7.4 关系的性质

定义7.11 设 R 为A上的关系，

(1) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的.

(2) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的.

实例

自反：全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反：实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系，其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

R_2 自反，R_3反自反，R_1既不是自反的也不是反自反的.

对称性与反对称性

定义7.12 设 R 为 A上的关系，

(1) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$, 则称 R 为 A上对称的关系.

(2) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R \rightarrow x=y)$, 则称 R 为 A上的反对称关系.

例

设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系，其中

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$， $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$， $R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

R_1：对称和反对称； R_2：只有对称；R_3：只有反对称；

R_4：不对称、不反对称

对称性与反对称性

定义7.12 设 R 为 A上的关系,

(1) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \land <x,y> \in R \rightarrow <y,x> \in R)$, 则称 R 为 A上对称的关系.

(2) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \land <x,y> \in R \land <y,x> \in R \rightarrow x=y)$, 则称 R 为 A上的反对称关系.

实例

对称关系：A上的全域关系E_A、恒等关系I_A、空关系$\varnothing$

反对称关系：恒等关系I_A、小于等于关系L_A、整除关系D_A、空关系$\varnothing$.

传递性

定义7.13 设R为A上的关系，若

$$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\rightarrow\langle x,z\rangle\in R),$$

则称 R 是A上的传递关系.

实例： A上的全域关系 E_A，恒等关系 I_A和空关系 $\varnothing$，小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系

例 设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系，其中

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$$

R_1和R_3是A上的传递关系，R_2不是A上的传递关系.

关系性质成立的充要条件

定理7.9 设R为A上的关系，则

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明

证明

(1) 必要性（自反 $\Rightarrow I_A \subseteq R$）

任取$<x,y>$, 由于R在A上自反必有

$$<x,y> \in I_A \Rightarrow x,y \in A \wedge x=y \Rightarrow <x,y> \in R$$

从而证明了$I_A \subseteq R$

充分性（$I_A \subseteq R \Rightarrow$ 自反）.

任取x, 有

$$x \in A \Rightarrow <x,x> \in I_A \Rightarrow <x,x> \in R$$

因此R在A上是自反的.

证明

证明

(2) 必要性 (反自反 $\Rightarrow$ $R\cap I_A=\varnothing$)

反证法. 设$R\cap I_A\neq\varnothing$, 则必存在$<x,y>$,

$$<x,y>\in R\cap I_A$$
$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge <x,y>\in I_A$$
$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge x=y$$
$$\Rightarrow x\in A\wedge <x,x>\in R$$

与R 在A上反自反矛盾.

充分性 ($R\cap I_A=\varnothing$ $\Rightarrow$ 反自反) .

任取x, 有

$$x\in A\Rightarrow <x,x>\in I_A\Rightarrow <x,x>\notin R$$

因此 R 在A上是反自反的.

证明

(3) 必要性（对称 $\Rightarrow$ $R=R^{-1}$）.

任取$\langle x,y\rangle$,

$$\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R^{-1}$$

所以 $R = R^{-1}$

充分性（$R=R^{-1} \Rightarrow$ 对称）.

任取$\langle x,y\rangle$, 由$R = R^{-1}$得

$$\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle x,y\rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$$

所以R在A上是对称的

证明

(4) 必要性. (反对称 $\Rightarrow$ $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$)

任取$<x,y>$, 有

$<x,y> \in R \cap R^{-1}$

$\Rightarrow <x,y> \in R \wedge <x,y> \in R^{-1}$

$\Rightarrow <x,y> \in R \wedge <y,x> \in R$

$\Rightarrow x=y \wedge x,y \in A$

$\Rightarrow <x,y> \in I_A$

这就证明了$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

证明

(4) 充分性（$R\cap R^{-1}\subseteq I_A \Rightarrow$ 反对称）．

任取$<x,y>$,

$<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R$

$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge<x,y>\in R^{-1}$

$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1}$

$\Rightarrow <x,y>\in I_A$

$\Rightarrow x=y$

从而证明了R在A上是反对称的.

证明

(5) 必要性（传递 $\Rightarrow R\circ R\subseteq R$）.

任取 $\langle x,y\rangle$ 有

$$\langle x,y\rangle\in R\circ R$$

$$\Rightarrow \exists t\,(\langle x,t\rangle\in R\land\langle t,y\rangle\in R)$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in R$$

所以 $R\circ R\subseteq R$

充分性（$R\circ R\subseteq R\Rightarrow$ 传递）.

任取 $\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in R$, 则

$$\langle x,y\rangle\in R\land\langle y,z\rangle\in R$$

$$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R\circ R$$

$$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R$$

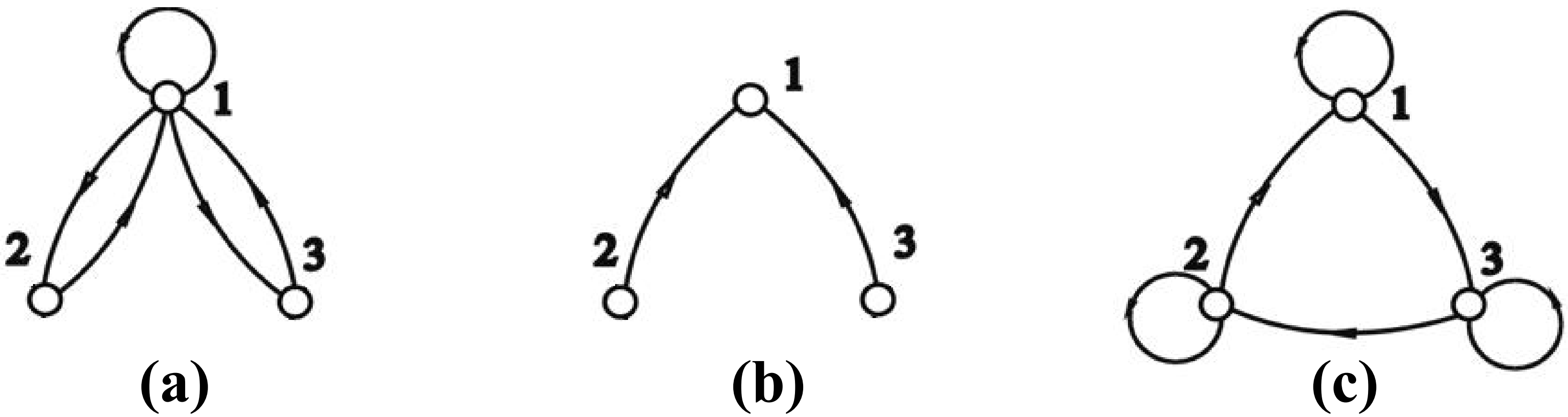
所以 R 在 A 上是传递的

关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$，且$i \neq j$，则$r_{ji}=0$	M^2中1位置，M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边，是一对方向相反的边	两点之间有边，是一条有向边	点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则x_i到x_k也有边

关系性质的判别

例9 判断下列各图的性质



解：

(a) 对称

(b) 反自反、反对称、传递

(c) 自反、反对称

关系的性质和运算之间的联系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

$R_1=\{<2,3>, <5,-7>\}$ 反自反

$R_2=\{<3,2>, <1,4>\}$ 反自反

$R_1 \circ R_2 =\{<2,2>\}$ 不是反自反