数学分析2复习2

李升

三、数项级数

1.理解部分和与通项之间的关系，掌握由裂项相消、错位相减等方法求级数的和；

2.理解级数收敛、部分和收敛以及通项趋于0之间的关系；

3.理解正项级数的比较判别法“快收慢散”的涵义，熟练掌握比值法和根值法（两种形式）并应用于判断正项级数的敛散性；

4.熟练掌握莱布尼兹判别法和狄利克雷判别法，了解阿贝尔判别法。

常数项级数的概念

设有无穷数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，称和式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

为(常数项)无穷级数，简称为级数. 其中 u_n 称为级数的一般项或通项. 级数 (1) 的前 n 项的和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

部 分 和 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

通项与部分和的关系：$u_1 = S_1, u_n = S_n - S_{n-1}\,(n \geq 2)$;

例 讨论级数 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 的收敛性.

解 $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$,　　裂项相消法求前n项和

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$,

即题设级数收敛，其和为1.

例 讨论等比级数(又称为几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性.

解 当 $q \neq 1$ 时，有

错位相减

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

若 $|q|<1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$.

若 $|q|>1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

若 $q=1$，有 $s_n = na$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

若 $q=-1$，则级数变为

$$s_n = \underbrace{a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a}_{n\text{个}} = \frac{1}{2}a[1-(-1)^n],$$ 发散

收敛级数的基本性质

性质 1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 A、B，则对任意常数 α、β，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha A + \beta B.$$

性质 2 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性.

性质 3 在一个收敛级数中，任意添加括号所得到的新级数仍收敛于原来的和.

性质 4 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

例　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{3}{n(n+1)}\right)$ 的和.

解　根据等比级数的结论，知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1/2}{1-1/2}=1.$$

而由前例，知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{3}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=4.$$

正 项 级 数

定义 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中各项均有

$$u_n \geq 0,$$

则称这种级数为正项级数.

易见正项级数的部分和数列 $\{s_n\}$ 为单调增加数列, 即

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots.$$

根据数列的单调有界准则, $\{s_n\}$ 收敛的充要条件是它有界, 从而得到下述重要定理:

定理 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

注: 其重要性并不在于利用它来直接判别正项级数的收敛性, 而在于它是证明下列一系列判别法的基础.

比较判别法

定理 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $u_n \le v_n\ (n=1, 2, \cdots)$.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

快收慢散

$p-$级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots\ (p>0)$ 的收敛性.

$$p-\text{级数}\begin{cases}\text{当 } p>1 \text{ 时收敛} \\ \text{当 } p\le 1 \text{ 时发散}\end{cases}.$$

比较判别法的极限形式

定理 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$.

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，这两个级数有相同的敛散性；

(2) 当 $l = 0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(3) 当 $l = +\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

关键:
读出谁快谁慢

例 判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

解 (1) 因 $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}\ (n\to\infty)$，故

要有预判，可能要结合无穷小代换

$$\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1,$$

根据极限判别法，知所给级数收敛.

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} u_n = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} \sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi^2,$$

根据极限判别法，知所给级数收敛.

比值判别法

定理 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$（或 $+\infty$），则

(1) 当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $\rho > 1$（包括 $\rho = +\infty$）时，级数发散；

(3) 当 $\rho = 1$ 时，本判别法失效。

也有一般形式，
但常用极限形式

根值判别法（柯西判别法）

定理 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$（或 $+\infty$），则

(1) 当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $\rho > 1$（包括 $\rho = +\infty$）时，级数发散；

(3) 当 $\rho = 1$ 时，本判别法失效。

通项含有n！不适用

例　判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$.

解 (1) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

(2) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\frac{n+1}{10}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 发散.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)\cdot(2n+2)}=1$,

比值判别法失效，改用比较判别法，因为

$$\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}<\frac{1}{n^2}，而级数 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} 收敛，$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot(2n-1)}$ 收敛.

例 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解 一般项含有 n 次方，故可采用根值判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}<1$$

故所求级数收敛.

积分判别法 了解（考研重点）

定理 对于给定的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，若存在 $[1,+\infty)$ 上单调减少的连续函数 $f(x)$，使得 $a_n = f(n)$，则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是对应的广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散的充要条件是对应的广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

注：在定理 5 中，若将积分下限和级数的开始项号改成某个正整数 N，函数 $f(x)$ 改为在 $[N,+\infty)$ 上单调减少连续，并且当 $n>N$ 时成立 $a_n = f(n)$，则定理的结论仍然正确.

