

Análisis matricial de estructuras

Curso con MATLAB

Jorge Eduardo Hurtado
Profesor Titular
Universidad Nacional de Colombia

Índice general

1. Introducción general	1
1.1. Matriz de rigidez de una barra a tensión axial	1
1.2. Formación de las matrices de la estructura	5
1.3. Significado de la matriz de rigidez	7
1.4. Métodos variacionales	8
1.4.1. Notación variacional	8
1.4.2. Principio de la energía potencial mínima	9
1.4.3. Principio del trabajo virtual	12
1.5. Método de elementos finitos	13
1.5.1. Formulaciones fuerte y débil	13
1.5.2. Métodos de residuos ponderados	16
1.5.3. Formulación del elemento finito	18
1.6. Simetría de la matriz de rigidez	23
1.7. Formación automática de la matriz de rigidez	24
1.8. Cálculo de desplazamientos y reacciones	26
1.9. Cálculo de fuerzas internas en los elementos	27
1.10. Ejemplo 1.1: Cadena de elementos en compresión	28
2. Armaduras planas y espaciales	35
2.1. Grado de indeterminación estática	36
2.2. Sistemas de coordenadas local y global	36
2.3. Principio del contragradiante	40
2.4. Matriz de rigidez de un elemento de armadura	41
2.5. Matriz de rigidez de la armadura	43
2.6. Cálculo de reacciones y fuerzas internas	48
2.7. Ejemplo 2.1: Armadura plana	50
2.8. Armaduras espaciales	60
2.9. Ejemplo 2.2: Armadura espacial	63
3. Vigas y parrillas	69
3.1. Matriz de rigidez de una viga	69
3.1.1. Deducción por la teoría de flexión de Euler	69
3.1.2. Deducción por el método de elementos finitos	74

3.2.	Ensamblaje y solución	76
3.3.	Ejemplo 3.1: Viga de un vano	77
3.4.	Análisis de vigas biempotradas	82
3.5.	Cargas en el interior de una viga	84
3.6.	Ejemplo 3.2: Viga de dos vanos	87
3.7.	Simplificación del análisis	93
3.8.	Líneas de influencia	93
3.9.	Parrillas	96
3.10.	Ejemplo 3.3: Parrilla	102
4.	Pórticos planos	111
4.1.	Matriz de rigidez de un elemento de pórtico	111
4.2.	Ejemplo 4.1: Pórtico con carga horizontal	117
4.3.	Elementos cargados en el interior	122
4.4.	Ejemplo 4.2: Pórtico con carga distribuida	122
4.5.	Ejemplo 4.3: Pórtico con carga vertical asimétrica	126
4.6.	Elementos inclinados cargados	129
4.7.	Elementos articulados	133
4.7.1.	Matriz de rigidez	133
4.7.2.	Cargas en los elementos	137
4.8.	Movimientos de los apoyos	138
4.9.	Consideración de extremos rígidos	140
4.10.	Consideración de deformaciones por cortante	142
4.11.	Ejemplo 4.4: Pórtico con muro de cortante	144
5.	Edificios	147
5.1.	Configuración del edificio	147
5.2.	Noción de diafragma	147
5.3.	Análisis bajo cargas verticales	151
5.4.	Ejemplo 5.1: Portico de 5 pisos, cargas verticales	152
5.5.	Fuerzas sísmicas - Método de la fuerza horizontal equivalente	157
5.5.1.	Fuerzas	157
5.5.2.	Pares de torsión	159
5.5.3.	Acción bidireccional	159
5.6.	Ensamblaje de pórticos planos	160
5.6.1.	Condensación de las matrices de rigidez de pórticos planos	160
5.6.2.	Ejemplo 5.2: Matriz de rigidez condensada de un pórtico	167
5.6.3.	Ejemplo 5.3: Matriz de rigidez condensada de un pórtico	169
5.6.4.	Matriz de rigidez del edificio	175
5.6.5.	Ejemplo 5.4: Análisis de la asimetría	179
5.6.6.	Resumen del análisis bajo cargas laterales	181
5.6.7.	Ejemplo 5.5: Edificio de 5 pisos	182
5.7.	Método del análisis dinámico	190

5.7.1. Ejemplo 5.6: Fuerzas sísmicas - Método dinámico	191
5.8. Movimientos horizontales bajo cargas verticales	198
5.8.1. Ejemplo 5.7: Pórtico con carga vertical asimétrica	199
5.8.2. Resumen del análisis bajo cargas verticales	202
6. Pórticos espaciales	203
6.1. Matriz de rigidez de un elemento de pórtico espacial	203
6.2. Transformación de coordenadas	205
6.3. Ensamblaje y solución	208
6.4. Ejemplo 6.1: Pórtico espacial	209
6.5. Pórtico espacial con diafragma rígido	210
6.5.1. Desplazamientos globales	211
6.5.2. Desplazamientos de los nodos	213
6.5.3. Ejemplo 6.2: Pórtico espacial de un piso con diafragma rígido	214
6.5.4. Elementos con diferentes orientaciones	217
7. Elementos finitos triangulares y tetraédricos	221
7.1. Definiciones	221
7.2. Elemento triangular de deformación constante	226
7.3. Ejemplo 7.1	231
7.4. Estructuras en tres dimensiones	237
7.5. Elemento infinitesimal axi-simétrico	239
7.6. Elemento finito axi-simétrico triangular de tres nodos	245
7.7. Ejemplo 7.2	247
7.8. Elemento tetraédrico	251
7.9. Ejemplo 7.3	254
A. Nociones de teoría de la elasticidad	259
A.1. Introducción	259
A.2. Tensiones	259
A.2.1. Fuerzas másicas y superficiales	259
A.2.2. Ecuaciones de equilibrio	262
A.3. Deformaciones	263
A.4. Relaciones elásticas	265
A.5. Consideraciones energéticas	268
A.5.1. Energía de deformación	269
A.5.2. Principio del trabajo virtual	270
B. Nociones de MATLAB	273
B.1. Características de MATLAB	273
B.2. Operaciones fundamentales	274
B.3. Vectores y matrices	275
B.4. Funciones	283
B.5. Bucles y decisiones condicionales	284

B.6. Programas	285
B.7. Archivos de datos y resultados	286
C. Códigos de los ejemplos	287
C.1. Ejemplo 1.1	287
C.2. Ejemplo 2.1	288
C.3. Ejemplo 2.2	293
C.4. Ejemplo 3.1	295
C.5. Ejemplo 3.2	297
C.6. Ejemplo 3.3	299
C.7. Ejemplo 4.1	307
C.8. Ejemplo 4.2	309
C.9. Ejemplo 4.3	312
C.10. Ejemplo 4.4	315
C.11. Ejemplo 5.1	320
C.12. Ejemplo 5.3	323
C.13. Ejemplo 5.5	329
C.14. Programa de análisis modal	338
C.15. Ejemplo 5.6	338
C.16. Programa grafedif.m	348
C.17. Ejemplo 5.7	349
C.18. Ejemplo 6.1	352
C.19. Ejemplo 6.2	356

Índice de figuras

1.1. Barra sometida a tensión axial. (a): Modelo. (b): Fuerzas internas y desplazamientos.	1
1.2. Barra sometida a tensión axial discretizada en elementos finitos. (a): Discretización. (b): Fuerzas internas y desplazamientos en el elemento finito e .	3
1.3. Equilibrio entre elementos para la formación de las matrices del problema de tensión axial.	4
1.4. Numeración de elementos y nodos de la barra sometida a tensión axial.	6
1.5. Interpretación de la matriz de rigidez elemental. (a): Primera columna. (b): Segunda columna.	7
1.6. Interpretación de la cuarta columna de la matriz de rigidez general (ecuación 1.28).	8
1.7. Desplazamientos virtuales. (a): compatibles con las condiciones de apoyo. (b): Incompatibles.	10
1.8. Modelo de cuerpos rígidos y resortes.	11
1.9. Desplazamientos virtuales aplicados al modelo de resortes.	13
1.10. Barra sometida a tensión axial. (a): Modelo estructural. (b): Equilibrio de un segmento infinitesimal.	14
1.11. Elemento finito en tensión axial.	19
1.12. Tensión axial. (a): Elemento finito con las fuerzas nodales equivalentes. (b): Funciones de forma o interpolación	20
1.13. Columna de sección variable.	28
2.1. Armadura estáticamente indeterminada.	35
2.2. Fuerzas internas en un elemento de la armadura.	37
2.3. Fuerzas internas en un elemento de la armadura. (a) Sistema local; (b) sistema global	37
2.4. (a) Paralelogramos de fuerzas equivalentes. (b) Relaciones entre las fuerzas.	38
2.5. Generalización de la transformación de coordenadas.	39
2.6. Trabajo realizado por las fuerzas en los sistemas local y global.	41
2.7. Ejemplo de correspondencia entre las numeraciones local y global de los grados de libertad.	44
2.8. Armadura de dos barras. (a) Geometría y cargas. (b) Numeración de grados de libertad.	47
2.9. Armadura articulada. Geometría y cargas.	50
2.10. Armadura articulada. Numeración de grados de libertad.	50
2.11. Estructura original y posición deformada (con un factor de amplificación de 500).	59
2.12. Ejemplo de armadura espacial.	61

