GDOU-B-11-302

广东海洋大学 2015—2016 学年第一学期

《概率论与数理统计》**课程试题(A)**

一、 填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. 设 A，B，C 为三事件，用 A，B，C 的运算关系表示“A，B，C 中不多于一个发生”____________________

1. $\overline{AB \cup BC \cup AC}$

$= (\overline{AB})(\overline{BC})(\overline{AC})$

$= A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{ABC};$

2. 将 3 封信随机放入 4 个邮筒中, 则“ 邮筒中信的个数最多为 1 个 ”的概率为____________

2. $A_4^3 / 4^3 = 3/8;$

3. 在区间 $[0,1]$上随机地取两个数，则“取到的两数之和小于 0.8”的概率为_______________

3. $X \sim U[0,1], Y \sim U[0,1], (X,Y) \sim U[0,1;0,1],$

$$P(X+Y<0.8) = \frac{0.8 \times 0.8/2}{1 \times 1} = 0.32;$$

4. 一批电子管中有8%是次品,现从中有放回地任取 9 个,则“其中至多有 1 件是次品”的概率为___________________（只列式，不计算）

4. $X \sim B(n,p), n=9, p=0.08,$

$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n,$

$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0.92^9 + 9 \times 0.08 \times 0.92^8;$

5. 已知$P(A)=0.7$，$P(B)=0.5$，$P(A \cup B)=0.9$，则$P(B-A)=$_________

5. $P(A)=0.7, P(B)=0.5, P(A\cup B)=0.9,$

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.3,$

$P(B-A)=P(B)-P(BA)=0.2;$

6. 已知总体$X\sim N(2,\ \ 9^2)$，又设$X_1,X_2,\cdots,X_6$为来自总体X的样本，记

$\overline{X}=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}X_i$，则$\overline{X}\sim$ ____________

6. $X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu,$$

由样本的独立性，

$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\sigma^2/n,$$

由抽样分布定理，

$$\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)=N(2,9)=N(2,3^2)$$

7. 设X的分布律为$\begin{array}{c|ccc} X & -2 & 0 & 1 \\ \hline P & 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{array}$,则$X$的分布函数$F(x)=$__________

7. $F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0,x<-2\\ 1/3,-2\le x<0\\ (1/3+1/6)=1/2,0\le x<1\\ 1,x\ge 1\end{cases}$,

其中，当$0\le x<1$时,

$$F(x)=P(X\le x)=P(X=-2)+P(X=0)=(1/3+1/6)=1/2$$

8. 设X_1,X_2是从正态总体$X\sim N(\mu,\ \ \sigma^2)$中抽取的样本。对于以下总体均值$\mu$的估计量$\hat{\mu}_1=\dfrac{2}{3}X_1+\dfrac{1}{3}X_2$，$\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{4}X_1+\dfrac{3}{4}X_2$，$\hat{\mu}_3=\dfrac{1}{2}X_1+\dfrac{1}{2}X_2$

则最有效的估计量是 ______________

8. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,

$$D(\widehat{\mu_1}) = D(\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2) = \frac{4}{9}D(X_1) + \frac{1}{9}D(X_2) = \frac{5}{9}\sigma^2,$$

$$D(\widehat{\mu_2}) = D(\frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2) = \frac{1}{16}D(X_1) + \frac{9}{16}D(X_2) = \frac{5}{8}\sigma^2,$$

$$D(\widehat{\mu_3}) = D(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2) = \frac{1}{4}D(X_1) + \frac{1}{4}D(X_2) = \frac{1}{2}\sigma^2,$$

最有效的是$\widehat{\mu_3}$

9. 已知总体 $X \sim N(0,1)$, X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 X 的样本，则 $\dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}} \sim$ ________

9. $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,1)$,

$$E(X_1 - X_2) = 0, D(X_1 - X_2) = D(X_1) + D(X_2) = 2$$

$$\Rightarrow X_1 - X_2 \sim N(0,2) \Rightarrow X = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1),$$

$$X_3 \sim N(0,1), X_4 \sim N(0,1) \Rightarrow Y = X_3{}^2 + X_4{}^2 \sim \chi^2(2),$$

由抽样分布定理，

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/2}} = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3{}^2 + X_4{}^2}} \sim t(2)$$

10. 某旅行社随机访问了 25 名旅游者, 得知平均消费额$\overline{x} = 80$元, 样本标准差$s = 12$元, 已知旅游者消费额服从正态分布, 求旅游者平均消费额μ的 95%置信区间为____________________$\left(t_{0.025}(24) = 2.0639\right)$

10. $X \sim N(\mu,\sigma^2), \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(\mu,\sigma^2/n)$,

$X=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), Y=(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1), X,Y$ 相互独立,

$t=\frac{X}{\sqrt{Y/(n-1)}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)=t(24)$,

$P(|t|<t_{\alpha/2}(24))=1-\alpha, P(\overline{X}-\frac{1}{5}S\cdot t_{\alpha/2}(24)<\mu<\overline{X}+\frac{1}{5}S\cdot t_{\alpha/2}(24))=1-\alpha$,

即μ的水平为$1-\alpha$的置信区间为：

$(\overline{X}\pm\frac{1}{5}S\cdot t_{\alpha/2}(24))=(80\pm\frac{1}{5}\times 12\times 2.0639)=(80\pm 4.95336)$

