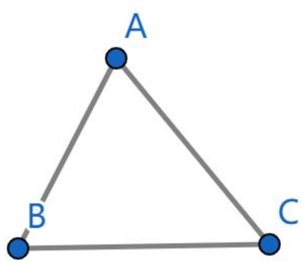
同构

定义14.10 设$G_1=\langle V_1,E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2,E_2\rangle$为两个无向图，若存在双射函数$f: V_1\to V_2$，使得$\forall v_i,v_j\in V_1$,

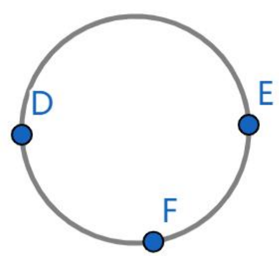
$$(v_i,v_j)\in E_1 \Leftrightarrow (f(v_i),f(v_j))\in E_2,$$

并且(v_i,v_j)与$(f(v_i),f(v_j))$的重数相同，则称G_1和G_2同构，记作$G_1\cong G_2$.

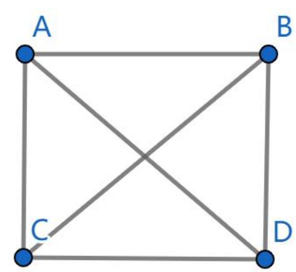
例



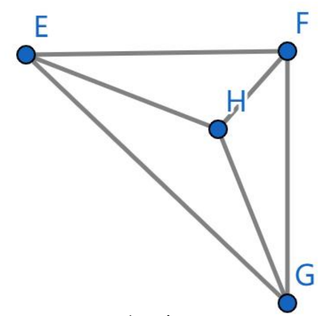
图(a)



图(b)



图(c)



图(d)

由定义可知，图(a)和图(b)同构，图(c)和图(d)同构

同构

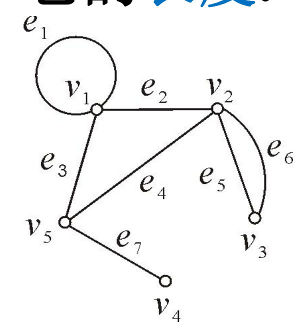
注1　类似的可给出两个有向图同构的定义.

注2　两个图同构，则它们的阶数相同、边数相同、度数列相同.

注3　图之间的同构关系是全体图集合上的等价关系.

14.2 通路与回路

定义14.11 给定图$G=<V,E>$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列 $\Gamma= v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$称作$v_0$到$v_l$的通路, 其中$v_{i-1}$, v_i 是 e_i 的端点. v_0 ,v_l分别称为Γ的始点和终点. 通路Γ中所含的边数称作它的长度.



例：$\Gamma_1 =v_1e_2v_2$、$\Gamma_2 = v_1e_1v_1e_3v_5e_4v_2$称作$v_1$到$v_2$的通路，但通路长度不同.

(1) 若 $v_0=v_l$，Γ为回路，l 为回路长度（回路中所含的边数）.

(2) 若所有边各异，Γ为简单通路，又若$v_0=v_l$，Γ为简单回路.

(3) 复杂通路与回路：有边重复出现.

(4) 初级通路(路径)与初级回路(圈)：Γ中所有顶点各异且所有的边各异，则称Γ为初级通路(路径)，若$v_0=v_l$，则称Γ为初级回路(圈).

几点说明

注1： 简单通路：边各异；
初级通路（路径）：边与点各异；
初级回路（圈）：边与点各异，通路的始点和终点相同.

注2：长度为奇数的圈称作奇圈，长度为偶数的圈称作偶圈.

注3：长为1的圈只能是环;
两条平行边构成的圈长度为2;
因此，无向简单图中，圈长≥3，有向简单图中圈的长度≥2.

通路与回路的长度

定理14.5 在n 阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到 v_j存在长度小于或等于$n-1$ 的通路.

证

设$\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l(v_0=u, v_l=v)$为$G$中从$u$到$v(u\neq v)$的通路.

