概率论与数理统计作业 3 月 18 日

March 18, 2025

练习 1. 口袋中有 5 个球, 编号为 1, 2, 3, 4, 5. 从中任取 3 个, 以 X 表示取出的 3 个球中的最大号码.

(1) 试求 X 的分布列;

(2) 写出 X 的分布函数, 并作图.

解. (1) 从 5 个球中任取 3 个, 共有 $\binom{5}{3} = 10$ 种等可能取法. X 为取出的 3 个球中的最大号码, 则 X 的可能取值为 3, 4, 5. 因为 $P(X = i) = P(X \le i) - P(X \le i-1)$, 且当 $i \ge 3$ 时, 有 $P(X \le i) = \binom{i}{3}/10$, 所以

$$P(X=3) = P(X \le 3) - P(X \le 2) = \binom{3}{3}/10 - 0 = \frac{1}{10},$$

$$P(X=4) = P(X \le 4) - P(X \le 3) = \binom{4}{3}/10 - \binom{3}{3}/10 = \frac{3}{10},$$

$$P(X=5) = P(X \le 5) - P(X \le 4) = 1 - \binom{4}{3}/10 = \frac{6}{10}.$$

所以 X 的分布列为

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

(2) 由分布函数的定义知

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ 0.1, & 3 \le x < 4, \\ 0.4, & 4 \le x < 5, \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

$F(x)$ 的图形略.

练习 2. 掷一颗骰子 4 次，求点数 6 出现的次数的概率分布。

解. 记 X 为掷 4 次中点数 6 出现的次数，则 X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4$。由确定概率的古典方法得

$$P(X=0) = \frac{5^4}{6^4} = 0.4822,$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\times\frac{5^3}{6^4}=0.3858,$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\times\frac{5^2}{6^4}=0.1157,$$

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\times\frac{5}{6^4}=0.0154,$$

$$P(X=4)=\frac{1}{6^4}=0.0008.$$

将以上结果列为

X	0	1	2	3	4
P	0.4823	0.3858	0.1157	0.0154	0.0008

由以上的计算结果也可以看出：出现 0 次 6 点的可能性最大。

练习 3. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ \frac{1}{3}, & 1\le x<3,\\ \frac{1}{2}, & 3\le x<6,\\ 1, & x\ge 6.\end{cases}$$

试求 X 的概率分布列及 $P(X\le 3)$, $P(X\le 6)$, $P(X>1)$, $P(X\ge 1)$.

解. X 的概率分布列为

X	0	1	3	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$$P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2},$$

$$P(X\le 6)=1,$$

$$P(X>1)=P(X=3)+P(X=6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3},$$

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=\frac{3}{4}.$$

练习 4. 向区间 $(0,a)$ 上任意投点, 用 X 表示这个点的坐标. 设这个点落在 $(0,a)$ 中任一小区间的概率与这个小区间的长度成正比, 而与小区间位置无关. 求 X 的分布函数和密度函数.

解. 记 X 的分布函数为 $F(x)$, 则当 $x<0$ 时, 因为 $\{X\leqslant x\}$ 是不可能事件, 所以 $F(x)=P(X\leqslant x)=0$;

当 $x\geqslant a$ 时, 因为 $\{X\leqslant x\}$ 是必然事件, 所以 $F(x)=P(X\leqslant x)=1$; 当 $0\leqslant x<a$ 时, 有 $F(x)=P(X\leqslant x)=P(0\leqslant X\leqslant x)=kx$, 其中 k 为比例系数. 因为 $1=F(a)=ka$, 所以得 $k=1/a$. 于是 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{a}, & 0\leqslant x<a\\ 1, & x\geqslant a\end{cases}$$

下求 X 的密度函数 $p(x)$.

当 $x<0$ 或 $x>a$ 时，$p(x)=F'(x)=0$;

当 $0<x<a$ 时，$p(x)=F'(x)=1/a$;

而在 $x=0$ 和 $x=a$ 处，$p(x)$ 可取任意值, 一般就近取值为宜, 这不会影响概率的计算, 因为它们是几乎处处相等的密度函数. 于是 x 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & 0<x<a;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

这个分布就是区间 $(0,a)$ 上的均匀分布

练习 5. 某种型号电子元件的寿命 X（以小时计）具有以下的概率密度函数

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1000}{x^2}, & x>1000;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

现有一大批此种元件（设各元件工作相互独立）, 问

(1) 任取 1 只, 其寿命大于 1500 小时的概率是多少?

(2) 任取 4 只,4 只寿命都大于 1500 小时的概率是多少?

(3) 任取 4 只,4 只中至少有 1 只寿命大于 1500 小时的概率是多少?

(4) 若已知一只元件的寿命大于 1500 小时, 则该元件的寿命大于 2000 小时的概率是多少?

解. (1)

$$P\{X>1500\}=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1000}{x}\right)_{1500}^{+\infty}=\frac{2}{3}$$

(2) 各元件工作独立, 因此所求概率为

$$P\{\text{四只原件寿命都大于}1500\}=[P(X>1500)]^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

(3) 所求概率为

$$\begin{aligned}&P\{\text{四只中至少一只寿命大于}1500\}\\&=1-P\{4\text{只元件寿命都小于等于}1500\}\\&=1-\left(1-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{81}\end{aligned}$$

(4) 这是求条件概率 $P\{X > 2000|X > 1500\}$，记

$$A = \{X > 1500\}, B = \{X > 2000\}$$

因为 $P(A) = 2/3, P(B) = 1/2$, 且 $B \subset A$, 所以

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{3}{4}$$

练习 6. 某特效药的临床有效率为 0.95，今有 10 人服用，问至少有 8 人治愈的概率是多少?

