

Introducción a la Dinámica de Estructuras

Jorge Eduardo Hurtado

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Profesor Asociado

Universidad Nacional de Colombia

Índice General

Presentación	ix
1 Conceptos básicos	1
1.1 Ecuaciones del movimiento	1
1.2 Acciones estructurales dinámicas	4
1.3 Grados de libertad	8
1.4 Clasificación de los sistemas y las acciones	12
2 Vibración libre de los sistemas sencillos	15
2.1 Vibraciones libres no amortiguadas	15
2.2 Interpretación vectorial	20
2.3 Solución en el dominio complejo	21
2.4 Consideraciones energéticas	25
2.5 Consideración del amortiguamiento	26
2.5.1 Caso $p = 0$: Amortiguamiento crítico	28
2.5.2 Caso $p < 0$: Amortiguamiento subcrítico	28
2.5.3 Caso $p > 0$: Amortiguamiento supercrítico	32
2.6 Determinación experimental del amortiguamiento	33
3 Vibración armónica de los sistemas sencillos	35
3.1 Vibración armónica sin amortiguamiento	36
3.2 Vibración armónica amortiguada	39
4 Vibraciones forzadas de los sistemas sencillos	47
4.1 Integral de Duhamel	47
4.2 Solución numérica de la integral de Duhamel	50
4.3 Método de la aceleración lineal	55
4.4 Espectros de respuesta	60
5 Propiedades estructurales de los sistemas múltiples	67
5.1 Ecuaciones matriciales del movimiento	68
5.2 Vigas de cortante	69
5.3 Pórticos planos	73

5.4	Pórticos espaciales con diafragma rígido	86
6	Vibración libre de los sistemas múltiples	99
6.1	Solución de la ecuación matricial del movimiento	99
6.2	Modos de vibración	104
6.3	Ortogonalidad de los modos	106
7	Vibraciones forzadas de los sistemas múltiples	115
7.1	Sistemas sin amortiguamiento	115
7.2	Consideración del amortiguamiento	122
7.3	Respuesta a los movimientos del suelo	124
7.4	Cálculo de la respuesta sísmica máxima	130
7.5	Ecuaciones particulares para el diseño sísmico de edificios	137
A	Nociones básicas sobre MATLAB	151
A.1	Características de MATLAB	151
A.2	Operaciones fundamentales	152
A.3	Vectores y matrices	153
A.4	Funciones	160
A.5	Bucles y decisiones condicionales	160
A.6	Programas	161
A.7	Archivos de datos y resultados	163
A.8	Figuras	163
	Bibliografía	165

Índice de Figuras

1.1	Modelo de un grado de libertad sin amortiguamiento.	2
1.2	Vibraciones producidas por maquinaria.	3
1.3	Registro del sismo de Loma Prieta.	5
1.4	Teoría del rebote elástico.	5
1.5	Propagación de la energía sísmica.	6
1.6	Acción sísmica horizontal.	7
1.7	Variación temporal del viento a diferentes alturas.	8
1.8	Variación temporal de la altura de las olas.	9
1.9	Modelo de un depósito elevado.	10
1.10	Disco sometido a rotación.	11
1.11	Masas de cuerpos rígidos.	11
1.12	Discretización de una viga simple.	12
1.13	Modelo espacial de un edificio.	12
1.14	Tipos de fuerza de restitución.	13
1.15	Proceso aleatorio.	14
2.1	Modelo de un grado de libertad sin amortiguamiento.	16
2.2	Vibración libre no amortiguada.	17
2.3	Ejemplo 2.1. - Descripción geométrica.	18
2.4	Ejemplo 2.1 – Historia de la respuesta no amortiguada.	19
2.5	Interpretación vectorial de la vibración libre.	20
2.6	Primer término de la solución compleja (2.23).	23
2.7	Valor total de la solución compleja (2.23).	24
2.8	Relación lineal fuerza-deformación.	26
2.9	Energías potencial y cinética.	27
2.10	Vibración libre con amortiguamiento crítico.	29
2.11	Vibración libre con amortiguamiento subcrítico.	30
2.12	Ejemplo 2.2 – Historia de la respuesta amortiguada.	32
3.1	Factor de amplificación - Sistema sin amortiguamiento.	37
3.2	Respuesta armónica para $u_e = 1$, $\beta = 0.9$, $\omega = \pi$ rad/s.	38
3.3	Interpretación vectorial de la vibración armónica.	40
3.4	Ángulo de desfase de la vibración armónica amortiguada.	40
3.5	Factor de amplificación - Sistema con amortiguamiento.	41

3.6	Factor de amplificación - Problema de masa rotatoria.	44
3.7	Ejemplo 3.1. - Equipo de masas rotatorias.	45
4.1	Deducción de la integral de Duhamel.	48
4.2	Ejemplo 4.1 - Carga externa.	50
4.3	Registro del sismo de Tokachi-oki.	54
4.4	Ejemplo 4.1 - Desplazamiento de respuesta.	55
4.5	Método de la aceleración lineal.	56
4.6	Ejemplo 4.3 - Carga externa.	60
4.7	Ejemplo 4.3 - Desplazamiento de respuesta.	61
4.8	Cálculo de un espectro de respuesta.	62
4.9	Espectros de desplazamiento del sismo de Tokachi-oki.	64
4.10	Espectros de velocidad del sismo de Tokachi-oki.	65
4.11	Espectros de aceleración del sismo de Tokachi-oki.	66
5.1	Modelo de dos grados de libertad sin amortiguamiento.	67
5.2	Construcción de la matriz de rigidez.	69
5.3	Pórtico modelado como viga de cortante.	70
5.4	Modelo de una viga de cortante.	72
5.5	Modelos de elementos finitos.	73
5.6	Rigideces elementales de una barra.	75
5.7	Construcción de la matriz de rigidez de un pórtico.	76
5.8	Construcción de la matriz de rigidez de un pórtico.	78
5.9	Ejemplo 5.1 - Descripción geométrica.	80
5.10	Ejemplo 5.1 - Numeración global.	81
5.11	Ejemplo 5.1 - Interpretación de la matriz condensada.	85
5.12	Diafragma flexible en un plano ortogonal.	86
5.13	Diafragmas flexible y rígido en su plano.	87
5.14	Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido.	88
5.15	Sobre el grado de libertad torsional.	89
5.16	Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido.	91
5.17	Deducción de la matriz de masa.	92
5.18	Ejemplo 5.2 - Descripción estructural.	94
6.1	Ejemplo 6.1 - Sistema de dos grados de libertad.	100
6.2	Ejemplo 6.1 - Primera solución.	103
6.3	Ejemplo 6.1 - Segunda solución.	104
6.4	Ejemplo 6.5 - Modos y frecuencias de vibración.	113
6.5	Ejemplo 6.6 - Modos de vibración.	114
7.1	Ejemplo 7.1 - Viga de cortante.	119
7.2	Ejemplo 7.1 - Carga externa.	120
7.3	Ejemplo 7.1 - Desplazamientos de respuesta.	121
7.4	Ejemplo 7.1 - Composición del desplazamiento.	123

7.5	Desplazamientos estáticos producidos por movimientos del suelo - Pórtico plano.	124
7.6	Desplazamientos estáticos producidos por movimientos del suelo - Pórtico espacial.	126
7.7	Ejemplo 7.2 - Desplazamientos de respuesta.	129
7.8	Ejemplo 7.2 - Velocidades y aceleraciones de respuesta.	130
7.9	Ejemplo 7.2 - Desplazamientos máximos.	131
7.10	Espectro de desplazamiento del sismo de Tokachi-oki.	135
7.11	Espectros de diseño de la norma sísmica colombiana.	137
7.12	Fuerzas sísmicas de diseño.	141
7.13	Ejemplo 7.5 - Descripción.	143
7.14	Ejemplo 7.5 - Fuerzas de diseño.	147
A.1	Ejemplo de creación de una figura bidimensional	163

Presentación

La Dinámica de Estructuras es un área del análisis mecánico de las construcciones que estudia el efecto de las acciones externas que producen vibraciones. Su desarrollo comienza en el siglo XIX con las investigaciones de Lord Rayleigh sobre los efectos del sonido en cuerpos elásticos, las cuales aún tienen validez. Actualmente, esta área de la Mecánica presenta un estado avanzado de desarrollo, pues se ha logrado establecer métodos de cálculo para estructuras lineales o no lineales sometidas a acciones deterministas o aleatorias. Por su naturaleza compleja y especializada muchos de estos desarrollos suelen estudiarse en cursos de posgrado. Sin embargo, dada la importancia del tema en zonas sísmicas, conviene realizar un curso introductorio en el currículo básico de Ingeniería Civil, ya que las acciones sísmicas suelen dominar ampliamente el diseño de estructuras, tanto en su concepción como en los valores numéricos definitivos. Por este motivo se ha escrito este texto como apoyo a un curso de tal naturaleza.

El texto se encuentra dividido en siete capítulos. En el primero se presentan algunos conceptos básicos sobre acciones dinámicas y modelos estructurales. En el segundo capítulo se aborda el análisis de vibraciones libres de sistemas de un grado de libertad, mientras que en el tercero se hace lo correspondiente a vibraciones de tipo armónico. En el cuarto capítulo se estudia la solución general de sistemas de un grado, tanto de forma analítica como numérica. Los capítulos restantes corresponden a sistemas de varios grados de libertad, con cierto énfasis en lo que corresponde al análisis sísmico de la respuesta de estructuras de edificación. En particular, el capítulo quinto está dedicado a la construcción de los modelos estructurales adecuados al caso dinámico, mientras que el sexto y el séptimo versan sobre la respuesta dinámica de sistemas de varios grados de libertad en forma libre y forzada, respectivamente.

El texto se acompaña de un diskette en el cual se encuentran diversos programas de cálculo escritos en lenguaje MATLAB, así como algunos archivos de datos de acelerogramas de sismos importantes ocurridos en diversas partes del mundo. Se ha elegido el lenguaje MATLAB debido a su facilidad de programación, que fundamentalmente radica en su manejo de matrices y vectores como objetos, lo que hace que los programas tengan una extensión mucho menor que sus equivalentes en lenguajes corrientes, como PASCAL, BASIC, C o FORTRAN. Esto permite que el estudio de los programas pueda realizarse fácilmente en armonía con el de los desarrollos matemáticos y de los ejemplos; por esta razón se ha incluido el listado de todos los programas en las partes convenientes del texto como parte integral de éste. Asimismo, MATLAB tiene la ventaja sobre cualquier lenguaje de los mencionados de permitir trabajar en el modo consola, adicionalmente al uso directo de los programas. Finalmente, dispone de

una gran versatilidad para la presentación gráfica de los resultados, lo que en Dinámica de Estructuras resulta absolutamente necesario. Al final del texto se ha incluido un Apéndice que contiene una guía mínima de supervivencia para el uso de este lenguaje.

Capítulo 1

Conceptos básicos

Este capítulo introductorio comienza con la deducción de las ecuaciones del movimiento dinámico de un sistema sencillo (es decir, de un grado de libertad). Luego se describen brevemente las principales cargas dinámicas que actúan sobre las estructuras y se discute la utilidad de los sistemas sencillos para representar el comportamiento de estructuras más complejas. Finalmente, se introduce una clasificación de los tipos de sistemas estructurales y de las acciones dinámicas que actúan sobre ellos.

1.1 Ecuaciones del movimiento

La segunda ley de la mecánica de Newton establece que la resultante de un sistema de fuerzas que actúan en un cuerpo en movimiento es igual al cambio del momentum del mismo. El momentum μ está definido en física como el producto de la masa m por la velocidad v ,

$$\mu = mv = m \frac{du}{dt} \quad (1.1)$$

donde u denota el desplazamiento del cuerpo. Por tanto, llamando f a la fuerza resultante, la ley de Newton se expresa matemáticamente en la forma siguiente:

$$f(t) = \frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m \frac{du}{dt} \right) \quad (1.2)$$

Si, como es usual en mecánica de sólidos, la masa se supone constante en el tiempo, se tiene que

$$f(t) = m \frac{d^2u}{dt^2} = m\ddot{u}(t) \quad (1.3)$$

donde \ddot{u} es la aceleración del cuerpo. (En lo que sigue se hará uso casi exclusivo de este tipo de notación de las derivadas temporales). La anterior es la expresión más conocida de la segunda ley de Newton, que sólo es válida para sistemas cuya masa permanece constante. La fuerza $f_I(t) = m\ddot{u}(t)$ se conoce con el nombre de *fuerza de inercia*, por lo que está asociada a

la tendencia del cuerpo a conservar su estado de movimiento o de reposo, conocida en física con dicho nombre.

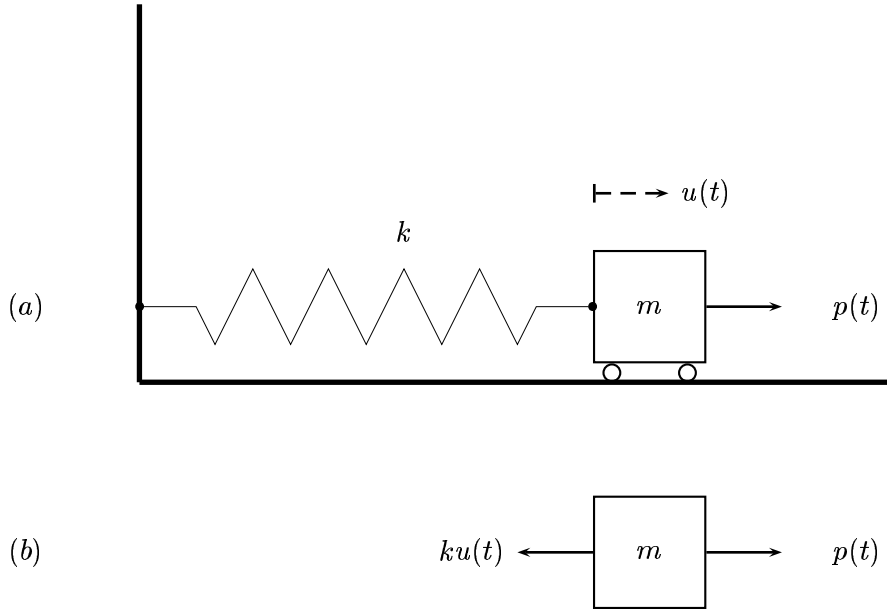


Figura 1.1: Modelo de un grado de libertad sin amortiguamiento. (a): Esquema. (b): Diagrama de cuerpo libre.

Consideremos el sistema ilustrado en la figura 1.1, en el que se tiene una fuerza externa variable con el tiempo $p(t)$, una masa de valor m y un resorte elástico de rigidez k que fija al sistema a un apoyo fijo. El diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura indica que la resultante de fuerzas aplicadas es

$$f(t) = p(t) - ku(t) \quad (1.4)$$

De acuerdo a la ley de Newton, esta fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración:

$$f(t) = p(t) - ku(t) = m\ddot{u}(t) \quad (1.5)$$

de donde se concluye que

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (1.6)$$

La solución de la ecuación diferencial anterior permite conocer las historias de desplazamiento y aceleración del sistema, a partir de las cuales pueden calcularse las historias temporales de las fuerzas internas, tales como la desarrollada en el resorte en este caso sencillo:

$$f_R(t) = ku(t) \quad (1.7)$$

La fuerza $f_R(t)$, igual en este caso a $ku(t)$, se conoce con el nombre de *fuerza de restitución*, ya que tiene la tendencia a restituir la forma original de la estructura, que en este caso es un simple resorte.

El llamado *principio de D'Alembert* no es otra cosa que una presentación diferente de la segunda ley de Newton propuesta por D'Alembert con el fin de asimilarla a la primera ley de Newton, según la cual todo cuerpo se encuentra en estado de reposo o de movimiento uniforme a menos que una fuerza externa actúe sobre él. Esta ley gobierna el análisis estático de estructuras, toda vez que implica que la resultante de fuerzas es nula, lo que corresponde a un estado de equilibrio. La primera ley de Newton puede, en consecuencia, abarcar la segunda si se toma como resultante a la fuerza $f(t) - m\ddot{u}$ en lugar de la fuerza $f(t)$. De esta manera se tiene

$$f(t) - m\ddot{u}(t) = 0 \quad (1.8)$$

lo que equivale al resultado anterior obtenido de manera directa por medio de la segunda ley de Newton.

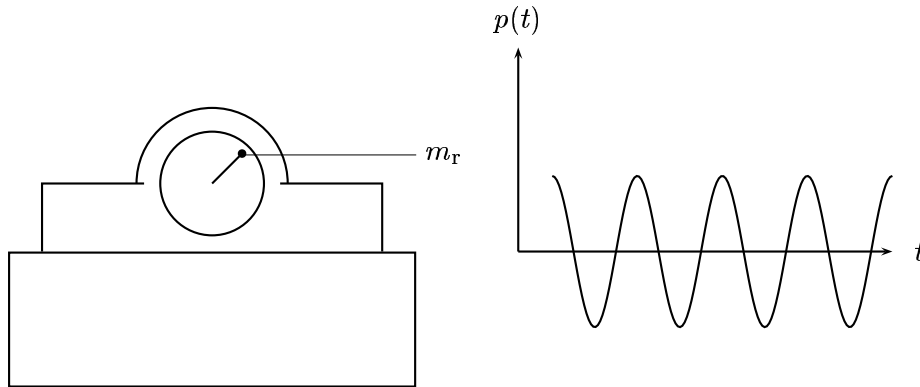


Figura 1.2: Vibraciones producidas por maquinaria.

1.2 Acciones estructurales dinámicas

Las principales acciones dinámicas que actúan sobre las estructuras son las siguientes:

1. *Motores y equipos mecánicos.* La actividad de máquinas en las cuales hay rotación de émbolos produce vibraciones sobre los elementos estructurales que las soportan, sean losas o cimientos. El valor y las direcciones de esta acción dependen del tipo de equipo mecánico. Así, algunos producen una carga armónica, como la indicada en la figura 1.2, debido a la rotación de una masa excéntrica. Como resultado de la acción, evidentemente, se tendrán desplazamientos horizontales, verticales y rotacionales en la estructura. Otros equipos consisten de dos masas iguales y excéntricas que rotan en sentidos opuestos, por lo cual se anula la componente horizontal del movimiento. En ambos casos la carga $p(t)$ tiene la forma

$$p(t) = m_r e \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t \quad (1.9)$$

donde m_r es la masa total rotatoria, e es la excentricidad y $\bar{\omega}$ es la frecuencia de la rotación. Finalmente, es importante mencionar que otros equipos se apartan de este esquema y producen acciones en forma de series de pulsos.

2. *Terremotos.* Los movimientos sísmicos del suelo constituyen una de las acciones dinámicas más severas entre las que actúan sobre las estructuras. En la figura 1.3 se representa un registro del factor determinante de la carga externa $p(t)$, cual es la aceleración del suelo, que denotaremos como \ddot{u}_s . Se observa que la acción carece de ley matemática, por lo que se puede considerar como la realización de un proceso aleatorio.

Como es bien sabido, los sismos se producen por el deslizamiento súbito de sectores de la corteza terrestre a lo largo de las fracturas que ésta presenta en las llamadas *fallas geológicas* y en las zonas de subducción de placas tectónicas. En la zona donde se produce el deslizamiento (llamada *hipocentro*) se libera una energía de deformación acumulada durante un largo período de tiempo por causa de la tendencia opuesta de los dos sectores de la corteza. La figura 1.4 ilustra este proceso de acumulación y ruptura, explicado por la *teoría del rebote elástico*. De esta manera, desde la zona del hipocentro se irradia la energía cinética, en la que se ha transformado la energía de deformación acumulada, en todas las direcciones del espacio. Las ondas atraviesan diversas capas de rocas y suelos, en las cuales sufren complejos fenómenos de reflexión y refracción (figura 1.5) hasta llegar a la superficie terrestre, donde se manifiestan en forma de un movimiento del suelo, cuya aceleración se presenta como un tren de ondas de diferente frecuencia superpuestas de manera errática, como ilustra la figura 1.3. La fuerza que produce esta aceleración en la base se puede deducir fácilmente a partir del esquema mostrado en la figura 1.6. Al comparar este esquema con el de la figura 1.1, se observa que el eje vertical de referencia se ha desplazado hacia la derecha la cantidad $u_s(t)$. Esto indica que la masa del sistema sufre un desplazamiento total $u(t) + u_s$, por lo que la aceleración total vale $\ddot{u}(t) + \ddot{u}_s(t)$. Por otra parte, la estructura, representada por el

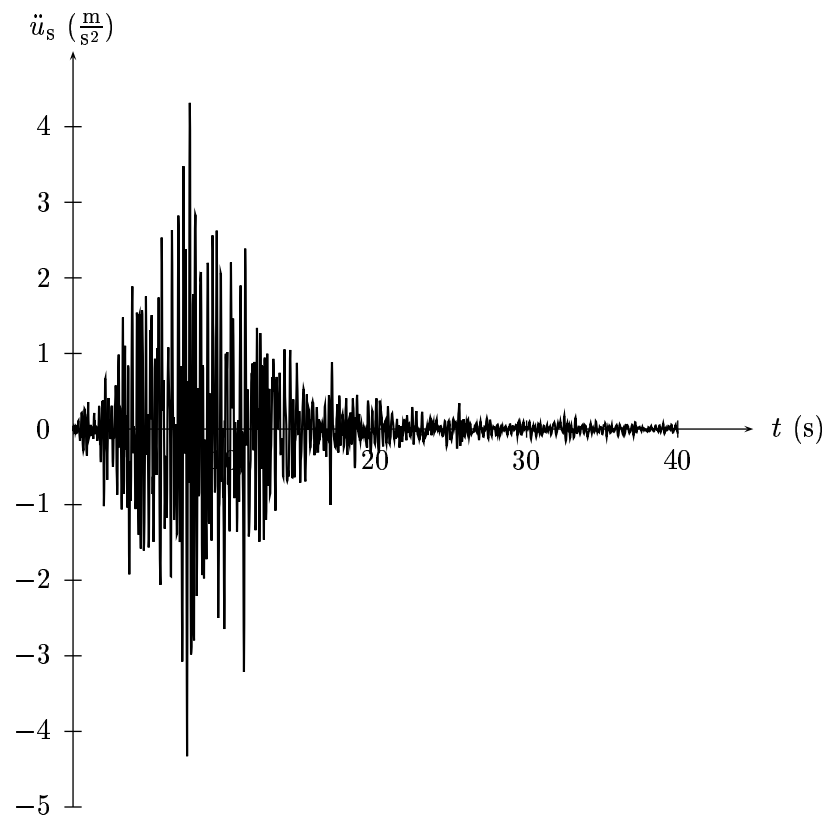


Figura 1.3: Registro del sismo de Loma Prieta (Estación Santa Cruz, componente NS).

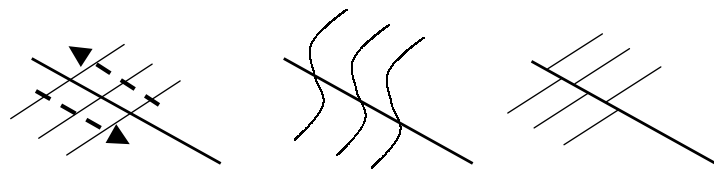


Figura 1.4: Teoría del rebote elástico.

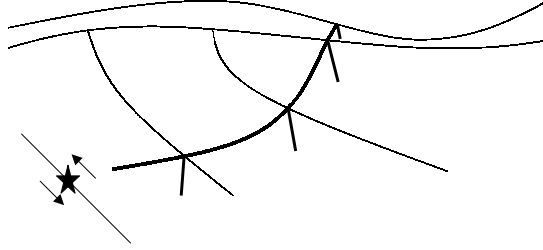


Figura 1.5: Propagación de la energía sísmica.

resorte de rigidez k sólo sufre un desplazamiento de valor $u(t)$. Por tanto, como no hay fuerzas externas aplicadas, la ecuación de equilibrio es

$$f(t) = -ku(t) = m[\ddot{u}(t) + \ddot{u}_s(t)] \quad (1.10)$$

por lo cual

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_s(t) \quad (1.11)$$

Esto indica que la carga sísmica equivalente es igual a

$$p(t) \equiv -m\ddot{u}_s(t) \quad (1.12)$$

3. *Vientos.* Los vientos fuertes ejercen una presión dinámica sobre las estructuras, la cual está básicamente determinada por su velocidad $v(t)$. Un ejemplo de la variación temporal de ésta aparece en la figura 1.7, en la que se muestran tres registros obtenidos en diferentes alturas. En general la velocidad media crece con la altura debido a que en esa medida se pierde paulatinamente el efecto de freno que ejercen los obstáculos naturales y urbanos. Después de cierto nivel (que depende de la naturaleza y forma de dichos obstáculos) se puede considerar que la velocidad media ya no depende más de la elevación sobre la tierra. Puede verse que esta acción también es de tipo aleatorio.

La fuerza que ejerce el viento está dada por

$$p(t) = \frac{1}{2}c_d\rho av^2(t) \quad (1.13)$$

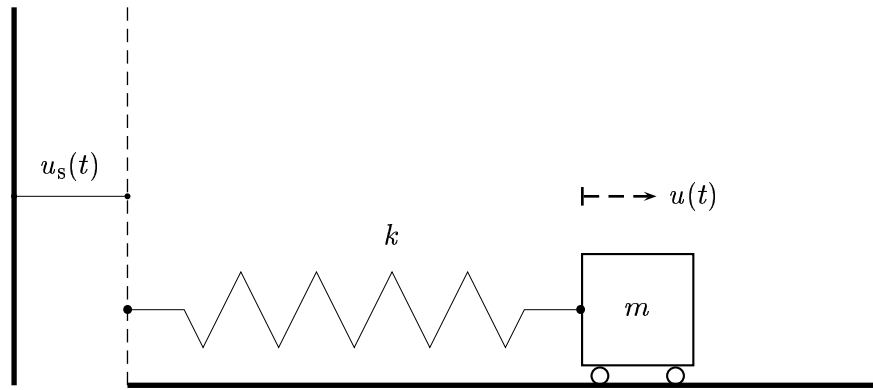


Figura 1.6: Acción sísmica horizontal.

donde ρ es la densidad del aire, a es el área de la estructura que se encuentra expuesta al empuje del viento (normal a su dirección) y c_d es un coeficiente que depende de los obstáculos mencionados y que, para estructuras especiales, se suele determinar de manera experimental en túneles de viento.

4. *Oleaje*. Esta acción debe ser tenida en consideración por todo tipo de estructuras sometida a empujes del agua en mares y ríos. La fuerza ejercida por el oleaje depende estrechamente de la altura de las olas $h(t)$, la cual tiene una variación con el tiempo como la representada en la figura 1.8.

Otras acciones dinámicas, que deben ser consideradas en casos especiales, son las siguientes:

1. *Impacto*. Problemas de impacto sobre las estructuras surgen principalmente de accidentes, tales como los causados por choque repentino de vehículos contra soportes de edificios, puentes, etc.
2. *Paso de vehículos o personas*. Esta acción, generalmente débil, puede provocar a largo plazo problemas de fatiga en los materiales estructurales, por lo cual puede considerarse potencialmente nociva.
3. *Explosiones*. Esta acción se caracteriza, en general, por ser de muy corta duración, en la cual se presentan dos fases claramente diferentes, una de expansión y otra de contracción.

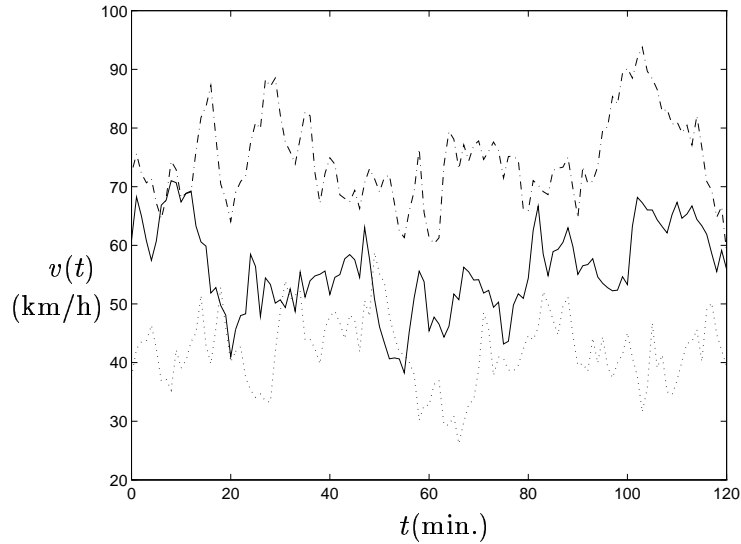


Figura 1.7: Variación temporal del viento a diferentes alturas.

1.3 Grados de libertad

La noción de *grado de libertad* se ha tornado de uso corriente en el análisis estático de estructuras, principalmente a raíz del auge del cálculo matricial por medio de modelos de barras o de elementos finitos. En este campo, un grado de libertad corresponde a cualquier movimiento posible de los nodos de los elementos en una dirección no restringida. Obviamente, cualquier estructura posee un número infinito de grados de libertad, debido a su continuidad, pero el proceso de discretización en elementos supone un número finito, aunque elevado, de ellos. En el caso dinámico, el modelo empleado hasta aquí está basado en la suposición de que la rigidez se concentra en un resorte que carece de masa, mientras que la masa se ubica en un cuerpo rígido que no se deforma. Esto comporta una separación ideal de la masa y la rigidez.

En estructuras tales como edificios de una sola planta, depósitos elevados, etc., es claro que las masas presentan de por sí una importante concentración en ciertos sitios, por lo cual basta transferir las masas restantes en los puntos de alta concentración. Así, en el depósito mostrado en la figura 1.9, un modelo razonablemente preciso tendría como única masa la correspondiente al depósito más la de la estructura, mientras que la rigidez estaría dada por la fuerza estática que habría que aplicar en el punto de colocación de la masa para causar un desplazamiento unitario de la estructura. De esta manera, a pesar de que desde el punto de

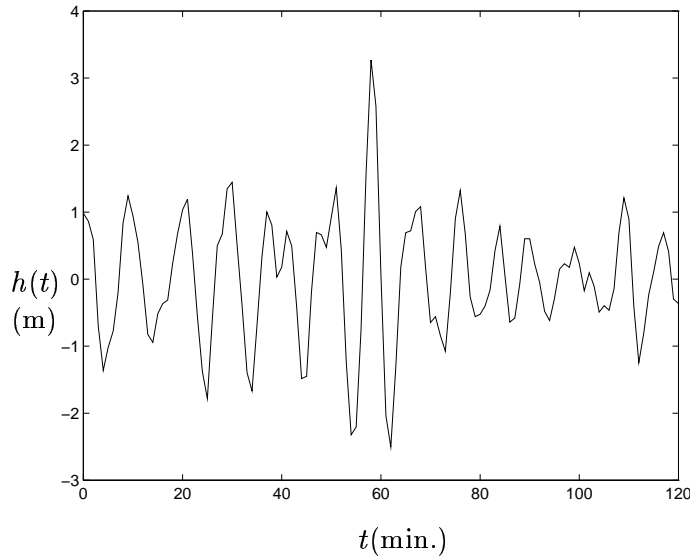


Figura 1.8: Variación temporal de la altura de las olas.

vista estático la estructura presente un elevado número de grados de libertad, desde el punto de vista dinámico se puede calcular con suficiente precisión como un sistema sencillo.

Lo anterior ilustra la importancia que tienen los sistemas de un grado de libertad en Dinámica de Estructuras. En síntesis, el sistema está compuesto de un resorte sin masa, en el que se concentra toda la información sobre la rigidez de la estructura en el parámetro k , y un cuerpo rígido caracterizado por m , que corresponde a toda la masa de la estructura. Sobre esta última variable, sin embargo, resulta necesario anotar que debe entenderse no sólo las masas de tipo traslacional, que denotaremos como m , sino también las de tipo rotacional, \tilde{m} . La figura 1.10, por ejemplo, muestra un disco que gira sobre un soporte circular. En dicho caso, si se desprecia la inercia rotacional del soporte, la masa equivale al momento polar de inercia del disco, mientras que la rigidez es la correspondiente a la torsión del soporte. Esto es,

$$\begin{aligned}\tilde{m} &\equiv \frac{\gamma \pi d^4 t}{32} \\ k &\equiv \frac{GJ}{l}\end{aligned}\tag{1.14}$$

donde γ es el peso específico del material del disco, t su espesor, d su diámetro, G el módulo

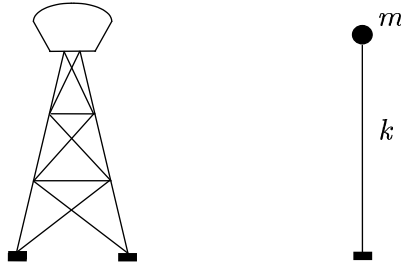


Figura 1.9: Modelo de un depósito elevado.

de rigidez del material del soporte, l la longitud de éste, J el momento polar de inercia de la sección transversal del soporte. Si el diámetro de ésta es δ , el valor de k resulta igual a

$$k = \frac{E}{2(1 + \nu)} \times \frac{\pi \delta^4}{32l} \quad (1.15)$$

La figura 1.11 reúne los valores de las masas traslacionales y rotacionales de diferentes áreas sencillas, en las cuales se pueden descomponer áreas más complejas que se encuentran frecuentemente en la práctica. Las masas rotacionales de estas últimas se pueden calcular aplicando los principios conocidos de la mecánica.

Los sistemas que no pueden ser caracterizados como sencillos se denominan *sistemas de varios grados de libertad* o, simplemente, *sistemas múltiples*. Por ejemplo, en una viga simple (figura 1.12a) cada infinitésimo de su longitud tiene las propiedades de masa y rigidez distribuidas de manera continua. Sin embargo, siempre resulta posible discretizar la estructura en elementos finitos como indica la figura 1.12b, en la que el modelo tendría tres grados de libertad. Como cabe esperar, a mayor número de masas se obtiene una mejor precisión en el cálculo con respecto al resultado exacto, que se calcula aplicando los conceptos y ecuaciones de la dinámica de medios continuos. Sin embargo, en vista de que sólo se puede obtener solución analítica exacta para situaciones muy simples, la tendencia actual para el cálculo de todo tipo de estructuras que no puedan ser modeladas como sistemas sencillos es la de modelarlos directamente como sistemas múltiples, los cuales se calculan por medio del método de los elementos finitos. En estos modelos se disponen cuerpos rígidos con masas traslacionales y o rotacionales según el caso, en puntos seleccionados. La figura 1.13, por ejemplo, ilustra un modelo típico de edificio sometido a cargas de viento o sismo, en el que en cada piso se

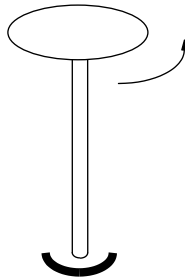


Figura 1.10: Disco sometido a rotación.

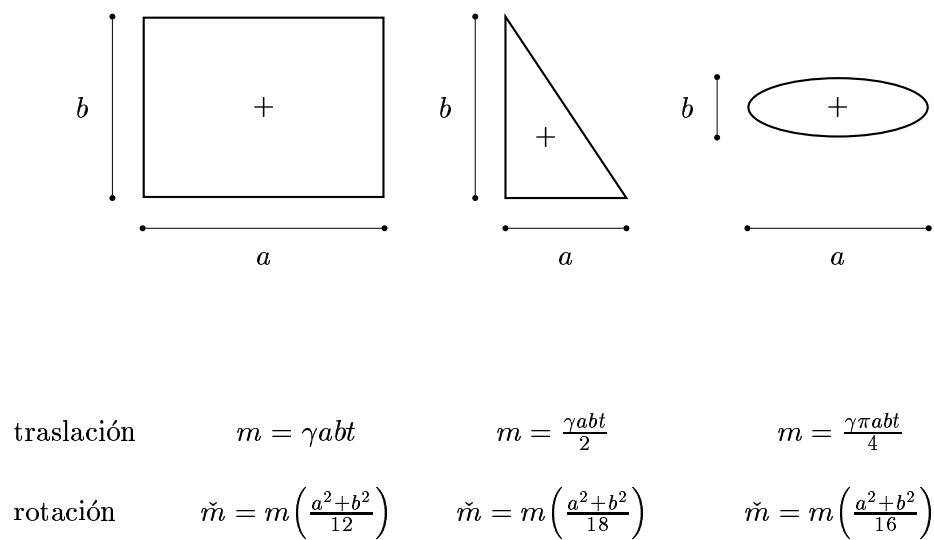


Figura 1.11: Masas de cuerpos rígidos.

disponen tres grados de libertad, a saber, dos traslacionales y un rotacional.

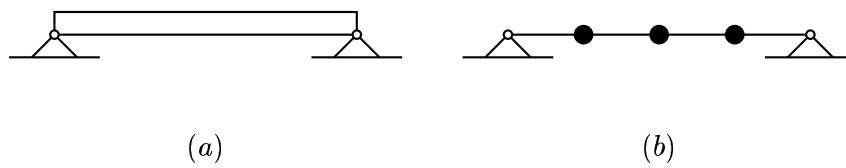


Figura 1.12: Discretización de una viga simple. (a): Modelo continuo. (b): Modelo discreto.

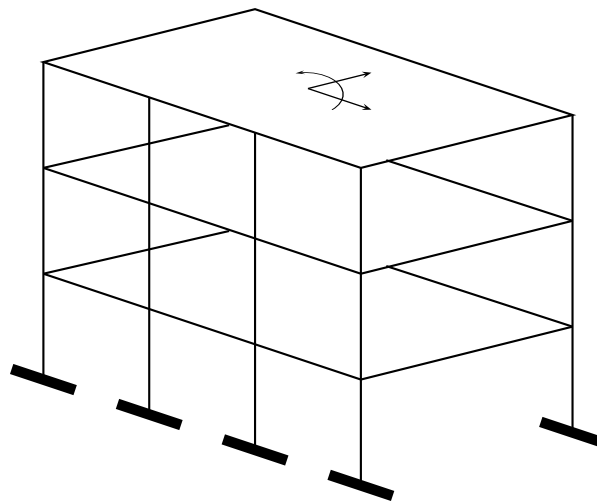


Figura 1.13: Modelo espacial de un edificio.

1.4 Clasificación de los sistemas y las acciones

En lo tratado hasta ahora se ha supuesto siempre que el material de la estructura es elástico-lineal, por lo que cumple la ley de Hooke y, en consecuencia, el principio de proporcionalidad.

El significado de estos términos es el siguiente: Un material es *elástico* cuando recupera su forma original después de retirar la carga aplicada; si, además, existe una proporcionalidad entre fuerzas y desplazamientos, se dice que el material es *lineal*. En este caso, el diagrama fuerza de restitución/desplazamiento es una línea recta (ver figura 1.14a) ya que $f_R(t)$ es directamente proporcional a $u(t)$:

$$f_R(t) = ku(t) \quad (1.16)$$

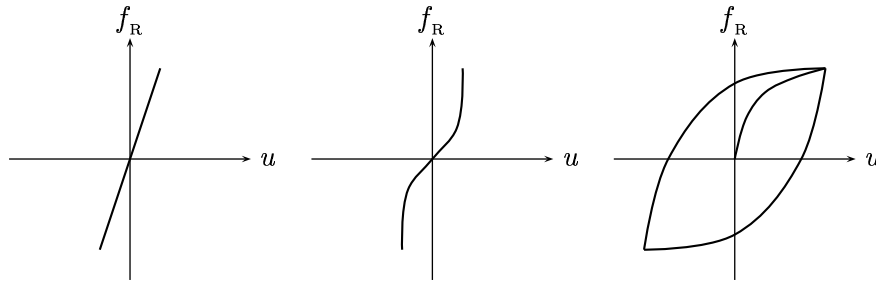


Figura 1.14: Tipos de fuerza de restitución: (a) Lineal elástica; (b) No lineal elástica; (c) No lineal histerética.

Por ello, para esta clase de sistemas es válido el principio de superposición, el cual implica que los efectos de dos cargas $p_1(t)$ y $p_2(t)$ se pueden sumar para obtener el efecto de una carga $p_3(t)$ que sea la suma de ellas. Para sistemas múltiples este principio permite una gran simplificación de los cálculos dinámicos, ya que en él está basado el concepto de *superposición modal*. Otro tipo de análisis dinámico empleado frecuentemente, denominado *análisis en el dominio de la frecuencia* es igualmente válido para sistemas lineales solamente. Cualquier otra forma del diagrama fuerza restauradora/desplazamiento, tales como las mostradas en las figuras 1.14b y c anula la aplicabilidad del principio de superposición y, por tanto, se hacen inviables la superposición modal y el análisis en el dominio de la frecuencia. Para sistemas no lineales, en consecuencia, sólo es posible aplicar el *análisis en el dominio del tiempo*, que consiste en la solución de la ecuación diferencial del movimiento, que para un sistema sencillo sin amortiguamiento estaría en general dada por

$$m\ddot{u}(t) + f_R(t) = p(t) \quad (1.17)$$

donde $f_R(t)$ es la fuerza de restitución, que ya no es más proporcional al desplazamiento $u(t)$.

