概率论与数理统计作业 3 月 7 日

March 18, 2025

练习 1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 抛三枚硬币;

(2) 抛两颗骰子;

(3) 连续抛一枚硬币, 直至出现正为之;

(4) 口袋中有黑、白、红球各一个，从中任取两个球; 先从中取出一个，不放回再取出一个.

解. (1) $\Omega = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$, 共含有 $2^3 = 8$ 个样本点, 其中 0 表示反面,1 表示正面.

(2) $\Omega = \{(x,y) : x, y = 1,2,3,4,5,6\}$, 共含有 $6^2 = 36$ 个样本点.

(3) $\Omega = \{(1),(0,1),(0,0,1),(0,0,0,1),\cdots\}$, 共含有可列个样本点.

(4) $\Omega = \{$黑白, 黑红, 白黑, 白红, 红黑, 红白$\}$.

练习 2. 设 A、B、C 为三事件, 试表示下列事件:

(1) A、B、C 都发生或都不发生;

(2) A、B、C 中不多于一个发生;

(3) A、B、C 中不多于两个发生;

(4) A、B、C 中至少有两个发生.

解. (1) $ABC \cup \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

(2) $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C} \cup A\ \overline{B}\ \overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\ \overline{B}\ C$.

(3) $\Omega - ABC = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

(4) $AB \cup AC \cup BC$.

练习 3. 掷两颗骰子，求下列事件的概率:

(1) 点数之和为 6;

(2) 点数之和不超过 6;

(3) 至少有一个 6 点.

解.

$$\Omega=\left\{\begin{array}{llllll}(1,1), & (1,2),(1,3), & (1,4),(1,5), & (1,6),\\ (2,1), & (2,2),(2,3), & (2,4),(2,5), & (2,6),\\ (3,1), & (3,2),(3,3), & (3,4),(3,5), & (3,6),\\ (4,1), & (4,2),(4,3), & (4,4),(4,5), & (4,6),\\ (5,1), & (5,2),(5,3), & (5,4),(5,5), & (5,6),\\ (6,1), & (6,2),(6,3), & (6,4),(6,5), & (6,6),\end{array}\right\},$$

$A=$“点数之和为 6”$=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$,
$B=$“点数之和不超过 6 ”
$=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$
$C=$“至少有一个 6 点”
$=\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$ 所以
(1)$P(A)=5/36$; (2)$P(B)=5/12$; (3)$P(C)=11/36$.

练习 4. 从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张, 求下列事件的概率:

(1) 全是黑桃;

(2) 同花; (指四张牌的花色相同, 总共有四种花色, 分别是黑桃, 红心, 方块, 梅花)

(3) 没有两张同一花色;

(4) 同色.(指牌的颜色相同，扑克牌有红色（红心和方块）和黑色（梅花和黑桃）两种颜色)

解. 52 张牌中任取 4 张, 共有 $\binom{52}{4}$ 种等可能的取法, 这是分母.

(1) 4 张黑桃只能从 13 张黑桃中取出, 共有 $\binom{13}{4}$ 种取法, 这是分子, 于是

$$P(\text{ 全是黑桃})=\frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}=0.002641.$$

(2) 共有 4 种花色, 而“4 张同花”只能从同一花色的 13 张牌中取出, 所以共有 $4\binom{13}{4}$ 种取法, 于是

$$P(\text{ 同花})=\frac{4\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}=0.010564.$$

(3) “没有两张同一花色”只能从各种花色 (13 张牌) 中各取 1 张, 共有 13^4 种取法, 于是

$$P(\text{ 没有两张同一花色})=\frac{13^4}{\binom{52}{4}}=0.105498.$$

(4) 共有 2 种颜色, 而每种颜色只能从同一颜色的 26 张牌中任取 4 张, 所以共有 $2\times\binom{26}{4}$ 种取法, 于是

$$P(\text{同色})=\frac{2\binom{26}{4}}{\binom{52}{4}}=0.110444.$$

练习 5. 某工厂一个班组共有男工 9 人、女工 5 人，现要选出 3 个代表，问选的 3 个代表中至少有 1 个女工的概率是多少?

