

注：本资料仅供参考:题型、难度、知识点，

请认真学习，学懂学通相关要点

一、填空题，将正确答案填在横线上：

1、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x t^3 e^t dt}{xe^x} =$ _____.

2、 定积分 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x + \cos x}{1 + \sin^2 x} dx =$ _____.

3、 曲线 $y = -\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 从 $x=0$ 到 $x=1$ 的弧长 $l =$ _____.

4、 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛半径为 $R =$ _____, 收敛域为 _____.

5、 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ = _____.

6、 $f(x) = \frac{1}{2-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 _____.

7、 $\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n dx =$ _____.

8、 若 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^q} dx$ 收敛，则 q 的取值范围是 _____.

9、 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = 1 - \frac{1}{n}$, 则其通项 $u_n =$ _____, 和 $S =$ _____.

10、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) =$ _____.

二、选择题

1、 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} x^n$ 的收敛域是 ()

A. $(-5, 5)$

B. $[-5, 5]$

C. $(-5, 5]$

D. $[-5, 5)$

2、 关于数项级数的收敛性，下面说法正确的是 ()

A. 绝对收敛必收敛

B. 一致收敛必绝对收敛

C. 绝对收敛必收敛

D. 无法确定

3、下列说法正确的是()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 发散

D. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

4、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} (x \in [0, \pi])$ ()

A. 条件收敛

B. 绝对收敛

C. 发散

D. 敛散性不确定

5、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ 在 $(-1, 1)$ 内的和函数是 ()

A. $\frac{1}{1+x^2}$

B. $-\frac{1}{1+x^2}$

C. $\frac{1}{1-x^2}$

D. $-\frac{1}{1-x^2}$

三、计算积分

1. 求不定积分 $\int x \sin x dx$

2. 求不定积分 $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx$

3. 求定积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{2-x}} dx$

4. 求定积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$

5. 求定积分 $\int_{-1}^1 \frac{1+\sin x}{1+x^2} dx$

6. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

7. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$

8. 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

四、计算题

1、计算由曲线 $y = \sin x$ 和直线 $x = 0$ 、 $x = \frac{\pi}{4}$ 以及 x 轴所围成的平面图形的面积及其绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

2、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的和函数并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

五、级数展开

1、将 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ 展开成分别展开为麦克劳林公式和关于 $x-1$ 的幂级数并指出收敛域.

2、将函数 $f(x) = x, x \in [0,1]$ 在 $[0,1]$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

六、讨论题

1、判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}$ 的敛散性 (绝对收敛, 条件收敛或发散) .

2、判别函数列 $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{x^n}{1+x^n} \right\}$ 在下列区间的一致收敛性:

(i) $x \in [0, r]$ (其中 $0 < r < 1$);

(ii) $x \in [0, 1]$.

3、判别函数列 $f_n(x) = e^{-nx}$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

4、讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的一致收敛性: (1) $x \in [0, r]$ (其中 $0 < r < 1$); (2) $x \in [0, 1]$.

七、举例讨论: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不收敛; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

发散; (3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

八、试证明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ 在 $(-1,1)$ 连续并求出它的和函数.