二. 设某保险公司把被保险人分为 3 类："谨慎的"、"一般的"、"冒失的"。资料表明，上述 3 种人在一年内发生事故的概率依次为 0.05,0.15 和 0.30；若"谨慎的"被保险人占 20%,"一般的"占 50%,"冒失的"占 30%,(1)求某被保险人在一年内出了事故的概率； (2) 若某被保险人在一年内出了事故，求他是"冒失的"的概率. (每问 5 分)

解：A: 谨慎的，B: 一般的，C: 冒失的，

D: 某被保险人在一年内出了事故,

$P(A)=0.2, P(B)=0.5, P(C)=0.3$,

$P(D|A)=0.05, P(D|B)=0.15, P(D|C)=0.30$,

(1) $P(D)=P(DA)+P(DB)+P(DC)$

$=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)$

$=0.2\times 0.05+0.5\times 0.15+0.3\times 0.3=.175$,

(2) $P(C|D)=\frac{P(CD)}{P(D)}=\frac{P(C)P(D|C)}{P(D)}=\frac{0.3\times 0.3}{P(D)}=0.514$

三．设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ c-x & 1\le x<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ，求

(1) 未知常数 c；(3 分)　　(2) $P\{-1<X<1.5\}$；(3 分)

(3) 分布函数 $F(x)$； (6 分)　(4) $D(6X-1)$。(3 分)

解：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 (c-x)dx=1, c=2,$

(2) $P(-1<X<1.5)=\int_{-1}^{1.5} f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^{1.5} (2-x)dx=0.375,$

(3) $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} 0, x<0 \\ \int_0^x xdx=\frac{1}{2}x^2, 0<x<1 \\ \int_0^1 xdx+\int_1^x (2-x)dx=-1+2x-\frac{1}{2}x^2, 1<x<2 \\ 1, x>2 \end{cases}$$

(4) $D(6X-1)=D(6X)=36D(X)$

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x^2 dx+\int_1^2 x(2-x)dx=1,$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^3 dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=7/6,$

$D(6X-1)=36[E(X^2)-E^2(X)]=1/6$

四. 盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 3 只球，以 X 表示取到的黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数。求

(1) X 和 Y 的联合分布律；(5 分)　　(2) 判断 X 和 Y 的独立性；(5 分)

(3) $P\{X=1|Y=1\}$ (4 分)　(4) $E(2X-3Y)$。(4 分)

解：

7个球取3个的取法种数：$P_7^3 = 7\times 6\times 5$,

各取法下的取法种数如下：

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	$C_3^1\cdot 3!$	$C_3^2\cdot C_2^1\cdot 3!$	$3!$
1	$C_2^1\cdot 3!$	$C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot 3!$	$C_3^2\cdot C_2^1\cdot 3!$	0
2	$C_2^1\cdot 3!$	$C_3^1\cdot 3!$	0	0

(1) 联合分布及边缘分布为:

$Y \backslash X$	0	1	2	3	
0	0	$3/35$	$6/35$	$1/35$	$10/35$
1	$2/35$	$12/35$	$6/35$	0	$20/35$
2	$2/35$	$3/35$	0	0	$5/35$
	$4/35$	$18/35$	$12/35$	$1/35$	

(2) $P(X=0,Y=0)=0$,

$P(X=0)=18/35, P(Y=0)=10/35$,

$P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$, X,Y不相互独立；

(3) $P(X=1|Y=1)=\dfrac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\dfrac{12/35}{20/35}=0.6$;

(4) $E(X)=0\times 4/35+1\times 18/35+2\times 12/35+3\times 1/35=9/7$,

$E(Y)=0\times 10/35+1\times 20/35+2\times 5/35=6/7$,

$E(2X-3Y)=2E(X)-3E(Y)=0$

五. 一个螺丝钉重量是一个随机变量，期望值是 100 克，标准差是 10 克。求一盒（100 个）同型号螺丝钉的重量超过 10.2 千克的概率。(9 分)

（$\Phi(2)=0.9772$）

解：

$E(X_i)=100, D(X_i)=100,$

$E(\sum_{i=1}^{100} X_i)=100^2, D(\sum_{i=1}^{100} X_i)=100^2,$

由中心极限定理：

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(100^2,100^2), \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i-100^2}{100} \sim N(0,1),$$

$$P(\sum_{i=1}^{100} X_i>10200)=P(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i-100^2}{100}>\frac{200}{100}=2)=1-\Phi(2)=0.0228$$

六. 已知总体X的概率密度$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & 0<x<1 \\ 0 & 其它\end{cases}$，其中$\theta$ 是未知参数，设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的一个样本容量为n的简单随机样本，求未知参数θ 的

(1) 矩估计量；　（8 分）　　(2) 最大似然估计量.（10 分）

解：

(1) $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 \theta x^{\theta} dx = \frac{\theta}{\theta+1}$,

$\mu = \frac{\theta}{\theta+1}, \theta = \frac{\mu}{1-\mu}$,

令 $\widehat{\mu} = \overline{X}$,**得矩估计量**:$\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$;

(2) **似然函数**:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \theta {x_i}^{\theta-1} = \theta^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta-1}, (0 < x_i < 1),$$

对数似然函数:

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i,$$

令 $\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$,**得估计值**:$\widehat{\theta_L} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$,**从而**

极大似然估计量:$\widehat{\theta_L} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$