作业 10 月 17 日

October 16, 2024

练习 1. 在矩形区域 $R: \left|x-x_0\right| \le a, \left|y-y_0\right| \le b$ 上, 考虑微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$. 称 $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足利普希茨条件, 若存在常数 $L>0$ 使得

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|, \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in R,$$

L 称为利普希茨常数.

证明: 若 $f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上存在且连续, 则 $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足利普希茨条件.

证明. 由拉格朗日中值定理有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le |\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)||y_1-y_2|,$$

其中 ξ 在 y_1, y_2 之间. 又因为 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上存在且连续, R 为闭区域, 故有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le \max_{(x,y)\in R} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)||y_1-y_2|.$$

其中, $L = |\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)|$.

练习 2. 试判断下列函数在所给定的区域上关于 y 是否满足利普希茨条件:

1. $f(x,y) = y^{\frac{1}{2}}, (a) \quad |x| \le 1, 0 < c \le y \le d; (b) \quad |x| \le 1, 0 < y \le d.$
2. $f(x,y) = xy^2, (a) \quad a \le x \le b, c \le y \le d; (b) \quad a \le x \le b, -\infty < y < +\infty$
3. $f(x,y) = xy, (a) \quad a \le x \le b, c \le y \le d; (b) \quad a \le x \le b, -\infty < y < +\infty; (c)$ 全平面
4. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}, x \ne y.$

解. 1. (a) 对于 y_1, y_2:$0 < c \le y_1, y_2 \leqslant d$, 当取 $L = \frac{1}{2c^{\frac{1}{2}}}$ 时有

$$\begin{aligned} |\ f(x,y_1)-f(x,y_2)\ | &= |\ y_1^{\frac{1}{2}} - y_2^{\frac{1}{2}}\ | = \frac{|\ y_1^{\frac{1}{2}} - y_2^{\frac{1}{2}}\ |}{|\ y_1-y_2\ |}\ |\ y_1-y_2\ | \\ &= \frac{1}{|\ y_1^{\frac{1}{2}} + y_2^{\frac{1}{2}}\ |}\ |\ y_1-y_2\ | \leqslant L\ |\ y_1-y_2\ |, \end{aligned}$$

即方程满足利普希茨条件.

(b) 对 $y_1, y_2 : 0 < y_1, y_2 \le d$, 由

$$\begin{aligned} |\ f(x,y_1)-f(x,y_2)\ | &= |\ y_1^{\frac{1}{2}} - y_2^{\frac{1}{2}}\ | = \frac{|\ y_1^{\frac{1}{2}} - y_2^{\frac{1}{2}}\ |}{|\ y_1-y_2\ |}\ |\ y_1-y_2\ | \\ &= \frac{1}{|\ y_1^{\frac{1}{2}} + y_2^{\frac{1}{2}}\ |}\ |\ y_1-y_2\ |, \end{aligned}$$

当 $y_1,y_2\to 0$ 时 $\frac{1}{\left|y_1^{\frac{1}{2}}+y_2^{\frac{1}{2}}\right|}\to\infty$. 故方程不满足利普希茨条件, 但满足局部利普希茨条件.

2. (a) 对 $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y_1,y_2\leqslant d$, 有

$$\begin{aligned}\mid f(x,y_1)-f(x,y_2)\mid &=\mid xy_1^2-xy_2^2\mid=\mid x\mid\mid y_1+y_2\mid\mid y_1-y_2\mid\\ &\leqslant 2\tilde{b}\tilde{d}\mid y_1-y_2\mid,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{b}=\max(|a|,|b|),\tilde{d}=\max(|c|,|d|)$. 方程满足利普希茨条件，利普希茨常数为 $2\tilde{b}\tilde{d}$.

(b) 对 $a\leq x\leq b, -\infty<y_1,y_2<+\infty$, 有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|xy_1^2-xy_2^2\right|=\mid x\mid\mid y_1+y_2\mid\mid y_1-y_2\mid.$$

因可以 $\mid x\mid\mid y_1+y_2\mid\to\infty$, 故方程不满足利普希茨条件. 但满足局部利普希茨条件.

3. (a) 对 $a\leq x\leq b, c\leq y_1,y_2\leq d$, 有

$$\mid f(x,y_1)-f(x,y_2)\mid=\mid xy_1-xy_2\mid=\mid x\mid\mid y_1-y_2\mid\leqslant\bar{b}\mid y_1-y_2\mid.$$

其中 $\tilde{b}=\max(\mid a\mid,\mid b\mid)$. 方程满足利普希茨条件，利普希茨常数为 $\bar{b}$.

(b) 对 $a\leq x\leq b, -\infty<y_1,y_2<+\infty$, 有

$$\mid f(x,y_1)-f(x,y_2)\mid=\mid xy_1-xy_2\mid=\mid x\mid\mid y_1-y_2\mid\leq\tilde{b}\mid y_1-y_2\mid.$$

方程满足利普希茨条件, 利普希茨常数为 $\tilde{b}$.

(c) 对全平面, 即 $-\infty<x,y_1,y_2<+\infty$, 有

$$\mid f(x,y_1)-f(x,y_2)\mid=\mid xy_1-xy_2\mid=\mid x\mid\mid y_1-y_2\mid.$$

因可以 $x\to\pm\infty$, 故方程不满足利普希茨条件. 但满足局部利普希茨条件.

