概率统计试卷

一、 填空题

1、已知$P(A\cup B)=0.6$，$P(B)=0.3$，则$P(A\overline{B})=$ ________________

2、假设$P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$，那么①若 A B 互不相容，则$P(B)=$___

______________②若 A B 相互独立，则$P(B)=$ ___________________________

3、在区间（0，2）内随意取两个数，设 A=“两数之和不大于 3”，则$p(A)=$____________.

4、设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 P，现进行 n 次独立试验，则 A 至少发生一次的概率为____；

而事件 A 至多发生一次的概率为__________________________________.

5、设随机变量 X 的密度函数为$f(x)$，且$f(-x)=f(x)$，$F(x)$是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有$F(-a)=$_____________________________________.

6、设随机变量 X 服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布，已知$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，

$\Phi(2.5)=0.9938$，则 X 落在区间（9.95，10.05）内的概率为________________________

7、设二维随机变量（X、Y）的联合分布密度为$f(x,y)=\begin{cases}6x & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，则

$P\{X+Y\le 1\}$ =__________________________

8、已知一批零件的长度 X（单位：cm）服从正态分布$N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40cm，则μ的置信水平为 0.95 地置信区间为____________________

9、设$X\sim N(0,1)$，$Y=X^{2n}$（n为正整数)，则 $\rho_{XY}=$ ________________________

二、 计算题

1、袋中有 12 个球，其中有 9 个是新的，第一次比赛时从中任取 3 个用，比赛结束后仍放回袋中，第二次比赛再从袋中任取 3 个，求：

⑴ 第二次取出的球都是新球的概率？

⑵ 又已知第二次取出的球都是新球，第一次取到的都是新球的概率？

2、已知甲乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有

3 件合格品，从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求

（1）乙箱中次品件数 X 的数学期望。

（2）从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

3、设随机变量 X 的分布函数为 $F(X)=\begin{cases} a & x\geq 1 \\ bx\ln x+cx+d & 1<x\leq e \\ d & x>e \end{cases}$ 求：

（1）常数 a，b，c，d。

（2）X 的分布密度函数。

4、设 X,Y 相互独立，其分布密度分别为

$$\varphi_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \qquad \varphi_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{y^2}{3}} & y\geq 0 \\ 0 & y<0 \end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布密度.

5、设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y)\big|0<x<1,0<y<x\}$ 上的均匀分布，

求相关系数 ρ_{XY}.

6、某砖厂制成两批机制红砖，抽样检查测量砖的抗析强度（公斤），得到结果如下：

第一批：$n_1=10,\quad \bar{x}=27.3,\quad S_1=6.4;$

第二批：$n_2=8,\quad \bar{y}=30.5,\quad S_2=3.8.$

已知砖的抗析强度服从正态分布，试检验：

（1）　两批红砖的抗析强度的方差是否有显著差异（取 $\partial=0.05$）；

（2）　两批红砖的抗析强度的数学期望是否有显著差异（取 $\partial=0.05$）。

三、　应用题

1. 一辆汽车沿一街道行使需要通过三个设有红绿信号灯路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等，以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口个数，求 ：(1) X 的概率分布； (2) $E(\frac{1}{1+X})$

2. 假设一部机器在一年内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元，发生一次故障仍可获利润 5 万元；发生二次故障所获利润 0 万元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，

求一周内利润的期望是多少？

四、　证明题

1. 设 X 是随机变量，c 是常数，证明：$D(X) < E[(X-c)^2]$，其中 $c \neq E(X)$.

2．设事件 A、B、C 两两独立且三个事件不可能同时发生，如果 $P(A)=P(B)=P(C)=x$，证明 ：$x \leq \frac{1}{2}$

概率论与数理统计试卷

一．填空（每空 3 分，共 15 分）

1．设两事件 A、B 相互独立，P(A) = 0.2，P(A∪B) = 0.6，则 $P\left(\overline{A}\cup B\right)$ =________。

2．设随机变量 $X \sim \mathrm{N}[1,4]$，，则 $\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)$ = ___________。

3．某工厂一个班组共有 7 名男工人、4 名女工人，现要选 3 个代表，其中至少有一名女工人的概率为 ________。

4．设随机变量 X 服从 Poisson 分布，其方差是 4 ， 则 P（ $X \geqslant 1$）=___________。

5．已知 X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的样本， $\mu_1 = 0.4X_1 + 0.4X_2 + 0.2X_3$ ， $\mu_2 = 0.2X_1 + 0.2X_2 + 0.6X_3$， $\mu_3 = 0.5X_1 + 0.5X_2$ 为总体均值的无偏估计量，则其中最有效的估计量是 ___________。

二．(10 分）甲乙两箱中装有同种产品，甲箱中装有 4 件正品 2 件次品，乙箱中只有 2 件正品。从甲箱中任取 2 件产品放入乙箱后，求（1）乙箱中次品件数 X 的概率分布，(2)从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

三．(12 分) 假设的密度函数为： $f(x)=\begin{cases} kx & 0<x<1 \\ 2-x & 1\le x\le 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，

求 (1) 常数 k (2) X 的分布函数 (3) P（ $X \le \frac{1}{2}$ ） (4) $D(X)$ ）

四．(10 分) 设二维离散型随机变量（ X , Y ）的联合分布为：

求 (1) a ， (2) X , Y 的边缘分布律，（3） $Z = X + Y$ 的概率分布。

X \ Y	1	2	3
0	0.1	0.3	0.1
1	0.3	a	a

五．(8 分) 两无线电元件 A 和 B 的寿命 X,Y 均服从指数分布，且相互独立，其概率密度分别为： $f_X(x)=\begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y\ge 0 \\ 0 & y<0 \end{cases}$，其中 α,β 为常数。求 B 元件比 A 元件寿命长的概率。

六．$(10分)$设总体X的分布密度为$f(x)=\begin{cases}(\lambda+1)x^{\lambda} & 0<x<1 \\ 0 & \end{cases}$，求参数$\lambda$的矩法估计量和极大似然估计量。

七．(10分)设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取容量为16的样本，测得样本平均数$\bar{x}=9.5$，标准差为2，求总体均值μ 的95%的置信区间。