交错级数　特殊的一般项级数

若 $u_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 为**交错级数**．对交错级数，我们有下面的判别法．

定理　(**莱布尼茨定理**) 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足条件：

(1)　$u_n \geq u_{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$;

(2)　$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛，并且它的和 $s \leq u_1$.

例 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的收敛性.

解 易见题设级数的一般项 $(-1)^{n-1}u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 满足:

(1) $\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛, 其和 $s\leq 1$, 用 s_n 近似 s

绝对收敛与条件收敛

定义 1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为一般常数项级数，则

(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛时，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**绝对收敛**；

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛**.

定理 2 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\ (p>0)$ 的收敛性.

解　由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},$$

一般先看通项是否趋于0
接着看是否绝对收敛
再看本身是否收敛

易见当 $p>1$ 时，题设级数绝对收敛；

当 $0<p\le 1$ 时，由莱布尼茨定理知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛，但

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

发散，故题设级数条件收敛.

定理 10.3.3 (Dirichlet判别法) 如果数列$\{a_n\}$单调趋于0, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. 比Abel判别法更常用

通常取bn为“正弦函数”或“余弦函数”，要注意是部分和有界，不是级数有界

定理 10.3.4 (Abel判别法) 如果数列 $\{a_n\}$ 单调有界, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例 证明: 当$0<x<\pi$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$条件收敛.

证明 首证: 对任意$x\in(0,\pi)$, 部分和数列$\{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx\}$ 有界, 即

$$|\sum_{k=1}^{n}\sin kx|\le\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}. \tag{10.3.3}$$

事实上, 对任意$x\in(0,\pi)$,

$$\begin{aligned}-2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx &=\sum_{k=1}^{n}\Big(\cos(k+\frac{1}{2})x-\cos(k-\frac{1}{2})x\Big)\\ &=\cos(n+\tfrac{1}{2})x-\cos\tfrac{1}{2}x,\end{aligned}$$

于 是(10.3.3)成 立. 又 由 于$\dfrac{1}{n}$单 调 趋 于0, 所 以 由Dirichlet判 别 法 得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$当$0<x<\pi$时收敛.

下面证明: 对任意$x \in (0,\pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin nx}{n}\right|$发散. 事实上, 注意到

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1-\cos 2nx}{2n}.$$

同样, 由Dirichlet判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{2n}$当$0 < x < \pi$时收敛, 但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n} = +\infty$. 故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin nx}{n}\right|$发散, 即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$当$0 < x < \pi$时条件收敛. $\square$

四、函数列与函数项级数

1.理解函数列逐点收敛和一致收敛的概念，以及它们的关系，会计算极限函数；

2.熟练应用余项定理（定理11.1）判断函数列的一致收敛性；掌握应用定理11.2.1证明连续函数列不一致收敛的思想方法；

3.理解函数项级数收敛、绝对收敛和一致收敛的概念，以及它们的关系；

4.理解掌握函数项级数一致收敛与通项一致收敛于0的关系；

5.熟练应用M判别法和狄利克雷判别法讨论函数项级数的一致收敛性，了解阿贝尔判别法。

一、函数序列的一致收敛

1. 若函数序列 $\{f_n(x)\}$有公共定义域 D,且对 $x_0 \in D$, $\{f_n(x_0)\}$ 收敛，称 $\{f_n(x)\}$在 x_0收敛，称 x_0为 $\{f_n(x)\}$的 收敛点。

2. 称 $\{f_n(x)\}$的所有收敛点作成 的集合为 $\{f_n(x)\}$的 收敛域。

3. 称 $\{f_n(x)\}$ 在收敛域上确定的函数为其极限函数，记为：

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

例 设$f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x^2}$，则 $\forall x \in R$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n+x^2} = x,$$ 故极限函数为$f(x) = x$,

收敛域为R.

定义 11.1.3 设在集合I上有函数列$\{f_n(x)\}$和函数$f(x)$. 如果对任意的$\varepsilon > 0$,存在正整数$N = N(\varepsilon)$(仅依赖于ε), 使得当$n > N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{对所有的} \quad x \in I,$$

则称**函数列**$\{f_n(x)\}$**在集合**I**上一致收敛**于函数$f(x)$, 记作

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad n \to \infty, \ x \in I.$$

由定义 11.1.3易证, 例 2中的函数列$\{\frac{1}{x+n}\}$ 在区间$(0,1)$内一致收敛于函数$f(x) = 0$. 一般地, 函数列$\{f_n(x)\}$在集合I上一致收敛必有$\{f_n(x)\}$在集合I上逐点收敛, 反之不然, .

