概率论与数理统计习题及答案

习题 一

1．略.见教材习题参考答案.

2.设 A，B，C 为三个事件，试用 A，B，C 的运算关系式表示下列事件：■

（1） A 发生，B，C 都不发生；

（2） A 与 B 发生，C 不发生；■

（3） A，B，C 都发生；

（4） A，B，C 至少有一个发生；■

（5） A，B，C 都不发生；

（6） A，B，C 不都发生；■

（7） A，B，C 至多有 2 个发生；

（8） A，B，C 至少有 2 个发生. ■

【解】（1） $A\bar{B}\bar{C}$ （2） $AB\bar{C}$ （3） ABC

（4） $A\cup B\cup C=\overline{AB}\,C\cup \bar{A}B\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup ABC=\overline{\overline{AB}\,\overline{C}}$

(5) $\overline{AB}\,\overline{C}=\overline{A\bigcup B\bigcup C}$ (6) $\overline{ABC}$

(7) $\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup \overline{AB}\,C\cup A\overline{BC}\cup \bar{A}B\bar{C}\cup \overline{AB}\,\overline{C}=\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

(8) $AB\cup BC\cup CA=AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup \bar{A}BC\cup ABC$

3. 略.见教材习题参考答案

4.设 A，B 为随机事件，且 P（A）=0.7,$P(A–B)$=0.3，求 P（$\overline{AB}$）. ■

【解】 P（$\overline{AB}$）=1–P（AB）=1–[$P(A)$–$P(A–B)$]

=1–[0.7–0.3]=0.6

5.设 A，B 是两事件，且 P（A）=0.6,$P(B)$=0.7,求： ■

（1） 在什么条件下 P（AB）取到最大值？ ■

（2） 在什么条件下 P（AB）取到最小值？ ■

【解】（1） 当 $AB=A$ 时，P（AB）取到最大值为 0.6.

（2） 当 $A\cup B=\Omega$ 时，P（AB）取到最小值为 0.3.

6.设 A，B，C 为三事件，且 P（A）=P（B）=1/4，P（C）=1/3 且 P（AB）=P（BC）=0， P（AC）=1/12，求 A，B，C 至少有一事件发生的概率. ■

【解】 P（$A\cup B\cup C$）=$P(A)+P(B)+P(C)–P(AB)–P(BC)–P(AC)+P(ABC)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

7.⌃从 52 张扑克牌中任意取出 13 张，问有 5 张黑桃，3 张红心，3 张方块，2 张梅花的概率是多少？

【解】 $p=C_{13}^{5}C_{13}^{3}C_{13}^{3}C_{13}^{2}/C_{52}^{13}$

8.⌃对一个五人学习小组考虑生日问题：

（1） 求五个人的生日都在星期日的概率； （2） 求五个人的生日都不在星期日的概率；

（3） 求五个人的生日不都在星期日的概率.

【解】（1） 设 A_1={五个人的生日都在星期日}，基本事件总数为 7^5，有利事件仅 1 个，故

P（A_1）$=\frac{1}{7^5}=$（$\frac{1}{7}$）^{5} （亦可用独立性求解，下同）

（2） 设 A_2={五个人生日都不在星期日}，有利事件数为 6^5，故

P（A_2）$=\frac{6^5}{7^5}=(\frac{6}{7})^5$

(3) 设 A_3={五个人的生日不都在星期日}

$$P（A_3）=1-P(A_1)=1-(\frac{1}{7})^5$$

9.‸略.见教材习题参考答案.

10.一批产品共 N 件，其中 M 件正品.从中随机地取出 n 件（$n<N$）.试求其中恰有 m 件（$m \leqslant M$）正品（记为 A）的概率.如果：■

（1） n 件是同时取出的；

（2） n 件是无放回逐件取出的；■

（3） n 件是有放回逐件取出的.■

【解】（1） $P（A）=\mathrm{C}_M^m \mathrm{C}_{N-M}^{n-m} / \mathrm{C}_N^n$

(2) 由于是无放回逐件取出，可用排列法计算.样本点总数有 P_N^n 种，n 次抽取中有 m 次为正品的组合数为 C_n^m 种.对于固定的一种正品与次品的抽取次序，从 M 件正品中取 m 件的排列

数有 P_M^m 种，从 $N-M$ 件次品中取 $n-m$ 件的排列数为 P_{N-M}^{n-m} 种，故

$$P（A）=\frac{\mathrm{C}_n^m \mathrm{P}_M^m \mathrm{P}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{P}_N^n}$$

由于无放回逐渐抽取也可以看成一次取出，故上述概率也可写成

$$P（A）=\frac{\mathrm{C}_M^m \mathrm{C}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{C}_N^n}$$

可以看出，用第二种方法简便得多.

（3） 由于是有放回的抽取，每次都有 N 种取法，故所有可能的取法总数为 N^n 种，n 次抽取中有 m 次为正品的组合数为 C_n^m 种，对于固定的一种正、次品的抽取次序，m 次取得正品，都有 M 种取法，共有 M^m 种取法，$n-m$ 次取得次品，每次都有 $N-M$ 种取法，共有 $(N-M)^{n-m}$ 种取法，故

$$P(A)=\mathrm{C}_n^m M^m (N-M)^{n-m} / N^n$$

此题也可用贝努里概型，共做了 n 重贝努里试验，每次取得正品的概率为 $\dfrac{M}{N}$，则取得 m 件正品的概率为

$$P(A)=\mathrm{C}_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

11. 略.见教材习题参考答案.

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 个铆钉强度太弱.每个部件用 3 只铆钉.若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱.求发生一个部件强度太弱的概率是多少？

【**解**】设 A={发生一个部件强度太弱}

$$P(A)=\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_3^3/\mathrm{C}_{50}^3=\frac{1}{1960}$$

13. 一个袋内装有大小相同的 7 个球，其中 4 个是白球，3 个是黑球，从中一次抽取 3 个，计算至少有两个是白球的概率.

【解】 设 A_i={恰有 i 个白球}（i=2,3），显然 A_2 与 A_3 互斥.

$$P(A_2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}, \qquad P(A_3)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$$

故
$$P(A_2\cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{22}{35}$$

14. 有甲、乙两批种子，发芽率分别为 0.8 和 0.7，在两批种子中各随机取一粒，求：

（1） 两粒都发芽的概率；

（2） 至少有一粒发芽的概率；

（3） 恰有一粒发芽的概率.

【解】设 A_i={第 i 批种子中的一粒发芽}，（i=1,2）

(1) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.7\times 0.8=0.56$

(2) $P(A_1 \cup A_2) = 0.7 + 0.8 - 0.7 \times 0.8 = 0.94$

(3) $P(A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2) = 0.8 \times 0.3 + 0.2 \times 0.7 = 0.38$

15.掷一枚均匀硬币直到出现 3 次正面才停止.

（1） 问正好在第 6 次停止的概率；

（2） 问正好在第 6 次停止的情况下，第 5 次也是出现正面的概率.

【解】（1） $p_1 = C_5^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^3 \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$ (2) $p_2 = \dfrac{C_4^1 (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^3 \frac{1}{4}}{5/32} = \frac{2}{5}$

16.甲、乙两个篮球运动员，投篮命中率分别为 0.7 及 0.6，每人各投了 3 次，求二人进球数相等的概率.

【解】 设 A_i={甲进 i 球}，i=0,1,2,3,B_i={乙进 i 球},i=0,1,2,3,则

$$P(\bigcup_{i=0}^{3} A_i B_{i3}) = (0.3)^3 (0.4)^3 + C_3^1 0.7 \times (0.3)^2 C_3^1 0.6 \times (0.4)^2 +$$

$$C_3^2(0.7)^2\times 0.3C_3^2(0.6)^2 0.4+(0.7)^3(0.6)^3$$

$=0.32076$

17. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率.

【解】 $$p=1-\frac{C_5^4 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

18. 某地某天下雪的概率为 0.3，下雨的概率为 0.5，既下雪又下雨的概率为 0.1,求：

（1） 在下雨条件下下雪的概率；（2） 这天下雨或下雪的概率.

【解】 设 A={下雨}，B={下雪}.

（1） $$p(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$

（2） $$p(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.5-0.1=0.7$$

19. 已知一个家庭有 3 个小孩，且其中一个为女孩，求至少有一个男孩的概率（小孩为男为女是等可能的）.

【解】 设 A={其中一个为女孩}，B={至少有一个男孩}，样本点总数为 $2^3=8$，故

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/8}{7/8}=\frac{6}{7}$$

或在缩减样本空间中求，此时样本点总数为 7.

$$P(B|A)=\frac{6}{7}$$

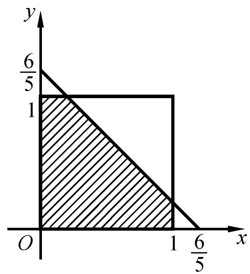
20. 已知 5%的男人和 0.25%的女人是色盲，现随机地挑选一人，此人恰为色盲，问此人是男人的概率（假设男人和女人各占人数的一半）.

【解】 设 A={此人是男人}，B={此人是色盲}，则由贝叶斯公式

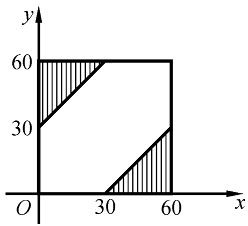
$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A)P(B|A)}$$

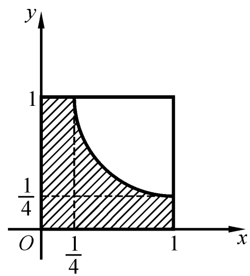
$$=\frac{0.5\times 0.05}{0.5\times 0.05+0.5\times 0.0025}=\frac{20}{21}$$

21. 两人约定上午 9：00~10：00 在公园会面，求一人要等另一人半小时以上的概率.



(a)





(b)

题 21 图　　　　　　　　　　　　　　题 22 图

【解】设两人到达时刻为 x,y,则 $0\leqslant x,y\leqslant 60$.事件“一人要等另一人半小时以上”等价于$|x-y|>30$.如图阴影部分所示.

$$P=\frac{30^2}{60^2}=\frac{1}{4}$$

22.从（0，1）中随机地取两个数，求：

（1） 两个数之和小于$\frac{6}{5}$的概率；

（2） 两个数之积小于$\frac{1}{4}$的概率.

【解】 设两数为 x,y，则 $0<x,y<1$.

（1） $x+y<\frac{6}{5}$.

$$p_1 = 1 - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{4}{5}\,\frac{4}{5}}{1} = \frac{17}{25} = 0.68$$

(2) xy=< $\frac{1}{4}$.

$$p_2 = 1 - \left(\int_{\frac{1}{4}}^{1} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{4x}}^{1} \mathrm{d}y \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

23.设 P（$\overline{A}$）=0.3,$P(B)$=0.4,$P(A\overline{B})$=0.5，求 P（$B \mid A \cup \overline{B}$）

【解】 $$P(B \mid A \cup \overline{B}) = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A) - P(A\overline{B})}{P(A) + P(B) - P(A\overline{B})}$$

$$= \frac{0.7 - 0.5}{0.7 + 0.6 - 0.5} = \frac{1}{4}$$

24.在一个盒中装有 15 个乒乓球，其中有 9 个新球，在第一次比赛中任意取出 3 个球，比赛后放回原盒中；第二次比赛同样任意取出 3 个球，求第二次取出的 3 个球均为新球的概率.

【解】 设 A_i={第一次取出的 3 个球中有 i 个新球}，i=0,1,2,3.B={第二次取出的 3 球均为新球}

由全概率公式，有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(B|A_i)P(A_i)$$

$$=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}\bullet\frac{C_9^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^1C_6^2}{C_{15}^3}\bullet\frac{C_8^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^2C_6^1}{C_{15}^3}\bullet\frac{C_7^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^3}{C_{15}^3}\bullet\frac{C_6^3}{C_{15}^3}=0.089$$

25. 按以往概率论考试结果分析,努力学习的学生有 90%的可能考试及格,不努力学习的学生有 90%的可能考试不及格.据调查，学生中有 80%的人是努力学习的，试问：

（1）考试及格的学生有多大可能是不努力学习的人?

（2）考试不及格的学生有多大可能是努力学习的人?

【解】设 A={被调查学生是努力学习的}，则 $\overline{A}$ ={被调查学生是不努力学习的}.由题意知 P（A）=0.8，P（$\overline{A}$）=0.2，又设 B={被调查学生考试及格}.由题意知 P（$B|A$）=0.9，P（$\overline{B}|\overline{A}$）=0.9，故由贝叶斯公式知

（1）$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(A)P(B|A)+P(A)P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{0.2\times 0.1}{0.8\times 0.9+0.2\times 0.1}=\frac{1}{37}=0.02702$$

即考试及格的学生中不努力学习的学生仅占 2.702%

(2) $$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})}$$

$$=\frac{0.8\times 0.1}{0.8\times 0.1+0.2\times 0.9}=\frac{4}{13}=0.3077$$

即考试不及格的学生中努力学习的学生占 30.77%.

26. 将两信息分别编码为 A 和 B 传递出来，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01.信息 A 与 B 传递的频繁程度为 2∶1.若接收站收到的信息是 A，试问原发信息是 A 的概率是多少？

【解】 设 A={原发信息是 A}，则={原发信息是 B}

C={收到信息是 A}，则={收到信息是 B}

由贝叶斯公式，得

$$P(A|C)=\frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(\overline{A})P(C|\overline{A})}$$

$$=\frac{2/3\times 0.98}{2/3\times 0.98+1/3\times 0.01}=0.99492$$

27. 在已有两个球的箱子中再放一白球，然后任意取出一球，若发现这球为白球，试求箱子中原有

一白球的概率（箱中原有什么球是等可能的颜色只有黑、白两种）

【解】 设 A_i={箱中原有 i 个白球}（i=0,1,2），由题设条件知 P（A_i）= $\frac{1}{3}$,i=0,1,2.又设 B={抽出一球为白球}.由贝叶斯公式知

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=0}^{2}P(B|A_i)P(A_i)}$$

$$=\frac{2/3\times 1/3}{1/3\times 1/3+2/3\times 1/3+1\times 1/3}=\frac{1}{3}$$

28.某工厂生产的产品中 96%是合格品，检查产品时，一个合格品被误认为是次品的概率为 0.02，一个次品被误认为是合格品的概率为 0.05，求在被检查后认为是合格品产品确是合格品的概率.

【解】 设 A={产品确为合格品}，B={产品被认为是合格品}

由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A)P(B|A)}$$

$$=\frac{0.96\times 0.98}{0.96\times 0.98+0.04\times 0.05}=0.998$$

29. 某保险公司把被保险人分为三类："谨慎的"，"一般的"，"冒失的".统计资料表明，上述三种人在一年内发生事故的概率依次为 0.05,0.15 和 0.30；如果"谨慎的"被保险人占 20%，"一般的"占 50%，"冒失的"占 30%，现知某被保险人在一年内出了事故，则他是"谨慎的"的概率是多少？

【解】 设 A={该客户是"谨慎的"}，B={该客户是"一般的"}，

C={该客户是"冒失的"}，D={该客户在一年内出了事故}

则由贝叶斯公式得

$$P(A\mid D)=\frac{P(AD)}{P(D)}=\frac{P(A)P(D\mid A)}{P(A)P(D\mid A)+P(B)P(D\mid B)+P(C)P(D\mid C)}$$

$$=\frac{0.2\times0.05}{0.2\times0.05+0.5\times0.15+0.3\times0.3}=0.057$$

30.⌃加工某一零件需要经过四道工序，设第一、二、三、四道工序的次品率分别为 0.02,0.03,0.05,0.03，假定各道工序是相互独立的，求加工出来的零件的次品率.

【解】设 A_i={第 i 道工序出次品}（i=1,2,3,4）.

$$P(\bigcup_{i=1}^{4}A_i)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})$$

$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})$$

$$=1-0.98\times0.97\times0.95\times0.97=0.124$$

31.⌃设每次射击的命中率为 0.2，问至少必须进行多少次独立射击才能使至少击中一次的概率不小于 0.9?

【解】设必须进行 n 次独立射击.

$$1-(0.8)^n\geq0.9$$

即为 $$(0.8)^n \le 0.1$$

故 $$n \geqslant 11$$

至少必须进行 11 次独立射击.

