广东海洋大学 2018-2019 学年第一学期

《数学分析 3》课程试题 (A 卷) 参考答案

一、填空题 (共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分)

1	2	3	4
0	yx^{y-1}	$2x+4y+z=9$	$-\frac{4}{\sqrt{5}}$

二、判断题 (共 4 小题，每小题 2 分，共 8 分)

1	2	3	4
$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$

三、计算题 (共 8 小题，每小题 9 分，共 72 分)

1. 在椭圆 $3x^2+y^2=12$ 内接一个底边平行于长轴的等腰三角形，用 Lagrange 乘数法求该三角形的最大面积。

   解．设三角形三个定点 $A(2,0), B(x,y), C(x,-y), x\neq 2, y>0$，则面积为 $S=(2-x)|y|$，因此，目标函数可以取作

   $$S^2=(2-x)^2y^2, -------2'$$

   约束条件为

   $$3x^2+y^2=12. --------4'$$

   构造 *Lagrange* 函数:

   $$L(x,y,\lambda)=(2-x)^2y^2+\lambda(3x^2+y^2-12), -----6'$$

   由 $L_x=L_y=L_\lambda=0$ 得 $(-1,3)$. 由于最大面积一定存在，此唯一的稳定点就是最大值点，最大面积是 $S_{\max}=9$. ————9' □

2. 设函数 $f(s)$ 和 $g(s)$ 分别二阶和一阶连续可导，二元函数 $u(x,t)=\dfrac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)\mathrm{d}s$，求 u_{tt} 和 u_{xx}。

   解．直接计算得

   $$\begin{aligned}
   u_t =&\frac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)]+\frac{1}{2}[g(x+at)+g(x-at)], ---2'\\
   u_{tt} =&\frac{1}{2}[a^2f''(x-at)+a^2f''(x+at)]+\frac{1}{2}[ag'(x+at)-ag'(x-at)], ----5'\\
   u_x =&\frac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]+\frac{1}{2a}[g(x+at)-g(x-at)], ----7'\\
   u_{xx} =&\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{1}{2a}[g'(x+at)-g'(x-at)]. ----9'
   \end{aligned}$$

   □

3. 含参变量无穷限积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x^2}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是否一致收敛？通过计算加以说明。

解． 因为 $\left|\frac{\sin(tx)}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2}$， ——*3'*

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛， ——*6'*

由 M 判别法，含参变量无穷限积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x^2}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛. ——*9'* □

4. 计算由平面 $z=0$ 与曲面 $y=\sqrt{x},y=x^3,z=1+x^2+y^2$ 所围曲顶柱体的体积。

解． 所求曲顶柱体的体积为

$$V=\iint_D(1+x^2+y^2)dxdy,----3'$$

其中 D 是 xy 平面上由 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x^3$ 所围成的区域，两曲线交于 $(0,0),(1,1)$ 点，自变量 $x\in[0,1]$，因此 ———*-6'*

$$\begin{aligned}V=&\int_0^1 dx\int_{x^3}^{\sqrt{x}}(1+x^2+y^2)dy\\=&\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^3+x^{5/2}-x^5+\frac{1}{3}x^{3/2}-\frac{1}{3}x^9\right)dx\\=&\frac{69}{140}.------9'\end{aligned}$$

□

5. 用极坐标变换计算二重积分 $\iint_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant\pi^2\}$。

解． 做极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，区域 D 转化为 $\Delta=\{(r,\theta)|1\leqslant r\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$. 因此，——*3'*

$$\begin{aligned}\iint_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Delta r\cos r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^\pi r\cos r^2\mathrm{d}r\\=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin r^2|_1^\pi\mathrm{d}\theta=\pi(\sin\pi^2-\sin1).\end{aligned}$$

——*9'* □

6. 空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=a,\\y=at,\\z=\frac{1}{2}at^2,\end{cases}$ $a>0,t\in[0,1]$ 的线密度 $\rho(x,y,z)=\sqrt{\frac{2z}{a}}$，求 Γ 质量.