(1)若$l \leq n-1$，定理成立;

(2)若$l > n-1$，则通路中必有重复的顶点，不妨设$v_k=v_s$，

则$\Gamma = v_0e_1v_1e_2v_k\boxed{e_{k+1}\ldots e_sv_s}\ldots e_lv_l$，删除$\Gamma$中重复$v_k$到自身的回路$e_{k+1}\ldots e_sv_s$得到的通路$\Gamma' = v_0e_1v_1e_2v_k\ldots e_lv_l$.

(3)若$l'>n-1$，由于 G为有限图，重复(2)，一定有 $l' \leq n-1$.

通路与回路的长度

推论 在 n 阶图G中，若从顶点v_i 到 v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i 到v_j 存在长度小于或等于$n-1$的初级通路（路径）.

定理14.6 在一个n 阶图G中，若存在 v_i 到自身的回路，则一定存在v_i 到自身长度小于或等于 n 的回路.

推论 在一个n 阶图G中，若存在 v_i 到自身的简单回路，则一定存在v_i 到自身长度小于或等于n 的初级回路.

14.3 图的连通性

(1) 顶点之间的连通关系：$G=\langle V,E\rangle$为无向图

① 若 u与 v之间有通路，则称u,v是连通的，记作 $u\sim v$.

规定：$u\sim u$

② ~是V上的等价关系 $R=\{\langle u,v\rangle \mid u,v\in V$且$u\sim v\}$

(2) 无向图G的连通性：若$\forall u,v\in V$，$u\sim v$，则称G连通

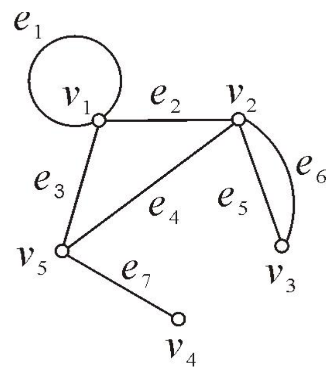
例：平凡图、完全图是连通图；

2阶及以上的零图是非连通图

14.3 图的连通性

定义14.13 设无向图$G=\langle V,E\rangle$，V_i是V关于顶点之间的连通关系的一个等价类，称导出子图$G[V_i]$为G的一个**连通分支**，G的**连通分支数** 记作$p(G)$.

例：若G为连通图，$p(G)=1$；$p(N_n)=n$；



短程线与距离

(3) 短程线与距离

① u与v之间的短程线：u~v，u与v之间长度最短的通路

② u与v之间的距离：$d(u,v)$——短程线的长度

③ $d(u,v)$的性质：$\forall u,v,w\in V(G)$

非负性：$d(u,v)\geq 0$, 当且仅当$u=v$时等号成立

对称性：$d(u,v)=d(v,u)$

三角不等式：$d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$

P303 例14.5

思考：短程线只有两条吗？为什么？(放截图)

无向图的连通度

1. 删除顶点及删除边

$G=<V,E>$为无向图

① $G-v$ ——删除v及所关联的一切边

$G-V'$——删除V'中所有的顶点

② $G-e$ ——删除边e (顶点保留)

$G-E'$——删除E'中所有边

③ $G\backslash e$——边e的收缩：删除边$e=(u,v)$后，用一个新顶点w代替u,v,使w关联除e以外u,v关联的所有边.

