概率论与数理统计作业 Chap3

March 27, 2025

练习 1. 从 1,2,3,4 中任取一数记为 X, 再从 $1, \ldots, X$ 中任取一数记为 Y. 求 (X,Y) 的联合分布列及 $P(X=Y)$.

解. (X,Y) 为二维离散随机变量, 其中 X 的分布列为

$$P(X=i)=1/4, i=1,2,3,4.$$

Y 的可能取值也是 $1,2,3,4$, 若记 j 为 Y 的取值,

则当 $j>i$ 时, 有 $P(X=i,Y=j)=P(B)=0$.

当 $1 \leq j \leq i \leq 4$ 时, 由乘法公式

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j|X=i)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i}.$$

所以得 (X,Y) 的联合分布列为

	Y			
X	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

由此可算得事件 $\{X=Y\}$ 的概率为

$$P(X=Y)=p_{11}+p_{22}+p_{33}+p_{44}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{25}{48}=0.5208$$

练习 2. 设 (X,Y) 联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6\mathrm{e}^{-2x-3y}, & x>0,y>0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

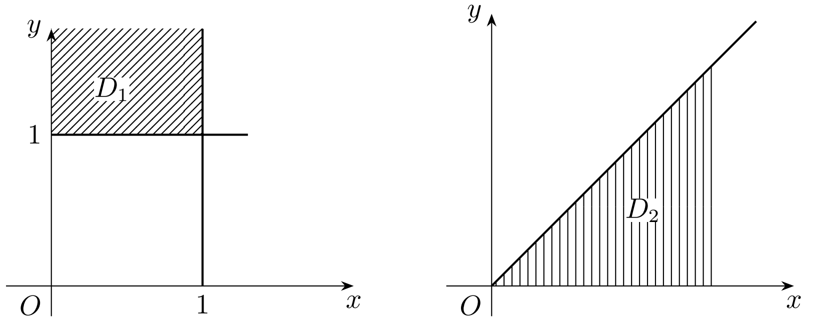
试求: (1) $P(X<1,Y>1)$; (2) $P(X>Y)$.

解. (1) 积分区域见图 1a 中的阴影部分,

$$\begin{aligned}P(X<1,Y>1)&=\int_1^{+\infty}\int_0^1 6\mathrm{e}^{-2x-3y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=6\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}y\\ &=\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)\mathrm{e}^{-3}=0.0430.\end{aligned}$$

(2) 积分区域见图 1b 中的阴影部分, 从而容易写出累次积分.

$$P(X>Y)=\int_0^{+\infty}\int_0^x 6\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{-3y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2x}\left(1-\mathrm{e}^{-3x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left[-\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}\right]_0^{+\infty}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$



(a) $\{x<1,y>1\}$ 区域 D_1 (b) $\{x>y\}$ 区域 D_2

Figure 1: $f(x,y)$ 的非零区域与有关事件的交集部分

练习 3. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}k, & 0<x^2<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 试求常数 k;

(2) 求 $P(X>0.5)$ 和 $P(Y<0.5)$.

解. (1) $f(x,y)$ 的非零区域如图 (a) 阴影部分. 由

$$k\int_0^1\int_{x^2}^x\mathrm{d}y\mathrm{d}x=k\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{k}{6}=1,$$

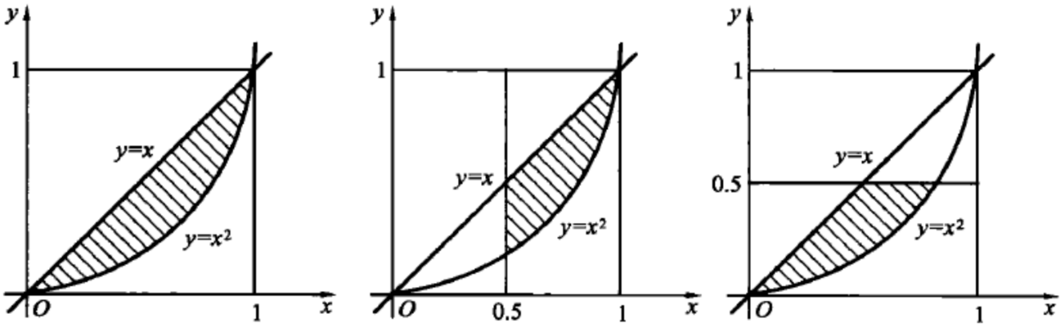
解得 $k=6$.

