习题 11.1

1. (1) 易知 $f(x)=x$，则

法一：由 $|f_n(x)-f(x)| = \dfrac{x(1+x)}{1+n+x} \le \dfrac{2}{n} < \varepsilon \Rightarrow N=N(\varepsilon)$，依一致收敛定义可证 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$，$(n\to\infty)$，$x\in[0,1]$

法二：由 $0 \le \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \le \dfrac{2}{n} \to 0$，$n\to\infty$ 及 Th11.1.1 可证

(2) 易得 $f(x)=0$.

(i) $d(f_n,f) = \sin\frac{1}{n} \to 0$，$n\to\infty$；(ii) $d(f_n,f)=1 \not\to 0$，$n\to\infty$.

(3) 易得 $f(x)=0$，再令 $g_n(x)=|f_n(x)-f(x)| = nxe^{-nx}$，且由 $g_n'(x) = ne^{-nx}(1-nx)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{n}$，验证可知 $g_n(\frac{1}{n})$ 为 $g_n(x)$ 在 $[0,1]$ 的最大值，$g_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{e}$，即

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \frac{1}{e} \not\to 0,\quad n\to\infty.$$

故 $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ $(n\to\infty)$，$x\in[0,1]$.

(4) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ \frac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$

(i) 法一：$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1)} \left(1-\dfrac{1}{1+x^n}\right) = \dfrac{1}{2}$

法二：由 $\{f_n(x)\}$ 均连续，$f(x)$ 不连续，应用 Th11.2.1，$f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$，$x\in[0,1]$.

(ii) $0 \le \sup\limits_{x\in[0,r]} |f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,r]} \dfrac{x^n}{1+x^n} \le r^n \to 0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,r]} |f_n(x)-f(x)| \to 0$，$n\to\infty$，…

习题11.1

(5) 由题意定义区间g_n的关系则易得 $f(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x\le 1.\end{cases}$

故 $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)|\ge \sup\limits_{x\in(0,\frac{1}{n})}|f_n(x)-f(x)|=1>0$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)|\ne 0$. $f_n(x)$在$[-1,1]$上不一致收敛.

(也可以用T11.2.1证明).

(6) $f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & 0<x<1\end{cases}$. $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\ge \sup\limits_{x\in(0,\frac{1}{n+2})}|-(n+1)x+1|\ge 1$, ∴ ……

(7) $f_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}\to\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\triangleq f(x)$, $n\to\infty$. $x\in(0,+\infty)$

$\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x>0}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}})}\ge\dfrac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}}{2\sqrt{\frac{1}{n^2}}(\sqrt{\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}})}\ge 1\not\to 0$.

2. $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1, N_2>0$, 当$n>N_1$时, $\forall p\in\mathbb{N}^+$, $|f_{n+1}+\cdots+f_{n+p}|<\varepsilon/2$

当$n>N_1$时, $\forall p\in\mathbb{N}^+$, $|g_{n+1}+\cdots+g_{n+p}|<\varepsilon/2$

故当$N=N_1+N_2$, 当$n>N$时, $\forall p\in\mathbb{N}^+$, $|f_{n+1}+\cdots+f_{n+p}+g_{n+1}+\cdots+g_{n+p}|$

$\le|f_{n+1}+\cdots+f_{n+p}|+|g_{n+1}+\cdots+g_{n+p}|<\varepsilon$.

3. $|f_ng_n-fg|=|(f_n-f)g_n+f(g_n-g)|\le|g_n||f_n-f|+|f||g_n-g|$

$\le M_2|f_n-f|+M_1|g_n-g|$

其中M_1为$|f|$的一个上界, $\underline{M_2\text{为}\{g_n(x)\}\text{的一个上界}}$.

$|g_n(x)|\le|g(x)|+1$, $n>N$.

习题 11.1

4. 依题设 $0 \le \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \le a_n$，故由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 即得

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

即证.

5. $0 \le \sup\limits_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in(a,b)} \dfrac{|[nf(x)] - nf(x)|}{n} \le \sup\limits_{x\in(a,b)} \dfrac{1}{n} \to 0, n\to\infty$

6. 略.

习题 11.2

4. $|a_m - a_n| = |\underbrace{a_m - f_m(x)} + \underbrace{f_m(x) - f(x)} + \underbrace{f(x) - f_n(x)} + \underbrace{f_n(x) - a_n}|$

5. 显然 $g_n(x) = f^{(n)}(x)$ 满足 Th 11.2.4 条件，故 $g_n(x)$ 一致收敛于一个连续可微函数 $\varphi(x)$，且 $\varphi'(x) = g(x)$. 再由 $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$，可知 $g'(x) = g(x)$，得之得 $(\ln g(x))' = 1$，从而 $g(x) = ce^x$.

习题 11.2

1. 易知(参考例3) $f(x)=0$.

(1) 即要使 $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in[0,1]} n^{\alpha}xe^{-nx}\to 0$.

由于 $g_n(x)=|f_n(x)-f(x)|$ 在 $x_n=\frac{1}{n}$ 取到最大值 $g_n(\frac{1}{n})=n^{\alpha-1}e^{-1}$ (事实上令 $g_n'(x)=0\Rightarrow x_n=\frac{1}{n}$ 并易证该(略证)), 故当且仅当 $\alpha<1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1}e^{-1}=0,$$

故得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(2) 要使 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 n^{\alpha}xe^{-nx}\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}[-(n^{\alpha-1}+1)e^{-n}+n^{\alpha-2}]$

$$=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx=0\Rightarrow\alpha<2.$$

(3) $\frac{d}{dx}(\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x))=0$. 要使 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}(1-nx)e^{-nx}=0$

对 $\forall x\in[0,1]$ 上立, 则取 $x=0$ 即可知 $\alpha<0$ ($x\in(0,1]$, 极限恒成立)

2. 注意到 $|f_n(x_n)-f(x_0)|=|(f_n(x_n)-f_n(x_0))+(f_n(x_0)-f(x_0))|$

$$\le\underbrace{|f_n(x_n)-f_n(x_0)|}_{\text{连续性}}+\underbrace{|f_n(x_0)-f(x_0)|}_{\text{一致收敛性}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\ \ldots$$

3. 直接验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx$$

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx]'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$$

是否成立即可. 不必验证是否满足 Th 11.2.1, Th 11.2.3, Th 11.2.4 的条件.