2.13. Fuerzas internas en un elemento de armadura espacial. (a) Sistema local ortogonal; (b) sistema global ortogonal.	63
2.14. Armadura espacial con forma de casquete esférico.	63
2.15. Posición deformada del casquete esférico.	67
3.1. Viga en voladizo.	69
3.2. Problemas para deducir la matriz de rigidez de una barra en flexión. (a): Problema 1; (b) Problema 2.	71
3.3. Solución de los problemas contrarios.	73
3.4. Numeración de los grados de libertad de la viga.	73
3.5. Deducción de la matriz de rigidez de una barra en flexión como elemento finito. . . .	75
3.6. Viga biempotrada. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. (c) Numeración de grados de libertad.	78
3.7. Equilibrio de los nodos en fuerzas cortantes.	81
3.8. Equilibrio de los nodos en momentos flectores e interpretación de la deformación de la viga.	81
3.9. Diagramas de cortante y momento flector.	82
3.10. Viga biempotrada. (a) Modelo estructural. (b) Hipótesis de diagrama de momentos. (c) Diagrama de momentos final.	83
3.11. Vigas biempotradas. (a) Modelos estructurales. (b) Diagramas de cortante. (c) Diagramas de momento.	85
3.12. (a) Descomposición de una viga biempotrada. (b) Implicaciones para una estructura en general.	86
3.13. Viga continua. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. (c) Numeración de grados de libertad.	88
3.14. Viga continua. (a) Fuerzas de empotramiento en el elemento 1. (b) Fuerzas de empotramiento en el elemento 2. (c) Elementos del vector de fuerzas \mathbf{R}	89
3.15. Viga continua. (a) Diagrama de cortante. (b) Diagrama de momentos.	92
3.16. Viga continua con un grado de libertad por nodo. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. (c) Numeración de grados de libertad.	94
3.17. Carga unitaria para el cálculo de líneas de influencia en el elemento 1.	95
3.18. Carga unitaria para el cálculo de líneas de influencia en el elemento 2.	96
3.19. Viga continua. Línea de influencia del momento en el apoyo central.	97
3.20. Parrilla formada por cuatro vigas empotradas.	97
3.21. Barra sometida a torsión	98
3.22. Viga sometida a torsión. (a) Sección transversal. (b) Par torsor.	99
3.23. Numeración de los grados de libertad de la viga en flexión y torsión.	100
3.24. Transformación de momentos en un elemento de la parrilla. (a) Sistema local; (b) Sistema global	101
3.25. Parrilla formada por cuatro vigas empotradas (vista en planta)	103
4.1. Pórtico de dos vanos y tres pisos sometido a la acción de cargas de gravedad y sísmicas. . .	112
4.2. Fuerzas internas en un elemento de pórtico. (a) Sistema local; (b) sistema global. . .	114

4.3. Fuerzas de empotramiento de un elemento de pórtico. (a) Sistema local (fuerzas \mathbf{r}_e); (b) sistema global (fuerzas \mathbf{R}_e)	116
4.4. Pórtico sometido a una carga horizontal. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.	117
4.5. Diagramas de fuerzas internas del pórtico sometido a carga lateral. (a) Fuerzas internas de cada elemento. (b) Diagrama de fuerzas axiales. (c) Diagrama de cortantes. (d) Diagrama de momentos. (e) Elástica.	118
4.6. Pórtico sometido a una carga vertical distribuida uniformemente. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.	123
4.7. Diagramas de fuerzas internas del pórtico sometido a carga vertical distribuida uniformemente. (a) Fuerzas internas de cada elemento. (b) Diagrama de fuerzas axiales. (c) Diagrama de cortantes. (d) Diagrama de momentos. (e) Elástica.	125
4.8. Pórtico bajo carga vertical concentrada y asimétrica. (a) Modelo estructural. (b) Elástica.	127
4.9. Viga inclinada biempotrada. (a) Modelo estructural. (b) Reacciones axiales.	130
4.10. Pórtico con viga inclinada sometido a carga de gravedad uniformemente distribuida. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.	131
4.11. Modelo estructural para el cálculo de la matriz de rigidez de una viga con articulación en el extremo y momento de compensación m_j	131
4.12. Aplicación de momento de compensación.	132
4.13. Vigas articuladas/empotradas. (a) Modelos estructurales. (b) Diagramas de cortante. (c) Diagramas de momento.	134
4.14. Pórtico con una articulación sometido a una carga vertical distribuida uniformemente. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.	135
4.15. Deducción de la matriz de rigidez de una barra en flexión con extremos rígidos. (a): $\bar{\xi} = 1$; (b): $\bar{\theta} = 1$	141
4.16. Pórtico con muro de cortante. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.	144
5.1. Configuración y cargas de un edificio típico.	148
5.2. Diafragma flexible en un plano ortogonal.	149
5.3. Diafragmas flexible y rígido en su plano.	149
5.4. Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido.	150
5.5. Sobre el grado de libertad torsional.	151
5.6. Secciones de las columnas (a) y las vigas (b).	152
5.7. Pórtico de un vano y cinco pisos sometido a la acción de cargas verticales. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.	154
5.8. Acción sísmica bireccional y torsión accidental.	159
5.9. Grados de libertad móviles considerados en el cálculo de la matriz condensada.	161
5.10. Viga de cortante.	165
5.11. Construcción de la matriz de rigidez de un pórtico.	168
5.12. Ejemplo de cálculo de la matriz condensada.	170
5.13. Grados de libertad considerados en el primer cálculo de la matriz condensada.	171
5.14. Grados de libertad considerados en el segundo cálculo de la matriz condensada.	176

5.15. Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido que ensambla pórticos planos. (a): Fuerza en el sistema local. (b): Fuerzas equivalentes en el sistema global.	177
5.16. Ejemplo de cálculo de la matriz de rigidez de un edificio.	179
5.17. Edificio sometido a fuerzas sísmicas.	180
5.18. Pórtico de tres vanos y cinco pisos. Numeración de nodos y elementos.	185
5.19. Desplazamientos de los pisos.	187
5.20. Pórtico con diagonales. Numeración de nodos y elementos.	189
5.21. Modos de vibración del edificio simétrico.	193
5.22. Modos de vibración del edificio asimétrico.	197
5.23. Pórtico bajo carga vertical concentrada y asimétrica. (a) Modelo estructural. (b) Elástica.	199
5.24. Superposición de análisis para considerar movimientos horizontales producidos por cargas verticales. (a) Modelo estructural con restricción lateral. (b) Aplicación de la reacción lateral.	200
6.1. Fuerzas internas en un elemento de pórtico espacial. (a) Sistema local ortogonal; (b) sistema global ortogonal.	205
6.2. Momentos internos en un elemento de pórtico espacial. (a) Sistema local ortogonal; (b) sistema global ortogonal.	206
6.3. Pórtico espacial.	209
6.4. Relación entre los grados de libertad en los nodos esclavo y maestro en un pórtico espacial con diafragma rígido. (a): Movimientos del nodo esclavo i . (b): Movimientos del nodo maestro.	211
6.5. Pórtico espacial con diafragma rígido. La línea punteada corresponde a la columna virtual.	214
6.6. Geometría de los grados de libertad para generación de la matriz L_e en elementos de orientaciones diversas.	217
7.1. Estado de tensión plana.	222
7.2. Estado de deformación plana.	222
7.3. Tensiones principales y círculo de Mohr.	225
7.4. Elemento triangular de tres nodos.	226
7.5. Funciones de forma del elemento triangular de tres nodos.	229
7.6. Fuerzas en el elemento triangular.	229
7.7. Ejemplo 7.1. (a), (b): Geometría y cargas. (c): Modelo de elementos finitos.	231
7.8. Ejemplo 7.1 – Estado final (Desplazamientos magnificados 5,000 veces).	233
7.9. Ejemplo 7.1 – Tensiones principales.	236
7.10. Estructura de revolución.	238
7.11. Elemento infinitesimal de revolución.	240
7.12. Deformación del elemento infinitesimal en el plano (x, y)	241
7.13. Deformación del elemento infinitesimal en el plano (r, z)	242
7.14. Tensiones en el elemento infinitesimal.	243
7.15. Fuerzas en cuerpos de revolución.	244
7.16. Elemento axi-simétrico triangular de tres nodos.	244

7.17. Fuerzas en un elemento triangular axi-simétrico.	246
7.18. Ejemplo – Elemento finito axi-simétrico con fuerzas superficiales.	247
7.19. Ejemplo – Estructura axi-simétrica con fuerzas radiales.	249
7.20. Elemento finito tetraédrico.	250
7.21. Ejemplo – Viga en voladizo de sección variable. (a): Descripción geométrica. (b): Modelo de elementos finitos. (c): Tetraedros.	254
7.22. Ejemplo – Representación esquemática de los desplazamientos.	256
A.1. Fuerzas másicas y superficiales.	260
A.2. Tensiones en un cubo infinitesimal.	261
A.3. Equilibrio de tensiones tangenciales.	261
A.4. Equilibrio estático.	262
A.5. Deformaciones en un rectángulo infinitesimal	264
A.6. Deformaciones tangenciales.	266
A.7. Energía de deformación	269
A.8. Desplazamientos virtuales.	270

Capítulo 1

Introducción general

Este capítulo contiene una introducción general al método matricial de rigidez para el análisis de estructuras. El propósito es ilustrar todos los pasos del método, con la excepción de la rotación de coordenadas, que es explicada en el capítulo siguiente. Para ello, se utilizará una de las estructuras más simples desde el punto de vista mecánico: una cadena de elementos sometidos a tensión axial. Igualmente, se muestra la solución completa del problema por medio del lenguaje MATLAB en un ejemplo concreto.

