

概率论与数理统计作业 3 月 18 日

March 18, 2025

练习 1. 口袋中有 5 个球, 编号为 1, 2, 3, 4, 5. 从中任取 3 个, 以 X 表示取出的 3 个球中的最大号码.

- (1) 试求 X 的分布列;
- (2) 写出 X 的分布函数, 并作图.

练习 2. 掷一颗骰子 4 次, 求点数 6 出现的次数的概率分布。

练习 3. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 3, \\ \frac{1}{2}, & 3 \leq x < 6, \\ 1, & x \geq 6. \end{cases}$$

试求 X 的概率分布列及 $P(X \leq 3)$, $P(X \leq 6)$, $P(X > 1)$, $P(X \geq 1)$.

练习 4. 向区间 $(0, a)$ 上任意投点, 用 X 表示这个点的坐标. 设这个点落在 $(0, a)$ 中任一小区间的概率与这个小区间的长度成正比, 而与小区间位置无关. 求 X 的分布函数和密度函数.

练习 5. 某种型号电子元件的寿命 X (以小时计) 具有以下的概率密度函数

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2}, & x > 1000; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

现有一大批此种元件 (设各元件工作相互独立), 问

- (1) 任取 1 只, 其寿命大于 1500 小时的概率是多少?
- (2) 任取 4 只, 4 只寿命都大于 1500 小时的概率是多少?
- (3) 任取 4 只, 4 只中至少有 1 只寿命大于 1500 小时的概率是多少?
- (4) 若已知一只元件的寿命大于 1500 小时, 则该元件的寿命大于 2000 小时的概率是多少?

练习 6. 某特效药的临床有效率为 0.95, 今有 10 人服用, 问至少有 8 人治愈的概率是多少?

解. 设 X 为 10 人中被治愈的人数, 则 $X \sim b(10, 0.95)$, 而所求概率为

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{8} 0.95^8 0.05^2 + \binom{10}{9} 0.95^9 0.05 + \binom{10}{10} 0.95^{10} \\ &= 0.0746 + 0.3151 + 0.5988 = 0.9885. \end{aligned}$$

10 人中有 8 人以上被治愈的概率为 0.9885.

练习 7. 已知某种疾病的发病率为 0.001, 某单位共有 5000 人. 问该单位患有这种疾病的人数不超过 5 人的概率为多少?

练习 8. 某仪器装了 3 个独立工作的同型号电子元件, 其寿命 (单位: h) 都服从同一指数分布, 密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{600} e^{-\frac{x}{600}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求: 此仪器在最初使用的 200 h 内, 至少有一个此种电子元件损坏的概率.

练习 9. 设随机变量 X 服从 $(0, 10)$ 上的均匀分布, 现对 X 进行 4 次独立观测, 试求至少有 3 次观测值大于 5 的概率.

练习 10.

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

试求 k , 使得 $P(X > k) = 0.5$.

练习 11. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(108, 3^2)$, 试求

- (1) $P(102 < X < 117)$;
- (2) 常数 a , 使得 $P(X < a) = 0.95$.

练习 12. 某地区成年男子的体重 X (kg) 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 若已知 $P(X \leq 70) = 0.5$, $P(X \leq 60) = 0.25$.

- (1) 求 μ 与 σ 各为多少?
- (2) 若在这个地区随机地选出 5 名成年男子, 问其中至少有两人体重超过 65 kg 的概率是多少?