11.3

1.(1) $S_n(x) = |u_1(x)| + \cdots |u_n(x)| = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+n^2} \to \frac{1}{1+x^2}, n\to\infty$

故原级数在[-1,1]上绝对收敛.

(2) $\because \forall x\in D$, $|2^n \sin\frac{x}{3^n}| \le (\frac{2}{3})^n |x|$. 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n|x|$ 收敛.

$\therefore$ 原级数收敛.

(3) $S_n(x) = x^2(1-\frac{1}{1+nx^2}) \to x^2, n\to\infty$. 原级数绝对收敛.

(4) $\forall x\ne 0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^2}{(1+x^2)^n}} = \frac{1}{1+x^2}<1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 收敛.

又 $\because x=0$ 时, 级数显然收敛, $\therefore$ 原级数在D上收敛.

2.(1) M判别法: $|\frac{x^n}{(n-1)!}| \le \frac{r^n}{(n-1)!}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{(n-1)!}$ 收敛(比值法), $\therefore \cdots\cdots$

(2) $\because$ ① $\{x(\frac{x+n}{n})^n\}$, 对 $\forall x\in[0,1]$ 关于n单调且 $|x(\frac{x+n}{n})^n| < e$

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 即在[0,1]上一致收敛

$\therefore$ 由Abel判别法可知原级数在[-1,0)上一致收敛.

(3) 法一: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}|x|^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(-x)^n$ $\begin{cases} ① \{(-x)^n\} \text{ 在}[-1,0)\text{上关于n单调} \\ \text{且 } |x|^n \le 1; \\ ② \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ 收敛} \end{cases}$

法二: ① $\{\frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}\}$ 在[-1,0)上关于n单调且 $\frac{(-x)^n}{\sqrt{n}} \rightrightarrows 0\ (n\to\infty), x\in[-1,0)$

② $|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k| \le 2$

法三: ① $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ 在[-1,0)上关于n单调且 $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightrightarrows 0\ (n\to\infty), x\in[-1,0)$

② $|\sum_{k=1}^{n}(-x)^k| \le 2$

习题 11.3

2.(4) ① $\left\{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}$ 在 $(-1,1)$ 内关于 n 单调，且 $\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \rightrightarrows 0$。

② $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right| \le 2$

(5) $\left|\frac{n}{x^n}\right| \le \frac{n}{r^n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{r^n}$ 收敛（根值法）

(6) ① $\left\{\frac{1}{n+\sin x}\right\}$ 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 关于 n 单调，且 $\frac{1}{n+\sin x} \rightrightarrows 0$，

② $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right| \le 2$.

3. $0 \le \sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)||g(x)| \le \sup_{x\in I} M|S_n(x)-S(x)| \longrightarrow 0,\ n\to\infty$。

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|g(x)S_n(x)-g(x)S(x)| = 0 \Rightarrow g(x)S_n(x) \rightrightarrows g(x)S(x)$，即证.

4. $|U_m(x)-U_n(x)| \le |V_m(x)-V_n(x)|$，$U_n(x)$ $V_n(x)$ 分别表示 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 的部分和，利用 Cauchy 准则即可证.

5. ① $\{e^{-nx}\}$ 对 $\forall x\in[0,+\infty)$ 关于 n 单调且 $|e^{-nx}| \le 1$，
② $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

} A' 判别法 $\Rightarrow$.

6. 由题意

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)| \le |u_{n+1}(x)|+\cdots+|u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

反之：$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$.

7. ① $u_n(x) = x^n$, $v_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$，A' 判别法；② 当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$.

8. $S_n(x) = 1-\frac{1}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,-\infty)$ 内连续，但极限函数 $S(x) = \begin{cases}0, & x=0\\ 1 & x\ne 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续，∴ …

习题 11.4

1.(1) ∵ 对 $\forall x \in [0,+\infty)$，$\exists r > x$，s.t. $x \in [0,r]$，且由

$$\left|\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}}\right| \le \frac{1}{n^2} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ 收敛可知 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}} \text{ 在 } [0,r]$$

上一致收敛，但 $\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}}$ 在 $[0,r]$ 上连续。

∴ 由 Th11.4.1 可知 $f(x)$ 在 $[0,r]$ 上连续，进而在 x 处连续，再由 x 的任意性，即证。

2. 由 M 判别法易知相应的级数在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛，故

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos nx\right)dx = \int_0^{2\pi}1\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}r^n\cos nx\,dx = 2\pi.$$

3. 易知级数在 $[\ln 2,\ln 3]$ 上一致收敛（$|ne^{-nx}| \le \frac{n}{2^n} \cdots$）

故

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}s(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3}ne^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}$$

4. 由 $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 可知，所给级数在 $[0,\pi]$ 上一致收敛，故

$$\int_0^{\pi}S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n^3}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4}.$$

5. 易知级数满足 Th11.4.4 的条件，故

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^2},\quad x \in R.$$

6. 先证一致收敛，再由 Th11.4.1，故 $\lim_{x\to 1}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}$

7. 连续应用 Th11.4.4 及 M 判别法可知逐项求导公式成立，

$$f''(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}\right)'' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$