En lo que respecta a las acciones externas, una clasificación importante es la que distingue entre *acciones dinámicas deterministas*, en el sentido de que su ley de variación temporal se

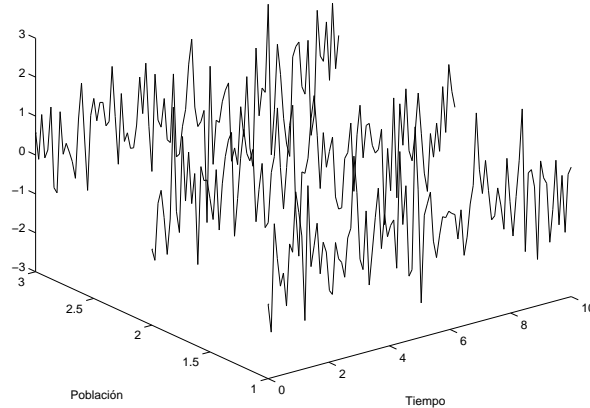


Figura 1.15: Proceso aleatorio.

conoce con certeza, y *acciones dinámicas aleatorias*, en las cuales esta condición no se cumple y, por tanto, están gobernadas por la incertidumbre. Entre las acciones deterministas se encuentra el caso de las producidas por maquinaria, ya que los parámetros que la definen se encuentran previamente especificados. Por el contrario, la mayoría de acciones dinámicas producidas por la naturaleza son de tipo aleatorio, tal como queda claro en las figuras 1.3, 1.7 y 1.8. Si bien el efecto de este tipo de acción puede estudiarse desde un enfoque determinista, utilizando alguno de los registros temporales como los mostrados, existe la posibilidad de analizar la respuesta estructural considerando un conjunto posible de muestras de la acción (registradas o simuladas), como la que muestra la figura 1.15. Esto conduce a la teoría de *vibraciones aleatorias*, la cual se basa en una combinación de la Dinámica de Estructuras con la Teoría de Probabilidades y, específicamente, con la Teoría de Procesos Aleatorios.

Capítulo 2

Vibración libre de los sistemas sencillos

2.1 Vibraciones libres no amortiguadas

Por conveniencia, escribamos de nuevo la ecuación de vibraciones libres sin amortiguamiento deducida en el capítulo anterior:

$$m\ddot{u} + ku = p \quad (2.1)$$

donde la dependencia del tiempo de las variables p, u y \ddot{u} se ha omitido en aras de la simplicidad. Esta ecuación corresponde a un sistema de un grado de libertad unido al apoyo por medio de un resorte elástico de rigidez k (ver la figura 2.1). Este modelo puede ser utilizado para describir de manera aproximada múltiples situaciones estructurales, en las cuales el error que se cometa al concentrar la masa en un solo punto sea insignificante.

La expresión (2.1) es una ecuación diferencial con coeficientes constantes. De acuerdo con la teoría de ecuaciones diferenciales, la solución del problema comprende una solución de la ecuación homogénea

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2.2)$$

mas una solución particular adecuada a la carga p . En términos físicos, la ecuación homogénea equivale a un estado de *vibración libre*, es decir, a una vibración que se produce al liberar el cuerpo desde una posición inicial $u_0 = u(0)$ (y, eventualmente, con una velocidad inicial $\dot{u}_0 = \dot{u}(0)$) y dejarlo oscilar libremente. La ecuación (2.2) puede formularse de manera más simple

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (2.3)$$

donde

$$\omega^2 = k/m \quad (2.4)$$

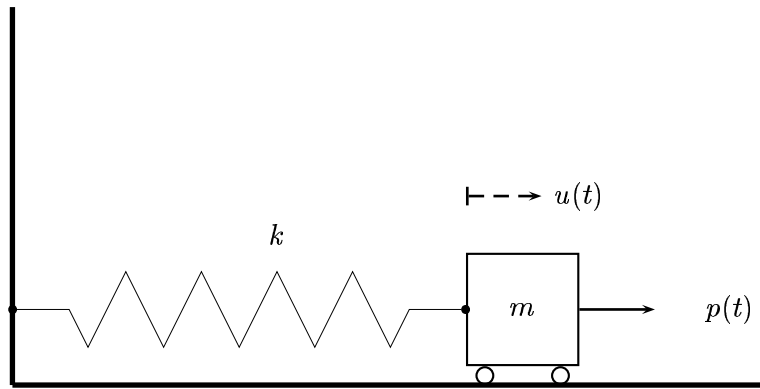


Figura 2.1: Modelo de un grado de libertad sin amortiguamiento.

Suponiendo conocidas las condiciones iniciales u_0 y \dot{u}_0 , se buscará una solución del tipo

$$u = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.5)$$

donde A y B son constantes por determinar. Como el desplazamiento en el instante inicial es conocido, resulta posible calcular inmediatamente el valor de una de ellas:

$$u_0 = A \sin \omega \cdot 0 + B \cos \omega \cdot 0 \quad (2.6)$$

es decir,

$$B = u_0 \quad (2.7)$$

Derivando (2.5) se tiene

$$\dot{u} = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t \quad (2.8)$$

por lo que

$$\dot{u}_0 = A\omega \quad (2.9)$$

Derivando una vez más se obtiene la siguiente expresión para la aceleración del sistema:

$$\ddot{u} = -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t \quad (2.10)$$

Sustituyendo estos resultados en (2.3) se comprueba fácilmente que se obtiene una identidad trivial. Por tanto, la solución del problema de vibraciones libres es

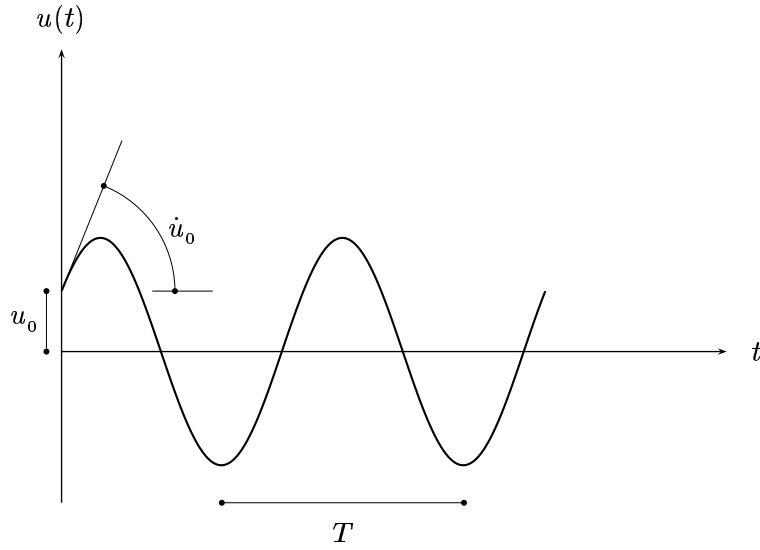


Figura 2.2: Vibración libre no amortiguada.

$$u = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t + u_0 \cos \omega t \quad (2.11)$$

La ecuación anterior consta de dos funciones armónicas de igual argumento con constantes de amplitud diferentes. La constante que determina el argumento de las funciones armónicas, ω , se conoce como *frecuencia angular natural*, ya que es una propiedad del sistema tal como lo indica la ecuación (2.4). Un esquema de la solución (2.11) aparece en la figura 2.2. En ella se indica el intervalo de tiempo en el que se repiten los valores de la respuesta, llamado *período*. Como las funciones seno y coseno repiten sus valores cada 2π radianes, el valor del período se deduce de

$$\omega T = 2\pi$$

es decir,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.12)$$

Ejemplo 2.1

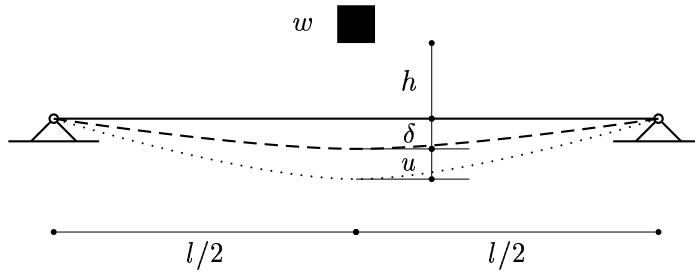


Figura 2.3: Ejemplo 2.1. - Descripción geométrica.

La figura 2.3 muestra una viga de 15 m de luz sobre la cual cae súbitamente un peso w de 9,800 N en el centro del vano desde una altura $h = 1$ m. El módulo de elasticidad de la viga es $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ y el momento de inercia de la sección transversal es $I = 0.02 \text{ m}^4$. Bajo la suposición de que la viga carece de peso, calcular sus características dinámicas y la historia de su vibración libre.

En primer lugar, la suposición de que la viga carece de peso permite modelar la estructura como un sistema de un grado de libertad, el cual tiene como masa la del cuerpo que cae y rigidez la correspondiente a una viga sometida a una carga concentrada en el centro del vano. La masa es, pues,

$$m = \frac{w}{g}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Esto implica que $m = 1,000 \text{ kg}$. En lo que respecta a la rigidez, de acuerdo a la Resistencia de Materiales, la deflexión causada por una fuerza concentrada w en el centro de una viga de longitud l es

$$\delta = \frac{wl^3}{48EI}$$

En consecuencia, la rigidez es

$$k = \frac{48EI}{l^3}$$

por lo que $k = 5,688.9 \text{ kN/m}$. La frecuencia angular de vibración es, en consecuencia,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 75.425 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

y el período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.0833 \text{ s}$$

Ahora bien, en el instante que el cuerpo cae sobre la viga produce un desplazamiento instantáneo

$$\delta = \frac{wl^3}{48EI} = 0.0017 \text{ m}$$

el cual constituye la condición inicial de la vibración que se produce en adelante, la cual es de tipo libre debido a que no está acompañada de carga dinámica ninguna. Si se mide el desplazamiento dinámico desde la posición de deformación estática definida por δ , se tiene que en el instante en que el cuerpo entra en contacto con la viga, $t = 0$, el desplazamiento inicial, medido desde dicha posición, es

$$u_0 = -\delta$$

donde el signo negativo se debe a que en dicho instante aún no ha ocurrido la deformación estática.

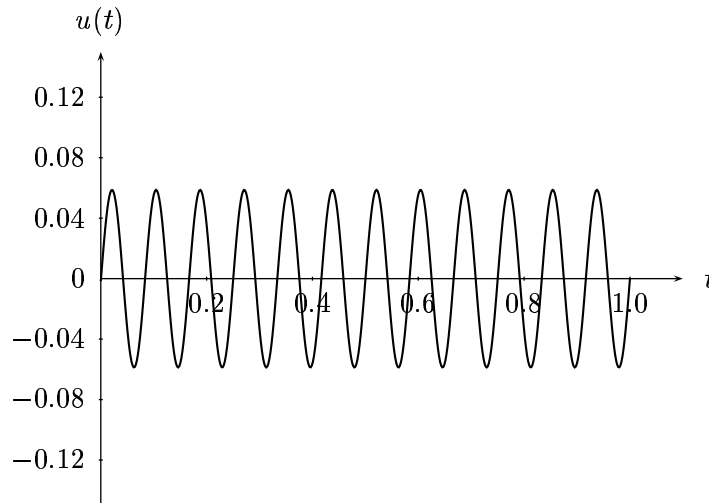


Figura 2.4: Ejemplo 2.1 – Historia de la respuesta no amortiguada.

En lo que respecta a la velocidad inicial, ésta puede calcularse igualando la energía cinética del peso que cae con su energía potencial al iniciar la caída:

$$\frac{m\dot{u}_0^2}{2} = wh$$

por lo cual

$$\dot{u}_0 = \sqrt{2gh} = 4.42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La historia del desplazamiento queda entonces descrita por

$$u = 0.0587 \sin 75.425t - 0.0017 \cos 75.425t$$

En la figura 2.4 se encuentra una representación gráfica de este resultado. Puede verse que el valor máximo del desplazamiento, 0.0587 m, es muy superior que el correspondiente a una colocación estática del peso w , igual a 0.0017 m, lo que muestra la importancia del efecto dinámico. Finalmente, es necesario recordar que el desplazamiento total de la estructura en cualquier instante de tiempo es $\delta + u(t)$, ya que este último término se mide a partir de la deformación instantánea δ .

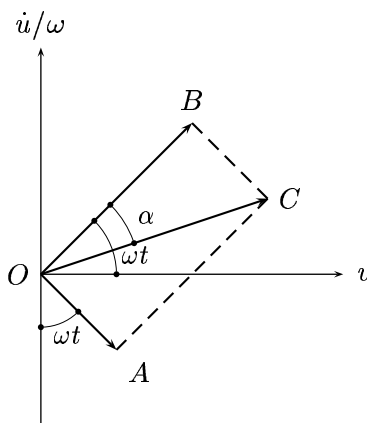


Figura 2.5: Interpretación vectorial de la vibración libre.

2.2 Interpretación vectorial

La solución (2.11) puede interpretarse de una manera vectorial, la cual resulta de interés puesto que trae a la luz otras propiedades de la respuesta dinámica que se encuentran im-

plícitas en la representación anterior. Consideremos la figura 2.5 en la cual aparecen dos vectores ortogonales \vec{OA} y \vec{OB} que giran a una velocidad angular ω . Los ejes coordenados se denotan como u y \dot{u}/ω , por razones que resultarán claras enseguida. En un instante cualquiera t , el ángulo que forma el vector \vec{OA} con el eje vertical es ωt . Si las magnitudes de los vectores son, respectivamente, $\|\vec{OA}\| = A = \dot{u}_0/\omega$ y $\|\vec{OB}\| = B = u_0$, se concluye que las proyecciones de los dos vectores sobre el eje horizontal son

$$\begin{aligned} OA \sin \omega t &= \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t \\ OB \cos \omega t &= u_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

Puede verse que la suma de estas dos proyecciones reproduce la solución (2.11). Por otra parte, para $t = 0$ los vectores \vec{OB} y \vec{OA} coinciden en dirección con los ejes coordenados horizontal y vertical, respectivamente, razón por la cual éstos se identifican como u y \dot{u}/ω . El plano que definen se conoce con el nombre de *plano de fases*.

Ahora bien, puesto que la suma de las proyecciones de dos vectores es igual a la de su resultante, resulta conveniente expresar en forma compacta la solución u como

$$u = C \cos(\omega t - \alpha) \quad (2.13)$$

donde C es la magnitud del vector resultante \vec{OC} y α su ángulo con respecto al vector \vec{OB} . Es evidente que

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2} \\ \alpha &= \tan^{-1} \frac{\dot{u}_0}{\omega u_0} \end{aligned} \quad (2.14)$$

La constante C define la amplitud máxima de la respuesta mientras que el ángulo α corresponde a la diferencia angular que media entre los picos de la solución compacta (2.13), de un lado, y la segunda componente de la solución (2.11), del otro. Por esta razón se denomina *ángulo de desfase*. La figura 2.5 ilustra su significado.

2.3 Solución en el dominio complejo

Para múltiples desarrollos y aplicaciones de la Dinámica de Estructuras, resulta de gran importancia familiarizarse con las soluciones en el campo complejo. De hecho, las soluciones complejas constituyen el fundamento del análisis en el dominio de la frecuencia así como de algunos métodos de investigación experimental de estructuras y de análisis de vibraciones aleatorias.

Para la ecuación (2.3) buscaremos ahora una solución del tipo

$$u = De^{st} \quad (2.15)$$

Derivando dos veces se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{u} &= Ds e^{st} \\ \ddot{u} &= Ds^2 e^{st}\end{aligned}$$

Sustituyendo la segunda de estas expresiones en (2.3) se obtiene

$$s^2 + \omega^2 = 0 \quad (2.16)$$

por lo que

$$s = \pm i\omega \quad (2.17)$$

en la cual $i^2 = -1$. En vista de que s toma dos valores, la solución de la ecuación homogénea se puede plantear en la forma

$$u = D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t} \quad (2.18)$$

Expresemos las constantes D_1 y D_2 en términos de sus componentes real e imaginaria, es decir,

$$\begin{aligned}D_1 &= \Re(D_1) + i\Im(D_1) \\ D_2 &= \Re(D_2) + i\Im(D_2)\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.18) y considerando la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (2.19)$$

se obtiene

$$u = [\Re(D_1) + i\Im(D_1)](\cos \omega t + i \sin \omega t) + [\Re(D_2) + i\Im(D_2)](\cos \omega t - i \sin \omega t) \quad (2.20)$$

Al separar las partes real e imaginaria se llega a que

$$\begin{aligned}u = & [\Re(D_1) + \Re(D_2)] \cos \omega t - [\Im(D_1) - \Im(D_2)] \sin \omega t + \\ & i \left\{ (\Re(D_1) - \Re(D_2)) \sin \omega t + (\Im(D_1) + \Im(D_2)) \cos \omega t \right\}\end{aligned} \quad (2.21)$$

En vista de que la solución del problema debe ser real, la parte imaginaria debe ser nula para todo tiempo t , por lo que se deben cumplir las condiciones

$$\begin{aligned}\Re(D_1) &= \Re(D_2) \equiv \Re(D) \\ \Im(D_1) &= -\Im(D_2) \equiv \Im(D)\end{aligned} \quad (2.22)$$

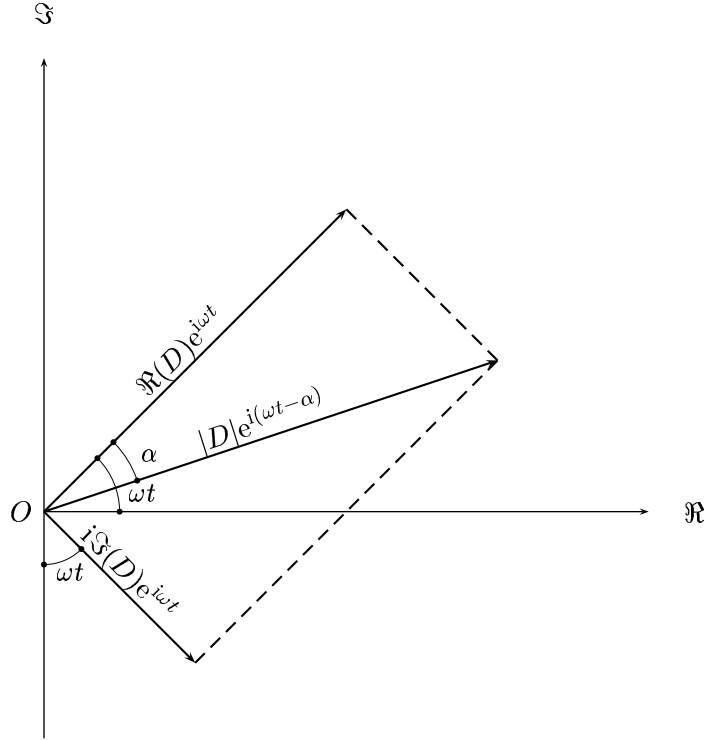


Figura 2.6: Primer término de la solución compleja (2.23).

lo cual indica que D_1 y D_2 forman un par de complejos conjugados. De esta suerte, la solución final es

$$u = [\Re(D) + i\Im(D)]e^{i\omega t} + [\Re(D) - i\Im(D)]e^{-i\omega t} \quad (2.23)$$

La solución anterior también puede representarse en forma vectorial de la manera que ilustra la figura 2.6, en la que los ejes coordenados corresponden a la parte real y a la parte imaginaria de las variables representadas. Por simplicidad sólo se han dibujado los vectores que forman el primer término de la ecuación (2.23). De acuerdo con este diagrama puede verse que este término tiene también por valor

$$[\Re(D) + i\Im(D)]e^{i\omega t} = |D|e^{i(\omega t - \alpha)}$$

donde

$$|D| = \sqrt{\Re(D)^2 + \Im(D)^2} \quad (2.24)$$

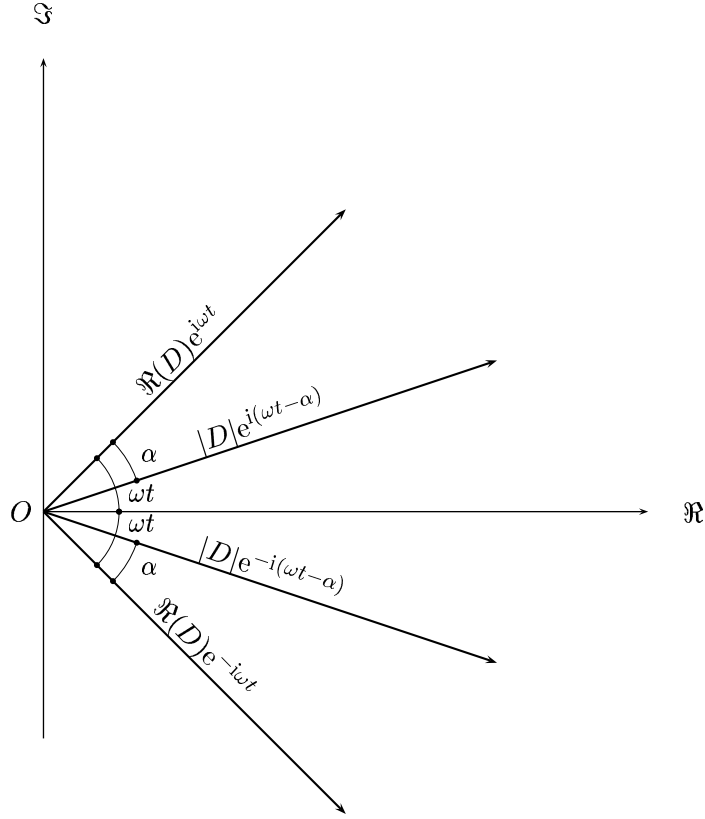


Figura 2.7: Valor total de la solución compleja (2.23).

lo que no es otra cosa que la definición del módulo de una cantidad compleja. En consecuencia, la solución general (2.23) puede expresarse en la forma

$$u = |D| \Re \left(e^{i(\omega t - \alpha)} + e^{-i(\omega t - \alpha)} \right) \quad (2.25)$$

Sin embargo, esta solución puede aún simplificarse más si se tiene en cuenta que, como muestra la figura 2.7, las componentes verticales (imaginarias) de los dos términos que componen la solución se anulan mutuamente. Por tanto, la solución está compuesta por la suma de las proyecciones de los dos términos sobre el eje real, por lo cual

$$u = 2|D| \cos(\omega t - \alpha) \quad (2.26)$$

La comparación de este resultado con (2.13) indica que

$$C = 2|D| \quad (2.27)$$

Adicionalmente, la aplicación de la fórmula de Euler (2.19) a la solución compleja (2.23) conduce directamente a la ecuación (2.3)

$$u = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

donde

$$\begin{aligned} A &= -2\Im(D) \\ B &= 2\Re(D) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Estas correspondencias ilustran la generalidad de la formulación compleja, puesto que contiene a las anteriores de manera implícita.

2.4 Consideraciones energéticas

Resulta de gran interés examinar las vibraciones mecánicas no sólo desde el punto de vista de las ecuaciones de equilibrio sino también desde la óptica de la conservación de la energía, ya que este enfoque da origen a métodos alternativos para obtener características dinámicas de estructuras complejas, al menos de manera aproximada. Por otra parte, algunos métodos de diseño o de evaluación estructural bajo cargas dinámicas se realizan enteramente en el campo energético. Por este motivo, es conveniente introducir las ideas básicas al respecto con relación al sistema sencillo estudiado hasta ahora en este capítulo.

En cualquier instante de tiempo, la energía potencial almacenada por el resorte de la figura 2.1 está dada por el área sombreada que yace bajo la curva fuerza/deformación indicada en la figura 2.8, es decir

$$\mathcal{P}(t) = \frac{f_R u}{2} = \frac{k u^2(t)}{2} \quad (2.29)$$

donde se vuelve a introducir la dependencia del tiempo de las variables. Por otra parte, la energía cinética es

$$\mathcal{K}(t) = \frac{m \dot{u}^2(t)}{2} \quad (2.30)$$

Utilizando las ecuaciones (2.26) y (2.27), las expresiones correspondientes son

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) &= \frac{kC^2}{2} \cos^2(\omega t - \alpha) \\ \mathcal{K}(t) &= \frac{m\omega^2 C^2}{2} \sin^2(\omega t - \alpha) \end{aligned} \quad (2.31)$$

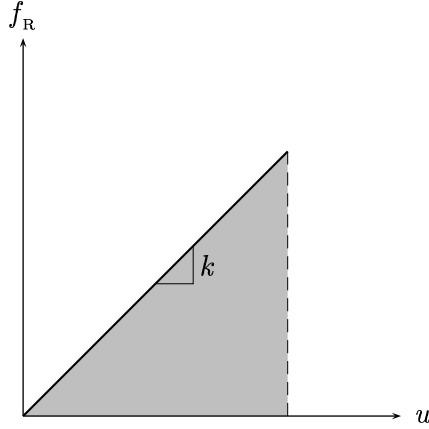


Figura 2.8: Relación lineal fuerza-deformación.

La figura 2.9 ilustra estas ecuaciones para el caso particular $\alpha = 0$. Se observa que la energía potencial alcanza su máximo valor cuando la energía cinética es nula. Esto se explica por el hecho de que la máxima deformación u (que determina el valor de \mathcal{P}) se alcanza cuando su derivada \dot{u} (que determina a \mathcal{K}) es nula. Adicionalmente, la energía total es $\mathcal{E} = \mathcal{P} + \mathcal{K}$. Como $m\omega^2 = k$,

$$\mathcal{E}(t) = \frac{kC^2}{2} [\cos^2(\omega t - \alpha) + \sin^2(\omega t - \alpha)] = \frac{kC^2}{2} \quad (2.32)$$

lo que comprueba el principio físico de que la energía total se mantiene constante.

2.5 Consideración del amortiguamiento

La solución del problema de vibraciones libres tratada en la sección anterior debe ahora ampliarse por medio de la inclusión del término de amortiguamiento. Esto se impone, debido a que las ecuaciones (2.3) y (2.13) implican que el sistema vibra libremente a perpetuidad manteniendo la amplitud, lo que contradice cualquier observación usual sobre el caso.

La introducción de un *amortiguamiento de tipo viscoso* (es decir, proporcional a la velocidad, lo que está inspirado en la Mecánica de los Fluidos) hace que la ecuación de vibraciones libres sea ahora la siguiente:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.33)$$

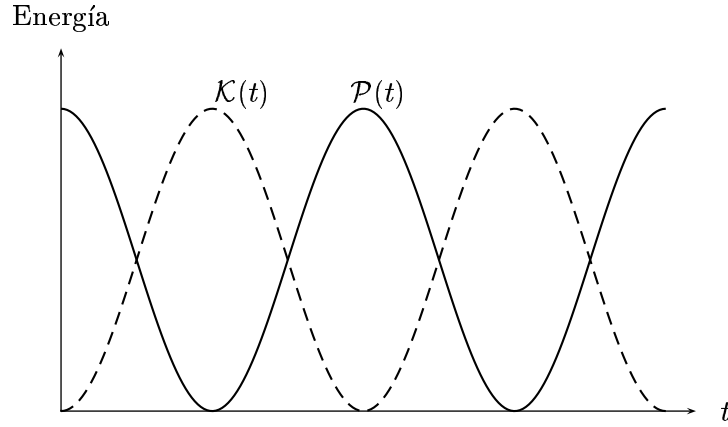


Figura 2.9: Energías potencial y cinética.

Dividiendo entre m e introduciendo la solución supuesta

$$u = Ee^{st} \quad (2.34)$$

se obtiene

$$\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2\right)e^{st} = 0 \quad (2.35)$$

por lo cual la constante s se obtiene de resolver la ecuación cuadrática

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \quad (2.36)$$

es decir

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (2.37)$$

Se obtienen diferentes soluciones, correspondientes a diversas situaciones físicas, si el discriminante

$$p = \left(\frac{c}{2m} \right)^2 - \omega^2 \quad (2.38)$$

es mayor, igual o menor que cero. Examinaremos estas posibilidades a continuación.

2.5.1 Caso $p = 0$: Amortiguamiento crítico

En este caso se tiene un amortiguamiento particular que hace nulo el discriminante p :

$$c_c \equiv 2m\omega \quad (2.39)$$

Este amortiguamiento se denomina *crítico* no tanto porque constituya el criterio de diferenciación de los casos $p < 0$ y $p > 0$, sino fundamentalmente porque desde un punto de vista físico corresponde a un movimiento sin vibración. En efecto, para $p = 0$ las dos soluciones de la ecuación cuadrática se reducen a una sola, de valor

$$s_1 = s_2 = -\frac{c_c}{2m} \quad (2.40)$$

Por tanto

$$s_1 = s_2 = -\omega \quad (2.41)$$

De acuerdo con la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, la solución del problema en un caso como éste de raíces iguales tiene la forma

$$u = (E_1 + E_2 t)e^{st} = (E_1 + E_2 t)e^{-\omega t} \quad (2.42)$$

Derivando una vez y considerando las condiciones iniciales $u(0) = u_0$ y $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$ se llega a la siguiente solución:

$$u = [u_0(1 - \omega t) + \dot{u}_0 t]e^{-\omega t} \quad (2.43)$$

La figura 2.10 ilustra la forma de esta solución. Puede verse que el valor del amortiguamiento es tal que impide toda oscilación, de suerte que el sistema regresa asintóticamente a cero desde la posición inicial u_0 . Si, por otra parte, los signos de u_0 y \dot{u}_0 fuesen diferentes se produciría un cruce único por el eje horizontal, después del cual el sistema seguiría su camino hacia el reposo. De todas maneras, tal cruce no constituye una oscilación en el sentido propio del término.

2.5.2 Caso $p < 0$: Amortiguamiento subcrítico

De los tres casos bajo consideración éste es el que reviste la mayor importancia, debido a que corresponde a los casos corrientes de estructuras civiles, las cuales tienen amortiguamientos muy inferiores al crítico. Una manera práctica de definir el amortiguamiento en términos adimensionales es por medio de la *fracción de amortiguamiento crítico*, dada por

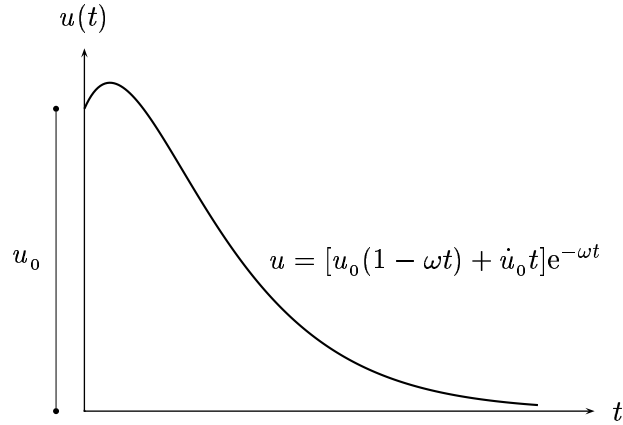


Figura 2.10: Vibración libre con amortiguamiento crítico.

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad (2.44)$$

En mediciones experimentales se han identificado valores de ξ entre 0.02 y 0.05 para los materiales estructurales típicos. Esto muestra lo lejos que se encuentran las estructuras corrientes de la situación de amortiguamiento crítico examinada más arriba.

En términos de la fracción de amortiguamiento crítico, la ecuación (2.37) se convierte en

$$s = -\xi\omega \pm \sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2} \quad (2.45)$$

es decir

$$s = -\xi\omega \pm i\omega_a \quad (2.46)$$

donde

$$\omega_a \equiv \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.47)$$

es la *frecuencia natural amortiguada* del sistema, la cual, para los valores usuales de la fracción de amortiguamiento de los materiales estructurales es casi igual a la frecuencia natural ω . Sustituyendo los dos valores de s dados por (2.46) en (2.34) y sumando las soluciones se obtiene la solución general

$$u = [D_1 e^{i\omega_a t} + D_2 e^{-i\omega_a t}] e^{-\xi\omega t} \quad (2.48)$$

en la cual se debe cumplir que D_1 y D_2 sean complejos conjugados para que la respuesta u sea real, tal como se demostró anteriormente en el caso sin amortiguamiento. Esto es,

$$\begin{aligned}\Im(D_1) &= -\Im(D_2) \equiv \Im(D) \\ \Re(D_1) &= \Re(D_2) \equiv \Re(D)\end{aligned}\quad (2.49)$$

Asimismo, por medio de la fórmula de Euler se concluye fácilmente que

$$u = [A \sin \omega_a t + B \cos \omega_a t] e^{-\xi \omega t} \quad (2.50)$$

con

$$\begin{aligned}A &= -2\Im(D) \\ B &= 2\Re(D)\end{aligned}\quad (2.51)$$

Introduciendo las condiciones iniciales $u_0 = u(0)$ y $\dot{u}_0 = \dot{u}(0)$ se llega finalmente a la solución general

$$u = \left[\left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_a} \right) \sin \omega_a t + u_0 \cos \omega_a t \right] e^{-\xi \omega t} \quad (2.52)$$

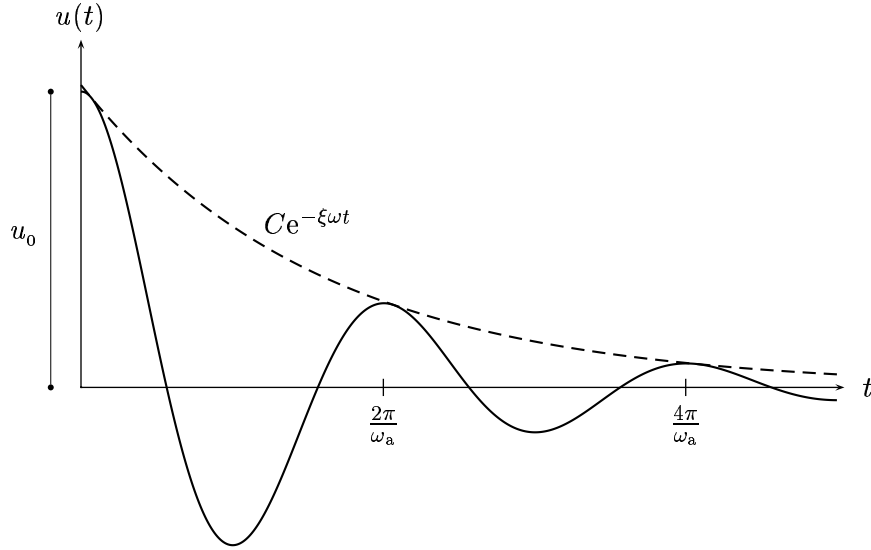


Figura 2.11: Vibración libre con amortiguamiento subcrítico.

De manera semejante a como se hizo en el caso no amortiguado, la solución puede representarse de manera vectorial, a partir de lo cual se puede obtener la siguiente solución, equivalente a la anterior,

$$u = C \cos(\omega_a t - \alpha) e^{-\xi \omega t} \quad (2.53)$$

la cual puede obtenerse directamente de (2.26) si se tiene en cuenta que la función $e^{-\xi \omega t}$ no cumple más que un papel de un factor multiplicativo que no altera la representación vectorial. En la ecuación anterior

$$C = \left[\left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_a} \right)^2 + u_0^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.54)$$

y

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_a u_0} \right) \quad (2.55)$$

La solución (2.52) se encuentra representada en la figura 2.11 para el caso particular $\dot{u}_0 = 0$. Se observa que la amplitud oscilación disminuye con el tiempo de acuerdo con una ley dada por $C e^{-\xi \omega t}$, pues éste es el valor de u que resulta cuando $\cos(\omega t - \alpha) = 1$ en (2.53). Esta ley de decrecimiento de la vibración libre se utiliza para la medición experimental de la fracción de amortiguamiento ξ , como se mostrará más adelante.

Ejemplo 2.2

Calcularemos ahora la solución del ejemplo 2.1 considerando que el material de la viga tiene un amortiguamiento definido por $\xi = 0.05$.

La frecuencia natural amortiguada está dada por

$$\omega_a = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 75.425 \sqrt{1 - 0.05^2} = 75.33$$

lo que demuestra que para fracciones de amortiguamiento pequeñas, usuales en la práctica, las dos frecuencias pueden tomarse como iguales. La historia de desplazamientos está dada por la ecuación (2.52):

$$u = \left[\left(\frac{4.42 - 0.0017 \times 0.05 \times 75.425}{75.33} \right) \sin 75.33t - 0.0017 \cos 75.33t \right] e^{-0.05 \times 75.425t}$$

lo que da como resultado

$$u = \left[0.0586 \sin 75.33t - 0.0017 \cos 75.33t \right] e^{-3.771t}$$

Esta ecuación se encuentra representada en la figura 2.12.



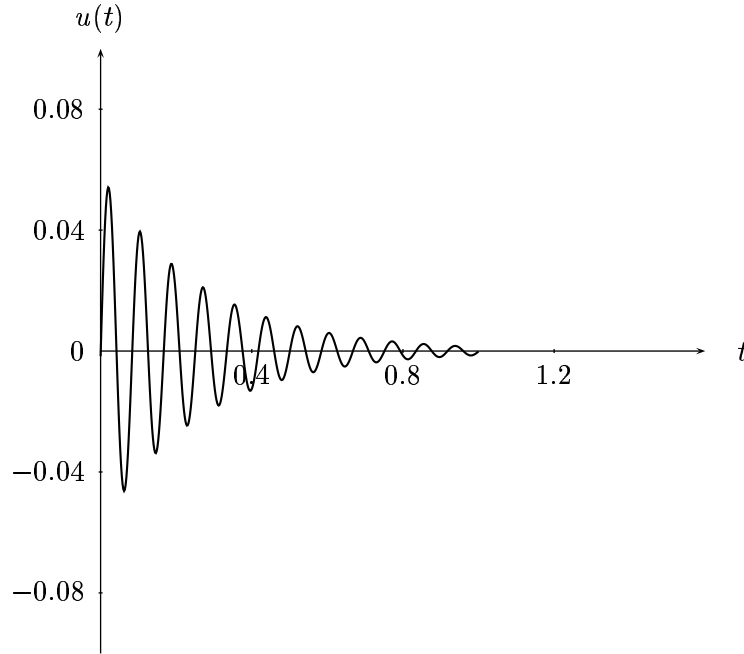


Figura 2.12: Ejemplo 2.2 – Historia de la respuesta amortiguada.

2.5.3 Caso $p > 0$: Amortiguamiento supercrítico

En Dinámica de Estructuras, este caso reviste un interés principalmente académico, puesto que es poco previsible que se llegue a desarrollar materiales estructurales con $\xi > 1$. Por este motivo este caso se considerará aquí sólo en aras de la completitud del examen del efecto del amortiguamiento.

Partiendo de la ecuación (2.37) se concluye fácilmente que las raíces de la ecuación característica son, en este caso,

$$s = -\xi\omega \pm \omega_s \quad (2.56)$$

donde

$$\omega_s = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.57)$$

La sustitución de estos valores en la solución supuesta conduce al siguiente resultado, donde una vez más se ha hecho uso de la fórmula de Euler:

$$u = [A \sinh \omega_s t + B \cosh \omega_s t] e^{-\xi\omega t} \quad (2.58)$$

en la que las constantes A y B se pueden calcular a partir de las condiciones iniciales.

2.6 Determinación experimental del amortiguamiento

El modelo de la fuerza de amortiguamiento viscoso adoptado hasta aquí no refleja, en realidad, de manera correcta las características de disipación de la energía de movimiento, tal como se verá en el capítulo siguiente. Sin embargo, dado el bajo nivel de esta fuerza, su adopción resulta suficientemente aproximada para muchos problemas frecuentes en la práctica, en especial los relacionados con cargas no armónicas, tales como sismos, vientos, etc. En otros casos, como es el del análisis de la interacción suelo/estructura, se suele adoptar otro tipo de modelo, conocido como *amortiguamiento histerético*. Finalmente, el amortiguamiento de tipo friccionante, presente en algunos dispositivos de disipación de energía y de aislamiento en la base, se trata usualmente de manera directa como una fuerza de restauración no lineal.

En esta sección se expondrá una manera experimental sencilla de determinar la fracción de amortiguamiento viscoso, la cual se basa enteramente en lo expuesto hasta ahora sobre vibraciones libres. Nos referiremos para ello a la figura 2.11. En ella se aprecia el decremento que sufren las amplitudes de la vibración de ciclo a ciclo como efecto de la fuerza de amortiguamiento. Consideremos el ciclo de vibración j . La amplitud del desplazamiento está dada por la ecuación (2.53) como

$$u_j = Ce^{-\xi\omega t_j} \quad (2.59)$$

donde se ha hecho la función coseno igual a 1, lo que tiene lugar en el tiempo

$$t_j = j \times \frac{2\pi}{\omega_a}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= Ce^{-\xi\omega t_{j+1}} \\ t_{j+1} &= (j+1) \times \frac{2\pi}{\omega_a} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Esto indica que la relación entre las dos amplitudes es

$$\frac{u_j}{u_{j+1}} = \frac{e^{-\xi\omega j \frac{2\pi}{\omega_a}}}{e^{-\xi\omega(j+1) \frac{2\pi}{\omega_a}}} = e^{\xi\omega \frac{2\pi}{\omega_a}} \quad (2.61)$$

El llamado *decremento logarítmico* de las amplitudes está definido como el logaritmo natural de la relación anterior, por lo cual,

$$\epsilon_1 = \ln \frac{u_j}{u_{j+1}} = \frac{2\pi\xi\omega}{\omega_a} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.62)$$

De acuerdo con esto, si se dispone de mediciones experimentales de vibración libre de un modelo determinado de un grado de libertad, la propiedad de amortiguamiento se puede estimar

- Calculando el logaritmo natural de la relación entre dos amplitudes sucesivas.
- Calculando luego el valor de ξ de la ecuación (2.62). Nótese que para los valores usualmente pequeños que toma la fracción de amortiguamiento, el decremento logarítmico se puede calcular aproximadamente como

$$\epsilon_1 \approx 2\pi\xi \quad (2.63)$$

El procedimiento anterior se puede generalizar al caso en que se tomen mediciones de las amplitudes de dos ciclos j y $j + m$, lo que se realiza usualmente en la práctica. En tal caso, el decremento logarítmico es

$$\epsilon_m = \ln \frac{u_j}{u_{j+m}} = \frac{2\pi\xi m}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.64)$$

que para fracciones de amortiguamiento pequeñas se puede aproximar por

$$\epsilon_m \approx 2\pi\xi m \quad (2.65)$$

Capítulo 3

Vibración armónica de los sistemas sencillos

En este capítulo se abordará el análisis de la vibración de sistemas simples excitados por una carga armónica de tipo $p(t) = \bar{p} \sin \bar{\omega} t$, donde $\bar{\omega}$ denota la frecuencia de la carga y \bar{p} su amplitud. En la vida real, esta carga tiene lugar en la acción de maquinaria sobre estructuras. Sin embargo, la importancia de este análisis va más allá del interés por calcular la respuesta a este tipo de carga, puesto que la carga armónica constituye el núcleo de la descomposición de una acción cualquiera en series trigonométricas (o *series de Fourier*) y, por tanto, del análisis en el dominio de la frecuencia. Dada la importancia de ambos temas en la Dinámica de Estructuras, la respuesta bajo carga armónica de sistemas sencillos constituye, pues, un tema indispensable para tales desarrollos avanzados.

