第三章 命题逻辑的推理理论

主要内容

推理的形式结构

- 推理的正确与错误
- 推理的形式结构
- 判断推理正确的方法
- 推理定律

自然推理系统*P*

- 形式系统的定义与分类
- 自然推理系统*P*
- 在*P*中构造证明:直接证明法、附加前提证明法、归谬法

命题逻辑的推理

逻辑是研究思维结构的和规则的科学，推理是逻辑的最终目标。

因此，首先应该明确什么样的推理是有效的或正确的。

推理：从**前提**推出**结论**的思维过程

前提（或假设）：已知的命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：从前提出发应用推理规则推出的命题公式B

推理的形式结构

定义3.1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式. 若对于每一组赋值，$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假，或当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论$B$的推理是有效的或正确的, 并称$B$是有效结论.

定理3.1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出B的推理正确当且仅当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式

注意: 当推理正确或有效时，称B是$A_1, A_2, \ldots, A_k$的逻辑推论或有效结论，但不一定是正确推论。即推理正确并不一定保证结论正确。因为我们考虑的是推理形式结构的有效性，而不是结论的正确性。

推理的形式结构

推理的形式结构

1. $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$

   若推理正确, 记为$\{A_1,A_2,\ldots,A_k\} \vDash B$

2. $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

   若推理正确, 记为$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

3. 前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$

   结论： B

判断推理是否正确的方法:

真值表法

等值演算法

主析取范式法

推理实例

例1 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号, 则明天是5号. 今天是1号. 所以, 明天是5号.

(2) 若今天是1号, 则明天是5号. 明天是5号. 所以, 今天是1号.

解 设 p: 今天是1号, q: 明天是5号.

(1) 推理的形式结构: $(p\to q)\wedge p\to q$

用等值演算法

$$(p\to q)\wedge p\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

推理正确

推理实例

(2) 推理的形式结构: $(p\to q)\wedge q\to p$

用主析取范式法

$$
\begin{aligned}
& (p\to q)\wedge q\to p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\vee q)\wedge q\to p \\
\Leftrightarrow\ & \neg\ ((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p \\
\Leftrightarrow\ & \neg q\vee p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee\ (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q) \\
\Leftrightarrow\ & m_0\vee m_2\vee m_3
\end{aligned}
$$

推理不正确

推理定律——重言蕴涵式

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律

   $A \Rightarrow (A \vee B \vee C \vee \ldots)$

2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律

   $(A \wedge B) \Rightarrow B$

   $(A \wedge B \wedge C \wedge \ldots) \Rightarrow A$

3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理
4. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论

推理定律——重言蕴涵式

6. $(A \to B) \land (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$ 假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论

8. $(A \to B) \land (C \to D) \land (A \lor C) \Rightarrow (B \lor D)$ 构造性二难

   $(A \to B) \land (\neg A \to B) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)
9. $(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$ 破坏性二难

除上述9条推理定律外，24个基本等值式中每一个都能产生两条推理定律.

例, 由$A \Leftrightarrow \neg\neg A$可产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 和 $\neg\neg A \Rightarrow A$

自然推理系统P

定义3.2 一个**形式系统** I 由下面四个部分组成：

(1) 非空的字母表，记作 $A(I)$.

(2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集，记作 $E(I)$.

(3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集，记作 $A_X(I)$.

(4) 推理规则集，记作 $R(I)$.

记$I=\langle A(I), E(I), A_X(I), R(I)\rangle$, 其中$\langle A(I), E(I)\rangle$是 I 的**形式语言系统**, $\langle A_X(I), R(I)\rangle$ 是 I 的**形式演算系统**

自然推理系统: 无公理集，即$A_X(I)=\varnothing$

自然推理系统P

定义3.3　自然推理系统 P 定义如下:

1. 字母表$A(I)$

(1) 命题变项符号：$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$

(2) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(3) 括号与逗号：(,), ,

2. 合式公式集$E(I)$（同定义1.6）

3. 推理规则$R(I)$

(1) 前提引入规则：在证明的任何步骤都可以引入前提

(2) 结论引入规则：在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后继证明的前提

(3) 置换规则：在证明的任何步骤，命题公式中的子公式都可以用等值的公式置换，得到公式序列中的又一个公式

推理规则

(4) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A\vee B}$$

(5) 化简规则

$$\frac{A\wedge B}{\therefore A}$$

(6) 假言推理规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\rightarrow B\\ A\end{array}}{\therefore B}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\rightarrow B\\ \neg B\end{array}}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\rightarrow B\\ B\rightarrow C\end{array}}{\therefore A\rightarrow C}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\vee B\\ \neg B\end{array}}{\therefore A}$$

推理规则

（10） 构造性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ A\lor C \\ \hline \therefore B\lor D \end{array}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ \neg B\lor\neg D \\ \hline \therefore \neg A\lor\neg C \end{array}$$

(12) 合取引入规则

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A\land B \end{array}$$

在自然推理系统P中构造证明

设前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$，结论B及公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_l$. 如果每一个$C_i(1\le i\le l)$是某个A_j, 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_l=B$, 则称这个公式序列是由$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出B的证明

例2 构造下面推理的证明：

若明天是星期四或星期五, 我明天就有课. 若我明天有课, 今天必备课. 我今天没备课. 所以, 明天不是星期四, 也不是星期五.