4. 因

$$\begin{aligned}\mid f(x,y_1)-f(x,y_2)\mid &=\left|\frac{x+y_1}{x-y_1}-\frac{x+y_2}{x-y_2}\right|=\left|\frac{2x(y_1-y_2)}{(x-y_1)(x-y_2)}\right|\\ &\leqslant\left|\frac{2x}{(x-y_1)(x-y_2)}\right|\mid y_1-y_2\mid,\end{aligned}$$

在域 $x\neq y$ 中有 $x-y\to 0$, 方程不满足利普希茨条件. 但只要 $x\neq y$, 方程满足局部利普希茨条件。

练习 3. 证明 $f(x)=x\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上不是利普希茨连续函数.

解. 如果存在 $L>0$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|,\forall x,y\in(0,+\infty).$$

将此陈述否定, 即为

对于任意的 $L>0$, 总存在 $x_0,y_0\in(0,\infty)$, 使得

$$|f(x_0)-f(y_0)|>L|x_0-y_0|.$$

对于任意的 $L>0$, 取 $y=1$, 只需证明存在 $x\in(0,+\infty)$, 使得

$$|x\ln x-\ln 1|=|x\ln x|>L|x-1|$$

成立即可. 又因为

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x\ln x}{x-1}\right|=\lim_{x\to+\infty}|\ln x|=+\infty,$$

故必然存在 x, 使得 $\left|\frac{x\ln x}{x-1}\right|>L$, 所以函数 $f(x)$ 不是利普希茨连续函数.

练习 4. 求方程 $\dfrac{dx}{dt}=x^2$ 过点 $(0,1)$ 的第三次近似解.

解. 所给初值问题的 Picard 迭代序列如下:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(t)=1,\\
&\varphi_1(t)=1+\int_0^t \varphi_0^2(\tau)d\tau=1+t,\\
&\varphi_2(t)=1+\int_0^t \varphi_1^2(\tau)d\tau=1+t+t^2+\frac{1}{3}t^3,
\end{aligned}$$

由此得第三次近似解为

$$\begin{aligned}
\varphi_3(t)&=1+\int_0^t \varphi_2^2(\tau)d\tau\\
&=1+t+t^2+t^3+\frac{2}{3}t^4+\frac{1}{3}t^5+\frac{1}{9}t^6+\frac{1}{63}t^7\ .
\end{aligned}$$

练习 5. 在矩形区域 $R:-1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1$ 上，考虑方程 $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$. 试利用存在和唯一性定理确定经过点 $(0,0)$ 的解的存在区间，并利用逐项逼近序列 (Picard 序列) 逼近的方法，求通过点 $(0,0)$ 的第三次近似解。

解. $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=2$, 故 $h=\min\{a,\dfrac{b}{M}\}=\min\{1,\dfrac{1}{2}\}=\dfrac{1}{2}$. 所以，解的存在区间是 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$. 逐项逼近序列 (Picard 序列) 为

$$\phi_k(x)=\int_0^x\left(s^2+\phi_{k-1}^2(s)\right)ds,\quad k=1,2,\cdots$$

$$\phi_0(x)=0.$$

所以

$$\phi_1(x)=\int_0^x(s^2+\phi_0^2(s))ds=\frac{x^3}{3},$$

$$\phi_2(x)=\int_0^x(s^2+\phi_1^2(s))ds=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},$$

$$\phi_3(x)=\int_0^x(s^2+\phi_2^2(s))ds=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}.$$

练习 6. 讨论下列微分方程解的存在区间

(1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$;

(2) $\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$;

解. (1) 容易求出其通解

$$y=\sin\frac{1}{x}+C.$$

所以, 存在区间是 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$.

(2) 容易求出其通解

$$y=\tan(x+C).$$

所以, 存在区间为 $(-C-\dfrac{\pi}{2},-C+\dfrac{\pi}{2})$.

练习 7. 试求下列方程过 (x_0,y_0) 的解，并由此讨论解对初值的连续性:
(1)$\dfrac{dy}{dx}-3y=e^x$;
(2)$\dfrac{dy}{dx}=3x^2e^y$.

解. (1) 方程是线性方程, 通解为

$$y=Ce^{3x}-\frac{1}{2}e^x,$$

其中 C 是任意常数. 由初始条件 $y(x_0)=y_0$, 得

$$C=(y_0+\frac{1}{2}e^{x_0})e^{-3x_0}.$$

于是, 满足初值条件的解可表示为

$$y=\phi(x,x_0,y_0)=(y_0+\frac{1}{2}e^{x_0})e^{3(x-x_0)}-\frac{1}{2}e^x,$$

它在整个 (x,x_0,y_0) 空间上连续.

(2) 通解为

$$e^{-y}+x^3=C,$$

其中 C 为任意常数. 由初始条件 $y(x_0)=y_0$, 得

$$C=e^{-y_0}+x_0^3.$$

于是, 满足初值条件的解可以表示为

$$y=\phi(x,x_0,y_0)=-\ln(e^{-y_0}+x_0^3-x^3),$$

在其存在的范围内连续.