<<概率论与数理统计>>复习

一、随机事件和概率

样本空间、随机事件及其关系与运算、概率的公理化定义及概率测度的性质、古典概型几何概型、条件概率乘法公式全概率公式贝叶斯公式、事件的独立性、伯努利概型。

1. 向目标射三枪，A_i表示事件：第i枪击中目标。用A_1，A_2，A_3表示事件：只击中第一枪。$\underline{\quad A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \quad}$……

2. 按从小到大排列：$P(A), P(AB), P(A+B), P(A)+P(B)$

$\underline{\quad P(AB) \le P(A) \le P(A+B) \le P(A)+P(B) \quad}$

3. $P(A)=0.5, P(B)=0.25, P(AB)=0.2$。$A, B$全不发生的概率为$\underline{\quad P(\overline{A}\overline{B})=0.45 \quad}$

4. $P(A)=0.5, P(AB)=P(AC)=0$。$P(A\overline{B}\overline{C})=$ $\underline{\quad 0.5 \quad}$

5. 2个球，每个球都等可能落入4个盒子中的一个。事件：某指定的2个盒子中各落入一球的概率为$\underline{\quad 1/8 \quad}$…

6. 在区间(0,1)内任取两数X、Y，$P(|X-Y| \le 0.5)=$ $\underline{\quad 3/4 \quad}$

7. $P(A)=0.2$，$P(B|A)=1/9, P(\overline{B}|\overline{A})=7/9, P(B)=$ $\underline{\quad 0.2 \quad}$

8. $P(A)=0.2$，$P(B|A)=1/9, P(\overline{B}|\overline{A})=7/9, P(A|B)=$ $\underline{\quad 1/9 \quad}$

9. 设新生婴儿是男是女概率相等。观察4个新生儿，恰好2男2女的概率$p=$

$$\underline{\quad C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 3/8 \quad}$$

二、随机变量及其数字特征

分布律(密度)的性质、六大常见分布的记号分布律(密度)均值方差、随机变量(向量)的函数及其均值方差协方差的计算、边缘概率分布条件分布、随机变量的独立性

10. X的密度函数

$$f(x)=\begin{cases} c(4x-2x^2) & 0<x<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$c=$ $\underline{\quad 3/8 \quad}$

11. X服从$0-1$分布，$P(X=1)=0.3, G(x)=P(X<x)$。$G(0)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$

12. (1分钟)来到车站的乘客批数服从泊松分布$P(\lambda)$，X、Y分别表示来到甲、乙两站的乘客批数，且各自服从$P(2)$与$P(3)$。较为繁忙的车站是$\underline{\quad \text{乙} \quad}$，客流较为稳定的车站是$\underline{\quad \text{甲} \quad}$

13. 到某银行取款排队时间(分钟)服从指数分布$E(\lambda)$,其中$\lambda=1/10$。某人已排队10分钟，他还要继续排队超过10分钟的概率是$\underline{\quad 1/e \quad}$

14. X、Y相互独立，同服从标准正态分布$N(0,1)$，$X+Y$的密度函数

$$f(x)= \underline{\quad \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{4}\}, (-\infty,+\infty) \quad}$$

15. X服从区间(0,1)上的均匀分布，求$Y = X^2 - 1$ 的概率密度。

解

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

当 $y < -1$或$y > 0, f_Y(y) = 0$

当 $-1 < y < 0$时

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 - 1 \le y) = P(X \le \sqrt{y+1}) = F_X(\sqrt{y+1})$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = f_X(\sqrt{y+1}) \cdot (y+1)^{-1/2}/2 = (y+1)^{-1/2}/2$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} (y+1)^{-1/2}/2 & -1 < y < 0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

16. X、Y相互独立，同服从区间(0,1)上的均匀分布，求随机变量$Z = X + Y$的概率密度。

解

(1) $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 < x, y < 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

当 $z < 0$或$z > 2, f_Z(z) = 0$

当 $0 < z < 1$时

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z) = \iint_{x+y \le z} f(x,y) d\sigma = z^2/2$$

当 $1 < z < 2$时

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z) = \iint_{x+y \le z} f(x,y) d\sigma = 1 - (2-z)^2/2$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 0 & z < 0或z > 2 \\ z & 0 < z < 1 \\ 2 - z & 1 < z < 2 \end{cases}$$

(2) $f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}, f_Y(z-x) = \begin{cases} 1 & 0 < z - x < 1 \\ 0 & 其它 \end{cases} = \begin{cases} 1 & z - 1 < x < z \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_0^1 f_Y(z-x) dx$$