El problema que examinaremos a continuación tiene la forma siguiente:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \bar{p} \sin \bar{\omega} t \quad (3.1)$$

donde $\bar{\omega}$ es la frecuencia de la excitación externa y \bar{p} su amplitud. Un problema corriente en el análisis de estructuras sometidas a excitaciones de tipo armónico es el llamado de *fuerza armónica constante*, en el sentido de que la intensidad de la fuerza \bar{p} no depende de su frecuencia $\bar{\omega}$. Un problema ligeramente diferente es el creado por máquinas en las que una masa rota con una excentricidad dada a una velocidad constante. Por este motivo, se conoce con el nombre de *problema de masa rotatoria* y en él la fuerza dinámica tiene por expresión

$$p(t) = m_r e \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t \quad (3.2)$$

donde m_r es la masa rotatoria y e su excentricidad. Este problema equivale a hacer $\bar{p} = m_r e \bar{\omega}^2$ en la expresión (3.1), lo cual indica que la magnitud de la fuerza depende de la frecuencia de la misma. En este capítulo se tratará el problema general (3.1), pero se harán los ajustes pertinentes al caso de la fuerza dependiente de la frecuencia de la excitación.

3.1 Vibración armónica sin amortiguamiento

Consideremos en primer lugar la ecuación (3.1) sin el término de amortiguamiento:

$$m\ddot{u} + ku = \bar{p} \sin \bar{\omega}t \quad (3.3)$$

De acuerdo con la Teoría de Ecuaciones Diferenciales, este problema tiene por solución

$$u = u_h + u_p \quad (3.4)$$

donde u_h es la solución de la ecuación homogénea, que se obtiene haciendo nulo el lado derecho de la ecuación (3.3) y u_p una solución particular adecuada a dicho término. La primera de ellas corresponde, pues, a la ecuación (11) del capítulo 2:

$$u_h = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (3.5)$$

En lo que respecta a la solución particular u_p , se buscará una solución del tipo

$$u_p = C \sin \bar{\omega}t \quad (3.6)$$

es decir, una respuesta en fase con la excitación externa. Al derivar esta solución dos veces y sustituir en (3.3) se obtiene

$$-mC\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t + kC \sin \bar{\omega}t = \bar{p} \sin \bar{\omega}t \quad (3.7)$$

Al dividir entre $\sin \bar{\omega}t$ se llega a que

$$-mC\bar{\omega}^2 + kC = \bar{p} \quad (3.8)$$

Como $\omega^2 = k/m$, el coeficiente C es

$$C = \frac{\bar{p}}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \quad (3.9)$$

donde

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (3.10)$$

En consecuencia, la solución total es, de acuerdo a las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.10),

$$u = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{\bar{p}}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \sin \bar{\omega}t \quad (3.11)$$

Para el caso usual en el que la estructura se encuentre sin desplazamiento ni velocidad iniciales ($u_0 = u(0) = 0, \dot{u}_0 = \dot{u}(0) = 0$), el siguiente sistema de ecuaciones, que permite calcular los coeficientes A y B , resulta al proceder de manera semejante a lo hecho en el capítulo 2:

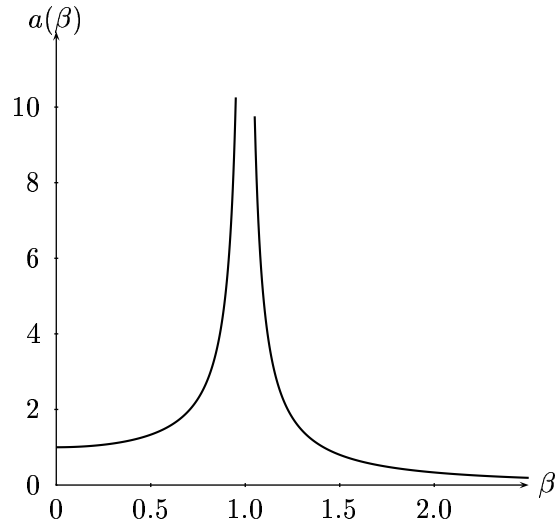


Figura 3.1: Factor de amplificación - Sistema sin amortiguamiento.

$$0 = A \cdot 0 + B$$

$$0 = A\omega - B \cdot 0 + \bar{\omega} \frac{\bar{p}}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right)$$

De aquí resulta que

$$A = -\frac{\bar{p}\beta}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right), B = 0 \quad (3.12)$$

En consecuencia, para condiciones iniciales de reposo,

$$u = \frac{\bar{p}}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) (\sin \bar{\omega}t - \beta \sin \omega t) \quad (3.13)$$

Esta expresión se puede expresar sucintamente en la forma

$$u = u_e a(\beta) r(t) \quad (3.14)$$

donde

$$u_e = \frac{\bar{p}}{k} \quad (3.15)$$

es el desplazamiento que produciría la carga \bar{p} si se aplicase de forma estática,

$$a(\beta) = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (3.16)$$

es el *factor de amplificación*, que depende solamente de β y la función

$$r(t) = \sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t \quad (3.17)$$

gobierna la historia de la respuesta. La figura 3.1 muestra un diagrama del valor absoluto de la función $a(\beta)$, en el que se aprecia que para valores de β cercanos a 1 la amplificación de la respuesta dinámica con respecto a la estática tiende a ser infinita. Este fenómeno, conocido con el nombre de *resonancia* se da, entonces, para una estructura con amortiguamiento nulo tal que su frecuencia natural se aproxime a la de la carga armónica. Por su parte, la figura 3.2 muestra la respuesta (3.14) para $u_e = 1$, $\beta = 0.9$, $\omega = \pi$ rad/s. Se observa que la respuesta es periódica, con un período de aproximadamente 20 s, el cual difiere tanto del propio de la estructura ($T = 2\pi/\pi = 2$ s) como del de la excitación ($\bar{T} = 2.22$ s). Asimismo, puede verse la manera como ocurre el fenómeno de la resonancia: A un ciclo inicial de amplitud poco mayor que u_e le suceden ciclos de amplitudes cada vez mayores, hasta que se alcanza un máximo cuya magnitud está gobernada por el valor de β correspondiente al caso; luego, después de una decadencia de la vibración se reinicia el fenómeno. Por esto puede concluirse que el proceso ocurre por golpes dinámicos.

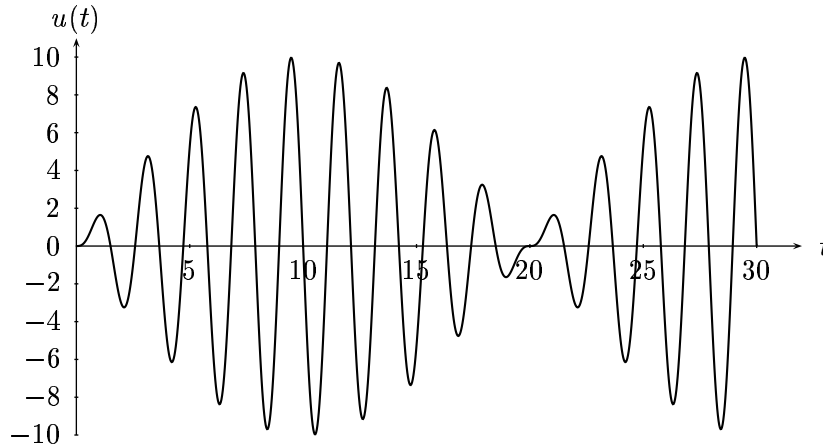


Figura 3.2: Respuesta armónica para $u_e = 1$, $\beta = 0.9$, $\omega = \pi$ rad/s.

3.2 Vibración armónica amortiguada

Como ha quedado dicho en el capítulo anterior, la inclusión del amortiguamiento viscoso en el análisis dinámico representa una mejor aproximación a la respuesta real que el modelo anterior, puesto que, como indica la ecuación (3.11), aun cuando se retirase la fuerza externa, la estructura seguiría vibrando perpetuamente. Al considerar el amortiguamiento viscoso, la ecuación (3.3) se transforma en

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \bar{p} \sin \bar{\omega}t \quad (3.18)$$

La solución de la ecuación homogénea, obtenida en el capítulo 2, es

$$u_h = [A \sin \omega_a t + B \cos \omega_a t] e^{-\xi \omega t} \quad (3.19)$$

En lo que respecta a la solución particular, se buscará una de la forma

$$u_p = C \sin \bar{\omega}t + D \cos \bar{\omega}t \quad (3.20)$$

la cual tiene una expresión más general que la del caso anterior debido a la presencia del amortiguamiento. Al derivar la solución particular dos veces y sustituir en la ecuación (3.18) se llega a la siguiente expresión:

$$\left[2C\xi\bar{\omega}\omega + D(\omega^2 - \bar{\omega}^2) \right] \cos \bar{\omega}t + \left[C(\omega^2 - \bar{\omega}^2) - 2D\xi\bar{\omega}\omega - \frac{\bar{p}}{m} \right] \sin \bar{\omega}t = 0 \quad (3.21)$$

Como las funciones seno y coseno nunca son simultáneamente iguales a cero, la igualdad anterior sólo queda satisfecha si los dos términos entre corchetes cumplen esa condición. Esto equivale a que

$$\begin{aligned} C &= \frac{\bar{p}}{k} \left[\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \\ D &= \frac{\bar{p}}{k} \left[\frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

La respuesta total $u_h + u_p$ es, por tanto,

$$\begin{aligned} u &= [A \sin \omega_a t + B \cos \omega_a t] e^{-\xi \omega t} + \\ &\frac{\bar{p}}{k} \left[\frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] [(1 - \beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega}t] \end{aligned} \quad (3.23)$$

En esta ecuación, el primer término, que corresponde a la vibración libre amortiguada, disminuye progresivamente hasta hacerse casi nulo, como se ha anotado antes; por esta razón se le conoce con el nombre de *componente transitoria* de la solución armónica total $u(t)$. Por

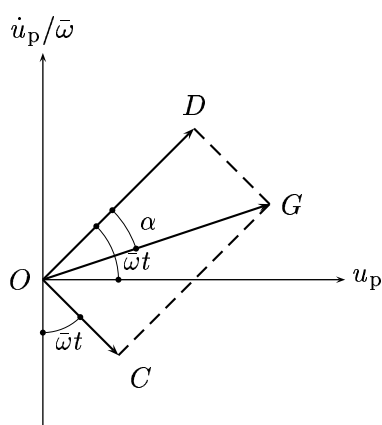


Figura 3.3: Interpretación vectorial de la vibración armónica.

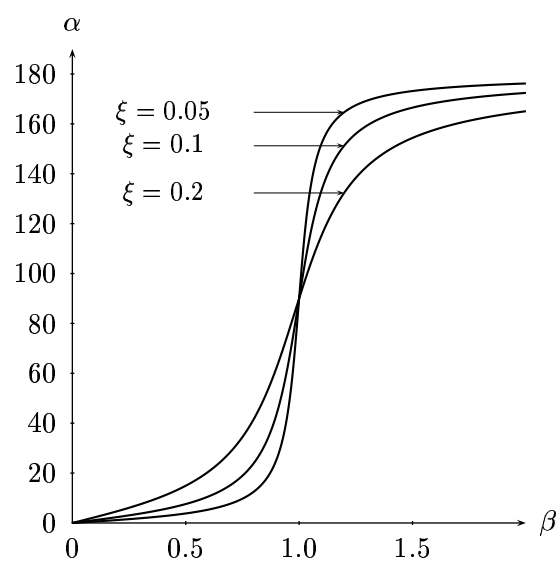


Figura 3.4: Ángulo de desfase de la vibración armónica amortiguada.

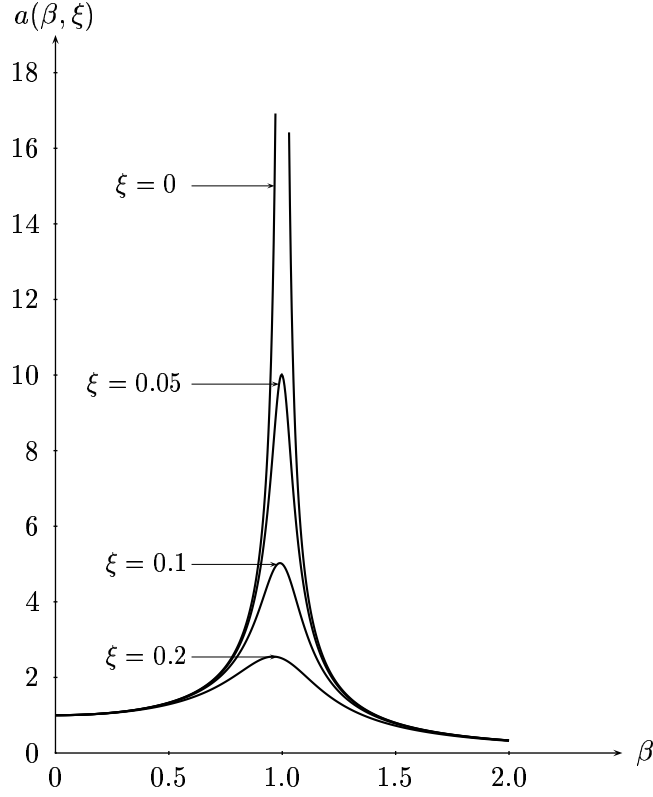


Figura 3.5: Factor de amplificación - Sistema con amortiguamiento.

otra parte, la componente asociada a la carga, u_p , se denomina *componente estacionaria*. Conviene examinar ahora de cerca esta componente, la cual está gobernada por la frecuencia de la carga $\bar{\omega}$ y por relación de frecuencias β , como puede observarse.

Tal como se hizo en el capítulo 2, la solución u_p también puede representarse en forma vectorial, como indica la figura 3.3. La magnitud de los vectores es $\|OC\| = C$ y $\|OD\| = D$, donde las expresiones de C y D están dadas por las ecuaciones (3.22). Esto implica que la componente estacionaria se puede expresar como

$$u_p = G \cos(\bar{\omega}t - \alpha) \quad (3.24)$$

donde G es la magnitud del vector resultante \overrightarrow{OG} y α su ángulo con respecto al vector \overrightarrow{OD} . Evidentemente,

$$G = \sqrt{C^2 + D^2} \quad (3.25)$$

lo que da como resultado

$$G = \frac{\bar{p}}{k} \sqrt{\frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (3.26)$$

La constante G define la amplitud máxima de la respuesta. Por su parte, el ángulo α indica, claramente, el desfase existente entre la solución total u_p y el armónico constituido por $D \cos \bar{\omega}t$ en la solución (3.20). Su valor es

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{C}{D} \right) \quad (3.27)$$

lo que equivale a

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right) \quad (3.28)$$

La figura 3.4 contiene un diagrama que ilustra la dependencia de α con respecto a β y ξ . De manera semejante a lo hecho en la sección anterior, la componente transitoria se puede expresar de manera compacta en la forma

$$u_p = u_e a(\beta, \xi) r(t) \quad (3.29)$$

donde u_e tiene el mismo significado que en la ecuación 3.15 (es decir, el desplazamiento que causaría una fuerza \bar{p} aplicada de manera lenta). Por su parte, la función $r(t)$ es ahora

$$r(t) = \cos(\bar{\omega}t - \alpha) \quad (3.30)$$

y el factor de amplificación es en este caso función de β tanto como de ξ :

$$a(\beta, \xi) = \sqrt{\frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (3.31)$$

La figura 3.5 contiene un diagrama que ilustra la variación del factor de amplificación. Es evidente que el amortiguamiento contribuye notoriamente a disminuir la gran amplificación que se presenta alrededor de $\beta = 1$. Desgraciadamente, el incrementar la fracción de amortiguamiento no es algo que pueda hacerse a voluntad en el diseño de estructuras, salvo en el caso de ciertos sistemas especiales de control activo y pasivo de vibraciones. Por tanto, bajo carga armónica, una medida prudente de diseño consiste en buscar para la estructura una frecuencia suficientemente alejada de la frecuencia de la carga impuesta. En este contexto, es importante anotar que los valores máximos del factor de amplificación (que pueden obtenerse por simple derivación) corresponden a las frecuencias

$$\omega_{\max} = \omega \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (3.32)$$

y tienen por valor

$$\max a(\beta, \xi) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.33)$$

Finalmente, en el problema de masa rotatoria mencionado más arriba, el hecho de que la amplitud de la fuerza \bar{p} dependa de la frecuencia de la excitación, hace conveniente expresar algunas de las relaciones anteriores en forma modificada. En efecto, el término \bar{p}/k vale ahora

$$\frac{\bar{p}}{k} = \frac{m_r e \bar{\omega}^2}{k} = \frac{m_r e}{m} \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} = \frac{m_r e}{m} \beta^2 \quad (3.34)$$

Por esto, los términos de la ecuación (3.29) son en este caso

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{m_r e}{m} \\ a(\beta, \xi) &= \beta^2 \sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \\ r(t) &= \cos(\bar{\omega}t - \alpha) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Los valores del factor máximo de amplificación y de la frecuencia correspondiente son

$$\max a(\beta, \xi) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.36)$$

y

$$\omega_{\max} = \omega \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}} \quad (3.37)$$

La figura 3.6 muestra la variación del factor de amplificación para el problema de masa rotatoria.

Ejemplo 3.1

La figura 3.7 muestra un bloque de cimentación que soporta un equipo eléctrico, el cual contiene dos masas rotatorias de 2,400 kg cada una, las cuales giran a una velocidad de 1,800 revoluciones por minuto, en sentido horario y antihorario, respectivamente, con una excentricidad de 0.0002 m. La masa de la estructura es de 14,200 kg, su rigidez en sentido vertical (incluyendo el aporte del sistema cimentación-suelo) es de 4.68×10^5 kN/m y la fracción de amortiguamiento crítico es de 0.1. Hallar el factor de amplificación dinámica y el desplazamiento vertical máximo.

De acuerdo a esta información, el equipo dado es del tipo rotatorio-balanceado, lo cual significa que al producirse giros en direcciones angulares opuestas, las componentes horizontales de las fuerzas centrífugas, iguales cada una a

$$m_r e \bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega}t$$

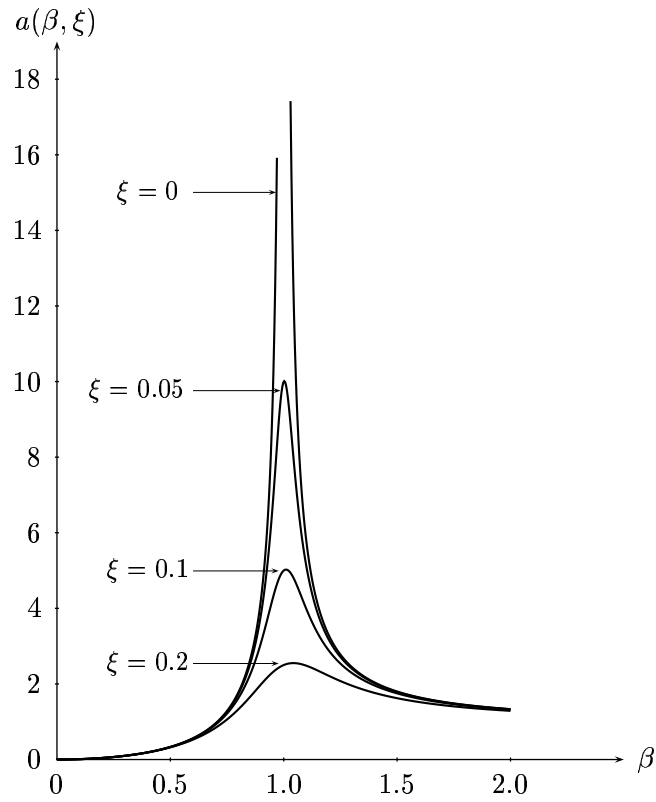


Figura 3.6: Factor de amplificación - Problema de masa rotatoria.

se anulan mutuamente. Por el contrario, las componentes verticales se suman y generan una fuerza única vertical igual a

$$p(t) = 2m_r e \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t$$

En estas ecuaciones m_r es la masa rotatoria en cada centrífuga, igual a 2,400 kg y e es la excentricidad (0.0002 m). La frecuencia angular de la carga se obtiene a partir de su velocidad angular como

$$\bar{\omega} = \frac{1800 \times 2\pi}{60\text{s}} = 188.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

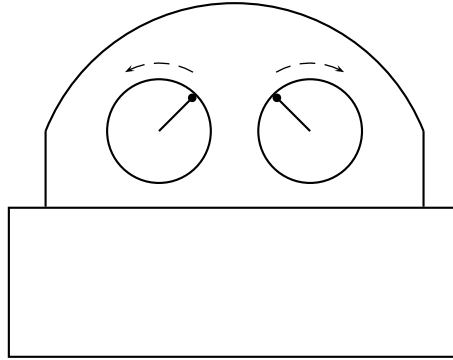


Figura 3.7: Ejemplo 3.1. - Equipo de masas rotatorias.

Por su parte, la frecuencia natural del sistema estructura-suelo es

$$\omega = \sqrt{\frac{4.68 \times 10^8 \text{N}}{(14,200 + 2 \times 2,400) \text{kg} \cdot \text{m}}} = 156.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Por tanto

$$\beta = \frac{188.5}{156.9} = 1.201,$$

lo que indica que el sistema está cerca del punto crítico $\beta = 1$. El desplazamiento máximo se obtiene del producto de

$$u_e = \frac{m_r e}{m} = \frac{4,800 \times 0.0002}{19,000} = 5.05 \times 10^{-5}$$

por

$$a(\beta, \xi) = \beta^2 \sqrt{\frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 2.86$$

Por tanto,

$$u_{\max} = 1.44 \times 10^{-4} \text{m}$$



Capítulo 4

Vibraciones forzadas de los sistemas sencillos

Luego de haber examinado un caso particular de vibración forzada en el capítulo anterior, correspondiente a la excitación armónica, en este se estudiará la vibración forzada de sistemas sencillos lineales ante una excitación dinámica cualquiera. En primer lugar se deducirá la expresión que permite calcular la respuesta general, conocida como *integral de Duhamel*. A continuación se tratará el cálculo analítico y numérico de dicha integral y luego se estudiará el *método de aceleración lineal* que permite el análisis numérico de sistemas sencillos tanto lineales como no lineales. Finalmente, se introducirá la noción de *espectros de respuesta*, de gran utilidad en el análisis de estructuras bajo diversos tipos de acciones dinámicas.

4.1 Integral de Duhamel

La figura 4.1 ilustra esquemáticamente una carga dinámica cualquiera $p(t)$. En vista de que para sistemas lineales es válido el principio de superposición, descompondremos esta carga en una serie de impulsos formados por el área sombreada y sumaremos los resultados. Un impulso cualquiera abarca el intervalo de tiempo $(\tau, \tau + d\tau)$. Cuando un impulso así actúa sobre un cuerpo de masa m produce un incremento del momentum $d\mu$, igual al producto de la masa por el cambio de la velocidad del cuerpo dv (ver capítulo 1). Este incremento de velocidad se agrega a la velocidad que ya ha adquirido el cuerpo en el instante τ . Según la segunda ley de Newton, la tasa de cambio del momentum es igual a la fuerza aplicada $p(\tau)$:

$$p(\tau) = \frac{d\mu}{d\tau} = m \frac{dv}{d\tau} \quad (4.1)$$

A diferencia de la deducción hecha al comienzo del capítulo 1, en este caso no se considera la fuerza reactiva ku debido a que el resorte tarda en reaccionar y, cuando lo hace, ya la fuerza externa ha desaparecido. De la ecuación anterior, se deduce que el incremento de la velocidad es

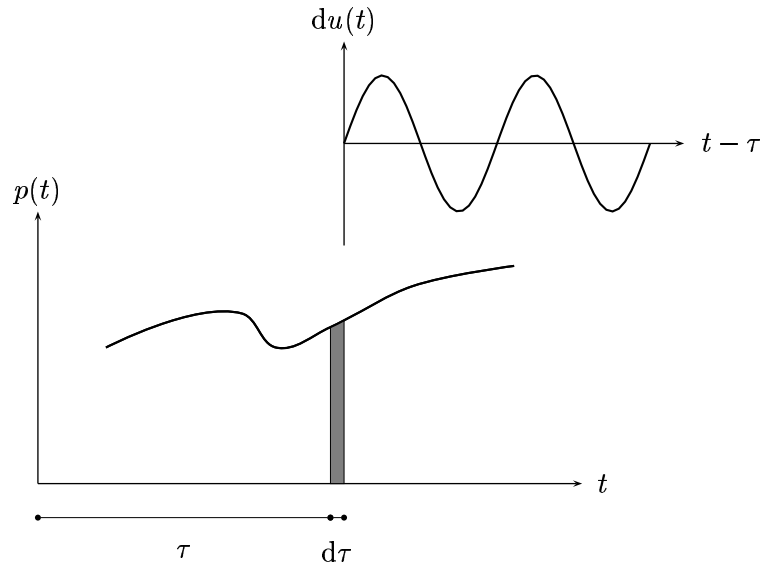


Figura 4.1: Deducción de la integral de Duhamel.

$$d\dot{u} = \frac{p(\tau)d\tau}{m} \quad (4.2)$$

En vista de que la carga externa $p(\tau)$ desaparece en un instante infinitesimal, este incremento de velocidad se puede considerar como la velocidad inicial de la vibración libre que comienza en el instante $t - \tau$. Por tanto, resulta válido hacer uso de la ecuación (2.11),

$$u = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t + u_0 \cos \omega t \quad (4.3)$$

que describe la respuesta libre de un sistema sencillo no amortiguado con condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad. En este caso,

$$\begin{aligned} u_0 &\equiv 0 \\ \dot{u}_0 &\equiv d\dot{u} = \frac{p(\tau)d\tau}{m} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Por tanto, se concluye que el desplazamiento producido en un instante t cualquiera es

$$du = \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (4.5)$$

Como el sistema es lineal, la respuesta total puede obtenerse sumando las contribuciones de cada impulso $p(\tau)$, es decir,

$$u(t) = \int_0^t \frac{p(\tau)}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (4.6)$$

Esta solución se conoce con el nombre de *integral de Duhamel*. En esta ecuación se ha supuesto que las condiciones iniciales del sistema en $t = 0$ son nulas. En el caso general, en que $u_0 \neq 0$, $\dot{u}_0 \neq 0$, la respuesta total está dada por la suma de las ecuaciones (4.3) y (4.6), es decir,

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t + u_0 \cos \omega t + \int_0^t \frac{p(\tau)}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (4.7)$$

La respuesta general de un sistema con fracción de amortiguamiento viscoso ξ se deduce de manera semejante. El resultado es

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_a} \sin \omega_a t + u_0 \cos \omega_a t \right) + \int_0^t \frac{p(\tau)}{m\omega_a} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_a(t - \tau) d\tau \quad (4.8)$$

donde se ha hecho uso repetido de la ecuación (2.52).

Ejemplo 4.1

Calcular la respuesta de un sistema sin amortiguamiento, ante la carga de forma rectangular mostrada en la figura 4.2 con condiciones iniciales nulas.

La carga mostrada queda descrita matemáticamente por la ecuación

$$p(t) = \begin{cases} \bar{p}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases}$$

En consecuencia, la respuesta entre $t = 0$ y $t \leq t_1$ es

$$u(t) = \int_0^t \frac{\bar{p}}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_1$$

lo que da como resultado

$$u(t) = \frac{\bar{p}}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t), \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (4.9)$$

La expresión de la velocidad correspondiente a este desplazamiento es

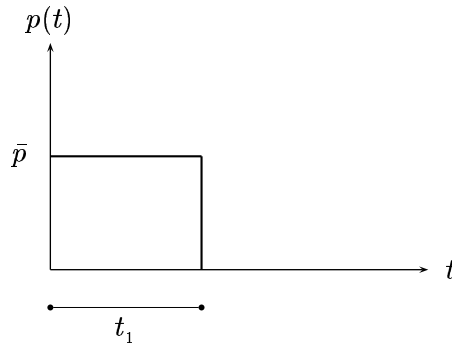


Figura 4.2: Ejemplo 4.1 - Carga externa.

$$\dot{u}(t) = \frac{\bar{p}}{m\omega} \sin \omega t$$

En el instante $t = t_1$ se suspende la vibración forzada y comienza una vibración libre con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u_0 \equiv u(t_1) &= \frac{\bar{p}}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t_1) \\ \dot{u}_0 \equiv \dot{u}(t_1) &= \frac{\bar{p}}{m\omega} \sin \omega t_1 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$u(t) = \frac{\bar{p}}{m\omega^2} [\sin \omega t_1 \sin \omega t + (1 - \cos \omega t_1) \cos \omega t], \quad t > t_1 \quad (4.10)$$



4.2 Solución numérica de la integral de Duhamel

En la práctica, pocas situaciones son susceptibles de ser resueltas analíticamente por medio de la integral de Duhamel, debido a que la mayoría de cargas dinámicas carecen de expresión matemática explícita. Por esa razón se hace necesario recurrir a soluciones de tipo numérico propias del cálculo aproximado de integrales, tales como las reglas de los trapecios, de Simpson, de Romberg, etc. A continuación se expone la solución del problema dinámico por medio de estas técnicas.

Consideremos la parte de la solución (4.8) constituida por la integral de Duhamel:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_a(t-\tau) d\tau \quad (4.11)$$

Al resolver las funciones exponencial y trigonométrica indicadas, esta ecuación toma la forma

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega t} e^{\xi\omega\tau} [\sin \omega_a t \cos \omega_a \tau - \cos \omega_a t \sin \omega_a \tau] d\tau \quad (4.12)$$

por lo cual

$$u(t) = \frac{e^{-\xi\omega t}}{m\omega_a} \left(\sin \omega_a t \int_0^t p(\tau) e^{\xi\omega\tau} \cos \omega_a \tau d\tau - \cos \omega_a t \int_0^t p(\tau) e^{\xi\omega\tau} \sin \omega_a \tau d\tau \right) \quad (4.13)$$

puesto que la variable de integración es τ . En forma compacta, esta expresión se puede poner en la forma

$$u(t) = c(t) \sin \omega_a t - s(t) \cos \omega_a t \quad (4.14)$$

donde

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{e^{-\xi\omega t}}{m\omega_a} \int_0^t p(\tau) e^{\xi\omega\tau} \cos \omega_a \tau d\tau \\ s(t) &= \frac{e^{-\xi\omega t}}{m\omega_a} \int_0^t p(\tau) e^{\xi\omega\tau} \sin \omega_a \tau d\tau \end{aligned} \quad (4.15)$$

En consecuencia la solución numérica de $i(t)$ se convierte ahora en la de las integrales $c(t)$ y $s(t)$. Para ello se pueden aplicar directamente las técnicas convencionales mencionadas, las cuales están basadas en suposiciones sobre la variación del integrando en intervalos discretos de tiempo. Así, si el intervalo de tiempo $[0, t]$ se divide en n - subintervalos iguales $[0, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), \dots, [\tau_{n-1}, \tau_n]$, $\tau_n = t$, espaciados $\Delta\tau$, la regla de los trapecios corresponde a la suposición de que el integrando varía linealmente en el intervalo, mientras que la de Simpson supone una variación parabólica. Recordemos que el valor aproximado de una integral cualquiera

$$d(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (4.16)$$

es, en estas técnicas, el siguiente:

1. Regla de los trapecios:

$$d(t) \approx \frac{\Delta\tau}{2} [f(0) + 2f(\tau_1) + 2f(\tau_2) + \dots + 2f(\tau_{n-1}) + f(\tau_n)] \quad (4.17)$$

donde $f(\tau_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, es el valor del integrando $f(\tau)$ en el tiempo $t_i = i\Delta t$.

2. Regla de Simpson

$$d(t) \approx \frac{\Delta t}{3} [f(0) + 4f(\tau_1) + 2f(\tau_2) + \dots + 4f(\tau_{n-1}) + f(\tau_n)] \quad (4.18)$$

con $i = 2, 4, \dots, n$.¹

En vista de que en Dinámica de Estructuras se requiere con frecuencia calcular la historia completa de la respuesta para todo tiempo t en un rango dado, resulta preferible plantear el cálculo numérico de las integrales $c(t)$ y $s(t)$ en forma recurrente, lo que significa que la respuesta para un tiempo t_i se exprese en función de la respuesta para el instante anterior t_{i-1} . Esto evita el recálculo de las sumas ya realizadas en los pasos anteriores. Llamaremos c_i, s_i el valor de las integrales $c(t), s(t)$ en el instante $t = t_i$ y f_i, g_i el valor de los integrandos $p(\tau) \cos \omega_a \tau, p(\tau) \sin \omega_a \tau$, respectivamente, en $\tau = i\Delta\tau$. Para las dos reglas mencionadas, las ecuaciones recurrentes se expresan, en consecuencia, como sigue:

1. Regla de los trapecios:

$$\begin{aligned} c_i &\approx c_{i-1}e^{-\xi\omega\Delta\tau} + \frac{\Delta\tau}{2m\omega_a}[f_{i-1}e^{-\xi\omega\Delta\tau} + f_i] \\ s_i &\approx s_{i-1}e^{-\xi\omega\Delta\tau} + \frac{\Delta\tau}{2m\omega_a}[g_{i-1}e^{-\xi\omega\Delta\tau} + g_i] \end{aligned} \quad (4.19)$$

2. Regla de Simpson

$$\begin{aligned} c_i &\approx c_{i-2}e^{-2\xi\omega\Delta\tau} + \frac{\Delta\tau}{3m\omega_a}[f_{i-2}e^{-2\xi\omega\Delta\tau} + 4f_{i-1}e^{-\xi\omega\Delta\tau} + f_i] \\ s_i &\approx s_{i-2}e^{-2\xi\omega\Delta\tau} + \frac{\Delta\tau}{3m\omega_a}[g_{i-2}e^{-2\xi\omega\Delta\tau} + 4g_{i-1}e^{-\xi\omega\Delta\tau} + g_i] \end{aligned} \quad (4.20)$$

El programa de MATLAB `dttrapez.m`, que se lista a continuación, calcula la respuesta de un sistema sencillo por el algoritmo expresado en la ecuación (4.19):

```
function [t,d]=dttrapez(p,m,w,xi,dt)
%
%-----
% [t,d]=dttrapez(p,m,w,xi,dt)
%-----
%
% Calcula la integral de Duhamel (respuesta de un sistema
```

¹Nótese que en este caso el número de subintervalos n debe ser par.

```
% sencillo lineal) por la regla de los trapecios.
%
%
% Por: Jorge E. Hurtado G.
%     Universidad Nacional de Colombia
%
%
% p: vector (columna) de carga externa
% m: masa del sistema
% w: frecuencia natural del sistema
% xi: fraccion de amortiguamiento viscoso
% dt: paso de tiempo
%
% t: vector de tiempo
% d: desplazamiento de respuesta
%
%
%-----
%
%
n=length(p);
tmax=dt*n;
t=linspace(0,tmax,n)';
wa=w*sqrt(1-xi^2);
f=p.*cos(wa*t);
g=p.*sin(wa*t);
f1=[0; f(1:n-1)];
g1=[0; g(1:n-1)];
pc=f1*exp(-xi*w*dt)+f;
ps=g1*exp(-xi*w*dt)+g;
pc=pc*dt/m/wa/2;
ps=ps*dt/m/wa/2;
for i=1:n
    if i==1
        c(i,1)=pc(i,1);
        s(i,1)=ps(i,1);
    else
        c(i,1)=c(i-1,1)*exp(-xi*w*dt)+pc(i,1);
        s(i,1)=s(i-1,1)*exp(-xi*w*dt)+ps(i,1);
    end
end
d=c.*sin(wa*t)-s.*cos(wa*t);
figure
plot(t,d)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Desplazamiento')
%
%----- fin
```

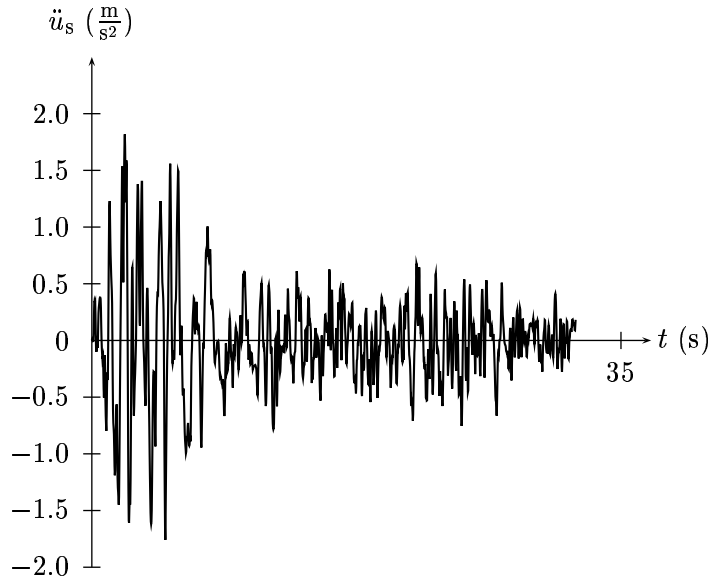


Figura 4.3: Registro del sismo de Tokachi-oki.

Ejemplo 4.2

La figura 4.3 muestra el registro de la aceleración de una componente del sismo de Tokachi-oki, ocurrido en Japón en 1968. El registro se encuentra digitalizado a intervalos de 0.02 s. Calcular la historia de desplazamientos, velocidades y aceleraciones de respuesta de un sistema caracterizado por $T = 1$ s y $\xi = 0.05$, utilizando el programa `dttrapez.m`.

Como $T = 1$ s, $\omega = 2\pi$ rad/s. Antes de usar el programa es necesario obtener el vector de cargas, el cual para el caso sísmico es

$$p(t) = -m\ddot{u}_s(t)$$

Sin embargo, como la masa aparece dividiendo el vector de cargas en la integral de Duhamel (4.6), se concluye que se puede utilizar el programa con una masa cualquiera, p. ej. igual a la unidad. De esta manera, el programa se activa con la orden

```
[t,d]=dttrapez(p,1,2*pi,0.05,0.02)
```

El resultado aparece en la figura 4.4.



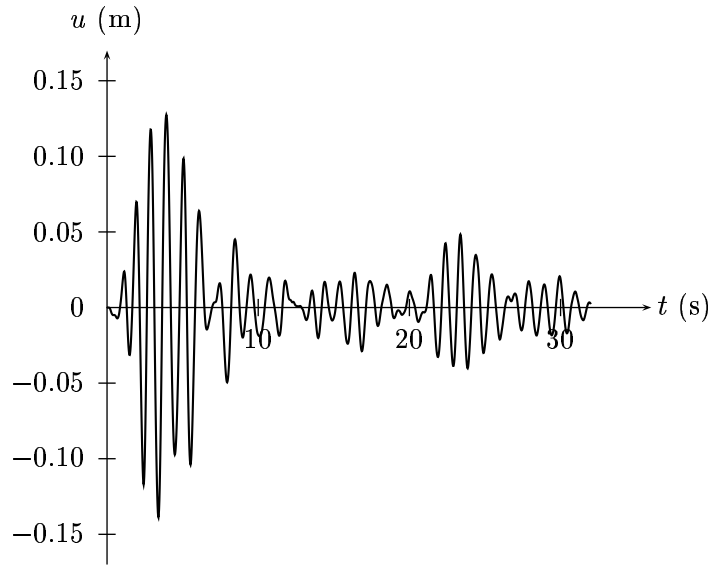


Figura 4.4: Ejemplo 4.1 - Desplazamiento de respuesta.

4.3 Método de la aceleración lineal

Además del método de integración expuesto anteriormente, se han desarrollado diversas técnicas numéricas para estimar la respuesta de estructuras ante excitaciones dinámicas, las cuales resultan de más fácil extensión al caso de sistemas múltiples que la integración numérica de la ecuación de Duhamel. Una de tales técnicas es el *método de la aceleración lineal*, el cual destaca frente a otras alternativas por su sencillez, sin menoscabo de su precisión. Por esta razón lo hemos seleccionado para su exposición en este texto.