八．(10分) 正常人的脉搏次数为每分钟72次。某医生测得了9例中毒患者的脉搏次数，计算得其平均值为69.8，标准差$S=5.5$。已知人的脉搏次数服从正态分布，问中毒患者的脉搏次数与正常人是否有显著差异？($\alpha=0.05$)

九．(15分)设有（x，y）的如下观测值：(1，6.4)，(3，13.8)，(5，20.55)，(7，28.5)，(9，36)，试建立y对x的回归直线方程并进行显著性检验（$\alpha=0.05$）

附表：

$$
\begin{aligned}
&F_{0.05}(1,3)=10.13, \quad F_{0.01}(1,3)=17.44\\
&F_{0.05}(1,4)=7.71, \quad F_{0.01}(1,4)=12.22\\
&F_{0.05}(1,5)=6.61, \quad F_{0.01}(1,5)=10.01\\
&t_{0.05}(6)=1.9342, \quad t_{0.025}(6)=2.4469\\
&t_{0.05}(7)=1.8946, \quad t_{0.025}(7)=2.3646\\
&t_{0.05}(8)=1.8595, \quad t_{0.025}(8)=2.3060\\
&t_{0.05}(10)=1.8125, \quad t_{0.025}(10)=2.2281\\
&t_{0.05}(15)=1.7531, \quad t_{0.025}(15)=2.1315\\
&t_{0.05}(19)=1.7291, \quad t_{0.025}(19)=2.0930
\end{aligned}
$$

概率统计试卷

一、填空题

1、若 A B 既独立又互不相容，则________________

2、设随机事件 A、B 及和事件 A+B 的概率分别是 0.4，0.3 和 0.6，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，则 $P(A\overline{B}) =$ ________________

3、设离散随机变量 X 的概率分布为 $P(X=n)=ap^n$，$n=0,1,2\cdots$ 且 X 取奇数值的概率为 $\frac{3}{7}$，则 a = ____________；p =____________

4、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x\in[1,3] \\ \frac{2}{9} & x\in[3,6] \\ 0 & 其他\end{cases}$，若 k 使得 $P(X\ge k)=2/3$，则 k 的取值范围是________________

5、若随机变量 X 服从均值为 2，方差为 σ^2 的正态分布，且 $P(2<X<4)=0.3$，则 $P(X<0)=$ ________________

6、设 X 与 Y 均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，而且 $P(X\le 2, Y\le -2)=\frac{1}{4}$，则 $P(X>2, Y>-2)=$________________

7、设在总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为 16 的样本（μ，σ^2 未知），求 $P\{S^2/\sigma^2 \le 2.04\}=$________________

8、设总体 $X\sim N(2,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_9$ 来自总体 X 的一个样本，$\overline{X}$ 在区间[1, 2]中取值的概率为________________

9、由来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$，容量为 9 的简单随机样本，若得到样本均值 $\overline{X}=5$，则未知参数 μ 的置信度 0.95 的置信区间是________________（注：$\mu^{0.05}=1.960$）

二、计算题

1. 设有来自三个地区的各 10 名，15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份，

7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份，⑴ 求先抽到的一份是女生表的概率？⑵ 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率？

2.某种化合物中酒精含量的百分比 X 是一随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}20x^3(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

假设该化合物的成本为每升 C_3 元，而销售价格与酒精百分含量 X 有关：当 $1/3<x<2/3$ 时销售价格每升 C_1 元，否则每升 C_2 元。试求（1）随机变量 X 的分布函数 $F(X)$；

⑵概率 $P\{X\le 2/3\}$；　⑶每升利润 Y 的概率分布

3. 游客乘电梯从底层到电视塔的顶层观光，电梯于每个整点的第 5 分钟，25 分钟和 55 分钟从底层起行，一游客在早八点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在[0，60]上服从均匀分布，求该游客等候时间 Y 的数学期望。

4. 设随机变量 X,Y 相互独立，并且在 $[0,9]$ 上服从均匀分布，求随机变量函数 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布密度函数。

5. 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]$ 其中 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态分布密度函数，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 $\dfrac{1}{3}$ 和 $-\dfrac{1}{3}$，他们的边缘分布密度函数所对应的随机变量的数学期望都是零，方差都是 1.

⑴ 求随机变量 X 和 Y 的分布密度函数 $f(x)$ 和 $f(y)$，及 X 和 Y 的相关系数；

⑵ 问 X 与 Y 是否独立？为什么？

6. 研究 X ,Y 的线性关系，观察值如下：

X	10	12	14	16	18	20	22	24
Y	37	28	36	40	46	60	59	56

求 Y 对 X 的线性回归方程，并检验其线性关系是否显著？

附表：$t_{0.025}(5)=2.5706$　　$t_{0.025}(6)=2.4469$　　$F_{0.05}(1,6)=5.99$　　$F_{0.05}(1,7)=5.59$

三、应用题

1．一个家庭有若干个小孩，假定生男孩和生女孩是等可能的，令 A={一个家庭有男孩，又有女孩}，B={一个家庭中最多有一个女孩}，对下述情况，讨论 A、B 的独立性

（1）家庭中有两个小孩；　　　　（2）家庭中有 3 个小孩。

2．从数集{1，2，3，4，5}中任意取出一个数，取后放回，b_i表示第 i 次取出的数，记

$B=(b_1,b_2,b_3)^T$，如果三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{bmatrix}$，试求：线性方程组 $Ax=b$ 有解的概率。

四、证明题

1． X,Y 相互独立，证明： $D(XY)=D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X)$。

2．设连续型随机变量 X、Y 相互独立且服从同一分布，证明： $P(X\le Y)=\dfrac{1}{2}$

概率论与数理统计试卷

一．填空（每空 3 分，共 15 分）

1．设两事件 A、B 相互独立，P(A) = 0.2，P(A∪B) = 0.6，则 $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$ =________。

2．设随机变量 $X\sim U[-1,2]$，则 $E\left(X^2\right)$ = ___________。

3．从 0，1，2，…，9 十个数字中任取两个数字，这两个数字恰好一个奇数一个偶数的概率为 ________。

4．设随机变量 X 服从 Poisson 分布，其数学期望是 3，　则 P（$X\geqslant 1$）=___________。

5．已知 X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的样本，$\mu_1=0.4X_1+0.4X_2+0.2X_3$，$\mu_2=0.2X_1+0.2X_2+0.6X_3$，$\mu_3=0.5X_1+0.5X_2$ 为总体均值的无偏估计量，则其中最有效的估计量是 ___________。