④ $G\cup(u,v)$或 $G+(u,v)$ —— 加新边

无向图的连通度

例：

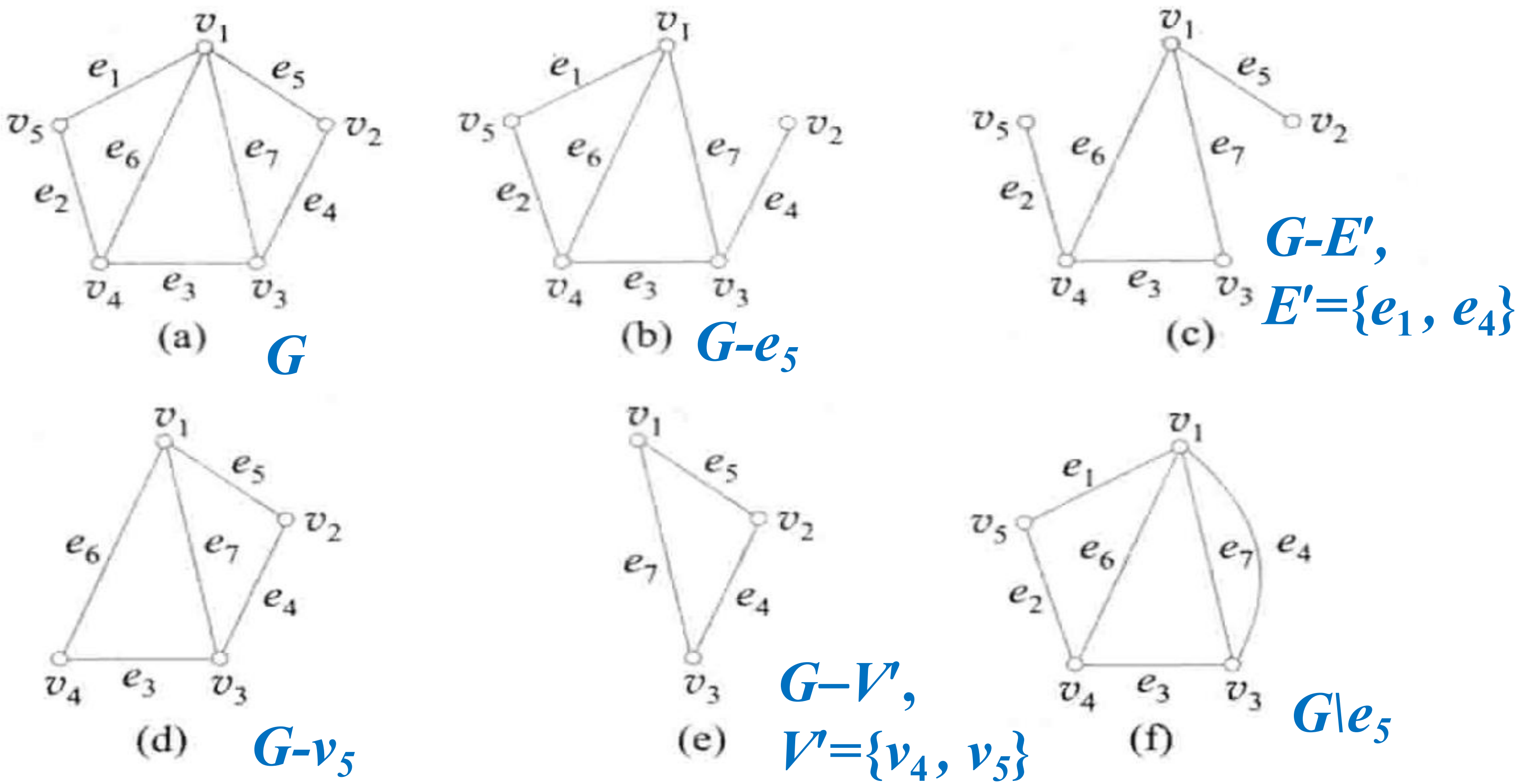


图 14.7

无向图的连通度

2. 点割集与边割集

定义14.15 $G=<V,E>$, $V'\subset V$

V'为点割集——$p(G-V')>p(G)$，且对任意的$V''\subset V'$，均有$p(G-V'')=p(G)$

v为割点——$\{v\}$为点割集

定义14.16 $G=<V,E>$, $E'\subseteq E$

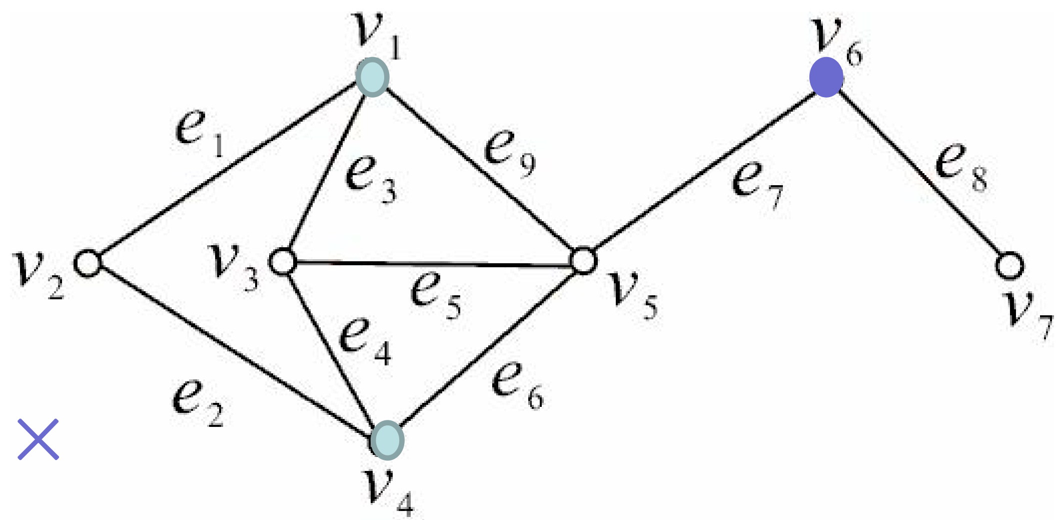
E'是边割集——$p(G-E')>p(G)$，且对任意的$E''\subset E'$，均有$p(G-E'')=p(G)$

e是割边（桥）——$\{e\}$为边割集

注：点割集和边割集里的元素，缺一不可，多了也不行.

点割集与割点

例3 $\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$是点割集，v_6是割点. $\{v_2,v_5\}$是点割集吗？ ×



$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_5,e_6,e_7,e_9\}$ 是边割集吗？ ×

几点说明：