La hipótesis de partida del método consiste en la suposición de una variación lineal de la aceleración de respuesta entre dos instantes sucesivos (que denotaremos como 0 y 1), separados un intervalo de tiempo Δt . Esto se aclara con la figura 4.5a, en la que aparece la variación supuesta de la aceleración entre \ddot{u}_0 y \ddot{u}_1 . Si τ es la coordenada de tiempo que recorre el intervalo $[t_0, t_1]$, se tiene que la variación de la aceleración en el intervalo está dada por la ecuación que aparece en la figura 4.5a. Al integrar con respecto a la variable τ se obtiene la expresión de la velocidad en el intervalo:

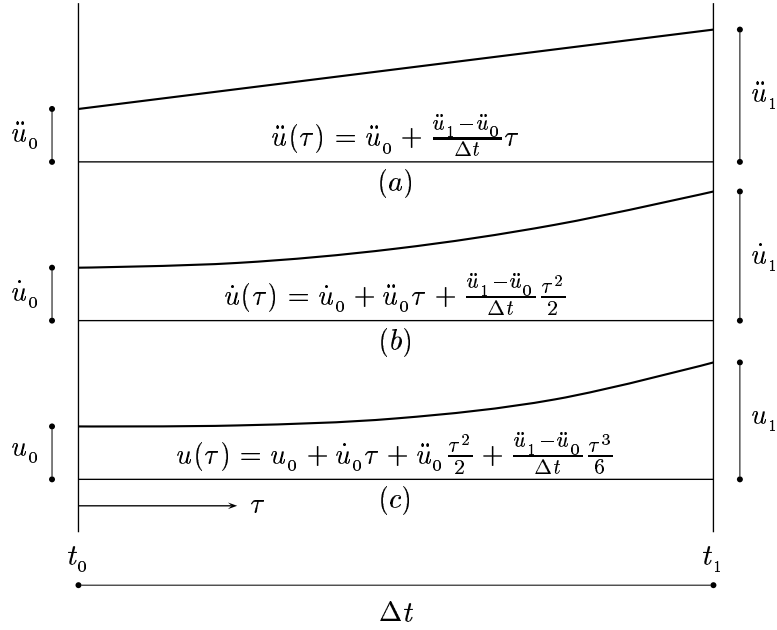


Figura 4.5: Método de la aceleración lineal.

$$\dot{u}(\tau) = \int \ddot{u}(\tau) d\tau = C + \ddot{u}_0 \tau + \frac{\ddot{u}_1 - \ddot{u}_0}{\Delta t} \frac{\tau^2}{2}$$

donde C es una constante de integración cuyo valor se obtiene a partir de la condición de frontera $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$. Por tanto $C = \dot{u}_0$ y

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_0 + \ddot{u}_0 \tau + \frac{\ddot{u}_1 - \ddot{u}_0}{\Delta t} \frac{\tau^2}{2}, \quad (4.21)$$

expresión que aparece en la figura 4.5b. De manera similar se obtiene la ecuación del desplazamiento, que consta en la figura 4.5c. Los valores de la velocidad y el desplazamiento en el final del intervalo ($\tau = \Delta t$) son, entonces,

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_0 + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_0 + \ddot{u}_1)$$

$$u_1 = u_0 + \dot{u}_0 \Delta t + \ddot{u}_0 \frac{\Delta t^2}{3} + \ddot{u}_1 \frac{\Delta t^2}{6} \quad (4.22)$$

De la última de estas expresiones se obtiene

$$\ddot{u}_1 = -\frac{6}{\Delta t^2} u_0 - \frac{6}{\Delta t} \dot{u}_0 - 2\ddot{u}_0 + \frac{6}{\Delta t^2} u_1 \quad (4.23)$$

Al reemplazar esta ecuación en la primera de las relaciones (4.22) se obtiene

$$\dot{u}_1 = -2\dot{u}_0 - \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_0 - \frac{3}{\Delta t} u_0 + \frac{3}{\Delta t} u_1 \quad (4.24)$$

A continuación sustituimos estas dos últimas expresiones en la ecuación del movimiento en el instante t_1 ,

$$m\ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 + ku_1 = p_1$$

donde p_1 es el valor de la carga en dicho momento. El resultado es

$$m\left(-\frac{6}{\Delta t^2} u_0 - \frac{6}{\Delta t} \dot{u}_0 - 2\ddot{u}_0 + \frac{6}{\Delta t^2} u_1\right) + c\left(-2\dot{u}_0 - \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_0 - \frac{3}{\Delta t} u_0 + \frac{3}{\Delta t} u_1\right) + ku_1 = p_1 \quad (4.25)$$

Esta ecuación puede ponerse en la forma

$$\bar{k}u_1 = \bar{p}_1 \quad (4.26)$$

donde

$$\bar{k} = k + \frac{3c}{\Delta t} + \frac{6m}{\Delta t^2} \quad (4.27)$$

y

$$\bar{p}_1 = p_1 + m\left(\frac{6\dot{u}_0}{\Delta t} + \frac{6\ddot{u}_0}{\Delta t^2} + 2\ddot{u}_0\right) + c\left(\frac{3u_0}{\Delta t} + 2\dot{u}_0 + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_0\right) \quad (4.28)$$

Puede verse que la ecuación central (4.26) tiene la forma de la expresión que describe el desplazamiento estático simple de un resorte sometido a la fuerza p_1 . Por tanto, para calcular la respuesta del sistema basta con seguir los siguientes pasos:

1. Calcular la rigidez equivalente \bar{k} (ecuación 4.27).
2. Para cada instante de tiempo,
 - Calcular la carga equivalente al final del intervalo p_1 (ecuación 4.28);
 - Calcular el desplazamiento u_1 (ecuación 4.26);
 - Calcular la velocidad \dot{u}_1 (ecuación 4.24);
 - Calcular la aceleración \ddot{u}_1 (ecuación 4.23);

3. Hacer $u_0 \equiv u_1, \dot{u}_0 \equiv \dot{u}_1, \ddot{u}_0 \equiv \ddot{u}_1$ y regresar al paso anterior.

Este algoritmo se encuentra codificado en el programa `dmaclin.m` que se lista enseguida. Nótese que su uso es igual al del programa `dttrapez.m`.

```
function [t,d,v,a]=dmaclin(p,m,w,xi,dt)
%
%-----
% [t,d,v,a]=dmaclin(p,m,w,xi,dt)
%-----
%
% Calcula la respuesta de un sistema
% sencillo lineal por el metodo de la aceleracion lineal.
%
%
% Por: Jorge E. Hurtado G.
%      Universidad Nacional de Colombia
%
%
% p: vector (columna) de carga externa
% m: masa del sistema
% w: frecuencia natural del sistema
% xi: fraccion de amortiguamiento viscoso
% dt: paso de tiempo
%
% t: vector de tiempo
% d: desplazamiento de respuesta
% v: velocidad de respuesta
% a: aceleracion de respuesta
%
%
%-----
%
%
n=length(p);
tmax=dt*n;
t=linspace(0,tmax,n)';
d0=0;
v0=0;
a0=0;
%
k=m*w^2;
c=2*m*w*xi;
kbar=k+3*c/dt+6*m/(dt^2);
ikbar=1/kbar;
%
for i=1:n
    p1=p(i,:);
    dp=m*(6*d0/dt^2+6*v0/dt+2*a0);
```

```
dp=dp+c*(3*d0/dt+2*v0+dt*a0/2);
pbar=p1+dp;
d1=ikbar*pbar;
v1=3*(d1-d0)/dt-2*v0-dt*a0/2;          % ecuacion (24)
a1=6*(d1-d0)/dt^2 -6*v0/dt-2*a0;        % ecuacion (23)
d(i,1)=d1;
v(i,1)=v1;
a(i,1)=a1;
d0=d1;
v0=v1;
a0=a1;
end
%
figure
plot(t,d)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Desplazamiento');
figure
plot(t,v)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Velocidad');
figure plot(t,a)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Aceleracion');
%
%
%----- fin
```

Ejemplo 4.3

La figura 4.6 muestra una carga de forma triangular, la cual representa, de manera esquemática, la acción producida por una explosión. Calcular la respuesta de un sistema de masa unitaria con propiedades $T = 0.25$ s y $\xi = 0.05$ utilizando el programa **dmaclin.m**.

Aunque es posible resolver este problema de manera exacta por medio de la integral de Duhamel, es interesante examinar su tratamiento por un método numérico como el descrito en el entorno de MATLAB. La carga externa queda descrita por la ecuación

$$p(t) = \begin{cases} 100t, & 0 \leq t \leq 0.1s \\ \frac{100}{9}(1-t), & 0.1s < t < 1s \end{cases}$$

En MATLAB, para un tiempo total de 6 segundos de cálculo de la respuesta, esta carga puede crearse de la manera siguiente:

```
t=linspace(0,6,3001)';
```

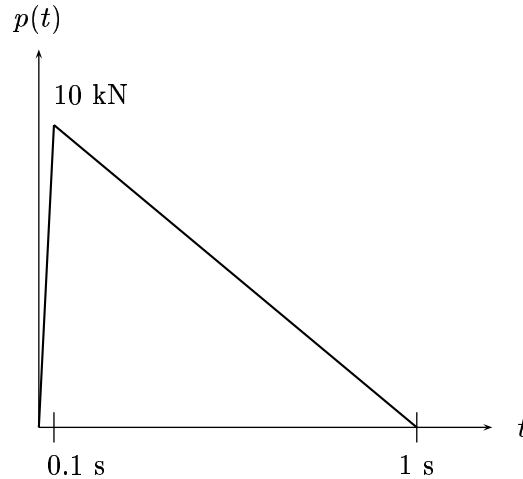


Figura 4.6: Ejemplo 4.3 - Carga externa.

```
p1=100*t(1:51);
p2=100*(1-t(52:501))/9;
p3=zeros(1,3001-501)';
p=[p1; p2; p3];
```

El uso de 3001 valores implica hacer el cálculo con un Δt igual a 0.002 s, el cual resulta suficientemente preciso para captar la respuesta del sistema en el corto intervalo de crecimiento de la carga. De acuerdo con los datos, la frecuencia del sistema es $\omega = 2\pi/0.25 = 8\pi$. En consecuencia, el programa se activa por medio de la instrucción

```
[t,d,v,a]=dmaclin(p,1,8*pi,0.05,0.002);
```

La historia de la respuesta de desplazamiento aparece en la figura 4.7. Puede observarse que en el tiempo de duración de la carga la estructura vibra prácticamente en un sólo lado y que, a partir del momento en que se anula la carga, la estructura sigue vibrando en forma libre amortiguada.



4.4 Espectros de respuesta

Al igual que en el análisis estático de estructuras ante diversas cargas externas posibles, en Dinámica de Estructuras es de interés conocer los valores máximos absolutos de las respuestas,

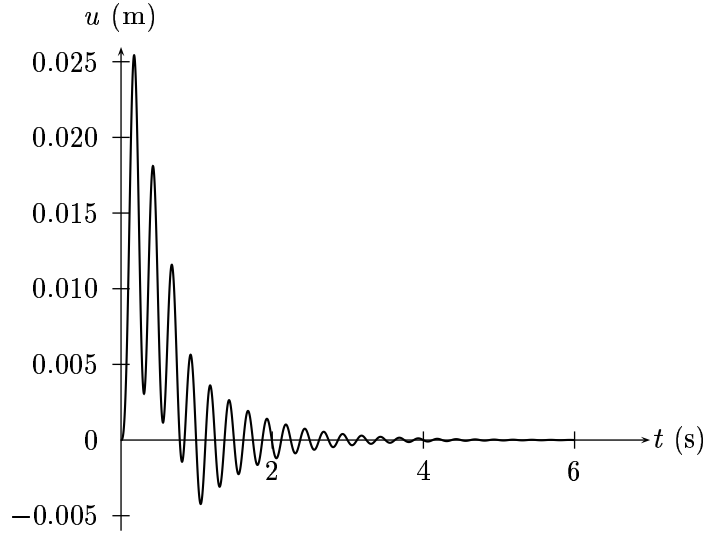


Figura 4.7: Ejemplo 4.3 - Desplazamiento de respuesta.

debido a que éstos gobiernan claramente el diseño. Los *espectros de respuesta* son gráficos que recogen la información referente a las respuestas máximas de varios sistemas sencillos de diferente período pero igual fracción de amortiguamiento ante una misma excitación. El interés de estos gráficos va más allá de los sistemas sencillos, toda vez que en los sistemas múltiples de tipo lineal o moderadamente no lineal, existen siempre ciertos períodos que aparecen como dominantes y, por tanto, controlan ampliamente la respuesta. En consecuencia, a partir de un espectro de respuesta, calculado sobre un sistema sencillo, se puede estimar la respuesta máxima de un sistema complejo.

En general se pueden construir espectros de diferentes respuestas. Los más usuales en sistemas lineales son los de desplazamiento, velocidad y aceleración. Para sistemas no lineales, además de los anteriores se suelen calcular otros espectros, tales como de energía disipada, índices de daño, etc. En esta sección nos limitaremos al cálculo de los espectros de respuesta básicos de desplazamiento, velocidad y aceleración, los cuales están definidos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 S_d(\xi, T, p(t)) &= \max(|u(t, \xi, T)|) \\
 S_v(\xi, T, p(t)) &= \max(|\dot{u}(t, \xi, T)|) \\
 S_a(\xi, T, p(t)) &= \max(|\ddot{u}(t, \xi, T)|)
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

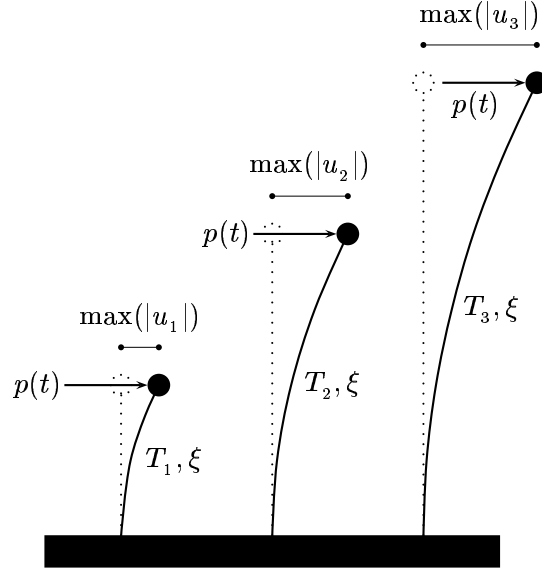


Figura 4.8: Cálculo de un espectro de respuesta.

Estas ecuaciones indican que el espectro de desplazamiento $S_d(\xi, T, p(t))$ es una función de la fracción de amortiguamiento ξ y del período del sistema T , al igual que de la carga externa $p(t)$, común a todos los sistemas evaluados para la construcción del espectro (figura 4.8). La función está definida simplemente como el máximo desplazamiento $u(t)$ que tenga el sistema en toda su historia de respuesta, en valor absoluto. Igual interpretación tienen los espectros de velocidad y aceleración.

En el caso de sismos, el espectro de aceleración se define en términos de la aceleración absoluta,

$$S_a(\xi, T, \ddot{u}_s(t)) = \max(|\ddot{u}_s(t) + \ddot{u}(t, \xi, T)|) \quad (4.30)$$

ya que $\ddot{u}_s(t) + \ddot{u}(t)$ es la aceleración total que sufre la masa del sistema (ecuación 1.10).

En las figuras 4.9 a 4.11 aparecen los espectros de desplazamiento, velocidad y aceleración para fracciones de amortiguamiento ξ iguales a 0, 0.02, 0.05 y 0.1, para sistemas sencillos lineales con períodos comprendidos entre 0.05 y 3 s, con un incremento de período de 0.05, sometidos al acelerograma del sismo de Tokachi-oki (figura 4.3). El cálculo se realizó por el método de la aceleración lineal, expuesto más arriba, empleando el programa de MATLAB `desplin.m`:


```
function [T,Sd,Sv,Sa]=desplin(as,Tmin,Tmax,DT,vxi,dt)
%
%-----
% [T,Sd,Sv,Sa]=desplin(as,Tmin,Tmax,DT,vxi,dt)
%-----
%
% Calcula los espectros de respuesta de un sistema
% sencillo lineal por el metodo de la aceleracion lineal.
%
%
% Por: Jorge E. Hurtado G.
%      Universidad Nacional de Colombia
%
%
% as:    vector (columna) de la aceleracion del suelo
% Tmin:  periodo minimo de calculo
% Tmax:  periodo maximo de calculo
% DT:    incremento del periodo
% vxi:   vector que contiene las fracciones de amortiguamiento
%        viscoso para las cuales se han de calcular los espectros
% dt:    paso de tiempo del acelerograma
%
% Sd: espectro de desplazamiento
% Sv: espectro de velocidad
% Sa: espectro de aceleracion
%
%
%-----
%
%
% l=length(vxi);
% m=(Tmax-Tmin)/DT+1;
%
% T=linspace(Tmin,Tmax,m)';
% W=2*pi./T;
%
% for i=1:l
%     xi=vxi(i);
%     for j=1:m
%         w=W(j);
%         [d,v,a]=dmaclin1(-as,1,w,xi,dt);
%         Sd(i,j)=max(abs(d));
%         Sv(i,j)=max(abs(v));
%         Sa(i,j)=max(abs(as+a));
%     end
% end
%
% figure
```

```

plot(T,Sd)
xlabel('Periodo')
ylabel('Espectro de desplazamiento');
figure
plot(T,Sv)
xlabel('Periodo')
ylabel('Espectro de velocidad');
figure
plot(T,Sa)
xlabel('Periodo')
ylabel('Espectro de aceleracion');
%
%
%----- fin

```

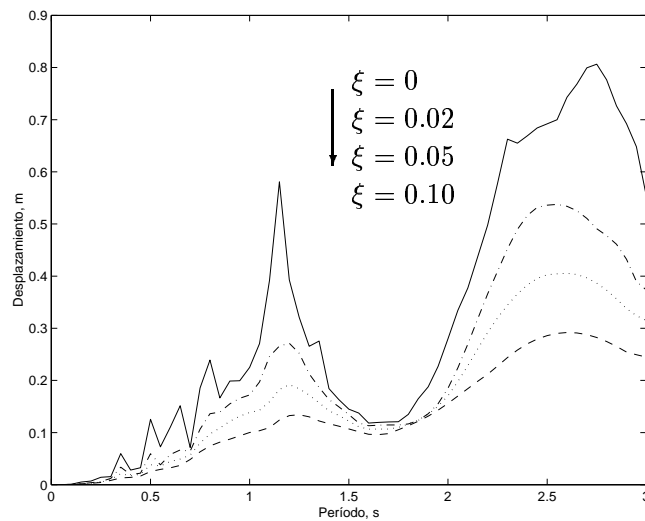


Figura 4.9: Espectros de desplazamiento del sismo de Tokachi-oki.

Puede verse que a medida que crece la fracción de amortiguamiento disminuye el impacto del sismo. Además, se observa que el efecto de este tipo de cargas es diferente si se juzga en términos de desplazamiento o aceleración. Por una parte, los desplazamientos máximos son mayores a medida que aumenta el período del sistema. Por la otra, el espectro de S_a muestra una zona definida de altas aceleraciones de respuesta, acompañada de dos ramas de atenuación hacia la derecha y la izquierda. Esto indica que para estructuras de bajo período se tendrán altas aceleraciones y moderados desplazamientos máximos, mientras que en la zona de largos períodos se pueden anticipar muy pequeñas aceleraciones pero grandes desplazamientos. Finalmente, para períodos muy bajos se tienen desplazamientos máximos

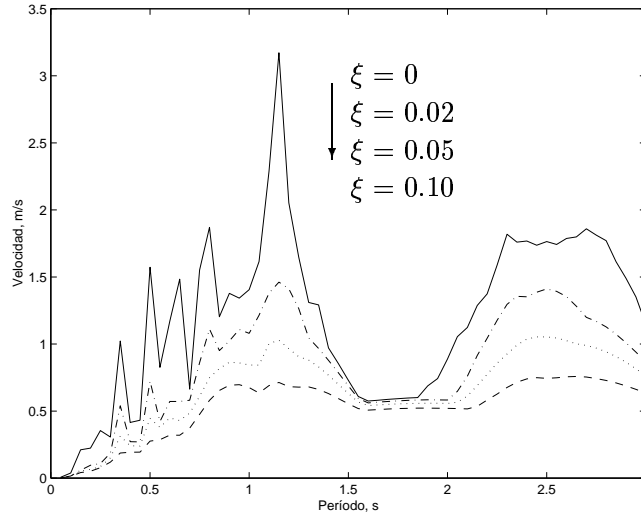


Figura 4.10: Espectros de velocidad del sismo de Tokachi-oki.

muy pequeños y aceleraciones moderadas. Huelga decir que, desde un punto de vista global y un tanto grueso, los rasgos mostrados por los espectros de este registro se dan típicamente al analizar los registros de sismos tomados en otras partes del mundo. Sin embargo, para cada región sísmica se hace necesario precisar los detalles de las tendencias espectrales para fines de diseño.

Puede demostrarse fácilmente que entre los espectros de respuesta sísmica se cumplen las siguientes relaciones aproximadas:

$$S_d(\xi, T, p(t)) \approx \frac{S_v(\xi, T, p(t))}{\omega} \approx \frac{S_a(\xi, T, p(t))}{\omega^2} \quad (4.31)$$

Estas relaciones no sólo son útiles para calcular un espectro a partir de otro, sino también para facilitar la deducción de algunas expresiones prácticas para el diseño, como se verá más adelante.

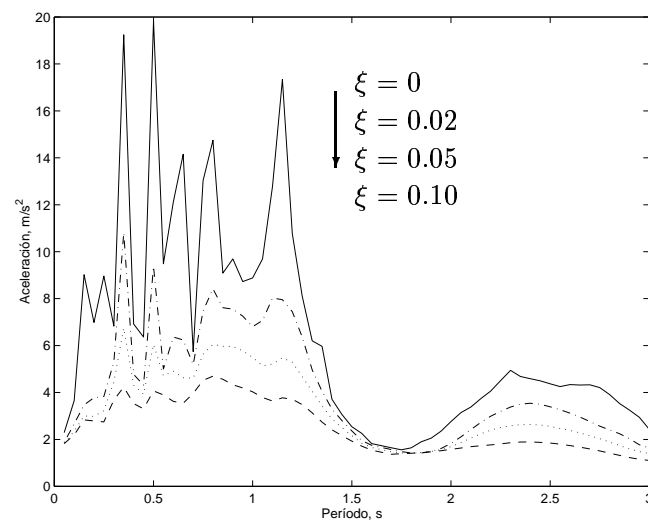


Figura 4.11: Espectros de aceleración del sismo de Tokachi-oki.

Capítulo 5

Propiedades estructurales de los sistemas múltiples

Se denomina *sistema múltiple* a un modelo estructural que tiene varios grados de libertad, en el sentido en que este término se entiende en Dinámica de Estructuras, es decir, como direcciones de aceleración (traslacional o rotacional) de una masa concentrada cualquiera. Esto los diferencia de los sistemas continuos, que se caracterizan por un número infinito de grados de libertad.

En este capítulo se estudiará la obtención de las propiedades estructurales básicas de los sistemas lineales de varios grados de libertad. Se examinará en primer lugar las ecuaciones matriciales del movimiento y la construcción de las matrices de masa y rigidez para sistemas que se puedan modelar como viga de cortante. Luego se tratará la formación de dichas matrices para el caso más general y la condensación de la matriz de rigidez según los principales grados de libertad dinámicos.

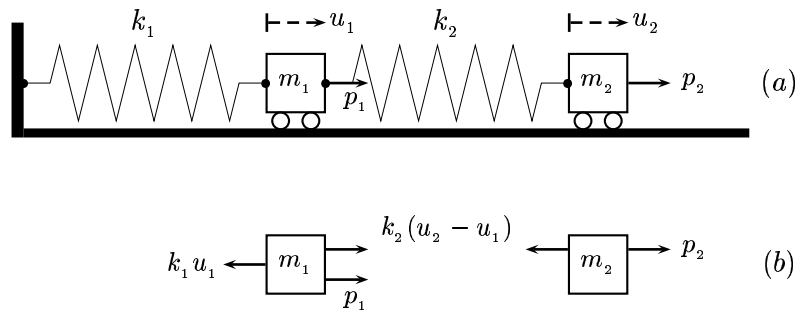


Figura 5.1: Modelo de dos grados de libertad sin amortiguamiento.

5.1 Ecuaciones matriciales del movimiento

Examinemos en primera instancia un problema sencillo, cual es el constituido por dos cuerpos rígidos de masas m_1 y m_2 , unidos en serie por dos resortes elásticos de rigideces k_1 y k_2 (figura 5.1a). Los desplazamientos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se miden a partir de un punto cualquiera de los cuerpos. Los diagramas de fuerzas de la figura 5.1b indican que las ecuaciones de equilibrio de ambos cuerpos son

$$\begin{aligned} p_1 + k_2(u_2 - u_1) - k_1 u_1 &= m_1 \ddot{u}_1 \\ p_2 - k_2(u_2 - u_1) &= m_2 \ddot{u}_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Después de organizar los términos se obtiene

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 &= p_1 \\ m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + k_2 u_2 &= p_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

lo cual puede expresarse de manera matricial en la forma

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (5.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{m} &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{k} &= \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{p} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Las ecuaciones anteriores han sido deducidas a partir de simples consideraciones de equilibrio. Para el análisis de sistemas de muchos grados de libertad, sin embargo, resulta más práctico construir de manera directa las matrices de masa y rigidez, \mathbf{m} y \mathbf{k} , de acuerdo a un vector pre-establecido de desplazamientos \mathbf{u} . La ecuación (5.3) puede expresarse en la forma

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_R = \mathbf{p} \quad (5.5)$$

donde \mathbf{f}_I es el *vector de fuerzas de inercia* y \mathbf{f}_R el *vector de fuerzas de restauración*. La expresión (5.5) no es, pues, otra cosa que una ecuación de equilibrio de fuerzas, en la que los elementos de los vectores de la izquierda tienen la forma general

$$\begin{aligned} f_{1,i} &= m_{i1} \ddot{u}_1 + m_{i2} \ddot{u}_2 + \dots + m_{in} \ddot{u}_n \\ f_{R,j} &= k_{j1} u_1 + k_{j2} u_2 + \dots + k_{jn} u_n \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde se ve que los términos m_{ij} y k_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ admiten la interpretación de *coeficientes de influencia* que reflejan el efecto del desplazamiento o la aceleración i en el grado de libertad j . En la sección siguiente examinaremos con más detalle la construcción de las matrices que forman estos coeficientes.

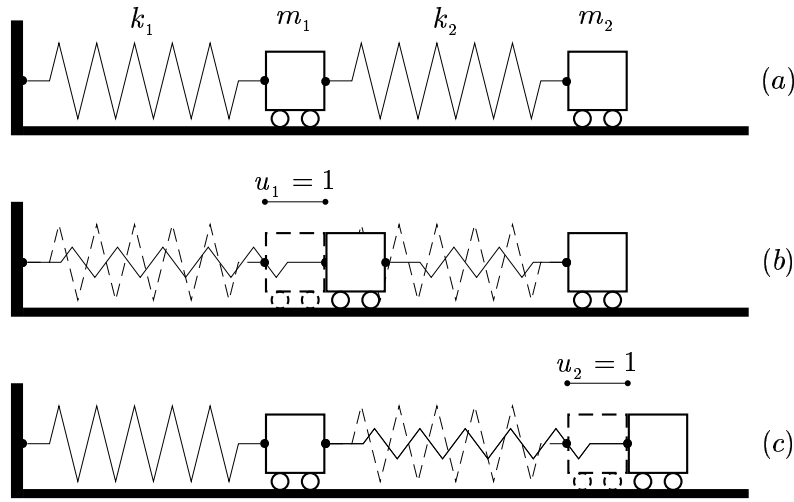


Figura 5.2: Construcción de la matriz de rigidez.

5.2 Vigas de cortante

Consideremos en primer lugar un modelo conocido como *viga de cortante*, nombre que se explica por razones que quedarán claras en lo que sigue. Deduciremos en primer lugar la matriz de rigidez. Se define el elemento k_{ij} de dicha matriz \mathbf{k} como *la fuerza que se debe aplicar en el grado de libertad i cuando en j tiene lugar un desplazamiento unitario, siendo todos los desplazamientos restantes iguales a cero*. Esto se comprende más claramente por

medio de la figura 5.2, en la que se muestra de nuevo el modelo de dos cuerpos rígidos en serie de la figura 5.1. En la figura 5.2a se somete el primer cuerpo a un desplazamiento igual a la unidad, manteniendo el segundo en su posición inicial, de acuerdo con la definición de k_{ij} . Por tanto se requiere una fuerza igual a

$$k_{11} = k_1 + k_2$$

para desplazar el cuerpo 1 la unidad –lo cual a su vez implica estirar y comprimir los resortes de rigideces k_1 y k_2 , respectivamente – sin que se desplace el cuerpo 2. Esto indica que la suma anterior corresponde al término k_{11} de la matriz de rigidez, puesto que se trata de la fuerza aplicada en el grado de libertad 1 cuando en él mismo tiene lugar un desplazamiento unitario. De igual manera, el segundo cuerpo reacciona con una fuerza k_2 , dirigida en sentido negativo, al empuje que se ocasiona en él por el desplazamiento unitario del primero. Por tanto $k_{21} = -k_2$. De manera semejante, para aplicar un desplazamiento unitario en el grado de libertad 2 se requiere una fuerza $k_{22} = k_2$, mientras que para evitar que el cuerpo 1 sea desplazado hacia la derecha se necesita una fuerza $k_{12} = -k_2$. Por tanto,

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

que coincide con la matriz de la ecuación (5.5). Nótese que la matriz de rigidez es simétrica, puesto que $k_{ij} = k_{ji}$. Esto se demuestra fácilmente por medio del *principio de reciprocidad de los trabajos de Maxwell-Betti*, que se encuentra en textos básicos de Análisis de Estructuras.

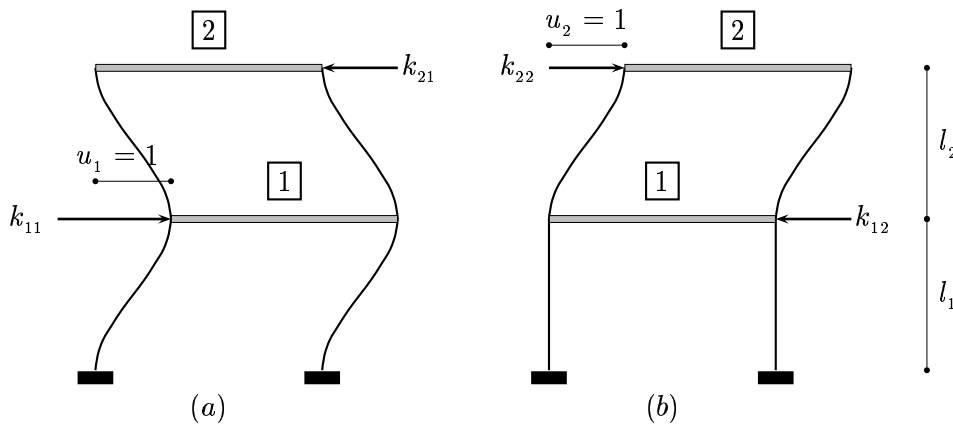


Figura 5.3: Pórtico modelado como viga de cortante.

El modelo estudiado hasta aquí describe adecuadamente el comportamiento de un pórtico como el mostrado en la figura 5.3. Tal modelo se conoce como *viga de cortante*. En él, las vigas

se consideran infinitamente rígidas, por lo cual el giro en los nudos se encuentra restringido. La fuerza necesaria para causar una traslación unitaria de una columna de longitud l y rigidez de curvatura EI es

$$\frac{12EI}{l^3} \quad (5.8)$$

En consecuencia, para el pórtico deformado de la figura 5.3a, la rigidez k_{11} es la necesaria para causar un desplazamiento unitario de las dos columnas del piso 1 y las dos del piso 2. Si las columnas de cada piso son iguales entre sí, tenemos

$$k_{11} = 2 \times \frac{12EI_1}{l_1^3} + 2 \times \frac{12EI_2}{l_2^3} = \frac{24EI_1}{l_1^3} + \frac{24EI_2}{l_2^3} \quad (5.9)$$

Por otra parte, la rigidez k_{21} es la fuerza que se debe aplicar en el piso 2 para evitar su desplazamiento, dado que ha ocurrido una traslación unitaria en el piso 1. En consecuencia,

$$k_{21} = -\frac{24EI_2}{l_2^3} \quad (5.10)$$

Análogamente, cuando se impone a la estructura un desplazamiento unitario en el piso 2, se obtiene

$$\begin{aligned} k_{12} &= -\frac{24EI_2}{l_2^3} \\ k_{22} &= \frac{24EI_2}{l_2^3} \end{aligned} \quad (5.11)$$

de acuerdo con la figura 5.3b. Como resultado, la matriz de rigidez del pórtico completo es

$$\mathbf{k} = 24E \begin{pmatrix} \frac{I_1}{l_1^3} + \frac{I_2}{l_2^3} & -\frac{I_2}{l_2^3} \\ -\frac{I_2}{l_2^3} & \frac{I_2}{l_2^3} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

La generalización para una viga de cortante de n masas con r_i columnas en cada nivel i , representada esquemáticamente en la figura 5.4, es inmediata:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 & \dots & 0 \\ -\kappa_2 & \kappa_2 + \kappa_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \kappa_{n-1} + \kappa_n & -\kappa_n \\ 0 & \dots & -\kappa_n & \kappa_n \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

En esta ecuación

$$\kappa_i = \sum_{j=1}^{r_i} \frac{12EI_j}{l_i^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

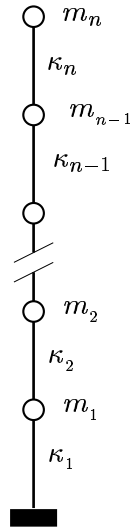


Figura 5.4: Modelo de una viga de cortante.

Este modelo se denomina de cortante por la razón siguiente: Si consideramos un problema estático con $n = 2$, por simplicidad, tendremos dos fuerzas aplicadas p_1 y p_2 , tales que

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Las fuerzas cortantes acumuladas desde el segundo nivel valen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + p_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Si llamamos *deriva del piso i* , d_i , al desplazamiento relativo de un piso i con respecto al anterior ($i - 1$) se puede concluir fácilmente que

$$\begin{aligned} d_1 &= u_1 = \frac{v_1}{k_1} \\ d_2 &= u_2 - u_1 = \frac{v_2}{k_2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

lo cual indica que para este tipo de sistemas, en cada piso la deriva es igual a la fuerza cortante dividida por la rigidez, lo cual explica su denominación. Obsérvese, de paso, la semejanza existente entre la ecuación

$$d_i = \frac{v_i}{k_i}$$

y la que vincula la distorsión angular γ a la tensión cortante τ en Resistencia de Materiales:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

donde G es el módulo de rigidez. El paralelo entre ambas expresiones no es casual, ya que en vigas de cortante la distorsión angular de un nivel cualquiera i estaría dada por la relación entre la deriva del piso y su altura con respecto al nivel inmediatamente inferior.

A partir de lo deducido con el modelo de dos cuerpos rígidos en la sección anterior, queda claro que la expresión de la matriz de masa de una viga de cortante es, en general, la siguiente:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m_n \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

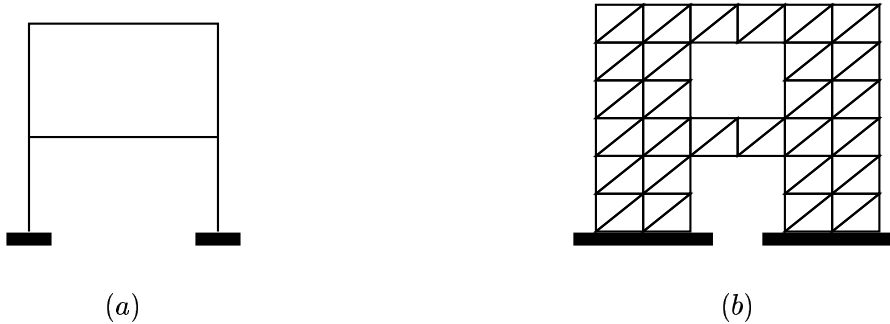


Figura 5.5: Modelos de elementos finitos. (a): Con elementos 1D; (b): Con elementos 2D.

5.3 Pórticos planos

Las estructuras más complejas se modelan usualmente por medio de elementos finitos. Como ejemplo, la figura 5.4a muestra un modelo de elementos unidimensionales (1D) que resulta

adecuado para pórticos en los que la longitud de los elementos es muy superior a las dimensiones del área seccional, tal como es el caso usual en ese tipo de estructuras. Por el contrario, un modelo con elementos 2D como el de la figura 5.5b resulta necesario para estructuras tales como los muros acoplados, en los que no se cumple la condición anterior.

Dentro de los límites de este capítulo no es posible abordar un estudio detallado de este método. Por ello, nos limitaremos a una síntesis sumaria de los resultados correspondientes a elementos 1D sometidos a flexión que componen modelos de pórticos, vigas continuas, etc. La figura 5.6 ilustra el cálculo de los valores elementales de rigidez de una barra en flexión correspondientes a los grados de libertad indicados. La matriz de rigidez de la barra para esta situación es

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

A partir de estos valores resulta posible construir las matrices de rigidez de las estructuras mencionadas. Por ejemplo, para el pórtico mostrado en la figura 5.7a, la primera columna de la matriz de rigidez se obtiene de la manera indicada en la figura 5.7b, haciendo $u_1 = 1$ y manteniendo $u_2 = u_3 = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} = \frac{24EI}{h^3} \\ k_{21} &= \frac{6EI}{h^2} \\ k_{31} &= \frac{6EI}{h^2} \end{aligned}$$

en donde la rigidez k_{11} expresa la fuerza total necesaria para causar el desplazamiento unitario indicado, lo que implica a las dos columnas, mientras que las fuerzas k_{21} y k_{31} son fuerzas meramente reactivas necesarias para impedir los giros en los grados de libertad 2 y 3. Análogamente, la segunda columna corresponde a la situación ilustrada por la figura 5.7b, es decir, $u_2 = 1, u_1 = 0, u_3 = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} k_{22} &= \frac{4EI}{h} + \frac{4EI}{l} \\ k_{12} &= \frac{6EI}{h^2} \\ k_{32} &= \frac{2EI}{l} \end{aligned}$$

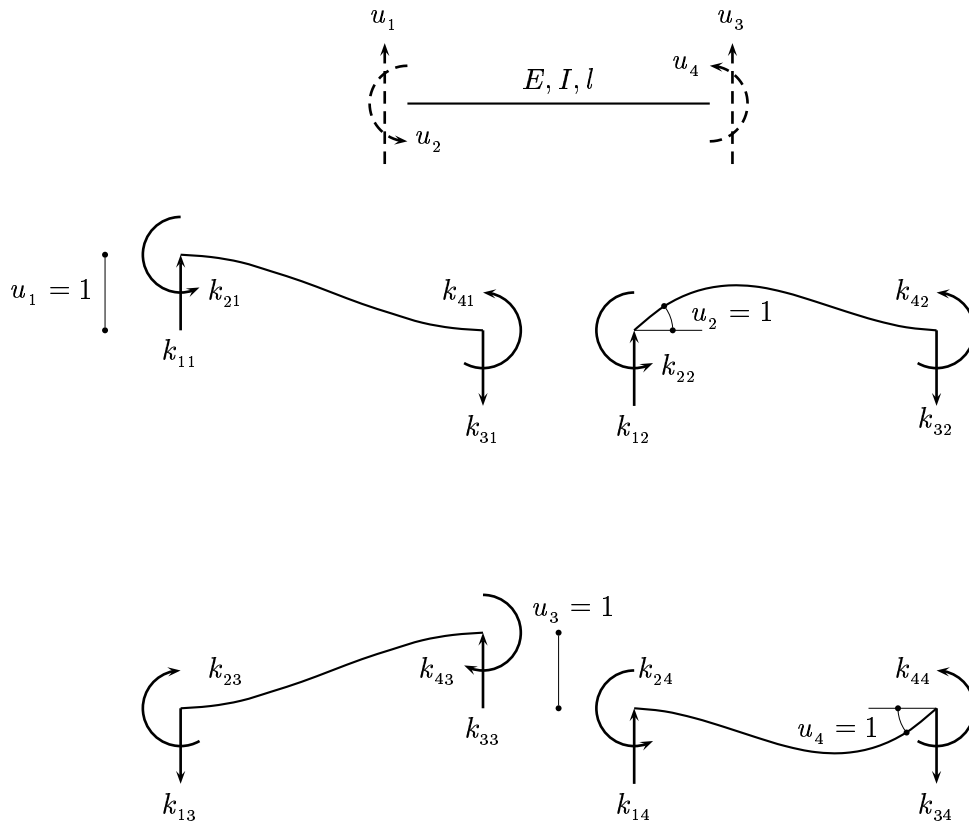


Figura 5.6: Rigideces elementales de una barra.