二．（10 分）甲乙两箱中装有同种产品，甲箱中装有 3 件正品 2 件次品，乙箱中只有 3 件正品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求（1）乙箱中次品件数 X 的概率分布，（2）从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

三．(12 分) 设随机变量 X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0 & x<-\dfrac{\pi}{2}\\ A(1+\sin x) & |x|\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

求　⑴　A　⑵　X 的分布密度　⑶　X 的数学期望和方差(4)P（$X\le\dfrac{\pi}{3}$）

四．(8 分) 设二维离散型随机变量（X ,Y）的联合分布为：

求　⑴　a ，

⑵　X ，Y 的边缘分布律，

X \ Y	1	2	3
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	a	a

五．(10 分) 两无线电元件 A 和 B 的寿命 X,Y 均服从指数分布，且相互独立，其概率密度分别为

$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$，其中$\alpha,\beta$为常数。

（1）求 B 元件比 A 元件寿命长的概率，（2）若$\alpha>\beta$，试问哪个元件寿命长的可能性大？

六．(10 分) 设总体 X 的分布密度为$f(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1} & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$，　求参数$\lambda$的矩法估计量和极大似然估计量。

七．(10 分) 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取容量为 16 的样本，测得样本平均数$\bar{x}=75$，标准差为 4，求总体均值μ 的 95%的置信区间。

八．(10分)已知某种电子元件的寿命服从正态分布，要求该元件的平均寿命不低于 1500 小时。现从这批元件中随机抽取 20 只，测得平均寿命 1480 小时, 标准差 $S=68$小时，试在水平$\alpha=0.05$下，确定这批元件是否合格。

九．(15 分) 设有（x，y）的如下观测值：（1，6.4），（3，13.8），（5，20.55），（7，28.5），（9，36），试建立y对x的回归直线方程并进行显著性检验（$\alpha=0.05$）。

附表：

$F_{0.05}(1,3)=10.13,\quad F_{0.01}(1,3)=17.44$

$F_{0.05}(1,4)=7.71,\quad F_{0.01}(1,4)=12.22$

$F_{0.05}(1,5)=6.61,\quad F_{0.01}(1,5)=10.01$

$t_{0.05}(6)=1.9342,\quad t_{0.025}(6)=2.4469$

$t_{0.05}(7)=1.8946,\quad t_{0.025}(7)=2.3646$

$t_{0.05}(8)=1.8595,\quad t_{0.025}(8)=2.3060$

$t_{0.05}(10)=1.8125,\quad t_{0.025}(10)=2.2281$

$t_{0.05}(15)=1.7531,\quad t_{0.025}(15)=2.1315$

$t_{0.05}(19)=1.7291,\quad t_{0.025}(19)=2.0930$

概率统计试卷

一、填空题

1、掷两枚骰子，已知两枚骰子点数之和为 7，其中有一颗为 2 点的概率为 _________

2、已知 $X \sim N(5,\sigma^2)$，若 $P(|X-5|<2)=\dfrac{1}{2}$ ，则 $P(X<3)=$ _______

3、设随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

(X,Y)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
P	0.4	0.2	a	b

若 $E(XY)=0.8$，则 $a=$_______，$b=$____________

4、随机变量 X,Y 相互独立且服从同一分布，$P(X=k)=P(Y=k)=(k+1)/3$，$k=0,1$，则 $P(X=Y)=$___________

5、设随机变量 $X \sim U(0,2), Y \sim E(4)$，且相互独立，则 $E(X-2Y)=$ ____ ，$D(X-2Y)=$______

6、设某种保险丝熔化时间 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$（单位：秒），取 $n=16$ 的样本，得样本均值和方差分别为 $\overline{X}=15, S^2=0.36$，则 μ 的置信度为 95%的置信区间为____________

7、设总体 $X \sim N(0,2^2)$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 是来自总体的简单随机样本，则随机变量 $Y=\dfrac{{X_1}^2+{X_2}^2+\cdots {X_{10}}^2}{2({X_{11}}^2+{X_{12}}^2+\cdots+{X_{15}}^2)}$ 服从______________ 分布（须写出自由度）。

二、某厂卡车运送防“非典”用品下乡，顶层装 10 个纸箱，其中 5 箱民用口罩、2 箱医用口罩、3 箱消毒棉花。到目的地时发现丢失 1 箱，不知丢失哪一箱. 现从剩下 9 箱中任意打开 2 箱，结果都是民用口罩，求丢失的一箱也是民用口罩的概率。

三、设随机变量的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

求：（1）方程 $x^2+2Xx+X=0$ 无实根的概率

（2）求 $Y=e^X$ 的概率密度

四、设二维随机变量(X,Y)的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & 其他 \end{cases}$

求：（1）常数 c　　　（2）边缘密度，并判断独立性　　　（3）$P(X+Y<1)$

五、某冶金实验室对锰的熔化点作了四次试验，结果分别为

1269^0C　1271^0C　1263^0C　1265^0C

设数据服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，以 $\alpha=5\ \%$ 的水平作如下检验：

(1) 这些结果是否符合于公布的数字 1260^0C？(2) 测定值的标准差是否不超过 2^0C？

六、已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)(x-5)^{\theta} & 5<x<6 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ $(\theta>0)$，其中 θ 均为未知参数，求 θ 的矩估计量与极大似然估计量。

七、某商店出售某种贵重商品．根据经验，该商品每周销售量服从参数为 $\lambda=1$ 的泊松分布。　假定各周的销售量是相互独立的。用中心极限定理计算该商店一年内（52 周）售出该商品件数在 50 件到 70 件之间的概率。

八、假设儿子的身高（y）与父亲的身高（x）适合一元正态线性回归模型，观察了 10 对英国父子的身高（英寸）如下：

x	60	62	64	65	66	67	68	70	72	74
y	63.6	65.2	66	65.5	66.9	67.1	67.4	63.3	70.1	70

（1）　建立关于的回归方程。

（2）　检验回归方程的显著性。

九、证明：样本均值和样本方差为总体均值和总体方差的无偏估计量。

概率统计试卷

一、填空题

（1）已知随机事件 A,B,C 满足 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$ $P(C)=0.5$，且 A，B 独立，A,C 互不相容，则概率 $P(A-C|AB\cup C)=$________

