第六章 集合代数

主要内容

- 集合的基本概念
  - 属于、包含
  - 幂集、空集
  - 文氏图等
- 集合的基本运算
  - 并、交、相对补、绝对补、对称差等
- 集合恒等式
  - 集合运算的算律、恒等式的证明方法

6.1 集合的基本概念

1. 集合定义

集合没有精确的数学定义

理解：由离散个体构成的整体称为集合，称这些个体为集合的元素.

例，平面上到定点的距离等于定长的集合.

常见的数集：N, Z, Q, R, C 等分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合

2. 集合表示法

枚举法----通过列出全体元素来表示集合

例，$A=\{a,b,c,\cdots,z\}$

谓词表示法----通过谓词概括集合元素的性质

例，$S=\{x \mid x\in \mathrm{R} \wedge x^2-1=0\}$

元素与集合

1. 集合的元素具有的性质

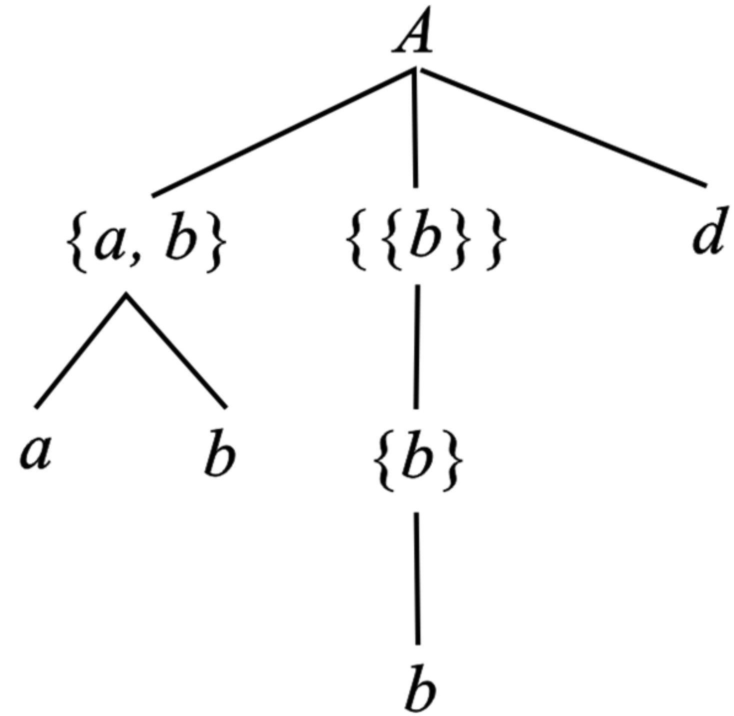
   无序性、相异性、确定性

   任意性：本书规定，集合的元素都是集合

2. 元素与集合的关系

   隶属关系：$\in$或者$\notin$

例，$A=\{\ \{a, b\}, \{\{b\}\}, d\ \}$



$d \in A$, $a \notin A$

集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq$, $\nsubseteq$, $=$, $\neq$, $\subset$, $\not\subset$

定义6.1 设A，B为集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A是B的子集合，简称子集. 这时也称A被B包含或B包含A. 记作

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \nsubseteq B$$

定义6.2 A，B为集合，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，记作

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$A \neq B$$

集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq$, $\nsubseteq$, $=$, $\neq$, $\subset$, $\not\subset$

定义6.3　设A，B为集合，如果$A\subseteq B$且$A\neq B$，则称A是B的真子集

$$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B$$

$$A\not\subset B$$

注意：　1、$\in$ 是不同层次上的两个集合间的关系，　$\subseteq$ 是同一层次上的两个集合间的关系.

2、对于某些集合这两种关系可以同时成立，例：$A=\{a, \{a\}\}$和$\{a\}$，既有$\{a\}\in A$，又有$\{a\}\subseteq A$.

空集、全集和幂集

定义6.4 空集 $\varnothing$：不含任何元素的集合

符号化：$\varnothing = \{ x \mid x \neq x \}$

例： $\{ x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \}$

定理6.1 空集是任何集合的子集

证 对于任意集合A，

$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow 1$ (恒真命题)

推论 $\varnothing$是惟一的

证 假设存在空集$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，由定理6.1，有

$$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2，\ \varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$$

故$\varnothing_1 = \varnothing_2$.