32. 证明：若 P（A｜B）$=P(A$｜$\overline{B}$)，则 A，B 相互独立.

【证】 $P(A|B) = P(A|\overline{B})$ 即 $$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$$

亦即 $$P(AB)P(\overline{B}) = P(A\overline{B})P(B)$$

$$P(AB)[1-P(B)] = [P(A)-P(AB)]P(B)$$

因此 $$P(AB) = P(A)P(B)$$

故 A 与 B 相互独立.

33. 三人独立地破译一个密码，他们能破译的概率分别为 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，求将此密码破译出的概率.

【解】 设 A_i={第 i 人能破译}（i=1,2,3），则

$$P(\bigcup_{i=1}^{3} A_i) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$= 1 - \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 0.6$$

34. 甲、乙、丙三人独立地向同一飞机射击，设击中的概率分别是 0.4,0.5,0.7，若只有一人击中，则飞机被击落的概率为 0.2；若有两人击中，则飞机被击落的概率为 0.6；若三人都击中，则飞机一定被击落，求：飞机被击落的概率.

【解】 设 A={飞机被击落}，B_i={恰有 i 人击中飞机}，i=0,1,2,3

由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A|B_i)P(B_i)$$

$=(0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7)0.2+$

$(0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7)0.6+0.4\times0.5\times0.7$

$=0.458$

35.已知某种疾病患者的痊愈率为 25%，为试验一种新药是否有效，把它给 10 个病人服用，且规定若 10 个病人中至少有四人治好则认为这种药有效，反之则认为无效，求：

（1） 虽然新药有效，且把治愈率提高到 35%，但通过试验被否定的概率.

（2） 新药完全无效，但通过试验被认为有效的概率.

【解】（1） $p_1=\sum_{k=0}^{3}\mathrm{C}_{10}^{k}(0.35)^k(0.65)^{10-k}=0.5138$

(2) $p_2=\sum_{k=4}^{10}C_{10}^k(0.25)^k(0.75)^{10-k}=0.2241$

36.⌃一架升降机开始时有 6 位乘客，并等可能地停于十层楼的每一层.试求下列事件的概率：

（1） A=“某指定的一层有两位乘客离开”；

（2） B=“没有两位及两位以上的乘客在同一层离开”；

（3） C=“恰有两位乘客在同一层离开”；

（4） D=“至少有两位乘客在同一层离开”.

【解】 由于每位乘客均可在 10 层楼中的任一层离开，故所有可能结果为 10^6 种.

（1） $P(A)=\frac{C_6^2 9^4}{10^6}$，也可由 6 重贝努里模型：

$$P(A)=C_6^2(\frac{1}{10})^2(\frac{9}{10})^4$$

（2） 6 个人在十层中任意六层离开，故

$$P(B) = \frac{\mathrm{P}_{10}^{6}}{10^{6}}$$

（3） 由于没有规定在哪一层离开，故可在十层中的任一层离开，有 C_{10}^{1} 种可能结果，再从六人中选二人在该层离开，有 C_{6}^{2} 种离开方式.其余 4 人中不能再有两人同时离开的情况，因此可包含以下三种离开方式：①4 人中有 3 个人在同一层离开，另一人在其余 8 层中任一层离开，共有 $\mathrm{C}_{9}^{1}\mathrm{C}_{4}^{3}\mathrm{C}_{8}^{1}$ 种可能结果；②4 人同时离开，有 C_{9}^{1} 种可能结果；③4 个人都不在同一层离开，有 P_{9}^{4} 种可能结果，故

$$P(C) = \mathrm{C}_{10}^{1}\mathrm{C}_{6}^{2}(\mathrm{C}_{9}^{1}\mathrm{C}_{4}^{3}\mathrm{C}_{8}^{1} + \mathrm{C}_{9}^{1} + \mathrm{P}_{9}^{4})/10^{6}$$

（4） D=$\overline{B}$.故

$$P(D)=1-P(B)=1-\frac{\mathrm{P}_{10}^{6}}{10^{6}}$$

37. n 个朋友随机地围绕圆桌而坐，求下列事件的概率：

（1） 甲、乙两人坐在一起，且乙坐在甲的左边的概率；

（2） 甲、乙、丙三人坐在一起的概率；

（3） 如果 n 个人并排坐在长桌的一边，求上述事件的概率.

【解】 （1） $p_1=\dfrac{1}{n-1}$

(2) $p_2=\dfrac{3!(n-3)!}{(n-1)!}, n>3$

(3) $p_1{}' = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$; $p_2{}' = \dfrac{3!(n-2)!}{n!}, n \geq 3$

38. 将线段[0，a]任意折成三折，试求这三折线段能构成三角形的概率

【解】 设这三段长分别为 $x,y,a-x-y$.则基本事件集为由

$0<x<a, 0<y<a, 0<a-x-y<a$ 所构成的图形，有利事件集为由

$$\begin{cases} x+y > a-x-y \\ x+(a-x-y) > y \\ y+(a-x-y) > x \end{cases}$$

构成的图形，即

$$\begin{cases} 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ 0 < y < \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a}{2} < x + y < a \end{cases}$$

如图阴影部分所示，故所求概率为 $p=\dfrac{1}{4}$.

39. 某人有 n 把钥匙，其中只有一把能开他的门.他逐个将它们去试开（抽样是无放回的）.证明试开 k 次（k=1,2,⋯,n）才能把门打开的概率与 k 无关.

【证】 $$p=\frac{\mathrm{P}_{n-1}^{k-1}}{\mathrm{P}_n^k}=\frac{1}{n},\ k=1,2,\cdots,n$$

40.把一个表面涂有颜色的立方体等分为一千个小立方体，在这些小立方体中，随机地取出一个，试

求它有 i 面涂有颜色的概率 P（A_i）（i=0,1,2,3）. ■

【解】 设 A_i={小立方体有 i 面涂有颜色}，i=0,1,2,3.

在 1 千个小立方体中，只有位于原立方体的角上的小立方体是三面有色的，这样的小立方体共有 8 个.只有位于原立方体的棱上（除去八个角外）的小立方体是两面涂色的，这样的小立方体共有 12×8=96 个.同理，原立方体的六个面上（除去棱）的小立方体是一面涂色的，共有 8×8×6=384 个.其余 1000–（8+96+384）=512 个内部的小立方体是无色的，故所求概率为

$$P(A_0)=\frac{512}{1000}=0.512, P(A_1)=\frac{384}{1000}=0.384,$$

$$P(A_2)=\frac{96}{1000}=0.096, P(A_4)=\frac{8}{1000}=0.008.$$

41.对任意的随机事件 A，B，C，试证 ■

$$P(AB)+P(AC)-P(BC)\leqslant P(A).$$ ■

【证】 $$P(A)\geq P[A(B\cup C)]=P(AB\cup AC)$$

$$= P(AB) + P(AC) - P(ABC)$$

$$\geq P(AB) + P(AC) - P(BC)$$

42.将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率.

【解】 设 A_i ={杯中球的最大个数为 i},i=1,2,3.

将 3 个球随机放入 4 个杯子中，全部可能放法有 4^3 种，杯中球的最大个数为 1 时，每个杯中最多放一球，故

$$P(A_1) = \frac{C_4^3 3!}{4^3} = \frac{3}{8}$$

而杯中球的最大个数为 3，即三个球全放入一个杯中，故

$$P(A_3)=\frac{C_4^1}{4^3}=\frac{1}{16}$$

因此 $$P(A_2)=1-P(A_1)-P(A_3)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$$

或 $$P(A_2)=\frac{C_4^1C_3^2C_3^1}{4^3}=\frac{9}{16}$$

43. 将一枚均匀硬币掷 $2n$ 次，求出现正面次数多于反面次数的概率.

【解】掷 $2n$ 次硬币，可能出现：A={正面次数多于反面次数}，B={正面次数少于反面次数}，C={正面次数等于反面次数}，A，B，C 两两互斥.

可用对称性来解决.由于硬币是均匀的，故 P（A）=P（B）.所以

$$P(A)=\frac{1-P(C)}{2}$$

由 $2n$ 重贝努里试验中正面出现 n 次的概率为

$$P(C)=C_{2n}^{n}(\frac{1}{2})^{n}(\frac{1}{2})^{n}$$

故

$$P(A)=\frac{1}{2}[1-C_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}]$$

44.‸掷 n 次均匀硬币，求出现正面次数多于反面次数的概率.

【解】设 A={出现正面次数多于反面次数}，B={出现反面次数多于正面次数}，由对称性知 P（A）=P（B）

（1） 当 n 为奇数时，正、反面次数不会相等.由 P（A）+P（B）=1 得 P（A）=P（B）=0.5

(2) 当 n 为偶数时，由上题知

$$P(A)=\frac{1}{2}[1-C_{n}^{\frac{n}{2}}(\frac{1}{2})^{n}]$$

45.‸设甲掷均匀硬币 n+1 次，乙掷 n 次，求甲掷出正面次数多于乙掷出正面次数的概率.

【解】 令甲$_{正}$=甲掷出的正面次数，甲$_{反}$=甲掷出的反面次数.

乙$_{正}$=乙掷出的正面次数，乙$_{反}$=乙掷出的反面次数.

显然有

$$\overline{(\text{甲}_{\text{正}}>\text{乙}_{\text{正}})}=(\text{甲}_{\text{正}}\leqslant\text{乙}_{\text{正}})=(n+1-\text{甲}_{\text{反}}\leqslant n-\text{乙}_{\text{反}})$$

$$=(\text{甲}_{\text{反}}\geqslant 1+\text{乙}_{\text{反}})=(\text{甲}_{\text{反}}>\text{乙}_{\text{反}})$$

由对称性知 P（甲$_{\text{正}}$>乙$_{\text{正}}$）$=P$（甲$_{\text{反}}$>乙$_{\text{反}}$）

因此 $P(\text{甲}_{\text{正}}>\text{乙}_{\text{正}})=\dfrac{1}{2}$

46. 证明“确定的原则”（Sure–thing）：若 $P(A|C)\geqslant P(B|C),P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

【证】由 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$,得

$$\frac{P(AC)}{P(C)}\geq\frac{P(BC)}{P(C)},$$

即有

$$P(AC)\geq P(BC)$$

同理由 $$P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C}),$$

得 $$P(A\overline{C}) \geq P(B\overline{C}),$$

故 $$P(A) = P(AC) + P(A\overline{C}) \geq P(BC) + P(B\overline{C}) = P(B)$$

47.一列火车共有 n 节车厢，有 $k(k \geqslant n)$个旅客上火车并随意地选择车厢.求每一节车厢内至少有一个旅客的概率. ■

【解】 设 A_i={第 i 节车厢是空的}，（i=1,⋯,n）,则

$$P(A_i)=\frac{(n-1)^k}{n^k}=(1-\frac{1}{n})^k$$

$$P(A_iA_j)=(1-\frac{2}{n})^k$$

$$\cdots$$

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_{n-1}})=(1-\frac{n-1}{n})^k$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}$ 是 1，2，⋯，n 中的任 n–1 个.

显然 n 节车厢全空的概率是零，于是

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=n(1-\frac{1}{n})^k=\mathrm{C}_n^1(1-\frac{1}{n})^k$$

$$S_2=\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)=\mathrm{C}_n^2(1-\frac{2}{n})^k$$

$$\cdots$$

$$S_{n-1}=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots i_{n-1}\le n}P(A_{i1}A_{i_2}\cdots A_{i_{n-1}})=\mathrm{C}_n^{n-1}(1-\frac{n-1}{n})^k$$

$$S_n=0$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=S_1-S_2+S_3-\cdots+(-1)^{n+1}S_n$$

$$=\mathrm{C}_n^1(1-\frac{1}{n})^k-\mathrm{C}_n^2(1-\frac{2}{n})^k+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^{n-1}(1-\frac{n-1}{n})^k$$

故所求概率为

$$1-P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=1-\mathrm{C}_n^1(1-\frac{1}{n})^k+\mathrm{C}_n^2(1-\frac{2}{n})^i-\cdots+(-1)^{n+1}\mathrm{C}_n^{n-1}(1-\frac{n-1}{n})^k$$

48.设随机试验中，某一事件 A 出现的概率为 ε >0.试证明：不论 ε >0 如何小，只要不断地独立地重复做此试验，则 A 迟早会出现的概率为 1. ■

【证】

在前 n 次试验中，A 至少出现一次的概率为

$$1-(1-\varepsilon)^n \to 1(n \to \infty)$$

49.袋中装有 m 只正品硬币，n 只次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽）.在袋中任取一只，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽.试问这只硬币是正品的概率是多少？

【解】设 A={投掷硬币 r 次都得到国徽}

B={这只硬币为正品}

由题知

$$P(B)=\frac{m}{m+n}, P(\overline{B})=\frac{n}{m+n}$$

$$P(A|B)=\frac{1}{2^r},P(A|\overline{B})=1$$

则由贝叶斯公式知

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B)P(A|B)}$$

$$=\frac{\frac{m}{m+n}\cdot\frac{1}{2^r}}{\frac{m}{m+n}\cdot\frac{1}{2^r}+\frac{n}{m+n}\cdot 1}=\frac{m}{m+2^r n}$$

50.巴拿赫（Banach）火柴盒问题：某数学家有甲、乙两盒火柴，每盒有 N 根火柴，每次用火柴时他在两盒中任取一盒并从中任取一根.试求他首次发现一盒空时另一盒恰有 r 根的概率是多少？第一次用完一盒火柴时（不是发现空）而另一盒恰有 r 根的概率又有多少？ ■

【解】以 B_1、B_2 记火柴取自不同两盒的事件，则有 $P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$.（1）发现一盒已空，另一

盒恰剩 r 根，说明已取了 $2n-r$ 次，设 n 次取自 B_1 盒（已空），$n-r$ 次取自 B_2 盒，第 $2n-r+1$ 次拿起 B_1，发现已空。把取 $2n-r$ 次火柴视作 $2n-r$ 重贝努里试验，则所求概率为

$$p_1 = 2C_{2n-r}^{n}(\frac{1}{2})^{n}(\frac{1}{2})^{n-r}\cdot\frac{1}{2} = C_{n-r}^{n}\frac{1}{2^{2r-r}}$$

式中 2 反映 B_1 与 B_2 盒的对称性（即也可以是 B_2 盒先取空）.

（2） 前 $2n-r-1$ 次取火柴，有 $n-1$ 次取自 B_1 盒，$n-r$ 次取自 B_2 盒，第 $2n-r$ 次取自 B_1 盒，故概率为

$$p_2 = 2C_{2n-r-1}^{n-1}(\frac{1}{2})^{n-1}(\frac{1}{2})^{n-r}\frac{1}{2} = C_{2n-r-1}^{n-1}(\frac{1}{2})^{2n-r-1}$$

51.˄求 n 重贝努里试验中 A 出现奇数次的概率.

【解】 设在一次试验中 A 出现的概率为 p.则由

$$(q+p)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \cdots + C_n^n p^n q^0 = 1$$

$$(q-p)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} - \cdots + (-1)^n C_n^{\mathrm{n}} p^n q^0$$

以上两式相减得所求概率为

$$p_1 = C_n^1 pq^{n-1} + C_n^3 p^3 q^{n-3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}[1-(q-p)^n]$$

$$= \frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$$

若要求在 n 重贝努里试验中 A 出现偶数次的概率，则只要将两式相加，即得

$$p_2 = \frac{1}{2}[1+(1-2p)^n].$$

52.设 A，B 是任意两个随机事件，求 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}$的值.

【**解**】因为（$A\cup B$）∩（$\overline{A}\cup\overline{B}$）=$A\overline{B}\cup\overline{A}B$

（$\overline{A}\cup B$）∩（$A\cup\overline{B}$）=$AB\cup\overline{AB}$

所求 $$(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})$$

$$=[(A\overline{B}\cup\overline{A}B)\cap(AB+\overline{AB})]$$

$$=\varnothing$$

故所求值为 0.

53.设两两相互独立的三事件，A，B 和 C 满足条件：■

$ABC=\Phi$，$P(A)=P(B)=P(C)<1/2$，且 P（$A\cup B\cup C$）=9/16，求 P（A）.

【**解**】由 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=3P(A)-3[P(A)]^2=\frac{9}{16}$$

故 $P(A)=\dfrac{1}{4}$ 或 $\dfrac{3}{4}$,按题设 P（A）< $\dfrac{1}{2}$,故 P（A）= $\dfrac{1}{4}$.

