广东海洋大学 2017 —— 2018 学年第 一 学期

《概率论与数理统计》课程试题答案

课程代码： 19221302

√ 考试 □ A 卷 □ **B** 卷

□ 考查 √ C 卷 □ D 卷

√ 闭卷 □ 开卷 □ E 卷 □ F 卷

题　　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷教师
各题分数	30	15	15	18	12	10						
实得分数												

一．填空题（每题 3 分，共 30 分）

1．若设某种动物从出生起活 20 岁以上的概率为 0.8，活 25 岁以上的概率为 0.5．则如果现在有一个 20 岁的这种动物，它能活 25 岁以上的概率为<u>　5/8　</u>

2．在区间 $(0,1)$ 上随机地取两个数，则“取到的两数之差的绝对值大于 0.3”的概率为<u>　0.49　</u>

3．两门高射炮彼此独立地射击一架敌机，设甲炮击中敌机的概率为 0.9，乙炮击中敌机的概率为 0.8，则敌机被击中的概率为<u>　0.98</u>

4．小王忘了朋友家的电话号码的最后一位数，于是他只能随机拨号，则他第三次才能拨对电话号码的概率为<u>　0.1　</u>

5. 已知 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.5$，$P(A\cup B)=0.9$，则 $P(B-A)=$<u>　0.2</u>

6．设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	1	2
P	0.3	0.1	0.2	0.4

则 $Y=X^3+2$ 的分布律为

Y	-6	2	3	10
P	0.3	0.1	0.2	0.4

7. 设X表示掷一颗均匀的骰子的点数，则$E(2X+1)=$____8____

8．设X_1，X_2，X_3为取自总体X（设X ～ N（0，1））的一个简单随机抽样样本，则 $\dfrac{2X_1^2}{X_2^2+X_3^2}\sim$____F(1, 2)____

9 设总体 X～$N(45,100)$，$X_1,X_2,\cdots X_{10}$ 是来自 X 的样本，则$\overline{X}\sim$ __$N(45,10)$__

10．设X_1,X_2,X_3,X_4是总体X的一个样本，$\frac{1}{8}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{2}X_3+kX_4$是总体期望$EX$的无偏估计量，则$k=$____1/8____；

二．设随机变量X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax^4 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，求 (1) a 的值；（3 分）(2) X 的分布函数$F(x)$；（7 分）（3）$D(-X+2)$（5 分）

解 （1）由于$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，有$\int_0^1 ax^4dx=1$---------(2 分)

所以$a=5$ --------(3 分)

(2) 当$x\le 0$时，$f(x)=0$，则$F(x)=0$

当$0<x<1$时，$F(x)=\int_0^x 5t^4dt=x^5$ ---------(3 分)

当$x\ge 1$时，$F(x)=\int_0^1 5t^4dt=1$

所以$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ x^5 & 0<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$ ---------(7 分)

（3）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 5x^4dx=\dfrac{5}{6}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 5x^4dx=\dfrac{5}{7}$------------(3 分)

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{7}-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5}{252}$

$D(-X+2)=D(X)=\frac{5}{252}$ --------(5 分)

三. 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1,\quad 0<y<1 \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

求（1）$P\{X+Y\le 1\}$（3 分）；（2）边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$（8 分）；（3）判断 X 和 Y 是否独立？并给出理由。（4 分）

解 （1）由 $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_D f(x,y)dydx$

得 $P\{X+Y\le 1\}=\int_0^1[\int_0^{1-x}(x+y)dy]dx$ ---------(2 分)

$=\int_0^1\frac{1-x^2}{2}dx=\frac{1}{3}$

---------(3 分)

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

当 $x\le 0$ 或者 $x\ge 1$ 时， $f(x,y)=0$，则 $f_X(x)=0$

当 $0<x<1$ 时， $f_X(x)=\int_0^1(x+y)dy=x+\frac{1}{2}$

所以 $f_X(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0<x<1 \\ 0, & \textbf{其它} \end{cases}$ ---------(4 分)

