

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 «Программная инженерия» – Системное и  
прикладное программное обеспечение

**Курсовая работа**

Часть 1

По дисциплине «Дискретная математика»

**Вариант: 82**

Выполнил:

Васильев Артём Евгеньевич

Группа: 3119

Преподаватель:

Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург 2023 г.

Функция  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  принимает значение 1 при  $x_1x_2 + x_3x_4x_5 = 0, 5, 6, 7, 8$  и неопределенное значение при  $x_1x_2 + x_3x_4x_5 = 3$

**Таблица истинности**

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1x_2$	$x_3x_4x_5$	$x_1x_2$	$x_3x_4x_5$	$f$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0	2	0	2	0
3	0	0	0	1	1	0	3	0	3	d
4	0	0	1	0	0	0	4	0	4	0
5	0	0	1	0	1	0	5	0	5	1
6	0	0	1	1	0	0	6	0	6	1
7	0	0	1	1	1	0	7	0	7	1
8	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
9	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
10	0	1	0	1	0	1	2	1	2	d
11	0	1	0	1	1	1	3	1	3	0
12	0	1	1	0	0	1	4	1	4	1
13	0	1	1	0	1	1	5	1	5	1
14	0	1	1	1	0	1	6	1	6	1
15	0	1	1	1	1	1	7	1	7	1
16	1	0	0	0	0	2	0	2	0	0
17	1	0	0	0	1	2	1	2	1	d
18	1	0	0	1	0	2	2	2	2	0
19	1	0	0	1	1	2	3	2	3	1
20	1	0	1	0	0	2	4	2	4	1
21	1	0	1	0	1	2	5	2	5	1
22	1	0	1	1	0	2	6	2	6	1
23	1	0	1	1	1	2	7	2	7	0
24	1	1	0	0	0	3	0	3	0	d
25	1	1	0	0	1	3	1	3	1	0
26	1	1	0	1	0	3	2	3	2	1
27	1	1	0	1	1	3	3	3	3	1
28	1	1	1	0	0	3	4	3	4	1
29	1	1	1	0	1	3	5	3	5	1
30	1	1	1	1	0	3	6	3	6	0
31	1	1	1	1	1	3	7	3	7	0

**Аналитический вид**

КДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} x_5$$

ККНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

# Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

## Кубы различной размерности и простые импликанты

K <sup>0</sup> (f)		
m <sub>0</sub>	00000	
m <sub>5</sub>	00101	+
m <sub>6</sub>	00110	+
m <sub>12</sub>	01100	+
m <sub>20</sub>	10100	+
m <sub>3</sub>	00011	+
m <sub>10</sub>	01010	+
m <sub>17</sub>	10001	+
m <sub>24</sub>	11000	+
m <sub>7</sub>	00111	+
m <sub>13</sub>	01101	+
m <sub>14</sub>	01110	+
m <sub>19</sub>	10011	+
m <sub>21</sub>	10101	+
m <sub>22</sub>	10110	+
m <sub>26</sub>	11010	+
m <sub>28</sub>	11100	+
m <sub>15</sub>	01111	+
m <sub>27</sub>	11011	+
m <sub>29</sub>	11101	+