定理 11.1.1 设函数列$\{f_n(x)\}$在集合I 上逐点收敛于函数$f(x)$. 引入记号

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

则下列三项陈述等价.

(1) $\{f_n(x)\}$在集合I 上一致收敛于函数$f(x)$;

(2) $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$; 通常是求“gn=|fn-f|”的最大值，证明一致收敛

(3) 对任何数列$\{x_n\} \subset I$都有 $\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$.

用于证明非一致收敛

例 判断

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\text{在}(0,1)\text{和}(1,+\infty)\text{上是否一致收敛？}$$

解： $\forall x, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0.$ 当$1<x<+\infty$时，

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}\le\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}<\frac{1}{n}$$

$$\therefore 0\le\sup_{x\in(1,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{n}\to 0$$ 一致收敛

$$\text{而}\sup_{x\in(0,1)}|f_n(x)-f(x)|\ge\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-0\right|=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

故该函数列在(0,1)上不一致收敛.

定理11.2.1 (连续性) 若函数列$\{f_n\}$在区间D上一致收敛,且每一项都连续,则其极限函数f在D上也连续.

证 设x_0为D上任一点.由于$\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=f_n(x_0)$,于是由补充定理知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$也存在,且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=f(x_0),$$

因此$f(x)$在x_0上连续. 可用于证明连续函数列不一致收敛

例如: 函数列$\{x^n\}$的各项在$(-1,1]$上都是连续的,但

其极限函数$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$ 在$x=1$时不连续,所以$\{x^n\}$在$(-1,1]$上不一致收敛.

例 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

解 令 $t=\sqrt[3]{3x+1}$，则 $x=\frac{t^3-1}{3}$，$dx=t^2dt$，从而

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x+1}}dx=\int \frac{t^3-1}{3t}t^2dt=\frac{1}{3}\int (t^4-t)\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{15}(3x+1)^{5/3}-\frac{1}{6}(3x+1)^{2/3}+C.$$

定理 11.2.3(可积性) 若函数列$\{f_n(x)\}$的每一项在$[a,b]$上连续，且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$，则$f(x)$在$[a,b]$上可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

一致收敛是交换顺序的充分条件而不是必要条件

定理 11.2.4(可导性) 如果函数列$\{f_n(x)\}$满足条件:

(1) $f_n(x)$在$[a,b]$上连续可微，$n=1,2,\cdots$;

(2) 导函数列$\{f_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$\varphi(x)$;

(3) $\{f_n(x)\}$至少在某点$x_0\in[a,b]$收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=y_0$，

那么函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于某个连续可微函数$f(x)$，并且$f'(x)=\varphi(x)$.

一致收敛同样是交换顺序的充分非必要条件

定义 11.3.2 设 $\{S_n(x)\}$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数列. 若 $S_n(x)$ 在集合 E 上一致收敛于函数$S(x)$,则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$**在**$E$**上一致收敛于函数**$S(x)$, 或称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$**在**$E$**上一致收敛**.

利用部分和函数列的一致收敛性研究函数项级数的一致收敛性

定理 11.3.1(一致收敛的Cauchy准则) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在数集$E$上一致收敛的充分必要条件为: 对任意的$\varepsilon > 0$, 存在$N \in \mathbb{N}_+$, 使当$n > N$时, 对一切$x \in E$和$p \in \mathbb{N}_+$, 都有

理论应用为主

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

推论 11.3.1 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在数集$E$上一致收敛的必要条件是函数列$\{u_n(x)\}$ 在E上一致收敛于0. 必要而非充分条件，应优先验证

定理 11.3.3(M判别法) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$是定义在数集$E$上的函数项级数.
若存在收敛的常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$和$N_0 \in \mathbb{N}_+$,使当$n \geq N_0$时,

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad \forall\, x \in E,$$

必须与x无关

则函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$E$上一致收敛.

例 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1+n^4x^2}$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内一致收敛.

证明 由于$1+n^4x^2 \geq 2n^2|x|$, 所以

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leq \frac{1}{2n^2}, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty),$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$收敛, 因此由M判别法知, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1+n^4x^2}$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内一致收敛. □

定理 11.3.4 (Dirichlet判别法) 如果

(1) 函数列$\{u_n(x)\}$对每一个取定的$x \in E$关于n都是单调的, 并且这函数列在E上一致收敛于0;

(2) 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$的部分和函数列在$E$上一致有界, 即存在$M > 0$使得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k(x)\right| \leq M, \quad \forall\, x \in E,$$

则函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$在$E$上一致收敛.