解 (1) 设命题并符号化

设 p：明天是星期四，q：明天是星期五，

r：我明天有课，s：我今天备课

直接证明法

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

(3) 证明

① $r\rightarrow s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p\vee q)\rightarrow r$	前提引入
⑤ $\neg(p\vee q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p\wedge\neg q$	⑤置换

附加前提证明法

附加前提证明法：适用于结论为蕴涵式

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \rightarrow B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow (C \rightarrow B)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$
$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \rightarrow B$$

附加前提证明法实例

例3 构造下面推理的证明

2是素数或合数. 若2是素数, 则 π 是无理数. 若π 是无理数, 则4不是素数. 所以, 如果4是素数, 则2是合数.

解 用附加前提证明法构造证明

(1) 设 p: 2是素数, q: 2是合数,

r: π 是无理数, s: 4是素数

(2) 推理的形式结构

前提: $p \vee q$, $p \to r$, $r \to \neg s$

结论: $s \to q$

附加前提证明法实例

(3) 证明

① s 附加前提引入

② $p\to r$ 前提引入

③ $r\to\neg s$ 前提引入

④ $p\to\neg s$ ②③假言三段论

⑤ $\neg p$ ①④拒取式

⑥ $p\vee q$ 前提引入

⑦ q ⑤⑥析取三段论

归谬法（反证法）

归谬法 (反证法)

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

做法

在前提中加入$\neg B$，推出矛盾.

理由

$$
\begin{aligned}
& A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0 \\
\Leftrightarrow\ & A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0
\end{aligned}
$$

归谬法实例

例4 前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\to s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明 用归缪法

① q	结论否定引入
② $r\to s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨ 合取

第三章 习题课

主要内容

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法

  真值表法

  等值演算法

  主析取范式法
- 推理定律
- 自然推理系统*P*
- 构造推理证明的方法

  直接证明法

  附加前提证明法

  归谬法(反证法)

基本要求

- 理解并记住推理形式结构的两种形式：

  1. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$
  2. 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

     结论：B

- 熟练掌握判断推理是否正确的不同方法（如真值表法、等值演算法、主析取范式法等）
- 牢记 P 系统中各条推理规则
- 熟练掌握构造证明的直接证明法、附加前提证明法和归谬法
- 会解决实际中的简单推理问题

练习1：判断推理是否正确

1. 判断下面推理是否正确:

(1) 前提：$\neg p \rightarrow q$，$\neg q$

结论：$\neg p$

解 推理的形式结构：$((\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$

方法一：等值演算法

$$((\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$$
$$\Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p$$
$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p$$
$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$$
$$\Leftrightarrow \neg p \vee q$$

不是重言式，所以推理不正确.

练习1解答

方法二：主析取范式法

$$(\neg p\rightarrow q)\wedge\neg q\rightarrow\neg p$$

$$\Leftrightarrow\neg((p\vee q)\wedge\neg q)\vee\neg p$$

$$\Leftrightarrow\neg p\vee q$$

$$\Leftrightarrow M_2$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3$$

不含m_2, 不是重言式, 推理不正确.

练习1解答

方法三：真值表法

p	q	$\neg p\rightarrow q$	$(\neg p\rightarrow q)\wedge\neg q$	$(\neg p\rightarrow q)\wedge\neg q\rightarrow\neg p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1

不是重言式，推理不正确

方法四：观察法

直接观察出10是成假赋值，不是重言式，推理不正确

练习1解答

(2) 前提：$q\to r$， $p\to\neg r$

结论：$q\to\neg p$

解 推理的形式结构：$(q\to r)\wedge(p\to\neg r)\to(q\to\neg p)$

用等值演算法

$$(q\to r)\wedge(p\to\neg r)\to(q\to\neg p)$$

$\Leftrightarrow (\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg r)\to(\neg q\vee\neg p)$

$\Leftrightarrow \neg((q\wedge\neg r)\vee(p\wedge r))\to(\neg q\vee\neg p)$

$\Leftrightarrow \neg((q\vee p)\wedge(q\vee r)\wedge(\neg r\vee p))\to(\neg q\vee\neg p)$

$\Leftrightarrow ((q\vee p)\wedge(q\vee r)\wedge(\neg r\vee p))\vee(\neg q\vee\neg p)$

$\Leftrightarrow 1$

推理正确

练习2：构造证明

2. 在系统P中构造下面推理的证明：

如果今天是周六，我们就到东海岛或湖光岩玩. 如果东海岛游客太多，就不去东海岛. 今天是周六，并且东海岛游客太多. 所以, 我们去湖光岩或渔港公园玩.

证明：

(1) 设 p：今天是周六，q：到东海岛玩，

r：到湖光岩玩，s：东海岛游客太多,

t：到渔港公园玩.

(2) 前提：$p\to(q\vee r)$，$s\to\neg q$，p，s

结论：$r\vee t$

练习2解答

(3) 证明：

① $p\rightarrow(q\vee r)$	前提引入
② p	前提引入
③ $q\vee r$	①②假言推理
④ $s\rightarrow\neg q$	前提引入
⑤ s	前提引入
⑥ $\neg q$	④⑤假言推理
⑦ r	③⑥析取三段论
⑧ $r\vee t$	⑦附加