1.1. Matriz de rigidez de una barra a tensión axial

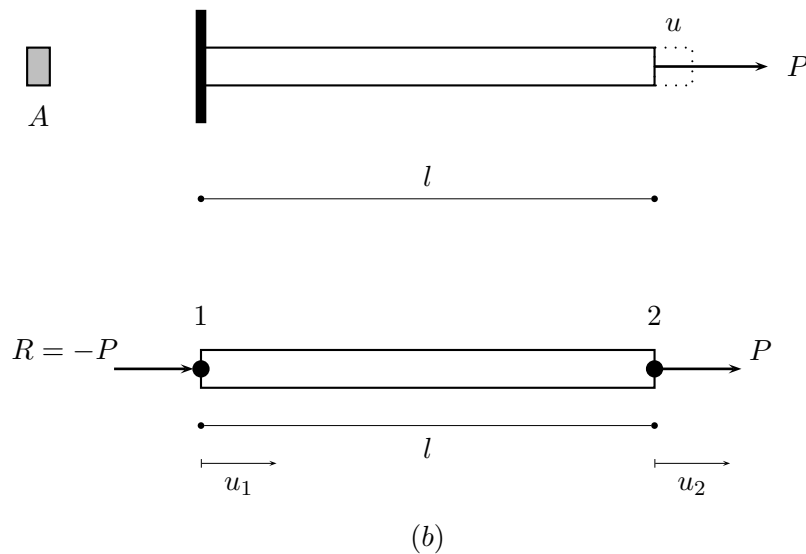


Figura 1.1: Barra sometida a tensión axial. (a): Modelo. (b): Fuerzas internas y desplazamientos.

Consideremos la figura 1.1. En ella aparece una barra de sección constante A y módulo de elasticidad E empotrada en un extremo y sometida a tracción axial por una carga concentrada P . El desplazamiento del extremo libre es

$$u = \frac{Pl}{EA} \quad (1.1)$$

Por tanto, la carga se puede expresar en función del desplazamiento como

$$P = ku \quad (1.2)$$

donde

$$k = \frac{EA}{l} \quad (1.3)$$

es la *constante de rigidez axial de la barra*. La ecuación (1.2) permite la interpretación siguiente:

La constante de rigidez axial de una barra empotrada en un extremo es la fuerza necesaria para causar un desplazamiento unitario en el extremo libre.

Ahora bien, la reacción en el extremo izquierdo $R = -P$ y la fuerza aplicada, de igual valor absoluto, someten a la barra a un estado de tracción. Si consideramos, en general, los desplazamientos de los dos extremos de la barra, numerados como aparece en la figura, tendremos que $u_1 = 0$ y $u_2 \equiv u$. Por tanto, podremos expresar las fuerzas externas en función de ellos, de la manera siguiente:

$$P = \frac{EA}{l}u = \frac{EA}{l}(u_2 - u_1) \quad (1.4)$$

y, por tanto,

$$R = -P = \frac{EA}{l}(u_1 - u_2) \quad (1.5)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden reunir en forma matricial, así:

$$\begin{pmatrix} R \\ P \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Los términos que componen esta ecuación son el vector de desplazamientos (o *grados de libertad*)

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

el vector de fuerzas nodales

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} R \\ P \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

y la matriz de rigidez:

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

En consecuencia, la ecuación (1.6) se puede expresar en la forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}\mathbf{d} \quad (1.10)$$

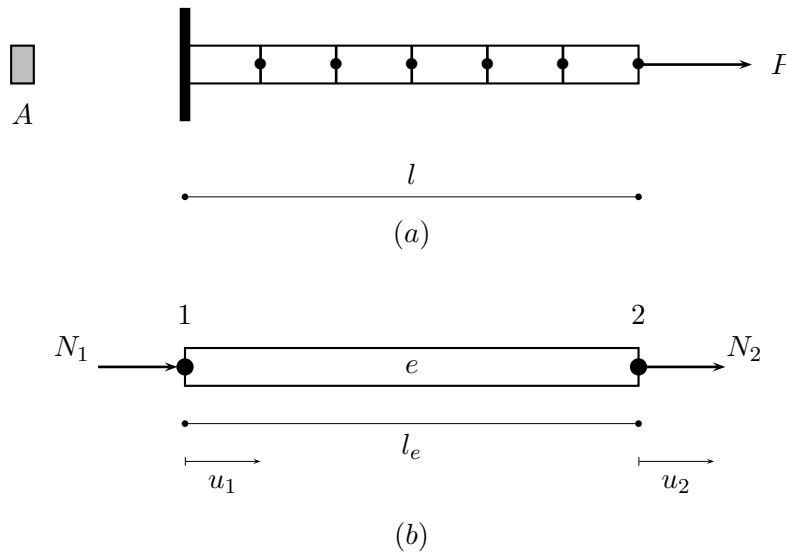


Figura 1.2: Barra sometida a tensión axial discretizada en elementos finitos. (a): Discretización. (b): Fuerzas internas y desplazamientos en el elemento finito e .

Consideremos ahora la misma barra, modelada esta vez como una serie de elementos unidos por nodos que permiten la transmisión de la fuerza (*elementos finitos*), como se muestra en la figura 1.2. Como la barra tiene sección constante A , para cada elemento finito se tiene $A_e = A$, $e = 1, 2, \dots, m$, donde m es el número total de elementos. Por otra parte, como la fuerza axial P no varía a lo largo de la barra, las fuerzas internas en los extremos del elemento e cumplen la relación $N_1 = -N_2 = P$. Sin embargo, los desplazamientos u_1 y u_2 serán diferentes, debido a la evolución del desplazamiento axial, desde un valor nulo en el extremo izquierdo de la estructura, al valor u , dado por la ecuación (1.1), en el extremo derecho de la misma.

Generalizando lo hecho anteriormente, tenemos que, en vista de que el estiramiento total del elemento u_e es igual a la diferencia entre los desplazamientos de los extremos,

$$u_e = u_2 - u_1 \quad (1.11)$$

la aplicación de la ecuación (1.1) da como resultado

$$N_2 = \frac{EA_e}{l_e} u_e = \frac{EA_e}{l_e} (u_2 - u_1) \quad (1.12)$$

y, por tanto,

$$N_1 = \frac{EA_e}{l_e} (u_1 - u_2) \quad (1.13)$$

expresiones que pueden ser reunidas en forma matricial de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Los términos que componen esta ecuación son el vector de desplazamientos (o *grados de libertad del elemento*)

$$\mathbf{d}_e = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

el vector de fuerzas nodales del elemento

$$\mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

y la matriz de rigidez del elemento:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

En consecuencia, la ecuación (1.6) se puede expresar en la forma

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (1.18)$$

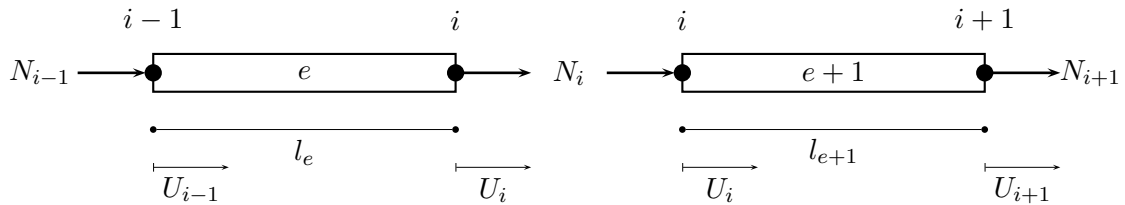


Figura 1.3: Equilibrio entre elementos para la formación de las matrices del problema de tensión axial.

La ecuación anterior permite calcular las fuerzas \mathbf{p}_e correspondientes a unos desplazamientos cualesquiera \mathbf{d}_e . Sin embargo, la relación inversa no se cumple, puesto que la barra puede sufrir un movimiento de cuerpo rígido adicional, sin que se modifiquen las fuerzas en los extremos. En forma matemática, esto se expresa en el hecho de que la matriz \mathbf{k}_e es singular, como se puede ver fácilmente:

$$\det \mathbf{k}_e = 0 \quad (1.19)$$

Para lograr una matriz de rigidez no singular y, por tanto, invertible, se requiere fijar los grados de libertad suficientes que permitan eliminar la posibilidad de cualquier movimiento de cuerpo rígido. Esto se mostrará a continuación.

1.2. Formación de las matrices de la estructura

A partir de la ecuación deducida para un elemento en tensión axial examinaremos ahora la formación de una ecuación matricial para la estructura formada por la cadena de elementos mostrada en la figura 1.2. Para este fin, consideremos dos elementos sucesivos e y $e + 1$. Sus respectivas ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{pmatrix} N_{i-1} \\ N_i \end{pmatrix} = \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ U_i \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

y

$$\begin{pmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{pmatrix} = \frac{EA_{e+1}}{l_{e+1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

En estas ecuaciones se ha cambiado la notación de los desplazamientos u a D , pues la primera corresponde a la *numeración local* de los grados de libertad del elemento (1,2), mientras que la segunda la asociamos a la *numeración global* de los grados de libertad en la estructura, es decir, $1, 2, \dots, n$ (ver la figura 1.4). Nótese que tanto en ambas ecuaciones hay expresiones que permiten calcular la fuerza N_i , que pueden ser obtenidas de la segunda fila de la ecuación matricial (1.20) y de la primera fila de la ecuación (1.21). Ellas son

$$\begin{aligned} N_i &= -s_e U_{i-1} + s_e U_i \\ N_i &= s_{e+1} U_i - s_{e+1} U_{i+1} \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde

$$s_e = \frac{EA_e}{l_e} \quad (1.23)$$

Pero, como indica la figura 1.3, la suma de estas expresiones debe anularse para así asegurar el equilibrio del nodo i . Por tanto

$$-s_e U_{i-1} + s_e U_i + s_{e+1} U_i - s_{e+1} U_{i+1} = 0 \quad (1.24)$$

es decir,

$$-s_e U_{i-1} + (s_e + s_{e+1}) U_i - s_{e+1} U_{i+1} = 0 \quad (1.25)$$

La figura 1.4 muestra las numeraciones de elementos y nodos. Esto indica que la ecuación anterior es válida para $i = 2$ a 6 , puesto que en esos nodos no hay fuerza externa. Para el nodo 7 , la ecuación es

$$-s_6 U_6 + s_6 U_7 = P \quad (1.26)$$

mientras que para el nodo 1 es

$$s_1 U_1 - s_1 U_2 = R \quad (1.27)$$

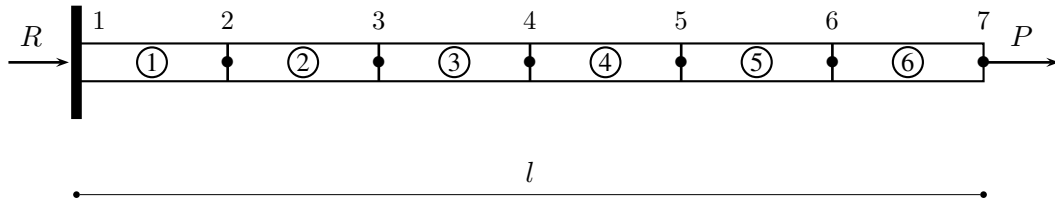


Figura 1.4: Numeración de elementos y nodos de la barra sometida a tensión axial.