（2）设 $X\sim E(\lambda)$，则 $P(X>\sqrt{D(X)})=$_______

（3）设 $x_1,x_2\cdots x_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ 和 σ 未知，记 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ Q^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，则假设 $H_0:\mu=0$ 的 t 检验使用统计量为____________

（4）将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 与 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于______

（5）如果每次试验成功的概率为 P，并且已知在三次独立重复试验中至少成功一次的概率为 $\frac{19}{27}$，则 $P=$_______

二、在电源电压不超过 $200V$，在 $200V\sim240V$ 和超过 $240V$ 三种情况下，某电子元件损坏的概率分别为 $0.1,0.001,0.2$ 假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220,25^2)$，试求（1）该电子元件损坏的概率；（2）该电子元件损坏时，电源电压在 $200V\sim240V$ 的概率。

三、设连续性随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-a\\ A+B\arcsin\frac{x}{a}, & -a\le x<a\quad(a>0)\\ 1 & x\ge a\end{cases}$$

求：（1）A 和 B；（2）概率密度 $f(x)$；（3）$P(0<x<a)$

四、将两封信等可能的投入编号为1,2,3三个邮筒中，设 X,Y 分别表示投入第1号、第2号邮筒中信的数目，求（1）(X,Y) 的联合分布；（2）X 与 Y 是否相互独立？（3）$Y=0$ 时 X 的条件分布率？

五、设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}(1+\theta)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ $(\theta>-1)$ 为未知参数，试由样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 分别用矩估计法和极大似然估计法，求 θ 的估计量。

六、某校从经常参加体育锻炼的男生中随机地选出50名，测得平均身高174.34厘米；从不经常参加体育锻炼的男生中随机地选出50名，测得平均身高172.42厘米。统计资料表明两种男生的身高都服从正态分布，其标准差分别为5.35厘米和6.11厘米，问该校经常参加体育锻炼的男生是否比不经常参加体育锻炼的男生平均身高要高些？$(\alpha=0.05)$

七、对于一元线性回归 $Y_{i_i} = a + bx_i + e_i \ (i = 1,2,\cdots 10)$ 假设 $e_1, e_2 \cdots e_{10}$ 独立同分布 $N(0,\sigma^2)$，已知回归平方和在总平方和中所占比重为 0.6，检验回归效果是否显著？$(\alpha = 0.05)$

八、证明题

设 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，

$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \cdots + X_6)$，$Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9)$，

$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}(X_i - Y_2)^2$，$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$

证明：统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布。

概率统计试卷

一、填空

（1）设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=k)=a\dfrac{\lambda^k}{k!}\,(k=0,1,2\cdots)$ $\lambda>0$ 则 $a=$______

（2）两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2，则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是________

（3）随机事件 A 与 B 互不相容，且 $A=B$，则 $P(A)=$________

（4）假设 A,B 是两个随机事件，且 $AB=\overline{A}\overline{B}$，则 $A+B=$________，$AB=$_______

（5）设 x_1,x_2,x_3,x_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，$X=a(x_1-2x_2)^2+b(3x_3-4x_4)^2$，则当 $a=$______ $b=$______统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为______

二、12 个乒乓球都是新球，每次比赛时取出 3 个用完后放回去，求第三次比赛时取到的 3 个球都是新球的概率。

三、设某班车起点站上车人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 P $(0<P<1)$，且中途下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数，求：

（1）在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 个人下车的概率。

（2）二维随机变量 (X,Y) 的概率分布。

四、设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D:0<x<1,|y|<x$ 内服从均匀分布，求关于 X 的边缘分布密度及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差。

五、一个复杂系统有 100 个相互独立的元件组成，在系统运行期间每个元件损坏的概率为 0.1，又知为使系统正常运行，至少有 85 个元件工作，求系统的可靠度（即正常运行的概率）；（2）上述系统假如有 n 个相互独立的元件组成，而且又要求至少有 80% 的元件工作才能使整个系统正常运行，问 n 至少为多大时才能保证系统的可靠度为 0.95？

六、设总体 X 的密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}} & x>0,\theta>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$X_1,X_2\cdots X_n$ 为简单的随机样本，求 θ 得最大似然估计，并问这个估计量是否为无偏估计量？

七、已知某工厂生产的滚珠直径服从正态分布，按照规定平均直径为 5 毫米，标准差不超过 0.5 毫米，现从这批滚珠中随机抽取 9 个，测得其平均直径为 4.78 毫米，样本标准差为 0.6 毫米，问这批滚珠的质量是否符合规定标准？

八、在土质，面积，种子相同的条件下种植的 8 块试验田上的小麦产量 Y 与化肥用量 X 有如下表数据。$Y\sim N(\mu.\sigma^2)$

小麦产量Y	266	340	356	372	389	404	420	435
化肥用量 X	15	18	21	24	27	30	33	36

（1）建立小麦产量Y与化肥用量X的回归方程；

（2）检验回归效果是否显著；$\alpha = 0.05$

九、假设$X_1, X_2 \cdots X_n$相互独立同分布，$E(X_i^k) = a_k \ (i = 1,2,3,4)$，证明当$n$充分大时，随机变量$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$近似服从正态分布，并指出其分布参数。

概率综合练习（七）答案

一、（1）e^{-1} （2）44（3）0（4）Ω，ϕ（5）$\frac{1}{20},\frac{1}{100},2$

二、设 A_i，B_i 分别表示第二、三次比赛时取到 i 个新球，$i=0,1,2,3$ 易见 A_0,A_1,A_3,A_4 构成一个完备事件组，且 $P(A_i)=\frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3}$，$P(B_3|A_i)=\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}$，$(i=0,1,2,3)$

应用全概率公式得 $P(B)=\sum_{i=1} P(A_i)P(B|A_i)=\frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3}\ \frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}\approx 0.146$

