作业 9 月 17 日

September 18, 2024

练习 1. 试用变量分离法求下列一阶微分方程的通解.

(1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

(2) $\frac{dy}{dx} = 2xy$.

(3) $xy(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$.

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

(5) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2+e^y}$.

(6) $\frac{dy}{dx} = P(x)y$

解. (1) 方程可变量分离为

$$ydy = -xdx$$

两边积分得

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{c}{2}$$

即得通解

$$y^2 + x^2 = c$$

这里 c 是指任意常数。上式通解是方程隐函数形式的解。也可以解出 y，即为显函数形式的解：

$$y = \pm\sqrt{c - x^2}$$

(2) 当 $y \neq 0$ 时, 分离变量后得

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx,$$

两端积分得 $\ln|y| = x^2 + C_1$, 此外显然 $y = 0$ 也是方程的解. 从而方程的通解为 $y = Ce^{x^2}$, 其中 C 为任意常数.

(3) 分离变量后得

$$\frac{ydy}{1+y^2}=\frac{dx}{x(1+x^2)},$$

两端积分得

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1,$$

即 $\ln(1+x^2)(1+y^2)=\ln x^2+2C_1$, 从而方程的通解为 $(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$, 其中 $C=e^{2C_1}$ 为任意正常数.

(4) 当 $y\neq\pm1$ 时, 分离变量后得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

两端积分得 $\arcsin y=\arcsin x+C$, 其中 C 为任意常数, 从而方程的通解为 $y=\sin(\arcsin x+C)$. 此外显然 $y=1$ 和 $y=-1$ 也是方程的解.

(5) 分离变量后得 $(3y^2+e^y)dy=\cos xdx$, 两端积分得方程的隐式通解 $y^3+e^y=\sin x+C$, 其中 C 为任意常数.

(6) $y\neq0$ 时，分离变量为

$$\frac{dy}{y}P(x)dx,$$

两边积分得

$$\ln|y|=\int P(x)dx+\bar{c}$$

即得通解

$$|y|=\mathrm{e}^{\int P(x)dx+\bar{c}}$$

即

$$y=\pm\mathrm{e}^{\bar{c}}\cdot\mathrm{e}^{\int P(x)dx}=c\mathrm{e}^{\int P(x)dx},$$

这里 $c=\pm\mathrm{e}^{\bar{c}}$。

练习 2. 将下列方程化为可分离变量方程, 并求解.

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$.

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$.

解. (1) 令 $x=\xi+1,y=\eta+2$, 可将原方程变为

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta},$$

令 $u=\frac{\eta}{\xi}$, 则有

$$\xi\frac{du}{d\xi}+u=\frac{1-u}{1+u},$$

用分离变量法求得其通解为 $u^2+2u-1=C_1\xi^{-2}$, 其中 C_1 为任意常数. 再由

$$u=\frac{\eta}{\xi}=\frac{y-2}{x-1},\quad \xi=x-1,$$

代入上式并化简得原方程的通解为

$$y^2+2xy-x^2-6y-2x=C,$$

其中 C 为任意常数.

(2) 将原方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},$$

令 $u=\frac{y}{x}$, 则有

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1}{u}+u,$$

用分离变量法求得其通解为 $u^2=\ln x^2+C$, 将 u 换成 $\frac{y}{x}$ 得原方程的通解为 $y^2=x^2(\ln x^2+C)$, 其中 C 为任意常数.

练习 3. 求解下列伯努利方程

(1) $\frac{dy}{dx}=6\frac{y}{x}-xy^2$.

(2) $x\frac{dy}{dx}-4y=2x^2\sqrt{y}\quad(x\neq 0, y>0)$.

解. (1) 当 $y\neq 0$ 时, 令 $z=y^{-1}$, 原方程变为

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{6}{x}z+x,$$

这是一阶线性微分方程, 其通解为

$$z=\frac{1}{x^6}\left(C+\frac{1}{8}x^8\right),$$

从而原方程的通解为

$$\frac{x^6}{y}-\frac{x^8}{8}=C,$$

其中 C 为任意常数. 此外, 显然 $y=0$ 也是方程的解.

(2) 令 $z=\sqrt{y}$, 原方程变为

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z+x,$$

这是一阶线性微分方程, 其通解为 $z=x^2(\ln|x|+C)$, 从而原方程的通解为 $y=x^4(\ln|x|+C)^2$, 其中 C 为任意常数.

练习 4. 求解 logistic 人口增长模型

$$\frac{dy}{dt}=r\left(1-\frac{y}{k}\right)y,\quad y(t_0)=y_0,$$

其中 k,r 为大于零的常数且 $k>y(t)\geq 0\ (\forall t\geq 0)$.