K <sup>1</sup> (f)		
m <sub>6</sub> -m <sub>7</sub>	0011X	+
m <sub>5</sub> -m <sub>7</sub>	001X1	+
m <sub>3</sub> -m <sub>7</sub>	00X11	
m <sub>12</sub> -m <sub>13</sub>	0110X	+
m <sub>12</sub> -m <sub>14</sub>	011X0	+
m <sub>10</sub> -m <sub>14</sub>	01X10	
m <sub>5</sub> -m <sub>13</sub>	0X101	+
m <sub>6</sub> -m <sub>14</sub>	0X110	+
m <sub>17</sub> -m <sub>19</sub>	100X1	
m <sub>20</sub> -m <sub>21</sub>	1010X	+
m <sub>20</sub> -m <sub>22</sub>	101X0	
m <sub>17</sub> -m <sub>21</sub>	10X01	
m <sub>24</sub> -m <sub>26</sub>	110X0	
m <sub>24</sub> -m <sub>28</sub>	11X00	
m <sub>20</sub> -m <sub>28</sub>	1X100	+
m <sub>3</sub> -m <sub>19</sub>	X0011	
m <sub>5</sub> -m <sub>21</sub>	X0101	+
m <sub>6</sub> -m <sub>22</sub>	X0110	
m <sub>10</sub> -m <sub>26</sub>	X1010	
m <sub>12</sub> -m <sub>28</sub>	X1100	+
m <sub>14</sub> -m <sub>15</sub>	0111X	+
m <sub>13</sub> -m <sub>15</sub>	011X1	+
m <sub>7</sub> -m <sub>15</sub>	0X111	+
m <sub>26</sub> -m <sub>27</sub>	1101X	
m <sub>28</sub> -m <sub>29</sub>	1110X	+
m <sub>19</sub> -m <sub>27</sub>	1X011	
m <sub>21</sub> -m <sub>29</sub>	1X101	+
m <sub>13</sub> -m <sub>29</sub>	X1101	

K <sup>2</sup> (f)	
m <sub>12</sub> -m <sub>13</sub> -m <sub>14</sub> -m <sub>15</sub>	011XX
m <sub>6</sub> -m <sub>7</sub> -m <sub>14</sub> -m <sub>15</sub>	0X11X
m <sub>5</sub> -m <sub>7</sub> -m <sub>13</sub> -m <sub>15</sub>	0X1X1
m <sub>20</sub> -m <sub>21</sub> -m <sub>28</sub> -m <sub>29</sub>	1X10X
m <sub>12</sub> -m <sub>13</sub> -m <sub>28</sub> -m <sub>29</sub>	X110X
m <sub>5</sub> -m <sub>13</sub> -m <sub>21</sub> -m <sub>29</sub>	XX101

Z(f)
00000
00X11
01X10
100X1
101X0
10X01
110X0
11X00
X0011
X0110
X1010
1101X
1X011
011XX
0X11X
0X1X1
1X10X
X110X
XX101

## Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Также вычеркнем столбцы — надмножества других столбцов. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы															
		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
		0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
		0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
		0	5	6	7	12	13	14	15	19	20	21	22	26	27	28	29
	00000	X															
A	00X11				X												
B	01X10							X									
C	100X1									X							
D	101X0										X		X				
E	10X01											X					
F	110X0													X			
G	11X00															X	
H	X0011									X							
I	X0110			X									X				
J	X1010													X			
K	1101X													X	X		
L	1X011									X					X		
M	011XX					X	X	X	X								
N	0X11X			X	X			X	X								
O	0X1X1		X		X		X		X								
P	1X10X										X	X				X	X
Q	X110X					X	X									X	X
R	XX101		X				X					X					X

Ядро покрытия:  $T = \{00000\}$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы															
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
		0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
		1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
		5	6	7	12	14	15	19	20	21	22	26	27	28	29		
A	00X11			X													
B	01X10					X											
C	100X1							X									
D	101X0								X		X						
E	10X01									X							
F	110X0											X					
G	11X00													X			
H	X0011							X									
I	X0110		X								X						
J	X1010											X					
K	1101X											X	X				
L	1X011							X					X				
M	011XX				X	X	X										
N	0X11X		X	X		X	X										
O	0X1X1	X		X			X										
P	1X10X								X	X					X	X	
Q	X110X				X										X	X	
R	XX101	X								X						X	

### Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = (O \vee R) (I \vee N) (A \vee N \vee O) (M \vee Q) (B \vee M \vee N) (M \vee N \vee O) (C \vee H \vee L) (D \vee P) \\ (E \vee P \vee R) (D \vee I) (F \vee J \vee K) (K \vee L) (G \vee P \vee Q) (P \vee Q \vee R)$$

