

概率论与数理统计作业 Chap3

March 27, 2025

练习 1. 从 1,2,3,4 中任取一数记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一数记为 Y . 求 (X, Y) 的联合分布列及 $P(X = Y)$.

练习 2. 设 (X, Y) 联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-2x-3y}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求: (1) $P(X < 1, Y > 1)$; (2) $P(X > Y)$.

练习 3. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} k, & 0 < x^2 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 试求常数 k ;

(2) 求 $P(X > 0.5)$ 和 $P(Y < 0.5)$.

练习 4. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(1-y), & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求 $P(X > 0.5, Y > 0.5)$;

(2) 求 $P(X < 0.5)$ 和 $P(Y < 0.5)$;

(3) 求 $P(X + Y < 1)$.

练习 5. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, |y| < x; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求: (1) 边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$; (2) $P(X < 1/2)$ 及 $P(Y > 1/2)$.

练习 6. 若 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

问 X 与 Y 是否相互独立?

练习 7. 从 $(0, 1)$ 中任取两个数, 求下列事件的概率.

- (1) 两数之和小于 1.2 ;
- (2) 两数之积小于 $1/4$.

练习 8. 设 (X, Y) 的联合分布列如下所示:

X	Y		
	-1	1	2
-1	5/20	2/20	6/20
2	3/20	3/20	1/20

试求:

- (1) $Z_1 = X + Y$ 的分布列;
- (2) $Z_2 = X - Y$ 的分布列;
- (3) $Z_3 = \max\{X, Y\}$ 的分布列.

练习 9. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量, 且 $X \sim \text{Exp}(\lambda), Y \sim \text{Exp}(\mu)$. 如果定义随机变量 Z 如下

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{当 } X \leq Y, \\ 0, & \text{当 } X > Y. \end{cases}$$

求 Z 的分布列.

练习 10. 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求以下随机变量的密度函数 (1) $Z = (X + Y)/2$; (2) $Z = Y - X$.