往往是取vn(x)为正弦函数或余弦函数；通常un是常数列

例 证明: 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛, 但对任意的$x$并非绝对收敛.

证明 (1) 令$u_n(x)=(-1)^{n-1}$, $v_n(x)=\dfrac{1}{n+x^2}$, $n=1,2,\cdots$, 则显然有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right|\leq 1,\quad \forall n\in\mathbb{N}_+.$$

又因为$v_n(x)$对每个 $x\in(-\infty,+\infty)$ 关于 n 单调递减, 且

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n+x^2}\right|=\frac{1}{n}\to 0,\quad n\to\infty,$$

即 $v_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛于 0, 所以根据 Dirichlet 判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

(2) 对任意取定的$x\in(-\infty,+\infty)$, 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n+x^2}\right|\Big/\frac{1}{n}=1,$$

及 $\sum\frac{1}{n}$ 发散, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n+x^2}\right|$发散, 因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+x^2}$不是绝对收敛. $\square$

定理11.3.5 (Abel判别法) 如果

(1) 函数列$\{u_n(x)\}$对每一个取定的$x \in E$关于n都是单调的, 并且这函数列在E上一致有界, 即存在$M > 0$使得

$$|u_n(x)| \leq M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_+,\ x \in E;$$

(2) 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$E$上一致收敛,

则函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$在$E$上一致收敛.

通常取vn为收敛常数项级数的通项

五、幂级数和傅里叶级数

1.理解幂级数的概念，理解幂级数收敛半径的定义，熟练掌握计算收敛半径和收敛域的方法；

2.熟练应用逐项积分和逐项求导进行级数求和，并应用于特殊级数和的计算；

3.理解函数与它对应的幂级数之间的关系，熟练掌握几个基本函数的麦克劳林级数，熟练利用间接法进行级数展开；

4.理解函数与它对应的傅里叶级数之间的关系，了解狄利克雷条件；牢记计算给定函数的傅里叶级数的公式，掌握“取等号”的条件；熟练掌握由“奇周期延拓”得到余弦级数和“偶周期延拓”得到正项级数的思想方法。

幂级数的定义和收敛域

定义 12.1.1 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \quad (12.1.1)$$

的函数项级数称为**幂级数**, 其中常数$a_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ 称为**幂级数的系数**. 当$x_0 = 0$时, 幂级数(12.1.1)变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots . \quad (12.1.2)$$

对这一简单情形(12.1.2)所作的讨论, 可以平行地推广到幂级数(12.1.1).

定理 12.1.2 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 内每一点绝对收敛;

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在任意 $x \notin [-R, R]$ 处发散; R和-R是临界点

(3) 当 $x = \pm R$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可能收敛, 也可能发散.

定理 12.1.3 对于给定的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \tag{12.1.3}$$

或者

重点是理解该结论源于"常数项级数"的比值法和根值法当极限存在时直接应用，否则就需要根据原理进行求解。

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \tag{12.1.4}$$

则其收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$ (这里约定 $\rho = 0$ 时, 定义 $\frac{1}{\rho} = +\infty$; $\rho = +\infty$ 时, 定义 $\frac{1}{\rho} = 0$).

求收敛域的基本步骤

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛域的基本步骤：

(1) 求出收敛半径 R;

(2) 当 $x=\pm R$ 时，判别常数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$$

的收敛性；

(3) 写出幂级数的收敛域.

例　求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$.

解 (1) $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$

所以收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，该级数收敛；

当 $x=-1$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，该级数发散.

从而所求收敛域为 $(-1,1]$.

例　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛域.

解　题设级数缺少偶数次幂，此时可直接利用比值判别法：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{x^{2n-1}}=\frac{1}{2}|x|^2.$$

当 $\frac{1}{2}|x|^2<1$ 即 $|x|<\sqrt{2}$ 时，级数收敛；

当 $\frac{1}{2}|x|^2>1$ 即 $|x|>\sqrt{2}$ 时，级数发散，所以收敛半径 $R=\sqrt{2}$.

当 $x=\sqrt{2}$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$，该级数发散；

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2}}$，该级数发散.