Приведем выражение в ДНФ:

$$Y = CDKNQR \vee CIKMOP \vee DFLNQR \vee DHKNQR \vee DJLNQR \vee DKLNQR \vee \\ \vee FILMOP \vee HIKMOP \vee IJLMOP \vee IKLMOP \vee \dots \text{(термы высших рангов)}$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \begin{pmatrix} T \\ C \\ D \\ K \\ N \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00000 \\ 100X1 \\ 101X0 \\ 1101X \\ 0X11X \\ X110X \\ XX101 \end{pmatrix} \quad S_1^a = 26 \\ S_1^b = 33$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} T \\ C \\ I \\ K \\ M \\ O \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00000 \\ 100X1 \\ X0110 \\ 1101X \\ 011XX \\ 0X1X1 \\ 1X10X \end{pmatrix} \quad S_2^a = 26 \\ S_2^b = 33$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} T \\ D \\ F \\ L \\ N \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00000 \\ 101X0 \\ 110X0 \\ 1X011 \\ 0X11X \\ X110X \\ XX101 \end{pmatrix} \quad S_3^a = 26 \\ S_3^b = 33$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} T \\ D \\ H \\ K \\ N \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00000 \\ 101X0 \\ X0011 \\ 1101X \\ 0X11X \\ X110X \\ XX101 \end{pmatrix} \quad S_4^a = 26 \\ S_4^b = 33$$

$$C_5 = \begin{pmatrix} T \\ D \\ J \\ L \\ N \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00000 \\ 101X0 \\ X1010 \\ 1X011 \\ 0X11X \\ X110X \\ XX101 \end{pmatrix} \quad S_5^a = 26 \\ S_5^b = 33$$

$$C_6 = \begin{pmatrix} T \\ D \\ K \\ L \\ N \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00000 \\ 101X0 \\ 1101X \\ 1X011 \\ 0X11X \\ X110X \\ XX101 \end{pmatrix} \quad S_6^a = 26 \\ S_6^b = 33$$

$$C_7 = \begin{pmatrix} T \\ F \\ I \\ L \\ M \\ O \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00000 \\ 110X0 \\ X0110 \\ 1X011 \\ 011XX \\ 0X1X1 \\ 1X10X \end{pmatrix} \quad S_7^a = 26 \\ S_7^b = 33$$

$$C_8 = \begin{pmatrix} T \\ H \\ I \\ K \\ M \\ O \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00000 \\ X0011 \\ X0110 \\ 1101X \\ 011XX \\ 0X1X1 \\ 1X10X \end{pmatrix} \quad S_8^a = 26 \\ S_8^b = 33$$

$$C_9 = \begin{pmatrix} T \\ I \\ J \\ L \\ M \\ O \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00000 \\ X0110 \\ X1010 \\ 1X011 \\ 011XX \\ 0X1X1 \\ 1X10X \end{pmatrix} \quad S_9^a = 26 \\ S_9^b = 33$$

$$C_{10} = \begin{pmatrix} T \\ I \\ K \\ L \\ M \\ O \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00000 \\ X0110 \\ 1101X \\ 1X011 \\ 011XX \\ 0X1X1 \\ 1X10X \end{pmatrix} \quad S_{10}^a = 26 \\ S_{10}^b = 33$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 00000 \\ 100X1 \\ 101X0 \\ 1101X \\ 0X11X \\ X110X \\ XX101 \end{array} \right\}$$

$$S^a = 26$$

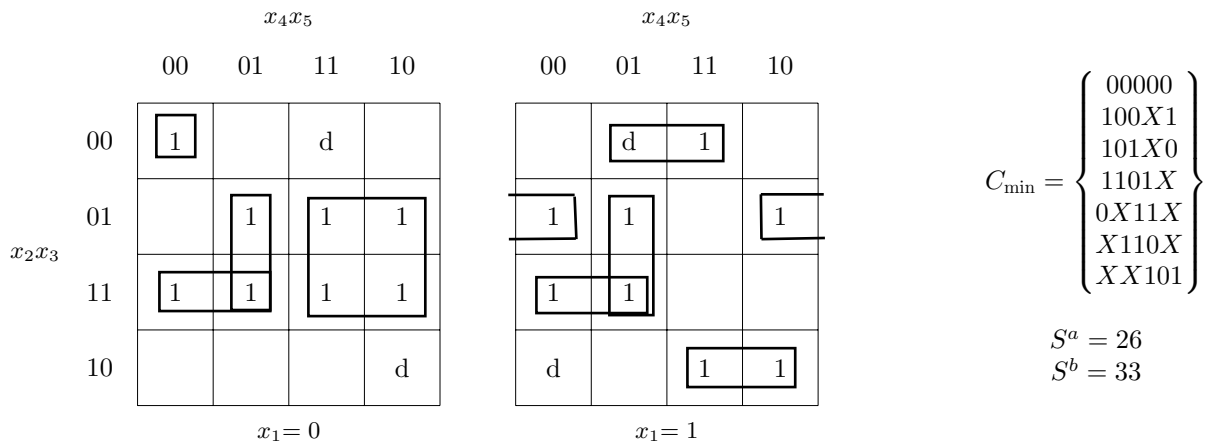
$$S^b = 33$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \vee x_2 x_3 \overline{x_4} \vee x_3 \overline{x_4} x_5$$