54.设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 1/9，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，求 P（A）.

【解】

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{1}{9} \qquad ①$$

$$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B) \qquad ②$$

故

$$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$$

故

$$P(A)=P(B) \qquad ③$$

由 A,B 的独立性，及①、③式有

$$\frac{1}{9}=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$=1-2P(A)+[P(A)]^2$$

$$=[1-P(A)]^2$$

故 $$1-P(A)=\pm\frac{1}{3}$$

故 $$P(A)=\frac{2}{3} \text{或} P(A)=\frac{4}{3}$$（舍去）

即 P（A）$=\dfrac{2}{3}$.

55.随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a 为正常数)内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 π/4 的概率为多少？ ■

【解】利用几何概率来求，图中半圆面积为 $\dfrac{1}{2}\pi a^2$.阴影部分面积为

$$\frac{\pi}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2$$

故所求概率为

$$p=\frac{\frac{\pi}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

56. 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，求另一件也是不合格品的概率.

【解】 设 A={两件中至少有一件是不合格品}，B={另一件也是不合格品}

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{C_4^2}{C_{10}^2}}{1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}}=\frac{1}{5}$$

57.设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份.随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份. ■

（1） 求先抽到的一份是女生表的概率 p； ■

（2） 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

【解】 设 A_i={报名表是取自第 i 区的考生}，i=1,2,3.

B_j={第 j 次取出的是女生表}，j=1,2.

则
$$P(A_i)=\frac{1}{3},i=1,2,3$$

$$P(B_1|A_1)=\frac{3}{10},P(B_1|A_2)=\frac{7}{15},P(B_1|A_3)=\frac{5}{25}$$

(1) $$p=P(B_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_1|A_i)=\frac{1}{3}(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25})=\frac{29}{90}$$

(2) $q = P(B_1 \mid \overline{B_2}) = \dfrac{P(B_1\overline{B_2})}{P(\overline{B_2})}$

而 $$P(\overline{B_2}) = \sum_{i=1}^{3} P(\overline{B_2} \mid A_i)P(A_i)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \frac{20}{25}\right) = \frac{61}{90}$$

$$P(B_1\overline{B_2}) = \sum_{i=1}^{3} P(B_1\overline{B_2} \mid A_i)P(A_i)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9} + \frac{7}{15}\times\frac{8}{14} + \frac{5}{25}\times\frac{20}{24}\right) = \frac{2}{9}$$

故 $$q=\frac{P(B_1\overline{B}_2)}{P(B_2)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\frac{20}{61}$$

58. 设 A，B 为随机事件，且 P（B）>0,$P(A|B)=1$,试比较 $P(A\cup B)$与 $P(A)$的大小. (2006 研考)

解：因为 $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)=P(B)$$

所以 $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(B)=P(A).$$

习题二

1.一袋中有 5 只乒乓球，编号为 1，2，3，4，5，在其中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律.

【解】

$$X = 3, 4, 5$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{\mathrm{C}_5^3} = 0.1$$

$$P(X = 4) = \frac{3}{\mathrm{C}_5^3} = 0.3$$

$$P(X = 5) = \frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_5^3} = 0.6$$

故所求分布律为

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

2.设在 15 只同类型零件中有 2 只为次品，在其中取 3 次，每次任取 1 只，作不放回抽样，以 X 表示取出的次品个数，求：

（1） X 的分布律；

（2） X 的分布函数并作图；

(3)

$$P\{X \le \frac{1}{2}\}, P\{1 < X \le \frac{3}{2}\}, P\{1 \le X \le \frac{3}{2}\}, P\{1 < X < 2\}.$$

【解】

$$X = 0,1,2.$$

$$P(X = 0) = \frac{C_{13}^{3}}{C_{15}^{3}} = \frac{22}{35}.$$

$$P(X = 1) = \frac{C_{2}^{1}C_{13}^{2}}{C_{15}^{3}} = \frac{12}{35}.$$

$$P(X = 2) = \frac{C_{13}^{1}}{C_{15}^{3}} = \frac{1}{35}.$$

故 X 的分布律为

X	0	1	2
P	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

（2） 当 $x<0$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=0$

当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=0)=\dfrac{22}{35}$

当 $1\leqslant x<2$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=0)+P(X=1)=\dfrac{34}{35}$

当 $x\geqslant 2$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=1$

故 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{22}{35}, & 0\le x<1\\ \dfrac{34}{35}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

(3)

$$P(X \le \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{22}{35},$$

$$P(1 < X \le \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(1) = \frac{34}{35} - \frac{34}{35} = 0$$

$$P(1 \le X \le \frac{3}{2}) = P(X = 1) + P(1 < X \le \frac{3}{2}) = \frac{12}{35}$$

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) - P(X = 2) = 1 - \frac{34}{35} - \frac{1}{35} = 0.$$

3.射手向目标独立地进行了 3 次射击，每次击中率为 0.8，求 3 次射击中击中目标的次数的分布律及分布函数，并求 3 次射击中至少击中 2 次的概率.

【解】

设 X 表示击中目标的次数.则 X=0，1，2，3.

$$P(X=0)=(0.2)^3=0.008$$
$$P(X=1)=C_3^1 0.8(0.2)^2=0.096$$
$$P(X=2)=C_3^2(0.8)^2 0.2=0.384$$
$$P(X=3)=(0.8)^3=0.512$$

故 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	0.008	0.096	0.384	0.512

分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 0.008, & 0\le x<1 \\ 0.104, & 1\le x<2 \\ 0.488, & 2\le x<3 \\ 1, & x\ge 3 \end{cases}$$

$$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)=0.896$$

4.（1） 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=a\frac{\lambda^k}{k!},$$

其中 k=0，1，2，…， $\lambda>0$ 为常数，试确定常数 a.

（2） 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=a/N, \quad k=1，2，\cdots，N,$$

试确定常数 a.

【解】（1） 由分布律的性质知

$$1=\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)=a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}=a\cdot \mathrm{e}^{\lambda}$$

故 $$a=\mathrm{e}^{-\lambda}$$

(2) 由分布律的性质知

$$1=\sum_{k=1}^{N} P(X=k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{a}{N}=a$$

即 $$a=1.$$

5.甲、乙两人投篮，投中的概率分别为 0.6,0.7,今各投 3 次，求：

（1） 两人投中次数相等的概率;

（2） 甲比乙投中次数多的概率.

【解】分别令 X、Y 表示甲、乙投中次数，则 $X\sim b$（3，0.6）,$Y\sim b(3,0.7)$

(1) $P(X=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)+$

$$P(X=3,Y=3)$$

$$=(0.4)^3(0.3)^3+C_3^1 0.6(0.4)^2 C_3^1 0.7(0.3)^2+$$

$$C_3^2(0.6)^2 0.4 C_3^2(0.7)^2 0.3+(0.6)^3(0.7)^3$$

$$=0.32076$$

(2) $P(X>Y)=P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)+P(X=3,Y=0)+$

$$P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=1)+P(X=3,Y=2)$$

$$=C_3^1 0.6(0.4)^2(0.3)^3+C_3^2(0.6)^2 0.4(0.3)^3+$$

$$(0.6)^3(0.3)^3+C_3^2(0.6)^2 0.4 C_3^1 0.7(0.3)^2+$$

$$(0.6)^3 C_3^1 0.7(0.3)^2+(0.6)^3 C_3^2(0.7)^2 0.3$$

=0.243

6.设某机场每天有 200 架飞机在此降落，任一飞机在某一时刻降落的概率设为 0.02，且设各飞机降落是相互独立的.试问该机场需配备多少条跑道，才能保证某一时刻飞机需立即降落而没有空闲跑道的概率小于 0.01(每条跑道只能允许一架飞机降落)？

【**解**】设 X 为某一时刻需立即降落的飞机数，则 X~$b(200,0.02)$，设机场需配备 N 条跑道，则有

$$P(X>N)<0.01$$

即

$$\sum_{k=N+1}^{200} \mathrm{C}_{200}^{k}(0.02)^{k}(0.98)^{200-k} < 0.01$$

利用泊松近似

$$\lambda = np = 200 \times 0.02 = 4.$$

$$P(X \geq N) \approx \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-4}4^{k}}{k!} < 0.01$$

查表得 N≥9.故机场至少应配备 9 条跑道.

7.有一繁忙的汽车站，每天有大量汽车通过，设每辆车在一天的某时段出事故的概率为 0.0001,在某天的该时段内有 1000 辆汽车通过，问出事故的次数不小于 2 的概率是多少（利用泊松定理）?

【解】设 X 表示出事故的次数，则 X~b（1000，0.0001）

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$=1-e^{-0.1}-0.1\times e^{-0.1}$$

8.已知在五重贝努里试验中成功的次数 X 满足 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，求概率 $P\{X=4\}$.

【解】设在每次试验中成功的概率为 p，则

$$C_5^1 p(1-p)^4 = C_5^2 p^2(1-p)^3$$

故 $$p=\frac{1}{3}$$

所以 $$P(X=4)=C_5^4(\frac{1}{3})^4\frac{2}{3}=\frac{10}{243}.$$

9.设事件 A 在每一次试验中发生的概率为 0.3，当 A 发生不少于 3 次时，指示灯发出信号，

（1） 进行了 5 次独立试验，试求指示灯发出信号的概率；

（2） 进行了 7 次独立试验，试求指示灯发出信号的概率.

【解】（1） 设 X 表示 5 次独立试验中 A 发生的次数，则 X~6（5，0.3）

$$P(X \geq 3)=\sum_{k=3}^{5} \mathrm{C}_5^k (0.3)^k (0.7)^{5-k} = 0.16308$$

(2) 令 Y 表示 7 次独立试验中 A 发生的次数，则 $Y \sim b$（7，0.3）

$$P(Y \geq 3)=\sum_{k=3}^{7} \mathrm{C}_7^k (0.3)^k (0.7)^{7-k} = 0.35293$$

10.某公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救的次数 X 服从参数为（1/2）t 的泊松分布，而与时间间隔起点无关（时间以小时计）.

（1） 求某一天中午 12 时至下午 3 时没收到呼救的概率；

（2） 求某一天中午 12 时至下午 5 时至少收到 1 次呼救的概率.

【解】（1） $P(X=0)=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ (2) $P(X \geq 1)=1-P(X=0)=1-\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}$

11.设 $P\{X=k\}=\mathbf{C}_2^k p^k (1-p)^{2-k}$， $k=0,1,2$

$P\{Y=m\}=\mathbf{C}_4^m p^m(1-p)^{4-m}$， $m=0,1,2,3,4$

分别为随机变量 X，Y 的概率分布，如果已知 $P\{X\geqslant1\}=\dfrac{5}{9}$，试求 $P\{Y\geqslant1\}$.

【解】因为 $P(X\geq1)=\dfrac{5}{9}$，故 $P(X<1)=\dfrac{4}{9}$.

而 $$P(X<1)=P(X=0)=(1-p)^2$$

故得 $$(1-p)^2=\frac{4}{9},$$

即 $$p=\frac{1}{3}.$$

从而 $$P(Y\geq1)=1-P(Y=0)=1-(1-p)^4=\frac{65}{81}\approx0.80247$$

12.某教科书出版了 2000 册，因装订等原因造成错误的概率为 0.001，试求在这 2000 册书中恰有 5

册错误的概率.

【**解**】令 X 为 2000 册书中错误的册数，则 X~b(2000,0.001).利用泊松近似计算,

$$\lambda = np = 2000 \times 0.001 = 2$$

得
$$P(X = 5) \approx \frac{e^{-2}2^5}{5!} = 0.0018$$

13.进行某种试验，成功的概率为 $\frac{3}{4}$，失败的概率为 $\frac{1}{4}$.以 X 表示试验首次成功所需试验的次数，试写出 X 的分布律，并计算 X 取偶数的概率.

【**解**】$X = 1, 2, \cdots, k, \cdots$

$$P(X = k) = (\frac{1}{4})^{k-1}\frac{3}{4}$$

$$P(X=2)+P(X=4)+\cdots+P(X=2k)+\cdots$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+(\frac{1}{4})^3\frac{3}{4}+\cdots+(\frac{1}{4})^{2k-1}\frac{3}{4}+\cdots$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{1}{5}$$

14.有 2500 名同一年龄和同社会阶层的人参加了保险公司的人寿保险.在一年中每个人死亡的概率为 0.002，每个参加保险的人在 1 月 1 日须交 12 元保险费，而在死亡时家属可从保险公司领取 2000 元赔偿金.求：

（1） 保险公司亏本的概率;

（2） 保险公司获利分别不少于 10000 元、20000 元的概率.

【解】以“年”为单位来考虑.

（1） 在 1 月 1 日，保险公司总收入为 2500×12=30000 元.

设 1 年中死亡人数为 X，则 $X\sim b(2500,0.002)$，则所求概率为

$$P(2000X > 30000) = P(X > 15) = 1 - P(X \leq 14)$$

由于 n 很大，p 很小，$\lambda=np=5$，故用泊松近似，有

$$P(X > 15) \approx 1 - \sum_{k=0}^{14} \frac{\mathrm{e}^{-5} 5^k}{k!} \approx 0.000069$$

(2) P(保险公司获利不少于 10000)

$$= P(30000 - 2000X \geq 10000) = P(X \leq 10)$$

$$\approx \sum_{k=0}^{10} \frac{\mathrm{e}^{-5} 5^k}{k!} \approx 0.986305$$

即保险公司获利不少于 10000 元的概率在 98%以上

P（保险公司获利不少于 20000）$=P(30000-2000X\geq 20000)=P(X\leq 5)$

$$\approx\sum_{k=0}^{5}\frac{\mathrm{e}^{-5}5^{k}}{k!}\approx 0.615961$$

即保险公司获利不少于 20000 元的概率约为 62%

15.已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=A\mathrm{e}^{-|x|},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

求：（1）A 值；（2）$P\{0<X<1\}$;　(3)　$F(x)$.

【**解**】（1）　由 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ 得

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}A\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\infty}A\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2A$$

故 $$A=\frac{1}{2}.$$

(2) $p(0 < X < 1) = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1})$

(3) 当 x<0 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$

当 x⩾0 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + \int_0^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$$

故
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

16.设某种仪器内装有三只同样的电子管，电子管使用寿命 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & x\geq 100,\\ 0, & x<100.\end{cases}$$

求：（1） 在开始 150 小时内没有电子管损坏的概率；

（2） 在这段时间内有一只电子管损坏的概率；

（3） F（x）.

【解】

（1） $P(X\leq 150)=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$

$$p_1=[P(X>150)]^3=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$$

(2) $p_2=\mathrm{C}_3^1\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$

(3) 当 x<100 时 F（x）=0

当 $x \geqslant 100$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{100} f(t)\mathrm{d}t+\int_{100}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{100}^{x} \frac{100}{t^2}\mathrm{d}t=1-\frac{100}{x}$$

故

$$F(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{100}{x}, & x \geq 100 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

17.在区间［0，a］上任意投掷一个质点，以 X 表示这质点的坐标，设这质点落在［0，$\underline{a}$］中任意小区间内的概率与这小区间长度成正比例，试求 X 的分布函数.

【解】 由题意知 $X \sim \cup[0,a]$，密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0\le x\le a\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

故当 x<0 时 F（x）=0

当 0≤x≤a 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{x}\dfrac{1}{a}\mathrm{d}t=\dfrac{x}{a}$

当 x>a 时，F（x）=1

即分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{a}, & 0\le x\le a\\ 1, & x>a\end{cases}$$

18.设随机变量 X 在[2，5]上服从均匀分布.现对 X 进行三次独立观测，求至少有两次的观测值大于 3

的概率.

【**解**】$X \sim U[2,5]$，即

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2 \le x \le 5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$P(X>3)=\int_3^5 \frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

故所求概率为

$$p=\mathrm{C}_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\mathrm{C}_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$$

19.设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分钟计）服从指数分布 $E(\frac{1}{5})$.某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开.他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y\geqslant 1\}$.

