作业 11 月 07 日

November 7, 2024

练习 1. 将下面的初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题

(1) $\begin{cases} y''+2y'+7xy=e^{-x}, \\ y(1)=7,\ y'(1)=-2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y^{(4)}+y=xe^{x}, \\ y(0)=1,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=2,\ y'''(0)=0. \end{cases}$

解. (1) 令 $y_1=y, y_2=y'$, 则初值问题变成

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=-7xy_1-2y_2+e^{-x}, \\ y_1(1)=7, \\ y_2(1)=-2. \end{cases}$$

(2) 令 $y_1=y, y_2=y', y_3=y'', y_4=y'''$, 则初值问题变成

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=y_3, \\ y_3'=y_4, \\ y_4'=-y_1+xe^{x}, \\ y_1(0)=1, \\ y_2(0)=-1, \\ y_3(0)=2, \\ y_4(0)=0. \end{cases}$$

练习 2. 试讨论下列的函数组在它们的定义区间上是线性相关的, 还是线性无关的?

(1) $x, \tan x$;

(2) $x^2-x+3,\ 2x^2+x,\ 2x+4$;

(3) e^t, te^t, t^2e^t.

解. (1) 函数组的定义域是 $(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$. 在其定义域上考虑

$$k_1x+k_2\tan x=0,$$

其中 k_1, k_2 是常数. 上式两边对 x 求一次导数, 得

$$k_1+k_2\frac{1}{\cos^2 x}=0.$$

再对 x 求一次导数, 得

$$-2k_2\frac{\sin x}{\cos^3 x}=0.$$

由此推出 $k_2=0$ 及 $k_1=0$. 所以, 函数组在定义域 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ 上线性无关.

(2) 函数组在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关.

(3) 函数组的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 在其定义域上考虑

$$k_1e^t+k_2te^t+k_3t^2e^t=0.$$

于是

$$k_1+k_2t+k_3t^2=0.$$

由此推出 $k_1=k_2=k_3=0$. 所以, 函数组在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关.

练习 3. 试验证

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=0$$

有基本解组 t,e^t, 并求方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=t-1$$

的通解。

解. 易知 t,e^t 是齐线性方程的解, 且 Wronski 行列式

$$W(t,e^t)(0)=-1.$$

故 t,e^t 是齐线性方程的基本解组。下面求一特解。利用常数变易法。由

$$\begin{cases} tC_1'(t)+e^tC_2'(t) & =0,\\ C_1'(t)+e^tC_2'(t) & =t-1.\end{cases}$$

解得

$$C_1'(t)=-1,\quad C_2'(t)=te^{-t}.$$

积分得

$$C_1(t)=-t;\quad C_2(t)=-te^{-t}-e^{-t}.$$

所以, 原方程的通解为

$$x=C_1t+C_2e^t-t^2-t-1.$$

练习 4. 求解下列方程

(1) $y''-3y'-4y=0;$

(2) $4y''+y'+y=0;$

(3) $y''-6y'+9y=0;$

(4) $y'''-2y''-3y'+10y=0;$

解. (1) 特征方程

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

特征根 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$. 故通解为

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x},$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(2) 通解为

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{8}x} \cos \frac{\sqrt{15}}{8} x + C_2 e^{-\frac{1}{8}x} \sin \frac{\sqrt{15}}{8} x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(3) 特征方程

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

特征根 $\lambda_{1,2} = 3$. 故通解为

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x},$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(4) 通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} \cos x + C_3 e^{2x} \sin x,$$

其中 C_1, C_2, C_3 是任意常数。

练习 5. 求解下列方程

(1) $y'' + 2\alpha y' + \alpha^2 y = e^x$ (α 为实数);

(2) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$;

(3) $y'' + 4y = x^2 + 3e^x$;

解. (1) 特征方程

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2 = 0.$$

特征根 $\lambda_{1,2} = -\alpha$. 对应齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 x e^{-\alpha x}.$$

$\alpha \neq -1$ 时, 原方程有形如

$$y = A\mathrm{e}^x$$

的特解. 代入, 得

$$A = \frac{1}{(\alpha + 1)^2}.$$

于是, 原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 x e^{-\alpha x} + \frac{1}{(\alpha + 1)^2} e^x,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

$\alpha = -1$ 时, 1 是二重特征根, 方程有形如

$$y = Ax^2 e^x$$

的特解. 代入, 得 $A=\frac{1}{2}$. 于是, 原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

(2) 通解为

$$y=C_1e^{2x}\cos 2x+C_2e^{2x}\sin 2x+\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{10}\cos 2x+\frac{1}{20}\sin 2x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(3) 特征方程为

$$\lambda^2+4=0.$$

特征根是 $\lambda_{1,2}=\pm 2\mathrm{i}$. 原方程有如下形式的特解

$$y=a+bx+cx^2+d\mathrm{e}^x.$$

代入, 得

$$a=-\frac{1}{8}, b=0, c=\frac{1}{4}, d=\frac{3}{5}.$$

于是, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{5}e^x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

练习 6. 用拉氏变换法求解下列初值问题:

(1) $y''-y'-6y=0, \quad y(0)=1, y'(0)=-1;$

(2) $y''-2y'+2y=e^{-t}, \quad y(0)=0, y'(0)=1;$

(3) $y''+y=\sin 2t, \quad y(0)=0, y'(0)=1.$

解. (1) 在方程两侧取拉氏变换, 令 $Y(s)=L[y]$, 得

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]-[sY(s)-y(0)]-6Y(s)=0.$$

利用初值条件, 得

$$Y(s)=\frac{s-2}{s^2-s-6}=\frac{\frac{1}{5}}{s-3}+\frac{\frac{4}{5}}{s+2}.$$

再反查拉氏变换表, 得所求初值问题的解为

$$y=\frac{1}{5}e^{3x}+\frac{4}{5}e^{-2x}.$$

(2) 所求初值问题的解为

$$y=e^x(-\frac{1}{5}\cos x+\frac{7}{5}\sin x)+\frac{1}{5}e^{-x}.$$

(3) 在方程两侧取拉氏变换, 令 $Y(s)=L[y]$, 而对右侧查表, 得

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+Y(s)=\frac{2}{s^2+4}.$$

利用初值条件, 得

$$Y(s)=\frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{5}{3(s^2+1)}-\frac{2}{3(s^2+4)}.$$

再反查拉氏变换表, 得所求初值问题的解为

$$y(t)=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t.$$