Al reemplazar los valores de $i = 2, 3, 4, 5, 6$ en la ecuación (1.25), teniendo en cuenta que, para este caso $e = i$, y que $A_e = A$, $l_e = l/6$ para todos los elementos $e = 1, 2, \dots, 6$, se obtiene cinco ecuaciones que junto con (1.26) y (1.27) dan como resultado

$$\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} = \frac{6EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

la cual denotaremos en forma compacta así:

$$P = KD \quad (1.29)$$

donde D es el vector de grados de libertad, P el vector de fuerzas externas y K la matriz de rigidez de la estructura. al comparar con la ecuación (1.18) se pueden notar las siguientes diferencias en la

nomenclatura: para la ecuación del elemento, se utilizan letras minúsculas y el subíndice e , mientras que para la ecuación general de la estructura se utilizan letras mayúsculas y el subíndice deja de ser necesario.

La solución de la ecuación (1.29) será abordada más adelante, luego de introducir la partición del problema según los tipos de grados de libertad.

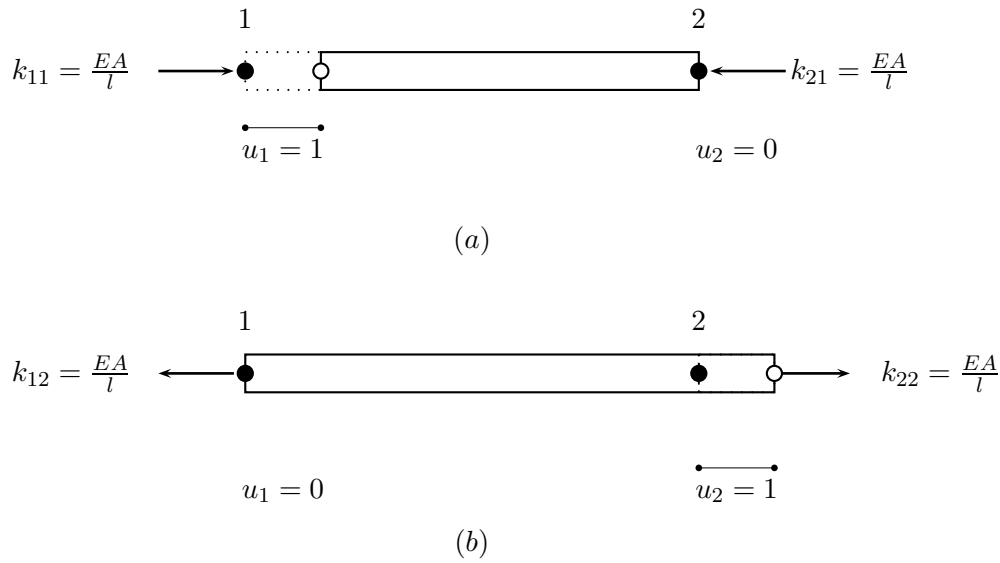


Figura 1.5: Interpretación de la matriz de rigidez elemental. (a): Primera columna. (b): Segunda columna.

1.3. Significado de la matriz de rigidez

Al igual que la constante de rigidez expresada por la ecuación (1.3), los términos de la matriz de rigidez elemental \mathbf{k}_e como la de la matriz global de la estructura \mathbf{K} tienen un significado preciso, a saber:

El término (i, j) de una matriz de rigidez equivale a la fuerza que se debe aplicar en el grado de libertad i cuando el grado de libertad j es objeto de un desplazamiento unitario, mientras los demás grados de libertad permanecen restringidos.

Este significado se ilustra en la figura 1.5 para el caso de la matriz elemental \mathbf{k}_e , dada por la ecuación (1.17). Nótese que el movimiento unitario del grado de libertad u_j implica tanto una fuerza que

lo realice como unas fuerzas en los restantes grados de libertad, que deben permanecer restringidos. Por tanto, cada movimiento unitario determina una columna de la matriz de rigidez.

Esta interpretación vale también para el caso general de la matriz de rigidez \mathbf{K} de la estructura. Para el caso de la barra compuesta por seis elementos finitos mostrada en la figura 1.4, cuya matriz de rigidez viene dada por la ecuación (1.28), la figura 1.6 muestra la interpretación de la cuarta columna de \mathbf{K} .

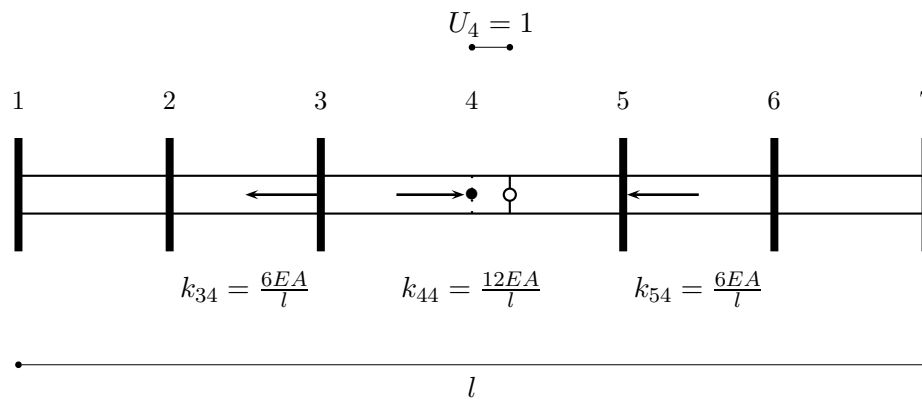


Figura 1.6: Interpretación de la cuarta columna de la matriz de rigidez general (ecuación 1.28).

1.4. Métodos variacionales

El planteamiento de las ecuaciones de equilibrio de una estructura puede realizarse no sólo por medio de la aplicación directa de las ecuaciones de equilibrio, como en la sección anterior. Una vía más expedita la proveen los llamados métodos variacionales que, como se verá a continuación, tienen la ventaja de no requerir la partición de la estructura ni la formulación de ecuaciones de equilibrio de cuerpo libre. Por este motivo son de gran utilidad en la deducción de ecuaciones de estructuras complejas. A continuación se estudian dos principios variacionales: el de la energía potencial mínima y el del trabajo virtual. El primero es válido sólo para el caso de estructuras lineales, mientras que el segundo es de validez general para sólidos con comportamiento lineal o no lineal.

1.4.1. Notación variacional

El cálculo variacional es una rama de la matemática que busca la solución de los llamados problemas extremales, esto es, la búsqueda de puntos donde una función tiene una variación nula. Estos puntos pueden corresponder a tres clases de valores de la función: máximos, mínimos o puntos de ensilladura. Los primeros corresponden a valores de la función para los cuales tanto a la derecha como

a la izquierda del punto la función presenta descenso; los segundos a lo contrario y los terceros a valores para los cuales se presenta descenso de la función por un lado y ascenso por el otro. Se dice que la función en el punto de valor nulo presenta un *valor estacionario*. Por tanto, el cálculo variacional (también llamado *extremal* o de *valores extremales*) consiste tanto en la búsqueda de los valores de las variables independientes asociadas al valor estacionario de una función como al cálculo de este valor mismo.

Consideremos una función de las variables independientes u_1, u_2, \dots, u_n . Se define la *variación* de la función $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ en un punto como un cambio posible o virtual de la función que no es consecuencia cambio real en las variables independientes. Por ello se adopta la notación δf para significar que el cambio en la función no es real sino virtual y con ello se la distingue del diferencial df . Esto quiere decir que, mientras el diferencial de una función df es el resultado de un cambio *real* en los valores de las variables independientes du_1, du_2, \dots, du_n , la variación de la función δf surge de un *experimento matemático* en el se varían artificialmente los valores de las variables independientes en las cantidades $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n$. Aunque el cálculo de ambas cantidades es similar,

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n \\ \delta f &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} \delta u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \delta u_n \end{aligned} \quad (1.30)$$

su interpretación es totalmente distinta, de acuerdo con lo dicho anteriormente.

1.4.2. Principio de la energía potencial mínima

El principio de la energía potencial mínima dice así:

De todas las posibles configuraciones compatibles de la estructura deformada, la correcta es aquella que hace estacionaria la energía potencial. Si el valor estacionario es un mínimo, entonces la estructura es estable. Si es un máximo, la estructura es inestable.