空集、全集和幂集

定义6.5 设A为集合，把A的全体子集构成的集合称作A的**幂集**，记作$P(A)$

符号化：$P(A)=\{ x \mid x \subseteq A \}$

例：$P(\{-2, 5\})=\{\varnothing, \{-2\}, \{5\}, \{-2, 5\}\}$；

$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$， $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$；

用$|A|$表示有穷集A中的元素数，如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

定义6.6 全集 E：在一个具体的问题中，包含所有所涉及的集合的集合

注：全集具有相对性，不同的问题有不同的全集，同一个问题也可以取不同的全集，不存在绝对的全集

6.2 集合的运算

设A，B为集合，集合的基本运算（并、交、相对补、对称差、绝对补）定义如下

定义6.7 并 $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$

交 $A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$

相对补 $A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$

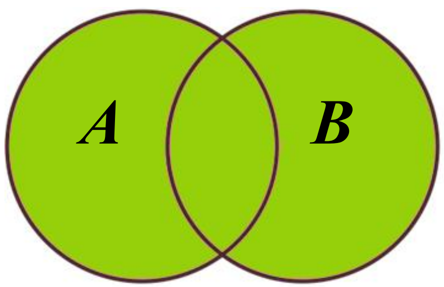
定义6.8 对称差 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$

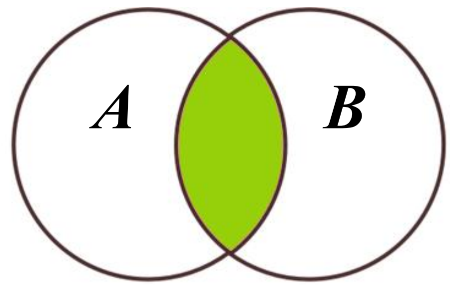
定义6.9 绝对补 $\sim A=E-A=\{x\mid x\notin A\}$

文氏图

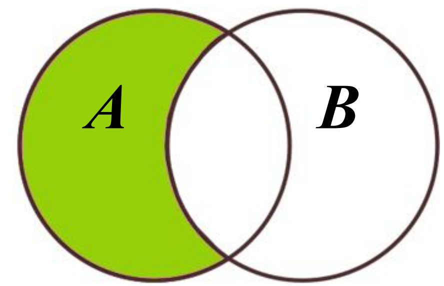
集合运算的表示



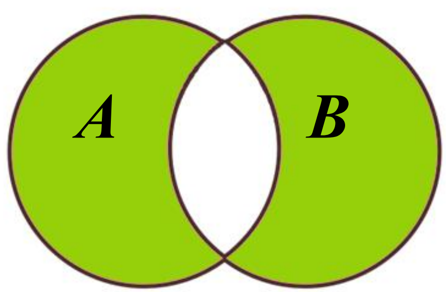
$A \cup B$



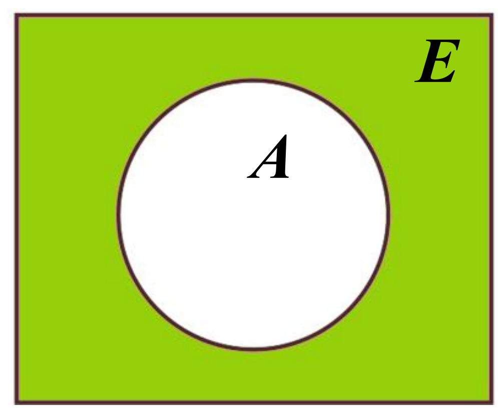
$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$



$\sim A$

几点说明

- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

  $$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \}$$

  $$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{ x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n \}$$

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A-B = \varnothing$
- $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A-B = A$

广义运算

1. 集合的广义并与广义交

定义6.10 设A为集合，A的元素的元素构成的集合称作A的广义并，记作$\cup A$

符号化 $\cup A = \{ x \mid \exists z (z \in A \wedge x \in z)\}$

例 $\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$； $\cup\{\{a\}\}=\{a\}$； $\cup\{a\}=a$ ；

定义6.11 设A为非空集合，A的所有元素的公共元素构成的集合称作A的广义交，记作$\cap A$

符号化 $\cap A= \{ x \mid \forall z (z \in A \rightarrow x \in z)\}$

例 $\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$； $\cap\{\{a\}\}=\{a\}$； $\cap\{a\}=a$；

关于广义运算的说明

2. 广义运算的性质

(1) $\cup\varnothing=\varnothing$，$\cap\varnothing$无意义

(2) 单元集$\{x\}$的广义并和广义交都等于x

(3) 广义运算减少集合的层次

(4) 若$A=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，

$$\cup A = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$$

$$\cap A = A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$$

3. 引入广义运算的意义

可以表示无数个集合的并、交运算

例：　$\cup\{\{x\} \mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$

运算的优先权规定

一类运算：广义并、广义交、幂集、绝对补，运算由右向左进行

二类运算：并$\cup$, 交$\cap$, 相对补$-$, 对称差$\oplus$， 优先顺序由括号确定

混合运算：一类运算优先于二类运算

例1 $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$，计算$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$.

