第二章 命题逻辑等值演算

主要内容

- 等值式与基本的等值式
- 等值演算与置换规则
- 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式

2.1 等值式

定义2.1 若等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A\Leftrightarrow B$，并称$A\Leftrightarrow B$是等值式

理解：在所有的赋值下，A与B同真同假，也就是说A与B有相同的真值表。

因此，用真值表可检查两个公式是否等值

几点说明：

- $\Leftrightarrow$不是联结符，它是用于表示A与B等值一种记号
- A或B中可能有哑元出现.（哑元：不含的命题变项）

例如 $(p\rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\vee(\neg r\wedge r))$ r为左边公式的哑元.

等值式例题

例1 请验证：

(1) $\neg(p\vee q) \Leftrightarrow \neg p\wedge\neg q$ （德摩根律）

(2) $p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$

(3) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 不与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 等值

等值式例题

(1) 验证：$\neg(p\vee q) \Leftrightarrow \neg p\wedge\neg q$

等价式$A\leftrightarrow B$是重言式

p q	$\neg p$	$\neg q$	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	$\neg p\wedge\neg q$	$\neg(p\vee q)\leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$
0 0	1	1	0	1	1	1
0 1	1	0	1	0	0	1
1 0	0	1	1	0	0	1
1 1	0	0	1	0	0	1

等值式例题

(2) 验证：$p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

p q r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to r$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	0	1	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

等值式例题

(3) 验证：$p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

p q r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\to q$	$(p\to q)\to r$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

小 结 2

- 设$p_1, p_2, \ldots, p_n$是出现在公式A中的全部命题变项, 给$p_1, p_2, \ldots, p_n$各指定一个真值, 称为对A的一个赋值或解释. 若使A为1, 则称这组值为A的成真赋值; 若使A为0, 则称这组值为A的成假赋值.
- 例如，令$A=p\vee q$

01，10，11	A的成真赋值
00	A的成假赋值

注意在写赋值时，中间不加逗号. 即00是A的成假赋值不能写成0，0是A的成假赋值.

小 结 3

若A任何赋值下均为真	A为重言式 / 永真式
若A任何赋值下均为假	A为矛盾式 / 永假式

- 若A不是矛盾式, 则称A是可满足式.
- 若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$是等值式

用真值表可给出公式的成真赋值、成假赋值；判断公式的类型（重言式、矛盾式、可满足式）；还可检查两个公式是否等值.

判断公式是否等值的两种方法

判断两个命题公式是否等值主要有两种方法：

1、真值表法

将两个公式的真值表列出，判断输出列是否相同.

优点：万能方法，可判断任意两个公式是否等值

缺点：当命题变项较多时，列出所有赋值太过繁琐

2、等值演算法

由已知的等值式推演出新的等值式的过程.

等值演算法以基本等值式为基础，应用代入规则、置换规则，逐步推演.

代入规则

代入规则：

假设A是一个重言式，对其中所有相同的命题变项都用同一命题公式进行代换，所得到的结果仍为一重言式.

例， $(q \to p) \wedge q \to p$是一个重言式，令$p = t \wedge s$，$q = \neg s$，则$(\neg s \to (t \wedge s)) \wedge \neg s \to (t \wedge s)$也是一个重言式.

理解：

因为重言式的值不依赖于命题变项值的变化. 故对命题变项以任何公式替换后，得到的仍是重言式. 代入规则类似函数换元：若$f(x) = 2x+3$; 则 $f(t^2+2t) = 2*(t^2+2t)+3$.

基本等值式

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

$A \vee A \vee \ldots \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \wedge \ldots \wedge A \Leftrightarrow A$

零律 $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$, $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

同一律 $A \vee 0 \Leftrightarrow A$. $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$ （非真即假）

矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$（不能既真又假）

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \vee p$	$p \wedge p$	$p \vee 0$	$p \wedge 1$
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1

基本等值式

交换律 $A\vee B \Leftrightarrow B\vee A$, $A\wedge B \Leftrightarrow B\wedge A$

结合律 $(A\vee B)\vee C \Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$, $(A\wedge B)\wedge C \Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

假言易位 $A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg B\rightarrow\neg A$ （逆否）

等价否定等值式 $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A\leftrightarrow\neg B$

归谬论 $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B) \Leftrightarrow \neg A$

基本等值式

分配律 $A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)$,

$A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

$(A\wedge B)\vee(C\wedge D) \Leftrightarrow (A\vee C)\wedge(A\vee D)\wedge(B\vee C)\wedge(B\vee D)$,

$(A\vee B)\wedge(C\vee D) \Leftrightarrow (A\wedge C)\vee(A\wedge D)\vee(B\wedge C)\vee(B\wedge D)$,

德摩根律 $\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$（P4例题）

$\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$

吸收律 $A\vee(A\wedge B) \Leftrightarrow A$

$A\wedge(A\vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

蕴涵等值式 $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

注意：

1、运用等价等值式、蕴涵等值式可以将公式里的等价、蕴涵联结词消去，从而使公式只含否定、合取、析取三种联结词.

2、必须理解记忆这16组等值式，这是继续学习的基础.

等值演算与置换规则

1. 等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程

2. 等值演算的基础：

(1) 等值关系的性质：自反性、对称性、传递性

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则（见3）

3. 置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式．

若 $B \Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

例　令A = $q \rightarrow r$, B = $\neg q \vee r$，　$\Phi(A) = p \rightarrow (q \rightarrow r)$, $\Phi(B) = p \rightarrow (\neg q \vee r)$，
因为A$\Leftrightarrow$B，则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$，即$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (\neg q \vee r)$

等值演算的应用

1、用等值演算证明两个公式等值

例2 证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律）

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee r$ （德摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$ （蕴涵等值式）

等值演算的应用

证明两个公式不等值

例3 证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 不等值

证 方法一 真值表法, 见例1(3)（: $p\rightarrow(q\rightarrow r) \not\Leftrightarrow (p\rightarrow q)\rightarrow r$ ）

方法二 观察法（举反例）. 观察到000, 010是左边的成真赋值，是右边的成假赋值

方法三 先用等值演算化简公式，然后再观察

$$p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee r$$

$$(p\rightarrow q)\rightarrow r \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r$$

更容易看出000, 010是左边的成真赋值，是右边的成假赋值