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

当 $y\le 0$ 或者 $y\ge 1$ 时， $f(x,y)=0$，则 $f_Y(y)=0$

当$0<y<1$时， $f_Y(y)=\int_0^1(x+y)dx=y+\frac{1}{2}$

所以 $f_Y(y)=\begin{cases} y+\frac{1}{2}, & 0<y<1 \\ 0, & \textbf{其它} \end{cases}$ ---------(8 分)

（3） X 与 Y 不相互独立性， ---------(2 分)

理由如下：存在点$(x_0,y_0)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$， $f(x_0,y_0)=\frac{2}{3}$

使得 $f_X(x_0)\cdot f_Y(y_0)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\neq f(x_0,y_0)$ ---------(4 分)

四．总体 X 具有概率密度 $X\sim f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0 \\ 0 & \textbf{其它} \end{cases}$，其中$\lambda$是未知参数，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的一个样本容量为 n 的简单随机样本，求未知参数λ的 (1) 矩估计值；（8 分）(2) 最大似然估计值.（10 分）

解 （1） $\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$

解得 $\lambda=\frac{1}{\mu_1}$ ----------(4 分)

用样本矩A_1估计总体矩μ_1得 θ 的矩估计量为

$\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}$ ---------(8 分)

(2) 由于样本 $X_i\sim f(x_i)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_i}, & x_i>0 \\ 0, & \textbf{其它} \end{cases}$

似然函数

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases} \prod_{i=1}^{n}[\lambda e^{-\lambda x_i}], & x_i>0 \\ 0, & \textbf{其它} \end{cases} =\begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i} & x_i>0 \\ 0, & \textbf{其它} \end{cases}$$

-----(3 分)

显然$L(\lambda)$的最大值点一定是$L_1(\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$的最大值点，

取对数 $\ln L_1(\lambda)=n\cdot\ln\lambda-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ --------(6 分)

求导数 $\dfrac{d\ln L_1(\lambda)}{d\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$

令$\dfrac{d\ln L_1(\lambda)}{d\lambda}=0$解得

则 λ的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$ --------(10 分)

五. 据某医院统计，凡肝脏手术后能完全复原的概率是 0.9，那么再对 100 名病人实施手术后，有 84 至 95 名病人能完全复原的概率是多少？（12 分） $(\Phi(1.67)=0.9525$，$\Phi(2)=0.9972)$

解 设X为 100 名病人中能完全复原的人数,

则X服从二项分布$X\sim b(100,0.9)$,

于是由$\mu=E(X)=np=90,\ \sigma=\sqrt{D(X)}=3,$ ------------（6 分）

由中心极限定理有

$$P\{84<X<95\}=P\left\{\frac{84-90}{3}<\frac{X-90}{3}<\frac{95-90}{3}\right\}$$

$$=P\left\{-2<\frac{X-90}{3}<1.67\right\}=\Phi(1.67)-\Phi(-2)$$

$$\approx 0.9525-(1-0.9972)=0.9497$$ ---------（12 分）

六. 抽取某种灯泡 9 个样品，测得其平均寿命 $\overline{X}$ =2000（小时），$s^2=0.9$。设灯泡寿命服从$N(\mu,\ \sigma^2)$，其中σ^2为未知时，求μ的置信

度为 0. 95 的置信区间（$t_{0.025}(8)=2.3060$ ，$t_{0.025}(9)=2.2622$）（10 分）

解 （1）均值μ的$1-\alpha$置信区间为

$$\left(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right).\text{---------(3 分)}$$

由题意得$1-\alpha=0.9,\dfrac{\alpha}{2}=0.05$，$t_{0.025}(8)=2.3060$

则均值μ的 95%的置信区间为$\left(2000\pm\dfrac{\sqrt{0.9}}{\sqrt{9}}t_{0.025}(8)\right)$

$=\left(2000\pm0.729\right)=\left(199.271,2000.729\right)$------------（5 分）