解． Γ 质量

$$M=\int_\Gamma\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_0^1\sqrt{\frac{2\cdot\frac{1}{2}at^2}{a}}\sqrt{a^2+a^2t^2}\mathrm{d}t=\frac{a}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

—*-9'* □

7. 求第一型曲面积分 $\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 S 是立体 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ 的边界曲面。

解．记 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, $S=S_1\cup S_2$, 其中 $S_1: z=1,(x,y)\in D, S_2: z=\sqrt{x^2+y^2},(x,y)\in D$. 在 S_1 上 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=1$, 在 S_2 上 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$. 因此,—-*3'*

$$
\begin{aligned}
I=&\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S\\
=&\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&(1+\sqrt{2})\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

——-*9'* □

8. 求第二型曲线积分 $\iint_\Gamma xy\mathrm{d}x+ye^x\mathrm{d}y$，其中 Γ 为以 $(0,0),(2,0),(2,1),(0,1)$ 为顶点的矩形，逆时针方向为正向。

解．记 $O(0,0),A(2,0),B(2,1),C(0,1)$, 则 $\Gamma=\overrightarrow{OA}\cup\overrightarrow{AB}\cup\overrightarrow{BC}\cup\overrightarrow{CO}$, 各段的参数方程分别表示如下:

$$
\overrightarrow{OA}:\begin{cases}x=x,\\ y=0,\end{cases} x\in[0,2],\ \overrightarrow{AB}:\begin{cases}x=2,\\ y=y,\end{cases} y\in[0,1],
$$
$$
\overrightarrow{CB}:\begin{cases}x=x,\\ y=1,\end{cases} x\in[0,2],\ \overrightarrow{OC}:\begin{cases}x=0,\\ y=y,\end{cases} y\in[0,1].
$$

——*5'*

因此,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Gamma xy\mathrm{d}x+ye^x\mathrm{d}y\\
=&\int_{\overrightarrow{OA}}xy\mathrm{d}x+ye^x\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{AB}}xy\mathrm{d}x+ye^x\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{BC}}xy\mathrm{d}x+ye^x\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{CO}}xy\mathrm{d}x+ye^x\mathrm{d}y\\
=&0+\int_0^1 ye^2\mathrm{d}y+\int_2^0 x\mathrm{d}x+\int_1^0 y\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}(e^2-5).
\end{aligned}
$$

—-*9'* □

四、证明题 (共 2 小题，每小题 4 分，共 8 分)

1. 证明函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在平面上每一点 (x_0,y_0) 都是可微的。

证明．函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x_0,y_0)=&[(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2]-[x_0^2+y_0^2]\\
=&2x_0\Delta x+2y_0\Delta y+(\Delta x\Delta y)^2,----1'
\end{aligned}
$$

取 $\alpha=0,\beta=(\Delta x)^2\Delta y$，则

$$\Delta f(x_0,y_0)=2x_0\Delta x+2y_0\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,-----2'$$

显然，当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时,$\alpha\to 0,\beta\to 0$，因此函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在点 (x_0,y_0) 可微且

$$df|_{(x_0,y_0)}=2x_0\Delta x+2y_0\Delta y.-----4'$$

□

2. 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，并且对 D 内任一闭子区域 D'，有 $\iint_{D'}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，证明：$f(x,y)\equiv 0$，$(x,y)\in D$。

证明 . 用反证法. 假设 $f(x,y)\not\equiv 0,(x,y)\in D$，则 $\exists P_0(x_0,y_0)\in D^\circ$，使得 $f(x_0,y_0)\neq 0$，不妨设 $f(x_0,y_0)>0$. 由连续函数的保号性，$\exists\delta_0>0$，使得 $\bar{B}_{\delta_0}(P_0)\subset D^\circ$ 且 $f(x,y)\geqslant\frac{f(x_0,y_0)}{2}>0,(x,y)\in\bar{B}_{\delta_0}(P_0)$，即 $f(x,y)$ 在 $\bar{B}_{\delta_0}(P_0)$ 非负，故 —–*2'*

$$\iint_{\bar{B}_{\delta_0}(P_0)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\frac{f(x_0,y_0)}{2}\iint_{\bar{B}_{\delta_0}(P_0)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{f(x_0,y_0)}{2}\cdot\pi\delta_0^2>0,$$

这与已知矛盾，从而 $f(x,y)\equiv 0,(x,y)\in D$.—–*4'* □