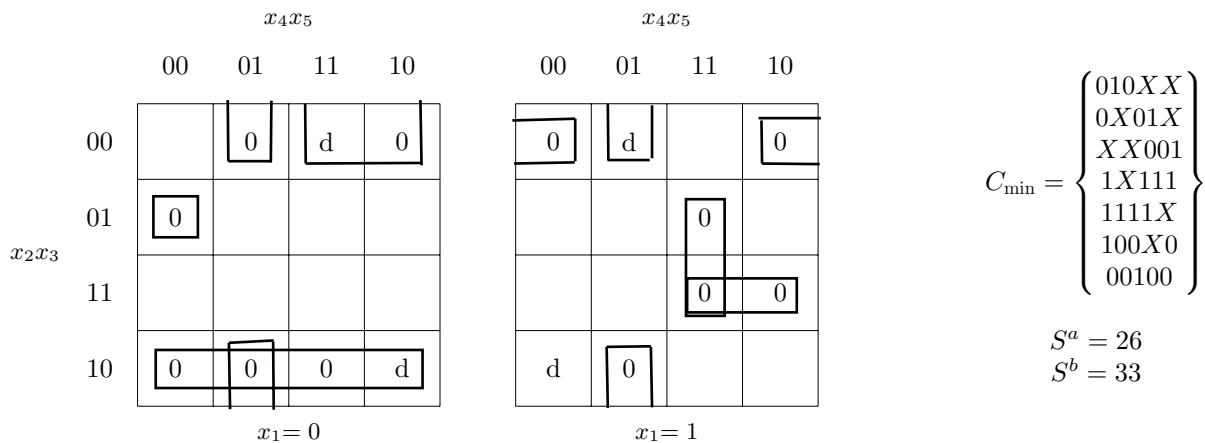
## Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \vee x_2 x_3 \overline{x_4} \vee x_3 \overline{x_4} x_5$$

Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) (x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

$$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)$$

## Преобразование минимальных форм булевой функции

### Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \vee x_2 x_3 \overline{x_4} \vee x_3 \overline{x_4} x_5 \quad S_Q = 33 \quad \tau = 2$$

$$f = x_1 \overline{x_3} (\overline{x_2} x_5 \vee x_2 x_4) \vee x_3 \overline{x_4} (x_2 \vee x_5) \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \quad S_Q = 31 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = \overline{x_2} \overline{x_5}$$

$$\overline{\varphi} = x_2 \vee x_5$$

$$f = x_1 \overline{x_3} (\overline{x_2} x_5 \vee x_2 x_4) \vee x_3 \overline{x_4} \overline{\varphi} \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \vee \varphi x_1 x_3 \vee \varphi \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4} \quad S_Q = 30 \quad \tau = 4$$

### Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) (x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 33 \quad \tau = 2$$

$$f = (x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_4}) (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_5) \quad S_Q = 28 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = \overline{x_2} \overline{x_5}$$

$$\overline{\varphi} = x_2 \vee x_5$$

$$f = (x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_4}) (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \varphi) (\overline{\varphi} \vee \overline{x_1} \vee x_3) (\overline{\varphi} \vee x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \quad S_Q = 27 \quad \tau = 4$$

## Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 1$$

## Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1 \overline{x_3} (\overline{x_2} x_5 \vee x_2 x_4) \vee x_3 \overline{x_4} \overline{\varphi} \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \vee \varphi x_1 x_3 \vee \varphi \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4} \quad (S_Q = 30, \tau = 4)$$

$$\varphi = \overline{x_2} \overline{x_5}$$

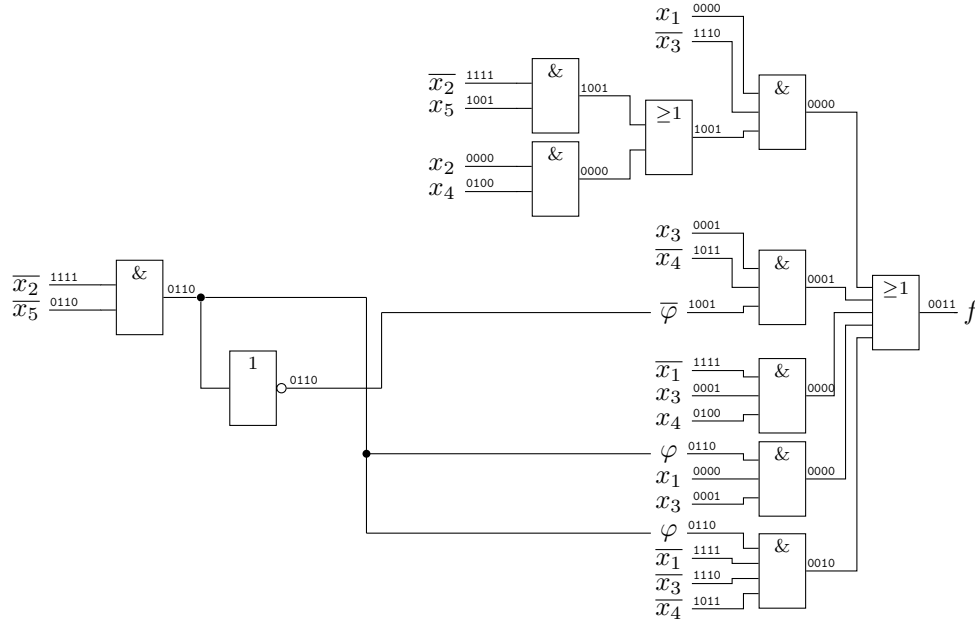
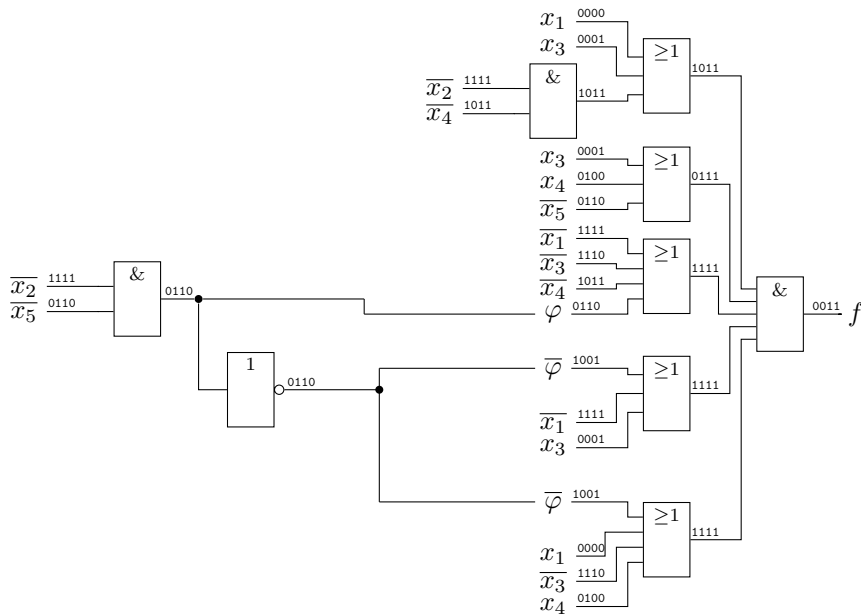