- N_n中既无点割集，也无边割集.
- 若G 连通，E'为边割集，则 $p(G-E')=2$，V'为点割集，则 $p(G-V')\geq 2$

点连通度与边连通度

定义14.18 G为连通图

点连通度— $\kappa(G) = \min\{ |V'| \mid V'$为点割集 $\}$

若 $\kappa(G)\geq k$，则称G为 k-连通图，k为非负整数.

规定：①完全图$K_n(n\geq 1)$的点连通度为$n-1$即 $\kappa(K_n) = n-1$

②非连通图G的点连通度为0即$\kappa(G) = 0$

例：$\kappa(G)=3$，称G为 1-连通图、 2-连通图、 3-连通图.

定义14.19 设G为连通图

边连通度——$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E'$为边割集$\}$

若$\lambda(G)\geq r$，则称G是 r 边-连通图

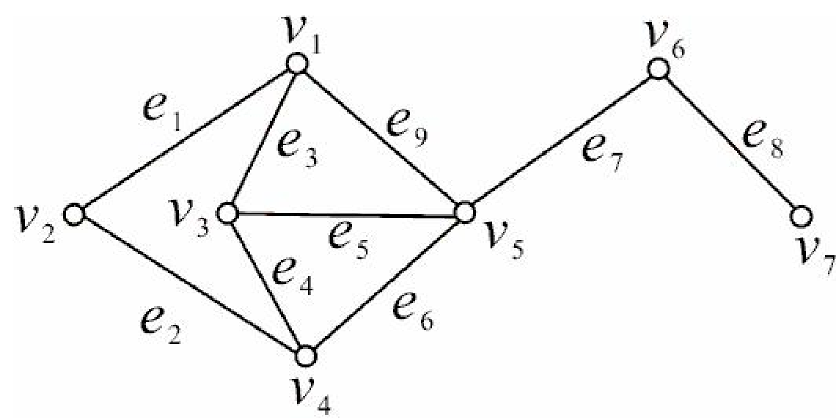
注意：①完全图$K_n(n\geq 1)$的边连通度为$n-1$即 $\lambda(K_n) = n-1$

②非连通图G的边连通度为0即$\lambda(G) = 0$

例：$\lambda(G)=4$，称G为 1边-连通图、 2边-连通图、 3边-连通图、 4边-连通图.