解. 设 X 为 10 人中被治愈的人数，则 $X \sim b(10, 0.95)$，而所求概率为

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{8} 0.95^8 0.05^2 + \binom{10}{9} 0.95^9 0.05 + \binom{10}{10} 0.95^{10} \\ &= 0.0746 + 0.3151 + 0.5988 = 0.9885. \end{aligned}$$

10 人中有 8 人以上被治愈的概率为 0.9885.

练习 7. 已知某种疾病的发病率为 0.001，某单位共有 5000 人. 问该单位患有这种疾病的人数不超过 5 人的概率为多少?

解. 设该单位患有这种疾病的人数为 X，则有 $X \sim b(5000, 0.001)$，而我们所求的为

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{5000}{k} 0.001^k 0.999^{5000-k},$$

这个概率的计算量很大. 由于 n 很大，p 很小，且 $\lambda = np = 5$. 所以用泊松近似得

$$P(X \leq 5) \approx \sum_{k=0}^{5} \frac{5^k}{k!} \mathrm{e}^{-5} = 0.616.$$

练习 8. 某仪器装了 3 个独立工作的同型号电子元件, 其寿命 (单位: h) 都服从同一指数分布, 密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{600} \mathrm{e}^{-\frac{x}{600}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求: 此仪器在最初使用的 200 h 内, 至少有一个此种电子元件损坏的概率.

解. 设 Y 为仪器在最初使用的 200 h 内, 损坏的元件个数, 则 $Y \sim b(3, p)$, 其中

$$p = \int_0^{200} \frac{1}{600} e^{-\frac{x}{600}} \, dx = 1 - e^{-\frac{1}{3}},$$

所以至少有一个电子元件损坏的概率为

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1-p)^3 = 1 - \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)\right]^3 \\ = 1 - e^{-1} = 0.6321. \end{aligned}$$

练习 9. 设随机变量 X 服从 $(0, 10)$ 上的均匀分布，现对 X 进行 4 次独立观测，试求至少有 3 次观测值大于 5 的概率.

解. 设随机变量 Y 是 4 次独立观测中观测值大于 5 的次数，则 $Y \sim b(4,p)$，其中 $p = P(X>5)$. 由 $X \sim U(0,10)$，知 X 的密度函数

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0<x<10; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

所以

$$p = P(X>5) = \int_5^{10} \frac{1}{10}\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

于是

$$P(Y \geq 3) = \binom{4}{3} p^3(1-p) + \binom{4}{4} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}.$$

练习 10.

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

试求 k，使得 $P(X>k) = 0.5$.

解. 因为 $0.5 = P(X>k) = \int_k^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda k}$, 由此解得 $k = \ln 2/\lambda$.

练习 11. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(108, 3^2)$，试求

(1) $P(102 < X < 117)$；

(2) 常数 a，使得 $P(X < a) = 0.95$.

解. (1)

$$\begin{aligned} P(102<X<117) &= \Phi\left(\frac{117-108}{3}\right) - \Phi\left(\frac{102-108}{3}\right) \\ &= \Phi(3) - \Phi(-2) = \Phi(3) + \Phi(2) - 1 \\ &= 0.9987 + 0.9772 - 1 = 0.9759. \end{aligned}$$

(2)

$$P(X<a) = \Phi\left(\frac{a-108}{3}\right) = 0.95, \quad \text{或} \quad \Phi^{-1}(0.95) = \frac{a-108}{3},$$

其中 Φ^{-1} 为 Φ 的反函数，从附表 P397 由里向外反查得

$$\Phi(1.64) = 0.9495, \quad \Phi(1.65) = 0.9505,$$

再用线性内插法可得 $\Phi(1.645) = 0.95$，即 $\Phi^{-1}(0.95) = 1.645$，故

$$\frac{a-108}{3} = 1.645,$$

从中解得 $a = 112.935$.

练习 12. 某地区成年男子的体重 X (kg) 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 若已知 $P(X \leq 70) = 0.5$, $P(X \leq 60) = 0.25$.

(1) 求 μ 与 σ 各为多少?

(2) 若在这个地区随机地选出 5 名成年男子, 问其中至少有两人体重超过 65 kg 的概率是多少?

解. (1) 由

$$0.5 = P(X \leq 70) = \Phi\left(\frac{70-\mu}{\sigma}\right),$$

知

$$\frac{70-\mu}{\sigma} = 0,$$

由此解得 $\mu = 70$. 又由

$$0.25 = P(X \leq 60) = \Phi\left(\frac{60-70}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right),$$

即 $\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0.75$, 查表知 $\frac{10}{\sigma} = 0.675$, 由此解得 $\sigma = \frac{10}{0.675} = 14.81$ (2) 记 Y 为选出的 5 名成年男子中体重超过 65 kg 的人数, 则 $Y \sim b(5, p)$, 其中

$$p = P(X > 65) = \Phi\left(\frac{70-65}{14.81}\right) = \Phi(0.3376) = 0.6324,$$

所以 "5 名中至少有两人体重超过 65 kg" 的概率为

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - 0.3676^5 - 5 \times 0.3676^4 \times 0.6324 = 0.94.$$