当 $0 < z < 1$时

$$f_Z(z) = \int_0^1 f_Y(z-x) dx = \int_0^z dx = z$$

当 $1 < z < 2$时

$$f_Z(z) = \int_0^1 f_Y(z-x) dx = \int_{z-1}^1 dx = 2 - z$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 0 & z < 0或z > 2 \\ z & 0 < z < 1 \\ 2 - z & 1 < z < 2 \end{cases}$$

17. (X,Y)服从方域:$0\le x,y\le 1$上的均匀分布。

(1) 求边缘密度;(2) 讨论X与Y独立性;(3) 若已知$Y=1/2$，求X的条件分布密度;(4) 求条件概率$P(X\le 1/2|Y=1/2)$;(5) 计算$P(X+Y\le 1)$;(6) 求$\max(X,Y)$的密度函数;(7) 讨论X与Y的相关性。

(1) (X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x,y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

当$0\le x\le 1$,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 dy=1$$

$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，类似地，$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

(2) $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

X与Y相互独立

(3) $0\le y\le 1$

$$f_{X|Y}(x|y)=f(x,y)/f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$f_{X|Y=1/2}(x|y=1/2)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

(4) $P(X\le 1/2|Y=1/2)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|Y=1/2}(x|y=1/2)dx=\int_0^{1/2}dx=0.5$

(5) $P(X+Y\le 1)=\iint_{x+y\le 1}f(x,y)d\sigma=0.5$

(6) $Z=\max(X,Y)$

当 $z<0$或$z>1, f_Z(z)=0$

当 $0<z<1, F_Z(z)=P(\max(X,Y)\le z)=P(X\le z,Y\le z)=z^2$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z & 0<z<1\\ 0 & z<0或z>1\end{cases}$$

(7) X与Y相互独立，X与Y线性不相关。

或 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=1/2=E(Y)$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1 xydx=1/4$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,$

$\rho=Cov(X,Y)/\sigma(X)\sigma(X)=0$

X与Y线性不相关

18. (X,Y)的联合分布如下，

(1) 求边缘概率分布;(2) 判断X、Y的独立性；(3) 求已知$Y \le 0$的条件下X的条件分布律及条件分布函数；(4) 函数$\max(X,Y)$及$\min(X,Y)$的分布律；(5) 计算概率$P(X+Y \le 1)$；(6) 计算$Cov(X,Y)$。

Y \ X	0	1	2
0	0.3	0.1	0.1
1	0.2	0.3	0

解

(1)

Y \ X	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	0.3	0.1	0.1	0.5
1	0.2	0.3	0	0.5
$p_{\cdot j}$	0.5	0.4	0.1	

(2) $P(X=0,Y=0)=0.3 \ne P(X=0)P(Y=0)=0.5\times 0.5=0.25$

从而，X与Y不独立。

(3) $(Y \le 0)=(Y=0)$

$P(X=0|Y=0)=P(X=0,Y=0)/P(Y=0)=0.3/0.5=0.6$

$P(X=1|Y=0)=P(X=1,Y=0)/P(Y=0)=0.1/0.5=0.2$

$P(X=2|Y=0)=P(X=2,Y=0)/P(Y=0)=0.1/0.5=0.2$

X的条件分布律：

X	0	1	2
$P(X=k|Y=0)$	0.6	0.2	0.2

(4) $P(\max(X,Y)=0)=P(X=0,Y=0)=0.3$

$P(\max(X,Y)=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=0.3$

$P(\max(X,Y)=2)=1-0.3-0.3=0.4$

$\max(X,Y)$的分布律：

$\max(X,Y)$	0	1	2
p_k	0.3	0.3	0.4

(5) $P(X+Y \le 1)=P((X,Y)=(0,0),(0,1),(1,0))=0.6$

(6)

X	0	1	2
p_k	0.5	0.4	0.1

Y	0	1
p_k	0.5	0.5

XY	0	1	2
p_k	0.7	0.3	0

$E(X)=0.6,\quad E(Y)=0.5,\quad E(XY)=0.3$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(X)=0$

三、大数定律及中心极限定理

切贝雪夫不等式、伯努利大数定律辛钦大数定律、拉普拉斯中心极限定理勒维中心极限定理。

19. $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$。由切贝雪夫不等式比较大小：

$P(|X-\mu|<3\sigma)$ ___>___ $8/9$

20. 100次轰炸，任一次击中目标的炸弹数$X, E(X)=2, D(X)=1.69$。求有180到220颗炸弹命中目标的概率。　$\Phi(1.78)=0.9625,\ Z_{0.0618}=1.54$

解

令X_i为第i架飞机命中的炸弹数，

$E(X_i)=2, D(X_i)=1.69$

$\sum_{i=1}^{100} X_i$即命中目标的炸弹总数，由中心极限定理，其近似服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。其中，$\mu=2\times100=200, \sigma^2=1.69\times100=169$