故所求收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

幂级数的分析运算性质

定理 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则

(1) 幂级数的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续；

(2) 幂级数的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积，并在 I 上有逐项积分公式 用于求和从右往左凑形式

$$\int_0^x s(x)\,dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

且逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径；

(3) 幂级数的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导，并在 $(-R, R)$ 内有逐项求导公式

用于求和从右往左凑形式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

且逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

上述运算性质称为幂级数的分析运算性质．它常用于求幂级数的和函数．此外，几何级数的和函数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}\quad(-1<x<1)$$

是幂级数求和中的一个基本的结果．我们所讨论的许多级数求和的问题都可以利用幂级数的运算性质转化为几何级数的求和问题来解决．

端点处的收敛性需要单独讨论

例 求$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$的和函数.

解：易知该函数的收敛半径是$R=1$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}x\left(x^n\right)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},|x|<1.$$

又由于当$x=\pm1$时，级数发散，故和函数的定义域是$(-1,1)$.

例 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数.

解：易知该函数的收敛半径是R=1, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=\ln(1-x),|x|<1.$$

又由于当$x=1$时，级数发散，当$x=-1$时，级数收敛，

故和函数的定义域是$[-1, 1)$.

函数展开成幂级数—直接法

把函数 $f(x)$ 展开成泰勒级数，可按下列步骤进行：

(1) 计算 $f^{(n)}(x_0)$，$n=0, 1, 2, \cdots$；

(2) 写出对应的泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，并求出该级数的收敛半径 R；

(3) 验证在 $|x-x_0|<R$ 内，$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$；

(4) 写出所求函数 $f(x)$ 的泰勒级数及其收敛区间.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ |x-x_0|<R.$$

注：函数能展开为幂级数，则系数由导数确定，但即使函数任意阶导数存在，也不一定能展开

常用麦克劳林展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad x \in \mathbf{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad x \in \mathbf{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad x \in \mathbf{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \qquad x \in (-1, 1]$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad x \in (-1, 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots,$$

牢记形式不变性，并注意在x。处展开的涵义

$$x \in (-1, 1)$$

例　将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

解　因为 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{(x-2)+2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{x-2}{2}+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-2)^n \qquad (|x-2|<2).$$

逐项求导，得

$$-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}(x-2)^{n-1},$$

所以　$f(x)=\dfrac{1}{x^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n+1}}(x-2)^{n-1}\quad(0<x<4).$

例 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解 $$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)},$$

而 $$\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n \quad (-1<x<3),$$

$$\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^n \quad (-3<x<5),$$

故 $$\frac{1}{x^2+4x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \quad (-1<x<3).$$

傅里叶级数的概念

设 $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\qquad (1)$$

求得

$$\boxed{\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}}\qquad (2)$$

如果公式(2)中的积分都存在，则称由(2)确定的系数

$$a_0,\ a_n,\ b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

为函数 $f(x)$ 的**傅里叶系数**. 将这些系数代入(1)式的右端，所得的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad (3)$$

称为函数 $f(x)$ 的**傅里叶级数**. f(x)的傅里叶级数不一定等于f(x)

例　将以 2π 为周期的函数 $u(t)=\begin{cases}-1, & -\pi\le t<0\\ 1, & 0\le t<\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解 $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos nt dt$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nt dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nt dt=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\sin nt dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nt dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nt dt$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

所以函数 $u(t)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t+\cdots\right].$$

正弦级数与余弦级数

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，则

(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时，其傅里叶系数为

$$a_n = 0 \ (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \ \ (n = 1, 2, 3 \cdots),$$

即奇函数的傅里叶级数是只含有正弦项的**正弦级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时，其傅里叶系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = 0 \ \ (n = 1, 2, \cdots),$$

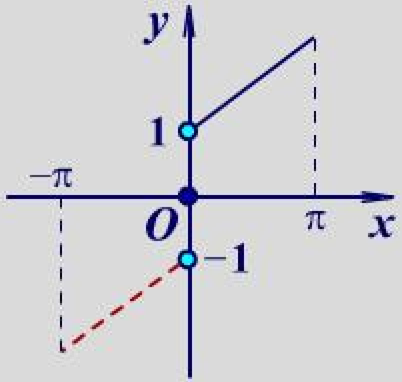
即偶函数的傅里叶级数是只含有余弦项的**余弦级数**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

例 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 先求正弦级数. 为此对 $f(x)$ 进行奇延拓, 则

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx dx$$



$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{(x+1)\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[1-(\pi+1)\cos n\pi\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{n}, & n=1,3,5,\cdots\\[2ex] -\dfrac{2}{n}, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

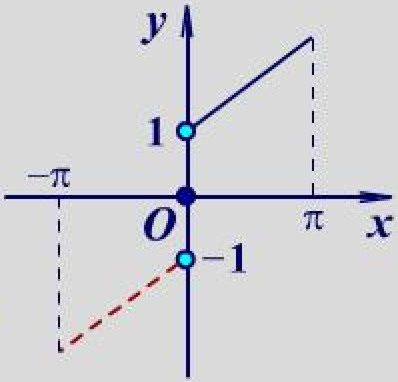
于是 $x+1=\dfrac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\dfrac{\pi}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\cdots\right]$

$(0<x<\pi)$.

