求公式的范式

课本P28页　例2.7

求下面公式的析取范式与合取范式：

$$(p \to q) \leftrightarrow r$$

极小项与极大项

一般地，命题公式的析取范式或合取范式是不唯一的. 为了使命题公式的范式唯一，需要进一步将简单合取式和简单析取式规范化.

极小项与极大项

定义2.4　在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i个文字出现在左起第i位上（$1 \le i \le n$），称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）.

几点说明：

- n个命题变项有2^n个极小项和2^n个极大项
- 每个极小项有且仅有一个成真赋值，每个极大项有且仅有一个成假赋值
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值

极小项与极大项

用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示. m_i（M_i）称为极小项（极大项）的名称.

实例

由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

实例

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

m_i与M_i的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$, $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式与主合取范式

主析取范式——由极小项构成的析取范式

主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$$ ——主析取范式

$$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_7$$ ——主合取范式

定理2.5 (主范式的存在惟一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式,并且是惟一的.

求公式主范式的步骤

求公式主析取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式 $j=1,2,\ldots,s$;

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止; （排中律、同一律）

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i\vee m_i$;

(4) 将极小项按下标从小到大排列.

求公式主范式的步骤

求公式的主合取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式 $j=1,2,\ldots,s$;

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止; （矛盾律、同一律）

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$;

(4) 将极大项按下标从小到大排列.

实例

例9 (1) 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$ 的主析取范式和主合取范式

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （析取范式） ①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$ ②

r

$\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$ （主析取范式）

实例

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （合取范式） ④

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ⑤

$q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$ ⑥

⑤, ⑥代入④ 并排序，得

$(p\to\neg q)\to r\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ （主合取范式）

主范式的应用

1. 求公式的成真成假赋值

设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值

例如 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,
成假赋值为 000, 010, 100.

类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的应用

2. 判断公式的类型

设A含n个命题变项.

A为重言式 $\Leftrightarrow$ A的主析取范式含全部2^n个极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式不含任何极大项, 记为1.

A为矛盾式 $\Leftrightarrow$ A的主合取范式含全部2^n个极大项

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式不含任何极小项, 记为0.

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

主范式的应用

例10 用主范式判断公式的类型:

(1) $A \Leftrightarrow \neg(p\to q)\wedge q$ (2) $B \Leftrightarrow p\to(p\vee q)$ (3) $C \Leftrightarrow (p\vee q)\to r$

解

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\wedge q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\wedge q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3$

(2) $B \Leftrightarrow \neg p\vee(p\vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$ 重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$

$\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ 非重言式的可满足式

主范式的应用

3. 判断两个公式是否等值:

即判断两个公式的主范式是否一致

例11 用主析取范式判断以下每一组公式是否等值

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解

$$p\to(q\to r) \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$$

$$(p\wedge q)\to r \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$$

$$(p\to q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

主范式的应用

4. 解决实际问题

例12 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察, 需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记 p:派A去, q:派B去, r:派C去

(1) $p \to r$, (2) $q \to \neg r$, (3) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A=(p \to r) \wedge (q \to \neg r) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$$

主范式的应用

求A的主析取范式

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))$$

$$\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q))$$

$$\vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

成真赋值: **101, 010**

结论: 方案1 派A与C去，方案2 派B去

主范式的应用

4. 解决实际问题

例13 以下四个命题，最多有几个是真的?

p： 命题q是正确的。

q： 命题r是错误的。

r： 命题s是正确的。

s： 命题p是错误的。

如何用命题逻辑的方法解决这个问题?

1、命题符号化：$(p\leftrightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow\neg r)\wedge(r\leftrightarrow s)\wedge(s\leftrightarrow\neg p)$

由 $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)$可求出合取范式

2、将合取范式进一步规范为主合取范式，从而求出主析取范式，得到成真赋值. $(m_3\vee m_{12})$

用成真赋值和成假赋值确定主范式

由主析取范式确定主合取范式

例14 设A有3个命题变项, 且已知$A= m_1 \vee m_3 \vee m_7$, 求A的主合取范式.

解 A的成真赋值是1,3,7的二进制表示, 成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示, 它们恰好是A的主合取范式的极大项的下角标, 故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

由主合取范式确定主析取范式

用真值表确定主范式

小 结 5

文字：命题变项及其否定的总称
简单析取式：有限个文字构成的析取式
简单合取式：有限个文字构成的合取式
析取范式：由有限个简单合取式组成的析取式
合取范式：由有限个简单析取式组成的合取式

极小项：特殊的简单合取式，每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，命题变项按字母顺序排列.
极大项：特殊的简单析取式，每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，命题变项按字母顺序排列.