(2) $f(x,y)$ 的非零区域与 $\{x>0.5\}$ 的交集为图 (b) 阴影部分, 所以

$$P(X>0.5)=6\int_{0.5}^1\int_{x^2}^x\mathrm{d}y\mathrm{d}x=6\int_{0.5}^1(x-x^2)\mathrm{d}x=6\Big(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\Big)\Big|_{0.5}^1=\frac{1}{2}.$$

又因为 $f(x,y)$ 的非零区域与事件 $\{y<0.5\}$ 的交集为图 (c) 阴影部分, 所以

$$P(Y<0.5)=6\int_0^{0.5}\int_{\gamma}^{\sqrt{\gamma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\int_0^{0.5}(\sqrt{\gamma}-y)\mathrm{d}y=\sqrt{2}-3/4=0.6642.$$



练习 4. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6(1-y), & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 $P(X>0.5,Y>0.5)$;

(2) 求 $P(X<0.5)$ 和 $P(Y<0.5)$;

(3) 求 $P(X+Y<1)$.

解. (1) $f(x,y)$ 的非零区域与 $\{x>0.5,y>0.5\}$ 的交集为图 (a) 阴影部分, 所以

$$\begin{aligned}P(X>0.5,Y>0.5)&=6\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{\gamma}(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=6\int_{0.5}^{1}(-y^2+1.5y-0.5)\mathrm{d}y=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

(2) $f(x,y)$ 的非零区域与 $\{x<0.5\}$ 的交集为图 3.3(b) 阴影部分, 所以

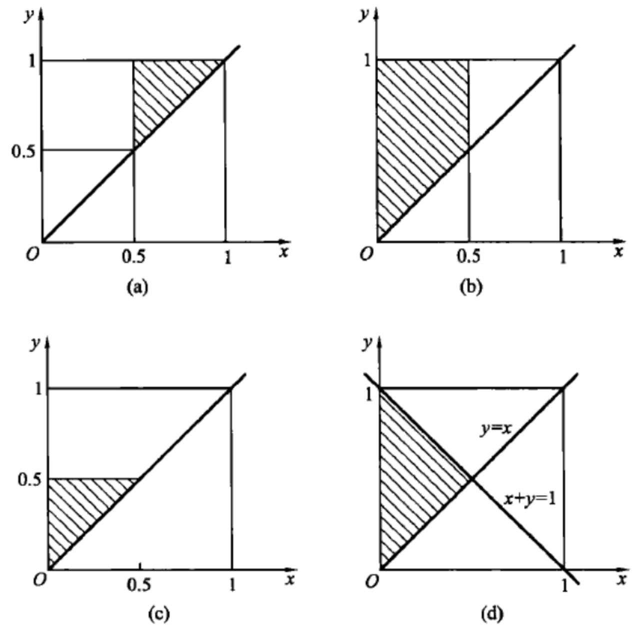
$$P(X<0.5)=6\int_{0}^{0.5}\int_{s}^{1}(1-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=6\int_{0}^{0.5}\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{8}.$$

又因为 $f(x,y)$ 的非零区域与 $\{y<0.5\}$ 的交集为图 (c) 阴影部分, 所以

$$P(Y<0.5)=6\int_{0}^{0.5}\int_{*}^{0.5}(1-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=6\int_{0}^{0.5}\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{8}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

(3) $f(x,y)$ 的非零区域与 $\{x+y<1\}$ 的交集为图 (d) 阴影部分, 所以

$$P(X+Y<1)=6\int_{0}^{0.5}\int_{x}^{1-x}(1-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=6\int_{0}^{0.5}\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$



练习 5. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,|y|<x;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：(1) 边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;(2) $P(X<1/2)$ 及 $P(Y>1/2)$.

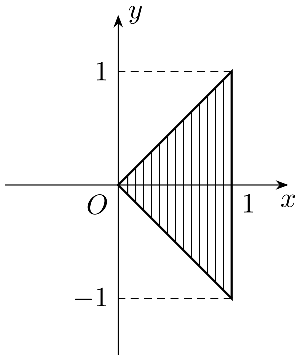


Figure 2: $f(x,y)$ 的非零区域

解. 首先识别 $f(x,y)$ 的非零区域, 它如图 2 所示.