例 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 先求正弦级数. 为此对 $f(x)$ 进行奇延拓.

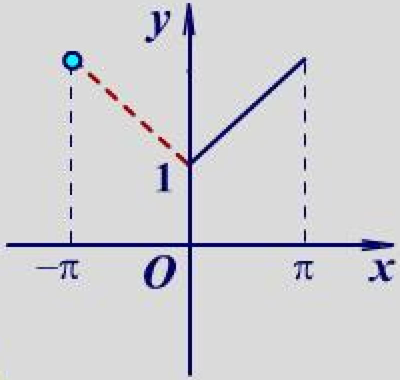
再求余弦级数 为此对 $f(x)$ 进行偶延拓.



$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,dx=\pi+2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$



故 $$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

$(0\le x\le\pi)$.

一般周期函数的傅里叶级数

定理　设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 在区间 $[-l, l]$ 上满足狄利克雷收敛定理的条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}.$$

如果函数 $f(x)$ 为奇函数，则

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx;$$

如果函数 $f(x)$ 为偶函数，则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

例 将函数 $f(x)=10-x\ (5<x<15)$ 展开成傅里叶级数.

解一 作变量代换 $z=x-10\quad(5<x<15)$, 则

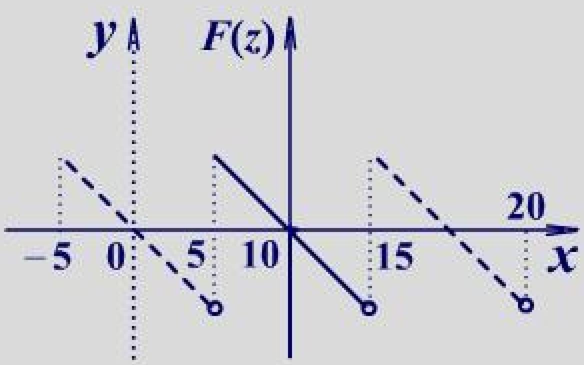
$$f(x)=f(z+10)=-z=F(z)\quad(-5<z<5),$$

补充定义 $F(-5)=5$, 然后将 $F(z)$ 作周期延拓 ($T=10$), 拓广后的函数满足收敛定理的条件, 且展开式在 $(-5,5)$ 内收敛于 $F(z)$.

$$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5(-z)\sin\frac{n\pi z}{5}dz$$

$$=(-1)^n\frac{10}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots),$$



$$\therefore\ F(z)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi z}{5}\quad(-5<z<5),$$

$$10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left[\frac{n\pi}{5}(x-10)\right]=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x\ (5<x<15).$$

例 将函数 $f(x)=10-x$ $(5<x<15)$ 展开成傅里叶级数.

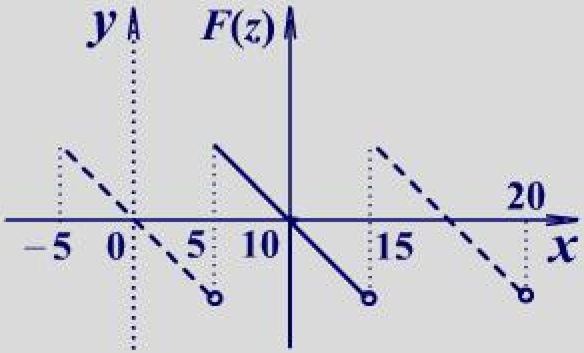
解一 $10-x=\dfrac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi}{5}x$ $(5<x<15)$.

解二 直接计算傅里叶系数.

$$a_n=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$=2\int_5^{15}\cos\frac{n\pi x}{5}dx-\frac{1}{5}\int_5^{15}x\cos\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$=0\quad(n=1,2,\cdots),$$



$$a_0=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx=(-1)^n\frac{10}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以 $f(x)=10-x=\dfrac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi}{5}x$ $(5<x<15)$.