

作业 9 月 17 日

September 17, 2024

练习 1. 试用变量分离法求下列一阶微分方程的通解.

(1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$

(2) $\frac{dy}{dx} = 2xy.$

(3) $xy(1+x^2)dy = (1+y^2)dx.$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$

(5) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}.$

(6) $\frac{dy}{dx} = P(x)y$

练习 2. 将下列方程化为可分离变量方程, 并求解.

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}.$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}.$

练习 3. 求解下列伯努利方程

(1) $\frac{dy}{dx} = 6\frac{y}{x} - xy^2.$

(2) $x\frac{dy}{dx} - 4y = 2x^2\sqrt{y} \quad (x \neq 0, y > 0).$

练习 4. 求解 logistic 人口增长模型

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{k}\right) y, \quad y(t_0) = y_0,$$

其中 k, r 为大于零的常数且 $k > y(t) \geq 0 \ (\forall t \geq 0).$

练习 5. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

的两个互异解. 求证对于该方程的任一解 $y(x)$, 成立恒等式

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = C,$$

其中 C 是某常数.

练习 6. 验证下列方程是恰当方程, 并求出方程的解:

(1) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$

$$(2) (5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy = 0.$$

$$(3) xydx + (\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y})dy = 0.$$

$$(4) 3y + e^x + (3x + \cos y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

练习 7. 试用积分因子法解下列方程:

$$(1) ydx + (y - x)dy = 0.$$

$$(2) (x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0.$$

$$(3) 2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{1 + y^2})dy = 0.$$

练习 8. 试求下列隐式方程的通解.

$$(1) y^2(1 - \frac{dy}{dx}) = (2 - \frac{dy}{dx})^2.$$

$$(2) (\frac{dy}{dx})^3 - 4xy\frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0.$$

$$(3) (\frac{dy}{dx})^5 - 5(\frac{dy}{dx})^2 + 1 = 0.$$