三、设 A 表示发车时有 n 个乘客，B 表示中途有 m 个人下车，则在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 个人下车的概率是一条件概率 $P(B|A)=P(Y=m|X=n)$ 根据二项概率，

有 $P(B|A)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$

（2）由于 $P(X=n,Y=m)\ P(AB)=P(B|A)P(A)$，并且上车人数 $X\sim P(\lambda)$ 因此

$P(A)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ 于是有 $(X,Y)\sim P(X=n,Y=m)=C_n^mP^m(1-P)^{n-m}\times\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

四、(X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1,|y|<x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

于是 X 的边缘密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$D(Z)=D\text{（}2X+1)=[E(X^2)-E^2(X)]=4[\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx-(\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx)^2]=\frac{2}{9}$

五、设 $X_i=\begin{cases}1 & \text{第}k\text{个元件正常工作}\\ 0 & \text{第}k\text{个元件损坏}\end{cases}$

又设 X 为系统正常运行时完好的元件数，于是 $X=\sum_{i=1}^{100}Xi$，又题设可知

$X_k(k=1,2,3,\cdots 100)$ 服从 $0-1$ 分布

$X=\sum_{i=1}^{100}X_k\sim B(100,0.9)$

于是 $E(X)=np=100\times0.9=90\ D(X)=npq=100\times0.9\times0.1=9$

故所求概率为

$P(X>85)=1-P\left(X\le 85\right)=1-\phi(\frac{85-90}{\sqrt{9}})=1-\phi(-\frac{5}{3})=\phi(1.67)=0.9525$

（ 2 ） $P(X\ge 0.8n)=0.95$ $E(X)=0.9n$ ， $D(X)=0.09n$ ， 从 而

$P(X\ge 0.8n)=1-\phi(\frac{0.8n-0.9n}{\sqrt{0.09n}})=\phi(\frac{\sqrt{n}}{3})$ 故 $\phi(\frac{\sqrt{n}}{3})=0.95$，查表得 $\frac{\sqrt{n}}{3}=1.645$，

$n=24.35$，取 $n=25$

六、$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{2\theta}}\prod_{i=1}^{n}X_i$

$\ln L=-n\ln\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i$

$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$

令 $\frac{d\ln L}{d\theta}=0$ 解出 $\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i$，

（2）$E(\hat{\theta})=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i{}^2)=\ \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X^2)$

又 $E(X^2)=+\infty\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\int_0^{+\infty}2\theta\frac{x^2}{2\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}d\frac{x^2}{2\theta}=2\theta\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=2\theta$

所以 $\hat{\theta}$ 是 θ 无偏估计量。

七、设滚珠直径为 $X, X\sim(\mu,\sigma^2)$

假设 $H_0:\mu=5,\ H_1:\mu\ne 5$

由于方差未知故用 T 检验， $n=9$ $\alpha=0.05$ $t_{0.025}(8)=2.31$，假设 H_0 的否定域为

$V=\{|T|\ge 2.31\}$，$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{4.78-5}{\frac{0.6}{\sqrt{9}}}=-1.1$

由于 $|T|=1.1<2.31$ 所以不能否定假设 H_0，即可以认为平均直径符合规定

（2）假设 $H_0:\sigma^2\le 0.5^2$，$H_1:\sigma^2>0.5$

对方差的检验用χ^2分布，$\chi_{0.05}{}^2(8)=15.507$，故否定域为$W=\{\chi^2>15.507\}$

$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0}=\dfrac{8\times 0.6^2}{0.5^2}=11.52$由于$11.52<15.5.7$，所以不否定假设$H_0$，即认为标准差符合规定，综上，可以认为这批滚珠符合规定。

八、（1）利用公式得回归方程$\bar{Y}=196.29+6.92X$

（2）$Q_e=6S_e{}^2=1993.12$，总平方和$Q_T=\sum_{j=1}^{n}Y_j{}^2-n\bar{Y}=20097.52$

回归平方和$Q_R=Q_T-Q_e=20097.52-1993.12=18104.40$

统计量$F=\dfrac{Q_R}{Q_e/6}=\dfrac{18104.40}{332.19}=54.501$

$F_{0.05}(1.6)=5.99$，由于$F=54.501>F_{0.05}(1,6)=5.99$可见回归效果显著。

九、由于$X_1,X_2\cdots X_n$相互独立同分布，所以$X_1{}^2,X_2{}^2\cdots X_n{}^2$也相互独立同分布，并且有

$E(X_i{}^2)=a_2\Leftrightarrow\mu_0$，$D(X_i{}^2)=E\left(X_i{}^2\right)-E(X_i{}^2)^2=a_4-a_2{}^2\Leftrightarrow\sigma_0{}^2$根据中心极限定理，

当n充分大时，nZ_n即$\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2$近似服从正态分布$N(n\mu_0,n\sigma_0{}^2)$，因此当n充分大时Z_n也

近似服从正态分布，其中参数$\mu=E(X)=a_2$，$\sigma^2=D(Z_n)=\dfrac{1}{n}(a_4-a_2{}^2)$

概率统计试卷

一、填空题

1. 设 A, B 为两随机事件，已知 $P(A)=0.7=0.3+P(B)$，$P(A\cup B)=0.8$，则 $P(A\mid\overline{A}\bigcup B)=$ _____

解：因为 $P(A)=0.7=0.3+P(B)$，所以 $P(B)=0.4$；因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

所以 $P(AB)=0.3$，$P(A\mid\overline{A}\bigcup B)=\dfrac{P(A(\overline{A}\bigcup B))}{P(\overline{A}\bigcup B)}=\dfrac{P(AB)}{1-P(A\overline{B})}=\dfrac{0.3}{1-(0.7-0.3)}=\dfrac{1}{2}$

2、一射手向同一目标独立射击四次,若至少命中一次的概率为15/16,则该射手的命中率为_______

解：设 p 为命中率，$A=$“至少命中一次”，$\overline{A}=$“一次都没命中”

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-p)^4=15/16\text{，所以 } p=\frac{1}{2}$$

3、已知 $X\quad N(2,\sigma^2)$，P(0<X<2)=0.24，则 P(2<X<4)=_____________

解：

画图说明

4、设 $X\sim N(0,1), Y\sim N(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立，则 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)=$ ________，