【**解**】依题意知 $X \sim E(\frac{1}{5})$，即其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}, & x>0\\ 0, & \mathrm{x}\le 0\end{cases}$$

该顾客未等到服务而离开的概率为

$$P(X>10)=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2}$$

$Y \sim b(5,\mathrm{e}^{-2})$,即其分布律为

$$P(Y=k)=\mathrm{C}_5^k(\mathrm{e}^{-2})^k(1-\mathrm{e}^{-2})^{5-k}, k=0,1,2,3,4,5$$
$$P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5=0.5167$$

20.某人乘汽车去火车站乘火车，有两条路可走.第一条路程较短但交通拥挤，所需时间 X 服从 N（40，10^2）；第二条路程较长，但阻塞少，所需时间 X 服从 N（50，4^2）.

（1） 若动身时离火车开车只有 1 小时，问应走哪条路能乘上火车的把握大些？

（2） 又若离火车开车时间只有 45 分钟，问应走哪条路赶上火车把握大些？

【解】（1） 若走第一条路，X~N（40，10^2），则

$$P(X<60)=P\left(\frac{x-40}{10}<\frac{60-40}{10}\right)=\Phi(2)=0.97727$$

若走第二条路，X~N（50，4^2），则

$$P(X<60)=P\left(\frac{X-50}{4}<\frac{60-50}{4}\right)=\Phi(2.5)=0.9938++$$

故走第二条路乘上火车的把握大些.

（2） 若 X~N（40，10^2），则

$$P(X<45)=P\left(\frac{X-40}{10}<\frac{45-40}{10}\right)=\Phi(0.5)=0.6915$$

若 $X\sim N$（50，4^2），则

$$P(X<45)=P\left(\frac{X-50}{4}<\frac{45-50}{4}\right)=\Phi(-1.25)$$

$$=1-\Phi(1.25)=0.1056$$

故走第一条路乘上火车的把握大些.

21.设 $X\sim N$（3，2^2），

（1） 求 $P\{2<X\leq 5\}$，$P\{-4<X\leq 10\}$，$P\{|X|>2\}$，$P\{X>3\}$;

（2） 确定 c 使 $P\{X>c\}=P\{X\leqslant c\}$.

【解】（1） $P(2 < X \le 5) = P\left(\frac{2-3}{2} < \frac{X-3}{2} \le \frac{5-3}{2}\right)$

$$= \varPhi(1) - \varPhi\left(-\frac{1}{2}\right) = \varPhi(1) - 1 + \varPhi\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 0.8413 - 1 + 0.6915 = 0.5328$$

$$P(-4 < X \le 10) = P\left(\frac{-4-3}{2} < \frac{X-3}{2} \le \frac{10-3}{2}\right)$$

$$= \varPhi\left(\frac{7}{2}\right) - \varPhi\left(-\frac{7}{2}\right) = 0.9996$$

$$P(|X| > 2) = P(X > 2) + P(X < -2)$$

$$= P\left(\frac{X-3}{2} > \frac{2-3}{2}\right) + P\left(\frac{X-3}{2} < \frac{-2-3}{2}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) + \Phi\left(-\frac{5}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= 0.6915 + 1 - 0.9938 = 0.6977$$

$$P(X > 3) = P(\frac{X-3}{2} > \frac{3-3}{2}) = 1 - \Phi(0) = 0.5$$

(2) c=3

22.由某机器生产的螺栓长度（cm）$X \sim N$（10.05,0.06²）,规定长度在 10.05±0.12 内为合格品,求一螺栓为不合格品的概率.

【解】 $P(|X-10.05|> 0.12) = P\left(\left|\frac{X-10.05}{0.06}\right| > \frac{0.12}{0.06}\right)$

$$=1-\Phi(2)+\Phi(-2)=2[1-\Phi(2)]$$
$$=0.0456$$

23.一工厂生产的电子管寿命 X（小时）服从正态分布 N（160，σ^2），若要求 $P\{120<X\leqslant200\}\geqslant0.8$，允许 σ 最大不超过多少？

【解】 $$P(120<X\leq 200)=P\left(\frac{120-160}{\sigma}<\frac{X-160}{\sigma}\leq\frac{200-160}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-40}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-1\geq 0.8$$

故 $$\sigma\leq\frac{40}{1.29}=31.25$$

24.设随机变量 X 分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+B\mathrm{e}^{-xt}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases} \quad (\lambda>0),$$

（1） 求常数 A，B；

（2） 求 $P\{X\leqslant 2\}$，$P\{X>3\}$；

（3） 求分布密度 $f(x)$．

【解】（1）由 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0-} F(x) \end{cases}$ 得 $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$

（2） $P(X\leq 2)=F(2)=1-\mathrm{e}^{-2\lambda}$

$$P(X>3)=1-F(3)=1-(1-\mathrm{e}^{-3\lambda})=\mathrm{e}^{-3\lambda}$$

(3) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

25.设随机变量 X 的概率密度为

$$f（x）=\begin{cases} x, & 0\leq x<1,\\ 2-x, & 1\leq x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 X 的分布函数 F（x），并画出 f（x）及 F（x）.

【解】 当 x<0 时 F（x）=0

当 0≤x<1 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x t\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}$$

当 1⩽x<2 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t+\int_{1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{1} t\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}(2-t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}$$

$$=-\frac{x^2}{2}+2x-1$$

当 x⩾2 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=1$

故

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1 \\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

26.设随机变量 X 的密度函数为

（1） $f(x)=\underline{a}\mathrm{e}^{-\ |x|}$, $\lambda>0$;

(2) $$f(x)=\begin{cases} bx, & 0<x<1, \\ \dfrac{1}{x^2}, & 1\le x<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试确定常数 a,b，并求其分布函数 F（x）.

【解】（1） 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ 知 $1 = \int_{-\infty}^{\infty} a\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\mathrm{d}x = 2a\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{2a}{\lambda}$

故 $$a = \frac{\lambda}{2}$$

即密度函数为 $$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda x} & x \le 0 \end{cases}$$

当 $x \leqslant 0$ 时 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x}\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}$

当 $x>0$ 时 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{x}\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

故其分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}, & x\le 0\end{cases}$$

(2) 由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 bx\mathrm{d}x+\int_1^2\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2}$

得 b=1

即 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ \dfrac{1}{x^2}, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $x \leqslant 0$ 时 $F(x)=0$

当 $0<x<1$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{x} f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{0}^{x} x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}$$

当 $1 \leqslant x<2$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} x\mathrm{d}x+\int_{1}^{x} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{x}$$

当 $x \geqslant 2$ 时 $F(x)=1$

故其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0<x<1\\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{x}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

27.求标准正态分布的上α分位点，

（1）α=0.01，求z_α；

（2）α=0.003，求z_α， $z_{\alpha/2}$.

【解】（1） $P(X>z_\alpha)=0.01$

即 $$1-\Phi(z_\alpha)=0.01$$

即 $$\Phi(z_\alpha)=0.09$$

故 $$z_\alpha=2.33$$

（2） 由 $P(X>z_\alpha)=0.003$ 得

$$1-\Phi(z_\alpha)=0.003$$

即 $$\Phi(z_\alpha)=0.997$$

查表得 $$z_\alpha=2.75$$

由 $P(X > z_{\alpha/2}) = 0.0015$ 得

$$1 - \Phi(z_{\alpha/2}) = 0.0015$$

即 $$\Phi(z_{\alpha/2}) = 0.9985$$

查表得 $$z_{\alpha/2} = 2.96$$

28.设随机变量 X 的分布律为

X	–2	–1	0	1	3
P_k	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

求 $Y=X^2$ 的分布律.

【解】 Y 可取的值为 0，1，4，9

$$P(Y=0)=P(X=0)=\frac{1}{5}$$

$$P(Y=1)=P(X=-1)+P(X=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{15}=\frac{7}{30}$$

$$P(Y=4)=P(X=-2)=\frac{1}{5}$$

$$P(Y=9)=P(X=3)=\frac{11}{30}$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1	4	9
P_k	1/5	7/30	1/5	11/30

29.设 $P\{X=k\}=(\frac{1}{2})^k$, $k=1,2,\cdots$,令

$$Y=\begin{cases}1, & 当X取偶数时\\ -1, & 当X取奇数时.\end{cases}$$

求随机变量 X 的函数 Y 的分布律.

【解】 $P(Y=1)=P(X=2)+P(X=4)+\cdots+P(X=2k)+\cdots$

$$=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^4+\cdots+(\frac{1}{2})^{2k}+\cdots$$

$$=(\frac{1}{4})/(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=-1)=1-P(Y=1)=\frac{2}{3}$$

30.设 $X\sim N$（0，1）.

（1） 求 $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度；

（2） 求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度；

（3） 求 $Y=|X|$ 的概率密度.

【解】（1） 当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\mathrm{e}^x\le y)=P(X\le \ln y)$

$$=\int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)\mathrm{d}x$$

故

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y}f_x(\ln y)=\frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\ln^2 y/2},y>0$$

(2) $P(Y=2X^2+1\geq 1)=1$

当 y≤1 时 $F_Y(y)=P(Y\leq y)=0$

当 y>1 时 $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2X^2+1\leq y)$

$$=P\left(X^2\leq\frac{y-1}{2}\right)=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leq X\leq\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

$$=\int_{-\sqrt{(y-1)/2}}^{\sqrt{(y-1)/2}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

故 $f_Y(y)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{y-1}}\left[f_X\left(\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right)+f_X\left(-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{y-1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(y-1)/4}, y>1$$

(3) $P(Y \geq 0)=1$

当 $y \leqslant 0$ 时 $F_Y(y)=P(Y \leq y)=0$

当 $y>0$ 时 $F_Y(y)=P(|X| \leq y)=P(-y \leq X \leq y)$

$$=\int_{-y}^{y} f_X(x)\mathrm{d}x$$

故 $f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=f_X(y)+f_X(-y)$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}, y>0$$

31.设随机变量 X~U（0,1），试求：

（1） $Y=\mathrm{e}^X$ 的分布函数及密度函数；

（2） $Z=-2\ln X$ 的分布函数及密度函数.

【解】（1） $P(0<X<1)=1$

故 $P(1<Y=\mathrm{e}^X<\mathrm{e})=1$

当 $y\le 1$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $1<y<\mathrm{e}$ 时 $F_Y(y)=P(\mathrm{e}^X\le y)=P(X\le \ln y)$

$$=\int_0^{\ln y}\mathrm{d}x=\ln y$$

当 $y \geqslant \mathrm{e}$ 时 $F_Y(y)=P(\mathrm{e}^X\le y)=1$

即分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1\\ \ln y, & 1<y<\mathrm{e}\\ 1, & y\ge \mathrm{e}\end{cases}$$

故 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<\mathrm{e}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2） 由 P（$0<X<1$）=1 知

$$P(Z>0)=1$$

当 $z \leqslant 0$ 时， $F_Z(z)=P(Z \leq z)=0$

当 $z>0$ 时， $F_Z(z)=P(Z \leq z)=P(-2\ln X \leq z)$

$$=P(\ln X \leq -\frac{z}{2})=P(X \geq \mathrm{e}^{-z/2})$$

$$=\int_{\mathrm{e}^{-z/2}}^{1}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-z/2}$$

即分布函数

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z \leq 0 \\ 1\text{-}\mathrm{e}^{-z/2}, & z>0\end{cases}$$

故 Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z/2}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

32.设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求 $Y=\sin X$ 的密度函数.

【解】 $P(0<Y<1)=1$

当 $y\leqslant 0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 0<y<1 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y)$

$$=P(0<X\le\arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\le X<\pi)$$

$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi^2}(\arcsin y)^2+1-\frac{1}{\pi^2}(\pi-\arcsin y)^2$$

$$=\frac{2}{\pi}\arcsin y$$

当 $y\geqslant1$ 时， $F_Y(y)=1$

故 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\square\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

33.设随机变量 X 的分布函数如下：

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x<\underline{\quad(1)\quad},\\ \underline{\quad(2)\quad}, & x\geq\underline{\quad(3)\quad}.\end{cases}$$

试填上(1),(2),(3)项.

【**解**】由 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$ 知②填 1。

由右连续性 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)=1$ 知 $x_0=0$，故①为 0。

从而③亦为 0。即

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$

34.同时掷两枚骰子，直到一枚骰子出现 6 点为止，求抛掷次数 X 的分布律.

【解】 设 A_i={第 i 枚骰子出现 6 点}。（i=1,2）,$P(A_i)=\dfrac{1}{6}$.且 A_1 与 A_2 相互独立。再设 C={每次抛掷出现 6 点}。则

$$P(C)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$$

故抛掷次数 X 服从参数为 $\dfrac{11}{36}$ 的几何分布。

35.随机数字序列要多长才能使数字 0 至少出现一次的概率不小于 0.9?

【解】令 X 为 0 出现的次数，设数字序列中要包含 n 个数字，则

$X \sim b(n,0.1)$

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\mathrm{C}_n^0(0.1)^0(0.9)^n\ge 0.9$$

即 $$(0.9)^n\le 0.1$$

得 $$n\geqslant 22$$

即随机数字序列至少要有 22 个数字。

36.已知

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x+\dfrac{1}{2}, & 0\le x<\dfrac{1}{2},\\ 1, & x\ge\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

则 F（x）是（　　　）随机变量的分布函数.

（A）　连续型；　　　　（B）离散型；

（C）　非连续亦非离散型.

【解】因为 F（x）在（$-\infty,+\infty$）上单调不减右连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$,所以 F（x）是一个分布函数。

但是 F（x）在 x=0 处不连续，也不是阶梯状曲线，故 F（x）是非连续亦非离散型随机变量的分布函数。选（C）

37.设在区间[a,b]上，随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\sin x$，而在[a,b]外，$f(x)=0$，则区间 [a,b]等于（　　　）

(A)　[0, π /2];　　　　(B)　[0, π];

(C)　[–π/2,0];　　　　(D)　$[0,\frac{3}{2}\boldsymbol{\pi}]$.

【解】在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上 $\sin x\geqslant 0$，且$\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x=1$.故 $f(x)$是密度函数。

在$[0,\pi]$上$\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2\neq 1$.故 $f(x)$不是密度函数。

在$[-\dfrac{\pi}{2},0]$上$\sin x\leq 0$，故 $f(x)$不是密度函数。

在$[0,\dfrac{3}{2}\pi]$上，当$\pi<x\leq\dfrac{3}{2}\pi$时，$\sin x<0$，$f(x)$也不是密度函数。

故选（A）。

38.设随机变量 $X\sim N$（0，σ^2），问：当σ取何值时，X 落入区间（1，3）的概率最大？

【解】因为$X\sim N(0,\sigma^2), P(1<X<3)=P(\dfrac{1}{\sigma}<\dfrac{X}{\sigma}<\dfrac{3}{\sigma})$

$$=\Phi(\frac{3}{\sigma})-\Phi(\frac{1}{\sigma})\xlongequal{令}g(\sigma)$$

利用微积分中求极值的方法，有

$$g'(\sigma)=(-\frac{3}{\sigma^2})\Phi'(\frac{3}{\sigma})+\frac{1}{\sigma^2}\Phi'(\frac{1}{\sigma})$$

$$=-\frac{3}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-9/2\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2\sigma^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}e^{-1/2\sigma^2}[1-3e^{-8/2\sigma^2}]\overset{令}{=}0$$

得 $\sigma_0^2=\frac{4}{\ln 3}$,则 $$\sigma_0=\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$$

又 $$g''(\sigma_0)<0$$

故 $\sigma_0<\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$ 为极大值点且惟一。

故当$\sigma=\dfrac{2}{\sqrt{\ln 3}}$时 X 落入区间（1，3）的概率最大。

39.设在一段时间内进入某一商店的顾客人数 X 服从泊松分布 P（λ），每个顾客购买某种物品的概率为 p，并且各个顾客是否购买该种物品相互独立，求进入商店的顾客购买这种物品的人数 Y 的分布律.

【解】 $P(X=m)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!},m=0,1,2,\cdots$

设购买某种物品的人数为 Y，在进入商店的人数 $X=m$ 的条件下，$Y\sim b(m,p)$，即

$$P(Y=k\mid X=m)=\mathrm{C}_m^k p^k(1-p)^{m-k},k=0,1,\cdots,m$$

由全概率公式有

$$
\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{m=k}^{\infty} P(X=m)P(Y=k \mid X=m) \\
&= \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{m}}{m!} \cdot \mathrm{C}_{m}^{k} p^{k}(1-p)^{m-k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^{m}}{k!(m-k)!} p^{k}(1-p)^{m-k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^{k}}{k!} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{m-k}}{(m-k)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^{k}}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^{k}}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda p}, k = 0,1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

此题说明：进入商店的人数服从参数为 λ 的泊松分布，购买这种物品的人数仍服从泊松分布，但参数改变为 λp.