De manera similar se obtienen los elementos de la tercera columna:

$$k_{33} = \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l}$$

$$k_{13} = \frac{6EI}{h^2}$$

$$k_{23} = \frac{2EJ}{l}$$

En consecuencia, la matriz de rigidez, según los grados de libertad de tipo estático, es

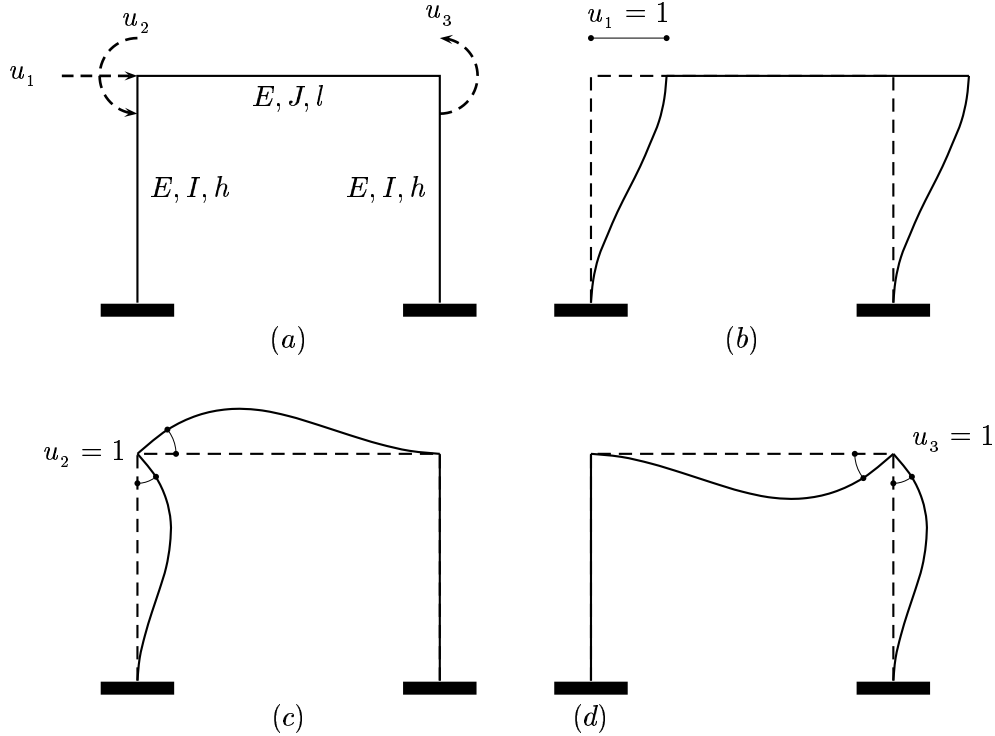


Figura 5.7: Construcción de la matriz de rigidez de un pórtico - Método directo.

$$\mathbf{k}^e = \begin{pmatrix} \frac{24EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{2EJ}{l} & \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Para los programas de análisis automatizado de estructuras aporricadas por medio de computador, resulta más práctico ensamblar directamente la matriz de rigidez de la estructura global a partir de las matrices elementales como la dada por la ecuación (5.18). Este ensamblaje se realiza a partir de la correspondencia entre la numeración de cada grado de libertad en coordenadas locales y globales, acumulando los términos de rigidez que converjan en la misma posición en la matriz de rigidez global. Este proceso se realiza de la manera siguiente: Consideremos los elementos

$$\begin{pmatrix} k_{jj} & k_{jl} \\ k_{lj} & k_{ll} \end{pmatrix}$$

de la matriz de rigidez elemental (5.18) de alguna barra componente de la estructura. Supong-

amos que estos dos grados de libertad j y l están identificados en la numeración global como i y k , respectivamente. En consecuencia, la submatriz anterior puede ser escrita en la forma

$$\begin{matrix} & i & k \\ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} k_{jj} & k_{jl} \\ k_{lj} & k_{ll} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Entonces, la contribución de estos elementos de la matriz elemental a la matriz de rigidez global se expresa simbólicamente en la forma

$$\begin{matrix} & i & & k \\ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \dots & +k_{jj} & \dots & +k_{jl} & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \dots & +k_{lj} & \dots & +k_{ll} & \dots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (5.20)$$

donde el signo $+$ frente a las rigideces elementales denota el proceso de acumulación de los valores aportados por cada barra en la posición respectiva. Así, en el ejemplo de la figura 5.7, las contribuciones de las diferentes barras se pueden deducir a partir de la ecuaciones (5.18) y (5.20) y la figura 5.8, en la cual se ha seguido la misma nomenclatura de los grados de libertad locales usada en la figura 5.6. De esta manera, se tienen las correspondencias entre las numeraciones local y global de los grados de libertad que aparecen en la tabla 5.1.

Tabla 5.1: Numeraciones local y global de los nodos

Barra	Numeración local	Numeración global
1	1	1
	2	2
2	2	2
	4	3
3	1	1
	2	3

De acuerdo con esto, la matriz de rigidez global se compone de la siguiente manera:

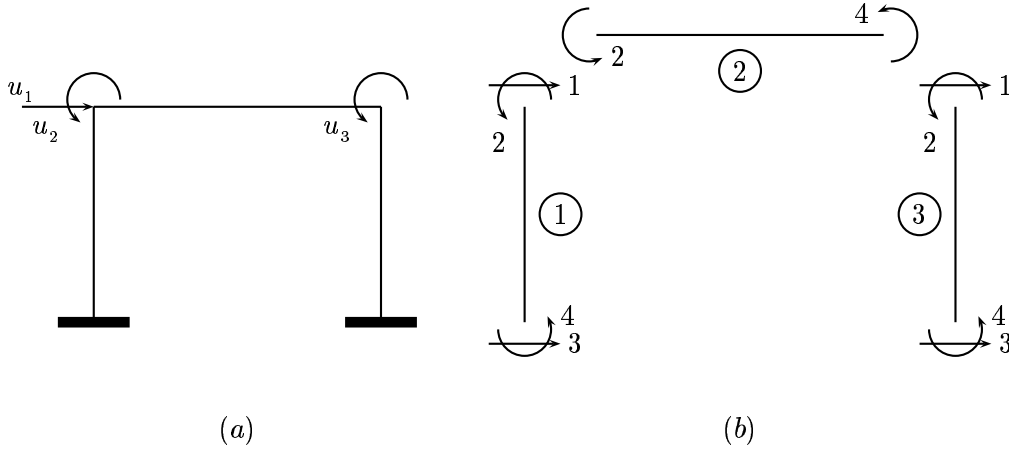


Figura 5.8: Construcción de la matriz de rigidez de un pórtico - Método automático.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}^e &= \underbrace{\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Elemento 1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{24} \\ 0 & k_{42} & k_{44} \end{pmatrix}}_{\text{Elemento 2}} + \underbrace{\begin{pmatrix} k_{11} & 0 & k_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & 0 & k_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Elemento 3}} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{12EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Elemento 1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ 0 & \frac{2EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} \end{pmatrix}}_{\text{Elemento 2}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{h^2} & 0 & \frac{4EI}{h} \end{pmatrix}}_{\text{Elemento 3}}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

lo que da como resultado la ecuación (5.19) obtenida por el método directo.

Si se utilizase esta matriz \mathbf{k}^e para el análisis dinámico, bajo la consideración de que la única masa concentrada es la correspondiente a la traslación del grado de libertad 1, la matriz de masa adecuada sería

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

ya que no hay masas rotacionales a los grados de libertad 2 y 3. En la práctica, para el análisis de un edificio o de un puente, en los cuales se emplee un pórtico como el examinado hasta aquí, la masa se podrá considerar concentrada en el nivel superior, por lo que desde el punto de vista dinámico sólo hace falta considerar un grado de libertad. En general, los pórticos planos se suelen analizar dinámicamente considerando como grados de libertad

las traslaciones laterales de cada piso. Por tanto, resulta conveniente buscar una matriz de rigidez de menor tamaño, adecuada al número de masas concentradas. Este procedimiento se denomina *condensación estática*, dado que en él se plantea un problema estático ficticio

$$\mathbf{k}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{p}^e$$

en el cual las fuerzas asociadas a los grados de libertad sin masa (2 y 3 en el presente caso) se consideran nulas. En consecuencia, si el vector de desplazamientos \mathbf{u}^e se hace una partición según los dos tipos de grados de libertad p y s (esto es, principales y secundarios), la matriz de rigidez de la estructura, formulada según el conjunto completo de grados de libertad $p + s$, puede condensarse para obtener una matriz menor, de tamaño $p \times p$, con el fin de simplificar el cálculo dinámico. Para ello se hacen nulas las fuerzas asociadas a los grados de libertad secundarios en un problema estático:

$$\mathbf{p}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_p \\ \mathbf{p}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_p \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

En consecuencia,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{k}_{pp} & \mathbf{k}_{ps} \\ \mathbf{k}_{sp} & \mathbf{k}_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_p \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{pp} \mathbf{u}_p + \mathbf{k}_{ps} \mathbf{u}_s &= \mathbf{p}_p \\ \mathbf{u}_s &= -\mathbf{k}_{ss}^{-1} \mathbf{k}_{sp} \mathbf{u}_p \end{aligned}$$

Sustituyendo la segunda expresión en la primera, se llega finalmente a que los desplazamientos principales equivalen a

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{p}_p \quad (5.25)$$

donde la matriz \mathbf{k} es la matriz condensada según los grados de libertad dinámicos o principales, de valor

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{pp} - \mathbf{k}_{ps} \mathbf{k}_{ss}^{-1} \mathbf{k}_{sp} \quad (5.26)$$

Esta matriz tendrá entonces el mismo tamaño que la matriz de masa y es por tanto la adecuada para el análisis dinámico. Por ejemplo, en el caso del pórtico de la figura 5.7, $p = 1, s = 2$ y, por tanto, las submatrices implicadas valen

$$\mathbf{k}_{pp} = \left(\frac{24EI}{h^3} \right)$$

$$\mathbf{k}_{ps} = \left(\frac{6EI}{h^2} \quad \frac{6EI}{h^2} \right)$$

$$\mathbf{k}_{\text{sp}} = \begin{pmatrix} \frac{6EI}{h^2} \\ \frac{6EI}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{\text{ss}} = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ \frac{2EJ}{l} & \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Ejemplo 5.1

La figura 5.9 muestra un pórtico de tres niveles, donde los elementos tienen los momentos de inercia anotados y un módulo de elasticidad E . Calcular la matriz de rigidez condensada, según los grados de libertad de desplazamiento horizontal, si $l = 3$ metros.

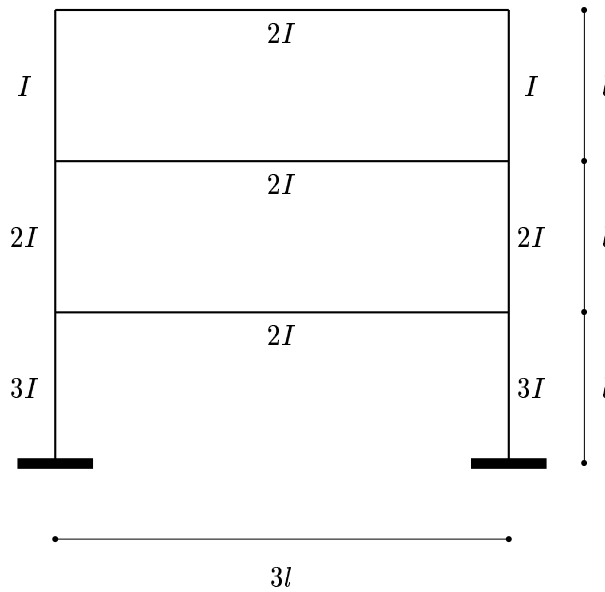


Figura 5.9: Ejemplo 5.1 - Descripción geométrica.

La numeración de los grados de libertad indicada en la figura 5.10 apunta hacia una ubicación de los grados de libertad de desplazamiento horizontal en las posiciones 1 a 3 de la matriz de rigidez global \mathbf{k}^e . Esto implica que esta matriz se puede descomponer en la forma

$$\mathbf{k}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{\text{pp}} & \mathbf{k}_{\text{ps}} \\ \mathbf{k}_{\text{sp}} & \mathbf{k}_{\text{ss}} \end{pmatrix}$$

donde las dimensiones de las submatrices están definidas por $p = 3$ y $s = 6$. Haciendo uso de los conceptos de análisis estructural resumidos anteriormente, se pueden calcular fácilmente estas matrices. Sin embargo, para facilitar el cálculo haremos uso del siguiente programa, **dcondens.m**, escrito en MATLAB, el cual ensambla la matriz de rigidez de un pórtico regular (es decir, que todos los pisos tienen el mismo número de vigas y la misma altura) en el orden indicado y calcula la matriz condensada:

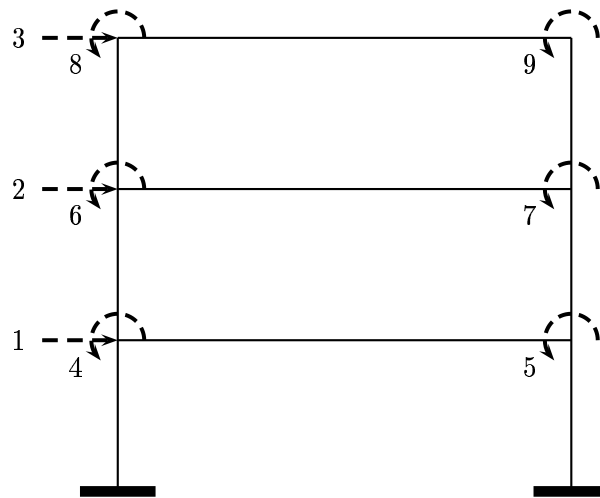


Figura 5.10: Ejemplo 5.1 - Numeración global.

```
function [kpp,kps,kss,ke,k]=dcondens(np,nv,e,iv,ic,hp,lv)
%
%-----
% [kpp,kps,kss,ke,k]=dcondens(np,nv,e,iv,ic,hp,lv)
%-----
% Calcula las matrices de rigidez estatica (ke)
% y condensada (k) de un portico, segun los
% grados de libertad
% principales (o de desplazamiento), p, y los secundarios
% o de rotacion, s (se ignoran las deformaciones axiales).
% Solo es valido para porticos regulares
```

```

% (es decir, que forman una rejilla)
%
% kpp, kps y kss son las submatrices de los grados de
% libertad pp, ps y ss, respectivamente.
%
% Por: Jorge E. Hurtado G.
%     Universidad Nacional de Colombia
%
%
% np=numero de pisos
% nv=numero de vigas por piso
% e=modulo de elasticidad
% iv=matriz (np*nv) que contiene el momento de
%     inercia de las vigas
%     ---> iv(i,j)=m. de i. de una viga en el piso i
%           que comienza en el nodo j.
% ic=matriz (np*(nv+1)) que contiene el momento de
%     inercia de las columnas
%     ---> ic(i,j)=m. de i. de la columna justo
%           debajo del piso i
%           y que termina en el nodo j.
% hp= vector que contiene las alturas entre-piso.
% lv= vector que contiene las longitudes de las vigas.
%
% Notas:
%     1) La numeracion de los pisos es de abajo a arriba.
%     2) La numeracion de los nodos es de izquierda a derecha.
%
%-----
%
%
%
nj=nv+1;
ns=nj*np;
kpp=zeros(np,np);
kps=zeros(np,ns);
kss=zeros(ns,ns);
%
%
if np > 1                % para varios pisos
%
% i < np
%
for i=1:np-1
    for j=1:nj
        kpp(i,i)=kpp(i,i)+12*e*ic(i,j)/hp(i)^3
        kpp(i,i)=kpp(i,i)+12*e*ic(i+1,j)/hp(i+1)^3;
        kpp(i,i+1)=kpp(i,i+1)-12*e*ic(i+1,j)/hp(i+1)^3;
        kps(i,(i-1)*nj+j)=6*e*ic(i,j)/hp(i)^2
    end
end

```

```

kps(i,(i-1)*nj+j)=kps(i,(i-1)*nj+j)-6*e*ic(i+1,j)/hp(i+1)^2;
kps(i,i*nj+j)=-6*e*ic(i+1,j)/hp(i+1)^2;
if i > 1
    kps(i,(i-2)*nj+j)=kps(i,(i-2)*nj+j)+6*e*ic(i,j)/hp(i)^2;
end
if j==1
    kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j)=4*e*ic(i,j)/hp(i);
    qqq=4*e*ic(i+1,j)/hp(i+1)+4*e*iv(i,j)/lv(j);
    kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j)=kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j)+qqq;
    kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j+1)=2*e*iv(i,j)/lv(j);
elseif j~=nj
    kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j)=4*e*ic(i,j)/hp(i);
    qqq=4*e*ic(i+1,j)/hp(i+1);
    kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j)=kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j)+qqq;
    qqq=4*e*iv(i,j-1)/lv(j-1)+4*e*iv(i,j)/lv(j);
    kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j)=kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j)+qqq;
    kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j+1)=2*e*iv(i,j)/lv(j);
else
    kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j)=4*e*ic(i,j)/hp(i);
    qqq=4*e*ic(i+1,j)/hp(i+1)+4*e*iv(i,j-1)/lv(j-1);
    kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j)=kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j)+qqq;
end
if i < np
    kss((i-1)*nj+j,(i-1)*nj+j+np)=2*e*ic(i+1,j)/hp(i+1);
end
end
end
%
% i=np
%
for j=1:nj
    kpp(np,np)=kpp(np,np)+12*e*ic(np,j)/hp(np)^3;
    kps(np,(np-1)*nj+j)=6*e*ic(np,j)/hp(np)^2;
    kps(np,(np-2)*nj+j)=6*e*ic(np,j)/hp(np)^2;
    if j==1
        kss((np-1)*nj+j,(np-1)*nj+j)=4*e*ic(np,j)/hp(np);
        qqq=4*e*iv(np,j)/lv(j);
        kss((np-1)*nj+j,(np-1)*nj+j)=kss((np-1)*nj+j,(np-1)*nj+j)+qqq;
        kss((np-1)*nj+j,(np-1)*nj+j+1)=2*e*iv(np,j)/lv(j);
    elseif j~=nj
        kss((np-1)*nj+j,(np-1)*nj+j)=4*e*ic(np,j)/hp(np);
        qqq=4*e*iv(np,j-1)/lv(j-1)+4*e*iv(np,j)/lv(j);
        kss((np-1)*nj+j,(np-1)*nj+j)=kss((np-1)*nj+j,(np-1)*nj+j)+qqq;
        kss((np-1)*nj+j,(np-1)*nj+j+1)=2*e*iv(np,j)/lv(j);
    else
        qqq=4*e*iv(np,j-1)/lv(j-1);
        kss((np-1)*nj+j,(np-1)*nj+j)=4*e*ic(np,j)/hp(np)+qqq;
    end
end

```

```

end
%
%
else                                % para un piso
%
%
for j=1:nj
    kpp(1,1)=kpp(1,1)+12*e*ic(1,j)/hp(1)^3;
    kps(1,j)=6*e*ic(1,j)/hp(1)^2;
    if j==1
        kss(j,j)=4*e*ic(1,j)/hp(1)+4*e*iv(1,j)/lv(j);
        kss(j,j+1)=2*e*iv(1,j)/lv(j);
    elseif j~=nj
        kss(j,j)=4*e*ic(1,j)/hp(1);
        kss(j,j)=kss(j,j)+4*e*iv(1,j-1)/lv(j-1)+4*e*iv(1,j)/lv(j);
        kss(j,j+1)=2*e*iv(1,j)/lv(j);
    else
        kss(j,j)=4*e*ic(1,j)/hp(np)+4*e*iv(1,j-1)/lv(j-1);
    end
end
end
for i=1:np
    for j=i:np
        kpp(j,i)=kpp(i,j);
    end
end
for i=1:ns
    for j=i:ns
        kss(j,i)=kss(i,j);
    end
end
ke=[kpp kps;kps' kss];
k=kpp-kps*inv(kss)*kps';
%
%
%----- fin

```

De acuerdo con la información del problema, los datos de entrada para el programa son los siguientes:

```

hp=[3 3 3]; lv=[9]; np=3; nv=1; iv=[2; 2; 2]; ic=[3 3;
2 2; 1 1]; e=1;

```

Nótese que se ha dado un valor unitario tanto al módulo de elasticidad E como al momento de inercia I . Por tanto, las matrices obtenidas deben ser multiplicadas por el valor real de EI . Con esta información los resultados dados por el programa son los siguientes:

$$\mathbf{k}_{pp} = EI \begin{pmatrix} 4.444 & -1.777 & 0 \\ -1.777 & 2.666 & -0.888 \\ 0 & -0.888 & 0.888 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{ps} = EI \begin{pmatrix} 0.666 & 0.666 & -1.333 & -1.333 & 0 & 0 \\ 1.333 & 1.333 & 0.666 & 0.666 & -0.666 & -0.666 \\ 0 & 0 & 0.666 & 0.666 & 0.666 & 0.666 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{ss} = EI \begin{pmatrix} 7.555 & 0.444 & 1.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0.444 & 7.555 & 0 & 1.333 & 0 & 0 \\ 1.333 & 0 & 4.888 & 0.444 & 0.666 & 0 \\ 0 & 1.333 & 0.444 & 4.888 & 0 & 0.666 \\ 0 & 0 & 0.666 & 0 & 2.222 & 0.444 \\ 0 & 0 & 0 & 0.666 & 0.444 & 2.222 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{pp} - \mathbf{k}_{ps} \mathbf{k}_{ss}^{-1} \mathbf{k}_{sp} = EI \begin{pmatrix} 3.489 & -1.643 & 0.292 \\ -1.643 & 1.738 & -0.679 \\ 0.292 & -0.679 & 0.454 \end{pmatrix}$$

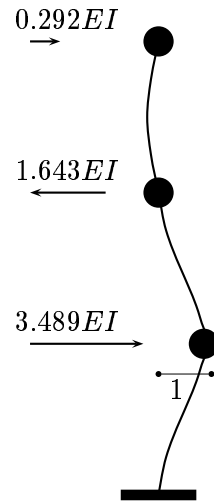


Figura 5.11: Ejemplo 5.1 - Interpretación de la matriz condensada.

La figura 5.11 muestra una interpretación de la primera columna de la matriz condensada. Puede observarse que la diferencia con el modelo de viga de cortante reside en que el desplazamiento unitario de un piso sólo afecta en este último caso a los pisos inmediatamente vecinos, por lo que un término como k_{31} es nulo. Por el contrario, dicho término es diferente de cero en la matriz condensada del pórtico, lo que indica una mayor flexibilidad del edificio en comparación con el modelo de viga de cortante. Esto queda claro al comparar \mathbf{k} con \mathbf{k}_{pp} , que sería la matriz por utilizar en el modelo de viga de cortante. Si la masa de todos los pisos es, por ejemplo, igual a m , la matriz de masa será entonces

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

la cual en conjunto con la matriz \mathbf{k} se podrá utilizar para un análisis dinámico de la estructura más realista que con el modelo de viga de cortante.

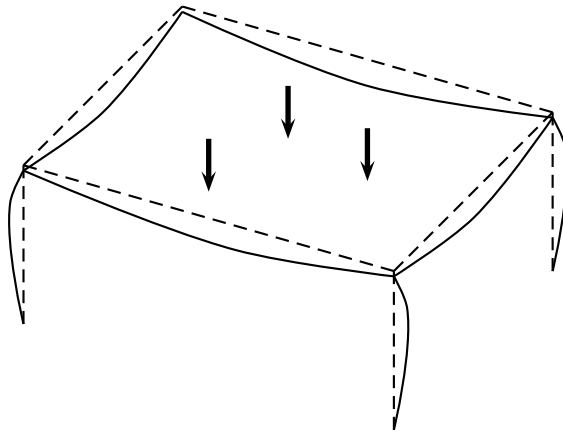


Figura 5.12: Diafragma flexible en un plano ortogonal.

5.4 Pórticos espaciales con diafragma rígido

La construcción de la matriz de rigidez adecuada para el caso general de un pórtico espacial (p. ej., el de un depósito elevado o el de un puente de gran longitud) puede hacerse según

las mismas reglas del método matricial de elementos finitos unidimensionales resumido en la sección anterior, con la salvedad de que la matriz de rigidez elemental presenta un número mayor de grados de libertad. Una vez obtenida la matriz de rigidez global de la estructura es válido aplicar las mismas ecuaciones de condensación estática ya vistas, con el propósito de reducirla a un tamaño equivalente al de la matriz de masa del caso.

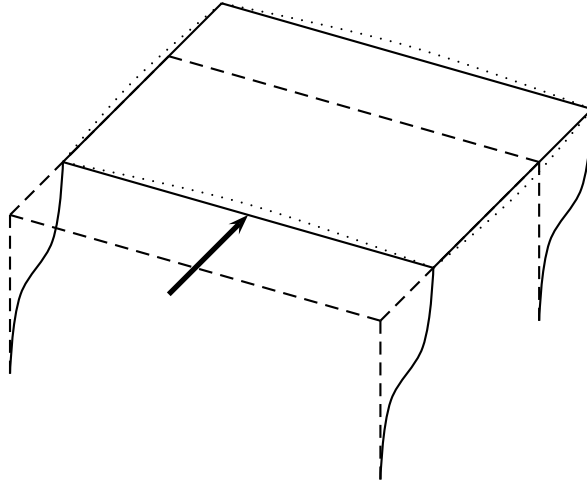


Figura 5.13: Diafragmas flexible (···) y rígido (—) en su plano.

Otra es la situación que se da típicamente en edificios, en los cuales la presencia de losas en cada nivel permite en la mayoría de los casos cierta simplificación de la formulación de los grados de libertad. En primer lugar, la presencia de tales elementos hace obvia la modelación de la estructura con masas concentradas en cada piso, debido al elevado peso de las losas. Por otra parte, estos elementos, aunque flexibles en sentido ortogonal, exhiben en muchos casos una gran rigidez en su propio plano. Estas situaciones se explican mejor con la ayuda de las figuras 5.12 y 5.13. En la primera aparece el conjunto losa – pórtico espacial sometido a un grupo de cargas verticales ortogonales al plano propio de la losa. En este sentido el diafragma puede considerarse como flexible. Sin embargo, en muchas situaciones dinámicas, tales como las pertinentes al empuje del viento o a la aceleración horizontal producidas por sismos, el interés recae sobre los movimientos horizontales de la estructura, que obviamente implican traslaciones horizontales de las losas. Desde este punto de vista, el diafragma puede ser rígido o flexible, como ilustra la figura 5.13, en dependencia de los materiales que lo constituyen, de la separación de las estructuras de soporte y de la dimensión del diafragma en el sentido paralelo a la acción horizontal. En el caso de un edificio, por ejemplo, se tienen típicamente diafragmas de concreto, soportados por estructuras verticales relativamente cercanas entre sí y con dimensiones comparables a tales separaciones. En contraste, los puentes se caracterizan

por tener diafragmas de concreto apoyados en estructuras caracterizadas por un espaciamiento muy superior al de la dimensión transversal del puente. Por tanto, en el caso de edificios es usual adoptar la hipótesis de diafragma rígido, mientras que en el análisis de puentes bajo carga dinámica transversal a su eje es conveniente adoptar la modelación de diafragma flexible. Sin embargo, si el diafragma de una estructura cualquiera es de madera, es dudoso que se pueda considerar como rígido, independientemente de sus dimensiones.

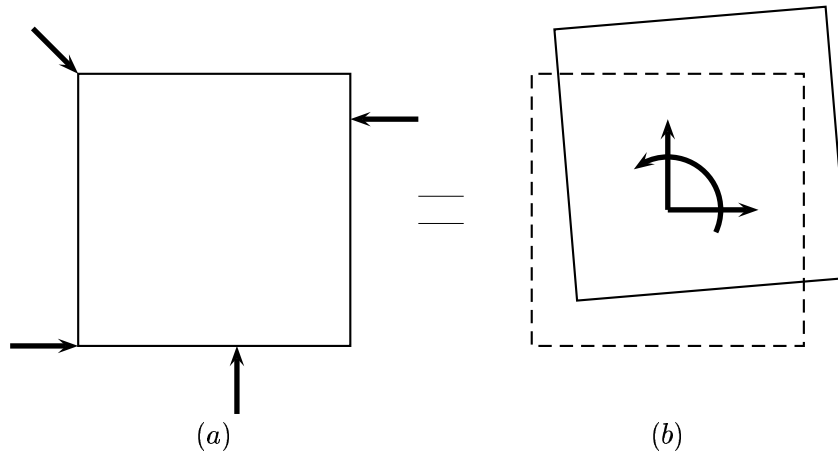


Figura 5.14: Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido en su plano.

Esta clasificación entre diafragmas rígidos y flexibles reviste gran importancia, ya que en la primera situación se puede hacer caso omiso de las deformaciones propias de la losa producidas por la carga horizontal, y considerarla como un cuerpo rígido en su propio plano. Esto permite, a su vez, hacer uso de una ley básica de la mecánica, según la cual en un cuerpo rígido las fuerzas coplanares que actúan sobre él se pueden componer en una única resultante y un par alrededor de un eje ortogonal al plano (figura 5.14). En consecuencia, una estructura con diafragmas rígidos, sometida a fuerzas dinámicas horizontales, puede modelarse con tres grados de libertad en cada diafragma, tales como los mostrados en la figura 5.14b. En el caso de diafragmas flexibles, esta simplificación no es posible, dado que la deformación del diafragma impide aplicar la composición de fuerzas mencionada. Como consecuencia, tampoco resulta válida la aplicación de las consiguientes relaciones geométricas simples que se dan en un diafragma rígido sometido a traslación y rotación.

La modelación de estructuras con diafragma rígido permite, en consecuencia, condensar la información estructural de rigidez en términos de los tres grados de libertad por piso. Por el contrario, en el caso de diafragmas flexibles se hace necesario, o bien discretizar el diafragma por medio de elementos finitos, con lo cual el número de grados de libertad por nivel es muchísimo mayor, o bien adoptar algunas hipótesis auxiliares que permitan la reducción del

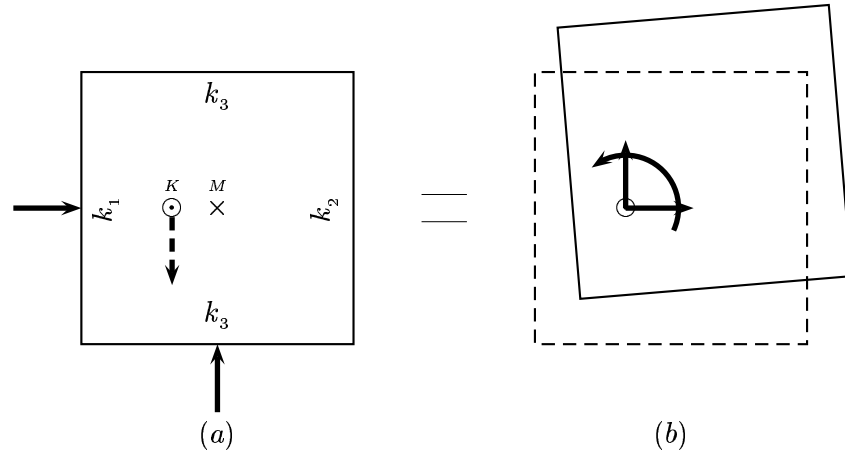


Figura 5.15: Sobre el grado de libertad torsional.

problema. Por otra parte, los tres grados de libertad surgen como necesarios por la razón siguiente. Supóngase que en el diafragma de la figura 5.15 la rigidez k_1 es mayor que k_2 ; por tanto, la resultante de las fuerzas de restauración de esta estructura en sentido vertical pasa por el punto K . Como la fuerza externa, por ejemplo de viento o de sismo, no necesariamente pasa por dicho punto (las de sismo se consideran aplicadas en el centro de masa M , como en la figura, por ser fuerzas de inercia), se concluye que esta fuerza es equivalente al sistema de la figura 5.15b, en donde la fuerza externa ha sido trasladada al punto K y se ha agregado un par torsor. Una situación similar puede darse en el sentido horizontal, si hay asimetría en dicho sentido, lo que no es del caso en la figura, en la cual sólo se ha introducido asimetría en el sentido vertical por simplicidad.

La formación de la matriz de rigidez de la estructura completa, sobre la base de tres grados de libertad por piso, se hace de la misma manera que la correspondiente a la matriz global de rigidez de una estructura plana a partir de la matriz de rigidez de sus elementos, es decir, transfiriendo la información del sistema local al global, que normalmente tiene como origen el centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) , ya que es el sitio de aplicación de la resultante de las fuerzas inerciales. Consideremos la figura 5.16, en la que sobre el plano del diafragma aparece una línea que representa a un pórtico i cuya matriz de rigidez condensada según los desplazamientos laterales es \mathbf{k}_i . La dimensión de esta matriz es, por tanto, igual al número de diafragmas de la estructura. Como sólo se consideran en el sistema local los grados de libertad de desplazamiento lateral, el vector de fuerzas desarrolladas por el pórtico i a lo alto del edificio es \mathbf{p}_i . En el sistema global, para un diafragma cualquiera j , estas fuerzas equivalen a

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{x,ij} &= \cos \beta_i p_{ij} \\
 \bar{p}_{y,ij} &= \sin \beta_i p_{ij} \\
 \bar{p}_{\varrho,ij} &= [(\bar{y}_j - y_i) \cos \beta_i - (\bar{x}_j - x_i) \sin \beta_i] p_{ij}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

lo cual se puede representar en forma matricial como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{p}_{x,ij} \\ \bar{p}_{y,ij} \\ \bar{p}_{\varrho,ij} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{p}}_{ij}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \\ (\bar{y}_j - y_{ij}) \cos \beta_i - (\bar{x}_j - x_{ij}) \sin \beta_i \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}_{ij}} p_{ij} \tag{5.29}$$

donde los símbolos $\bar{\mathbf{p}}_{ij}$ y \mathbf{a}_{ij} indican los vectores de fuerzas globales y de transporte del pórtico i en el piso j , respectivamente. Al ensamblar el conjunto de vectores para todo $j, j = 1, 2, \dots, m$ se obtiene

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{p}_{x,i1} \\ \bar{p}_{y,i1} \\ \bar{p}_{\varrho,i1} \\ \vdots \\ \bar{p}_{x,im} \\ \bar{p}_{y,im} \\ \bar{p}_{\varrho,im} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{p}}_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \beta_i & 0 & \dots & 0 \\ \sin \beta_i & 0 & \dots & 0 \\ d_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \cos \beta_i \\ 0 & \dots & 0 & \sin \beta_i \\ 0 & \dots & 0 & d_{im} \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}_i} \underbrace{\begin{pmatrix} p_{i1} \\ \vdots \\ p_{im} \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_i} \tag{5.30}$$

es decir,

$$\bar{\mathbf{p}}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{p}_i \tag{5.31}$$

con

$$d_{ij} = (\bar{y}_j - y_{ij}) \cos \beta_i - (\bar{x}_j - x_{ij}) \sin \beta_i \tag{5.32}$$

De acuerdo con la llamada *ley del contragradiente*, la relación entre los desplazamientos en los sistemas local y global viene dada por

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_i^T \bar{\mathbf{u}}_i \tag{5.33}$$

La condensación de la información de rigidez con respecto a los tres grados de libertad adoptados puede hacerse ahora igualando las expresiones de la energía de deformación en las coordenadas locales (es decir, del pórtico) y globales (de la estructura). Si temporalmente omitimos el subíndice i , la energía de deformación en el sistema local es

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{p} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} \tag{5.34}$$

Sustituyendo (5.33) en (5.34) se tiene

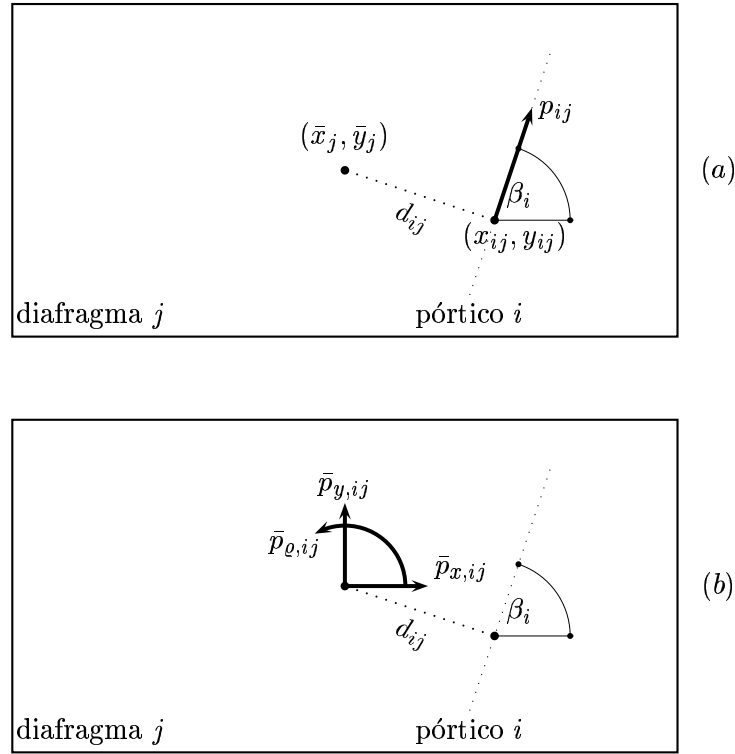


Figura 5.16: Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido. (a): Fuerza en el sistema local. (b): Fuerzas equivalentes en el sistema global.

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{a} \mathbf{k} \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{u}} \quad (5.35)$$

Por otra parte, la energía de deformación en coordenadas globales es igual a

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{u}} \quad (5.36)$$

Al comparar las ecuaciones (5.35) y (5.36) se concluye que la matriz de rigidez de éste en coordenadas globales es

$$\bar{\mathbf{k}}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{k}_i \mathbf{a}_i^T \quad (5.37)$$

donde se ha restituido el subíndice i . La matriz de rigidez de la estructura, $\bar{\mathbf{k}}$, se obtiene sumando las matrices $\bar{\mathbf{k}}_i, i = 1, 2, \dots, n$:

$$\bar{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{k}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \mathbf{k}_i \mathbf{a}_i^T \quad (5.38)$$

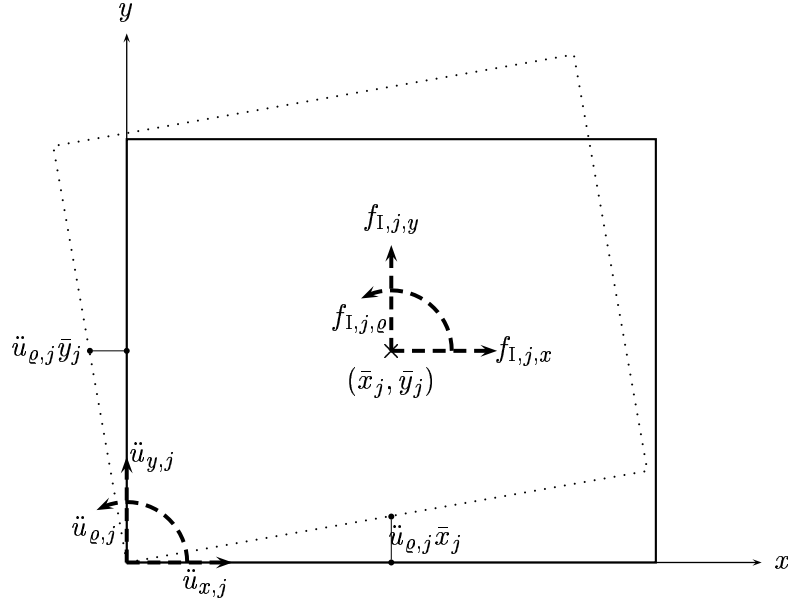


Figura 5.17: Deducción de la matriz de masa (La línea de puntos muestra solamente el efecto de la aceleración rotatoria $\ddot{u}_{\varrho,j}$).

Con esto se completa la deducción de la expresión de la matriz de rigidez en coordenadas globales. En lo que respecta a la matriz de masa, ésta se puede construir fácilmente a partir de la consideración de las fuerzas de inercia $f_{I,j}$ presentes en el centro de masa del diafragma j , las cuales se obtienen de acuerdo a las aceleraciones que aparecen en la figura 5.17 aplicadas en el origen de coordenadas:

$$\begin{aligned} f_{I,j,x} &= m\ddot{u}_{x,j} - m\ddot{u}_{\varrho,j}\bar{y}_j \\ f_{I,j,y} &= m\ddot{u}_{y,j} + m\ddot{u}_{\varrho,j}\bar{x}_j \\ f_{I,j,\varrho} &= -m\bar{y}_j\ddot{u}_{x,j} + m\bar{x}_j\ddot{u}_{y,j} + \left(\bar{m} + m(\bar{x}_j^2 + \bar{y}_j^2) \right) \ddot{u}_{\varrho,j} \end{aligned} \quad (5.39)$$

donde \tilde{m} es la masa rotacional del diafragma con respecto a su centro de masa (ver capítulo 1). Nótese que la fuerza de inercia rotatoria se obtiene tomando momentos de las fuerzas traslacionales con respecto al origen de coordenadas y haciendo la traslación del momento polar de inercia a dicho punto. En forma matricial, esta ecuación es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_{I,j,x} \\ f_{I,j,y} \\ f_{I,j,\varrho} \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_{I,j}} = \underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & -m\bar{y}_j \\ 0 & m & m\bar{x}_j \\ -m\bar{y}_j & m\bar{x}_j & \tilde{m} + m(\bar{x}_j^2 + \bar{y}_j^2) \end{pmatrix}}_{\mathbf{m}_j} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{u}_{x,j} \\ \ddot{u}_{y,j} \\ \ddot{u}_{\varrho,j} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\ddot{u}}_j} \quad (5.40)$$

donde los símbolos bajo los signos de agrupación corresponden al vector de fuerzas de inercia, a la matriz de masa y al vector de aceleraciones, respectivamente, del diafragma j . Si el diafragma consta de r cuerpos rígidos, su matriz de masa se puede ensamblar por superposición:

$$\mathbf{m}_j = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^r m_l & 0 & -\sum_{l=1}^r m_l \bar{y}_{lj} \\ 0 & \sum_{l=1}^r m_l & \sum_{l=1}^r m_l \bar{x}_{lj} \\ -\sum_{l=1}^r m_l \bar{y}_{lj} & \sum_{l=1}^r m_l \bar{x}_{lj} & \sum_{l=1}^r \tilde{m}_l + m_l(\bar{x}_{lj}^2 + \bar{y}_{lj}^2) \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Finalmente, si se hace coincidir el origen de coordenadas con el centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) de todo el conjunto, la matriz de masa se simplifica notablemente, pues se convierte en una matriz diagonal:

$$\mathbf{m}_j = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{m} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

donde m es la masa total (traslacional) del diafragma y \tilde{m} es su masa rotacional:

$$\tilde{m}_j = \sum_{l=1}^r \tilde{m}_l + m_l(\bar{x}_{lj}^2 + \bar{y}_{lj}^2) \quad (5.43)$$

En esta ecuación \bar{x}_{lj} , \bar{y}_{lj} son las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo l medidas desde el centro de gravedad del diafragma.

