$\left(t_{0.05}(24)=1.71,\chi^2_{0.05}(24)=36.42,\ \chi^2_{0.95}(24)=13.85\right)$$

解 （1）均值 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right).$$ ---------(3 分)

由题意得 $1-\alpha=0.9,\dfrac{\alpha}{2}=0.05$，$t_{0.05}(24)=1.71$

则均值 μ 的 90%的置信区间为 $\left(210\pm\dfrac{36}{\sqrt{25}}t_{0.05}(24)\right)$

$=\left(210\pm 12.312\right)=\left(197.688,222.312\right)$------------（5 分）

（2）σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).\quad \text{---------(3 分)}$$

查表得 $\chi^2_{0.05}(24)=36.42,\ \chi^2_{0.95}(24)=13.85$，$\overline{x}=186,\ \ s=36$，$n=25$

于是

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}=\frac{24\times 36^2}{36.42}=854.04，\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}=\frac{24\times 36^2}{13.85}=2245.78$$

所求 σ^2 的 90%置信区间为 $(854.04,2245.78)$.---------(5 分)