$E(3X+5Y)=$ _______ ，$D(X-2Y)=$ _________ 。

解：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$E(3X+5Y)=3E(X)+5E(Y)=0$

$$D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)=5$$

5、设 X_1, X_2, X_3, X 是来自正态总体 $N(0,9)$ 的一个简单随机样本，$\xi=\dfrac{(X_2+X_3+X_4)^2}{3X_1^2}$ 服从

___________分布（须写出自由度）。

解：因为 $X_2+X_3+X_4\sim N(0,27)$　$X_1\sim N(0,9)$，所以 $(\dfrac{X_2+X_3+X_4}{3\sqrt{3}})^2\sim\chi^2(1)$　$(\dfrac{X_1}{3})^2\sim\chi^2(1)$

所以 $\dfrac{(X_2+X_3+X_4)^2}{3X_1^{\ 2}}=(\dfrac{X_2+X_3+X_4}{3\sqrt{3}})^2\Big/(\dfrac{X_1}{3})^2\sim F(1,1)$

6、已知 X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的样本，$\hat{\mu}_1=aX_1+bX_2+0.5X_3$，$\hat{\mu}_2=aX_1+2bX_2+0.2X_2$，为总体均值的无偏估计量，则 $a=$ _____ ，$b=$ ______ ，其中最有效的估计量是_______。

解：因为$\hat{\mu}_1$，$\hat{\mu}_2$为总体均值的无偏估计量，所以$\begin{cases} a+b+0.5=1 \\ a+2b+0.2=1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=0.2 \\ b=0.3 \end{cases}$

系数平方和最小的为最有效的估计量，所以最有效的为$\hat{\mu}_1$

二、甲、乙、丙3位同学同时独立参加《概率论与数理统计》考试，不及格的概率分别为$0.4, 0.3, 0.5$

（1）求恰有两位同学不及格的概率；

（2）如果已经知道这3位同学中有2位不及格，求其中一位是同学乙的概率。

解：设A_1, A_2, A_3分别表示“甲不及格”、“乙不及格”、“丙不及格”三事件，由题意知A_1, A_2, A_3相互独立，

令A ＝“恰有2位不及格”，则

$$A = A_1A_2\bar{A}_3 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3$$

（1）$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2\bar{A}_3) + P(A_1\bar{A}_2A_3) + P(\bar{A}_1A_2A_3) \\ &= 0.4\times0.3\times0.5 + 0.4\times0.7\times0.5 + 0.6\times0.3\times0.5 \\ &= 0.29 \end{aligned}$$

（2）$$\begin{aligned} P(A_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3 \mid A) &= \frac{P(A_1A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1A_2A_3)}{P(A)} \\ &= \frac{0.4\times0.3\times0.5 + 0.6\times0.3\times0.5}{0.29} \\ &= \frac{15}{29} \end{aligned}$$

三、设随机变量ξ, η独立同分布，$P(\xi = i) = \frac{1}{3} \quad (i = 1,2,3)$，设$X = \max(\xi, \eta)$，

$Y = \min(\xi, \eta)$，试求二维随机变量(X, Y)的联合分布律。

解：

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

五、设随机变量$X = \begin{cases} 1, & \text{事件}A\text{发生} \\ -1, & \text{事件}A\text{不发生} \end{cases}$；$Y = \begin{cases} 1, & \text{事件}B\text{发生} \\ -1, & \text{事件}B\text{不发生} \end{cases}$，若

$P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cap B) = 0.2,$ 求$Z = XY$的分布律。

解：$P(AB)=0.2, P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3$ （3 分）

$P(\overline{A}B)=P(B-AB)=0.2,\quad P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)=0.3$ （6 分）

所以 X,Y 的联合分布律为

X \ Y	1	-1
1	0.2	0.3
-1	0.2	0.3

$Z=XY$ 的分布律为

Z	-1	1
P	0.5	0.5

二、设 X 的密度函数为已知：$f(x)=\begin{cases} ax & 0<x<2 \\ cx+b & 2\le x<4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 已知 E(X) = 2，P(1<X<3) = $\dfrac{3}{4}$ ，

求：（1）a，b，c；（2）随机变量 $Y=e^X$ 的数学期望和方差。

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2 axdx+\int_2^4(cx+b)dx$

$$=a\frac{x^2}{2}\Big|_0^2+\left(c\frac{x^2}{2}+bx\right)\Big|_2^4=2a+2b+6c=1$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 ax^2dx+\int_2^4(cx+b)xdx$$

$$=a\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+\left(c\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^4=\frac{8}{3}a+6b+\frac{56}{3}c=2$$

$$P(1<X<3)=\int_1^2 axdx+\int_2^3(cx+b)dx$$

$$=a\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+\left(c\frac{x^2}{2}+bx\right)\Big|_2^3=\frac{3}{2}a+b+\frac{5}{2}c=\frac{3}{4}$$

则：$a=\dfrac{1}{4}$，$b=1$，$c=-\dfrac{1}{4}$

（2）$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^x f(x)dx=\int_0^2\frac{x}{4}e^xdx+\int_2^4\left(1-\frac{x}{4}\right)e^xdx$

$$=\frac{(x-1)e^x}{4}\Big|_0^2+\left(e^x-\frac{(x-1)e^x}{4}\right)\Big|_2^4=\frac{(e^2-1)^2}{4}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2x}f(x)dx=\int_0^2\frac{x}{4}e^{2x}dx+\int_2^4\left(1-\frac{x}{4}\right)e^{2x}dx$$

$$=\frac{(2x-1)e^{2x}}{16}\Bigg|_0^2+\left(\frac{e^{2x}}{2}-\frac{(2x-1)e^{2x}}{16}\right)\Bigg|_2^4=\frac{(e^4-1)^2}{16}$$

$$D(Y)=\frac{e^2(e^2-1)^2}{4}$$

四、在长为 1 的线段上任选两点，求两点间距离的数学期望与方差

解：设 X,Y 为线段上两点，所以 $X,Y\sim U(0,1)$

因为 X,Y 互不影响，相互独立，所以 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

两点间距离为 $|X-Y|$

所以 $E（|X-Y|）=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1|x-y|dxdy$

$$=\int_0^1[\int_0^x(x-y)dy+\int_x^1(y-x)dy]dx$$

$$=\int_0^1(x^2-x+\frac{1}{2})dx=\frac{1}{3}$$

$$E（|X-Y|^2）=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|^2 f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1(x-y)^2dxd$$

$$=\int_0^1(\frac{(1-y)^3}{3}+\frac{y^3}{3})dy=\frac{1}{6}$$

$$D（|X-Y|）=E（|X-Y|^2）-E（|X-Y|）=\frac{1}{18}$$

五、某彩电公司每月生产 20 万台背投彩电，次品率为 0.0005. 检验时每台次品未被查出的概率为 0.01. 试用中心极限定理求检验后出厂的彩电中次品数超过 3 台的概率.