Ejemplo 5.2

La figura 5.18 muestra un pórtico espacial irregular de un piso, compuesto por cuatro pórticos planos, cuyas matrices de rigidez han sido condensadas según los desplazamientos

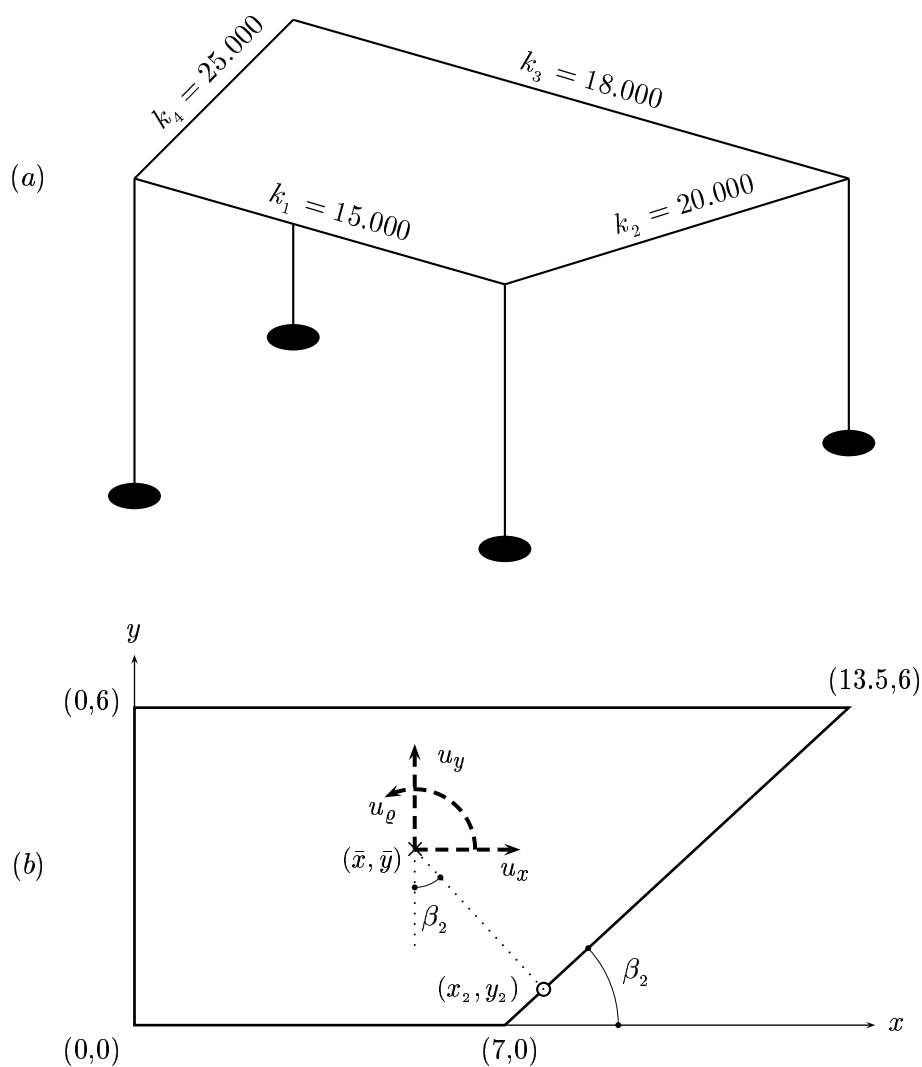


Figura 5.18: Ejemplo 5.2 - (a): Rigideces de los pórticos. (b): Grados de libertad y geometría del diafragma (Unidades: kN, m).

laterales, de manera que para cada uno de ellos la matriz de rigidez es un simple escalar del valor mostrado en la figura. El diafragma se considera rígido en su propio plano y tiene una masa de 1 t/m^2 . Dadas las coordenadas de los vértices indicadas en la figura 5.18b, calcular las matrices de masa y de rigidez de la estructura completa según los tres grados de libertad propios de un diafragma rígido, si el origen de coordenadas se ubica en el centro de masa.

Las áreas del rectángulo y el triángulo que componen las figuras son 42 y 19.5 m^2 , respectivamente. Por tanto, el centro de masa se encuentra en las coordenadas

$$\bar{x} = \frac{42 \times 3.5 + 19.5(7 + 2.166)}{42 + 19.5} = 5.29$$

$$\bar{y} = \frac{42 \times 3 + 19.5 \times 4}{42 + 19.5} = 3.32$$

Por su parte, los ángulos que forman los pórticos con el eje x son $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 42.71$, $\beta_3 = 0$ y $\beta_4 = 90$ grados. Con estos datos se calcula la matriz de compatibilidad \mathbf{a} de cada pórtico, definida en la ecuación (5.30). Para el pórtico 2 se requiere calcular previamente el punto de cruce de su eje con la línea ortogonal a él trazada desde el centro de masa. Con referencia a la figura 5.18b,

$$\tan \beta_2 = 0.923 = \frac{x_2 - 5.29}{3.32 - y_2}$$

$$\tan \beta_2 = \frac{y_2}{x_2 - 7}$$

lo que da como resultado $x_2 = 7.733$, $y_2 = 0.677$. Por tanto,

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta_2 \\ \sin \beta_2 \\ (\bar{y} - y_2) \cos \beta_2 - (\bar{x} - x_2) \sin \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.73 \\ 0.68 \\ 3.59 \end{pmatrix}$$

El cálculo de las matrices de transporte para los pórticos restantes es más expedito. El resultado es

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3.32 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2.68 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5.29 \end{pmatrix}$$

Con estas matrices, la participación de los diferentes pórticos en la matriz de rigidez global, de acuerdo con la ecuación (5.37), es

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{k}}_1 &= 1 \times 10^5 \begin{pmatrix} 0.150 & 0 & 0.498 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.498 & 0 & 1.6504 \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{k}}_2 &= 1 \times 10^5 \begin{pmatrix} 0.108 & 0.099 & 0.528 \\ 0.099 & 0.092 & 0.487 \\ 0.528 & 0.487 & 2.582 \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{k}}_3 &= 1 \times 10^5 \begin{pmatrix} 0.180 & 0 & -0.483 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.483 & 0 & 1.2957 \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{k}}_4 &= 1 \times 10^5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.250 & -1.324 \\ 0 & -1.324 & 7.012 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

En consecuencia, la matriz de rigidez de la estructura, según la ecuación (5.38) es igual a

$$\bar{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^4 \bar{\mathbf{k}}_i = 1 \times 10^6 \begin{pmatrix} 0.044 & 0.010 & 0.054 \\ 0.010 & 0.034 & -0.0837 \\ 0.054 & -0.084 & 1.2540 \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de la matriz de masa se requiere calcular previamente los valores de los momentos polares de inercia de los dos cuerpos que componen el diafragma, a saber, el rectángulo y el triángulo (cf. capítulo 1). Para el primero,

$$J_1 = ab \left(\frac{a^2 + b^2}{12} \right) = 7 \times 6 \left(\frac{7^2 + 6^2}{12} \right) = 297.5 \text{m}^4$$

Para el segundo,

$$J_2 = \frac{ab}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{18} \right) = \frac{6.5 \times 6}{2} \left(\frac{6.5^2 + 6^2}{18} \right) = 84.77 \text{m}^4$$

De acuerdo con la ecuación (5.43), la masa rotacional del diafragma es

$$\check{m} = \sum_{l=1}^2 \check{m}_l + m_l (\bar{x}_l^2 + \bar{y}_l^2)$$

En vista de que, para cada cuerpo, $\check{m}_l = J_l \times 1 \text{ t/m}^2$, la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned}\check{m} &= \sum_{l=1}^2 J_l + m_l (\bar{x}_l^2 + \bar{y}_l^2) = 297.5 + 42 \times \left([5.29 - 3.5]^2 + [3.32 - 3]^2 \right) \\ &\quad + 84.77 + 19.5 \times \left([9.17 - 5.29]^2 + [4 - 3.32]^2 \right) \\ &= 823.59 \text{t} \cdot \text{m}^2\end{aligned}$$

La masa traslacional del diafragma es $m = 42 + 19.5 = 61.5t$. La matriz de masa es, por tanto,

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 61.5 & 0 & 0 \\ 0 & 61.5 & 0 \\ 0 & 0 & 823.59 \end{pmatrix}$$



Capítulo 6

Vibración libre de los sistemas múltiples

Después de haber tratado el tema de la formación de las matrices estructurales de los sistemas múltiples lineales en el capítulo anterior, abordaremos en éste el análisis de sus vibraciones libres, lo cual es un paso necesario para el cálculo de la respuesta forzada utilizando el método de superposición modal que se estudia en el capítulo siguiente.

6.1 Solución de la ecuación matricial del movimiento

La ecuación del movimiento de una estructura de n grados de libertad en vibración libre es

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

donde \mathbf{m} es la matriz de masa, \mathbf{k} es la matriz de rigidez y \mathbf{u} es el vector de desplazamientos, que incluye los traslacionales tanto como los rotacionales. Para esta ecuación buscaremos una solución del tipo

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} \cos \omega t \quad (6.2)$$

que debe ser sustituida en (6.1). Con ese fin se debe derivar dos veces la ecuación anterior, lo que da como resultado

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{a}\omega^2 \cos \omega t \quad (6.3)$$

Reemplazando (6.2) y (6.3) en (6.1) y factorizando se obtiene

$$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) \mathbf{a} \cos \omega t = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

En el caso general $\cos \omega t$ no es necesariamente igual a cero lo que implica que

$$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (6.5)$$

Suponiendo conocido ω , este sistema equivale a una ecuación del tipo

$$\mathbf{g}\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

donde $\mathbf{g} = \mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}$. Este sistema no tiene una solución absoluta diferente de la trivial $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. De acuerdo a la teoría de ecuaciones lineales simultáneas, una solución relativa (es decir, de unos términos de \mathbf{a} en función de otros) se obtiene haciendo el determinante de la matriz de coeficientes igual a 0:

$$\det(\mathbf{g}) = 0 \quad (6.7)$$

Como se verá en el ejemplo siguiente, esto permite obtener, en primer término, un polinomio en ω , cuyas raíces $\omega_j, j = 1, 2, \dots, n$ determinarán diferentes soluciones relativas \mathbf{a}_j .

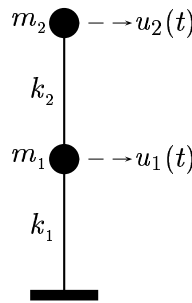


Figura 6.1: Ejemplo 6.1 - Sistema de dos grados de libertad.

Ejemplo 6.1

La figura 6.1 muestra una viga de cortante de dos grados de libertad traslacionales de masas $m_1 = 2m_2 = 2m$. Las rigideces de los resortes son $k_1 = 2k_2 = 2k$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

La matriz \mathbf{g} es, por tanto

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 3k - 2\omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{pmatrix}$$

Haciendo nulo el determinante de esta matriz se obtiene que

$$(3k - 2\omega^2 m)(k - \omega^2 m) - k^2 = 0$$

es decir,

$$2m^2\omega^4 - 5km\omega^2 + 2k^2 = 0$$

Debido a que sólo hay potencias de orden par, esta ecuación puede ponerse en la forma

$$2m^2\lambda^2 - 5km\lambda + 2k^2 = 0$$

donde $\lambda = \omega^2$. La solución de este problema es

$$\lambda = \frac{5km \pm \sqrt{25k^2m^2 - 16k^2m^2}}{4m^2}$$

Por tanto, las raíces del problema son

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \omega_1^2 &= \frac{1}{2} \frac{k}{m} \\ \lambda_2 = \omega_2^2 &= 2 \frac{k}{m} \end{aligned}$$

lo cual indica que el sistema tiene un número de frecuencias naturales igual al de su número de grados de libertad. En Dinámica de Estructuras es costumbre ordenar estas frecuencias en forma ascendente. Al sustituir sucesivamente en la ecuación (6.6) los valores de las raíces $\omega_j, j = 1, 2$, se llega a lo siguiente:

1. *Primera solución.* En este caso la ecuación (6.6) toma la forma

$$\begin{pmatrix} (3 - 2\frac{1}{2})k & -k \\ -k & (1 - \frac{1}{2})k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & \frac{1}{2}k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema, como tal, no tiene solución absoluta diferente de la trivial $a_{11} = a_{21} = 0$. Sin embargo, se pueden obtener múltiples soluciones relativas al asignar un valor diferente de cero a cualquiera de los desplazamientos a_{ji} . Por ejemplo, al hacer $a_{21} \equiv 1$ en las dos filas del producto anterior se obtiene

$$\begin{aligned} 2ka_{11} - k &= 0 \\ -ka_{11} + \frac{1}{2}k &= 0 \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones es

$$a_{11} = \frac{1}{2}$$

en ambos casos.

En síntesis, la primera solución es

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los resultados correspondientes a esta primera solución aparecen en la figura 6.2. A la izquierda se muestra una representación del vector \mathbf{a}_1 , mientras que a la derecha se representan las historias de los desplazamientos de los dos grados de libertad en vibración libre, de acuerdo a la ecuación (6.2). Esta figura indica que los dos grados de libertad se mueven sincrónicamente (es decir, con la misma frecuencia ω_1), pero con diferente amplitud. Esto sólo ocurre si al sistema se le da como condición inicial un vector que sea solución relativa del sistema de ecuaciones (6.5), como el vector \mathbf{a}_1 .

2. *Segunda solución.* La ecuación (6.6) es ahora

$$\begin{pmatrix} (3-4)k & -k \\ -k & (1-2)k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al hacer $a_{22} \equiv 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} -ka_{12} - k &= 0 \\ -ka_{12} - k &= 0 \end{aligned}$$

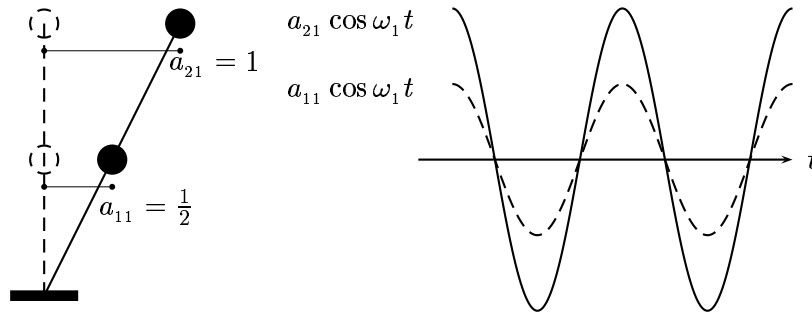


Figura 6.2: Ejemplo 6.1 - Primera solución.

La solución de estas ecuaciones es, evidentemente,

$$a_{12} = -1$$

por ambas filas. Por tanto, el segundo vector de constantes es

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La figura 6.3 muestra el resultado correspondiente a esta segunda solución. La interpretación es semejante a la dada anteriormente.



En vista de la multiplicidad de soluciones, la ecuación (6.5) puede particularizarse en la forma

$$(\mathbf{k} - \omega_j^2 \mathbf{m}) \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \quad (6.8)$$

El significado de las soluciones \mathbf{a}_j es el siguiente. La ecuación (6.1) corresponde a un estado de vibraciones libres, es decir, sin fuerza dinámica externa que acompañe a la vibración. La solución supuesta, dada por la ecuación (6.2), muestra claramente que los vectores \mathbf{a}_j , $j = 1, 2$ tienen el significado de unas condiciones iniciales del problema, ya que para $t = 0$, $\mathbf{u} = \mathbf{a}$. Sin embargo, por la ecuación (6.4) se comprende que el vector \mathbf{a}_1 será la amplitud de la vibración libre (y, por tanto, su condición inicial, debido a la forma de la función coseno) si la frecuencia

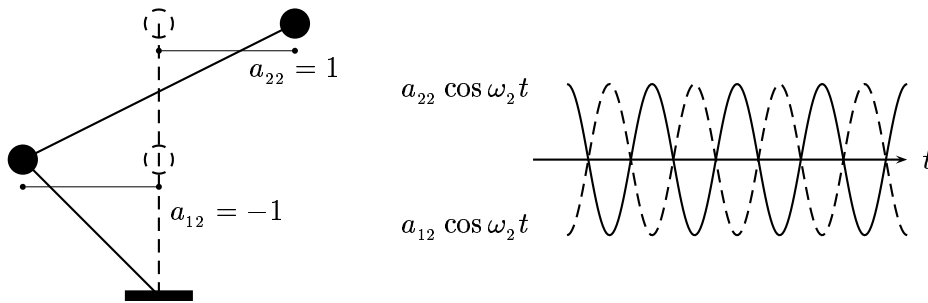


Figura 6.3: Ejemplo 6.1 - Segunda solución.

de ésta es ω_1 , ya que dicho vector fue obtenido con esta frecuencia. Análogamente, el vector \mathbf{a}_2 será la condición inicial adecuada para que el sistema vibre con frecuencia ω_2 . En general, un vector \mathbf{a}_j tiene el significado de ser la condición inicial del sistema necesaria para que éste vibre con frecuencia ω_j , sin que en la respuesta exhiba ninguna otra frecuencia. Las figuras 6.2 y 6.3 ilustran esta interpretación.

6.2 Modos de vibración

Como se ha indicado anteriormente, las soluciones obtenidas \mathbf{a}_j , $j = 1, 2, \dots, n$ son relativas ya que dependen de la asignación de valores que se dé a uno de sus elementos, que en el caso analizado era el elemento a_{nj} de cada vector j . Esto indica que otros vectores que guarden las mismas proporciones entre sus elementos son también admisibles. Aunque esto parezca un tanto arbitrario, desde el punto de vista físico sólo quiere decir que las condiciones iniciales necesarias para obtener una vibración libre con tal o cual frecuencia natural ω_j pueden ser mayores o menores, siempre y cuando se mantengan las proporciones entre los elementos del correspondiente vector. Por ejemplo, en el caso de la primera solución en el ejemplo 6.1, se debe dar siempre que a_{11}/a_{12} sea igual a $\frac{1}{2}$ para cualquier solución relativa \mathbf{a}_1 .

Lo anterior indica que se pueden obtener soluciones diferentes a la inicial \mathbf{a}_j por un proceso de normalización, es decir, dividiendo los elementos de la solución por algún valor que resulte conveniente. El vector resultante se denomina *modo de vibración* asociado a la frecuencia ω_j . Por ejemplo, para algunas propuestas de inclusión del amortiguamiento en sistemas múltiples que se describirán más adelante, resulta conveniente sustituir la solución \mathbf{a}_j por el vector

$$\phi_j = \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \mathbf{a}_j \quad (6.9)$$

donde μ_j es el escalar

$$\mu_j = \mathbf{a}_j^T \mathbf{m} \mathbf{a}_j \quad (6.10)$$

Como consecuencia de esto se tiene que

$$\phi_j^T \mathbf{m} \phi_j = 1 \quad (6.11)$$

A pesar de que hay otros criterios de normalización, éste es el más común entre los programas de cálculo debido a la razón anteriormente señalada. Los diferentes modos ϕ_j pueden reunirse en una *matriz modal* Φ , construida de la siguiente manera:

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n] \quad (6.12)$$

Ejemplo 6.2

Supongamos que en el ejemplo 6.1 $m = 4$. Los modos de vibración se obtienen de la siguiente forma:

1. *Modo 1.* El producto $\mathbf{a}_1^T \mathbf{m} \mathbf{a}_1$ es

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. *Modo 2.* Análogamente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 4(-1 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 12
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz modal es, por tanto,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$



6.3 Ortogonalidad de los modos

Una propiedad importante de los vectores modales ϕ_j es su propiedad de *ortogonalidad* con respecto a las matrices de masa y rigidez, la cual consiste en que los productos ponderados

$$\begin{aligned}
\phi_k^T \mathbf{m} \phi_j &= 0 \\
\phi_k^T \mathbf{k} \phi_j &= 0
\end{aligned} \tag{6.13}$$

si $k \neq j$. Esta propiedad puede deducirse como sigue. En vista de la ecuación (6.9), que expresa una proporcionalidad entre los vectores ϕ_j y \mathbf{a}_j , resulta evidente que la ecuación (6.8) se puede expresar también en la forma

$$(\mathbf{k} - \omega_j^2 \mathbf{m}) \phi_j = \mathbf{0} \tag{6.14}$$

por lo cual

$$\mathbf{k} \phi_j = \omega_j^2 \mathbf{m} \phi_j \tag{6.15}$$

Premultiplicando esta ecuación por ϕ_k^T , $k \neq j$ se obtiene

$$\phi_k^T \mathbf{k} \phi_j = \omega_j^2 \phi_k^T \mathbf{m} \phi_j \tag{6.16}$$

Si en la ecuación (6.15) se cambia j por k , y se premultiplica el resultado por ϕ_j^T , se obtiene la ecuación análoga

$$\phi_j^T \mathbf{k} \phi_k = \omega_k^2 \phi_j^T \mathbf{m} \phi_k \quad (6.17)$$

Teniendo en cuenta la propiedad matricial $(\mathbf{abc})^T = \mathbf{c}^T \mathbf{b}^T \mathbf{a}^T$, que se verifica para tres matrices cualesquiera \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} que formen un producto válido, la ecuación (6.17) también puede escribirse como

$$\phi_k^T \mathbf{k}^T \phi_j = \omega_k^2 \phi_k^T \mathbf{m}^T \phi_j \quad (6.18)$$

Como las matrices de masa y rigidez son simétricas, debido al principio de Maxwell-Betti, se tiene que $\mathbf{m} = \mathbf{m}^T$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}^T$ y por tanto

$$\phi_k^T \mathbf{k} \phi_j = \omega_k^2 \phi_k^T \mathbf{m} \phi_j \quad (6.19)$$

Restando (6.19) de (6.16) se obtiene

$$(\omega_j^2 - \omega_k^2) \phi_k^T \mathbf{m} \phi_j = 0 \quad (6.20)$$

Como en general las frecuencias modales son diferentes, $\omega_j \neq \omega_k$, la identidad anterior sólo queda satisfecha si

$$\phi_k^T \mathbf{m} \phi_j = 0, \quad k \neq j \quad (6.21)$$

que es lo que se pretendía demostrar. Este resultado se puede unir con la condición de normalización (6.11) en la forma

$$\Phi^T \mathbf{m} \Phi = \mathbf{I} \quad (6.22)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad.

Una deducción semejante conduce a la condición de ortogonalidad en términos de la matriz de rigidez. En efecto, para los modos j y k se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_j^2} \mathbf{k} \phi_j &= \mathbf{m} \phi_j \\ \frac{1}{\omega_k^2} \mathbf{k} \phi_k &= \mathbf{m} \phi_k \end{aligned} \quad (6.23)$$

Premultiplicando la primera ecuación por ϕ_k^T y la segunda por ϕ_j^T , $k \neq j$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_j^2} \phi_k^T \mathbf{k} \phi_j &= \phi_k^T \mathbf{m} \phi_j \\ \frac{1}{\omega_k^2} \phi_j^T \mathbf{k} \phi_k &= \phi_j^T \mathbf{m} \phi_k \end{aligned} \quad (6.24)$$

Al trasponer las matrices de la segunda ecuación y aplicar la condición de simetría de \mathbf{m} y \mathbf{k} se llega a que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_j^2} \phi_k^T \mathbf{k} \phi_j &= \phi_k^T \mathbf{m} \phi_j \\ \frac{1}{\omega_k^2} \phi_k^T \mathbf{k} \phi_j &= \phi_k^T \mathbf{m} \phi_j\end{aligned}\quad (6.25)$$

lo que, de acuerdo a lo dicho anteriormente, equivale a

$$\phi_k^T \mathbf{k} \phi_j = 0, k \neq j \quad (6.26)$$

Adicionalmente, la normalización de los modos de acuerdo al criterio (6.11) conduce a que

$$\phi_j^T \mathbf{k} \phi_j = \omega_j^2 \quad (6.27)$$

Esto se deduce fácilmente a partir de la ecuación (6.15). Premultiplicando dicha ecuación por ϕ_j^T ,

$$\phi_j^T \mathbf{k} \phi_j = \omega_j^2 \phi_j^T \mathbf{m} \phi_j \quad (6.28)$$

y considerando la condición (6.11) se concluye que

$$\phi_j^T \mathbf{k} \phi_j = \omega_j^2 \quad (6.29)$$

En términos de la matriz modal Φ , las ecuaciones de ortogonalidad y normalización con respecto a la matriz de rigidez toman la forma

$$\Phi^T \mathbf{k} \Phi = \Omega^2 \quad (6.30)$$

donde Ω^2 es la matriz diagonal

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

Los modos así obtenidos se denominan *ortonormales* dado que, además de la condición de ortogonalidad, satisfacen el criterio (6.22).¹

¹De igual manera se puede definir una matriz Ω como

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

Ejemplo 6.3

La ortogonalidad de los modos calculados en el ejemplo 6.2 con respecto a la matriz de masa se demuestra fácilmente. En primer lugar, la matriz modal es

$$\begin{aligned}\Phi &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\Phi^T \mathbf{m} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{12} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

♣

Ejemplo 6.4

Consideremos una viga de cortante de dos grados de libertad traslacionales. Las masas de ambos son iguales a 40 t, mientras que las rigideces son: $k_1 = 400$ kN/cm y $k_2 = 200$ kN/cm. En consecuencia, las matrices de masa y rigidez son

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 600 & -200 \\ -200 & 200 \end{pmatrix}$$

La matriz \mathbf{g} es, en consecuencia,

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 600 - 40\omega^2 & -200 \\ -200 & 200 - 40\omega^2 \end{pmatrix}$$

Al calcular el determinante de \mathbf{g} y después de simplificar se obtiene

$$\omega^4 - 20\omega^2 + 50 = 0$$

de lo que resulta

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= 10 - 5\sqrt{2} \\ \omega_2^2 &= 10 + 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

Procediendo de igual forma que en el ejemplo 6.1, se obtienen las siguientes soluciones:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las constantes de normalización resultan ser

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46.8629 \\ 273.1371 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la matriz modal es la siguiente:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.0605 & -0.1461 \\ 0.1461 & 0.0605 \end{pmatrix}$$



Ejemplo 6.5

En el ejemplo 5.1 se consideró un pórtico de tres niveles, cuya matriz condensada según los grados de libertad traslacionales es

$$\mathbf{k} = EI \begin{pmatrix} 3.489 & -1.643 & 0.292 \\ -1.643 & 1.738 & -0.679 \\ 0.292 & -0.679 & 0.454 \end{pmatrix}$$

Supongamos que las masas de estos grados de libertad son iguales a 35 t y que $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $I = 1/96 \text{ m}^4$. Calcular los modos de vibración con ayuda del siguiente programa `dmodos.m` escrito en lenguaje MATLAB:


```
function [Phi, Omega]=dmodos(m,k)
%
%-----
% [Phi, Omega]=dmodos(m,k)
%-----
%
% Calcula las formas y frecuencias modales para dos matrices
% cualesquiera m (masa) y k (rigidez)
%
%
% Por: Jorge E. Hurtado G.
%     Universidad Nacional, Manizales
%
%
%-----
%
%
[V, Omega2] = eig(k,m);           % autovalores y autovectores
[n,n]=size(m);
Omega=sqrt(diag(Omega2));          % frecuencias angulares
[W,I]=sort(Omega);                % ordena las frecuencias
for i=1:n                          % ordena los modos de acuerdo con
    Phi(:,i)=V(:,I(i));            % el orden de las frecuencias
end
q=Phi'*m*Phi;
q=diag(q);
for j=1:n                          % normaliza los modos
    Phi(:,j)=Phi(:,j)/sqrt(q(j));
end
Omega=W;
%
%
%----- fin
```

Con estos datos, la matriz de rigidez se convierte en

$$\mathbf{k} = 1 \times 10^5 \begin{pmatrix} 7.270 & -3.423 & 0.609 \\ -3.423 & 3.621 & -1.415 \\ 0.609 & -1.415 & 0.947 \end{pmatrix}$$

Por su parte, la matriz de masa es la siguiente:

$$\mathbf{m} = 35 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al emplear el programa el resultado que se obtiene es

```
[Phi, Omega]=dmodos(m,k)
```

```
Phi =
```

```
0.0308    0.0865    0.1419
0.0886    0.1136   -0.0884
0.1406   -0.0905    0.0247
```

```
Omega =
```

```
23.1777
78.1997
164.8240
```

Esto indica que los resultados del problema son

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.0308 & 0.0865 & 0.1419 \\ 0.0886 & 0.1136 & -0.0884 \\ 0.1406 & -0.0905 & 0.0247 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 23.1777 & 0 & 0 \\ 0 & 78.1997 & 0 \\ 0 & 0 & 164.8240 \end{pmatrix}$$



Ejemplo 6.6

Consideremos ahora el pórtico espacial con diafragma rígido analizado en el ejemplo 5.2. Los grados de libertad son los desplazamientos horizontal y vertical y la rotación del centro de masa (ver figura 5.17). Las matrices de masa y rigidez son

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 61.5 & 0 & 0 \\ 0 & 61.5 & 0 \\ 0 & 0 & 823.59 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k} = 1 \times 10^6 \begin{pmatrix} 0.044 & 0.010 & 0.054 \\ 0.010 & 0.034 & -0.0837 \\ 0.054 & -0.084 & 1.2540 \end{pmatrix}$$

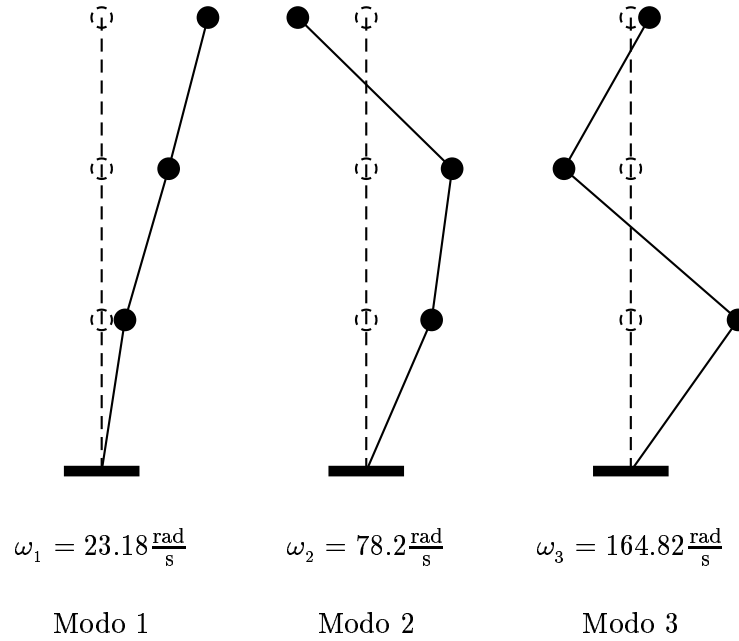


Figura 6.4: Ejemplo 6.5 – Modos y frecuencias de vibración.

Por medio del programa `dmodos.m` se obtiene el siguiente resultado:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.0643 & 0.1075 & 0.0238 \\ -0.1013 & 0.0686 & -0.0361 \\ -0.0118 & -0.0002 & 0.0328 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 17.16 & 0 & 0 \\ 0 & 28.53 & 0 \\ 0 & 0 & 41.03 \end{pmatrix}$$

Los modos de vibración se representan esquemáticamente en la figura 6.5. Puede verse que en el primero tienen fuerte presencia los tres tipos de movimiento, que el segundo está ampliamente dominado por la traslación horizontal, mientras el tercero claramente por la rotación. Como las formas modales representan los desplazamientos \bar{u}_x , \bar{u}_y y \bar{u}_θ del centro de masa, los desplazamientos modales horizontal y vertical de cualquier punto de coordenadas (x, y) , medidas desde dicho centro, se obtienen de la manera siguiente:

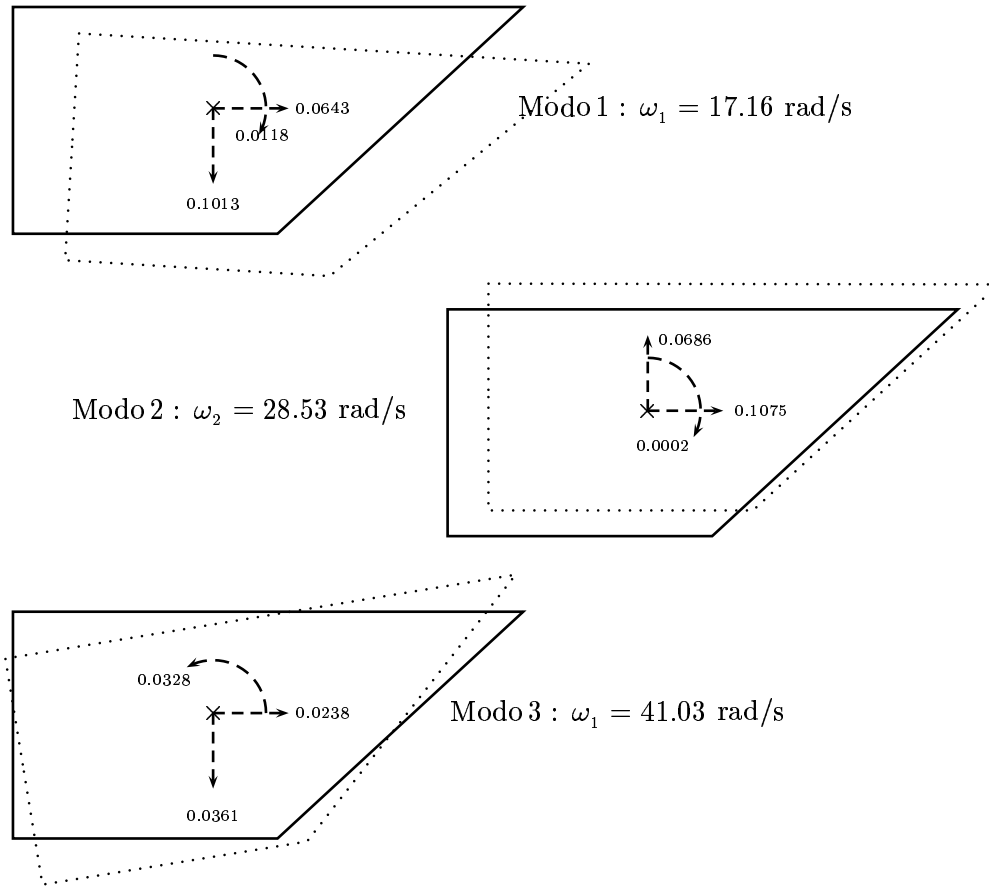


Figura 6.5: Ejemplo 6.6 - Modos de vibración.

$$u_x = \bar{u}_x - \bar{u}_\theta y$$

$$u_y = \bar{u}_y + \bar{u}_\theta x$$

En la figura, los desplazamientos y rotaciones dados por la matriz modal se encuentran multiplicados por un factor de 5.



Capítulo 7

Vibraciones forzadas de los sistemas múltiples

En el capítulo anterior se estudió el cálculo de las frecuencias y modos propios de una estructura. Como se verá en este capítulo, este paso permite simplificar en gran medida el cálculo de la respuesta de estructuras lineales sometidas a cargas dinámicas, ya que permite la descomposición de un sistema múltiple de n grados de libertad en n sistemas sencillos de un grado, cuyas respuestas se superponen. Inicialmente consideraremos la respuesta de sistemas múltiples no amortiguados, para los cuales la descomposición mencionada se puede aplicar de manera directa. Luego se discutirá la extensión de este método para los sistemas amortiguados. A continuación se examinará el cálculo de la respuesta de estructuras ante movimientos del suelo, de los cuales los sismos constituyen el caso más importante. Finalmente se deducirán las expresiones de las fuerzas de diseño sísmico de edificios con base en un espectro suavizado.

7.1 Sistemas sin amortiguamiento

Como se ha visto, la dinámica de un sistema lineal múltiple sin amortiguamiento está gobernada por la ecuación

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (7.1)$$

donde \mathbf{m} es la matriz de masa, \mathbf{k} es la matriz de rigidez y \mathbf{u} es el vector de desplazamientos. Supongamos una solución del tipo

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j \quad (7.2)$$

donde \mathbf{u}_j es una parte de la solución total asociada a cada modo j . Adicionalmente, supongamos que

$$\mathbf{u}_j = \boldsymbol{\phi}_j \eta_j \quad (7.3)$$

en donde $\boldsymbol{\phi}_j$ es la forma modal y η_j es una función escalar del tiempo, correspondientes al modo j , que se determinará más adelante. Esto equivale a decir que la respuesta \mathbf{u} se puede expresar como una combinación lineal de las respuestas η_j , usando como constantes las formas modales $\boldsymbol{\phi}_j$, es decir,

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}_1 \eta_1 + \boldsymbol{\phi}_2 \eta_2 + \dots + \boldsymbol{\phi}_n \eta_n \quad (7.4)$$

En esta ecuación, los valores η_j cumplen el rol de funciones de tiempo diferentes que, sumadas por medio de los vectores modales, forman el vector de la respuesta total en cada instante de tiempo. Por analogía con el problema matemático de la rotación de coordenadas, el cual es también un problema de valores propios, las funciones η_j se denominan *coordenadas modales*.

Nótese que la derivada del vector \mathbf{u} es también una combinación lineal de las derivadas de las funciones η_j :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \boldsymbol{\phi}_1 \dot{\eta}_1 + \boldsymbol{\phi}_2 \dot{\eta}_2 + \dots + \boldsymbol{\phi}_n \dot{\eta}_n \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \boldsymbol{\phi}_1 \ddot{\eta}_1 + \boldsymbol{\phi}_2 \ddot{\eta}_2 + \dots + \boldsymbol{\phi}_n \ddot{\eta}_n \end{aligned} \quad (7.5)$$

Al sustituir las ecuaciones anteriores en (7.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\boldsymbol{\phi}_1 \ddot{\eta}_1 + \boldsymbol{\phi}_2 \ddot{\eta}_2 + \dots + \boldsymbol{\phi}_n \ddot{\eta}_n) + \\ \mathbf{k}(\boldsymbol{\phi}_1 \eta_1 + \boldsymbol{\phi}_2 \eta_2 + \dots + \boldsymbol{\phi}_n \eta_n) = \mathbf{p} \end{aligned} \quad (7.6)$$

La premultiplicación de esta ecuación por algún $\boldsymbol{\phi}_j^T$ conduce a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{m}(\boldsymbol{\phi}_1 \ddot{\eta}_1 + \boldsymbol{\phi}_2 \ddot{\eta}_2 + \dots + \boldsymbol{\phi}_n \ddot{\eta}_n) + \\ \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{k}(\boldsymbol{\phi}_1 \eta_1 + \boldsymbol{\phi}_2 \eta_2 + \dots + \boldsymbol{\phi}_n \eta_n) = \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{p} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Finalmente, la consideración de las condiciones de ortogonalidad introducidas en el capítulo anterior, es decir,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_j &= 0, \\ \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_j &= 0, \quad k \neq j \end{aligned} \quad (7.8)$$

implica que todos los productos $\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_j$ y $\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_j$, $k \neq j$ son nulos. Por tanto, la ecuación (7.7) se reduce a

$$\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_j \ddot{\eta}_j + \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_j \eta_j = \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{p} \quad (7.9)$$

Si los modos de vibración han sido normalizados de acuerdo al criterio usualmente adoptado en los programas de cálculo, es decir,

$$\begin{aligned}\phi_j^T \mathbf{m} \phi_j &= 1 \\ \phi_j^T \mathbf{k} \phi_j &= \omega_j^2\end{aligned}\tag{7.10}$$

la ecuación anterior es simplemente

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = \phi_j^T \mathbf{p}\tag{7.11}$$

Si, por el contrario, se adopta una normalización diferente, entonces la ecuación (7.9) toma la forma

$$\phi_j^T \mathbf{m} \phi_j \ddot{\eta}_j + \phi_j^T \mathbf{k} \phi_j \eta_j = \phi_j^T \mathbf{p}\tag{7.12}$$

o, sintéticamente,

$$\tilde{m}_j \ddot{\eta}_j + \tilde{k}_j \eta_j = \tilde{p}_j\tag{7.13}$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{m}_j &= \phi_j^T \mathbf{m} \phi_j \\ \tilde{k}_j &= \phi_j^T \mathbf{k} \phi_j \\ \tilde{p}_j &= \phi_j^T \mathbf{p}\end{aligned}\tag{7.14}$$

se denominan *masa*, *rigidez* y *fuerza externa del modo j* , respectivamente. Puede demostrarse fácilmente que la ecuación (7.13) es en todo equivalente a la expresión obtenida bajo la suposición de que los modos son ortonormales (7.11). En efecto, si la ecuación básica de vibración libre

$$(\mathbf{k} - \omega_j^2 \mathbf{m}) \phi_j = \mathbf{0}\tag{7.15}$$

se pre-multiplica por ϕ_j^T se obtiene

$$\phi_j^T \mathbf{k} \phi_j - \omega_j^2 \phi_j^T \mathbf{m} \phi_j = 0\tag{7.16}$$

Por tanto,

$$\omega_j^2 = \frac{\phi_j^T \mathbf{k} \phi_j}{\phi_j^T \mathbf{m} \phi_j} = \frac{\tilde{k}_j}{\tilde{m}_j}\tag{7.17}$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación (7.13) entre \tilde{m}_j se obtiene

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = \frac{\phi_j^T \mathbf{p}}{\phi_j^T \mathbf{m} \phi_j} = \tilde{p}_j\tag{7.18}$$

la cual coincide con la ecuación (7.11) debido a que, para modos ortonormales el producto $\phi_j^T \mathbf{m} \phi_j$ es igual a la unidad. En lo que sigue utilizaremos las expresiones de validez general como la anterior para cualquier tipo de normalización, sin darle preferencia al criterio de ortonormalidad.

