习题10.1

6. (1) 注意到.

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}| \le \frac{1}{3^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{3^{n+p}} \le \frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3^n}$$

(2) $\because a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}>\frac{1}{\sqrt{4n^2}}=\frac{1}{2n}$ (但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散), $\therefore$ ——

对 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$, $\forall N>0$, $\exists n_0=2N$, $p_0=n_0=2N$, s.t.

$$|a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\cdots+a_{n_0+p_0}|\ge\frac{1}{4}=\varepsilon_0$$

7. 令 $\tau_n=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$ 及 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$

满足 $S_{2n-1}=\tau_n+\sigma_{n-1}$, $S_{2n}=\tau_n+\sigma_n$, 但

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(\tau_n+\sigma_{n-1})=\lim_{n\to\infty}(\tau_n+\sigma_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}.$$

即 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在, 这表明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

8. 不妨设 $a>0$, 则由极限的保号性可知, $\exists N_1\in N^+$, 当 $n>N_1$ 时,

$na_n>\frac{1}{2}a$, 即 $a_n>\frac{1}{2n}a$, $\forall n>N_1$. 故 $\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, $\forall N\in N^+$,

$\exists n_0=N_1+N$ 及 $p_0=n_0$ 使得

$$|a_{n_0+1}+\cdots+a_{n_0+p_0}|\ge\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

即证 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

9. (1) $A_n\le C_n\le B_n$, 对部分和数列应用迫敛性定理即证(这里不妨假设 $n\ge1$ 时 $a_n\le c_n\le b_n$)

(2) 不一定: 如 $a_n=-\frac{1}{n}$, $c_n=0$, $b_n=\frac{1}{n}$.

10. 令 $b_n=(n+1)a_{n+1}-na_n$, 则由 $\{na_n\}$ 收敛易证 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

又 $\because a_{n+1}=b_n-n(a_{n+1}-a_n)$, $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

习题 10.1

1.(1) $\because S_n=\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

(2) $S_n=\frac{1}{3}+\frac{2\times2-1}{3^2}+\frac{2\times3-1}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$

$\frac{1}{3}S_n=\quad\frac{1}{3^2}+\frac{2\times2-1}{3^3}+\cdots+\frac{2n-3}{3^n}+\frac{2n-1}{3^{n+1}}$

$\therefore S_n=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\right]\to1.$

(3) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\Rightarrow S_n=\frac{1}{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\to\sqrt{2}-1.$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=1$

2. $a_1=S_1=1$，当$n\geq2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}$

3. $\because \lim_{n\to\infty}\sin n$，$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{3n^2-2}$ 不存在，而 $\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=1\neq0$，

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$，$\therefore$ 各个级数均发散.

4. (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 收敛，则由 $b_n=a_n-(a_n-b_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

及 Th10.1.2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. 反之亦然.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 发散. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛及

Th10.1.2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 收敛，矛盾！即证 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

反之亦然.

5. 由 $S_n=a_1-a_{n+1}$ 及 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$（？为什么？）即证..

习题10.2

1.(1) $\because \frac{\ln x}{x^p}$ 在 $[2,+\infty)$ 上非负且单调递减趋于0，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 和 $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}dx$ 同敛散。注意到当 $p>1$ 时，$d=\frac{p+1}{2}>1$，s.t.

$\lim_{x\to+\infty} x^d\frac{\ln x}{x^p}=0$，故 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p}\ln x\,dx$ 收敛。

(2) 当 $0<p\le 1$ 时，$\lim_{x\to+\infty} x\frac{\ln x}{x^p}=+\infty$，故 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p}\ln x\,dx$ 发散。

综上所述，可知当 $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 收敛

当 $p\le 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 发散

(2) 提示：对 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln x}dx$，当 $p>1$ 时，$0<\frac{1}{x^p\ln x}<\frac{1}{x^p}$，$x>3$

当 $0<p\le 1$ 时 $\frac{1}{x^p\ln x}\ge\frac{1}{x\ln x}$，后者发散

(3) $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^p}=\int_3^{+\infty}\frac{d(\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^p}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p}$

(4) 当 $\alpha>1$ 时，易证 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\sigma}(\ln\ln x)}\Big/\frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)^2}=0$，利用(3)

当 $\alpha\le 1$ 时，$\frac{1}{x(\ln x)^{\sigma}(\ln\ln x)}\ge\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)}$，再利用(3)。

2.(1) $\because 0<\frac{1}{n+2^n}\le\frac{1}{2^n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，$\therefore$ 原级数收敛。

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n^2+1}\Big/\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore$ 原级数发散。

(3) 利用 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n^2}=1$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ 收敛

(4) $\because \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)\Big/\frac{1}{n}=\ln a$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore$ 原级数发散。

习题 10.2

2. (5) ∵ 当 $n \geq 9$ 时, $0 < \frac{1}{(\ln n)^n} < \frac{1}{2^n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故 原级数收敛.

(6) ∵ $\lim_{n\to\infty} (1-\cos\frac{1}{n})/\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故 原级数收敛.

3. (1) ∵ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$, ∴ 原级数收敛.

(2) ∵ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}$) < 1, ∴ 原级数收敛.

(3) ∵ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3/e > 1$, ∴ 原级数发散.

(4) ∵ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)\left(\frac{\sin\frac{1}{2n+1}}{\sin\frac{1}{2n}}\right)^n \cdot \sin\frac{1}{2n+1}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

∴ 原级数收敛.

