概率论与数理统计作业 Chap6

April 25, 2025

练习 1. 以下是某工厂通过抽样调查得到的 10 名工人一周内生产的产品数

$$149 \quad 156 \quad 160 \quad 138 \quad 149 \quad 153 \quad 153 \quad 169 \quad 156 \quad 156$$

试由这批数据构造经验分布函数并作图。

解. 此样本容量为 10，经排序可得有序样本：

$$x_{(1)} = 138, x_{(2)} = x_{(3)} = 149, x_{(4)} = x_{(5)} = 153,$$
$$x_{(6)} = x_{(7)} = x_{(8)} = 156, x_{(9)} = 160, x_{(10)} = 169,$$

其经验分布函数

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 138, \\ 0.1, & 138 \le x < 149, \\ 0.3, & 149 \le x < 153, \\ 0.5, & 153 \le x < 156, \\ 0.8, & 156 \le x < 160, \\ 0.9, & 160 \le x < 169, \\ 1, & x \ge 169. \end{cases}$$

图略。

练习 2. 假若某地区 30 名 2000 年某专业毕业生实习期满后的月薪数据如下：

909	1086	1120	999	1320	1091
1079	1081	1130	1336	967	1572
825	914	992	1232	950	775
1203	1025	1096	808	1224	1044
871	1164	971	950	866	738

(1) 构造该批数据的频率分布表 (分 6 组)；

(2) 画出直方图.

解. 画出此处数据最大观测值为 1572, 最小观测值为 738, 故组距近似为

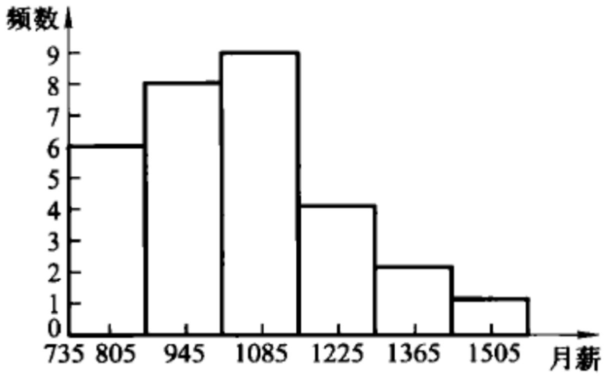
$$d = \frac{1572 - 736}{6} \approx 140,$$

确定每组区间端点为 $a_0, a_0+d=a_1, a_0+2d=a_2, \cdots, a_0+kd=a_k$, 此处可取 $a_0=735$, 于是分组区间为

$$(735,875],(875,1015],(1015,1155],(1155,1295],(1295,1435],(1435,1575].$$

其频数频率分布表如下:

组序	分组区间	组中值	频数	频率	累计频率 / %
1	$(735,875]$	805	6	0.20	20
2	$(875,1015]$	945	8	0.27	47
3	$(1015,1155]$	1085	9	0.30	77
4	$(1155,1295]$	1225	4	0.13	90
5	$(1295,1435]$	1365	2	0.07	97
6	$(1435,1575]$	1505	1	0.03	100
合计			30	1	



练习 3. 在一本书上我们随机地检查了 10 页，发现每页上的错误数为

$$4 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 4$$

试计算其样本均值、样本方差和样本标准差。

解. 样本均值

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{4+5+\cdots+4}{10}=3,$$

样本方差

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{9}\left[(4-3)^2+(5-3)^2+\cdots+(4-3)^2\right]=3.78,$$

样本标准差

$$s=\sqrt{s^2}=1.94.$$

练习 4. 在总体 $N(7.6,4)$ 中抽取容量为 n 的样本，如果要求样本均值落在 $(5.6,9.6)$ 内的概率不小于 0.95，则 n 至少为多少?

解. 样本均值 $\bar{X}\sim N\left(7.6,\frac{4}{n}\right)$，从而按题意可建立如下不等式

$$P(5.6 < \bar{X} < 9.6) = P\left(\frac{5.6-7.6}{\sqrt{4/n}} < \frac{\bar{X}-7.6}{\sqrt{4/n}} < \frac{9.6-7.6}{\sqrt{4/n}}\right) \geq 0.95,$$

即 $2\Phi(\sqrt{n})-1 \geq 0.95$，所以 $\Phi(\sqrt{n}) \geq 0.975$，查表，$\Phi(1.96)=0.975$，故 $\sqrt{n} \geq 1.96$ 或 $n \geq 3.84$，即样本量 n 至少为 4。

练习 5. 由正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 抽取容量为 20 的样本，试求 $P(10\sigma^2 \leq \sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2 \leq 30\sigma^2)$。用 $k_{20}(x)$ 表示服从 $\chi^2(20)$ 的随机变量的分布函数值，其中 $k_{20}(30) = 0.9301$，$k_{20}(10) = 0.0318$。

解. 因为 $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，$\sum_{i=1}^{20}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(20)$，则

$$\begin{aligned} P(10\sigma^2 \leq \sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2 \leq 30\sigma^2) &= P\left(10 \leq \frac{\sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \leq 30\right) \\ &= k_{20}(30) - k_{20}(10). \end{aligned}$$

于是有

$$P(10\sigma^2 \leq \sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2 \leq 30\sigma^2) = 0.8983.$$

练习 6. 设 $x_1,\ldots,x_{16}$ 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本观察值，经计算 $\bar{x} = 9$, $s^2 = 5.32$，试求 $P(|\bar{X}-\mu| < 0.6)$。用 $t_{15}(x)$ 表示服从 $t(15)$ 的随机变量的分布函数，其中 $t_{15}(1.0405) = 0.8427$。

解. 因为

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{s} = \frac{\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}/(n-1)}} \sim t(n-1)$$

注意到 t 分布是对称的，故

$$P(|\bar{X}-\mu| < 0.6) = P\left(\frac{4|\bar{X}-\mu|}{s} < \frac{4\times 0.6}{s}\right) = 2t_{15}(1.0405) - 1.$$

于是有

$$P(|\bar{X}-\mu| < 0.6) = 2\times 0.8427 - 1 = 0.6854.$$

练习 7. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_{15}$ 是总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，求

$$y = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \cdots + X_{15}^2)}$$

的分布。

解. 由于 X_i/σ 为独立同分布的 $N(0,1)$ 随机变量，故

$$\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{10}^2) \sim \chi^2(10),$$

$$\frac{1}{\sigma^2}(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \cdots + X_{15}^2) \sim \chi^2(5),$$

且两者独立，故

$$y = \frac{\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{10}^2)/10}{\frac{1}{\sigma^2}(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \cdots + X_{15}^2)/5} \sim F(10,5).$$