40.设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布.证明：$Y=1-e^{-2X}$ 在区间（0，1）上服从均匀分布.

【证】X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

由于 P（$X>0$）=1，故 $0<1-e^{-2X}<1$，即 P（$0<Y<1$）=1

当 $y\leqslant 0$ 时，F_Y（y）=0

当 $y\geqslant 1$ 时，F_Y（y）=1

当 $0<y<1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^{-2x}\ge 1-y)$

$$= P(X \leq -\frac{1}{2}\ln(1-y))$$

$$= \int_0^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)} 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = y$$

即 Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即 Y~U（0，1）

41.设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0\le x\le 1,\\ \frac{2}{9}, & 3\le x\le 6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X\geqslant k\}=2/3$，求 k 的取值范围. (2000 研考)

【解】 由 $P（X\geqslant k）=\frac{2}{3}$ 知 $P（X<k）=\frac{1}{3}$

若 $k<0,P(X<k)=0$

若 $0\leqslant k\leqslant 1,P(X<k)=\int_0^k \frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{k}{3}\le\frac{1}{3}$

当 $k=1$ 时 $P（X<k）=\frac{1}{3}$

若 $1\leqslant k\leqslant 3$ 时 $P（X<k）=\int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_1^k 0\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$

若 $3<k\leqslant 6$，则 $P（X<k）=\int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_3^k \frac{2}{9}\mathrm{d}x=\frac{2}{9}k-\frac{1}{3}\neq\frac{1}{3}$

若 $k>6$,则 $P（X<k）=1$

故只有当 $1\leqslant k\leqslant 3$ 时满足 $P（X\geqslant k）=\frac{2}{3}$.

42.设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ 0.4, & -1\leq x<1, \\ 0.8, & 1\leq x<3, \\ 1, & x\geq 3. \end{cases}$$

求 X 的概率分布.（1991 研考）

【解】由离散型随机变量 X 分布律与分布函数之间的关系，可知 X 的概率分布为

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

43.设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等.若已知 A 至少出现一次的概率为 19/27，求 A 在一次试验中出现的概率.

【解】令 X 为三次独立试验中 A 出现的次数，若设 P（A）$=p$,则

$$X\sim b(3,p)$$

由 P（$X\geqslant 1$）$=\dfrac{19}{27}$ 知 P（$X=0$）=（$1-p$）$^3=\dfrac{8}{27}$

故 $p=\dfrac{1}{3}$

44.若随机变量 X 在（1，6）上服从均匀分布，则方程 $y^2+Xy+1=0$ 有实根的概率是多少？

【解】

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 1<x<6\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$P(X^2-4\geq 0)=P(X\geq 2)+P(X\leq -2)=P(X\geq 2)=\frac{4}{5}$$

45.若随机变量 $X\sim N$（2， σ 2）， 且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$________________.

【解】$0.3=P(2<X<4)=P(\frac{2-2}{\sigma}<\frac{X-2}{\sigma}<\frac{4-2}{\sigma})$

$$=\Phi(\frac{2}{\sigma})-\Phi(0)=\Phi(\frac{2}{\sigma})-0.5$$

故 $$\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.8$$

因此 $$P(X<0)=P(\frac{X-2}{\sigma}<\frac{0-2}{\sigma})=\Phi(-\frac{2}{\sigma})$$
$$=1-\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.2$$

46.假设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.7 可以直接出厂；以概率 0.3 需进一步调试，经调试后以概率 0.8 可以出厂，以概率 0.2 定为不合格品不能出厂.现该厂新生产了 $n(n\geqslant 2)$台仪器（假设各台仪器的生产过程相互独立）.求

（1） 全部能出厂的概率 α；

（2） 其中恰好有两台不能出厂的概率 β；

（3）其中至少有两台不能出厂的概率 θ.

【解】设 A={需进一步调试}，B={仪器能出厂}，则

$\overline{A}$={能直接出厂}，AB={经调试后能出厂}

由题意知 $B=\overline{A}\cup AB$，且

$$P(A)=0.3, P(B|A)=0.8$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.3\times0.8=0.24$$

$$P(B)=P(\overline{A})+P(AB)=0.7+0.24=0.94$$

令 X 为新生产的 n 台仪器中能出厂的台数，则 X~6（n，0.94），

故

$$\alpha=P(X=n)=(0.94)^n$$

$$\beta=P(X=n-2)=\mathrm{C}_n^2(0.94)^{n-2}(0.06)^2$$

$$\theta=P(X\le n-2)=1-P(X=n-1)-P(X=n)$$

$$=1-n(0.94)^{n-1}0.06-(0.94)^n$$

47.某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

【解】设 X 为考生的外语成绩，则 X~N（72，σ^2）

$$0.023 = P(X \geq 96) = P\left(\frac{X-72}{\sigma} \geq \frac{96-72}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(\frac{24}{\sigma})$$

故 $$\Phi(\frac{24}{\sigma}) = 0.977$$

查表知 $$\frac{24}{\sigma} = 2$$,即 σ =12

从而 X~N（72，12^2）

故 $P(60 \leq X \leq 84) = P\left(\frac{60-72}{12} \leq \frac{X-72}{12} \leq \frac{84-72}{12}\right)$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$$

$$= 0.682$$

48.在电源电压不超过 200V、200V~240V 和超过 240V 三种情形下，某种电子元件损坏的概率分别

为 0.1，0.001 和 0.2（假设电源电压 X 服从正态分布 N（220，25^2））.试求：

（1） 该电子元件损坏的概率 α；

(2) 该电子元件损坏时，电源电压在 200~240V 的概率 β

【解】设 A_1={电压不超过 200V}，A_2={电压在 200~240V}，

A_3={电压超过 240V}，B={元件损坏}。

由 $X\sim N$（220，25^2）知

$$P(A_1)=P(X\le 200)$$

$$=P\left(\frac{X-220}{25}\le\frac{200-220}{25}\right)$$

$$=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=0.212$$

$$P(A_2)=P(200\le X\le 240)$$

$$= P\left(\frac{200-220}{25} \le \frac{X-220}{25} \le \frac{240-220}{25}\right)$$

$$= \Phi(0.8) - \Phi(-0.8) = 0.576$$

$$P(A_3) = P(X > 240) = 1 - 0.212 - 0.576 = 0.212$$

由全概率公式有

$$\alpha = P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i) = 0.0642$$

由贝叶斯公式有

$$\beta = P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(B)} \approx 0.009$$

49.设随机变量 X 在区间（1，2）上服从均匀分布，试求随机变量 Y=e^{2X} 的概率密度 $f_Y(y)$.

【解】 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

因为 P（$1<X<2$）=1,故 P（$e^2<Y<e^4$）=1

当 $y\leqslant e^2$ 时 F_Y（y）$=P(Y\leqslant y)=0$.

当 $e^2<y<e^4$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(e^{2X}\leq y)$

$$=P(1<X\leq \frac{1}{2}\ln y)$$

$$=\int_1^{-\frac{1}{2}\ln y}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln y-1$$

当 $y\geqslant e^4$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=1$

即
$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le \mathrm{e}^2\\ \dfrac{1}{2}\ln y-1, & \mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4\\ 1, & y\ge \mathrm{e}^4\end{cases}$$

故
$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & \mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

50.设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\mathbf{e}^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=\mathrm{e}^X$ 的密度函数 $f_Y(y)$. (1995 研考)

【解】 P（$Y\geqslant 1$）=1

当 y≤1 时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$

当 y>1 时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\mathrm{e}^X \le y) = P(X \le \ln y)$

$$= \int_0^{\ln y} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{y}$$

即 $$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{y}, & y>1 \\ 0, & y \le 1 \end{cases}$$

故 $$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & y>1 \\ 0, & y \le 1 \end{cases}$$

51.设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

求 $Y=1-\sqrt[3]{x}$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

【解】 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-\sqrt[3]{X}\le y)=P(X\ge(1-y)^3)$

$$=\int_{(1-y)^3}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x\Big|_{(1-y)^3}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(1-y)^3\right]$$

故
$$f_Y(y)=\frac{3}{\pi}\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}$$

52.假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 N（t）服从参数为 λt 的泊松分布.

（1） 求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布；

（2） 求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下，再无故障运行 8 小时的概率 Q.（1993 研考）

【解】（1） 当 $t<0$ 时，$F_T(t)=P(T\le t)=0$

当 $t\geqslant 0$ 时，事件$\{T>t\}$与$\{N(t)=0\}$等价，有

$$F_T(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(N(t)=0)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

即
$$F_T(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

即间隔时间 T 服从参数为 λ 的指数分布。

（2） $Q=P(T>16\mid T>8)=P(T>16)/P(T>8)=\dfrac{\mathrm{e}^{-16\lambda}}{\mathrm{e}^{-8\lambda}}=\mathrm{e}^{-8\lambda}$

53.设随机变量 X 的绝对值不大于 1，$P\{X=-1\}=1/8$，$P\{X=1\}=1/4$.在事件$\{-1<X<1\}$出现的条件下，X 在$\{-1，1\}$内任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，试求 X 的分布函数 F（x）$=P\{X\leqslant x\}$. (1997 研考)

【**解**】显然当 $x<-1$ 时 F（x）=0；而 $x\geqslant 1$ 时 F（x）=1

由题知 $P(-1<X<1)=1-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}$

当$-1<x<1$ 时，$P(X\leq x\mid -1<X<1)=\dfrac{x+1}{2}$

此时 $F(x)=P(X\leq x)$

$$=P(X\le ,-1<X<1)+P(X\le x,X=-1)+P(X\le x,X=1)$$

$$=P(X\le x,-1<X<1)+P(X\le x,x=-1)$$

$$=P(X\le x\mid -1<X<1)P(-1<X<1)+P(X=-1)$$

$$=\frac{x+1}{2}\square\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}(x+1)+\frac{1}{8}$$

当 x=–1 时，$F(x)=P(X\le x)=P(X=-1)=\frac{1}{8}$

故 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{5}{16}(x+1)+\frac{1}{8}, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

54. 设随机变量 X 服从正态分 N（μ_1,σ_1^2),Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，

试比较 σ_1 与 σ_2 的大小. (2006 研考)

解: 依题意 $\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1)$，$\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2} \sim N(0,1)$，则

$$P\{\left|X-\mu_1\right|<1\}=P\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\},$$

$$P\{\left|Y-\mu_2\right|<1\}=P\{\left|\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right|<\frac{1}{\sigma_2}\}.$$

因为 $P\{\left|X-\mu_1\right|<1\}>P\{\left|Y-\mu_2\right|<1\}$，即

$$P\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\}>P\{\left|\frac{Y-\mu_1}{\sigma_2}\right|<\frac{1}{\sigma_2}\},$$

所以有 $$\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}，即 \sigma_1 < \sigma_2 .$$

习题三

1.将一硬币抛掷三次，以 X 表示在三次中出现正面的次数，以 Y 表示三次中出现正面次数与出现反面次数之差的绝对值.试写出 X 和 Y 的联合分布律.

【解】X 和 Y 的联合分布律如表：

$Y\backslash X$	0	1	2	3
1	0	$C_3^1\square\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$	$C_3^2\square\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=3/8$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

2.盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 4 只球，以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数.求 X 和 Y 的联合分布律.

【解】X 和 Y 的联合分布律如表：

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{C_3^2 \cdot C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$	$\frac{C_3^3 \cdot C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^2}{C_7^4}=\frac{6}{35}$	$\frac{C_3^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$	$\frac{C_3^3 \cdot C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$
2	P(0 黑,2 红,2 白)= $C_2^2 \cdot C_2^2 / C_7^4=\frac{1}{35}$	$\frac{C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$	$\frac{C_3^2 \cdot C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$	0

3.设二维随机变量（X，Y）的联合分布函数为

$$F（x，y）=\begin{cases}\sin x\sin y, & 0\le x\le\frac{\boldsymbol{\pi}}{2},0\le y\le\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

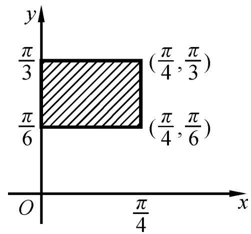
求二维随机变量（X，Y）在长方形域$\left\{0<x\le\frac{\boldsymbol{\pi}}{4},\frac{\boldsymbol{\pi}}{6}<y\le\frac{\boldsymbol{\pi}}{3}\right\}$内的概率.

【解】 如图 $P\{0<X\le\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}<Y\le\frac{\pi}{3}\}\underline{\underline{公式(3.2)}}$

$$F(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})-F(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6})-F(0,\frac{\pi}{3})+F(0,\frac{\pi}{6})$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$



题 3 图

说明：也可先求出密度函数，再求概率。

4.设随机变量（X，Y）的分布密度

$$f（x，y）=\begin{cases} A\mathbf{e}^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

求：（1） 常数 A；

（2） 随机变量（X，Y）的分布函数；

（3） $P\{0\le X<1，0\le Y<2\}$.

【解】（1） 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} A\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{A}{12}=1$

得 $A=12$

（2） 由定义，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\begin{cases}\int_0^y\int_0^y 12\mathrm{e}^{-(3u+4v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ 0,\end{cases}=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}) & y>0, x>0, \\ 0, & 其他\end{cases}$$

(3) $P\{0 \le X < 1, 0 \le Y < 2\}$

$$= P\{0 < X \le 1, 0 < Y \le 2\}$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 12\mathrm{e}^{-(3x+4y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (1-\mathrm{e}^{-3})(1-\mathrm{e}^{-8}) \approx 0.9499.$$

5.设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（1） 确定常数 k；

（2） 求 $P\{X<1, Y<3\}$；

（3） 求 $P\{X<1.5\}$；

（4） 求 $P\{X+Y\le 4\}$.

【解】（1） 由性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 8k = 1,$$

故 $R = \frac{1}{8}$ ^

（2） $$P\{X<1, Y<3\} = \int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{3} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

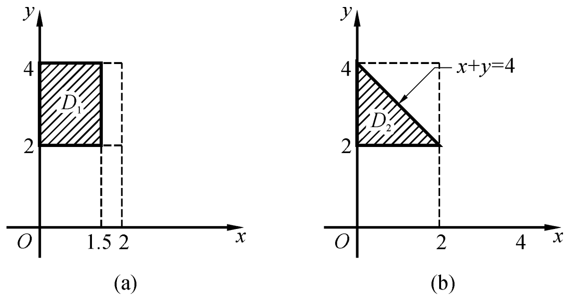
$$= \int_0^1\int_2^3 \frac{1}{8}k(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{3}{8}$$

(3) $$P\{X<1.5\} = \iint\limits_{x<1.5} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \underline{\underline{\text{如图a}}} \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{1.5}\mathrm{d}x\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y = \frac{27}{32}.$$

(4) $$P\{X+Y\le 4\} = \iint\limits_{X+Y\le 4} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \underline{\underline{\text{如图b}}} \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 dx\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{2}{3}.$$

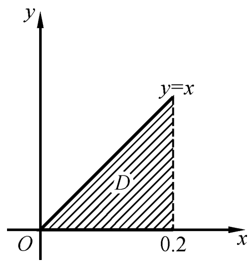


题 5 图

6.设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在（0，0.2）上服从均匀分布，Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}5\mathbf{e}^{-5y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（1） X 与 Y 的联合分布密度；（2） $P\{Y\le X\}$.



题 6 图

【解】（1） 因 X 在（0，0.2）上服从均匀分布，所以 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0.2}, & 0<x<0.2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

而

$$f_Y(y)=\begin{cases}5\mathrm{e}^{-5y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以

$$f(x,y)\xlongequal{X,Y\text{独立}}f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{0.2}\times 5\mathrm{e}^{-5y}\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}25\mathrm{e}^{-5y}, & 0<x<0.2\text{且}y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $P(Y\le X)=\iint\limits_{y\le x}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{如图}}\iint\limits_{D}25\mathrm{e}^{-5y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{0.2}\mathrm{d}x\int_0^{x}25\mathrm{e}^{-5y}\mathrm{d}y=\int_0^{0.2}(-5\mathrm{e}^{-5x}+5)\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.3679.$$

7.设二维随机变量（X，Y）的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathbf{e}^{-4x})(1-\mathbf{e}^{-2y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求（X，Y）的联合分布密度.