4. 利用比值法易证 对应级数收敛.

5. 利用 $0 \leq a_{n+1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} a_{n-1} \leq \cdots \leq \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} b_{n+1}$ 即证.

6. 由 $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛 是显然的

$\frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$ 即证

7. $a_n = a_1 + (n-1)d$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n} = d$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 同敛散, ∴ ……

8. 由已知, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 故 对 $\varepsilon = 1 > 0$, ∃N, 当 $n > N$ 时, $|a_n| < 1$.

从而 $0 \leq a_n^2 < a_n$. 再由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛. 反例: $a_n = \frac{1}{n}$

9. ∵ $0 \leq \sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, ∴ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛

反例: $a_n = \begin{cases} 1, & n = 2k-1 \\ \frac{1}{n^4}, & n = 2k \end{cases}$; $\{a_n\}$ 递减, 则由 $a_{n+1} \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 即证.

习题 10.2

10. 令 $b_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$, $b_0=1$, $a_0=0$, $n\geq 1$, 则

$$c_n=\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}=\frac{1}{b_{n-1}}-\frac{1}{b_n}$$

且 $b_n=1+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{1\leq j<k\leq n}a_ja_k+\cdots+\prod\limits_{j=1}^{n}a_j\geq\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,

(1) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时，由 $0\leq c_n\leq a_n$ 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛，即证.

(2) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，显然有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_k=+\infty$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$,

从而 $S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=1-\frac{1}{b_n}\to 1$，即证.

11. (1) $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ 原级数发散.

(2) $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{\sqrt{n+1}}\to+\infty\Rightarrow$ 原级数收敛.

(3) $\because 3^{\ln n}=(\ln 3)^n$，即 $\frac{1}{3^{\ln n}}=\frac{1}{(\ln 3)^n}$，且 $\ln 3>1$

$\therefore$ 原级数收敛.

(4) $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)\to-\ln a$，故

当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时收敛，当 $a>\frac{1}{e}$ 时发散.

习题10.3

1.(1) ∵ $\frac{\sqrt{n}}{n+1}\geq 0$ 且 $\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\}$ 单调递减趋于0，∴原级数收敛.

又∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}\cdot n=+\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|$ 发散.

故原级数条件收敛.

(2) ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ 不存在，∴原级数发散.

(3) ∵ $\sin\frac{1}{n}\geq 0$ 且 $\{\sin\frac{1}{n}\}$ 单调递减趋于0，∴原级数收敛.

又∵ $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，∴原级数条件收敛.

(5) ∵ $\frac{\ln(n+1)}{n}\geq 0$ 且 $\{\frac{\ln(n+1)}{n}\}$ 单调递减趋于0，∴原级数收敛，

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}n\frac{\ln(n+1)}{n}=+\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数条件收敛

(4) 易证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

(6) ∵ $\left|\frac{1}{3^n}\sin\frac{n\pi}{2}\right|\leq\frac{1}{3^n}$，$\forall n\in N$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛

∴原级数收敛且绝对收敛

2(1) ∵当 $x\geq 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\neq 0$，∴原级数发散.

当 $0<x<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 收敛，且 $\{\frac{1}{1+x^n}\}$ 单调有界，故

由Abel判别法可证级数收敛且绝对收敛(参照比较)

(2) 当 $p>1$ 时，由 $\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leq\frac{1}{n^p}$ 可知原级数绝对收敛.

当 $0<p\leq 1$ 时，由于 $\{\frac{1}{n^p}\}$ 单调趋于0 且 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leq\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 收敛. 再由 $\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geq\frac{(\sin nx)^2}{n}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}\cos 2nx$

易证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\cos 2nx$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，进而原级数条件收敛

习题10.3

2.(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin^2 n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{2n}-\frac{(-1)^{n-1}\cos 2n}{2n}\right]$

易证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$（交错级数）和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos 2n}{2n}$（D'判别法）收敛.

但由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，$\left|\frac{\sin^2 n}{n}\right|=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2n}{2n}$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{\sin^2 n}{n}\right|$ 发散，从而原级数条件收敛.

(4) ∵ $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ 单调趋于0 且 $\left|\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2}{3}k\pi\right|\le 1$，∴ 原级数收敛.

又 ∵ $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n}{3}\pi\right|\ge\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\cos\frac{n}{3}\pi\right)^2=\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{2\sqrt{n}}\cos\frac{2}{3}n\pi\ge 0$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\cos\frac{2n}{3}\pi$ 收敛. ∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n}{3}\pi\right|$ 发散

从而原级数条件收敛.

3. $\{b_n\}$ 有界，故 $\exists M>0$, s.t. $|b_n|\le M$. 故 $|a_nb_n|\le M|a_n|$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，即证.

4. 收敛（可参考例3）

5. 易知 $b_n=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\ge 0$ 且 $\{b_n\}$ 单调递减. 又 ∵ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

∴ 由Cauchy命题可得 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 收敛.

6. 由 $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0$ 易知 $\exists N$，当 $n>N$ 时，$a_n>a_{n+1}>0$，

即 $\{a_{N+n}\}$ 单调递减，不妨设 $\{a_n\}$ 单调递减. 由 $a_n>0$ 可知

$\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在，记为 $a=\lim_{n\to\infty}a_n\ge 0$. 若 $a>0$，则由 $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}=1$

可知 $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n-(n+1)a_{n+1}}{a_{n+1}}=0$，矛盾！故 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，即可证.