解. 当 $N \neq 0$ 或 k 时，应用变量分离法对分式分解，化为

$$rdt = \frac{kdy}{(k-y)y} = \frac{dy}{y} + \frac{dy}{k-y}$$

两边积分，得

$$rt + \bar{c} = \ln y - \ln(k-y),$$

其中 $\bar{c}$ 为任意常数。化简之，

$$\mathrm{e}^{-(rt+\bar{c})} = \frac{k-y}{y} = \frac{k}{y} - 1,$$

解得

$$N = \frac{k}{1+c\mathrm{e}^{-rt}},$$

其中 $c = \mathrm{e}^{\bar{c}}$。将初始值条件 $t = t_0$ 时，$y(t_0) = y_0$ 代入，得

$$c\mathrm{e}^{-rt_0} = \frac{k}{y_0} - 1,$$

最后解得

$$y = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}}$$

练习 5. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

的两个互异解. 求证对于该方程的任一解 $y(x)$, 成立恒等式

$$\frac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)} = C,$$

其中 C 是某常数.

证明. 令 $\psi(x) = y(x) - y_1(x)$, $\phi(x) = y_2(x) - y_1(x)$, 容易验证

$$\frac{d\psi}{dx} + p(x)\psi(x) = 0, \quad \frac{d\phi}{dx} + p(x)\phi(x) = 0.$$

因此存在常数 k_1, k_2, 其中 $k_2 \neq 0$, 使得

$$\psi(x) = k_1 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right),$$

$$\phi(x) = k_2 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right),$$

其中 $x_0 \in \mathbb{R}$. 从而

$$\frac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)} = \frac{\psi(x)}{\phi(x)} = \frac{k_1}{k_2} = C,$$

这里 $C = \frac{k_1}{k_2}$ 为一常数.

练习 6. 验证下列方程是恰当方程, 并求出方程的解:

(1) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$

(2) $(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy=0.$

(3) $xydx+(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y})dy=0.$

(4) $3y+e^x+(3x+\cos y)\frac{dy}{dx}=0.$

解. (1) 这里 $M(x,y)=3x^2+6xy^2, N(x,y)=6x^2y+4y^3$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy=\frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0=0, y_0=0$, 可计算出

$$\begin{aligned}U(x,y)&=\int_0^x(3x^2+6xy^2)dx+\int_0^y 4y^3dy\\&=x^3+3x^2y^2+y^4.\end{aligned}$$

故通解为 $x^3+3x^2y^2+y^4=C$, 其中 C 为任意常数.

(2) 这里 $M(x,y)=5x^4+3xy^2-y^3, N(x,y)=3x^2y-3xy^2+y^2$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6xy-3y^2=\frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0=0, y_0=0$, 可计算出

$$\begin{aligned}U(x,y)&=\int_0^x(5x^4+3xy^2-y^3)dx+\int_0^y y^2dy\\&=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{y^3}{3}.\end{aligned}$$

故该方程的通解为 $x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{y^3}{3}=C$, 其中 C 为任意常数.

(3) 这里 $M(x,y)=xy, N(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y}$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x=\frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0=0,\ y_0=1$, 可计算出

$$\begin{aligned}U(x,y)&=\int_0^x xydx+\int_1^y\frac{1}{y}dy\\&=\frac{1}{2}(x^2y+\ln y^2).\end{aligned}$$

故该方程的通解为 $x^2y+\ln y^2=C$, 其中 C 为任意常数.

(4) 将原方程改写为

$$(3y+e^x)dx+(3x+\cos y)dy=0,$$

这里 $M(x,y)=3y+e^x,\ N(x,y)=3x+\cos y$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3=\frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0=0, y_0=0$, 可计算出

$$\begin{aligned}U(x,y)&=\int_0^x(3y+e^x)dx+\int_0^y\cos ydy\\&=e^x+3xy+\sin y-1.\end{aligned}$$

故该方程的通解为 $e^x+3xy+\sin y=C$, 其中 C 为任意常数.

