

概率论与数理统计作业 Chap5

April 15, 2025

练习 1. 某药厂生产的某种药品, 声称对某疾病的治愈率为 80%. 现为了检验此治愈率, 任意抽取 100 个此种病患者进行临床试验, 如果有多于 75 人治愈, 则此药通过检验. 试在以下两种情况下, 分别计算此药通过检验的可能性.

(1) 此药的实际治愈率为 80%,

(2) 此药的实际治愈率为 70%.

解. 记 $n = 100$, Y_n 为 100 个临床受试者中的治愈者人数.

(1) 因为 $Y_n \sim b(100, 0.8)$, $E(Y_n) = 80$, $\text{Var}(Y_n) = 16$. 所以通过检验的可能性为

$$\begin{aligned} P(Y_n > 75) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{75 - 0.5 - 80}{4}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{5.5}{4}\right) = \Phi(1.375) = 0.9155. \end{aligned}$$

即此药通过检验的可能性是较大的.

(2) 因为 $Y_n \sim b(100, 0.7)$, $E(Y_n) = 70$, $\text{Var}(Y_n) = 21$. 所以通过检验的可能性为

$$\begin{aligned} P(Y_n > 75) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{75 - 0.5 - 70}{\sqrt{21}}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.982) = 1 - 0.8370 = 0.1630. \end{aligned}$$

即此药通过检验的可能性是很小的.

练习 2. 某保险公司多年的统计资料表明, 在索赔户中被盗索赔户占 20%, 以 X 表示在随意抽查的 100 个家赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

(1) 写出 X 的分布列,

(2) 求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

解. (1) X 服从 $n = 100, p = 0.2$ 的二项分布 $b(100, 0.2)$, 即

$$P(X = k) = \binom{n}{k} 0.2^k 0.8^{100-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

(2) 利用棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理, 有

$$\begin{aligned} P(14 \leq X \leq 30) &= P(X \leq 30) - P(X \leq 14) \\ &\approx \Phi\left(\frac{30 - 100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}}\right) - \Phi\left(\frac{14 - 100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}}\right) \\ &= \Phi(2.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(2.5) - 1 + \Phi(1.5) \\ &= 0.9938 - 1 + 0.9332 = 0.927. \end{aligned}$$

这表明: 被盗索赔户在 14 与 30 户之间的概率近似为 0.927.

练习 3. 某电子计算机主机有 100 个终端, 每个终端有 80 % 的时间被使用. 若各个终端是否被使用是相互独立的, 试求至少有 15 个终端空闲的概率.

解. 记 X 为 100 个终端中被使用的终端个数, 则 $X \sim b(100, 0.8)$. 利用棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理, 所求概率为

$$\begin{aligned} P(X \leq 85) &\approx \Phi\left(\frac{85 - 100 \times 0.8}{\sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2}}\right) \\ &= \Phi(1.25) = 0.8944. \end{aligned}$$

这表明至少有 15 个终端空闲的概率近似为 0.8944.

练习 4. 有一批建筑房屋用的木柱, 其中 80 % 的长度不小于 3 m, 现从这批木柱中随机地取出 100 根, 问其中至少有 30 根短于 3 m 的概率是多少?

解. 记 X 为 100 根木柱中长度不小于 3 m 的根数, 则 $X \sim b(100, 0.8)$. 利用棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理, 所求概率为

$$\begin{aligned} P(X \leq 70) &\approx \Phi\left(\frac{70 - 100 \times 0.8}{\sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062. \end{aligned}$$

这表明至少有 30 根木柱短于 3 m 的概率近似为 0.0062.

练习 5. 掷一颗骰子 100 次, 记第 i 次掷出的点数为 X_i , $i = 1, 2, \dots, 100$, 点数之平均为 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} X_i$. 试求概率 $P(3 \leq \bar{X} \leq 4)$.