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_4}) (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \varphi) (\overline{\varphi} \vee \overline{x_1} \vee x_3) (\overline{\varphi} \vee x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \quad (S_Q = 27, \tau = 4)$$

$$\varphi = \overline{x_2} \overline{x_5}$$





## Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{\varphi} \overline{x_1} x_3 x_4 \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_5 \overline{\varphi} x_1 x_3 \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{\varphi} x_1 \overline{x_3} x_4 \quad (S_Q = 37, \tau = 6)$$

$$\varphi = \overline{x_2} \overline{x_5}$$

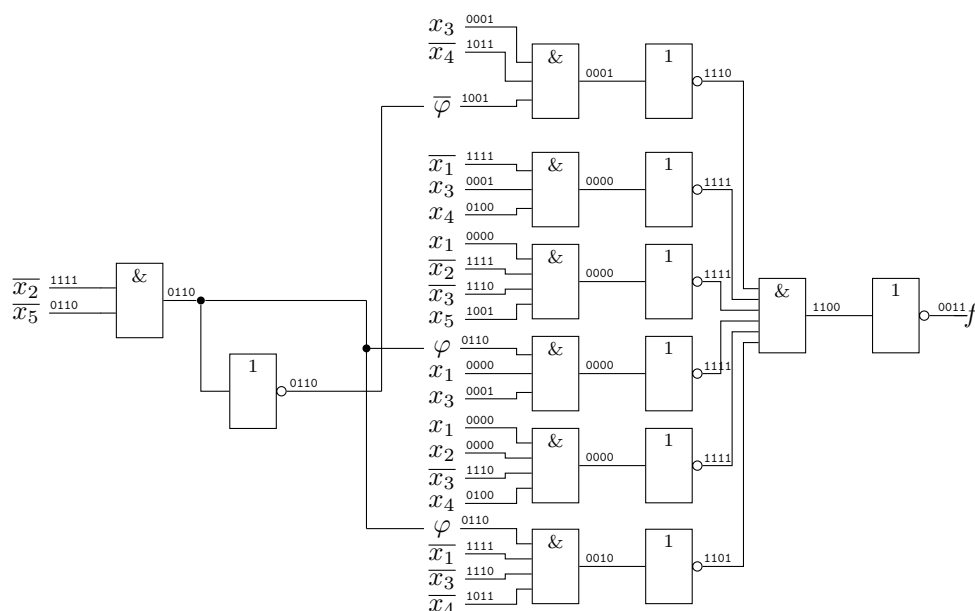
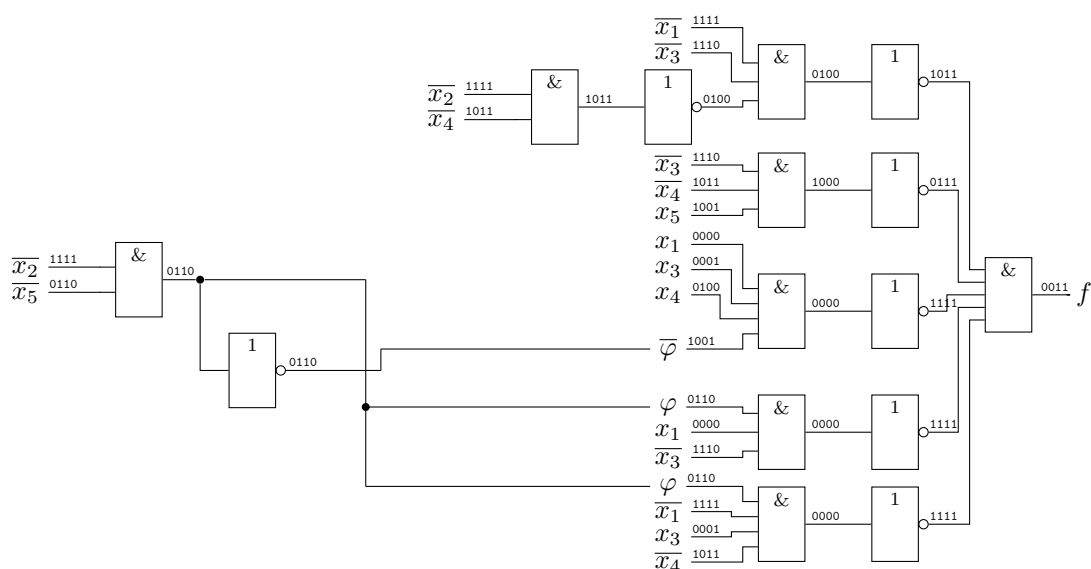