练习 7. 试用积分因子法解下列方程:

(1) $ydx + (y - x)dy = 0.$

(2) $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0.$

(3) $2xy\ln ydx + (x^2 + y^2\sqrt{1 + y^2})dy = 0.$

解. (1) 这里 $M(x, y) = y, N(x, y) = y - x$, 由于

$$E = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2,$$

所以它不是恰当方程. 由于 $-\frac{E}{M} = -\frac{2}{y}$ 与 x 无关, 因此该方程有只依赖于 y 的积分因子

$$\mu(y) = -\frac{1}{y2}.$$

从而方程

$$\frac{1}{y}dx + \frac{y - x}{y^2}dy = 0$$

为恰当方程, 取 $x_0 = 0, y_0 = 1$, 可计算出

$$U(x, y) = \int_0^x \frac{1}{y}dx + \int_1^y \frac{1}{y}dy = \ln|y| + \frac{x}{y}.$$

故该方程的通解为 $\ln|y| + \frac{x}{y} = C$, 其中 C 为任意常数. 此外, 显然 $y = 0$ 也是方程的解.

(2) 这里 $M(x, y) = x^2 + y^2 + y, N(x, y) = -x$, 由于

$$E = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(y + 1),$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 + y^2 + y)dx - xdy \\
&= (x^2 + y^2)\left(dx + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}\right) \\
&= (x^2 + y^2)\left(dx + d\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)\right) \\
&= (x^2 + y^2)d\left(x + \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)
\end{aligned}$$

因此该方程有积分因子 $\frac{1}{x^2+y^2}$, 且其通解为

$$x + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = C,$$

其中 C 为任意常数.

(3) 这里

$$M(x, y) = 2xy\ln y, \quad N(x, y) = x^2 + y^2\sqrt{1 + y^2},$$

由于

$$E = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2x\ln y,$$

所以它不是恰当方程. 由于 $-\frac{E}{M}=-\frac{1}{u}$ 与 x 无关, 因此该方程有只依赖于 y 的积分因子 $\mu(y)=\frac{1}{y}$. 从而方程

$$2x\ln y dx+\left(\frac{x^2}{y}+y\sqrt{1+y^2}\right)dy=0$$

为恰当方程, 取 $x_0=0, y_0=1$, 可计算出

$$\begin{aligned}U(x,y)&=\int_0^x 2x\ln y dx+\int_1^y y\sqrt{1+y^2}dy\\&=x^2\ln y+\frac{1}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

故该方程的通解为 $x^2\ln y+\frac{1}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}=C$, 其中 C 为任意常数.

练习 8. 试求下列隐式方程的通解.

(1) $y^2(1-\frac{dy}{dx})=(2-\frac{dy}{dx})^2$.

(2) $(\frac{dy}{dx})^3-4xy\frac{dy}{dx}+8y^2=0$.

(3) $(\frac{dy}{dx})^5-5(\frac{dy}{dx})^2+1=0$.

解. (1) 令 $\frac{dy}{dx}=p$, $2-p=yt$, 由方程可得

$$p=1-t^2,\quad y=t+\frac{1}{t}.$$

当 $p\neq 0$ 时, 得:

$$dx=\frac{dy}{p}=-\frac{1}{t^2}dt.$$

积分后可得方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases}x=\frac{1}{t}+C,\\ y=t+\frac{1}{t},\end{cases}$$

其中 C 为任意常数. 消去参数后得:

$$y=x+\frac{1}{x-C}-C.$$

此外, 当 $p=0$ 时, 易知 $y=\pm 2$ 也是方程的解.

(2) 易知 $y=0$ 是方程的解. 若 $y\neq 0$, 令 $p=\frac{dy}{dx}$, 则

$$x=\frac{p^2}{4y}+\frac{2y}{p}.$$

对上述方程两边关于 x 求导并化简, 得

$$\frac{p^3-4y^2}{2yp^2}\frac{dp}{dy}=\frac{p^3-4y^2}{4y^2p},$$

由此得

$$\frac{dp}{dy}=\frac{p}{2y}\quad\text{或}\quad p^3-4y^2=0.$$

由 $\frac{dp}{dy}=\frac{p}{2y}$ 得 $y=C_1p^2$, 其中 C_1 为任意非零常数. 故

$$x=2C_1p+\frac{1}{4C_1},$$

即 $y=C(x-C)^2$, 其中 $C=\frac{1}{4C_1}$ 为任意非零常数, 又 $y=0$ 也是方程的解, 故原方程的通解为 $y=C(x-C)^2$, 其中 C 为任意常数.

由 $p^3-4y^2=0$ 得 $p=(4y^2)^{\frac{1}{3}}$, 由此得方程的另一个解 $y=\frac{4}{27}x^3$.

(3) 由于原方程的左边是一个关于 $\frac{dy}{dx}$ 的 5 次多项式, 因此该方程至少有一个实根, 故有隐式通解

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^5-5\left(\frac{y-C}{x}\right)^2+1=0,$$

其中 C 为任意常数.