Se comprende que este principio se plantee matemáticamente en términos del cálculo variacional, pues las diversas configuraciones posibles que se mencionan en el principio no son otra cosa que experimentos matemáticos virtuales que no implican cambios en la energía potencial real de la estructura, la cual sólo es función de los desplazamientos reales que sufra. Por otra parte, la figura 1.7 ilustra lo que se entiende por configuración de deformación compatible. En general, una configuración compatible es la que preserva las condiciones de apoyo de la estructura y no presenta discontinuidades ni interrupciones. Como la energía potencial es función de los desplazamientos u_1, u_2, \dots, u_n , se tiene que éstos pueden obtenerse a partir de la ecuación

$$\delta \mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u_2} \delta u_2 + \dots + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u_n} \delta u_n = 0 \quad (1.31)$$

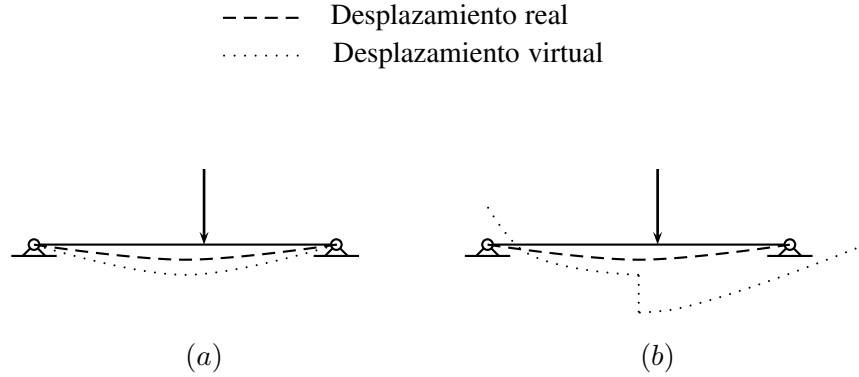


Figura 1.7: Desplazamientos virtuales. (a): compatibles con las condiciones de apoyo. (b): Incompatibles.

La energía potencial como tal se define como la suma de la energía de deformación, que es la energía almacenada en los elementos estructurales deformados \mathcal{P}_i , más la energía de las cargas externas \mathcal{P}_e :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_e \quad (1.32)$$

La validez del principio está limitada al caso de estructuras lineales, es decir, a aquellas para las cuales es válida la ley de Hooke sobre proporcionalidad entre tensiones y deformaciones. La aplicación de este principio se ilustra con el siguiente ejemplo.

Deduciremos a continuación las ecuaciones del movimiento del sistema de cuerpos rígidos y resortes mostrado en la figura 1.8 a partir del principio de la energía potencial mínima. Antes de ello, mostremos la deducción por el método tradicional de ecuaciones de equilibrio. Obsérvese que los resortes pueden representar barras a tensión axial con

$$k_i = \frac{EA_i}{l_i} \quad (1.33)$$

para cada elemento i .

Los desplazamientos u_1 y u_2 se miden a partir de un punto cualquiera de los cuerpos. Los diagramas de fuerzas de la figura 1.8b indican que las ecuaciones de equilibrio de ambos cuerpos son

$$\begin{aligned} p_1 + k_2(u_2 - u_1) - k_1 u_1 &= 0 \\ p_2 - k_2(u_2 - u_1) - k_3 u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

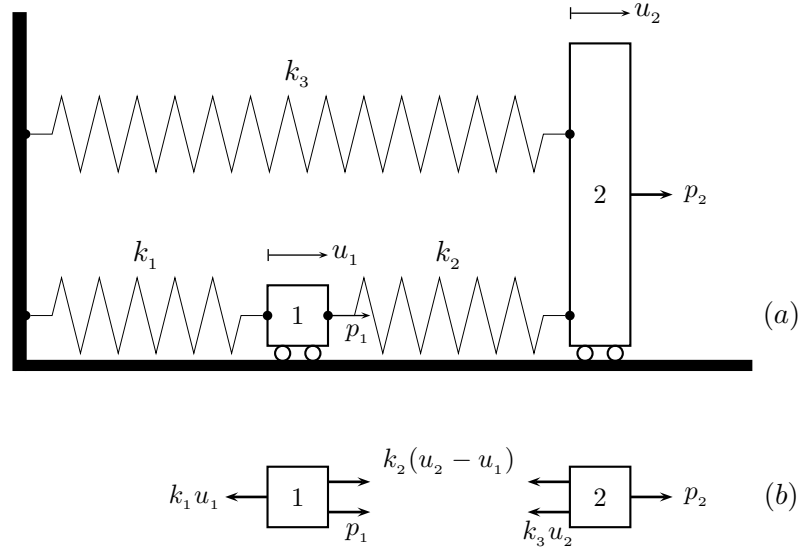


Figura 1.8: Modelo de cuerpos rígidos y resortes.

Este resultado puede expresarse de manera matricial en la forma

$$\mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{P} \quad (1.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.36)$$

En la ecuación (1.35), la matriz de rigidez \mathbf{K} pone en relación las fuerzas externas \mathbf{P} con los desplazamientos \mathbf{D} .

La energía potencial del sistema para cualquier configuración $\{u_1, u_2\}$ es la suma de

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_i &= \frac{1}{2}k_1 u_1^2 + \frac{1}{2}k_2 (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2}k_3 u_2^2 \\ \mathcal{P}_e &= -(p_1 u_1 + p_2 u_2)\end{aligned}\quad (1.37)$$

El signo negativo de la energía de las cargas externas se debe al hecho de que el trabajo que éstas realizan se pierde cuando el cuerpo ya se ha deformado, pues se convierte entonces en energía de deformación almacenada en el cuerpo. La energía total es, entonces,

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}k_1 u_1^2 + \frac{1}{2}k_2 (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2}k_3 u_2^2 - (p_1 u_1 + p_2 u_2) \quad (1.38)$$

En consecuencia, se tiene

$$\delta\mathcal{P} = \left[k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) - p_1 \right] \delta u_1 + \left[k_2 (u_2 - u_1) + k_3 u_2 - p_2 \right] \delta u_2 = 0 \quad (1.39)$$

Como las variaciones $\delta u_1, \delta u_2$ son arbitrarios, se concluye que los términos entre corchetes deben ser nulos. Esto da como resultado las ecuaciones (1.34). Nótese que por este método no es necesario plantear las ecuaciones de equilibrio de cada uno de los correspondientes diagramas de cuerpo libre.

1.4.3. Principio del trabajo virtual

De manera semejante al principio de la energía potencial mínima, el principio del trabajo virtual se formula en términos variacionales. Sin embargo, su rango de aplicación es mayor, ya que es válido tanto para estructuras con comportamiento lineal como no lineal. El principio reza así:

Si se somete un cuerpo deformable a desplazamientos virtuales arbitrarios compatibles, el trabajo de las fuerzas externas realizado a través de tales desplazamientos es igual al trabajo de las tensiones internas a través de las deformaciones virtuales que ellos impliquen.

La aplicación de este importante principio se ilustra con el mismo modelo examinado anteriormente.

Semejante a lo hecho en el ejemplo anterior, deduciremos las ecuaciones del movimiento del sistema de la figura 1.8 con base en el principio del trabajo virtual.

Supongamos que a la estructura se aplican dos desplazamientos virtuales δu_1 y δu_2 , adicionales a los desplazamientos provocados por las fuerzas externas (Figura 1.9). El trabajo virtual de éstas es

$$p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 \quad (1.40)$$

Por otra parte, el trabajo virtual de las fuerzas desarrolladas en los resortes (fuerzas internas) es

$$k_1 u_1 \delta u_1 + k_2 (u_2 - u_1)(\delta u_2 - \delta u_1) + k_3 u_2 \delta u_2 \quad (1.41)$$

Al igualar estos trabajos se obtiene

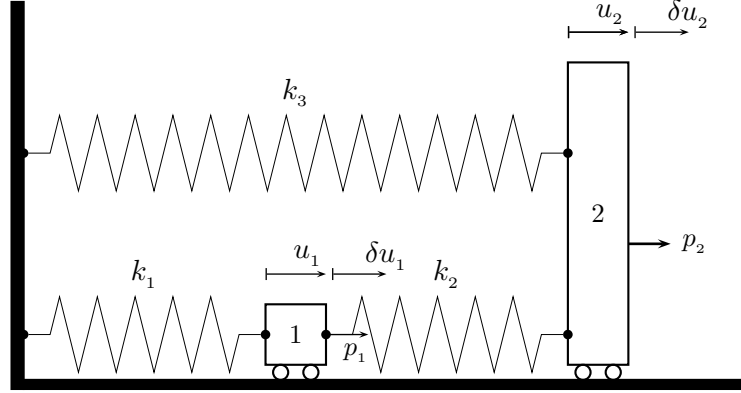


Figura 1.9: Desplazamientos virtuales aplicados al modelo de resortes.

$$\left[k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) - p_1 \right] \delta u_1 + \left[k_2 (u_2 - u_1) + k_3 u_2 - p_2 \right] \delta u_2 = 0 \quad (1.42)$$

Finalmente, aplicamos el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior, sobre la arbitrariedad de los desplazamientos virtuales $\delta u_1, \delta u_2$, para concluir que los términos entre corchetes deben ser nulos y, por tanto, que se obtienen de nuevo las ecuaciones (1.34). Nótese que, al usar este método, tampoco es necesario plantear las ecuaciones de equilibrio de cada uno de los correspondientes diagramas de cuerpo libre.

1.5. Método de elementos finitos

El problema sencillo de tensión axial, como otros problemas de mecánica de sólidos, puede formularse de manera exacta como un sistema ecuaciones diferenciales o como uno de ecuaciones integrales. De esto se desprende, igualmente, la posibilidad de resolverlo en forma aproximada. En esta sección se estudian estas vías. En primer lugar se examinan las formulaciones exactas, llamadas *fuerte* y *débil* (o *local* y *global*), que corresponden a ecuaciones diferenciales e integrales, respectivamente. Luego se hace una exposición sucinta del método de residuos ponderados como técnica general de solución aproximada de ecuaciones diferenciales.

