

概率论与数理统计作业 Chap7

May 7, 2025

练习 1. 设 x_1, x_2, x_3 是取自某总体的容量为 3 的样本, 试证下列统计量都是该总体均值 μ 的无偏估计, 在方差存在时指出哪一个估计的有效性最差?

$$\begin{aligned}(1) \quad \hat{\mu}_1 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3; \\(2) \quad \hat{\mu}_2 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3; \\(3) \quad \hat{\mu}_3 &= \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{3}x_3.\end{aligned}$$

练习 2. 设总体密度函数如下, x_1, \dots, x_n 是样本, 试求未知参数的矩估计。

$$\begin{aligned}(1) \quad f(x; \theta) &= \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), 0 < x < \theta, \theta > 0; \\(2) \quad f(x; \theta) &= (\theta + 1)x^\theta, 0 < x < 1, \theta > 0; \\(3) \quad f(x; \theta) &= \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, 0 < x < 1, \theta > 0; \\(4) \quad f(x; \theta, \mu) &= \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, x > \mu, \theta > 0.\end{aligned}$$

练习 3. 设总体 X 服从二项分布 $B(m, p)$, 其中 m, p 为未知参数, x_1, \dots, x_n 为 X 的一个样本, 求 m 与 p 的矩估计。

练习 4. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体的一个样本, x_1, x_2, \dots, x_n 为一相应的样本值. 利用最大似然估计法求下列各总体的概率密度的未知参数的极大似然估计值和矩估量.

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} \theta c^\theta x^{-(\theta+1)}, & x > c, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $c > 0$ 为已知, $\theta > 1, \theta$ 为未知参数.

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0, \theta$ 为未知参数.

练习 5. 某厂生产的化纤强度服从正态分布, 长期以来其标准差稳定在 $\sigma = 0.85$, 现抽取了一个容量为 $n = 25$ 的样本, 测定其强度, 算得样本均值为 $\bar{x} = 2.25$, 试求这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间。

练习 6. 已知某种材料的抗压强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 现随机地抽取 10 个试件进行抗压试验, 测得数据如下:

482 493 457 471 510 446 435 418 394 469.

- (1) 求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间;
- (2) 若已知 $\sigma = 30$, 求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间;
- (3) 求 σ 的置信水平为 95% 的置信区间。