$P(180\le\sum_{i=1}^{n} X_i\le220)$

$=P\{(180-200)/13\le(\sum_{i=1}^{n} X_i-200)/13\le(220-200)/13\approx1.54\}$

$\approx2\Phi(1.54)-1=0.8764$

四、数理统计

总体、简单随机样本、常用统计量及其分布、任意总体的分布定理、正态总体抽样分布定理及其推论、参数的点估计(矩估计极大似然估计)及区间估计(正态总体一般总体)

21. 比较大小：$\chi^2_{0.05}(n)$ ___>___ $\chi^2_{0.25}(n)$

22. 比较大小：$P(t(n)>3)$ ___>___ $P(t(n)<-4)$

23. 比较大小：$t_{0.05}(n)$ ___=___ $-t_{0.95}(n)$

24. $F_{0.1}(2,\ 4)=4.32,\ F_{0.9}(4,\ 2)=$ ___$1/4.32$___

25. $0\le\alpha_i\le1,\ \sum_{i-1}^{n}\alpha_i=1$,所有$\sum_{i-1}^{n}\alpha_i X_i$均是总体$X$的均值$\mu$的无偏估计。其中最有效的是___$\overline{X}$___

26. X服从均匀分布$U(0,\theta)$，θ未知。取样本$(X_1,X_2,\cdots X_n)$，在矩法估计下，θ的估计量$\hat{\theta}=$___$2\overline{X}$___，极大似然估计量是：$\hat{\theta}=$___$\max(X_1,X_2,\cdots X_n)$___

27. 总体X服从标准正态分布$N(0,1)$，取样本$(X_1,X_2,\cdots X_{10})$。$\overline{X}$服从分布___$N(0,\ 1/10)$___

28. 对泊松总体$P(\lambda)$，当样本容量n足够大时，样本均值$\overline{X}$近似正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其均值$\mu=$___$n\lambda$___，方差$\sigma^2=$___$n\lambda$___

29. 总体X有分布：

X	0	1	2
p_k	θ	θ	$1-2\theta$

其中θ为待估参数，$0<\theta<1/2$。取样本$(X_1,X_2,\cdots X_{10})$，某一次观察结果为：

1，1，0，2，1，2，2，0，0，2

求θ 极大似然的估计值。

解

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{10}P(X_i=x_i)=\theta^3\theta^3(1-2\theta)^4=\theta^6(1-2\theta)^4$$

$$\ln L(\theta)=6\ln\theta+4\ln(1-2\theta)$$

令 $$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=6/\theta-8/(1-2\theta)=0$$

解之得估计值 $\hat{\theta}=0.3$

30. 总体X服从$N(\mu,\sigma^2)$，$\sum_{i=1}^{15}x_i=8.7,\sum_{i=1}^{15}x_i^2=25.05$。分别求置信度为$1-\alpha$下$\mu$及$\sigma^2$的置信区间。

$t_{0.025}(14)=2.1448,\quad \chi^2_{0.025}(14)=26.119,\quad \chi^2_{0.975}(14)=5.629$

$t_{0.025}(15)=2.1315,\quad \chi^2_{0.025}(15)=27.488,\quad \chi^2_{0.975}(15)=6.262$

解

$1-\alpha=0.95,\quad \alpha/2=0.025$

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{15}}\text{服从分布}t(n-1)=t(14)$$

$$1-\alpha=P(-t_{\alpha/2}(14)<T<t_{\alpha/2}(14))=P(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{15}}t_{\alpha/2}(14)<\mu<\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{15}}t_{\alpha/2}(14))$$

μ的置信度为0.95的置信区间：$(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{15}}t_{\alpha/2}(14),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{15}}t_{\alpha/2}(14))$

$$\overline{x}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}x_i=0.58,\quad s^2=\frac{1}{14}(\sum_{i=1}^{15}x_i-15\overline{x}^2)=1.43,\quad t_{0.025}(14)=2.1448$$

μ的置信度为0.95的置信区间. $(-0.08,\ 1.24)$

$\chi^2=14S^2/\sigma^2$服从分布$\chi^2(14)$

$$1-\alpha=P(\chi^2_{1-\alpha/2}<\chi^2<\chi^2_{\alpha/2})=P(14S^2/\chi^2_{\alpha/2}<\sigma^2<14S^2/\chi^2_{1-\alpha/2})$$

σ^2 的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$(14S^2/\chi^2_{\alpha/2}(14),\ 14S^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(14))$

$\chi^2_{0.025}(14)=26.119,\quad \chi^2_{0.975}(14)=5.629$

σ^2的置信度为0.95的置信区间. $(0.767,\ 3.55)$