(1) 求 $f_X(x)$: 当 $x \leqslant 0$ 或 $x \geqslant 1$ 时, 有 $f_X(x)=0$. 而当 $0<x<1$ 时, 有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-x}^{x}\mathrm{d}y=2x.$$

所以 X 的边际密度函数为 (见图 3)

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

再求 $f_Y(y)$: 当 $y \leqslant -1$ 或 $y \geqslant 1$ 时, 有 $f_Y(y)=0$. 而当 $-1<y<0$ 时, 有

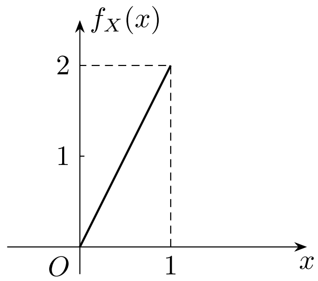


Figure 3: X 的边际密度函数

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_{-y}^{1}\mathrm{d}x=1+y,$$

当 $0<y<1$ 时, 有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_{y}^{1}\mathrm{d}x=1-y.$$

所以 Y 的边际密度函数为 (见图 4)

$$f_Y(y)=\begin{cases}1+y, & -1<y<0,\\ 1-y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

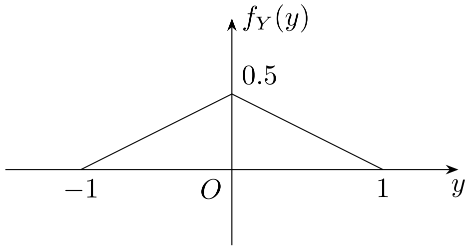


Figure 4: Y 的边际密度函数

(2) 要求的概率分别为

$$P(X<1/2)=\int_{-\infty}^{1/2} f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{1/2} 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$
$$P(Y>1/2)=\int_{1/2}^{+\infty} f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_{1/2}^{1}(1-y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{8}.$$

练习 6. 若 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

问 X 与 Y 是否相互独立?

解. 为判断 X 与 Y 是否独立, 只需看边际密度函数的乘积是否等于联合密度函数. 为此先求边际密度函数. 当 $x<0$ 或 $x>1$ 时, $f_X(x)=0$. 而当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, 有

$$f_X(x)=\int_x^1 8xy\,\mathrm{d}y=8x\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)=4x\left(1-x^2\right).$$

因此

$$f_X(x)=\begin{cases}4x\left(1-x^2\right), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同样, 当 $y<0$ 或 $y>1$ 时, $f_Y(y)=0$. 而当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时, 有

$$f_Y(y)=\int_0^x 8xy\,\mathrm{d}x=4y^3.$$

因此

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由此得 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不独立.

练习 7. 从 $(0,1)$ 中任取两个数, 求下列事件的概率.

(1) 两数之和小于 1.2 ;

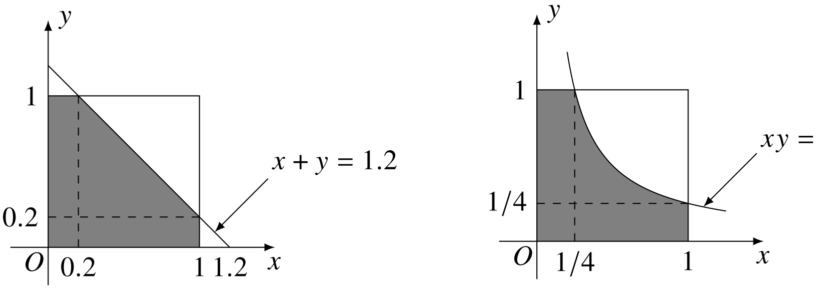
(2) 两数之积小于 $1/4$.

解. 分别记这两个数为 X 和 Y , 则 X 和 Y 独立, 且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布, (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 从图 5a可知

$$P(X+Y<1.2)=\int_0^{0.2}\int_0^1 \mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{0.2}^1\int_0^{1.2-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$=0.2+\int_{0.2}^1 (1.2-x)\,\mathrm{d}x=0.2+0.48=0.68.$$



(a) $\{x+y<1.2, 0<x,y<1\}$ (b) $\{xy<1/4, 0<x,y<1\}$

Figure 5: $f(x,y)$ 的非零区域与有关事件的交集部分

(2) 从图 5b可知

$$P(XY<1/4)=\int_0^{1/4}\int_0^1 \mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{1/4}^1\int_0^{1/(4x)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}+\int_{1/4}^1 \frac{1}{4x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4=0.5966.$$

练习 8. 设 (X,Y) 的联合分布列如下所示:

	Y		
X	-1	1	2
-1	$5/20$	$2/20$	$6/20$
2	$3/20$	$3/20$	$1/20$

试求:

(1) $Z_1=X+Y$ 的分布列;

(2) $Z_2=X-Y$ 的分布列;

(3) $Z_3=\max\{X,Y\}$ 的分布列.

