概率论与数理统计作业 Chap7

April 25, 2025

练习 1. 设 x_1, x_2, x_3 是取自某总体的容量为 3 的样本，试证下列统计量都是该总体均值 μ 的无偏估计，在方差存在时指出哪一个估计的有效性最差?

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3;\\
&(2) \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3;\\
&(3) \quad \hat{\mu}_3 = \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{3}x_3.
\end{aligned}
$$

解. 先求三个统计量的数学期望，

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\mu}_1) &= \frac{1}{2}E(x_1) + \frac{1}{3}E(x_2) + \frac{1}{6}E(x_3) = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{6}\mu = \mu,\\
E(\hat{\mu}_2) &= \frac{1}{3}E(x_1) + \frac{1}{3}E(x_2) + \frac{1}{3}E(x_3) = \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = \mu,\\
E(\hat{\mu}_3) &= \frac{1}{6}E(x_1) + \frac{1}{6}E(x_2) + \frac{2}{3}E(x_3) = \frac{1}{6}\mu + \frac{1}{6}\mu + \frac{2}{3}\mu = \mu.
\end{aligned}
$$

这说明它们都是总体均值 μ 的无偏估计，下面求它们的方差，不妨设总体的方差为 σ^2，则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{\mu}_1) &= \frac{1}{4}\mathrm{Var}(x_1) + \frac{1}{9}\mathrm{Var}(x_2) + \frac{1}{36}\mathrm{Var}(x_3) = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{1}{36}\sigma^2 = \frac{7}{18}\sigma^2,\\
\mathrm{Var}(\hat{\mu}_2) &= \frac{1}{9}\mathrm{Var}(x_1) + \frac{1}{9}\mathrm{Var}(x_2) + \frac{1}{9}\mathrm{Var}(x_3) = \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 = \frac{1}{3}\sigma^2,\\
\mathrm{Var}(\hat{\mu}_3) &= \frac{1}{36}\mathrm{Var}(x_1) + \frac{1}{36}\mathrm{Var}(x_2) + \frac{4}{9}\mathrm{Var}(x_3) = \frac{1}{36}\sigma^2 + \frac{1}{36}\sigma^2 + \frac{4}{9}\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^2.
\end{aligned}
$$

不难看出 $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_2) < \mathrm{Var}(\hat{\mu}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\mu}_3)$，从而 $\hat{\mu}_3$ 的有效性最差。

练习 2. 设总体密度函数如下，$x_1, \cdots, x_n$ 是样本，试求未知参数的矩估计。

(1) $f(x;\theta) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), 0 < x < \theta, \theta > 0$;

(2) $f(x;\theta) = (\theta+1)x^\theta, 0 < x < 1, \theta > 0$;

(3) $f(x;\theta) = \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, 0 < x < 1, \theta > 0$;

(4) $f(x;\theta,\mu) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, x > \mu, \theta > 0$.

解. (1) 总体均值 $E(X) = \int_0^\theta x\frac{2}{\theta^2}(\theta - x)dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta(\theta x - x^2)dx = \frac{1}{3}\theta$，即 $\theta = 3E(X)$，故参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = 3\bar{x}$.

(2) 总体均值 $E(X) = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$，所以 $\theta = \frac{2E(X)-1}{1-E(X)}$，从而参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta} = \frac{1-2\bar{x}}{\bar{x}-1}$..

(3) 由 $E(X) = \int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$ 可得 $\theta = \left(\frac{E(X)}{1-E(X)}\right)^2$，由此，参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)^2$.

(4) 先计算总体均值与方差

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{\mu}^{\infty} x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx = \int_{0}^{\infty}(t+\mu)\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}dt = \theta+\mu,\\
E(X^2) &= \int_{\mu}^{\infty} x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx = \int_{0}^{\infty}(t+\mu)^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}dt = 2\theta^2+2\mu\theta+\mu^2,\\
\mathrm{Var}(X) &= E(X^2)-(E(X))^2 = \theta^2.
\end{aligned}
$$

由此可以推出 $\theta = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$，$\mu = E(X) - \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$，从而参数 θ, μ 的矩估计为 $\hat{\theta} = s$，$\hat{\mu} = \bar{x} - s$.