1.5.1. Formulaciones fuerte y débil

Consideremos la figura 1.10. En ella aparece una viga sometida a tracción axial junto con el equilibrio de fuerzas en un segmento infinitesimal. Por equilibrio, tenemos

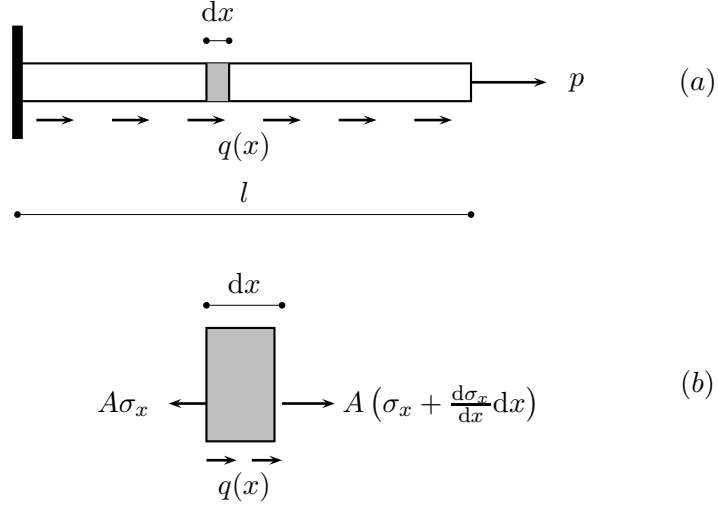


Figura 1.10: Barra sometida a tension axial. (a): Modelo estructural. (b): Equilibrio de un segmento infinitesimal.

$$A \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \right) - A\sigma_x + q(x)dx = 0 \quad (1.43)$$

lo que da como resultado

$$A \frac{d\sigma_x}{dx} + q(x) = 0 \quad (1.44)$$

Como $\sigma_x = E\epsilon_x$ y, a su vez,

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad (1.45)$$

donde u es el desplazamiento horizontal de un punto del cuerpo, se concluye que la ecuación (1.44) se convierte en

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (1.46)$$

En el extremo derecho, la fuerza p se equilibra con la fuerza $A\sigma_x = EA\epsilon$. Por tanto, el cálculo del desplazamiento u puede hacerse resolviendo esta ecuación diferencial, bajo la consideración de sus condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}
EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x) &= 0 \\
u|_{x=0} &= 0 \\
EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=l} &= p
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Esta ecuación se denomina *forma fuerte* del problema del desplazamiento horizontal de la viga u . Una alternativa a ella es la ecuación que se obtiene por aplicación del principio del trabajo virtual. La ecuación resultante se repite aquí por conveniencia junto con sus condiciones:

$$\begin{aligned}
\int_0^l \delta \epsilon_x EA \epsilon_x dx &= \int_0^l \delta u(x) q(x) dx + \delta u \cdot p \\
u|_{x=0} &= 0 \\
\delta u|_{x=0} &= 0
\end{aligned} \tag{1.48}$$

La tercera de las ecuaciones anteriores surge de la condición de compatibilidad impuesta a los desplazamientos virtuales en el enunciado del principio. Esta presentación del problema se denomina *forma débil*, ya que, como puede verse, involucra derivadas en un orden inferiores a las de la forma fuerte. Aunque aparentemente se trata de ecuaciones diferentes, su equivalencia puede demostrarse fácilmente, lo que de paso constituye una demostración de la validez del principio del trabajo virtual. La ecuación(1.46) puede escribirse igualmente como

$$\left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x) \right) \delta u(x) = 0 \tag{1.49}$$

Al integrar sobre la longitud del elemento se obtiene

$$\int_0^l \left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x) \right) \cdot \delta u(x) dx = 0 \tag{1.50}$$

la cual puede escribirse en la forma

$$\int_0^l EA \frac{d^2 u}{dx^2} \delta u(x) dx + \int_0^l q(x) \delta u(x) dx = 0 \tag{1.51}$$

Al resolver por partes la primera de estas dos integrales se obtiene

$$EA \frac{du}{dx} \delta u(x) \Big|_0^l - \int_0^l EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u(x)}{dx} dx + \int_0^l q(x) \delta u(x) dx = 0 \tag{1.52}$$

Al tener en cuenta que $\delta u(0) \equiv 0$, $\delta u(l) \equiv \delta u$ y la ecuación (1.47) y haciendo uso de las equivalencias

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{du(x)}{dx} \\ \delta\epsilon_x &= \frac{d\delta u(x)}{dx}\end{aligned}\tag{1.53}$$

se obtiene la ecuación (1.48):

$$\delta u \cdot p - \int_0^l \delta\epsilon_x EA \epsilon_x dx + \int_0^l \delta u(x) q(x) dx\tag{1.54}$$

1.5.2. Métodos de residuos ponderados

Para concluir esta sección resulta de interés revisar someramente una técnica de solución de ecuaciones diferenciales y su relación con la formulación débil introducida en la sección anterior. Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden m en la que x sea la variable independiente y u la variable dependiente se puede escribir en la forma

$$D_m[u] = f(x)\tag{1.55}$$

donde $D[\cdot]$ es un operador de derivación cuyo tratamiento es semejante al de un polinomio del mismo orden, es decir,

$$D_m[u] = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0\tag{1.56}$$

En esta ecuación los coeficientes b son constantes y el exponente (m) denota la derivada de orden m . Por otra parte $f(x)$ es el término independiente. Por ejemplo, la ecuación de flexión de una viga sometida a la acción de una carga vertical repartida $q(x)$,

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = -q(x)\tag{1.57}$$

donde u es el desplazamiento vertical, equivale a

$$D_4[u] = -\frac{q(x)}{EI}\tag{1.58}$$

donde D_4 en este caso es igual a $u^{(4)}$.

El método de residuos ponderados busca una solución aproximada \hat{u} de la forma

$$\hat{u}(x) = \sum_i^n \alpha_i N_i(x)\tag{1.59}$$

donde $N_i(x)$ son funciones de prueba, previamente definidas, y los α_i son constantes. Evidentemente, el error de esta aproximación, llamado *residuo*, es

$$R(x) = f(x) - D_m[\hat{u}]\tag{1.60}$$

El propósito del método es buscar las constantes a_i que hagan mínimo un promedio ponderado del error. Simbólicamente, este promedio ponderado se escribe como

$$\int w(x)R(x)dx \quad (1.61)$$

donde $w(x)$ es la función de ponderación. Sobre su valor existen varias propuestas: *métodos de cuadrados mínimos*, *de Galerkin*, *de colocación*, etc. Entre ellas destacamos las dos primeras, que se describen a continuación:

1. *Método de cuadrados mínimos*. En este método el criterio consiste en hacer mínima la integral del cuadrado del residuo R con respecto a las constantes a_i :

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int R^2(x)dx = 0 \quad (1.62)$$

Al sustituir en esta ecuación las expresiones (1.59) y (1.60) se obtiene

$$2 \int R(x)D_m[N_i]dx = 0 \quad (1.63)$$

Esto da origen a n ecuaciones simultáneas. Evidentemente, la función de ponderación es en este caso $w(x) = D_m[N_i]$

2. *Método de Galerkin*. En este método se adopta

$$w(x) = \frac{d\hat{u}}{d\alpha_i} \quad (1.64)$$

lo que conduce a

$$w(x) = N_i(x) \quad (1.65)$$

Por tanto, en este método se busca la solución resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\int R(x)N_i(x)dx = 0 \quad (1.66)$$

Más adelante se hará uso de estas técnicas para establecer las ecuaciones cinemáticas de estructuras sometidas a tensión axial.

1.5.3. Formulación del elemento finito

La figura 1.11 muestra una barra sometida a dos tipos de fuerzas externas de tipo axial: una fuerza distribuida a lo largo de la barra $q(x)$ y dos fuerzas concentradas en su extremo, p_1 y p_2 . La única tensión presente en el elemento es, por tanto, σ_x . En consecuencia, la deformación según el eje x es

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (1.67)$$

Las deformaciones en los sentidos perpendiculares son

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \quad (1.68)$$

La deformación ϵ_x es, en general, igual a

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.69)$$

Sin embargo, como en este caso el desplazamiento u sólo ocurre a lo largo del eje x , será función exclusivamente de esta variable, $u = u(x)$. Por tanto

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1.70)$$

En consecuencia

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{du}{dx} \quad (1.71)$$

El principio de los trabajos virtuales fue aplicado a una barra sometida a fuerzas axiales distribuidas $q(x)$ y una fuerza axial concentradas p , como la que aparece en la figura 1.10, en la sección anterior. Ampliaremos ahora este resultado al elemento finito de la figura 1.11, en la que la única diferencia con el caso anterior reside en la presencia de dos fuerzas concentradas. El resultado es

$$\int_0^l \delta\epsilon_x EA \epsilon_x dx = \int_0^l \delta u(x) q(x) dx + \delta u_1 \cdot p_1 + \delta u_2 \cdot p_2 \quad (1.72)$$

De las relaciones anteriores puede observarse que el conocimiento de $u(x)$ conduce al de ϵ_x por medio de derivación, así como al de u , que no es otra cosa que su valor en el punto de aplicación de la fuerza p . En consecuencia, resolver el problema equivale a encontrar la función $u(x)$. El método de los elementos finitos parte de la idea establecida en el método de residuos ponderados de postular la función $u(x)$ en la forma siguiente:

$$u(x) = \sum_i^n \alpha_i N_i(x) \quad (1.73)$$

Para este caso, supondremos que la función $u(x)$ se puede expresar como

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (1.74)$$

donde $\alpha_i, i = 1, 2$ son constantes por determinar.

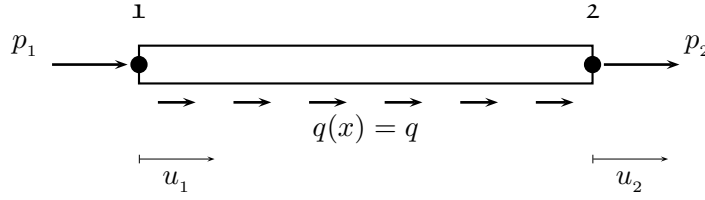


Figura 1.11: Elemento finito en tensión axial.