解：

$$\cup A=\{a,b\}\ ,\quad \cap A=\{a\},$$

$$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$$

$$=\cap\{a,b\}\cup(\cup\{a,b\}-\cup\{a\})$$

$$=(a\cap b)\cup((a\cup b)-a)$$

$$=(a\cap b)\cup(b-a)=b$$

6.4 集合恒等式

集合运算的主要算律

1. 只涉及一个运算的算律：
   幂等律、结合律、交换律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	
结合	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$

集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

	∪与∩
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$

集合算律

3．涉及补运算的算律：

德摩根律、双重否定律

	$-$	$\sim$
德摩根律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$ $\sim\varnothing=E$ $\sim E=\varnothing$
双重否定律		$\sim\sim A=A$

集合算律

4. 涉及全集和空集的算律：

同一律、零律、排中律、矛盾律

	$\varnothing$	E
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
排中律		$A\cup\sim A=E$
矛盾律	$A\cap\sim A=\varnothing$	

集合证明题

证明方法：命题演算法、等式置换法

命题演算证明法的书写规范 (以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证$X\subseteq Y$

对任意的x， $x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$

(2) 证$X=Y$

方法一 分别证明 $X\subseteq Y$ 和 $Y\subseteq X$

方法二 对任意的x，$x\in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的

方法一：命题演算法

例3 证明$A\cup(A\cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cap B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$$

因此得 $A\cup(A\cap B) = A$.

例4 证明 $A-B = A\cap\sim B$

证 任取x,

$$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B \Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$$

因此得 $A-B = A\cap\sim B$

等式代入法

方法二：等式置换法

例5 假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立，证明吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$.

证

$$
\begin{aligned}
& A\cup(A\cap B) & \\
&= (A\cap E)\cup(A\cap B) && \text{（同一律）}\\
&= A\cap(E\cup B) && \text{（分配律）}\\
&= A\cap(B\cup E) && \text{（交换律）}\\
&= A\cap E && \text{（零律）}\\
&= A && \text{（同一律）}
\end{aligned}
$$

P102，例6.12 证明 $(A-B)\cup B = A\cup B$

包含等价条件的证明

例6 证明$\underset{①}{A\cup B=B} \Leftrightarrow \underset{②}{A\subseteq B} \Leftrightarrow \underset{③}{A\cap B=A} \Leftrightarrow \underset{④}{A-B=\varnothing}$

证明思路：

- 确定问题中含有的命题：本题含有命题 ①, ②, ③, ④
- 确定命题间的关系（哪些命题是已知条件、哪些命题是要证明的结论）：本题中每个命题都可以作为已知条件，每个命题都是要证明的结论
- 确定证明顺序：①⇒②，②⇒③，③⇒④，④⇒①
- 按照顺序依次完成每个证明（证明集合相等或者包含）

证明

证明$A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

① ② ③ ④

证 ①⇒② 即$A\cup B=B \Rightarrow A\subseteq B$

任取x，

$$x\in A \Rightarrow x\in A \vee x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in B \Rightarrow x\in B$$

因此有$A\subseteq B$.

②⇒③ 即$A\subseteq B \Rightarrow A\cap B=A$

显然$A\cap B\subseteq A$，下面证明$A\subseteq A\cap B$.

任取x，

$$x\in A \Rightarrow x\in A\wedge x\in A \Rightarrow x\in A\wedge x\in B \Rightarrow x\in A\cap B$$

因此有$A\subseteq A\cap B$.

证明

证明$A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

① ② ③ ④

③$\Rightarrow$④ 即$A\cap B=A \Rightarrow A-B=\varnothing$ （归谬法、等式替换）

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，则$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

④$\Rightarrow$① 即 $A-B=\varnothing \Rightarrow A\cup B=B$

$$A\cup B=(A-B)\cup B=B\cup\varnothing=\mathbf{B}$$

（P102，例6.12 $(A-B)\cup B=A\cup B$ ）