主析取范式：由极小项构成的析取范式

主合取范式：由极大项构成的合取范式

小 结 5

- 主析取范式和主合取范式统称为主范式
- 主范式的求解步骤
- 主范式的应用：

(1)求公式的成真成假赋值；

(2)判断公式的类型；

(3)证明两个公式是否等值；

(4)解决实际问题

第二章 习题课

主要内容

- 等值式与等值演算
- 基本等值式（16组，24个公式）
- 主析取范式与主合取范式

基本要求

- 深刻理解等值式的概念
- 牢记基本等值式的名称及它们的内容
- 熟练地应用基本等值式及置换规则进行等值演算
- 理解文字、简单析取式、简单合取式、析取范式、合取范式的概念
- 深刻理解极小项、极大项的概念、名称及下角标与成真、成假赋值的关系，并理解简单析取式与极小项的关系
- 熟练掌握求主范式的方法（等值演算、真值表等）
- 会用主范式求公式的成真赋值、成假赋值、判断公式的类型、判断两个公式是否等值
- 会用命题逻辑的概念及运算解决简单的应用问题

练习1:概念

1. 设A与B为含n个命题变项的公式，判断下列命题是否为真？

(1) $A \Leftrightarrow B$当且仅当A与B有相同的主析取范式 真

(2) 若A为重言式，则A的主合取范式为0 假

(3) 若A为矛盾式，则A的主析取范式为1 假

说明:

(2) 重言式的主合取范式不含任何极大项，为1.

(3) 矛盾式的主析取范式不含任何极小项, 为0.

练习2: 判断公式类型

2. 判断下列公式的类型:

(1) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

解 用等值演算法求主范式

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow m_2 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_0$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$$ 主析取范式

$$\Leftrightarrow 1$$ 主合取范式

重言式

练习题2(续)

(2) $\neg(p\to q)\wedge q$

解 用等值演算法求公式的主范式

$$\neg(p\to q)\wedge q$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\wedge q$$

$$\Leftrightarrow p\wedge\neg q\wedge q$$

$$\Leftrightarrow 0$$ 主析取范式

$$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3$$ 主合取范式

矛盾式

练习2(续)

(3) $(p \to q) \wedge \neg p$

解 用等值演算法求公式的主范式

$$(p \to q) \wedge \neg p$$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p$

$\Leftrightarrow \neg p$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1$ 主析取范式

$\Leftrightarrow M_2 \wedge M_3$ 主合取范式

非重言式的可满足式

练习3：求公式的主范式

3．已知命题公式A中含3个命题变项p, q, r，并知道它的成真赋值为001, 010, 111, 求A的主析取范式和主合取范式，及A对应的真值函数.

解 A的主析取范式为$m_1 \vee m_2 \vee m_7$

A的主合取范式为$M_0 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$

$p\ q\ r$	F	$p\ q\ r$	F
0 0 0	0	1 0 0	0
0 0 1	1	1 0 1	0
0 1 0	1	1 1 0	0
0 1 1	0	1 1 1	1

练习5：应用题

5. 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件：

(1) 若赵去，钱也去.

(2) 李、周两人中至少有一人去

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人.

(4) 孙、李两人同去或同不去.

(5) 若周去，则赵、钱也去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国?

练习5解答

解此类问题的步骤：

1.设简单命题并符号化

2. 用复合命题描述各条件

3. 写出由复合命题组成的合取式

4. 将合取式成析取式（最好是主析取范式）

5. 求成真赋值, 并做出解释和结论

练习5解答

解

1. 设简单命题并符号化

设 p: 派赵去，q: 派钱去，r: 派孙去，s: 派李去，u: 派周去

2. 写出复合命题

(1) 若赵去，钱也去 $p\rightarrow q$

(2) 李、周两人中至少有一人去 $s\vee u$

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人 $(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$

(4) 孙、李两人同去或同不去 $(r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s)$

(5) 若周去，则赵、钱也去 $u\rightarrow(p\wedge q)$

练习5解答

3. 设(1)—(5)构成的合取式为A

$$A = (p\to q)\wedge(s\vee u)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge ((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(u\to(p\wedge q))$$

4. 化成析取式

$$A \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$$

结论：由上述析取式可知，A的成真赋值为00110与11001，

派孙、李去（赵、钱、周不去）

派赵、钱、周去（孙、李不去）

练习5解答

$A \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge$
$(s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \wedge$
$((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$

$B_1 = (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))$ （分配律）

$B_2 = (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q))$

$\Leftrightarrow ((s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge u))$ （分配律）

$B_1 \wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u)$
$\vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge u)$

再令 $((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) = B_3$，则

$B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$