El significado de la descomposición modal efectuada hasta aquí, la cual en último término se apoya en la propiedad de ortogonalidad de los modos, es, entonces, el siguiente: la ecuación que rige el comportamiento dinámico del modelo estructural múltiple de n grados de libertad (7.1) se puede resolver calculando n problemas de un sólo grado de libertad del tipo (7.13), cada uno con diferentes frecuencias naturales ω_j y cargas externas p_j , cuyas soluciones se superponen a través de los modos de vibración ϕ_j utilizados como factores de ponderación, tal como muestra la ecuación (7.4). En síntesis, el proceso de cálculo es el siguiente:

1. Calcular las matrices modales Φ y Ω .
2. Calcular las coordenadas modales η_j resolviendo las ecuaciones

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = p_j \quad (7.19)$$

para todo j .

3. Superponer las soluciones para obtener la respuesta total:

$$\mathbf{u} = \phi_1 \eta_1 + \phi_2 \eta_2 + \dots \phi_n \eta_n \quad (7.20)$$

Ahora bien, la principal ventaja de la descomposición modal reside en el hecho de que la respuesta total está prácticamente determinada por unos pocos modos. En otras palabras, que los modos pierden importancia a medida que aumenta su número de orden j . Por esto, la ecuación (7.20) se puede aproximar como

$$\mathbf{u} \approx \phi_1 \eta_1 + \phi_2 \eta_2 + \dots \phi_p \eta_p \quad (7.21)$$

donde $p \ll n$ es un número de modos que se juzgue como suficiente en cada caso. Más adelante se explicitará un criterio adecuado para este fin en el caso específico de estructuras de edificación.

Ejemplo 7.1

Calcular la respuesta de la viga de cortante dos grados de libertad de la figura 7.1 ante la carga rectangular de la figura 7.2, aplicada simultáneamente en los dos grados, con $k = 20,000 \text{ kN/m}$, $m = 40 \text{ t}$, $\bar{p} = 500 \text{ kN}$ y $t_1 = 1 \text{ s}$.

De acuerdo con estos datos, el vector de cargas es

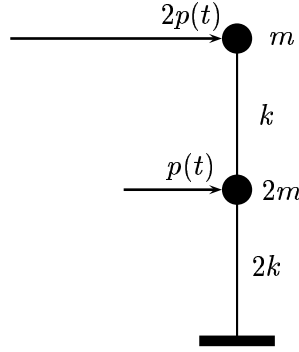


Figura 7.1: Ejemplo 7.1 - Viga de cortante.

$$\mathbf{p}(t) = \begin{cases} 500 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & t > t_1 \end{cases}$$

Las frecuencias de este sistema fueron calculadas en los ejemplos 6.1 y 6.2. Sus valores son

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{k}{m} = 250$$

$$\omega_2^2 = 2 \frac{k}{m} = 1,000$$

En lo que respecta a las formas modales, sus valores difieren de los del ejemplo 6.2 debido a que las diferencias de datos implican diferentes factores de normalización. Sin embargo, la relación entre los valores en cada modo se mantiene constante:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.0645 & 0.0913 \\ 0.1291 & -0.0913 \end{pmatrix}$$

Para resolver el problema utilizaremos la solución analítica de un sistema de un grado de libertad sometido a una fuerza como la de este caso, calculada anteriormente (ecuaciones 4.9 y 4.10):

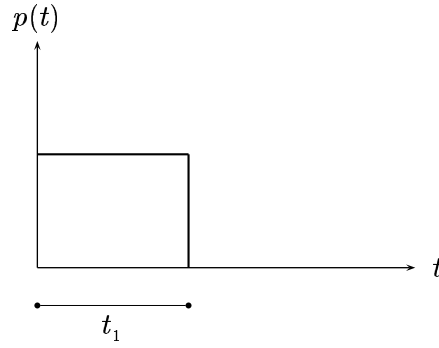


Figura 7.2: Ejemplo 7.1 - Carga externa.

$$u(t) = \begin{cases} \frac{\bar{p}}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{\bar{p}}{m\omega^2}[\sin \omega t_1 \sin \omega t + (1 - \cos \omega t_1) \cos \omega t], & t > t_1 \end{cases} \quad (7.22)$$

Resolveremos el problema modo por modo y luego superpondremos los resultados.

1. *Primer modo:*

Como las formas modales fueron normalizadas, la masa de este modo es igual a la unidad. En el rango $(0, t_1)$ la fuerza del modo es

$$\tilde{p}_1 = \phi_1^T 500 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 161.374$$

Por tanto, la ecuación por resolver es

$$\ddot{\eta}_1 + 250\eta_1 = 161.374$$

cuya solución está dada por la primera de las ecuaciones (7.22):

$$\eta_1 = \frac{161.374}{1 \times 250}(1 - \cos \sqrt{250} t) = 0.645(1 - \cos 15.811 t)$$

A partir de t_1 se inicia un problema de vibraciones libres, en el cual la respuesta es

$$\eta_1 = \frac{161.374}{1 \times 250}[\sin(15.811 \times 1) \sin 15.811 t + (1 - \cos(15.811 \times 1)) \cos 15.811 t]$$

es decir

$$\eta_1 = 0.645[-0.103 \sin 15.811 t + 1.995 \cos 15.811 t], \quad t > t_1$$

2. *Segundo modo:*

Al proceder de igual manera, se obtiene que

$$\tilde{p}_2 = \phi_2^T 500 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -45.643$$

y, por tanto,

$$\eta_2 = \begin{cases} -0.0456(1 - \cos 31.623 t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ -0.0456[-0.152 \sin 31.623 t + 0.012 \cos 31.623 t], & t > t_1 \end{cases}$$

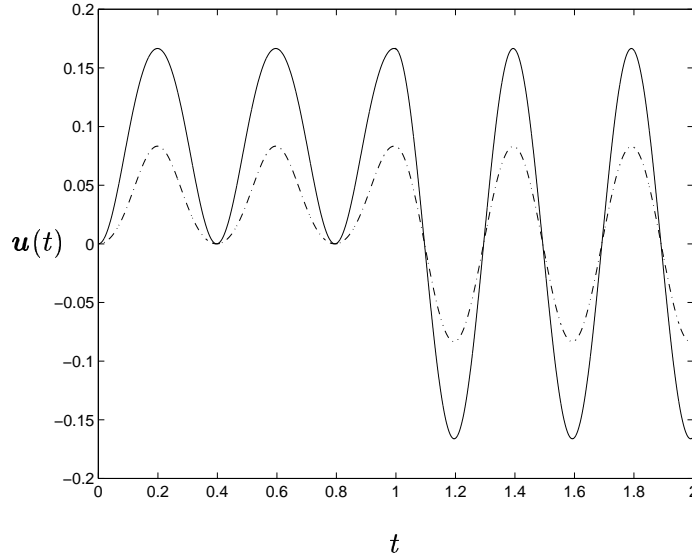


Figura 7.3: Ejemplo 7.1 - Desplazamientos de respuesta. $-\cdot-\cdot-$: $u_1(t)$. $—$: $u_2(t)$

De acuerdo con lo anterior, la respuesta de la estructura, en el rango $(0, 1)$ es

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0645 \\ 0.1291 \end{pmatrix} 0.645(1 - \cos 15.811 t) - \\ \begin{pmatrix} 0.0913 \\ -0.0913 \end{pmatrix} 0.0456(1 - \cos 31.623 t)$$

mientras que para $t > 1$ s,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0645 \\ 0.1291 \end{pmatrix} 0.645[-0.103 \sin 15.811 t + 1.995 \cos 15.811 t] - \\ \begin{pmatrix} 0.0913 \\ -0.0913 \end{pmatrix} 0.0456[-0.152 \sin 31.623 t + 0.012 \cos 31.623 t]$$

La figura 7.3 ilustra este resultado. Obsérvese que el valor máximo de la contribución del primer modo al desplazamiento del primer grado de libertad es $0.0645 \times 0.645 = 0.0416$, mientras que la del segundo modo es $0.0913 \times 0.0456 = 0.00416$, es decir, 10 veces menor. Esto ilustra la disminución de importancia de los modos en la respuesta total, anticipada anteriormente. Sin embargo, esto se refleja más claramente en la figura 7.4, en la que se desglosa el desplazamiento u_1 en las contribuciones de los dos modos. Puede verse que el modo 1 contribuye con casi todo el desplazamiento de este grado de libertad, tanto en la primera parte de la respuesta como en la segunda. Algo similar se da en el segundo grado, como puede comprobarse fácilmente.



7.2 Consideración del amortiguamiento

En los desarrollos anteriores se ha omitido la matriz de amortiguamiento estructural. Su inclusión conduce a la ecuación de vibraciones libres

$$m\ddot{\mathbf{u}} + c\dot{\mathbf{u}} + k\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (7.23)$$

Al proceder de manera semejante a como se ha hecho anteriormente (es decir, expandiendo \mathbf{u} en términos de las coordenadas modales y premultiplicando por el vector modal transpuesto de un modo cualquiera k) se obtiene

$$\ddot{\eta}_k + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_{ki}}{\tilde{m}_k} \dot{\eta}_i + \omega_k^2 \eta_k = \tilde{p}_k \quad (7.24)$$

donde los coeficientes

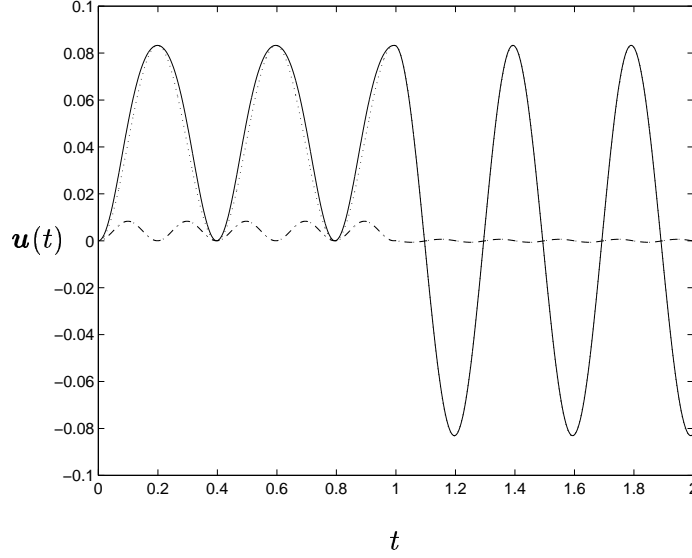


Figura 7.4: Ejemplo 7.1 - Composición del desplazamiento $u_1(t)$. \cdots : Primer modo. $-\cdot-$: Segundo modo. $—$: Total

$$\gamma_{ki} = \phi_k^T \mathbf{c} \phi_i \quad (7.25)$$

son, en general, diferentes de cero, debido a que la distribución del amortiguamiento no coincide, en general, con la de la masa y la rigidez. Esto indica que deben hacerse hipótesis restrictivas sobre el amortiguamiento para poder incluirlo en el cálculo de la respuesta modal.

Una forma de considerar la propiedad del amortiguamiento en el cálculo de las coordenadas modales η_j consiste en la inclusión directa, en la ecuación diferencial de cada coordenada, del llamado *amortiguamiento modal*. Supongamos que en la respuesta total \mathbf{u} la respuesta total está dominada por unos pocos modos. En tal caso resulta posible identificar por vías experimentales el factor de amortiguamiento que típicamente exhiben tales tipos de estructuras en asocio con las frecuencias modales respectivas. La ecuación (7.13) toma entonces la forma

$$\ddot{\eta}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = \tilde{p}_j \quad (7.26)$$

donde ξ_j es la *fracción de amortiguamiento del modo j* , la cual está relacionada con la matriz

de amortiguamiento \mathbf{c} por las ecuaciones

$$\xi_j = \frac{\tilde{c}_j}{2\omega_j \tilde{m}_j} \quad (7.27)$$

con

$$\tilde{c}_j = \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_j \quad (7.28)$$

En la práctica, debido al valor relativamente bajo de las fuerzas de amortiguamiento, resulta suficiente para estos casos utilizar directamente los valores típicos de los amortiguamientos modales ξ_j en la ecuación diferencial de la coordenada modal (7.26), sin necesidad de ensamblar la matriz de amortiguamiento \mathbf{c} .

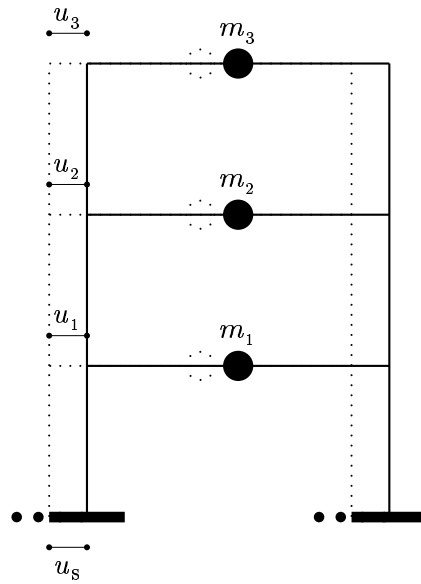


Figura 7.5: Desplazamientos estáticos producidos por movimientos del suelo - Pórtico plano.

7.3 Respuesta a los movimientos del suelo

En el caso especial de sismos y otras acciones dinámicas definidas por movimientos del terreno de apoyo, se hace necesario hacer una consideración especial para obtener las ecuaciones correspondientes al vector de cargas, de manera semejante a lo hecho en el capítulo 1. Esto se debe a que se debe poner en correspondencia los múltiples grados de libertad, que forman un vector \mathbf{u} con el vector de los movimientos del suelo, \mathbf{u}_s , que tiene, en general, diferente tamaño

y orientación espacial. Como ejemplo utilizaremos la modelación corriente de la respuesta sísmica de edificios. Consideremos la figura 7.5, en la que aparece un pórtico plano con masas concentradas en cada piso. Un movimiento estático horizontal del suelo hace que todas las masas de la estructura se desplacen la misma cantidad, u_s , que es el movimiento del suelo. De esta manera, puede decirse que los grados de libertad de la estructura \mathbf{u} guardan con éste la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_s \quad (7.29)$$

es decir,

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} u_s \quad (7.30)$$

El vector \mathbf{r} así definido relaciona los movimientos del suelo con los de la estructura. Su construcción se comprende mejor si consideramos adicionalmente otro caso. En un pórtico espacial como el de la figura 7.6, por ejemplo, se tienen en general tres grados de libertad por piso, correspondientes a dos traslaciones y una rotación, mientras que el movimiento del suelo está definido en forma de dos traslaciones ortogonales, $u_{s,x}$ y $u_{s,y}$ y una rotación $u_{s,\varrho}$. En el caso de sismos, este último movimiento suele despreciarse. Por esto,

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\varrho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_{s,x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_{s,y} \quad (7.31)$$

es decir,

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_x u_{s,x} + \mathbf{r}_y u_{s,y} \quad (7.32)$$

Puede verse que en esta ecuación $u_\varrho = 0$, por tratarse de una relación meramente estática. Sin embargo, esta ecuación pierde su validez en el caso dinámico, en el que la existencia de una excentricidad entre el centro de masa y el punto de aplicación de la resultante de fuerzas de restauración de los diferentes pórticos conlleva a la aparición de un par torsor que obliga a la estructura a responder igualmente de manera rotatoria (cf. capítulo 5, sección 5.4). Por esta razón se hace necesaria la consideración del tercer grado de libertad u_ϱ , independientemente de que $u_{s,\varrho}$ se tome o no como nulo.

De acuerdo con lo anterior, y teniendo en cuenta la ecuación (12) del capítulo 1, en el caso del pórtico plano el vector de cargas equivalentes al movimiento del suelo es

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{u}_s \quad (7.33)$$

lo que puede escribirse en forma compacta como

$$\mathbf{p} \equiv -\mathbf{m}\mathbf{r}\ddot{u}_s \quad (7.34)$$

En el caso del pórtico espacial, la ecuación correspondiente es

$$\mathbf{p} \equiv -\mathbf{m}\mathbf{r}_x\ddot{u}_{s,x} - \mathbf{m}\mathbf{r}_y\ddot{u}_{s,y} \quad (7.35)$$

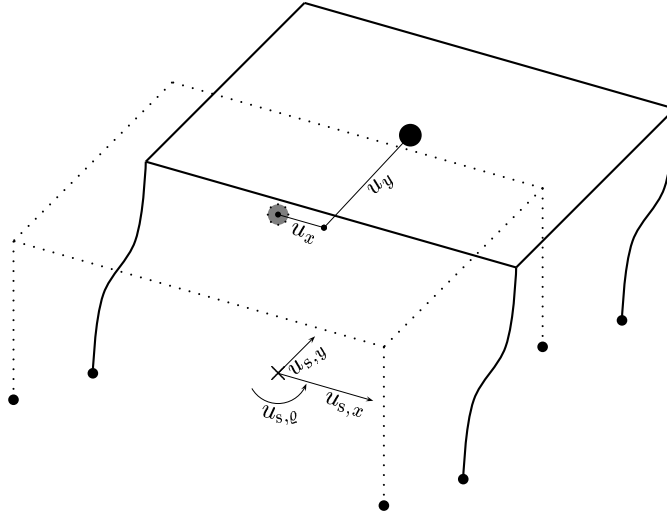


Figura 7.6: Desplazamientos estáticos producidos por movimientos del suelo - Pórtico espacial.

A continuación se lista el programa `dmgdl.m` de MATLAB, que calcula la respuesta de una estructura plana de múltiples grados de libertad sometida a un acelerograma sísmico por el método de superposición modal.

```
function [Phi, Omega, t, d, v, a] = dmgdl(m, k, xi, r, as, dt)
%
%-----
% [Phi, Omega, t, d, v, a] = dmgdl(m, k, xi, r, as, dt)
%-----
%
% Calcula las formas y frecuencias modales de una estructura
% definida por las matrices de masa, rigidez y la respuesta de la
% estructura ante un acelerograma.
%
%
% Por: Jorge E. Hurtado G.
%      Universidad Nacional, Manizales
%
```



```
%
% m: matriz de masa
% k: matriz de rigidez
% xi: vector de amortiguamientos modales
% r: vector de compatibilidad del movimiento del suelo con los grados
%   de libertad de la estructura
% as: acelerograma
% dt: paso de tiempo
%
% t: vector de tiempos
% d: matriz de desplazamientos de respuesta
% v: matriz de velocidades de respuesta
% a: matriz de aceleraciones de respuesta
%
% Nota: La dimension de las matrices de respuestas es n*n1,
% donde n es el numero de grados de libertad y n1 el numero de
% puntos de discretizacion del acelerograma.
%
%-----
%
%
[n,n]=size(m);
n1=length(as);
tmax=dt*n1;
t=linspace(0,tmax,n1);
d=zeros(n,n1);
v=zeros(n,n1);
a=zeros(n,n1);
%
[Phi,Omaga] = dmodos(m,k);           % modos y frecuencias
for j=1:n
    pj=-Phi(:,j)'*m*r*as;             % vector de carga modal
    wj=Omaga(j);
    xij=xi(j);
    [dj,vj,aj]=dmaclin1(pj,1,wj,xij,dt); % respuestas modales
    d=d+Phi(:,j)*dj';                 % superposicion modal
    v=v+Phi(:,j)*vj';
    a=a+Phi(:,j)*aj';
end
%
figure for j=1:n
    subplot(n,1,j), plot(t,d(j,:))
    if j==1
        title('Desplazamientos')
    end
    if j==n
        xlabel('Tiempo')
    end
end
```

```

end figure for j=1:n
    subplot(n,1,j), plot(t,v(j,:))
    if j==1
        title('Velocidades')
    end
    if j==n
        xlabel('Tiempo')
    end
end figure for j=1:n
    subplot(n,1,j), plot(t,a(j,:))
    if j==1
        title('Aceleraciones')
    end
    if j==n
        xlabel('Tiempo')
    end
end
%
%
%-----% fin

```

Ejemplo 7.2

Calcular la respuesta del pórtico plano de tres niveles, tratado en los ejemplos 5.1 y 6.5, ante el registro del sismo de Tokachi-Oki, que aparece en la figura 4.3.

Las matrices de modos y frecuencias de vibración de esta estructura (ver ejemplo 6.5) son

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.0308 & 0.0865 & 0.1419 \\ 0.0886 & 0.1136 & -0.0884 \\ 0.1406 & -0.0905 & 0.0247 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 23.1777 & 0 & 0 \\ 0 & 78.1997 & 0 \\ 0 & 0 & 164.8240 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con las ecuaciones (7.14) y (7.34), se requiere calcular el vector $\Phi^T \mathbf{m} \mathbf{r}$, cuyo resultado es

$$\begin{pmatrix} 0.0308 & 0.0886 & 0.1406 \\ 0.0865 & 0.1136 & -0.0905 \\ 0.1419 & -0.0884 & 0.0247 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.0996 \\ 3.8352 \\ 2.7364 \end{pmatrix}$$

donde se ha omitido el signo negativo. Si se considera este resultado en relación con la ecuación (7.34) se ve claramente que la misma aceleración del suelo se multiplica por un factor cada vez menor, en valor absoluto, en la medida en que crece el número de orden del modo. Por

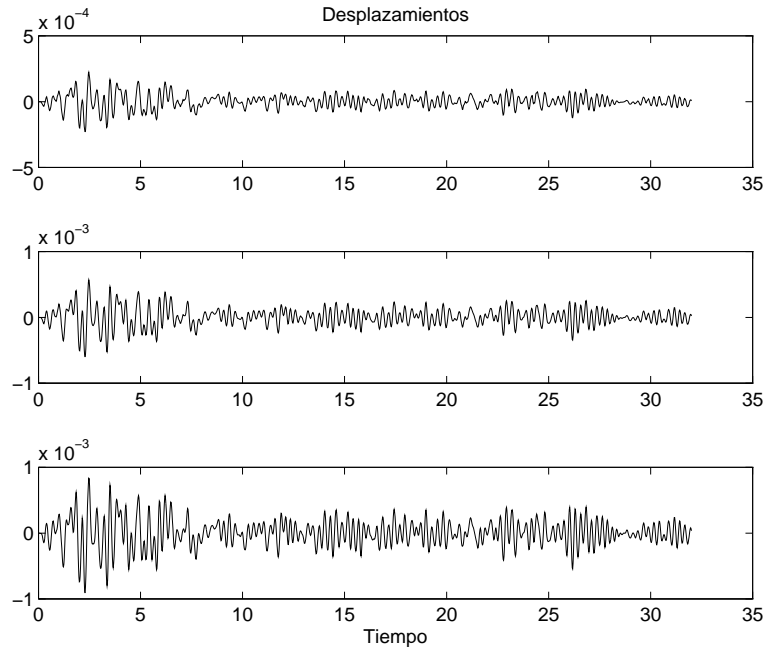


Figura 7.7: Ejemplo 7.2 - Desplazamientos de respuesta.

esta razón, la respuesta vendrá determinada en mayor medida por el primer modo, luego por el segundo y mucho menos por el tercero, tal como ya se ha anticipado.

Para resolver este problema haremos uso del programa `dmgd1.m`. Los resultados de desplazamientos aparecen en la figura 7.7. Las historias de respuesta se ordenan de arriba a abajo, según los grados de libertad. El desplazamiento máximo del último piso es 3.72 veces el correspondiente al primero, lo cual puede apreciarse en la figura, mientras que el segundo piso se encuentra en una situación intermedia. Una proporción similar se da en el caso de las velocidades y aceleraciones de respuesta, cuyas historias aparecen en la figura 7.8. Finalmente, la figura 7.9 muestra la situación del pórtico en el instante $t = 2.48\text{s}$, en el que se dan los máximos desplazamientos de los tres pisos, simultáneamente en este caso. Dichos desplazamientos son iguales a 1.9×10^{-3} , 5.4×10^{-3} , 8.4×10^{-3} m, respectivamente.



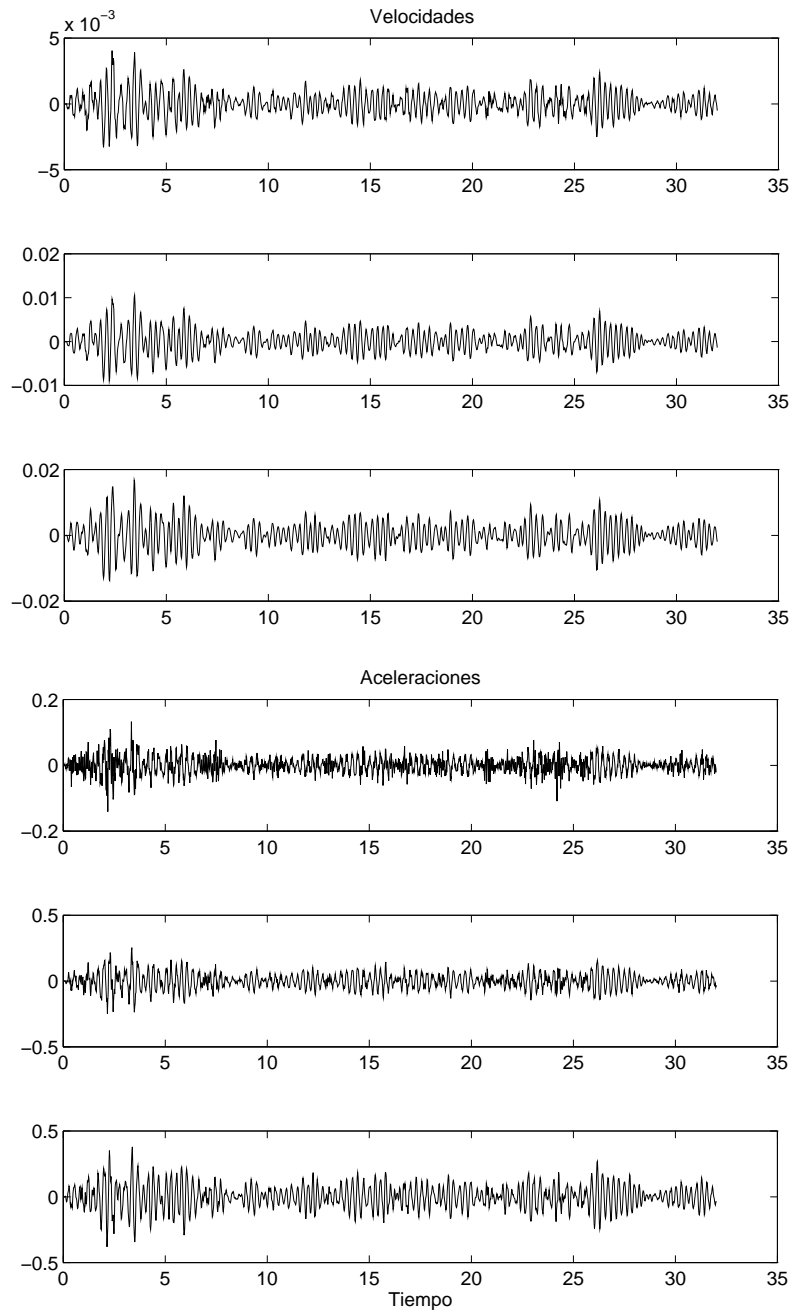


Figura 7.8: Ejemplo 7.2 - Velocidades y aceleraciones de respuesta.

7.4 Cálculo de la respuesta sísmica máxima

En la sección anterior se estudió la forma particular que reviste el vector de cargas externas en el caso sísmico y el cálculo de las historias temporales de respuesta. A continuación

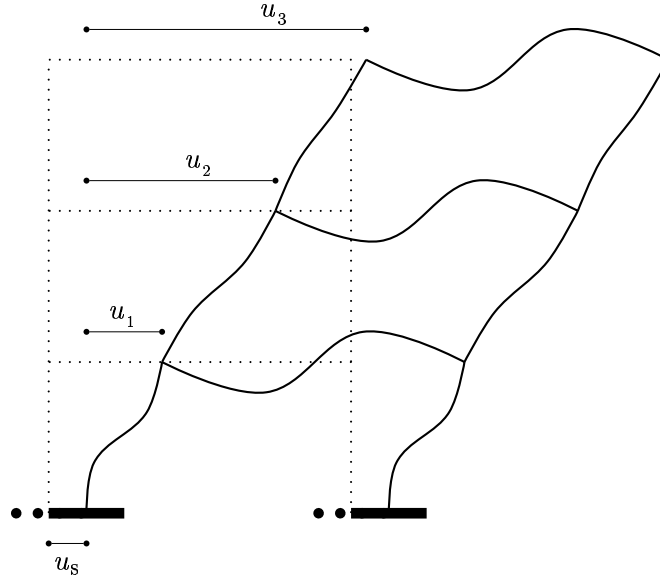


Figura 7.9: Ejemplo 7.2 - Desplazamientos máximos ($t = 2.48$ s).

examinaremos en detalle el cálculo de la respuesta sísmica máxima a partir de espectros de respuesta, lo cual constituye el caso más usual en esta área del diseño estructural. Luego se hará la deducción de una ecuación simplificada que figura en múltiples códigos de diseño sísmico del mundo y que da origen al *método de la fuerza horizontal equivalente*.

En primer lugar, en la sección anterior se vió que la fuerza externa equivalente a una aceleración del suelo \ddot{u}_s es (cf. ecuación 7.34)

$$\mathbf{p} = -\mathbf{m}\mathbf{r}\ddot{u}_s \quad (7.36)$$

En consecuencia, haciendo uso de la ecuación (7.18), la fuerza externa del modo j es en este caso igual a

$$\tilde{p}_j = -\frac{\phi_j^T \mathbf{m}\mathbf{r}}{\phi_j^T \mathbf{m}\phi_j} \ddot{u}_s \quad (7.37)$$

En lo que sigue denotaremos como q_j el producto

$$q_j = \frac{\phi_j^T \mathbf{m} \mathbf{r}}{\phi_j^T \mathbf{m} \phi_j}, \quad (7.38)$$

que, como bien puede verse, es un escalar, y omitiremos el signo negativo de la fuerza, pues en la práctica del diseño sísmico carece de sentido esta puntualización, debido a que la historia de aceleración se produce como una fluctuación aleatoria alrededor de cero. Con estas modificaciones, la fuerza externa del modo queda en la forma más simple

$$\tilde{p}_j = q_j \ddot{u}_s \quad (7.39)$$

y la ecuación de movimiento del modo como

$$\ddot{\eta}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = q_j \ddot{u}_s \quad (7.40)$$

La ecuación anterior indica que la respuesta de cualquier modo j se puede obtener en función de una respuesta estándar de referencia λ , dada por

$$\ddot{\lambda} + 2\xi \omega \dot{\lambda} + \omega^2 \lambda = \ddot{u}_s \quad (7.41)$$

haciendo

$$\eta_j = q_j \lambda(T_j, \xi_j) \quad (7.42)$$

debido a que el sistema es lineal y, por tanto, es válido el principio de superposición. En otras palabras, la respuesta de cada modo se obtiene como el producto del *factor de carga modal* q_j por una respuesta de un sistema sencillo ante la aceleración del suelo, caracterizado por la frecuencia (o el período) y el amortiguamiento modales. Ahora bien, como la ecuación (7.41) es la que describe el movimiento de un sistema simple sometido a una historia de aceleración \ddot{u}_s , los espectros de respuesta no son otra cosa que los valores máximos de $\lambda(T_j, \xi_j)$ y de sus derivadas (cf. capítulo 4):

$$\begin{aligned} S_d(T_j, \xi_j, \ddot{u}_s) &= \max \left(|\lambda(T_j, \xi_j)| \right) \\ S_v(T_j, \xi_j, \ddot{u}_s) &= \max \left(|\dot{\lambda}(T_j, \xi_j)| \right) \\ S_a(T_j, \xi_j, \ddot{u}_s) &= \max \left(|\ddot{u}_s(t) + \ddot{\lambda}(T_j, \xi_j)| \right) \end{aligned} \quad (7.43)$$

En consecuencia, el valor máximo de los desplazamientos modales es

$$\max(\eta_j) = q_j S_d(T_j, \xi_j, \ddot{u}_s) \quad (7.44)$$

Lo anterior significa que es posible obtener las respuestas máximas modales a partir de los espectros de respuesta de un sismo dado. Sin embargo, no es válido superponer las respuestas

máximas modales para obtener la respuesta total a través de los modos. Es decir, en general, se cumple que

$$\max(\mathbf{u}) \neq \sum \phi_j \max(\eta_j) \quad (7.45)$$

debido a que los valores máximos de las respuestas modales $\max(\eta_j)$ no suceden en iguales instantes de tiempo. Por esa razón, si se pretende estimar las respuestas modales máximas sin calcular las historias temporales sino por medio de un espectro de respuesta, se debe usar algún enfoque de tipo probabilista. Uno de tales, que ha sido consagrado por el uso, sugiere que el desplazamiento máximo de un grado de libertad cualquiera i se estime como

$$\max(u_i) \approx \left(\phi_{i1}^2 \max(\eta_1)^2 + \phi_{i2}^2 \max(\eta_2)^2 + \dots + \phi_{ip}^2 \max(\eta_p)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.46)$$

donde ϕ_{ij} es el valor del modo j en el grado de libertad i y p es el número de modos que se considere adecuado incluir en el cálculo. Abreviadamente, podemos escribir

$$\max(u_i) \approx \left(\max u_{i,1}^2 + \max u_{i,2}^2 + \dots + \max u_{i,p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.47)$$

donde $\max u_{i,j}^2$ es el valor de la máxima respuesta modal del grado de libertad i en el modo j . Este criterio se conoce con el nombre de *raiz cuadrada de la suma de los cuadrados*, *RCSC*.

Ejemplo 7.3

Consideremos una viga de cortante caracterizada por fracciones de amortiguamiento modales iguales a 0.05 y por las siguientes matrices de masa y rigidez:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k} = 10,000 \times \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular las máximas respuestas por superposición modal directa y su estimativo por medio del criterio RCSC ante el acelerograma de Tokachi-oki.

Con estos datos, las frecuencias angulares propias de la estructura son 10.195, 23.949, 39.655 rad/s, lo que equivale a unos periodos modales de 0.616, 0.262, 0.158 segundos. Los modos correspondientes son

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.0340 & 0.0798 & 0.1322 \\ 0.0779 & 0.1080 & -0.0853 \\ 0.1333 & -0.0834 & 0.0161 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de movimiento de las coordenadas generalizadas η_j son, en consecuencia, las siguientes:

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_1 + 1.019\dot{\eta}_1 + 103.9\eta_1 &= 9.808\ddot{u}_s \\ \ddot{\eta}_2 + 2.395\dot{\eta}_2 + 573.6\eta_2 &= 4.175\ddot{u}_s \\ \ddot{\eta}_3 + 3.966\dot{\eta}_3 + 1572.5\eta_3 &= 2.522\ddot{u}_s\end{aligned}$$

Las respuestas modales máximas de desplazamiento, aceleración y velocidad, evaluadas con el programa `dmaclin.m`, aparecen en la tabla 7.1. Junto a ellas aparece el instante de tiempo en que ocurren.

Tabla 7.1: Ejemplo 7.3: Respuestas modales máximas.

j	$\max \eta_j$	t	$\max \dot{\eta}_j$	t	$\max \ddot{\eta}_j$	t
1	0.0471	6.24	0.4527	6.06	4.7977	5.90
2	0.0046	2.48	0.1070	3.44	2.1591	2.28
3	0.0023	2.46	0.0666	2.42	2.1437	2.38

Puede verse que las máximas respuestas de cada modo no suceden en iguales tiempos en ninguna de las tres categorías (desplazamiento, velocidad y aceleración). Se comprueba entonces la validez de la desigualdad (7.45), en el sentido de que los máximos valores de las respuestas no son iguales a la suma de los valores modales máximos.

Tabla 7.2: Ejemplo 7.3: Desplazamientos máximos.

Nivel, i	$\max u_i$ (RCSC)	$\max u_i$ (Exacto)	Error
1	0.0020	0.0017	15%
2	0.0040	0.0037	7.5 %
3	0.0061	0.0063	3.3 %

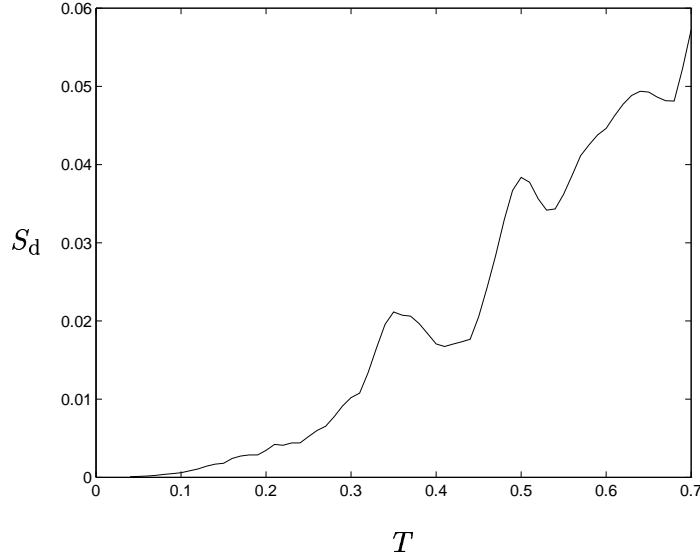


Figura 7.10: Ejemplo 7.3 - Espectro de desplazamiento del sismo de Tokachi-oki para $\xi = 0.05$.

Supongamos que en lugar de hacer el cálculo anterior se ha calculado el espectro de desplazamientos del acelerograma en cuestión (figura 7.10). En tal caso, se dispone directamente de las respuestas máximas $S_d(\xi, T, \ddot{u}_s) = \max |\lambda(T_j, \xi_j)|$, obtenidos al resolver correspondientes a la ecuación (7.41), que repetimos por conveniencia:

$$\ddot{\lambda} + 2\xi\omega\dot{\lambda} + \omega^2\lambda = \ddot{u}_s$$

Para los tres modos de esta estructura, identificados por los períodos 0.616, 0.262, 0.158, se tienen desplazamientos máximos de 0.0467, 0.0061 y 0.0023, respectivamente, como se puede ver, aproximadamente, en la figura. Por medio de las ecuaciones (7.44), (7.45) y (7.46) se pueden calcular los desplazamientos máximos totales, según el criterio RCSC, que aparecen en la tabla 7.2 junto a los correspondientes a la superposición modal completa de las historias de respuesta, calculada según lo establecido en la sección anterior. Se observa que los errores del método RCSC oscilan entre el 3 y el 15 %. Resultados semejantes se dan en los casos de velocidad y aceleración relativa o absoluta.



Un cálculo como el anterior corresponde a la estimación de la respuesta máxima de una estructura ante un sismo registrado. En el caso más corriente de diseño de una estructura con respecto a los posibles sismos futuros se deben utilizar espectros de diseño, que en general tienen una forma suavizada, caracterizada por ecuaciones y parámetros determinados con base en el cálculo de espectros de registros reales. En las normas colombianas de sismo-resistencia, el espectro de diseño se encuentra definido por la ecuación siguiente:

$$\frac{S_a(T)}{g} = \begin{cases} \frac{25}{3} A_a I T & \text{si } T \leq 0.3 \\ 2.5 A_a I & \text{si } 0.3 < T < 0.48 S \\ \frac{1.2 A_a S I}{T} & \text{si } 0.48 S \leq T < 2.4 S \\ \frac{A_a I}{2} & \text{si } T \geq 2.4 S \end{cases} \quad (7.48)$$

El significado de los parámetros es el siguiente:

1. El parámetro A_a define la aceleración máxima, como fracción de la aceleración de la gravedad, esperada en la región en un lapso de 475 años, lo que, en un enfoque probabilista, corresponde a una probabilidad de 0.1 de ser excedida en un lapso de 50 años. En otras palabras, si se acepta que la vida media de las estructuras es igual a este último valor, en dicho tiempo cabe esperar un sismo de aceleración máxima alrededor de A_a , con una probabilidad moderada (0.1) de que ocurra un sismo de mayor intensidad. Los valores de este parámetro para las diferentes regiones del país se pueden consultar en la norma.
2. El parámetro S define el tipo de suelo bajo la estructura en particular. Los valores respectivos deben identificarse cuidadosamente a partir de las pautas dadas en la norma. En general, puede decirse que los valores dependen de la flexibilidad del conjunto de estratos del terreno, la cual a su vez está determinada por la naturaleza misma del suelo y por altura de cada estrato. Así, los valores menores corresponden a rocas o suelos duros de poco espesor, mientras que los mayores a suelos blandos de gran espesor. Los valores de S son 1.0, 1.2, 1.5, 2.0.
3. El parámetro I define la importancia de la edificación desde el punto de vista de los desastres sísmicos. En este sentido hay edificaciones claramente indispensables para la atención de la emergencia sísmica, tales como hospitales, centrales telefónicas, etc. ($I = 1.3$); edificaciones para atención de la población, tales como estaciones de policía, bomberos, etc. ($I = 1.2$); estructuras de alta ocupación, tales como teatros, universidades, estadios, etc. ($I = 1.1$); para las estructuras restantes, para el cual $I = 1$.