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \overline{x_1} x_3 x_4 \overline{\varphi} \overline{\varphi} x_1 \overline{x_3} \overline{\varphi} \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \quad (S_Q = 33, \tau = 5)$$

$$\varphi = \overline{x_2} \overline{x_5}$$



## Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = x_3 \overline{x_4} \overline{\varphi} \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{\varphi} x_1 x_3 x_1 x_2 x_5 x_2 x_4 \overline{\varphi} x_1 x_4 \quad (S_Q = 38, \tau = 8)$$

$$\varphi = \overline{x_2 x_5}$$

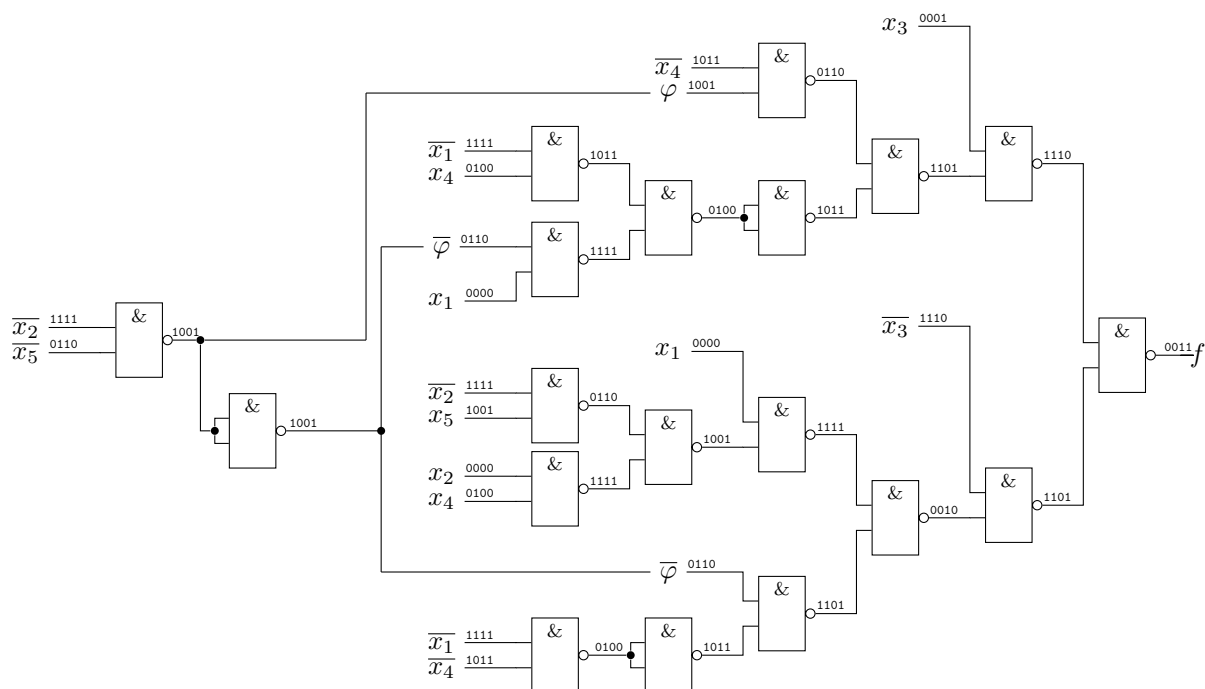


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_3} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_4} x_5 \overline{\varphi} x_1 x_3 x_1 \overline{x_4} \overline{\varphi} \overline{x_1} \overline{x_4} \quad (S_Q = 40, \tau = 9)$$

$$\varphi = \overline{x_2 x_5}$$