解. 由题意可得

$$E(X_i) = 3.5, \quad \text{Var}(X_i) = \frac{35}{12}, \quad E(\bar{X}) = 3.5, \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{7}{240}.$$

利用林德伯格-莱维中心极限定理, 可得

$$P(3 \leq \bar{X} \leq 4) \approx \Phi\left(\frac{4 - 3.5}{\sqrt{7/240}}\right) - \Phi\left(\frac{3 - 3.5}{\sqrt{7/240}}\right) = 2\Phi(2.9277) - 1 = 0.9966.$$

这表明: 掷 100 次骰子点数之平均在 3 到 4 之间的概率近似为 0.9966, 很接近于 1.

练习 6. 某工厂每月生产 10000 台液晶投影机, 但它的液晶片车间生产液晶片合格品率为 80 %, 为了以 99.7 % 的可能性保证出厂的液晶投影机都能装上合格的液晶片, 试问该液晶片车间每月至少应该生产多少片液晶片?

解. 设每月至少应该生产 n 片液晶片, 其中合格品数记为 X , 则有 $X \sim b(n, 0.80)$. 下求 n , 使下述概率不等式成立

$$P(X \geq 10000) \geq 0.997, \quad \text{或} \quad P(X < 10000) \leq 0.003,$$

利用二项分布的正态近似, 可得

$$\Phi\left(\frac{10000 - 0.8n}{\sqrt{0.8 \times 0.2 \times n}}\right) \leq 0.003,$$

查表可得

$$\frac{10000 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}} \leq -2.75,$$

由此解得 $n > 12654$, 即每月至少应该生产 12654 片液晶片.

练习 7. 某医院一个月接受破伤风患者的人数是一个随机变量, 它服从参数 $\lambda = 5$ 的泊松分布, 各月接受破伤风患者的人数相互独立. 利用中心极限定理求一年中前 9 个月内接受的患者 40 人 \sim 50 人的概率. ($\Phi(0.745) = 0.7718$)

解. 记 $X_k (k = 1, 2, \dots, 9)$ 是第 k 个月医院接受破伤风患者的人数, 按题意 $X_k \sim \pi(5)$. 利用中心极限定理有

$$\begin{aligned} P\left\{40 \leq \sum_{k=1}^9 X_k \leq 50\right\} &= P\left\{\frac{40 - 9 \times 5}{\sqrt{9 \times 5}} \leq \frac{\sum_{k=1}^9 X_k - 9 \times 5}{\sqrt{9 \times 5}} \leq \frac{50 - 9 \times 5}{\sqrt{9 \times 5}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{50 - 45}{\sqrt{45}}\right) - \Phi\left(\frac{40 - 45}{\sqrt{45}}\right) = \Phi(0.745) - \Phi(-0.745) \\ &= 2\Phi(0.745) - 1 = 2 \times 0.7718 - 1 = 0.5436. \end{aligned}$$

练习 8. 有一批建筑房屋用的木柱, 其中 80% 的长度不小于 3m, 现从这批木柱中随机地取 100 根, 利用中心极限定理求其中至少有 30 根短于 3 m 的概率. ($\Phi(2.5) = 0.9938$)

解. 按题意, 可认为 100 根木柱是从为数甚多的木柱中抽取得到的, 因而可当作放回抽样来看待. 将检查一根木柱看它是否短于 3 m 看成是一次试验, 检查 100 根木柱相当于做 100 次重伯努利试验. 以 X 记被抽取的 100 根木柱中长度短于 3m 的根数, 则 $X \sim b(100, 0.2)$. 于是, 由中心极限定理有

$$\begin{aligned} &P\{X \geq 30\} \\ &= P\{30 \leq X < \infty\} \\ &= P\left\{\frac{30 - 100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}} \leq \frac{X - 100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}} < \frac{\infty - 100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}}\right\} \\ &= \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{30 - 20}{\sqrt{16}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062. \end{aligned}$$