解. 设事件 A 为"3 个代表中至少有一个女工", 则 $\overline{A}$ 为"3 个代表全为男工. 因为

$$P(\overline{A})=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{14}{3}}=\frac{3}{13},$$

所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{3}{13}=\frac{10}{13}.$$

练习 6. 设 A_1,A_2,A_3 相互独立, 且 $P(A_i)=2/3, i=1,2,3$. 试求 A_1,A_2,A_3 中

(1) 至少出现一个的概率;

(2) 恰好出现一个的概率;

(3) 最多出现一个的概率.

解. (1) $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3)=1-(1/3)^3=26/27.$

(2) $P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=3\times(2/3)\times(1/3)^2=2/9.$

(3) $P(\text{最多出现一个})=P(\text{ 恰好出现一个})+P(\text{都不出现})=2/9+1-26/27=7/27.$

练习 7. 钥匙掉了，掉在宿舍里、掉在教室里、掉在路上的概率分别是 50%、30% 和 20%，而掉在上述三处地方被找到的概率分别是 0.8、0.3 和 0.1。试求找到钥匙的概率。

解. 记事件 A_1 为"钥匙掉在宿舍里", A_2 为"钥匙掉在教室里", A_3 为"钥匙掉在路上", 事件 B 为"找到钥匙"。由全概率公式得

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=0.5\times0.8+0.3\times0.3+0.2\times0.1=0.51.$$

练习 8. 两台车床加工同样的零件，第一台出现不合格品的概率是 0.03，第二台出现不合格品的概率是 0.06，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件数比第二台加工的零件数多一倍。

(1) 求任取一个零件是合格品的概率；(2) 如果取出的零件是不合格品，求它是由第二台车床加工的概率。

解. 记事件 A 为"取到第一台车床加工的零件", 则 $P(A)=\frac{2}{3}$，又记事件 B 为"取到合格品"。

(1) 用全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.94=0.96.$$

(2) 使用贝叶斯公式

$$P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{1}{3}\times0.06}{0.04}=0.5.$$

练习 9. 每门高射炮击中飞机的概率为 0.3，独立同时射击时，要以 99% 的把握击中飞机，需要几门高射炮?

解. 设共需要 n 门高射炮, 记事件 A_i 为"第 i 门炮射击命中目标", $i=1,2,\cdots,n$. 则 $P(A_i)=0.3$, 而

$$\begin{aligned}P(\text{击中飞机}) &= P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\ &= 1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)\\ &= 1-(1-0.3)^n \geqslant 0.99,\end{aligned}$$

由此得 $0.7^n \leqslant 0.01$, 两边取对数解得 $n\geqslant \ln 0.01/\ln 0.7=12.9114$, 所以取 $n=13$, 可以有 99% 的把握击中飞机.

练习 10. 甲、乙两个赌徒在每一局获胜的概率都是 1/2. 两人约定谁先赢得一定的局数就获得全部赌本. 但赌搏在中途被打断了，请问在以下各种情况下，应如何合理分配赌本:

(1) 甲、乙两个赌徒都各需赢 k 局才能获胜;

(2) 甲赌徒还需赢 2 局才能获胜，乙赌徒还需赢 3 局才能获胜;

解. 按甲、乙最终获胜的概率大小来分赌本.

(1) 在这种情况下, 甲、乙两人所处地位是对称的, 因此甲、乙最终获胜的概率都是 1/2, 所以甲得全部赌本的 1/2, 乙得全部赌本的 1/2.

(2) 最多再赌 4 局必分胜负, 若以事件 A_i 表示再赌下去的第 i 局中甲赢, $i=1,2,3,4$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{甲最终获胜}) &= P(A_1A_2\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup \overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\cup\\ &\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4\cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{16}.\end{aligned}$$

所以甲得全部赌本的 11/16, 乙得全部赌本的 5/16.