第七章 二元关系

主要内容

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 等价关系与划分
- 偏序关系

7.1 有序对与笛卡儿积

引例

- 四名学生：{杨，李，石，张}
- 三门课程：{数学建模，数字图像处理，离散数学}
- 可以使用什么样的数学结构来表示学生选课的情况?

集合 ——

例如{李, 离散数学}

7.1 有序对与笛卡儿积

引例

- 四名学生：{杨，李，石，张}
- 他们四人进行单循环羽毛球赛
- 希望使用一种数学结构来表示各场比赛的胜负关系

使用集合 ——

{李, 石} 和 {石, 李}谁是胜者?

- 需要在数学结构中体现序

7.1 有序对与笛卡儿积

定义7.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作$<x,y>$. 其中，x是它的第一元素，y是它的第二元素.

有序对性质：

(1) 有序性 $<x,y> \neq <y,x>$ （当$x \neq y$时）

(2) $<x,y>$与$<u,v>$相等的充分必要条件是

$$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v.$$

例，平面直角坐标系上，每一个点的坐标都是一个有序对.

例1 已知$<x+2, 4>=<5, 2x+y>$，求x和y

解 $x+2 = 5 \Rightarrow x = 3;$

$2x+y = 4 \Rightarrow y = -2.$

笛卡儿积

定义7.2 设A, B为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对. 所有这样的有序对构成的集合称作A与B的笛卡儿积，记作$A\times B$，符号化为

$$A\times B = \{<x,y>| x\in A\wedge y\in B\}.$$

例 平面直角坐标系就是笛卡尔积$R\times R$

例2 设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c\}$，则

$A\times B$

$=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A$

$=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>,<b,3>,<c,3>\}$

$A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$

$P(A)\times A = \{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

$P(A)\times B = \varnothing$

笛卡儿积的性质

1、若集合A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 为空集.

$$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$$

2、一般来说，笛卡儿积运算不满足交换律

$$A\times B\neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

3、一般来说，笛卡儿积运算不满足结合律

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

4、笛卡儿积运算对并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

5、$A\subseteq C\wedge B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$.

6、若 $|A|=m$, $|B|=n$, 则 $|A\times B|=mn$

性质证明

例3 证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in A\times(B\cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in B\cup C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in A\times B\vee <x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}
$$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

例4

(1) 证明 $A=B, C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$ 是否推出 $A=B, C=D$? 为什么?

解 (1) 任取 $<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in C \\
\Leftrightarrow\ & x\in B\wedge y\in D \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in B\times D
\end{aligned}
$$

(2) 不一定. 反例如下:

$A=\{1\}$， $B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则 $A\times C = B\times D$ 但是 $A \neq B$.

7.2 二元关系

- 四名学生: A = {杨，李，石，张}
- 三门课程: B = {数学建模，数字图像处理，离散数学}

所有的选课情况:

{ <杨，数学建模>，<杨，数字图像处理>，<杨，离散数学>，
<李，数学建模>，<李，数字图像处理>，<李，离散数学>，
<石，数学建模>，<石，数字图像处理>，<石，离散数学>，
<张，数学建模>，<张，数字图像处理>，<张，离散数学> }

实际的选课情况: $A \times B$的子集

单循环羽毛球比赛中，不可能出现<杨, 杨>，也不可能同时出现<李，石> 和 <石，李>.

实际的胜负情况: $A \times A$的子集

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一:

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系, 记作R.

如果$\langle x,y\rangle\in R$, 可记作xRy; 如果$\langle x,y\rangle\notin R$, 则记作$x\not R y$

例5: 判断$R=\{\langle 1,2\rangle, \langle a,b\rangle\}$, $S=\{\langle 1,2\rangle, a, b\}$是否是二元关系.

R是二元关系;

当a, b不是有序对时, S不是二元关系;

故有$1R2$, aRb, $a\not R c$等.

A到B的关系与A上的关系

定义7.4

设A, B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系，当$A=B$时则叫做A上的二元关系.

例6 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, 判断$R_1=\{<0,2>\}$，$R_2=A\times B$，$R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$是否是A到B的二元关系？

答 R_1, R_2, R_3, R_4是从A到B的二元关系；并且，R_3和R_4还是A上的二元关系.

计数：$|A|=n$，$|A\times A|=n^2$，$A\times A$的子集有2^{n^2}个. 所以A上有2^{n^2}个不同的二元关系.

例 $|A|=3$，则A上有=512个不同的二元关系.

A上重要关系

定义7.5 设 A 为集合,

(1) $\varnothing$是A上的关系，称为空关系

(2) 全域关系 $E_A = \{<x,y> \mid x \in A \land y \in A\} = A \times A$

恒等关系 $I_A = \{<x,x> \mid x \in A\}$

小于等于关系 $L_A = \{<x,y> \mid x,y \in A \land x \le y\}$, A为实数子集

整除关系 $D_A = \{<x,y> \mid x,y \in A \land x$整除$y\}$, A为非0整数子集

包含关系 $R_{\subseteq} = \{<x,y> \mid x,y \in A \land x \subseteq y\}$, A是集合族.

A上重要关系的实例

定义7.5 设 A 为集合,

全域关系 $E_A = \{\langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in A\} = A\times A$

恒等关系 $I_A = \{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$

例7 $A=\{1, 2\}$, 则

$$E_A = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$
$$I_A = \{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

A上重要关系的实例

定义7.5 设 A 为集合，

小于等于关系 $L_A = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\le y\}$, A为实数子集

整除关系 $D_A = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x整除y\}$, A为非0整数子集

例8 $A = \{1, 2, 3\}$, 则

$L_A = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

$D_A = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

A上重要关系的实例

定义7.5 设 A 为集合,

包含关系 $R_{\subseteq} = \{<x,y> \mid x,y \in \mathcal{A} \land x \subseteq y\}$, $\mathcal{A}$是集合族.

例9 $B=\{a, b\}$, $\mathcal{A} = P(B) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,
则 $\mathcal{A}$上的包含关系为?

$$R_{\subseteq} = \{<\varnothing,\varnothing>, <\varnothing,\{a\}>, <\varnothing,\{b\}>, <\varnothing,\{a,b\}>, <\{a\},\{a\}>,$$
$$<\{a\},\{a,b\}>, <\{b\},\{b\}>, <\{b\},\{a,b\}>, <\{a,b\},\{a,b\}>\}$$

类似的还可以定义:

大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等.

关系的表示

1. 关系矩阵

若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，$R$是$A$上的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵(元素只取0或1)$M_R = (r_{ij})_{n\times n}$, 其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow <x_i, x_j>\in R$$

2. 关系图

若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是从$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=<A, R>$, 其中$A$为结点集，$R$为边集. 如果$<x_i,x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从$x_i$到$x_j$的有向边.

注意:

- 关系矩阵适合表示有穷集A上的关系（可推广为从A到B的关系）
- 关系图适合表示有穷集A上的关系

实例

例10

$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$,

R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$