解：设 $X_i=\begin{cases}1 & \text{第 } i \text{ 台彩电为次品且未被查出}\\ 0 & \text{其　　　他}\end{cases}\quad i=1\sim 2\times10^5$

$$E(X_i)=5\times10^{-6},\quad D(X_i)=5\times10^{-6}(1-5\times10^{-6})$$

经检验后的次品数 $Y=\sum_{i=1}^{2\times10^5}X_i$，$E(Y)=1$，$D(Y)=1-5\times10^{-6}$，

由中心极限定理，近似地有 $Y\sim N(1,1-5\times10^{-6})$

$$P(Y>3)=1-P(Y\le3)\approx1-\Phi\left(\frac{3-1}{\sqrt{1-5\times10^{-6}}}\right)\approx1-\Phi(2)=0.0228.$$

六、设总体 $X\sim P(\lambda)$，λ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的一个样本，试求未知参数 λ 的最大

似然估计量。

解：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本的一个观测值，这时似然函数为

$$L(\lambda)=\coprod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!}\right)=\left(\coprod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)e^{-n\lambda}$$

$$\ln L(\lambda)=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln\lambda-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)$$

$\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\dfrac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)}{\lambda}-n=0$，解得最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$

所以最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\overline{X}$

八、某种仪器间接测量温度，重复测量 7 次，测得温度（单位：℃）分别为：120.5，114.2，111.5，114.6，113，112.8，113.9，设温度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，在置信度为 95%的条件下，求温度的真值所在的范围。

解：　置信区间为 $(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}})$

由题目已知条件可得：$\overline{X}=114.4, S=2.9, \sqrt{7}=2.6$

查表，得 $t_{\frac{0.05}{2}}(7)=2.3646$，故 $t_{\frac{0.05}{2}}(7)\dfrac{S}{\sqrt{7}}=2.3646\times\dfrac{2.9}{2.6}=2.64$，

所以 $\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(7)\dfrac{S}{\sqrt{7}}=111.76$，$\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(7)\dfrac{S}{\sqrt{7}}=117.04$，

从而置信区间是 $(111.76,117.04)$，即温度的真值范围是 $(111.76,117.04)$

九、研究 Y 与 X 的线性关系，观察值如下：

X	10	12	14	16	18	20	22	24
Y	37	28	36	40	46	60	59	56

求 Y 对 X 的线性回归方程，并检验其线性关系是否显著？（$\alpha=0.05$)

解：假设一元线性回归方程为 $y=a+bx$

因为 $\bar{x}=17$,　　$S_x{}^2=24$,　　$S_{xx}=(n-1)S_x{}^2=168$

$$\overline{y}=45.25 \qquad S_y^{\ 2}=143.07, \qquad S_{yy}=(n-1)S_y^{\ 2}=1001.5$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=366,$$

所以 $\hat{b}=\dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}=\dfrac{366}{168}=2.1786, \qquad \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=45.25-2.1786\times 17=8.2138$

所以线性回归方程为 $y=8.2138+2.1786x$

$$U=\hat{b}S_{xy}=2.1786\times 366=797.3676, \qquad Q=S_{yy}-\hat{b}S_{xy}=204.1324$$

$$F=\frac{U/1}{Q/(n-2)}=\frac{797.3676/1}{204.1324/6}=23.4368,$$

$$F_{0.05}(1,n-2)=F_{0.05}(1,6)=5.99,$$

因为$F>F_{0.05}$,所以Y与X的线性关系显著。

概率统计试卷

一、填空（每空 2 分，共 20 分）

1、设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\bigcup B)=0.6$，则 $P(AB)=$ ________ ，$P(\bar{A}B)=$ ______

2、一批种子出苗率为 0.8，现在每穴种 3 粒种子，则恰有两粒出苗的概率________

3、设随机变量的 X 概率密度为 $f(x)=ce^{-x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则常数 $c=$ __________

4、(X_1,X_2,X_3) 为来自总体 $N(0,9)$ 的样本，则 $\dfrac{{X_1}^2+{X_2}^2+{X_3}^2}{9}\sim$ ______________

5、设 $X\sim N(\mu,2^2)$，容量 $n=9$，均值 $\bar{X}=3.5$，则参数 μ 的置信度 0.95 的置信区间为___________

6、已知 X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的样本，$\hat{\mu}_1=0.2X_1+0.2X_2+0.6X_3$，$\hat{\mu}_2=0.3X_1+0.3X_2+0.3X_2$，$\hat{\mu}_3=0.3X_1+0.3X_2+0.4X_2$ 为总体均值的估计量，则无偏估计量为 _________，最有效的估计量是 _______。

7、设随机变量 $X\sim U(1,2),Y\sim E(2)$，且相互独立，则 $E(X-2Y)=$ _________ ，$D(X-2Y)=$_________

二、（10 分）设 A、B、C 三个地区居住人口相同，当爆发某种流行病，三个地区感染此病的比例分别为 20%，45%，25%，现从这三个地区任取一人，问：

（1）此人感染此病的概率是多少？　　（2）若此人感染此病，则此人来自 B 取得概率为多少？

三、（8 分）某学生给母亲、哥哥、妹妹各写了一封信，信写好后，取来了 3 个信封，分别写上收信人地址及姓名，匆忙中，在每个信封中随意的装入一封信就寄出了。母亲、哥哥、妹妹收到信后，全都啼笑皆非，因为每人收到的都是寄给他人的信，那么此事发生的概率有多大？

四、（12 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}a-|x| & |x|\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$

