广东海洋大学 2017-2018 学年第一学期

《数学分析 3》课程试题 (A 卷) 参考答案

一、填空题 (共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分)

1	2	3	4
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	(6,3,2)	3	$\int_0^4 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_4^6 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{3}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x$

二、判断题 (共 4 小题，每小题 2 分，共 8 分)

1	2	3	4
×	√	√	√

三、计算题 (共 8 小题，每小题 9 分，共 72 分)

1. 用 Lagrange 乘数法求表面积一定而体积最大的长方体。

解．设长方体三边长 a, b, c, 表面积 $S = 2(ab+bc+ac)$, 体积 $V = abc$. ——2'
构造 *Lagrange* 函数 $L(a,b,c,\lambda) = abc + \lambda(2(ab+bc+ac) - S)$, ——4'
由 $L_a = L_b = L_c = L_\lambda = 0$ 得稳定点 $\left(\sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}}\right)$. ——7'
由于体积存在最大值，故唯一的稳定点就是最大值点，最大值为 $V_{\max} = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}}$. ——9'

□

2. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，其中 $y = y(x)$ 是由方程 $y^x = x^y$ 所确定的隐函数。

解．方程 $y^x = x^y$ 两端同时求对数，得 $x \ln y = y \ln x$， ——2'
上市两端对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数，有

$$\ln y + xy'/y = y' \ln x + y/x,$$

——6'

化简得 $y' = \dfrac{y^2 - xy\ln y}{x^2 - xy\ln x}$。 ——9'

□

3. 已知 $z = \ln x \ln y, x = u + v, y = u - v$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$。

解． 由链式法则，

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{x}\ln y+\frac{1}{y}\ln x=\frac{\ln(u-v)}{u+v}+\frac{\ln(u+v)}{u-v},$$

——*4'*

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{x}\ln y-\frac{1}{y}\ln x=\frac{\ln(u-v)}{u+v}-\frac{\ln(u+v)}{u-v}.$$

——*9'*

□

4. 求 $I'(x)$，其中 $I(x)=\int_{3x}^{x^3}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y$。

解． 直接计算得

$$\begin{aligned}I'(x)=&\int_{3x}^{x^3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y+\frac{\sin(x^4)}{x^3}\cdot 3x^2-\frac{\sin(3x^2)}{3x}\cdot 3------3'\\=&\int_{3x}^{x^3}\cos(xy)\mathrm{d}y+\frac{3\sin(x^4)-\sin(3x^2)}{x}------6'\\=&\frac{\sin(xy)}{x}\Big|_{y=3x}^{y=x^3}+\frac{3\sin(x^4)-\sin(3x^2)}{x}\\=&\frac{4\sin(x^4)-2\sin(3x^2)}{x}.\end{aligned}$$

——*9'*

□

5. 求第一型曲线积分 $\int_\Gamma(x+2y+3z)\mathrm{d}s$，其中 Γ 是螺旋线 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$ 在 $t\in[0,2\pi]$ 的一段。

解．

$$\int_\Gamma(x+2y+3z)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(a\cos t+2a\sin t+3bt)\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\mathrm{d}t$$

$$------3'$$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{a^2+b^2}(a\sin t-2a\cos t+\frac{3}{2}bt^2)\Big|_0^{2\pi}------6'\\&=6\pi^2 b\sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

——*9'*

□

6. 求第一型曲面积分 $\iint_S(x^4-y^4+y^2z^2-z^2x^2+1)\mathrm{d}S$, 其中 S 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 割下的部分。

解． $S=S_1\cup S_2$, 其中 S_1 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, S_2 是 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$, S_1,S_2 在 xy 平面上的投影 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2x\}$, $\mathrm{d}S_1=\mathrm{d}S_2=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. ——*4'*

于是,

$$\begin{aligned}\iint_S(x^4-y^4+y^2z^2-z^2x^2+1)\mathrm{d}S =&2\sqrt{2}\iint_D[x^4-y^4+(y^2-x^2)(x^2+y^2)+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&2\sqrt{2}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}S_D=2\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

——*9'*

□

7. 求二重积分 $\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{x}\}$。

解．

$$\begin{aligned}\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y------2'\\ &=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}}\mathrm{d}x------4'\\ &=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x------6'\\ &=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{14}{15}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1------8'\\ &=\frac{128}{105}.------9'\end{aligned}$$

□

8. 用极坐标变换计算二重积分 $\iint_D(2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2x\}$。

解． 做极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 区域 D 转化为 $\Delta=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta,-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}$. ——*3'*

因此,

$$\begin{aligned}\iint_D(2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_\Delta r^2(2\cos\theta-3\sin\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta------4'\\ &=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2(2\cos\theta-3\sin\theta)\mathrm{d}r------6'\\ &=\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta(2\cos\theta-3\sin\theta)\mathrm{d}\theta------7'\\ &=\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(1+2\cos2\theta+\frac{1+\cos4\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta+\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}3\cos^3\theta\mathrm{d}\cos\theta\\ &------8'\\ &=2\pi.------9'\end{aligned}$$

□

四、证明题 (共 2 小题，每小题 4 分，共 8 分)

1. 证明含参变量无穷限积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x^2}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛。

   证明．因为 $\left|\frac{\sin(tx)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$, ——*1'*
   而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, ——*2'*
   由 M 判别法, 含参变量无穷限积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x^2}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛. ——*4'*
   □

2. 证明：如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续。

   证明．由 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微, 有 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, 其中 A,B 是常数, α,β 是当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时的无穷小. ——*2'*
   因此 $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z = 0$, 即, $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)$, 此即表明 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. ——*4'*
   □