

作业 10 月 17 日

October 16, 2024

练习 1. 在矩形区域 $R : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 上, 考虑微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. 称 $f(x, y)$ 在 R 上关于 y 满足利普希茨条件, 若存在常数 $L > 0$ 使得

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R,$$

L 称为利普希茨常数.

证明: 若 $f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上存在且连续, 则 $f(x, y)$ 在 R 上关于 y 满足利普希茨条件.

练习 2. 试判断下列函数在所给定的区域上关于 y 是否满足利普希茨条件:

1. $f(x, y) = y^{\frac{1}{2}}, (a) |x| \leq 1, 0 < c \leq y \leq d; (b) |x| \leq 1, 0 < y \leq d.$
2. $f(x, y) = xy^2, (a) a \leq x \leq b, c \leq y \leq d; (b) a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty$
3. $f(x, y) = xy, (a) a \leq x \leq b, c \leq y \leq d; (b) a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty; (c)$ 全平面
4. $y' = \frac{x+y}{x-y}, x \neq y.$

练习 3. 证明 $f(x) = x \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上不是利普希茨连续函数.

练习 4. 求方程 $\frac{dx}{dt} = x^2$ 过点 $(0, 1)$ 的第三次近似解.

练习 5. 在矩形区域 $R : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ 上, 考虑方程 $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$. 试利用存在和唯一性定理确定经过点 $(0, 0)$ 的解的存在区间, 并利用逐项逼近序列 (Picard 序列) 逼近的方法, 求通过点 $(0, 0)$ 的第三次近似解.

练习 6. 讨论下列微分方程解的存在区间

- (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x};$
- (2) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2;$

练习 7. 试求下列方程过 (x_0, y_0) 的解, 并由此讨论解对初值的连续性:

- (1) $\frac{dy}{dx} - 3y = e^x;$
- (2) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 e^y.$