求 （1）系数 a　　（2）分布函数　　（3） $E(X)$，$D(Y)$

五、（14 分）设 $(X,Y)\sim U(D)$，D 是由 $y=x$，$y=-x$，$y=1$ 三条直线围成的区域

求（1）方程 $x^2+2Yx+X=0$ 无实根的概率　　（2）$E(XY)$　　（3）$f_X(x)$　$f_Y(y)$ 并判断 X 与 Y 是否相互独立？

六、（10 分）设随机变量 X 的分布密度为：$f(x)=\begin{cases}(\lambda-1)e^{-(\lambda-1)x} & x\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}$，（$\lambda>1$）求参数 λ 的矩估计量和极大似然估计量。

七、（10 分）某鱼塘水中的含氧量，多年平均为 4.5（ml/L）,现在该鱼塘设 16 个点采集水样，测定样本

均值为 4.43，标准差为 0.34，试检验该次抽样测定的水中含氧量中与多年平均值有无显著差别？（$\alpha = 0.05$）并简述假设检验的原理和思想。

八、（10 分）研究Y与X的线性关系，观察值如左：

X	2	4	6	8	10
Y	2.3	3.5	4	5.7	7

求Y对X的线性回归方程，并检验其线性关系是否显著？

九、（6 分）报名听“考研辅导班”的学生人数是均值为100的泊松变量。负责这门课程的老师决定，若报名人数不少于 120 人，就分成两个班上课；若少于 120 人，就集中一个班讲授，试问将两个班上课的概率为多少？（$\Phi(0.2) = 0.5793$）

参考公式：

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \qquad \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - n\overline{x}^2 = (n-1)S_x^{\ 2} \qquad S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\ 2} - n\overline{y}^2 = (n-1)S_y^{\ 2}$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\cdot\overline{y}$$

附表：

F 分布临界值表(α=0.01)

n_2 \ n_1	1	3	4	5
1	4052	5403	5626	5764
3	34.12	29.46	28.71	28.24
4	21.20	16.69	15.98	15.52
5	16.26	12.06	11.39	10.97

F 分布临界值表(α=0.05)

n_2 \ n_1	1	3	4	5
1	161.4	215.7	224.6	230.2
3	10.13	9.28	9.12	9.01
4	7.71	6.59	6.39	6.26
5	6.61	5.41	5.19	5.05

$u_{0.05} = 1.645 \qquad t_{0.05}(16) = 1.745 \qquad t_{0.05}(15) = 1.7351$

$u_{0.025} = 1.96 \qquad t_{0.025}(16) = 2.119 \qquad t_{0.025}(15) = 2.1315$

概率论与数理统计试卷

一．填空（每空 3 分，共 15 分）

1．设两事件 A、B 互斥，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.6$，则 $P\left(A\cup\overline{B}\right)$ =________。

2．设随机变量 $X\sim U[1,4]$，则 $D(2X-1)$ = ___________。

3．从 0，1，2，⋯，9 十个数字中任取两个数字，这两个数字均为偶数的概率为 ________。

4．设随机变量 X 服从 Poisson 分布，其数学期望是 5， 则 P（$X\geqslant1$）=___________。

5．已知 X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的样本，$\mu_1=0.4X_1+0.3X_2+0.3X_3$，$\mu_2=0.2X_1+0.2X_2+0.6X_3$，$\mu_3=0.5X_1+0.5X_2$ 为总体均值的无偏估计量，则其中最有效的估计量是 ___________。

二．（10 分）甲乙两箱中装有同种产品，甲箱中装有 2 件正品 2 件次品，乙箱中只有 2 件正品。从甲箱中任取 2 件产品放入乙箱后，求（1）乙箱中次品件数 X 的概率分布，（2）从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

三．(10 分) 设随机变量 X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ A\left(1+x^3\right) & |x|\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$

求 (1) A (2) X 的分布密度 (3) X 的数学期望和方差 （4）P（$X\le\frac{1}{2}$）

四．(10 分) 设二维离散型随机变量（X ,Y）的联合分布为：

求 (1) a ， (2) X ，Y 的边缘分布律

X \ Y	1	2	3
0	0.3	0.2	0.1
1	0.1	a	a

五．(10 分) 两无线电元件 A 和 B 的寿命 X,Y 均服从指数分布，且相互独立，其概率密度分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$，其中 α,β 为常数。

（1）求 B 元件比 A 元件寿命长的概率， （2）若 $\alpha>\beta$，试问哪个元件寿命长的

可能性大？

六．(10 分) 设总体 X 的分布密度为 $f(x)=\begin{cases}(\lambda+1)x^{\lambda} & 0<x<1 \\ 0 & \end{cases}$ ， 求参数 λ 的矩法估计量和极大似然估计量。

七．(10 分) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取容量为 16 的样本，测得样本平均数 $\bar{x}=9$，标准差为 2，求总体均值 μ 的 95%的置信区间。

八．$(10分)$已知某种电子元件的寿命服从正态分布，要求该元件的平均寿命不低于 1000 小时。现从这批元件中随机抽取 20 只，测得平均寿命 980 小时，标准差 $S=65$小时，试在水平$\alpha=0.05$下，确定这批元件是否合格。

九．(15 分) 设有（x，y）的如下观测值：（1，6.4），（3，13.8），（5，20.55），（7，28.5），（9，36），

试建立 y 对 x 的回归直线方程并进行显著性检验（$\alpha=0.05$）。

附表：

$F_{0.05}(1,3)=10.13,\quad F_{0.01}(1,3)=17.44$

$F_{0.05}(1,4)=7.71,\quad F_{0.01}(1,4)=12.22$

$F_{0.05}(1,5)=6.61,\quad F_{0.01}(1,5)=10.01$

$t_{0.05}(6)=1.9342,\quad t_{0.025}(6)=2.4469$

$t_{0.05}(7)=1.8946,\quad t_{0.025}(7)=2.3646$

$t_{0.05}(8)=1.8595,\quad t_{0.025}(8)=2.3060$

$t_{0.05}(10)=1.8125,\quad t_{0.025}(10)=2.2281$

$t_{0.05}(15)=1.7531,\quad t_{0.025}(15)=2.1315$

$t_{0.05}(19)=1.7291,\quad t_{0.025}(19)=2.0930$