Llamaremos x_i a la coordenada del nodo i de este elemento l a su longitud (ver la figura 1.12). De esta manera se tiene

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \\ u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 \end{aligned} \quad (1.75)$$

La solución de este sistema para α_1 y α_2 es

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{x_2 u_1 - x_1 u_2}{x_2 - x_1} \\ \alpha_2 &= \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1.74) y agrupando los términos en u_1 y u_2 se llega a que la función $u(x)$ se puede expresar como

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 \quad (1.77)$$

donde

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{x_2 - x}{l} \\ N_2(x) &= \frac{x - x_1}{l} \end{aligned} \quad (1.78)$$

con $l = x_2 - x_1$. Las funciones N_1 se conocen con el nombre de *funciones de forma* o de *interpolación* y constituyen, de hecho, la piedra angular del método de los elementos finitos, como se verá en lo sucesivo. Como las expresiones que se deducen para un elemento finito son de aplicación general para todos los de la misma especie, no es conveniente introducir en las expresiones anteriores los valores $x_1 = 0$ y $x_2 = l$, que son sólo válidos para este caso. En consecuencia, los límites de las

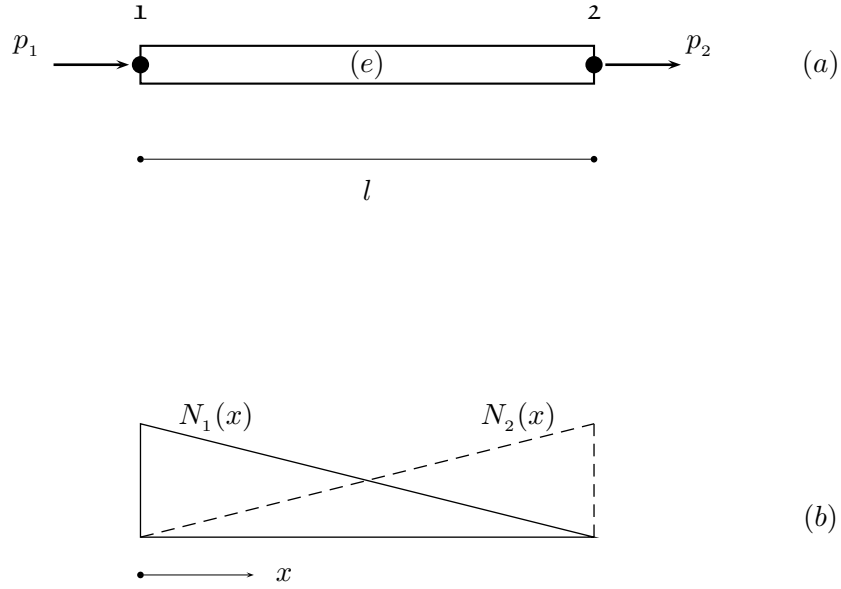


Figura 1.12: Tensión axial. (a): Elemento finito con las fuerzas nodales equivalentes. (b): Funciones de forma o interpolación

integrales arriba expresadas cambiarán de $(0, l)$ a (x_1, x_2) . Ahora bien, la derivada de la función $u(x)$ es

$$\frac{du}{dx} = \frac{dN_1(x)}{dx} u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} u_2 \quad (1.79)$$

lo que es igual a

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{l} u_1 + \frac{1}{l} u_2 \quad (1.80)$$

lo que indica que la hipótesis en uso de funciones de forma lineales implica suponer a una deformación constante en el interior del elemento. Puede observarse que las funciones de forma satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N_1(x_1) = 1, N_1(x_2) = 0$. Igualmente, $N_2(x_1) = 0, N_2(x_2) = 1$ Esto indica que las funciones toman valores unitarios en los nodos asociados a ellas y nulos en el resto. Como se verá más adelante, esta es la expresión matemática de la condición de continuidad del desplazamiento entre elementos.
2. $N_1(x) + N_2(x) = 1$ para todo x perteneciente al elemento.

Al igual que el desplazamiento total, el desplazamiento virtual δu también puede expresarse como una combinación lineal de los desplazamientos en los extremos a través de las funciones de forma, es decir

$$\delta u = N_1 \delta u_1 + N_2 \delta u_2 \quad (1.81)$$

Asimismo

$$\delta \epsilon = \frac{d\delta u}{dx} = \frac{dN_1}{dx} \delta u_1 + \frac{dN_2}{dx} \delta u_2 \quad (1.82)$$

Si se sustituye estos resultados en la ecuación de equilibrio (1.72) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dN_1}{dx} \delta u_1 + \frac{dN_2}{dx} \delta u_2 \right] \times (EA) \times \left[\frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 \right] dx \\ - \int_{x_1}^{x_2} \left[N_1 \delta u_1 + N_2 \delta u_2 \right] q(x) dx - \delta u_1 p_1 - \delta u_2 p_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.83)$$

Agrupando los términos en δu_1 y δu_2 se llega a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \delta u_1 \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dN_1}{dx} \times (EA) \times \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_1}{dx} \times (EA) \times \frac{dN_2}{dx} u_2 \right) dx \right. \\ \left. - \int_{x_1}^{x_2} N_1 q(x) dx - p_1 \right] + \\ \delta u_2 \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dN_2}{dx} \times (EA) \times \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} \times (EA) \times \frac{dN_2}{dx} u_2 \right) dx \right. \\ \left. - \int_{x_1}^{x_2} N_2 q(x) dx - p_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.84)$$

En vista de que los desplazamientos virtuales δu_1 y δu_2 son arbitrarios, los términos entre corchetes deben ser nulos. Las identidades resultantes pueden ser presentadas en la siguiente forma matricial:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \left(\left(\frac{dN_1}{dx} \times (EA) \times \frac{dN_1}{dx} \right) \left(\frac{dN_1}{dx} \times (EA) \times \frac{dN_2}{dx} \right) \right.}_{\mathbf{k}_e} \underbrace{\left. \left(\frac{dN_2}{dx} \times (EA) \times \frac{dN_1}{dx} \right) \left(\frac{dN_2}{dx} \times (EA) \times \frac{dN_2}{dx} \right) dx \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right)}_{\mathbf{d}_e} \\ = \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_p} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} q(x) dx}_{\mathbf{q}_e} \end{aligned} \quad (1.85)$$

De acuerdo a los símbolos escritos bajo la ecuación anterior, ésta puede escribirse en la forma

$$\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{p}_e \quad (1.86)$$

donde \mathbf{k}_e es la *matriz de rigidez del elemento*, \mathbf{d}_e , $\mathbf{p}_e = \mathbf{f}_p + \mathbf{q}_e$ son respectivamente el *vector de desplazamientos nodales* y el *vector de fuerzas nodales* del elemento (e). Este último está compuesto por el vector de fuerzas concentradas \mathbf{f}_p y el vector de fuerzas equivalentes a las distribuidas \mathbf{q}_e ; nótese que sólo se ha conservado la notación (e) para el segundo de estos términos, debido a que generalmente el primero está dado con antelación y no depende de las funciones de forma ni de otros parámetros del elemento.

Si tanto la fuerza $q(x)$, el módulo de elasticidad y el área seccional son constantes en el elemento, la utilización de las ecuaciones (1.78) conduce fácilmente a que

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_q = \frac{(ql)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.87)$$

En efecto, el primer término del vector de fuerzas nodales equivalentes a las distribuidas es

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x_2 - x}{l} \right) q dx = \frac{q}{l} \left(x_2 x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{q}{l} \left(x_2^2 - 2x_2 x_1 + x_1^2 \right) = \frac{(ql)}{2}$$

donde se ha tenido en cuenta la relación $x_2 - x_1 = l$. Análogamente, el segundo elemento es

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x - x_1}{l} \right) q dx = q \left(\frac{x^2 - 2xx_1}{2l} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{(ql)}{2}$$

De forma análoga, la matriz de rigidez se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} EA \int_{x_1}^{x_2} \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{l} \times \frac{-1}{l} \right) & \left(\frac{-1}{l} \times \frac{1}{l} \right) \\ \left(\frac{1}{l} \times \frac{-1}{l} \right) & \left(\frac{1}{l} \times \frac{1}{l} \right) \end{pmatrix} dx &= \frac{EA}{l^2} \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix} \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es evidente que este resultado coincide con el obtenido anteriormente, usando la formulación fuerte o local (Ecuación 1.9).

Supongamos que una estructura está conformada por un único elemento finito, como el que se ha considerado hasta ahora. En tal caso las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno se plantean de forma inmediata:

$$\frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + \frac{ql}{2} \\ p_2 + \frac{ql}{2} \end{pmatrix}$$

Considerando que $u_1 = 0$ y haciendo $p_2 = p$, se llega a que

$$u_2 = \frac{l}{EA} \left(p + \frac{ql}{2} \right), \quad p_1 = -(p_2 + ql)$$

La solución exacta de este problema, dada por los métodos convencionales de Resistencia de Materiales, es

$$u(x) = \frac{1}{EA} \left(px + qlx - \frac{qx^2}{2} \right) \quad (1.88)$$

Para $x = l$ se tiene

$$u(l) = u_2 = \frac{l}{EA} \left(p + \frac{ql}{2} \right)$$

lo que coincide con el valor dado por la aproximación por un elemento finito. Una coincidencia así sólo se obtiene en casos elementales como este. Fácilmente puede verse, sin embargo, que la solución obtenida para $u(x)$ deja de ser válida si se consideran sus valores intermedios, razón por la cual, para $x \neq 0$ y $x \neq l$ el uso de un solo elemento conduce a un error en los puntos intermedios. Por ejemplo, para $x = l/2$, la solución exacta es

$$u(l/2) = \frac{l}{EA} \left(\frac{p}{2} + \frac{3ql}{8} \right)$$

mientras que la solución para este punto, calculada por la ecuación (1.77) es

$$u(l/2) = \frac{l}{EA} \left(\frac{p}{2} + \frac{ql}{4} \right)$$

Esta diferencia de exactitud en la estimación de los desplazamientos en los nodos y en medio del elemento se debe a que el método de los elementos finitos concentra su atención en los valores de los primeros, a los que se supeditan los segundos. Con el fin de obtener mayor precisión en toda la estructura es necesario aumentar el número de elementos.