【解】 $f(x,y)=\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}8\mathrm{e}^{-(4x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

8.设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\le x\le 1,0\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

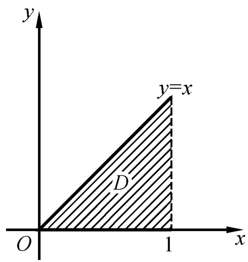
求边缘概率密度.

【解】 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

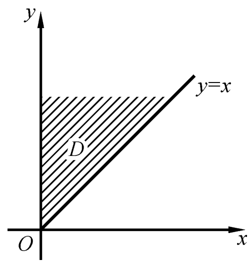
$$=\begin{cases}\int_0^x 4.8y(2-x)\mathrm{d}y \\ 0,\end{cases}=\begin{cases}2.4x^2(2-x), & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)$$

$$=\begin{cases}\int_y^1 4.8y(2-x)\mathrm{d}x \\ 0,\end{cases}=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



题 8 图



题 9 图

9.设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f（x，y）=\begin{cases} \mathbf{e}^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

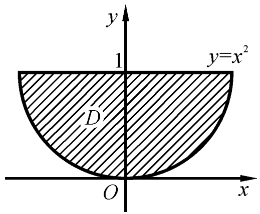
求边缘概率密度.

【解】 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_x^{+\infty} e^{-y}dy \\ 0,\end{cases}=\begin{cases}e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^{y} e^{-y}dx \\ 0,\end{cases}=\begin{cases}ye^{-x}, & y>0, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$



题 10 图

10.设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f（x，y）=\begin{cases} cx^2y, & x^2\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（1） 试确定常数 c；

（2） 求边缘概率密度.

【解】（1） $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \underset{\text{如图}}{=\!=} \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1} cx^2y\mathrm{d}y=\frac{4}{21}c=1.$$

得 $c=\dfrac{21}{4}$.

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\\ 0,\end{cases}$$

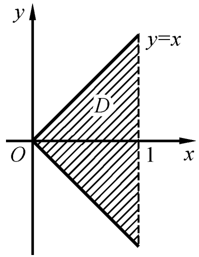
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\\ 0,\end{cases}$$

11.设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f（x，y）=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}$（$y\mid x$），$f_{X|Y}$（$x\mid y$）.



题 11 图

【解】 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_{-x}^{x} 1\mathrm{d}y = 2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-y}^{1} 1\mathrm{d}x=1+y, & -1<y<0,\\ \int_{y}^{1} 1\mathrm{d}x=1-y, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & |y|<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & y<x<1,\\ \dfrac{1}{1+y}, & -y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

12.袋中有五个号码 1，2，3，4，5，从中任取三个，记这三个号码中最小的号码为 X，最大的号码为 Y.

（1） 求 X 与 Y 的联合概率分布；

（2） X 与 Y 是否相互独立？

【解】（1） X 与 Y 的联合分布律如下表

Y \ X	3	4	5	$P\{X=x_i\}$

1	$\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$	$\frac{2}{C_5^3}=\frac{2}{10}$	$\frac{3}{C_5^3}=\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$
2	0	$\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$	$\frac{2}{C_5^3}=\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
3	0	0	$\frac{1}{C_5^2}=\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$P\{Y=y_i\}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	

(2) 因 $P\{X=1\}\cdot P\{Y=3\}=\frac{6}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{6}{100}\neq\frac{1}{10}=P\{X=1,Y=3\}$,

故 X 与 Y 不独立

13.设二维随机变量（X，Y）的联合分布律为

Y \ X	2	5	8
0.4	0.15	0.30	0.35
0.8	0.05	0.12	0.03

（1）求关于 X 和关于 Y 的边缘分布；

（2） X 与 Y 是否相互独立？

【解】（1）X 和 Y 的边缘分布如下表

Y \ X	2	5	8	$P\{Y=y_i\}$
0.4	0.15	0.30	0.35	0.8
0.8	0.05	0.12	0.03	0.2
$P\{X=x_i\}$	0.2	0.42	0.38	

(2) 因 $P\{X=2\}\cdot P\{Y=0.4\}=0.2\times 0.8=0.16\neq 0.15=P(X=2,Y=0.4)$,

故 X 与 Y 不独立.

14.设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在（0，1）上服从均匀分布，Y 的概率密度为

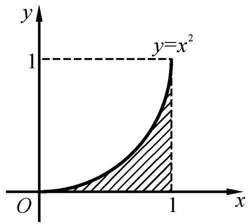
$$f_Y（y）=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathbf{e}^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）求 X 和 Y 的联合概率密度；

（2） 设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，试求 a 有实根的概率.

【解】（1） 因 $f_X(x)==\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ $\qquad f_Y(y)==\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y> 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$\text{故 } f(x,y)\xlongequal{X,Y\text{独立}}f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2} & 0<x<1,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



题 14 图

(2) 方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的条件是

$$\Delta=(2X)^2-4Y\geq 0$$

故 $X^2\geq Y$，

从而方程有实根的概率为：

$$P\{X^2 \geq Y\} = \iint\limits_{x^2 \geq y} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-y/2} \mathrm{d}y$$
$$= 1 - \sqrt{2\pi}[\Phi(1) - \Phi(0)]$$
$$= 0.1445.$$

15.设 X 和 Y 分别表示两个不同电子器件的寿命（以小时计），并设 X 和 Y 相互独立，且服从同一分布，其概率密度为

$$f（x）= \begin{cases} \dfrac{1000}{x^2}, & x > 1000, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

求 $Z=X/Y$ 的概率密度.

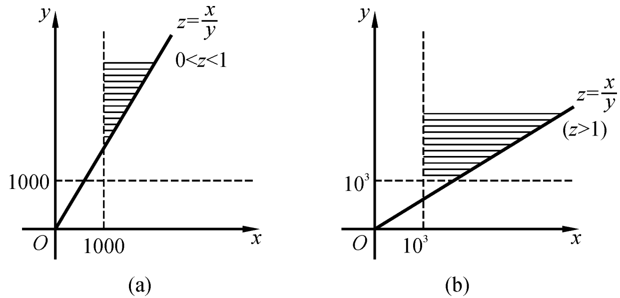
【解】如图,Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\frac{X}{Y}\le z\}$

(1) 当 $z\le 0$ 时， $F_Z(z)=0$

（2） 当 $0<z<1$ 时，（这时当 x=1000 时,$y=\frac{1000}{z}$）(如图 a)

$$F_Z(z)=\iint\limits_{y\ge\frac{x}{z}}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{10^3}{z}}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{10^3}^{yz}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{10^3}{z}}^{+\infty}\left(\frac{10^3}{y^2}-\frac{10^6}{zy^3}\right)\mathrm{d}y=\frac{z}{2}$$



题 15 图

(3) 当 $z\geq1$ 时，（这时当 $y=10^3$ 时，$x=10^3z$）（如图 b）

$$F_Z(z)=\iint\limits_{y\geq\frac{x}{z}}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{10^3}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{10^3}^{zy}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{10^3}^{+\infty}\left(\frac{10^3}{y^2}-\frac{10^6}{zy^3}\right)\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2z}$$

即
$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2z}, & z\ge 1,\\ \dfrac{z}{2}, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故
$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2z^2}, & z\ge 1,\\ \dfrac{1}{2}, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

16.设某种型号的电子管的寿命（以小时计）近似地服从 N（160，20^2）分布.随机地选取 4 只，

求其中没有一只寿命小于 180 的概率.

【解】设这四只寿命为 $X_i(i=1,2,3,4)$，则 $X_i\sim N$（160，20^2），

从而

$$P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4)\geq 180\}\xlongequal{X_i\text{之间独立}}P\{X_1\geq 180\}\cdot P\{X_2\geq 180\}$$

$$P\{X_3\geq 180\}\cdot P\{X_4\geq 180\}$$

$$=[1-P\{X_1<180\}]\cdot[1-P\{X_2<180\}]\cdot[1-P\{X_3<180\}]\cdot[1-P\{X_4<180\}]$$

$$=[1-P\{X_1<180\}]^4=\left[1-\Phi\left(\frac{180-160}{20}\right)\right]^4$$

$$=[1-\Phi(1)]^4=(0.158)^4=0.00063.$$

17.设 X，Y 是相互独立的随机变量，其分布律分别为

$$P\{X=k\}=p(k),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$P\{Y=r\}=q(r),\ r=0,1,2,\ldots.$$

证明随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律为

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}p(k)q(i-k),\ i=0,1,2,\ldots.$$

【证明】因 X 和 Y 所有可能值都是非负整数，

所以

$$\{Z=i\}=\{X+Y=i\}$$

$$=\{X=0,Y=i\}\cup\{X=1,Y=i-1\}\cup\cdots\cup\{X=i,Y=0\}$$

于是

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i-k\}\underline{\underline{X,Y\text{相互独立}}}\sum_{k=0}^{i}P\{X=k\}\cdot P\{Y=i-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{i} p(k)q(i-k)$$

18.设 X，Y 是相互独立的随机变量，它们都服从参数为 n，p 的二项分布.证明 $Z=X+Y$ 服从参数为 $2n$，p 的二项分布.

【证明】方法一：$X+Y$ 可能取值为 0，1，2，…，$2n$.

$$P\{X+Y=k\}=\sum_{i=0}^{k} P\{X=i, Y=k-i\}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)\cdot P\{Y=k-i\} \\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} p^{i} q^{n-i}\binom{n}{k-i} p^{k-i} q^{n-k+i} \\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i} p^{k} q^{2n-k} \\
&=\binom{2n}{k} p^{k} q^{2n-k}
\end{aligned}
$$

方法二：设 $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n;\mu_1',\mu_2',\ldots$，$\mu_n'$均服从两点分布（参数为 p），则

$$X=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n，\quad Y=\mu_1'+\mu_2'+\ldots+\mu_n',$$

$$X+Y=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+\mu_1'+\mu_2'+\ldots+\mu_n',$$

所以，$X+Y$ 服从参数为（$2n,p$)的二项分布.

19.设随机变量（X，Y）的分布律为

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(1) 求 $P\{X=2 \mid Y=2\}$，$P\{Y=3 \mid X=0\}$；

（2） 求 $V=\max(X, Y)$的分布律；

（3） 求 $U=\min(X, Y)$的分布律；

（4） 求 $W=X+Y$ 的分布律.

【解】（1） $P\{X=2 \mid Y=2\}=\dfrac{P\{X=2, Y=2\}}{P\{Y=2\}}$

$$= \frac{P\{X=2,Y=2\}}{\sum_{i=0}^{5} P\{X=i,Y=2\}} = \frac{0.05}{0.25} = \frac{1}{2},$$

$$P\{Y=3 \mid X=0\} = \frac{P\{Y=3,X=0\}}{P\{X=0\}}$$

$$= \frac{P\{X=0,Y=3\}}{\sum_{j=0}^{3} P\{X=0,Y=j\}} = \frac{0.01}{0.03} = \frac{1}{3};$$

（2） $P\{V=i\} = P\{\max(X,Y)=i\} = P\{X=i,Y<i\} + P\{X \le i, Y=i\}$

$$=\sum_{k=0}^{i-1}P\{X=i,Y=k\}+\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i\},\qquad i=0,1,2,3,$$

所以 V 的分布律为

V=max(X,Y)	0	1	2	3	4	5
P	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

(3) $P\{U=i\}=P\{\min(X,Y)=i\}$

$$=P\{X=i,Y\geq i\}+P\{X>i,Y=i\}$$

$$=\sum_{k=i}^{3}P\{X=i,Y=k\}+\sum_{k=i+1}^{5}P\{X=k,Y=i\}\qquad i=0,1,2,$$

于是

U=min(X,Y)	0	1	2	3

P	0.28	0.30	0.25	0.17

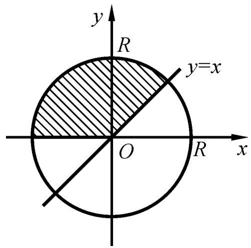
(4)类似上述过程，有

$W=X+Y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

20.雷达的圆形屏幕半径为 R，设目标出现点（X，Y）在屏幕上服从均匀分布.

（1） 求 $P\{Y>0 \mid Y>X\}$；

（2） 设 $M=\max\{X，Y\}$，求 $P\{M>0\}$.



题 20 图

【**解**】因（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1） $P\{Y>0\mid Y>X\}=\dfrac{P\{Y>0,Y>X\}}{P\{Y>X\}}$

$$=\frac{\displaystyle\iint\limits_{\substack{y>0\\y>x}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\iint\limits_{y>x} f(x,y)\mathrm{d}\sigma}$$

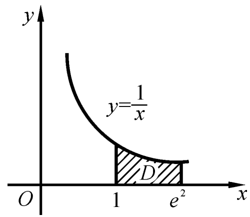
$$=\frac{\int_{\pi/4}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{1}{\pi R^2}r\mathrm{d}r}{\int_{\pi/4}^{\frac{5}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{1}{\pi R^2}r\mathrm{d}r}$$

$$=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4};$$

(2) $P\{M>0\}=P\{\max(X,Y)>0\}=1-P\{\max(X,Y)\leq 0\}$

$$=1-P\{X\leq 0,Y\leq 0\}=1-\iint\limits_{\substack{x\leq 0\\ y\leq 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

21.设平面区域 D 由曲线 $y=1/x$ 及直线 $y=0$，$x=1$,x=e^2 所围成，二维随机变量（X，Y）在区域 D 上服从均匀分布，求（X，Y）关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为多少？



题 21 图

【解】区域 D 的面积为 $S_0=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{e^2}=2$.（$X,Y$）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1\le x\le \mathrm{e}^2, 0<y\le \frac{1}{x},\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（X，Y）关于 X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{1/x}\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2x}, & 1\le x\le \mathrm{e}^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以 $f_X(2)=\frac{1}{4}$.

22.设随机变量 X 和 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量（X，Y）联合分布律及关于 X 和 Y 的边缘分布律中的部分数值.试将其余数值填入表中的空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_i$
x_1		1/8		
x_2	1/8			
$P\{Y=y_j\}=p_j$	1/6			1

【解】因 $P\{Y=y_j\}=P_j=\sum_{i=1}^{2}P\{X=x_i,Y=y_j\}$,

故 $P\{Y=y_1\}=P\{X=x_1,Y=y_1\}+P\{X=x_2,Y=y_1\}$,

从而 $P\{X=x_1,Y=y_1\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$.

而 X 与 Y 独立，故 $P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}=P\{X=x_i,Y=y_i\}$,

从而 $P\{X=x_1\}\times\frac{1}{6}=P\{X=x_1,Y=y_1\}=\frac{1}{24}$.

即：$P\{X=x_1\}=\frac{1}{24}/\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$.

又 $P\{X=x_1\}=P\{X=x_1,Y=y_1\}+P\{X=x_1,Y=y_2\}+P\{X=x_1,Y=y_3\}$,

即 $\frac{1}{4}=\frac{1}{24}+\frac{1}{8}+P\{X=x_{1,}Y=y_3\}$,

从而 $P\{X=x_1,Y=y_3\}=\frac{1}{12}$.

同理 $P\{Y=y_2\}=\frac{1}{2}$, $\qquad P\{X=x_2,Y=y_2\}=\frac{3}{8}$

又 $\sum_{j=1}^{3}P\{Y=y_j\}=1$,故 $P\{Y=y_3\}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

同理 $P\{X=x_2\}=\frac{3}{4}$.

从而

$$P\{X=x_2,Y=y_3\}=P\{Y=y_3\}-P\{X=x_1,Y=y_3\}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

故

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=P_i$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}=p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

23.设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 p（$0<p<1$），且中途下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数，求：（1）在发车时有 n 个

乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；（2）二维随机变量（X，Y）的概率分布.

【解】(1) $P\{Y=m \mid X=n\}=\mathrm{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m}, 0 \le m \le n, n=0,1,2,\cdots$.