点连通度与边连通度

$\{v_6\}$、$\{e_8\}$分别是右图中元素最少的点割集和边割集，故$\kappa=\lambda=1$，它是 1-连通图和1边-连通图.



注意：①若G是k-连通图，则在G中任意删除k-1个顶点后，所得的图一定还是连通的.

②若G是r边-连通图，则在G中任意删除r-1条边后，所得的图一定还是连通的.

定理14.7 对于任何无向图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

例，P305 例14.7

有向图的连通性

定义14.20 $D=<V,E>$为有向图

$v_i \to v_j$（v_i 可达 v_j）——v_i到v_j有通路

$v_i \leftrightarrow v_j$（v_i与v_j相互可达）

性质

$\to$ 具有自反性($v_i \to v_i$)、传递性

$\leftrightarrow$ 为V上的等价关系，具有自反性、对称性、传递性

v_i到v_j的短程线与距离

类似无向图中的定义，只需注意距离表示法的不同：

无向图中$d(v_i,v_j)$，有向图中$d<v_i,v_j>$

注意： $d<v_i,v_j>$不具有对称性

有向图的连通性及分类

定义14.22 $D=<V,E>$为有向图

D弱连通(连通)——基图为无向连通图

D单向连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\to v_j$ 或 $v_j\to v_i$

D强连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\leftrightarrow v_j$

易知，强连通$\Rightarrow$单向连通$\Rightarrow$弱连通

定理14.8 D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理14.9 D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

二部图

定义14.23 设 $G=<V,E>$为一个无向图，若能将 V分成 V_1和V_2 ($V_1\cup V_2=V$，$V_1\cap V_2=\varnothing$)，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于V_1，另一个属于V_2，则称 G 为二部图 (或称二分图、偶图等)，称V_1和V_2为互补顶点子集，常将二部图G记为$<V_1,V_2,E>$.

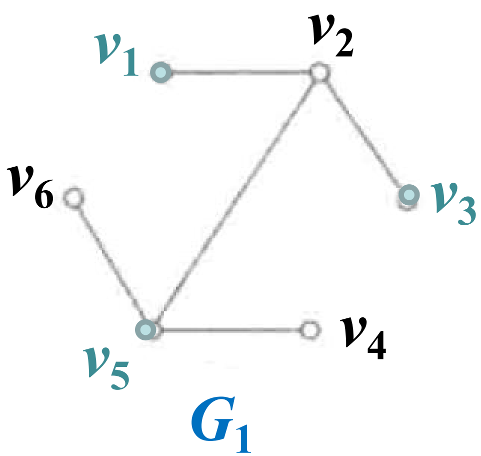
又若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻，则称G为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$.

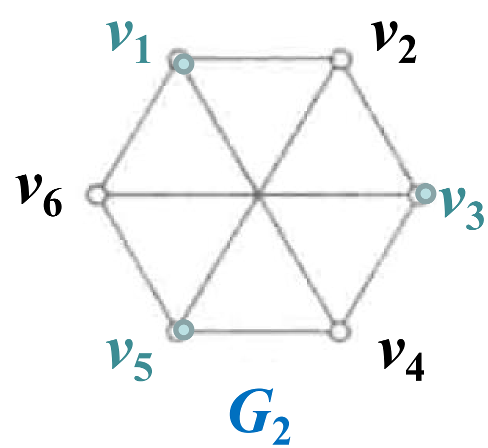
规定：$n(n\geq 2)$ 阶零图为二部图.

二部图

定理14.10 $n(n\geq 2)$ 阶无向图G是二部图当且仅当G中无奇圈

实例





G_1是二部图

$V_1=\{v_1,v_3,v_5\}$, $V_2=\{v_2,v_4,v_6\}$.

G_2是完全二部图

$V_1=\{v_1,v_3,v_5\}$, $V_2=\{v_2,v_4,v_6\}$.