

《概率论与数理统计》课程试题 A

一. 填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. A 、 B 、 C 为事件, 事件 “ A 、 B 、 C 都不发生” 表为 _____
2. 袋中有 50 个球, 其中有 10 个白球, 任取 2 个, 恰好有 1 个白球的概率为 _____ (只列出式子)
3. 某班级男生占 60%, 已知该班级男生有 60% 会游泳, 女生有 70% 会游泳, 今从该班级随机地挑选一人, 则此人会游泳的概率为 _____
4. 甲、乙两人的投篮命中率分别为 0.6; 0.7, 现两人各投一次, 两人都投中的概率为 _____

答案: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}, C_{10}^1 C_{40}^1 / C_{50}^2, 60\% \times 60\% + 40\% \times 70\%, 0.6 \times 0.7$

掌握:

- (1) 样本空间、事件及其关系和运算
- (2) 概率的定义、性质、古典概型及几何概型
- (3) 条件概率、乘法公式全概率公式贝耶斯公式
- (4) 事件的独立性、伯努利概型

5. 若 $X \sim P(1)$, 则 $P\{X = E(X)\} = \underline{\hspace{2cm}}$
6. 若 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 则 $F(1.5) = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: $\frac{1^1}{1!} e^{-1}, 1$

掌握:

(5) 六大常见分布

(6) 分布函数及其性质、密度(分布列)函数及其性质、两者之间的关系

(7) 二维变量的联合分布及其边缘分布、变量之间的独立性及相关性、常见的二维分布: 均匀分布

(8) 随机变量的数字特征(期望方差和相关系数)、(独立同分布)中心极限定理

7. 设 X_1, \dots, X_n 是取自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则 $\bar{X} \square \underline{\hspace{2cm}}$

8. 设 X_1, X_2 为取自总体 X 的样本, $X \sim N(0, 1)$, 则 $E(X_1^2 + X_2^2) \underline{\hspace{2cm}}$

9. 设总体 $X \sim N(0, 1)$, X_1, X_2 是样本, 则 $\frac{X_1}{\sqrt{X_2^2}} \square \underline{\hspace{2cm}}$

10. 设 X_1, X_2 是来自总体 X 的一个样本, 若已知 $2X_1 + kX_2$ 是总体期望 $E(X)$ 的无偏估计量, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

答案:

$N(\mu, \sigma^2), 2, t(1), -1$

掌握:

(9) 总体及简单随机样本(简称样本)的概念

(10) 常见统计分布及其性质图像

(11) 抽样分布定理及其重要推论:

1) X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$

\bar{X} 服从 $N(\mu, \sigma^2/n)$, $(n-1)S^2/\sigma^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$, \bar{X} 与 S^2 相互独立

$\frac{X - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 服从 $N(0, 1)$, $\frac{X - \mu}{S/\sqrt{n}}$ 服从 $t(n-1)$

2) X 服从 $N(\mu_1, \sigma^2)$, Y 服从 $N(\mu_2, \sigma^2)$

$\frac{X - Y - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\omega}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$ 服从 $t(n+m-2)$, $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 服从 $F(n-1, m-1) \dots$

(12) 常见总体的参数的点估计(矩法及极大似然法)及正态总体区间估计(双侧)

二. 某仓库有一批零件由甲、乙、丙机床加工的概率分别为 0.5, 0.3, 0.2, 各机床加工的零件为合格品的概率分别为 0.94, 0.9, 0.95, 求全

部零件的合格率. (10 分)

答案:

全概率公式

$$0.5 \times 0.94 + 0.3 \times 0.9 + 0.2 \times 0.95$$

三. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} A + Be^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

求 (1) 常数 A, B ; (2) $P\{-1 < X < 1\}$; (10 分)

答案:

$$\begin{cases} 1 = F(+\infty) = A \\ 0 = F(0) = A + B \text{(连续性)} \end{cases}$$

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1)$$

四. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} cx^2 y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求 (1) 常数 C ; (2) 边缘密度函数 $f_x(x)$ 及 $f_y(y)$. (10 分)

答案:

$$1 = \iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma = \int_0^1 \int_0^1 cx^2 y dx dy = c/6$$

$$0 < x < 1, f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 6x^2 y dy = 3x^2$$

$$f_x(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{同理 } f_y(y) = \begin{cases} 2y & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

五. 某产品合格率是 0.9, 每箱 100 件, 问一箱产品有 84 至 95 件合格品的概率是多少? ($\Phi(1.67) = 0.9525$, $\Phi(2) = 0.9972$) (10 分)

答案：

X	1	0
P	0.9	0.1

$\sum_{i=1}^{100} X_i$ 服从 $B(100, 0.9)$ 近似服从 $N(90, 9)$

$$P(84 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 95) = P\left(\frac{84-90}{3} < \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 90}{3} < \frac{95-90}{3}\right) \\ \approx \phi(5/3) - \phi(-2) = \phi(5/3) + \phi(2) - 1 = \dots$$

六. 设 X_1, \dots, X_n 是取自总体 X 的样本, σ^2 为总体方差, s^2 为样本方差,

证明 s^2 是 σ^2 的无偏估计. (10 分)

答案：

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$$

$$E(X^2) = D(X) + (EX)^2 = \mu^2 + \sigma^2$$

$$E(X_i^2) = \mu^2 + \sigma^2, E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + (EX)^2 = \mu^2 + \sigma^2/n$$

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)\right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n EX_i^2 - nE\bar{X}^2 \right) = \sigma^2$$

七. 已知总体 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta-1}, & 1 < x < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 其中 θ 是未知参数,

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的一个样本, 求参数 θ 的矩估计量 (10 分)

答案:

矩法:

$$\mu_1 = E(X) = (1 + \theta)/2, \quad \theta = 2\mu_1 - 1$$

$$\text{令 } \hat{\mu}_1 = A_1 = \bar{X}, \quad \text{得 } \hat{\theta} = 2\bar{X} - 1$$

另, 极大似然估计:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = 1/(\theta - 1)^n, \quad 1 < x_i < \theta$$

$\hat{\theta} = \max\{x_i\}$, $L(\theta)$ 取最大值。从而估计量 $\hat{\theta} = \max\{X_i\}$

八. 设一正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 样本容量为 n_1 , 样本标准差为 S_1^2 ; 另一正态总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 样本容量为 n_2 , 样本标准差为 S_2^2 ; X 与 Y 相互独立, 试导出 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为 0.9 的置信区间. (10 分)

答案:

$$F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \text{ 服从 } F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

$$P(F_{0.95} < F < F_{0.05}) = 0.9$$

$$\text{解不等式: } F_{0.95} < F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} < F_{0.05}$$

$$\text{得: } \frac{1}{F_{0.05}} S_1^2 / S_2^2 < \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < \frac{1}{F_{0.95}} S_1^2 / S_2^2$$

$(\frac{1}{F_{0.05}} S_1^2 / S_2^2, \frac{1}{F_{0.95}} S_1^2 / S_2^2)$ 即为 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度 0.9 的置信区间。