(2) $P\{X=n, Y=m\}=P\{X=n\} \cdot P\{Y=m \mid X=n\}$

$$=\mathrm{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{n!} \lambda^n, n \le m \le n, n=0,1,2,\cdots.$$

24.设随机变量 X 和 Y 独立，其中 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$，而 Y 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

【解】设 F（y）是 Y 的分布函数，则由全概率公式，知 $U=X+Y$ 的分布函数为

$$G(u)=P\{X+Y \le u\}=0.3P\{X+Y \le u \mid X=1\}+0.7P\{X+Y \le u \mid X=2\}$$

$$= 0.3P\{Y \le u-1 \mid X = 1\} + 0.7P\{Y \le u-2 \mid X = 2\}$$

由于 X 和 Y 独立，可见

$$G(u) = 0.3P\{Y \le u-1\} + 0.7P\{Y \le u-2\}$$

$$= 0.3F(u-1) + 0.7F(u-2).$$

由此，得 U 的概率密度为

$$g(u) = G'(u) = 0.3F'(u-1) + 0.7F'(u-2)$$

$$= 0.3f(u-1) + 0.7f(u-2).$$

25. 25. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间[0,3]上的均匀分布，求 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}$.

解：因为随即变量服从[0，3]上的均匀分布，于是有

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\le x\le 3,\\ 0, & x<0,x>3;\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\le y\le 3,\\ 0, & y<0,y>3.\end{cases}$$

因为 X，Y 相互独立，所以

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}, & 0\le x\le 3,0\le y\le 3,\\ 0, & x<0,y<0,x>3,y>3.\end{cases}$$

推得
$$P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=\frac{1}{9}.$$

26. 设二维随机变量（X，Y）的概率分布为

Y \ X	-1	0	1

-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a,b,c 为常数，且 X 的数学期望 $E(X)=-0.2, P\{Y\le 0|X\le 0\}=0.5$，记 $Z=X+Y$.求：

（1） a,b,c 的值；

（2） Z 的概率分布；

（3） $P\{X=Z\}$.

解 (1) 由概率分布的性质知，

$$a+b+c+0.6=1 \qquad 即 \qquad a+b+c=0.4.$$

由 $E(X)=-0.2$，可得

$$-a+c=-0.1.$$

再由

$$P\{Y\le 0\big|X\le 0\}=\frac{P\{X\le 0,Y\le 0\}}{P\{X\le 0\}}=\frac{a+b+0.1}{a+b+0.5}=0.5,$$

得 $$a+b=0.3.$$

解以上关于 a，b，c 的三个方程得

$$a=0.2, b=0.1, c=0.1.$$

(2) Z 的可能取值为–2，–1，0，1，2，

$$P\{Z=-2\}=P\{X=-1, Y=-1\}=0.2,$$

$$P\{Z=-1\}=P\{X=-1, Y=0\}+P\{X=0, Y=-1\}=0.1,$$

$$P\{Z=0\}=P\{X=-1, Y=1\}+P\{X=0, Y=0\}+P\{X=1, Y=-1\}=0.3,$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1, Y=0\}+P\{X=0, Y=1\}=0.3,$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1, Y=1\}=0.1,$$

即 Z 的概率分布为

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(3) $$P\{X=Z\}=P\{Y=0\}=0.1+b+0.2=0.1+0.1+0.2=0.4.$$

习题四

1.设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	1/8	1/2	1/8	1/4

求 E（X），E（X^2），E（$2X$+3）.

【解】(1) $E(X)=(-1)\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$;

(2) $E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{8}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$;

(3) $E(2X+3)=2E(X)+3=2\times\frac{1}{2}+3=4$

2.已知 100 个产品中有 10 个次品，求任意取出的 5 个产品中的次品数的数学期望、方差.

【解】设任取出的 5 个产品中的次品数为 X，则 X 的分布律为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{C_{90}^5}{C_{100}^5}=0.583$	$\frac{C_{10}^1C_{90}^4}{C_{100}^5}=0.340$	$\frac{C_{10}^2C_{90}^3}{C_{100}^5}=0.070$	$\frac{C_{10}^3C_{90}^2}{C_{100}^5}=0.007$	$\frac{C_{10}^4C_{90}^1}{C_{100}^5}=0$	$\frac{C_{10}^5}{C_{100}^5}=0$

故 $E(X)=0.583\times 0+0.340\times 1+0.070\times 2+0.007\times 3$

$$=0.501,$$

$$D(X)=\sum_{i=0}^{5}[x_i-E(X)]^2P_i$$

$$=(0-0.501)^2\times 0.583+(1-0.501)^2\times 0.340+\cdots+(5-0.501)^2\times 0$$
$$=0.432.$$

3.设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	p_1	p_2	p_3

且已知 E（X）$=0.1$,$E(X^2)=0.9$,求 P_1，P_2，P_3.

【**解**】因 $P_1+P_2+P_3=1\ldots\ldots$①,

又 $E(X)=(-1)P_1+0\cdot P_2+1\cdot P_3=P_3-P_1=0.1\ldots\ldots$②,

$E(X^2)=(-1)^2\cdot P_1+0^2\cdot P_2+1^2\cdot P_3=P_1+P_3=0.9\ldots\ldots$③,

由①②③联立解得 $P_1=0.4, P_2=0.1, P_3=0.5.$

4.袋中有 N 只球，其中的白球数 X 为一随机变量，已知 E（X）$=n$，问从袋中任取 1 球为白球的概率是多少？

【解】记 A={从袋中任取 1 球为白球}，则

$$P(A) \xlongequal{\text{全概率公式}} \sum_{k=0}^{N} P\{A \mid X=k\} \cdot P\{X=k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N} P\{X=k\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} kP\{X=k\}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot E(X) = \frac{n}{N}.$$

5.设随机变量 X 的概率密度为

$$f（x）=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 2-x, & 1\le x\le 2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

求 E（X），D（X）.

【解】 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2 x(2-x)\mathrm{d}x$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=1.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$$

故 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}.$$

6.设随机变量 X，Y，Z 相互独立，且 E（X）=5，E（Y）=11，E（Z）=8，求下列随机变量的数学期

望.

（1） $U=2X+3Y+1$；

（2） $V=YZ-4X$.

【解】(1) $E[U]=E(2X+3Y+1)=2E(X)+3E(Y)+1$

$$=2\times5+3\times11+1=44.$$

(2) $E[V]=E[YZ-4X]=E[YZ]-4E(X)$

$$\xlongequal{\text{因}Y,Z\text{独立}}E(Y)\cdot E(Z)-4E(X)$$

$$=11\times8-4\times5=68.$$

7.设随机变量 X，Y 相互独立，且 E（X）$=E$（Y）$=3$，D（X）$=12$，D（Y）$=16$，求 E（$3X-2Y$），D（$2X-3Y$）.

【解】(1) $E(3X-2Y)=3E(X)-2E(Y)=3\times3-2\times3=3.$

(2) $D(2X-3Y)=2^2D(X)+(-3)^2DY=4\times12+9\times16=192.$

8.设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试确定常数 k，并求 E（XY）.

【解】因 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x k\mathrm{d}y=\frac{1}{2}k=1,$ 故 k=2

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x 2y\mathrm{d}y=0.25.$$

9.设 X，Y 是相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(y-5)}, & y>5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 E（XY）.

【解】方法一：先求 X 与 Y 的均值

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_5^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-(y-5)}\,\mathrm{d}y \xlongequal{令z=y-5} \int_0^{+\infty} 5\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z+\int_0^{+\infty} z\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z=5+1=6$$

由 X 与 Y 的独立性，得

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{2}{3}\times 6=4.$$

方法二：利用随机变量函数的均值公式.因 X 与 Y 独立，故联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}2x\mathrm{e}^{-(y-5)}, & 0\le x\le 1, y>5,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

于是

$$E(XY)=\int_{5}^{+\infty}\int_{0}^{1} xy\cdot 2x\mathrm{e}^{-(y-5)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}2x^{2}\mathrm{d}x\cdot\int_{5}^{+\infty} y\mathrm{e}^{-(y-5)}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\times 6=4.$$

10.设随机变量 X，Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2\mathbf{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0;\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}4\mathbf{e}^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

求（1） E（$X+Y$）;（2） E（$2X-3Y^2$）.

【解】$(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty} x\cdot 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=[-x\mathrm{e}^{-2x}]_0^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

$$=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y\int_{0}^{+\infty} y\cdot 4\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty} y^2\cdot 4\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=\frac{2}{4^2}=\frac{1}{8}.$$

从而(1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

$$(2)\ E(2X-3Y^2)=2E(X)-3E(Y^2)=2\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

11.设随机变量 X 的概率密度为

$$f（x）=\begin{cases} cx\mathbf{e}^{-k^2x^2}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

求（1） 系数 c;（2） E（X）;（3） D（X）.

【解】(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}cx\mathrm{e}^{-k^2x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{c}{2k^2}=1$ 得 $c=2k^2$.

$$(2)\quad E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}(x)=\int_0^{+\infty}x\cdot 2k^2x\mathrm{e}^{-k^2x^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2k^2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-k^2x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2k}.$$

(3) $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}(x) = \int_0^{+\infty} x^2 \square 2k^2 x e^{-k^2x^2}\ \frac{1}{k^2}.$$

故 $$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{k^2} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2k}\right)^2 = \frac{4-\pi}{4k^2}.$$

12.袋中有 12 个零件，其中 9 个合格品，3 个废品.安装机器时，从袋中一个一个地取出（取出后不放回），设在取出合格品之前已取出的废品数为随机变量 X，求 E（X）和 D（X）.

【解】设随机变量 X 表示在取得合格品以前已取出的废品数，则 X 的可能取值为 0，1，2，3.为求其分布律，下面求取这些可能值的概率，易知

$$P\{X=0\} = \frac{9}{12} = 0.75$$ $$P\{X=1\} = \frac{3}{12}\times\frac{9}{11} = 0.204,$$

$$P\{X=2\}=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{9}{10}=\ 0.0 \qquad P\{X=3\}=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{9}=0.005.$$

于是，得到 X 的概率分布表如下：

X	0	1	2	3
P	0.750	0.204	0.041	0.005

由此可得 $E(X)=0\times0.750+1\times0.204+2\times0.041+3\times0.005=0.301.$

$$E(X^2)=0^2\times750+1^2\times0.204+2^2\times0.041+3^2\times0.005=0.413$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.413-(0.301)^2=0.322.$$

13.一工厂生产某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，概率密度为

$$f（x）=\begin{cases}\frac{1}{4}\mathbf{e}^{-\frac{x}{4}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

为确保消费者的利益，工厂规定出售的设备若在一年内损坏可以调换.若售出一台设备，工厂获利 100 元，而调换一台则损失 200 元，试求工厂出售一台设备赢利的数学期望.

【解】厂方出售一台设备净盈利 Y 只有两个值：100 元和 –200 元

$$P\{Y=100\}=P\{X\geq 1\}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x/4}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1/4}$$

$$P\{Y=-200\}=P\{X<1\}=1-\mathrm{e}^{-1/4}$$

故 $E(Y)=100\times\mathrm{e}^{-1/4}+(-200)\times(1-\mathrm{e}^{-1/4})=300\mathrm{e}^{-1/4}-200=33.64$ (元).

14.设 X_1，X_2，…，X_n 是相互独立的随机变量，且有 E（X_i）$=\mu$，D（X_i）$=\sigma^2$，i=1，2，…，n，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2，S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 .$$

（1） 验证 $E(\overline{X})=\mu$， $D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$；

（2） 验证 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}-n\overline{X}^2\right)$；

（3） 验证 E（S^2）$=\sigma^2$.

【证】(1) $E(\overline{X})=E\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\dfrac{1}{n}\cdot nu=u.$

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)\xlongequal{X_i\text{之间相互独立}}\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}DX_i$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}.$$

(2) 因

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2+\overline{X}^2-2\overline{X}X_i)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2+n\overline{X}^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^2+n\overline{X}^2-2\overline{X}\cdot n\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$$

故 $S^2=\dfrac{1}{n-1}(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$.

(3) 因 $E(X_i)=u, D(X_i)=\sigma^2$,故 $E(X_i^2)=D(X_i)+(EX_i)^2=\sigma^2+u^2$.

同理因 $E(\overline{X})=u, D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$,故 $E(\overline{X}^2)=\frac{\sigma^2}{n}+u^2$.

从而

$$E(s^2)=E\left[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)\right]=\frac{1}{n-1}[E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)-nE(\overline{X}^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[n\cdot(\sigma^2+u^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+u^2\right)\right]=\sigma^2.$$

15.对随机变量 X 和 Y，已知 D（X）=2，D（Y）=3，Cov(X,Y)= –1,

计算：Cov（3X –2Y+1，X+4Y –3）.

【解】$\mathrm{Cov}(3X-2Y+1, X+4Y-3)=3D(X)+10\mathrm{Cov}(X,Y)-8D(Y)$

$$=3\times 2+10\times(-1)-8\times 3=-28$$

(因常数与任一随机变量独立，故 Cov(X,3)=Cov(Y,3)=0,其余类似).

16.设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f（x，y）=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

【解】设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=0.$$

同理 $E(Y)=0$.

而 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)][y-E(Y)]f(x,y)$

$$=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin\theta\cos\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=0,$$

由此得 $\rho_{XY}=0$,故 X 与 Y 不相关.

下面讨论独立性，当$|x|\le 1$ 时， $f_X(x)\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$.

当$|y|\le 1$ 时， $f_Y(y)\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$.

显然 $f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$.

故 X 和 Y 不是相互独立的.

17.设随机变量（X，Y）的分布律为

Y \ X	−1	0	1
−1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

【解】联合分布表中含有零元素，X 与 Y 显然不独立，由联合分布律易求得 X，Y 及 XY 的分布律，其分布律如下表

X	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

XY	-1	0	1
P	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

由期望定义易得 E（X）=E（Y）=E（XY）=0.

从而 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$,再由相关系数性质知 $\rho_{XY}=0$,

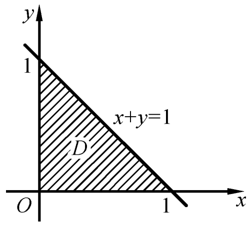
即 X 与 Y 的相关系数为 0，从而 X 和 Y 是不相关的.

又 $P\{X=-1\}\cdot P\{Y=-1\}=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{3}{8}\neq\dfrac{1}{8}=P\{X=-1,Y=-1\}$

从而 X 与 Y 不是相互独立的.

18.设二维随机变量（X，Y）在以（0，0），（0，1），（1，0）为顶点的三角形区域上服从均匀分布，求 Cov（X，Y），ρ_{XY}.

【解】如图，$S_D=\dfrac{1}{2}$，故（X，Y）的概率密度为



题 18 图

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(X)=\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x\cdot 2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$$

$$E(X^2)=\iint\limits_D x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}2x^2\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

从而 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{18}.$

同理 $E(Y)=\dfrac{1}{3},D(Y)=\dfrac{1}{18}.$

而 $$E(XY)=\iint\limits_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}2xy\mathrm{d}y=\frac{1}{12}.$$

所以

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{36}.$$

从而 $$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\dfrac{1}{36}}{\sqrt{\dfrac{1}{18}}\times\sqrt{\dfrac{1}{18}}}=-\frac{1}{2}$$

19.设（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin(x+y), & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求协方差 Cov（X，Y）和相关系数 ρ_{XY}.

【解】 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2}x\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}.$

$$E(X^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2.$$

从而

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

同理
$$E(Y)=\frac{\pi}{4}, D(Y)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

又
$$E(XY)=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2}xy\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-1,$$

故
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{\pi}{4}\times\frac{\pi}{4}=-\left(\frac{\pi-4}{4}\right)^2,$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\left(\frac{\pi-4}{4}\right)^2}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2}=-\frac{(\pi-4)^2}{\pi^2+8\pi-32}=-\frac{\pi^2-8\pi+16}{\pi^2+8\pi-32}.$$

20.已知二维随机变量（X，Y）的协方差矩阵为$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$，试求 $Z_1=X-2Y$ 和 $Z_2=2X-Y$ 的相关系数.

【解】 由已知知：$D(X)=1, D(Y)=4, \mathrm{Cov}(X,Y)=1.$

从而

$$D(Z_1)=D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4\times4-4\times1=13,$$
$$D(Z_2)=D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)=4\times1+4-4\times1=4,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)&=\mathrm{Cov}(X-2Y,2X-Y)\\&=2\mathrm{Cov}(X,X)-4\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)+2\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=2D(X)-5\mathrm{Cov}(X,Y)+2D(Y)=2\times1-5\times1+2\times4=5.\end{aligned}$$

故
$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\cdot\sqrt{D(Z_2)}}=\frac{5}{\sqrt{13}\times\sqrt{4}}=\frac{5}{26}\sqrt{13}.$$

21.对于两个随机变量 V，W，若 E（V^2），E（W^2）存在，证明：

$$[E(VW)]^2 \le E(V^2)E(W^2).$$

这一不等式称为柯西许瓦兹（Couchy –Schwarz）不等式.