练习 3. 设总体 X 服从二项分布 $B(m,p)$，其中 m,p 为未知参数，$x_1,\cdots,x_n$ 为 X 的一个样本，求 m 与 p 的矩估计。

解. 因为有两个未知参数，所以要用 1, 2 阶原点矩。由二项分布可知

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= E(X) = mp, \mathrm{Var}(X) = mp(1-p),\\
\alpha_2 &= E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [E(X)]^2 = mp(1-p) + m^2p^2.
\end{aligned}
$$

解方程组

$$
\begin{cases}
mp = \alpha_1,\\
mp(1-p) + m^2p^2 = \alpha_2.
\end{cases}
$$

将第一式代入第二式，有:

$$\alpha_1(1-p) + \alpha_1^2 = \alpha_2.$$

所以

$$p = 1 + \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

用 $\bar{x}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 分别代入上式的 α_1, α_2，得

$$\hat{p} = 1 + \bar{x} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\bar{x}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n\bar{x}} = 1 - \frac{s_*^2}{\bar{x}},$$

其中 $s_*^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$。代入第一式，得

$$\hat{m} = \frac{\bar{x}}{\hat{p}}.$$

因为 m 为正整数，故

$$\hat{m} = \left\lfloor \frac{\vec{x}^2}{\overline{x} - s_*^2} \right\rfloor,$$

其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示取整数。

练习 4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一相应的样本值. 利用最大似然估计法求下列各总体的概率密度的未知参数的极大似然估计值和矩估计量.

(1) $f(x) = \begin{cases} \theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)}, & x > c,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

其中 $c > 0$ 为已知, $\theta > 1, \theta$ 为未知参数.

(2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 \leqslant x \leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

其中 $\theta > 0, \theta$ 为未知参数.

解. (1) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一个样本值. 似然函数为

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \theta^{\theta} x_i^{-(\theta+1)} \\
&= (\theta c^{\theta})^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)} = (\theta c^{\theta})^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-(\theta+1)},
\end{aligned}$$

$$\ln L = n(\ln\theta + \theta \ln\, c) - (\theta+1)\ln\prod_{i=1}^{n} x_i.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L = n\left(\frac{1}{\theta} + \ln c\right) - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0,$$

得 θ 的最大似然估计值为

$$\widehat{\theta} = 1\Big/\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \ln c\Big),$$

θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = 1\Big/(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \ln c\Big).$$

(2) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一个样本值. 似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\theta} x_i^{\sqrt{\theta}-1}\right) = \theta^{n/2} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1},$$

$$\ln L = \frac{n}{2}\ln\theta + (\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L = \frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0,$$

得 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta} = \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i)^2},$$

θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n} \ln X_i)^2}.$$

练习 5. 某厂生产的化纤强度服从正态分布，长期以来其标准差稳定在 $\sigma = 0.85$，现抽取了一个容量为 $n = 25$ 的样本，测定其强度，算得样本均值为 $\bar{x} = 2.25$，试求这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间。

解. 这是方差已知时正态均值的区间估计问题。由题设条件 $1 - \alpha = 0.95$，$\alpha = 0.05$，查表知 $u_{0.975} = 1.96$，于是这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\begin{aligned}
&\left[\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\
=&\left[2.25 - 1.96 \times \frac{0.85}{\sqrt{25}}, 2.25 + 1.96 \times \frac{0.85}{\sqrt{25}}\right] \\
=&[2.25 - 0.3332, 2.25 + 0.3332]
\end{aligned}$$

即这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间为 $[1.9168, 2.5832]$。

练习 6. 已知某种材料的抗压强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现随机地抽取 10 个试件进行抗压试验，测得数据如下：

$$482 \quad 493 \quad 457 \quad 471 \quad 510 \quad 446 \quad 435 \quad 418 \quad 394 \quad 469.$$

(1) 求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间；

(2) 若已知 $\sigma = 30$，求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间；

(3) 求 σ 的置信水平为 95% 的置信区间。

解. (1) 经计算得，$\bar{x} = 457.5$，$s = 35.2176$，在 σ 未知时，μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\bar{x} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

查表得，$t_{1-0.025}(9) = 2.2622$，因而 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[457.5 - 2.2622 \times \frac{35.2176}{\sqrt{10}}, 457.5 + 2.2622 \times \frac{35.2176}{\sqrt{10}}\right] = [432.3064, 482.6936].$$

(2) 在 $\sigma = 30$ 已知时，μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

查表得，$u_{1-\alpha/2} = 1.96$，因而 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[457.5 - 1.96 \times \frac{30}{\sqrt{10}}, 457.5 + 1.96 \times \frac{30}{\sqrt{10}}\right] = [438.9058, 476.0942].$$

(3) 此处，$(n-1)s^2 = 11162.5141$，取 $\alpha = 0.05$，查表得 $\chi^2_{0.025}(9) = 2.7004$，$\chi^2_{0.975}(9) = 19.0228$，因而 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)}\right] = [586.7966, 4113.6521]$$

由此可以得到 σ 的置信水平为 95% 的置信区间为 $[24.2239, 64.1378]$。