解. 将 (X,Y) 及各个函数的取值对应列于同一表中:

P	$5/20$	$2/20$	$6/20$	$3/20$	$3/20$	$1/20$
(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$Z_1=X+Y$	-2	0	1	1	3	4
$Z_2=X-Y$	0	-2	-3	3	1	0
$Z_3=\max\{X,Y\}$	-1	1	2	2	2	2

然后经过合并整理就可得最后结果:

$Z_1 = X+Y$	-2	0	1	3	4
P	$5/20$	$2/20$	$9/20$	$3/20$	$1/20$

$Z_2 = X-Y$	-3	-2	0	1	3
P	$6/20$	$2/20$	$6/20$	$3/20$	$3/20$

$Z_3 = \max\{X, Y\}$	-1	1	2
P	$5/20$	$2/20$	$13/20$

练习 9. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量, 且 $X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu)$. 如果定义随机变量 Z 如下

$$Z = \begin{cases} 1, & 当 X \leqslant Y, \\ 0, & 当 X > Y. \end{cases}$$

求 Z 的分布列.

解. 因为 X, Y 相互独立, 所以其联合密度函数为

$$f(x,y) = f_x(x)f_y(y) = \begin{cases} \lambda\mu \mathrm{e}^{-\lambda x-\mu y}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

由此得

$$P(Z=1) = P(X \leqslant Y) = \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} \lambda\mu \mathrm{e}^{-\lambda x-\mu y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

$$P(Z=0) = P(X>Y) = 1 - P(X \leqslant Y) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

练习 10. 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p\left(x,y\right) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\left(x+y\right)}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

试求以下随机变量的密度函数 (1)$Z = (X+Y)/2$; (2)$Z = Y - X$.

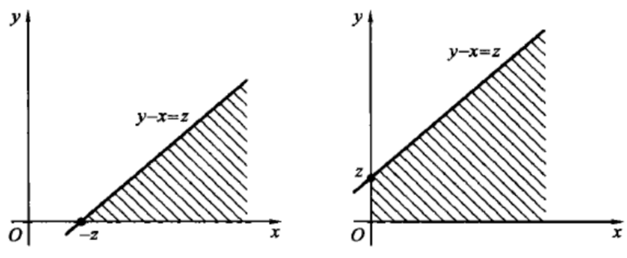
解. (1) 因为 $f(x,y)$ 的非零区域为 $x>0, y>0$, 所以当 $z \leqslant 0$ 时, $F_z(z) = 0$, 而当 $z>0$ 时,

$$F_z(z) = P(Z \leqslant z) = P(X+Y \leqslant 2z) = \int_0^{2z}\int_0^{2z-z} \mathrm{e}^{-(z+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2z} \mathrm{e}^{-z}(1-\mathrm{e}^{-(2z-x)})\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-2z} - 2z\mathrm{e}^{-2z},$$

所以, 当 $z \leqslant 0$ 时, 有 $f_z(z) = 0$; 而当 $z > 0$ 时, 有 $f_z(z) = 4z\mathrm{e}^{-2z}$.

(2) 当 $z \leqslant 0$ 时, $f(x,y)$ 的非零区域与 $\{y - x \leqslant z\}$ 的交集为图 (a) 阴影部分.



(a) (b)

$$F_z(z) = P(Z \leqslant z) = P(Y - X \leqslant z) = \int_0^{+\infty} \int_{y-z}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+y)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y} \mathrm{e}^{-(y-z)} \mathrm{d}y = \mathrm{e}^z/2,$$

$$f_z(z) = F_z'(z) = \mathrm{e}^z/2.$$

又因为当 $z > 0$ 时, $f(x,y)$ 的非零区域与 $\{y - x \leqslant z\}$ 的交集为图 (b) 阴影部分, 所以

$$F_z(z) = P(Z \leqslant z) = P(Y - X \leqslant z) = \int_0^{+\infty} \int_0^{x+z} \mathrm{e}^{-(z+y)} \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} (1 - \mathrm{e}^{-(x+z)}) \mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-z}/2,$$

$$f_z(z) = F_z'(z) = \mathrm{e}^{-z}/2.$$

由此得

$$f_z(z) = \mathrm{e}^{-|z|}/2, \quad -\infty < z < +\infty.$$