概率论期末总复习

第一章　随机事件和概率

1、 频率与概率
2、 古典概率定义
3、 几何概率定义
4、 主要公式

（1） $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$AB = \phi$时，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

（2） $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

$B \subset A$时，$P(A - B) = P(A) - P(B)$

（3） $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(4) $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

(5) $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$

(6) 设$A_1 A_2 ... A_N$是完备事件组，$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A)$

(7)n 重贝努利试验中，事件 A 发生 K 次的概率为

$P_n(K) = C_n^K P^K (1-P)^{n-K}, K = \overline{0,n}$　其中$P = P(A)$

5、 主要例题：例 1、例 3、例 4、例 5、例 6、例 8、例 9、例 10、例 12、例 13、例 15、例 16、例 20、例 22、

6、 主要习题：习题 A 2~6、13～16、20～22、25

例1、　某仓库有一批产品，已知其中 50%、30%、20%依次是甲、乙、丙厂生产的，且甲、乙、丙厂产品的次品率分别为$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{15}$、$\frac{1}{20}$，求这批产品的次品率。

解：设 B＝｛从这批产品中任取一个是次品｝

A_1、A_2、A_3分别表示“取得的产品是甲、乙、丙厂生产的”

则 $P(A_1) = 0.5, P(A_2) = 0.3, P(A_3) = 0.2$

$$P(B/A_1)=\frac{1}{10},P(B/A_2)=\frac{1}{15},P(B/A_3)=\frac{1}{20}$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B/A_i)$$

$$=0.5\times\frac{1}{10}+0.3\times\frac{1}{15}+0.2\times\frac{1}{20}=0.08$$

例 2 、已知 $P(A)=0.3,P(B)=0.5,P(A\cup B)=0.8$，

求（1）P(AB)；（2）P（A－B）；（3） $P(\overline{A}\,\overline{B})$

解：（1）由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

得 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=0.3+0.5-0.8=0$

（2） $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3-0=0.3$

（3） $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.8=0.2$

第二章　随机变量及其分布

1、离散型分布列

$P(X=x_i)=P_i$，i＝1，2，……

X	x_1	x_2	……	x_n	……
P	p_1	p_2	……	p_n	……

（1） $P_i\geq 0$　　（2） $\sum_{i=1}^{\infty}P_i=1$

2、分布函数　　$F(x)=P(X\leq x)$

3、连续型概率密度函数 $f(x)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

（1） $f(x)\geq 0$　　（2） $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$

（3） $P(a<x\leq b)=\int_{a}^{b}f(x)dx=F(b)-F(a)$

（4） $f(x)=F^{'}(x)$

4、常用离散型

（1）两点（0－1）分布

X	0	1
P	1－P	P

E（x）＝P，D（x）＝P（1－P）

（2）二项分布 X～b（n，p）

$$P(X=k)=C_n^k P^k (1-P)^{n-k},(k=\overline{0,n})$$

E（x）＝np，D（x）＝np（1－p）

（3）泊松分布 X～ $P(\lambda)$

$$P(X=K)=\frac{\lambda^K e^{-\lambda}}{K!}$$，K＝0，1，2，……$\lambda>0$

E（x）=D（x）＝λ

5、常用连续型

（1）均匀分布 $X\sim U[a,b]$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

E（X）$=\dfrac{a+b}{2}$　　　$\mathrm{D}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

（2）指数分布 $X\sim E[\lambda]$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$　　　$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

（3）正态分布 $X\sim N(u,\sigma^2)$

$$P(a<X\le b)=\varphi(\frac{b-u}{\sigma})-\varphi(\frac{a-u}{\sigma})$$

$$E(X)=u,\qquad D(X)=\sigma^2$$

（4）标准正态分布 X～N（0，1）

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2z}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\phi(-x)=1-\phi(x)$$

6、重要例题：例 3、例 5、例 8、例 9、例 12、例 13、例 14、例 15、例 16、例 17

7、重要习题：P_{47}　1、3、5、7、10、13、15、17、19、24

例 1、设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Kx & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求：（1）常数 K;（2）分布函数 F（x）（3）P（0.5<x<2）（4）E（x），D（x）

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_0^1 Kxdx=\frac{K}{2}x^2\mid_0^1=\frac{K}{2}$，K＝2

（2）$x\le 0时，F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x 0dt=0$

$0<x\le 1时，F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x 2tdt=t^2\mid_0^x=x^2$

$x\ge 1时，\ F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^1 2tdt=1$

$$\therefore F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^2 & 0<x\le 1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

（3）$P(0.5<x<2)=\int_{0.5}^{2}f(x)dx=\int_{0.5}^{1}2xdx=x^2\mid_{0.5}^{1}=\frac{3}{4}$

（4）$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x2xdx=\frac{2}{3}x^3\mid_0^1=\frac{2}{3}$

$E(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2 2xdx=\frac{2}{4}x^4\mid_0^1=\frac{1}{2}$

$D(x)=\frac{1}{2}-(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{18}$

第三章　多维随机变量及其分布

一、二维离散型随机变量（x,y）

1、联合分布律 $P(X=x_i，\mathrm{Y}=y_i)=P_{ij}$

性质：（1）$P_{ij}\ge 0$　（2）$\sum_{j-1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}P_{ij}=1$

2、边缘分布

$$P_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij} \qquad P_{\cdot j}=P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}P_{ij}$$

3、独立性　　X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow P_{ij}=P_{i\cdot}P_{\cdot j}$

二、重要例题：例 1、例 4、例 12

三、重要习题：P_{23}　　1、3

例 1、设随机变量 X 和 Y 的分布律为

X \ Y	0	1	2	$P_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	

问 α,β 为何值时，X 与 Y 独立？

解：（x，y）的边缘分布如上表，由独立特性得

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(\frac{1}{9}+\alpha)=\frac{1}{9}\\ \frac{1}{3}(\frac{1}{18}+\beta)=\frac{1}{18}\end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases}\alpha=\frac{2}{9}\\ \beta=\frac{1}{9}\end{cases}$$

第四章　　随机变量的数字特征

一、数学期望

（1）$E(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}x_iP_i & \text{离散}\\ \int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx & \text{连续}\end{cases}$

（2）设 Y＝g（x），则 $E(Y)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)P_i\\ \int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx\end{cases}$

（3）性质：E（C）＝C，E（ax+b）＝aE（x）＋b

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$

X与Y独立时，$E(XY)=E(X)E(Y)$

二、方差

（1） $D(X)=E[X-E(X)]^2$

（2）简化公式：$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

（3）性质：D（c）＝0，$D(aX+b)=a^2D(X)$

X与Y独立时，$D(X\pm X)=D(X)+D(Y)$

三、重要例题：例 1、例 3、例 4、例 5、例 6、例 9、例 10、例 15、例 16、例 18、例 19、例 21、例 24

四、重要习题：P_{94}　1、2、3、4、5、6、8、9