

《概率论》课程试题

课程号：19221301

☒ 考试
☐ 考查

☒ A 卷
☐ B 卷

☒ 闭卷
☐ 开卷

题 号	一	二	三	四	五	六	总分	阅卷教师
各题分数	36	12	15	15	15	7	100	
实得分数								

一、填空题 . (每小题 3 分, 共 36 分)

答案: $\overline{A}\overline{B}\overline{C}, C_{10}^1 C_{40}^1 / C_{50}^2, 60\% \times 60\% + 40\% \times 70\%, 0.6 \times 0.7$

掌握:

- (1)样本空间、事件及其关系和运算
- (2)概率的定义、性质、古典概型及几何概型
- (3)条件概率、乘法公式全概率公式贝耶斯公式
- (4)事件的独立性、伯努利概型

答案: $\frac{1^1}{1!} e^{-1}, 1$

掌握:

- (5)六大常见分布
- (6)分布函数及其性质、密度(分布列)函数及其性质、两者之间的关系
- (7)二维变量的联合分布及其边缘分布、变量之间的独立性及相关性、常见的二维分布: 均匀分布
- (8)随机变量的数字特征(期望方差和相关系数)、(独立同分布)中心极限定理

答案:

$$N(\mu, \sigma^2), 2, t(1), -1$$

掌握:

(9) 总体及简单随机样本(简称样本)的概念

(10) 常见统计分布及其性质图像

(11) 抽样分布定理及其重要推论:

1) X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$

\bar{X} 服从 $N(\mu, \sigma^2/n)$, $(n-1)S^2/\sigma^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$, \bar{X} 与 S^2 相互独立

$$\frac{X - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ 服从 } N(0,1), \frac{X - \mu}{S/\sqrt{n}} \text{ 服从 } t(n-1)$$

2) X 服从 $N(\mu_1, \sigma^2)$, Y 服从 $N(\mu_2, \sigma^2)$

$$\frac{X - Y - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \text{ 服从 } t(n+m-2), \frac{S_1^2}{S_2^2} \text{ 服从 } F(n-1, m-1) \dots$$

(12) 常见总体的参数的点估计(矩法及极大似然法)及正态总体区间估计(双侧)

二、

答案:

全概率公式

$$0.5 \times 0.94 + 0.3 \times 0.9 + 0.2 \times 0.95$$

三、

答案:

$$\begin{cases} 1 = F(+\infty) = A \\ 0 = F(0) = A + B(\text{连续性}) \end{cases}$$

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1)$$

四、

答案：

$$1 = \iint_{\Omega} f(x, y) d\sigma = \int_0^1 \int_0^1 cx^2 y dx dy = c/6$$

$$0 < x < 1, f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 6x^2 y dy = 3x^2$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases},$$

$$\text{同理 } f_Y(y) = \begin{cases} 2y & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

五、

答案：

$$X \quad 1 \quad 0$$

$$P \quad 0.9 \quad 0.1$$

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \text{ 服从 } B(100, 0.9) \text{ 近似服从 } N(90, 9)$$

$$P(84 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 95) = P\left(\frac{84-90}{3} < \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 90}{3} < \frac{95-90}{3}\right)$$

$$\approx \phi(5/3) - \phi(-2) = \phi(5/3) + \phi(2) - 1 = \dots$$

六、

答案:

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$$

$$E(X^2) = D(X) + (EX)^2 = \mu^2 + \sigma^2$$

$$E(X_i^2) = \mu^2 + \sigma^2, E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + (E\bar{X})^2 = \mu^2 + \sigma^2/n$$

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2)\right) = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n EX_i^2 - nE\bar{X}^2) = \sigma^2$$

七、

答案:

矩法:

$$\mu_1 = E(X) = (1 + \theta)/2, \quad \theta = 2\mu_1 - 1$$

$$\text{令 } \hat{\mu}_1 = A_1 = \bar{X}, \quad \text{得 } \hat{\theta} = 2\bar{X} - 1$$

另,极大似然估计:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = 1/(\theta - 1)^n, \quad 1 < x_i < \theta$$

$$\hat{\theta} = \max\{x_i\}, L(\theta) \text{取最大值。从而估计量 } \hat{\theta} = \max\{X_i\}$$

八、

答案：

$$F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \text{ 服从 } F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

$$P(F_{0.95} < F < F_{0.05}) = 0.9$$

$$\text{解不等式： } F_{0.95} < F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} < F_{0.05}$$

$$\text{得： } \frac{1}{F_{0.05}} S_1^2 / S_2^2 < \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < \frac{1}{F_{0.95}} S_1^2 / S_2^2$$

$$(\frac{1}{F_{0.05}} S_1^2 / S_2^2, \frac{1}{F_{0.95}} S_1^2 / S_2^2) \text{ 即为 } \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \text{ 的置信度 } 0.9 \text{ 的置信区间。}$$