En la figura 7.11 se muestra el espectro de diseño para el caso particular de $A_a = 0.25$. Hay que destacar que espectros como el anterior han sido propuestos a partir del estudio estadístico de espectros de sismos ocurridos en diversas partes del mundo, a partir de una

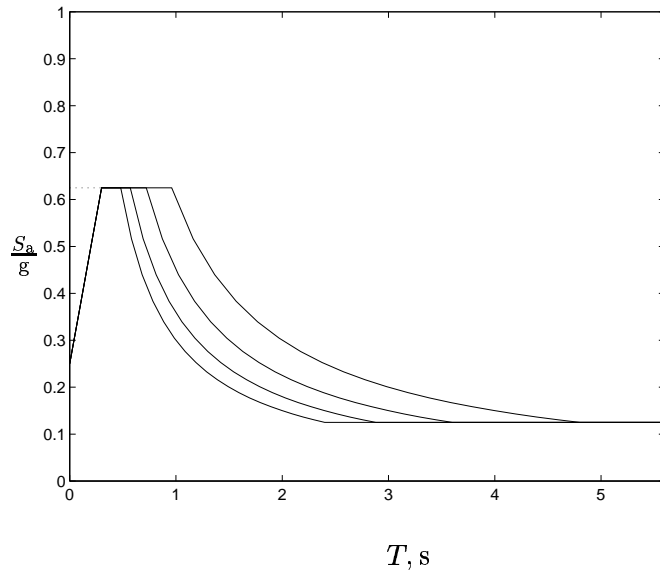


Figura 7.11: Espectros de diseño de la norma sísmica colombiana para $A_a = 0.25$.

caracterización gruesa de los perfiles de los suelos correspondientes. La tendencia mundial, sin embargo, es la de calcular espectros propios no sólo de cada ciudad, sino también de cada sector de ésta. Los estudios conducentes a estos espectros se denominan de *micro-zonificación sísmica*. En Colombia se han realizado estudios de esta clase en Popayán, Bogotá, Medellín y, parcialmente, en Manizales y Pereira.

7.5 Ecuaciones particulares para el diseño sísmico de edificios

Luego de haber deducido las expresiones generales anteriores para el análisis de estructuras por el método de la descomposición modal y de haber particularizado la forma de la carga externa para el caso de aceleraciones sísmicas del suelo, en esta sección deduciremos algunas ecuaciones aún más particulares, cuales son las adecuadas para el diseño sísmico de edificios. De hecho, en tal situación es posible y deseable obtener unas fuerzas horizontales estáticas equivalentes a las fuerzas dinámicas máximas, las cuales se pueden utilizar en el análisis de esfuerzos por medio de los métodos corrientes del análisis estático matricial de estructuras (cf. capítulo 5). Dichas fuerzas no son otra cosa que las fuerzas de restauración \mathbf{f}_R ,

$$\mathbf{f}_R = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (7.49)$$

que en el caso general son dependientes del tiempo, ya que el vector \mathbf{u} lo es. Teniendo en cuenta la ecuación (7.4), la ecuación anterior queda en la forma

$$\mathbf{f}_R = \mathbf{k} \sum_{j=1}^n \phi_j \eta_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{R,j} \quad (7.50)$$

Ahora bien, de acuerdo con la ecuación (20) del capítulo 6,

$$(\mathbf{k} - \omega_j^2 \mathbf{m}) \phi_j = \mathbf{0} \quad (7.51)$$

Por esto, la fuerza de restauración en el modo j también se puede expresar como

$$\mathbf{f}_{R,j} = \omega_j^2 \mathbf{m} \phi_j \eta_j = \omega_j^2 \mathbf{m} \phi_j q_j \lambda(T_j, \xi_j) \quad (7.52)$$

de acuerdo con (7.42). En consecuencia, el valor máximo de este vector de fuerzas es

$$\max(\mathbf{f}_{R,j}) = \omega_j^2 \mathbf{m} \phi_j q_j S_d(T_j, \xi_j) \quad (7.53)$$

Examinemos ahora en detalle algunos de los términos de la ecuación anterior para el caso corriente en edificios vistos sobre un plano, y modelados con masas concentradas en cada nivel. En tal caso, la matriz de masa es diagonal y el vector \mathbf{r} es un vector columna con todos sus elementos iguales a 1, como se demostró anteriormente. Por esto, el escalar q_j , dado por

$$q_j = \frac{\phi_j^T \mathbf{m} \mathbf{r}}{\phi_j^T \mathbf{m} \phi_j}, \quad (7.54)$$

adquiere una forma particular, para obtener la cual conviene expandir los productos matriciales del numerador y del denominador, así:

$$q_j = \frac{(\phi_{1j} \quad \dots \quad \phi_{nj}) \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}{(\phi_{1j} \quad \dots \quad \phi_{nj}) \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1j} \\ \vdots \\ \phi_{nj} \end{pmatrix}}, \quad (7.55)$$

por lo cual

$$q_j = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{ij}}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{ij}^2} \quad (7.56)$$

Por otra parte, el cálculo anterior muestra que el producto $\mathbf{m} \phi_j$ es, simplemente,

$$\mathbf{m}\phi_j = \begin{pmatrix} m_1\phi_{1j} \\ \vdots \\ m_n\phi_{nj} \end{pmatrix}$$

Por esto, la fuerza de restauración del modo j en el grado de libertad i es, de acuerdo con (7.53),

$$\max(f_{R,ij}) = m_i\phi_{ij}q_j\omega_j^2 S_d(T_j, \xi_j) = m_i\phi_{ij} \frac{\sum_{k=1}^n m_k\phi_{kj}}{\sum_{k=1}^n m_k\phi_{kj}^2} \omega_j^2 S_d(T_j, \xi_j) \quad (7.57)$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por $\sum_{k=1}^n m_k\phi_{kj}$ y agrupar términos se llega a

$$\begin{aligned} \max(f_{R,ij}) &= \frac{m_i\phi_{ij}}{\sum_{k=1}^n m_k\phi_{kj}} \frac{\left(\sum_{k=1}^n m_k\phi_{kj}\right)^2}{\sum_{k=1}^n m_k\phi_{kj}^2} \omega_j^2 S_d(T_j, \xi_j) \\ &= \frac{m_i\phi_{ij}}{\sum_{k=1}^n m_k\phi_{kj}} \check{m}_j \omega_j^2 S_d(T_j, \xi_j) \end{aligned} \quad (7.58)$$

donde \check{m}_j se conoce con el nombre de *masa efectiva del modo j* ,

$$\check{m}_j = \frac{\left(\sum_{k=1}^n m_k\phi_{kj}\right)^2}{\sum_{k=1}^n m_k\phi_{kj}^2} \quad (7.59)$$

y constituye por sí misma un criterio de selección del número mínimo de modos necesario para describir adecuadamente la respuesta, toda vez que su suma es igual a la masa total del edificio, como puede demostrarse fácilmente:

$$\sum_{j=1}^n \check{m}_j = \sum_{i=1}^n m_i \quad (7.60)$$

Por tanto, los modos más importantes en este tipo de estructuras serán aquellos caracterizados por mayores masas modales. Por el contrario, los modos con \check{m} pequeñas suelen despreciarse. Nótese que la definición general de la masa modal efectiva es

$$\check{m}_j = \frac{(\phi_j^T \mathbf{m} \mathbf{r})^2}{\phi_j^T \mathbf{m} \phi_j} \quad (7.61)$$

Esta ecuación resulta más práctica que la (7.59) para lenguajes de cálculo que operan directamente con matrices como MATLAB.

Ejemplo 7.4

Con los datos del ejemplo 7.3 se tiene que la masa total del edificio es

$$\sum_{i=1}^n m_i = 120$$

Las masas modales efectivas, de acuerdo con (7.59), son 96.206, 17.435, 6.359, que satisfacen la ecuación (7.60). Estas masas corresponden a los siguientes porcentajes de la masa total: 80.17, 14.53, 5.30. Se observa claramente el dominio que ejerce el primer modo y la relativamente pequeña importancia del tercero.



La ecuación (7.58) da origen a un método pseudo-dinámico, conocido con el nombre de *método de la fuerza horizontal equivalente*, el cual con leves variaciones se encuentra en la gran mayoría de normas sísmicas del mundo. Si se despreja los modos diferentes al dominante desde el punto de vista de la masa modal efectiva \tilde{m}_j , y se cambia la masa del modo dominante k por la masa total m_T del edificio, se llega a que

$$\max(f_{R,ik}) \approx \frac{m_i \phi_{ik}}{\sum_{k=1}^n m_k \phi_{kj}} m_T \omega_k^2 S_d(T_k, \xi_k) \quad (7.62)$$

Por otra parte, los ejemplos estudiados anteriormente referentes a estructuras de edificación y a vigas de cortante indican que el primer modo es típicamente el dominante en esta clase de problemas y, además, que su forma es tal que todos los desplazamientos de las masas son de igual signo y aproximadamente proporcionales a la altura desde la base, h_i . Por esto, en el método pseudo-dinámico se hace la hipótesis

$$\phi_{i1} \approx \frac{h_i}{h_T} \quad (7.63)$$

donde h_T es la altura total del edificio. Por tanto, el método prescribe que las fuerzas horizontales de diseño en cada nivel i sean calculadas como

$$f_i \equiv \frac{w_i h_i}{\sum_{k=1}^n w_k h_k} m_T \omega_1^2 S_d(T_1, \xi_1) \quad (7.64)$$

donde se han cambiado las masas m_i por los pesos w_i en el primer factor. Los factores restantes forman una fuerza única $v = m_T \omega_1^2 S_d(T_1, \xi_1)$. Como $S_a \approx \omega^2 S_d$, la expresión de esta fuerza se reduce a

$$v = m_T S_a(T_1, \xi_1) \quad (7.65)$$

Por tanto,

$$f_i \equiv \frac{w_i h_i}{\sum_{k=1}^n w_k h_k} m_T S_a(T_1, \xi_1) \quad (7.66)$$

Obsérvese que la aplicación de este método requiere suponer el período del primer modo T_1 con el fin de estimar la aceleración absoluta de diseño $S_a(T_1, \xi_1)$. Ahora bien, de (7.66) se ve claramente que

$$\sum_{i=1}^n f_i = v \quad (7.67)$$

Estas relaciones indican que la fuerza v es la *fuerza cortante en la base* del edificio, que se obtiene como el producto de la masa del mismo por la ordenada del espectro de aceleración absoluta del primer modo. Las fuerzas de diseño se pueden interpretar entonces como la descomposición de esta fuerza de acuerdo a las aceleraciones de cada piso que, como se observó en el ejemplo 7.2, crecen hacia arriba. La figura 7.12 ilustra estas ideas.

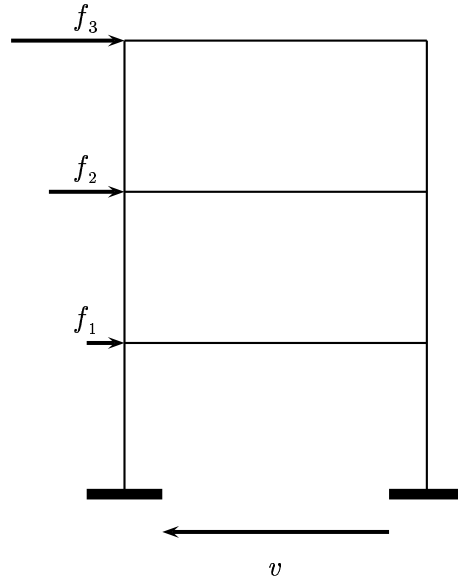


Figura 7.12: Fuerzas sísmicas de diseño.

Es necesario anotar que en algunas normas la ecuación (7.66) aparece con variaciones. En una de ellas, ampliamente utilizada, las fuerzas de diseño son

$$f_i \equiv \frac{w_i h_i^\alpha}{\sum_{k=1}^n w_k h_k^\alpha} v \quad (7.68)$$

donde α es un exponente, determinado a partir de múltiples análisis dinámicos, que le da cierta forma parabólica a la distribución vertical de las fuerzas.

Cabe anotar que el método pseudo-dinámico adquirió una enorme preponderancia en la práctica del diseño sísmico en la época anterior al auge de las computadoras digitales, en la cual resultaba de enorme costo el cálculo de las formas y frecuencias modales. Sin embargo, en la actualidad este escollo ha sido superado, por lo cual varias normas han introducido un método de diseño basado en el análisis modal, en muchos casos como alternativa al método equivalente, que de alguna manera permanece por cierta inercia. A continuación deduciremos las expresiones del método modal de diseño. La ecuación (7.58) se puede poner en la forma

$$f_{ij} = \frac{w_i \phi_{ij}}{\sum_{k=1}^n w_k \phi_{kj}} v_j \quad (7.69)$$

donde

$$v_j = \ddot{m}_j S_a(T_j, \xi_j) \quad (7.70)$$

es el *cortante basal del modo j* . El cortante de diseño en el nivel i , modo j es, simplemente,

$$v_{ij} = \sum_{l=i}^n f_{lj} \quad (7.71)$$

Ahora bien, tanto estos cortantes de piso como el cortante global en la base se combinan por el método RCSC para dar lugar a los respectivos cortantes de diseño:

$$\begin{aligned} v_i &= \left(v_{i1}^2 + v_{i2}^2 + \dots + v_{ip}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ v &= \left(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7.72)$$

donde p es un número adecuado de modos. Las fuerzas de diseño se obtienen a partir de los cortantes de diseño de cada nivel, por medio del proceso inverso al de la ecuación (7.71). Esto se aclara en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.5

La figura 7.13 muestra un edificio de 5 plantas iguales, cada una de las cuales tiene una masa de 60 t. Las vigas en ambos sentidos tienen una sección rectangular de 0.4×0.5 m, mientras que las secciones de las columnas son las que aparecen en la tabla 7.3. Todos los elementos estructurales tienen un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$. Calcularemos las fuerzas de diseño sísmico en el sentido y a partir del espectro de la ecuación (7.48), con $A_a = 0.25$, $S = 1.5$ e $I = 1.0$ (ver figura 7.10). Utilizaremos para ello algunos de los programas incluidos en este texto.

La siguiente secuencia de instrucciones de MATLAB crea los datos necesarios para activar el programa `dcondens.m`:

```
i1=0.6^4/12;
```

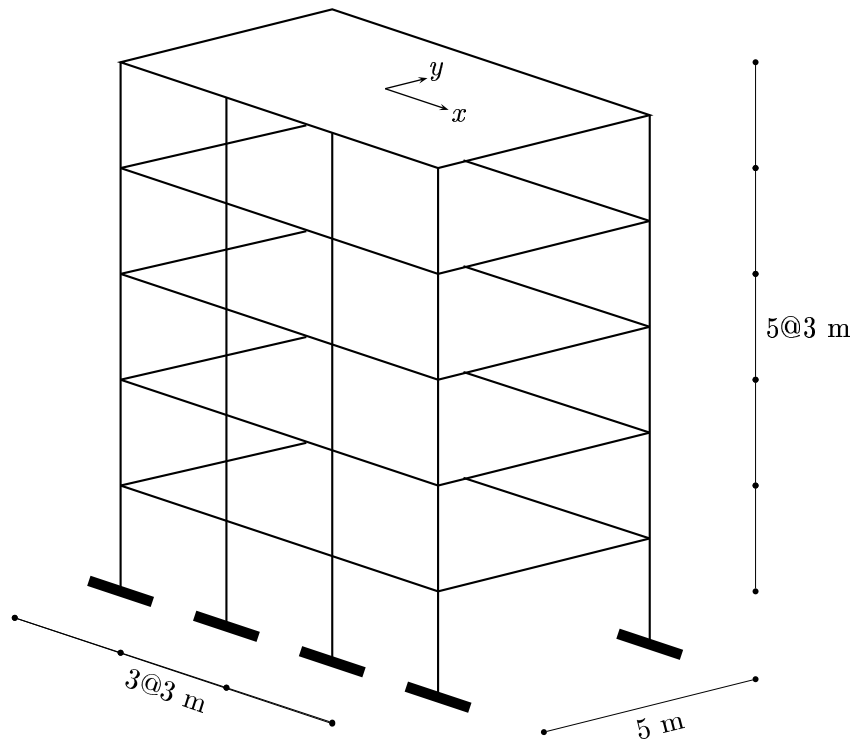



Figura 7.13: Ejemplo 7.5 - Descripción.

```
i2=0.55^4/12;
i3=0.5^4/12;
i4=0.45^4/12;
i5=0.4^4/12;
i6=0.4*0.5^3/12;
e=2e07;
np=5;
nv=1;
iv=[i6 i6 i6 i6 i6]';
ic=[i1 i1;i2 i2;i3 i3;i4 i4;i5 i5];
hp=3*ones(1,5);
lv=5;
[kpp,kps,kss,kp,kcond]=dcondens(np,nv,e,iv,ic,hp,lv);
kcond

kcond =
```

Tabla 7.3: Ejemplo 7.5: Secciones de las columnas.

Nivel	b	h
1	0.60	0.60
2	0.55	0.55
3	0.50	0.50
4	0.45	0.45
5	0.40	0.40

1.0e+005 *

2.6357	-1.3430	0.3320	-0.0475	0.0050
-1.3430	1.5887	-0.8765	0.1918	-0.0202
0.3320	-0.8765	1.1067	-0.5802	0.0933
-0.0475	0.1918	-0.5802	0.7323	-0.3072
0.0050	-0.0202	0.0933	-0.3072	0.2302

En vista de que hay cuatro pórticos iguales, la matriz de rigidez es $\mathbf{k}=4*\mathbf{k}_{cond}$. La matriz de masa es la siguiente:

$\mathbf{m}=60*\mathbf{eye}(5)$

$\mathbf{m} =$

60	0	0	0	0
0	60	0	0	0
0	0	60	0	0
0	0	0	60	0
0	0	0	0	60

Los modos y frecuencias modales se obtienen con el programa `dmodos.m`:

`[Phi, Omega]=dmodos(m,k)`

$\mathbf{Phi} =$

0.0101	0.0291	0.0472	0.0644	0.0966
0.0306	0.0695	0.0678	0.0263	-0.0748

```

0.0533    0.0695   -0.0195   -0.0842    0.0391
0.0731    0.0082   -0.0821    0.0657   -0.0138
0.0863   -0.0780    0.0521   -0.0206    0.0028

```

Omega =

```

11.8003
36.1071
66.2351
103.3542
159.5167

```

Nótese que se satisface la condición de ortonormalidad:

```
Phi'*m*Phi
```

ans =

```

1.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    1.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    1.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    1.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    1.0000

```

A continuación calcularemos las fuerzas de diseño por los dos métodos:

1. Método modal:

Este cálculo requiere la creación del vector **r**: `r=ones(5,1)`. Con este vector, las masas modales efectivas (ecuación 7.61) son

```
meff=(Phi'*m*r).^2
```

meff =

```

231.2196
34.8330
15.4038
9.5868
8.9569

```

Obsérvese que no se ha hecho la división entre $\phi_j^T \mathbf{m} \phi_j = \sum_i m_i \phi_{ij}^2$ ya que todos estos escalares son iguales a la unidad, de acuerdo a la normalización adoptada. Se comprueba que la suma de todas las masas modales efectivas es igual a la masa total:

```
sum(meff)
```

```
ans =
```

```
300.0000
```

Para estimar las respuestas modales con el espectro de diseño se requiere previamente calcular los períodos de los modos. Estos son:

```
T=2*pi./0mega
```

```
T =
```

```
0.5325
```

```
0.1740
```

```
0.0949
```

```
0.0608
```

```
0.0394
```

Por medio de la ecuación (7.48) se obtiene

```
Sa =
```

```
6.1250
```

```
3.5528
```

```
1.9368
```

```
1.2412
```

```
0.8042
```

Con estos datos pasamos a calcular las fuerzas modales, de acuerdo con las ecuaciones (7.69) y (7.70):

```
mPhi=m*Phi;
```

```
for j=1:5;f(:,j)=mPhi(:,j)*meff(j)*Sa(j)/sum(mPhi(:,j)); end;
```

```
f
```

```
f =
```

```
56.6349    36.6636    21.5360    14.8441    13.9565
171.2267    87.4972    30.9250     6.0675   -10.8074
297.7739    87.4220    -8.9080   -19.4147     5.6446
408.5832    10.3137   -37.4637    15.1493    -1.9883
482.0013   -98.1414    23.7442    -4.7472     0.3977
```

Los cortantes en cada piso se calculan de manera eficiente por medio de las instrucciones **flipud** y **cumsum**. La primera rota una matriz en sentido vertical y la segunda calcula las sumas acumuladas de los elementos de sus columnas:

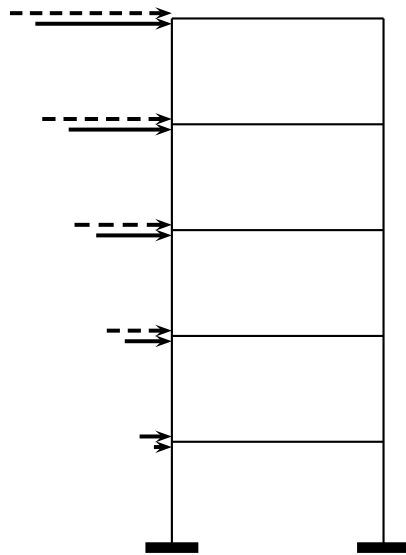


Figura 7.14: Ejemplo 7.5 – Fuerzas de diseño: — · —: Método modal; — —: Método pseudo-dinámico.

```
v=flipud(cumsum(flipud(f)))

v =

1.0e+003 *

    1.4162    0.1238    0.0298    0.0119    0.0072
    1.3596    0.0871    0.0083   -0.0029   -0.0068
    1.1884   -0.0004   -0.0226   -0.0090    0.0041
    0.8906   -0.0878   -0.0137    0.0104   -0.0016
    0.4820   -0.0981    0.0237   -0.0047    0.0004
```

Los cortantes de diseño, según el método modal, son, pues,

```
vmod=sqrt(sum(v'.^2))'

vmod =

1.0e+003 *

    1.4220
```

```

1.3624
1.1886
0.8951
0.4925

```

Finalmente, las fuerzas de diseño se pueden obtener a partir de la distribución en altura de las fuerzas cortantes en la forma siguiente:

```

fmod(5)=vmod(5);
fmod(4)=vmod(4)-vmod(5);
fmod(3)=vmod(3)-vmod(4);
fmod(2)=vmod(2)-vmod(3);
fmod(1)=vmod(1)-vmod(2);
fmod

fmod =

fmod =

59.5810  173.8019  293.5432  402.5847  492.4870

```

Este cálculo se puede hacer de forma más elegante en MATLAB así:

```

vmod1=[vmod(2:5); 0];  fmod=vmod-vmod1

fmod =

59.5810
173.8019
293.5432
402.5847
492.4870

```

2. Método pseudo-dinámico:

Para aplicar este método se debe hacer una suposición del valor del período del primer modo, como se ha dicho antes. Una ecuación popular empleada para este propósito en el caso de pórticos es

$$T \approx 0.08 h_T^{\frac{3}{4}} \quad (7.73)$$

donde h_T es la altura total del edificio en metros, con lo cual T resulta dado en segundos. Al aplicar esta ecuación se obtiene $T = 0.6098$ s, lo que hace que el valor correspondiente de la aceleración de respuesta sea, de nuevo, 6.125 m/s^2 , de acuerdo con la ecuación (7.48).

Las fuerzas en este caso se calculan directamente con la ecuación (7.66):

```
feq=wh'*Sa(1)*60*5/sum(wh)

feq =

    122.5000
    245.0000
    367.5000
    490.0000
    612.5000
```

La figura 7.14 compara los resultados obtenidos por estos métodos. Se observa que los del método pseudo-dinámico resultan más conservadores que los del método modal, lo cual se debe básicamente a que se supone que la masa efectiva del primer modo es igual a la masa total, cuando en realidad es sólo el 77 por ciento. Esta es una tendencia de este método que explica en parte su permanencia en las normas mundiales. Sin embargo, para estructuras de edificación de formas más complejas que la estudiada aquí, el cálculo dinámico resulta verdaderamente imprescindible.



Apéndice A

Nociones básicas sobre MATLAB

Este apéndice está dedicado a una breve exposición de los elementos esenciales del lenguaje MATLAB, con el propósito de facilitar la creación de variables usuales en Dinámica de Estructuras y ejecutar algunos de los programas expuestos en este texto, así como las rutinas incorporadas en el lenguaje.

A.1 Características de MATLAB

MATLAB es tanto un lenguaje de programación como un entorno de trabajo. Por esta razón se puede trabajar en él tanto en el modo *consola* (es decir, en el que se hacen cálculos cuyo resultado se obtiene inmediatamente por medio de los comandos adecuados, que se dan en línea) como en el modo *rutina* (esto es, programas cuyos comandos están codificados). Ambos modos pueden ponerse en relación entre sí. Por ejemplo, una rutina (cuya denotación general es un archivo M, *.m) puede pedir datos de la consola, a través del comando `input`; igualmente, una estructura típica de un programa, como es un bucle `for -- end` se puede pulsar en la consola directamente sin necesidad de hacer un programa tipo M.

Las características más importantes de MATLAB son su manejo directo de vectores, matrices y cadenas de caracteres como objetos; su posibilidad de trabajar con números reales o complejos indistintamente; la no exigencia de declarar variables y arreglos para reserva de memoria; y la posibilidad de combinar matemática simbólica con numérica, entre otras. Todo esto, aunado a la disponibilidad de múltiples funciones matemáticas ya programadas y librerías especializadas (los famosos *toolboxes*) hacen que los programas escritos en MATLAB sean altamente compactos en comparación con los equivalentes en FORTRAN, C, PASCAL, etc. Esto reporta grandes ventajas para la textos de carácter didáctico, debido a que se facilita el estudio de un programa complejo de ciencias o de ingeniería, al ocupar todos los comandos unas pocas líneas. Esto es especialmente cierto cuando se manejan vectores y matrices como bloques enteros, es decir, cuando no es necesario trabajar con sus elementos individuales. En el caso del análisis de estructuras el manejo de bloques enteros es posible salvo cuando se requiere ensamblar matrices de rigidez, por ejemplo.

Estudiaremos en primer lugar las comandos básicos para creación variables, funciones,

vectores y matrices. Luego estudiaremos la creación de archivos M.

A.2 Operaciones fundamentales

Una variable se crea en MATLAB asignándole un valor:

```
x=3  
  
x =  
  
3
```

Un punto y coma (;) al final de cada instrucción inhibe la aparición de un resultado:

```
x=3;  
y=2;
```

Las siguientes son las operaciones aritméticas básicas:

```
x+y  
  
ans =  
  
5
```

```
x-y  
  
ans =  
  
1
```

```
x*y  
  
ans =  
  
6
```

```
x/y  
  
ans =  
  
1.5000
```

```
x^y  
  
ans =  
  
9
```

Las siguientes son algunas funciones de uso corriente:

```
sqrt(3)
```

```
ans =
```

```
1.7321
```

```
cos(pi/4)
```

```
ans =
```

```
0.7071
```

```
sin(pi/6)
```

```
ans =
```

```
0.5000
```

```
exp(1)
```

```
ans =
```

```
2.7183
```

```
log(exp(1))
```

```
ans =
```

```
1
```

```
log10(10)
```

```
ans =
```

```
1
```

A.3 Vectores y matrices

1. Creación de un vector con elementos dados:

Un vector fila se crea en la forma

```
a=[1 2 3 4];
```

Si se trata de un vector columna, se puede crear como

```
a=[1; 2; 3; 4];
```

o bien como

```
a=[1 2 3 4]';
```

El símbolo ' denota transposición matricial. La multiplicación de todos los elementos de un vector por un escalar es simple:

```
a=[1 2 3 4]'; b=2*a
```

b =

```
2  
4  
6  
8
```

2. Creación de un vector con intervalos regulares.

El comando

```
t=linspace(1,10,5)
```

t =

```
1.0000    3.2500    5.5000    7.7500   10.0000
```

crea un vector fila de 5 elementos regularmente espaciados entre 1 y 10. Esta instrucción se utiliza corrientemente para crear un vector de abscisas en las cuales se ha de evaluar una función determinada.

3. Suma de dos vectores:

```
a=[1 2 3 4]';
```

```
b=[4 3 2 1]';
```

```
c=a+b
```

c =

```
5  
5  
5  
5
```

4. Producto escalar de dos vectores.

Con los datos anteriores, en que tanto el vector a como el b tienen dimensión 4×1 , el producto escalar $d = a \cdot b \equiv a^T b = \sum_{i=1}^4 a(i) \times b(i)$ implica trasponer el vector a para que la multiplicación matricial tenga sentido. Por tanto,

```
d=a'*b

ans =

    20
```

Por el contrario, la instrucción

```
e=a.*b

e =

     4
     6
     6
     4
```

corresponde al producto de a y b elemento por elemento. Notése que la instrucción

```
sum(e)

ans =

    20
```

da como resultado el producto escalar de los dos vectores, ya obtenido por otra vía. De manera similar se obtiene la división de dos vectores elemento por elemento:

```
v1=[2 4 6];
v2=[2 2 2];
v1./v2

ans =

     1     2     3
```

Finalmente, algunas operaciones importantes sobre vectores son las siguientes: el máximo elemento ($\max(a)$); el mínimo ($\min(a)$), las elementos que sean mayores o iguales que un cierto escalar x ($i=a \geq x$), o iguales a él ($i=a == x$), etc. Por ejemplo,

```
a=[4 9 5 4]; i=a==4
```

```
i =
```

```
1      0      0      1
```

5. Creación de una matriz.

Las matrices se crean de manera similar a los vectores:

```
m1=[1 2 3; 6 5 4;3 1 3]
```

```
m1 =
```

```
1      2      3
6      5      4
3      1      3
```

Un elemento de una matriz se extrae de acuerdo a la notación usual en matemáticas:

```
m1(2,3)
```

```
ans =
```

```
4
```

El símbolo `:` se utiliza para denotar todos los elementos de una fila o de una columna. Por tanto, la instrucción `m1(2,:)` entrega la segunda fila de la matriz `m1`, mientras que `m1(:,3)` hace lo propio con la tercera columna:

```
m1(2,:)
```

```
ans =
```

```
6      5      4
```

```
m1(:,3)
```

```
ans =
```

```
3
4
3
```

Algunas matrices especiales de uso frecuente son la de ceros, la de unos y la idéntica:

```
zeros(3,3)
```

```
ans =
```

```
0     0     0
0     0     0
0     0     0
```

```
ones(3,3)
```

```
ans =
```

```
1     1     1
1     1     1
1     1     1
```

```
eye(3)
```

```
ans =
```

```
1     0     0
0     1     0
0     0     1
```

6. Suma y producto de dos matrices.

```
m2=rand(3,3)
```

```
m2 =
```

```
0.2190    0.6793    0.5194
0.0470    0.9347    0.8310
0.6789    0.3835    0.0346
```

```
m3=m1+m2
```

```
m3 =
```

```
1.2190    2.6793    3.5194
6.0470    5.9347    4.8310
3.6789    1.3835    3.0346
```

```
m4=m1*m2
```

```
m4 =
```

```
2.3496    3.6992    2.2851
4.2644   10.2833    7.4096
2.7405    4.1231    2.4929
```

En este ejemplo `m2=rand(3,3)` es una matriz de números aleatorios con distribución uniforme entre 0 y 1. Es necesario recordar que el producto de dos matrices de dimensiones (m, n) y (p, q) debe respetar la norma $n = p$. De lo contrario el producto no es factible:

```
m6=[2 2; 2 2]
```

```
m6 =
```

```
    2    2
    2    2
```

```
m1*m6 ??? Error using ==> * Inner matrix dimensions must agree.
```

7. Inversa de una matriz.

```
m5=inv(m1)
```

```
m5 =
```

```
-0.3929    0.1071    0.2500
 0.2143    0.2143   -0.5000
 0.3214   -0.1786    0.2500
```

8. Creación de una matriz diagonal:

```
m7=diag([3 3 2])
```

```
m7 =
```

```
    3    0    0
    0    3    0
    0    0    2
```

9. Solución de ecuaciones simultáneas.

El problema usual $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde \mathbf{A} es una matriz de coeficientes de las incógnitas \mathbf{x} y \mathbf{b} es un vector de términos independientes, se resuelve, o bien de la manera clásica `x=inv(A)*b`, o bien por medio de la operación

```
x=A\b
```

que calcula la llamada descomposición *LU* de la matriz \mathbf{A} y luego obtiene el vector de incógnitas \mathbf{x} . La descomposición *LU* está definida como la obtención de dos matrices, una triangular inferior \mathbf{L} (por *lower*, en inglés) y otra superior \mathbf{U} (*upper*), cuyo producto es igual a \mathbf{A} . Esta técnica es preferible para resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneas que el método de la matriz inversa.

10. Autovalores y autovectores de una matriz.

Para una matriz simétrica, los autovalores (**lambda**) y los autovectores (**phi**) se obtienen de la manera siguiente:

```
m8=[1 2 3; 2 4 5; 3 5 6]

m8 =

     1     2     3
     2     4     5
     3     5     6

[phi,lambda]=eig(m8)

phi =

    0.5910   -0.7370    0.3280
   -0.7370   -0.3280    0.5910
    0.3280    0.5910    0.7370

lambda =

    0.1709         0         0
         0   -0.5157         0
         0         0   11.3448
```

Si la matriz no es simétrica los autovalores y autovectores son complejos:

```
m9=[1 2 3; 6 4 5; 7 9 6]

m9 =

     1     2     3
     6     4     5
     7     9     6

[phi,lambda]=eig(m9)

phi =

   -0.2610          0.2075 + 0.5245i    0.2075 - 0.5245i
   -0.5389          0.3908 - 0.3290i    0.3908 + 0.3290i
   -0.8009          -0.6244 - 0.1762i   -0.6244 + 0.1762i

lambda =
```

```

14.3366      0      0
      0    -1.6683 + 1.0262i      0
      0      0    -1.6683 - 1.0262i

```

A.4 Funciones

Las funciones en MATLAB se pueden tratar directamente como vectores o matrices, lo cual implica grandes ahorros de líneas de codificación. Por ejemplo, si un vector de tiempo es

```
t=linspace(0,0.5,5)
```

```
t =
```

```

      0      0.1250      0.2500      0.3750      0.5000

```

y una frecuencia angular ω es igual a 2π ($w=2*pi$), la función $r = \cos(\omega t)$ es el vector

```
r=cos(w*t)
```

```
r =
```

```

1.0000      0.7071      0.0000     -0.7071     -1.0000

```

De manera semejante se calculan otras funciones, sin importar si la variable dependiente es un vector o una matriz:

```
m1
```

```
m1 =
```

```

      1      2      3
      6      5      4
      3      1      3

```

```
exp(m1)
```

```
ans =
```

```

      2.7183      7.3891     20.0855
    403.4288    148.4132     54.5982
     20.0855      2.7183     20.0855

```

A.5 Bucles y decisiones condicionales

El bucle `for -- end` es la estructura de MATLAB adecuada para hacer cálculos vinculados a índices en general. Por ejemplo, el cálculo del factorial de un número (en este caso, 10) se hace de la siguiente forma:

```
nfact=1; n=10; for i=1:n; nfact=nfact*i;end; nfact

nfact =

    3628800
```

La estructura de condicionamiento lógico es `if -- elseif -- else -- end`, que se explica aquí con respecto a la definición de la función de signo:

$$y = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

```
if x < 0; y = -1; elseif x==0; y=0; else; y=1; end
```

Por ejemplo, si se asigna el valor `x=3` antes de la ejecución de esta secuencia, después de ella el valor de `y` es

```
y

y =

     1
```

Se puede suspender la ejecución de un bucle `for -- end` por medio de la instrucción `break`. Por ejemplo, la secuencia de instrucciones

```
nfact=1; n=10; for i=1:n; if i==5; break; end;
nfact=nfact*i;end;

nfact

nfact =

    24
```

calcula esta fórmula recurrente sólo hasta cuatro.

A.6 Programas

Un programa en MATLAB se constituye como un archivo tipo M (*.m). Su creación se hace en un editor de texto cualquiera en ASCII. La edición puede comenzar directamente con una serie de líneas de código, caso en el cual el programa siempre dará los mismos resultados, o bien comenzando con una instrucción del tipo

```
function [resultados]=nombre(datos)
```

En esta descripción, `[resultados]` es un grupo de resultados que se espera del programa y que quedan disponibles para el uso por consola, cuyos nombres están separados por comas: `[a,b,c]`, donde `a,b,c` pueden ser escalares, vectores, matrices o cadenas alfanuméricas. De la misma manera se da al programa el conjunto `[datos]`. El nombre del programa debe coincidir con el del archivo.

Como ejemplo, el siguiente programa crea un vector \mathbf{f} cuyos elementos son los factoriales de sus números ordinales de posición; es decir, $\mathbf{f} = [1!, 2!, \dots, n!]$

```
function [f]=fact(n)
%
%-----
% [f]=fact(n)
%-----
%
% Calcula un vector cuyos elementos son los
% factoriales desde 1 hasta n
%
%-----
%
%
%
nfact=1;
for i=1:n;
    nfact=nfact*i;
    f(i)=nfact;
end;
%
%
%----- fin
```

El programa se activa con la orden `[f]=fact(n)`:

```
[f]=fact(4)

f =

     1     2     6    24
```

Si escribimos en la consola `help fact` obtenemos

```
-----
[f]=fact(n)
-----

Calcula un vector cuyos elementos son los
factoriales desde 1 hasta n
-----
```

que son las líneas que aparecen entre el encabezado del programa y la primera línea de comandos, comentadas con el signo de porcentaje. En general, el comando `help` da esta información para cualquier programa tipo M escrito, bien por la casa matriz de MATLAB, o bien por un usuario cualquiera.

A.7 Archivos de datos y resultados

Un archivo de datos en ASCII se puede importar al programa por medio de la instrucción `load`:

```
load datos.dat;
```

Por su parte un archivo de cálculos se puede guardar con la instrucción `save`:

```
save resul.res;
```

Las diversas posibilidades de esos dos comandos se pueden consultar por medio de `help`.

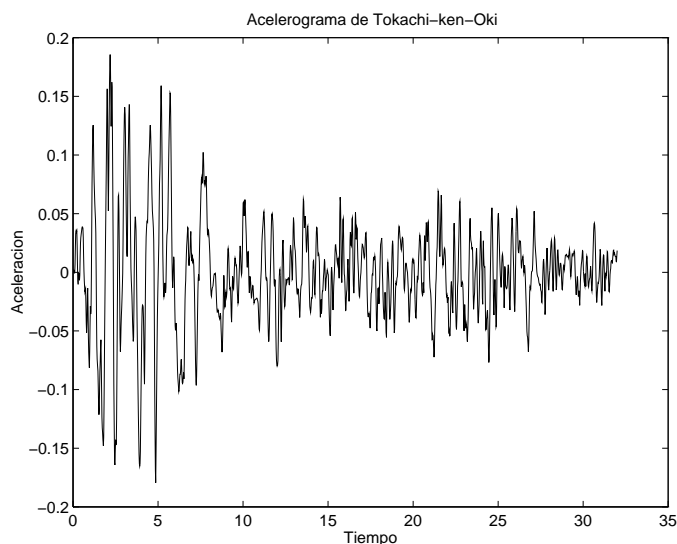


Figura A.1: Ejemplo de creación de una figura bidimensional

A.8 Figuras

Una descripción de las múltiples posibilidades de creación de figuras de tipo técnico con MATLAB ocuparía decenas de páginas. En este apéndice nos limitaremos a los elementos básicos de elaboración de figuras bidimensionales. Como ejemplo haremos la gráfica del acelerograma de un sismo:

```
load tokachi.dat;
t=0.02*linspace(0,length(tokachi),length(tokachi));
plot(t,tokachi)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Aceleracion')
title('Acelerograma de Tokachi-Oki')
```

El resultado aparece en la figura A.1. Las diferentes opciones de graficación se pueden consultar con `help plot`.

Bibliografía

A continuación se listan algunos textos de Dinámica de Estructuras, así como de temas relacionados, que se recomiendan para la ampliación de los temas estudiados en esta obra:

1. Clough, R. W. and Penzien, J. (1993): *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, New York.
2. Barbat, A. H. y Miquel, J. (1994): *Estructuras sometidas a acciones sísmicas. Cálculo por ordenador*. CIMNE, Barcelona.
3. García, L. E. (1998): *Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico*. Universidad de los Andes, Bogotá.
4. Géradin, M. and Rixen, D. (1997): *Mechanical Vibrations. Theory and Application to Structural Dynamics*. John Wiley and Sons, Chichester.
5. Kwon, Y. W., Bang, H. (1997): *The Finite Element Method using MATLAB*. CRC Press, Boca Raton.
6. Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (1998): *Normas de diseño y construcción sismo-resistente NSR-98*. AIS, Bogotá.
7. Chopra, A. K. (1995): *Dynamics of Structures*. Prentice-Hall, Upper Saddle River.