【证】令 $g(t)=E\{[V+tW]^2\}, t\in R.$

显然

$$0\le g(t)=E[(V+tW)^2]=E[V^2+2tVW+t^2W^2]$$

$$=E[V^2]+2t\cdot E[VW]+t^2\cdot E[W^2], \forall t\in R.$$

可见此关于 t 的二次式非负，故其判别式 $\Delta\le 0$，

即 $0\ge \Delta=[2E(VW)]^2-4E(W^2)\cdot E(V^2)$

$$=4\{[E(VW)]^2-E(V^2)\cdot E(W^2)\}.$$

故 $[E(VW)]^2\le E(V^2)\cdot E(W^2)\}.$

22.假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从参数 $\lambda=1/5$ 的指数分布.设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机.试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 F（y）.

【解】设 Y 表示每次开机后无故障的工作时间，由题设知设备首次发生故障的等待时间

$X\sim E(\lambda), E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=5.$

依题意 $Y=\min(X,2)$.

对于 $y<0, f(y)=P\{Y\le y\}=0.$

对于 $y\ge 2, F(y)=P(X\le y)=1.$

对于 $0\le y<2$,当 $x\ge 0$ 时，在 $(0,x)$内无故障的概率分布为

$P\{X\le x\}=1-e^{-\lambda x}$,所以

$$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{\min(X,2)\le y\}=P\{X\le y\}=1-e^{-y/5}.$$

23.已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品.从甲箱中任取 3 件产品放乙箱后，求：（1）乙箱中次品件数 Z 的数学期望；（2）从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

【解】（1） Z 的可能取值为 0，1，2，3，Z 的概率分布为

$$P\{Z=k\}=\frac{C_3^k\cdot C_3^{3-k}}{C_6^3},\qquad k=0,1,2,3.$$

$Z=k$	0	1	2	3
P_k	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此，$E(Z)=0\times\dfrac{1}{20}+1\times\dfrac{9}{20}+2\times\dfrac{9}{20}+3\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{3}{2}.$

(2) 设 A 表示事件“从乙箱中任取出一件产品是次品”，根据全概率公式有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{Z=k\}\cdot P\{A\mid Z=k\}$$

$$=\frac{1}{20}\times 0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}.$$

24.假设由自动线加工的某种零件的内径 X（毫米）服从正态分布 N（μ,1），内径小于 10 或大于 12 为不合格品，其余为合格品.销售每件合格品获利，销售每件不合格品亏损，已知销售利润 T（单位：元）与销售零件的内径 X 有如下关系

$$T=\begin{cases}-1, & 若X<10,\\ 20, & 若10\le X\le 12,\\ -5, & 若X>12.\end{cases}$$

问：平均直径 μ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

【解】$E(T)=-P\{X<10\}+20P\{10\le X\le 12\}-5P\{X>12\}$

$$\begin{aligned}&=-P\{X-u<10-u\}+20P\{10-u\le X-u\le 12-u\}-5P\{X-u>12-u\}\\&=-\Phi(10-u)+20[\Phi(12-u)-\Phi(10-u)]-5[1-\Phi(12-u)]\\&=25\Phi(12-u)-21\Phi(10-u)-5.\end{aligned}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}E(T)}{\mathrm{d}u}=25\varphi(12-u)\times(-1)-21\varphi(10-u)\times(-1)\overset{令}{=\!=}0(这里\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}),$$

得 $$25\mathrm{e}^{-(12-u)^2/2}=21\mathrm{e}^{-(10-u)^2/2}$$

两边取对数有

$$\ln 25-\frac{1}{2}(12-u)^2=\ln 21-\frac{1}{2}(10-u)^2.$$

解得 $$u=11-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}=11-\frac{1}{2}\ln 1.19\approx 10.9128(毫米)$$

由此可得，当 u=10.9 毫米时，平均利润最大.

25.设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\pi/3$ 的次数，求 Y^2 的数学期望.（2002 研考）

【解】令 $$Y_i=\begin{cases}1, & X>\frac{\pi}{3},\\ 0, & X\le\frac{\pi}{3}.\end{cases}\qquad(i=1,2,3,4)$$

则 $Y=\sum\limits_{i=1}^{4}Y_i\sim B(4,p)$.因为

$$p=P\{X>\frac{\pi}{3}\}=1-P\{X\le\frac{\pi}{3}\}及P\{X\le\frac{\pi}{3}\}=\int_0^{\pi/3}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

所以$E(Y_i)=\frac{1}{2}, D(Y_i)=\frac{1}{4}, E(Y)=4\times\frac{1}{2}=2,$

$$D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1=E(Y^2)-(EY)^2,$$

从而$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=1+2^2=5.$

26.两台同样的自动记录仪，每台无故障工作的时间 $T_i(i=1,2)$服从参数为 5 的指数分布，首先开动其中一台，当其发生故障时停用而另一台自动开启.试求两台记录仪无故障工作的总时间 $T=T_1+T_2$ 的概率密度 $f_T(t)$，数学期望 E（T）及方差 D（T）.

【解】由题意知：

$$f_i(t)=\begin{cases}5\mathrm{e}^{-5t}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

因 T_1,T_2 独立，所以 $f_T(t)=f_1(t)*f_2(t)$.

当 $t<0$ 时，$f_T(t)=0$;

当 $t\ge0$ 时，利用卷积公式得

$$f_T(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\cdot f_2(t-x)\mathrm{d}x=\int_0^t 5\mathrm{e}^{-5x}\cdot 5\mathrm{e}^{-5(t-x)}\mathrm{d}x=25t\mathrm{e}^{-5t}$$

故得

$$f_T(t)=\begin{cases}25t\mathrm{e}^{-5t}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

由于 $T_i\sim E(5)$,故知 $E(T_i)=\frac{1}{5}$,$D(T_i)=\frac{1}{25}$　$(i=1,2)$

因此，有 $E(T)=E(T_1+T_2)=\frac{2}{5}$.

又因 T_1,T_2 独立，所以 D（T）$=D$（T_1+T_2）$=\frac{2}{25}$.

27.设两个随机变量 X，Y 相互独立，且都服从均值为 0，方差为 1/2 的正态分布，求随机变量$|X-Y|$的方差.

【解】设 $Z=X-Y$，由于 $X\sim N\left(0,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right), Y\sim N\left(0,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right),$

且 X 和 Y 相互独立，故 $Z\sim N$（0，1）.

因

$$D(|X-Y|)=D(|Z|)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2$$

$$=E(Z^2)-[E(Z)]^2,$$

而

$$E(Z^2)=D(Z)=1, E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-z^2/2}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} z\mathrm{e}^{-z^2/2}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,,$$

所以 $$D(|X-Y|)=1-\frac{2}{\pi}.$$

28.某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0<p<1)$，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时，即停机检修.设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X，求 E（X）和 D（X）.

【解】记 $q=1-p$，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=q^{i-1}p,i=1,2,\dots$，

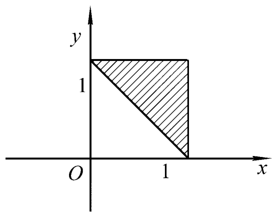
$$故\ E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}p=p(\sum_{i=1}^{\infty}q^i)'=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.$$

$$又\ E(X^2)=\sum_{i=1}^{\infty}i^2q^{i-1}p=\sum_{i=2}^{\infty}(i^2-i)q^{i-1}p+\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}p$$

$$=pq(\sum_{i=2}^{\infty}q^i)''+\frac{1}{p}=pq\left(\frac{q^2}{1-q}\right)''+\frac{1}{p}$$

$$=\frac{2pq}{(1-q)^3}+\frac{1}{p}=\frac{1+q}{p^2}=\frac{2-p}{p^2}.$$

所以 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$



题 29 图

29.设随机变量 X 和 Y 的联合分布在点（0，1），（1，0）及（1，1）为顶点的三角形区域上服从均匀分布.（如图），试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差.

【解】$D(U)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$

$=D(X)+D(Y)+2[E(XY)-E(X)\cdot E(Y)]$.

由条件知 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & t<0.\end{cases}\qquad G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, x+y\ge$$

$$从而\ f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{1-x}^{1}2\mathrm{d}y=2x.$$

因此

$$E(X)=\int_0^1 xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{3}{2},E(X^2)=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

同理可得 $E(Y)=\dfrac{3}{2}, D(Y)=\dfrac{1}{18}.$

$$E(XY)=\iint_G 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 y\mathrm{d}y=\frac{5}{12},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36},$$

于是 $$D(U)=D(X+Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

30.设随机变量 U 在区间$[-2,2]$上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & 若U\le -1,\\ 1, & 若U>-1,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1, & 若U\le 1,\\ 1, & 若U>1.\end{cases}$$

试求（1）X 和 Y 的联合概率分布；（2）D（$X+Y$）.

【解】（1）为求 X 和 Y 的联合概率分布，就要计算（X,Y）的 4 个可能取值$(-1,-1),(-1,1),(1,-1)$及$(1,1)$的概率.

$P\{x=-1,Y=-1\}=P\{U\le -1,U\le 1\}$

$$=P\{U\le -1\}=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{4}=\int_{-2}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{4}=\frac{1}{4}$$

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -1,U>1\}=P\{\varnothing\}=0,$

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\le 1\}$

$$=P\{-1<U\le 1\}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=P\{U>1\}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{4}=\frac{1}{4}.$$

故得 X 与 Y 的联合概率分布为

$$(X,Y)\sim\begin{bmatrix}(-1,-1) & (-1,1) & (1,-1) & (1,1)\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

(2) 因 $D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2$,而 $X+Y$ 及（$X+Y$）^{2} 的概率分布相应为

$$X+Y\sim\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix},\qquad (X+Y)^2\sim\begin{bmatrix}0 & 4\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

从而 $E(X+Y)=(-2)\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{1}{4}=0,$

$$E[(X+Y)^2]=0\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}=2,$$

所以 $D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=2.$

31.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathbf{e}^{-|x|}$，（ $-\infty<x<+\infty$）

(1) 求 E（X）及 D（X）;

（2） 求 $\mathrm{Cov}(X,|X|)$,并问 X 与$|X|$是否不相关?

（3） 问 X 与$|X|$是否相互独立，为什么?

【解】(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0.$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-0)^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0\int_{0}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2.$$

(2) $\mathrm{Cov}(X,|X|)=E(X\cdot|X|)-E(X)\cdot E(|X|)=E(X\cdot|X|)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$$

所以 X 与$|X|$互不相关.

(3) 为判断$|X|$与 X 的独立性，需依定义构造适当事件后再作出判断，为此，对定义域 $-\infty<x<+\infty$中的子区间（0,+∞）上给出任意点 x_0，则有

$$\{-x_0<X<x_0\}=\{|X|<x_0\}\subset\{X<x_0\}.$$

所以$0<P\{|X|<x_0\}<P\{X<x_0\}<1.$

故由

$$P\{X<x_0,|X|<x_0\}=P\{|X|<x_0\}>P\{|X|<x_0\}\cdot P\{X<x_0\}$$

得出 X 与$|X|$不相互独立.

32.已知随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 N（1，3^2）和 N（0，4^2），且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-1/2$，设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$.

（1） 求 Z 的数学期望 E（Z）和方差 D（Z）;

（2） 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ};

（3） 问 X 与 Z 是否相互独立，为什么?

【解】(1) $E(Z)=E\left(\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}\right)=\dfrac{1}{3}.$

$$D(Z)=D\left(\frac{X}{3}\right)+D\left(\frac{Y}{2}\right)+2\mathrm{Cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\times9+\frac{1}{4}\times16+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y),$$

而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times3\times4=-6$$

所以 $$D(Z)=1+4-6\times\frac{1}{3}=3.$$

(2) 因 $\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\times(-6)=\frac{9}{3}-3=0,$$

所以
$$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Z)}}=0.$$

(3) 由 $\rho_{XZ}==0$，得 X 与 Z 不相关.又因 $Z\sim N\left(\frac{1}{3},3\right), X\sim N(1,9)$，所以 X 与 Z 也相互独立.

33.将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 表示正面向上和反面向上的次数.试求 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

【解】由条件知 $X+Y=n$，则有 $D（X+Y）=D（n）=0$.

再由 $X\sim B(n,p),Y\sim B(n,q)$，且 $p=q=\frac{1}{2}$，

从而有
$$D(X)=npq=\frac{n}{4}=D(Y)$$

所以
$$0=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$$

$$=\frac{n}{2}+2\rho_{XY}\cdot\frac{n}{4},\quad 故\ \rho_{XY}=-1.$$

34.设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ Y	−1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

试求 X 和 Y 的相关系数 ρ.

【解】由已知知 $E(X)=0.6,E(Y)=0.2$，而 XY 的概率分布为

YX	−1	0	1
P	0.08	0.72	0.2

所以 $E（XY）= -0.08+0.2=0.12$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0.12-0.6\times0.2=0$

从而
$$\rho_{XY}=0$$

35.对于任意两事件 A 和 B，$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$,则称

$\rho=\frac{P(AB)-P(A)\cdot P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$ 为事件 A 和 B 的相关系数.试证：

（1） 事件 A 和 B 独立的充分必要条件是 $\rho=0$；

（2） $|\rho|\le1$.

【证】（1）由 ρ 的定义知，$\rho=0$ 当且仅当 $P(AB)-P(A)\cdot P(B)=0$.

而这恰好是两事件 A、B 独立的定义，即 $\rho=0$ 是 A 和 B 独立的充分必要条件.

(2) 引入随机变量 X 与 Y 为

$$X=\begin{cases}1, 若A发生, \\ 0, 若\overline{A}发生;\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, 若B发生, \\ 0, 若\overline{B}发生.\end{cases}$$

由条件知，X 和 Y 都服从 $0-1$ 分布，即

$$X\sim\begin{cases}0 & 1 \\ 1-P(A) & P(A)\end{cases} \qquad Y\sim\begin{cases}0 & 1 \\ 1-P(B) & P(B)\end{cases}$$

从而有 $E(X)=P(A), E(Y)=P(B)$,

$D(X)=P(A)\cdot P(\overline{A}), D(Y)=P(B)\cdot P(\overline{B})$,

$\mathrm{Cov}(X,Y)=P(AB)-P(A)\cdot P(B)$

所以，事件 A 和 B 的相关系数就是随机变量 X 和 Y 的相关系数.于是由二元随机变量相关系数的基本性质可得 $|\rho|\le 1$.

36. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0, \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，F（x,y）为二维随机变量（X，Y）的分布函数，求：

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)$;

(3) $F(-\frac{1}{2},4)$.

解： (1) Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}.$$

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$，$f_Y(y)=0$；

当 $0<y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=P\{-\sqrt{y}\le X<0\}+P\{0\le X\le\sqrt{y}\}=\frac{3}{4}\sqrt{y},$$

$$f_Y(y)=\frac{3}{8\sqrt{y}};$$

当 $1\le y<4$ 时，$F_Y(y)=P\{-1\le X<0\}+P\{0\le X\le\sqrt{y}\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$

$$f_Y(y)=\frac{1}{8\sqrt{y}};$$

当 $y \geq 4$ 时，$F_Y(y)=1$，$f_Y(y)=0$.

故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=0\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}},0<y<1,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}},1\leq y<4,\\ 0, \qquad \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}x\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

$$E(Y)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x=\frac{5}{6}),$$

$$E(XY)=E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x^3\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}x^3\mathrm{d}x=\frac{7}{8},$$

故 $$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{2}{3}.$$

(3) $$F(-\frac{1}{2},4)=P\{X\leq-\frac{1}{2},Y\leq 4\}=P\{X\leq-\frac{1}{2},X^2\leq 4\}$$

$$=P\{X\leq-\frac{1}{2},-2\leq X\leq 2\}=P\{-2\leq X\leq-\frac{1}{2}\}$$

$$=P\{-1\leq X\leq-\frac{1}{2}\}=\frac{1}{4}.$$