1.6. Simetría de la matriz de rigidez

Como es sabido, la energía interna (o energía de deformación) de un cuerpo elástico sometido a un sistema de fuerzas externas \mathbf{P} es

$$\mathcal{P}_i = \frac{1}{2} \sum P_i D_i \quad (1.89)$$

Esta ecuación puede expresarse como

$$\mathcal{P}_i = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{D} \quad (1.90)$$

pero también como

$$\mathcal{P}_i = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{P} \quad (1.91)$$

Como $P = KD$, la ecuación (1.91) se transforma en

$$\mathcal{P}_i = \frac{1}{2} D^T K D \quad (1.92)$$

Por otra parte, $P^T = D^T K^T$. Reemplazando esta última expresión en la ecuación (1.90) obtenemos

$$\mathcal{P}_i = \frac{1}{2} D^T K^T D \quad (1.93)$$

Estas dos expresiones de la energía interna son iguales sí y solo sí la matriz de rigidez es simétrica:

$$K = K^T \quad (1.94)$$

Se deja como ejercicio comprobar que la energía de deformación del ejemplo de los tres resortes, dada por la ecuación (1.37), se puede obtener por cualquiera de las ecuaciones (1.92) o (1.93).

1.7. Formación automática de la matriz de rigidez

La principal ventaja del método de rigidez es que permite la formación automática de las matrices que componen el problema. Dada la definición de una estructura en términos del número total de grados de libertad n y las matrices de rigidez elementales k_e , la automatización se hace posible por el hecho de que los elementos de la matrices de rigidez son simplemente fuerzas, como se ilustró en la sección anterior. En consecuencia, la aplicación de la primera ley de Newton a estas fuerzas conduce a un simple proceso de acumulación de la información que aportan los elementos.

Para ilustrar esto, considérese de nuevo la formación de la matriz de rigidez general realizada anteriormente (ecuación 1.24), que presentamos ahora de la siguiente manera:

$$[-s_e D_{i-1} + s_e D_i] + [s_{e+1} D_i - s_{e+1} D_{i+1}] = 0 \quad (1.95)$$

Nótese que los únicos elementos de rigidez presentes en el primer corchete corresponden al elemento e , mientras que en el segundo hay solamente elementos de rigidez del elemento $e + 1$. Por tanto, esta ecuación se puede expresar en la forma

$$\left[\begin{pmatrix} -s_e & s_e & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s_{e+1} & -s_{e+1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} D_{i-1} \\ D_i \\ D_{i+1} \end{pmatrix} \quad (1.96)$$

en donde se han creado dos vectores de la misma longitud del vector de desplazamientos, uno por cada elemento que contribuye a la ecuación de equilibrio. Esto sugiere el siguiente algoritmo:

1. Crear una matriz K cuadrada de tamaño $n \times n$, con todos sus elementos iguales a cero.
2. Por cada elemento, agregar las contribuciones de k_e a K en las posiciones adecuadas.

El segundo paso del algoritmo requiere la creación de un cuadro de correspondencias entre la numeración local de grados de libertad (que para el caso que nos ocupa es, simplemente, 1,2) y la numeración global, que en elementos como el de tensión axial simple, coincide con la numeración de nodos, como la mostrada en la figura 1.4. Para este caso, el cuadro es la siguiente:

Cuadro 1.1: Correspondencias de grados de libertad para la estructura de la figura 1.4

Elemento e	Numeración local d_e	Numeración global D
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	3
	2	4
4	1	4
	2	5
5	1	5
	2	6
6	1	6
	2	7

Esto indica que, por ejemplo, con respecto a la matriz de rigidez del elemento 4, k_4 , el término (1,1) contribuye al valor (4,4) de la matriz K , el (1,2) al (4,5), el (2,1) al (5,4) y el (2,2) al (5,5). Por otra parte, obsérvese que en la columna de numeración global, los grados de libertad 1 y 7 aparecen una sola vez, mientras que los grados 2 a 6 se encuentran repetidos. Esto se traduce en el hecho de que los términos (2,2) a (6,6) de la matriz de rigidez K en la ecuación (1.28) tengan factor 2, mientras que los términos (1,1) y (7,7) tienen factor 1.

Lo anterior significa que el proceso de automatización se facilita si la información contenida en cada matriz k_e , que en el caso presente es de tamaño 2×2 , se traslada a una matriz ΔK_e , de tamaño $n \times n$, donde n es el número total de grados de libertad, con base en el cuadro de correspondencias. La matriz ΔK_e representa la contribución del elemento e a la matriz de rigidez general de la estructura. Esta última será la suma de tales contribuciones:

$$K = \sum_{e=1}^m \Delta K_e \quad (1.97)$$

Así, por ejemplo, para el elemento 3, la matriz ΔK_3 será

$$\Delta K_3 = \frac{6EA}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

puesto que, según el cuadro 1.1, el término $(1, 1)$ de k_3 se sitúa en la posición $(3, 3)$ de ΔK_e , el $(1, 2)$ en $(3, 4)$, el $(2, 1)$ en $(4, 3)$ y el $(2, 2)$ en $(4, 4)$. Al proceder de manera semejante con todos los elementos se obtiene la matriz de rigidez que aparece en la ecuación (1.28).

1.8. Cálculo de desplazamientos y reacciones

En una estructura estáticamente determinada como la mostrada en la figura 1.4, las reacciones en los apoyos se pueden determinar por medio de las ecuaciones de equilibrio global derivadas de la primera ley de Newton. En este caso, el resultado es $R = -P$. Sin embargo, en el caso general de estructuras estáticamente indeterminadas, las reacciones son desconocidas. Por eso conviene realizar una partición de las matrices implicadas en ecuación anterior, aislando los grados de libertad asociados a las reacciones, que son normalmente de valor nulo. En el caso presente, el grado de libertad asociado al apoyo es D_1 . Por tanto, la partición adecuada es

$$\begin{pmatrix} R \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} = \frac{6EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \vdots & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ \cdots \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \end{pmatrix} \quad (1.99)$$

la cual puede ser escrita en la forma

$$\begin{pmatrix} P_a \\ P_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_a \\ D_b \end{pmatrix} \quad (1.100)$$

donde D_a, P_a son los subvectores de desplazamientos y fuerzas, respectivamente de los grados de libertad restringidos, mientras que D_b, P_b son los correspondientes subvectores de los grados de libertad libres. Es evidente que P_a corresponde a las reacciones en los apoyos. Por su parte, la submatriz K_{aa} relaciona los grados de libertad restringidos entre sí, K_{bb} hace lo propio con los desplazamientos libres, mientras que K_{ab}, K_{ba} corresponden a las relaciones cruzadas entre grados de libertad restringidos y libres. Nótese que $K_{ab} = K_{ba}^T$.

Es importante destacar que en la partición indicada en la ecuación (1.100) al subvector D_a de desplazamientos *conocidos* (nulos porque la restricción es total) le corresponde un vector P_a de reacciones *desconocidas*, mientras que lo contrario sucede para los grados de libertad libres: P_b es *conocido*, por estar formado por fuerzas externas, mientras que D_b es *desconocido*. De esta suerte, a partir de la segunda fila de la ecuación (1.100), se puede formular la ecuación siguiente:

$$P_b = K_{ba}D_a + K_{bb}D_b \quad (1.101)$$

lo que permite calcular los movimientos desconocidos así:

$$D_b = K_{bb}^{-1} (P_b - K_{ba}D_a) \quad (1.102)$$

pues el término del lado derecho contiene solamente términos conocidos. Ahora bien, a partir de la primera fila de la ecuación (1.100) se tiene que

$$P_a = K_{aa}D_a + K_{ab}D_b, \quad (1.103)$$

la cual, al tener en cuenta la ecuación (1.102) se transforma en

$$P_a = K_{aa}D_a + K_{ab}K_{bb}^{-1} (P_b - K_{ba}D_a) \quad (1.104)$$

Para D_a nulo, las ecuaciones anteriores se simplifican así:

$$\begin{aligned} D_b &= K_{bb}^{-1} P_b \\ P_a &= K_{ab} D_b \end{aligned} \quad (1.105)$$

Al resolver la primera de las ecuaciones anteriores se obtienen los desplazamientos en los grados de libertad libres, mientras que la segunda da el valor de las reacciones en los apoyos.

1.9. Cálculo de fuerzas internas en los elementos

Una vez calculados los desplazamientos D_b , con base en el cuadro de correspondencias de las numeraciones local y global de los grados de libertad resulta posible formar los vectores d_e , $e = 1, 2, \dots, m$, extrayendo de D_b los valores pertinentes. Por ejemplo, del cuadro 1.1 es claro que, para el elemento 3

$$d_3 = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}$$

donde δ_1, δ_2 son los desplazamientos de los extremos del elemento en notación local, que equivalen respectivamente a los elementos D_3, D_4 del vector D .

Con los vectores de desplazamientos así formados, las fuerzas internas en cada elemento se calculan por medio de la ecuación (1.18). En el caso del elemento 3, las fuerzas se obtienen por medio de la operación siguiente:

$$p_3 = \frac{6EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} \quad (1.106)$$

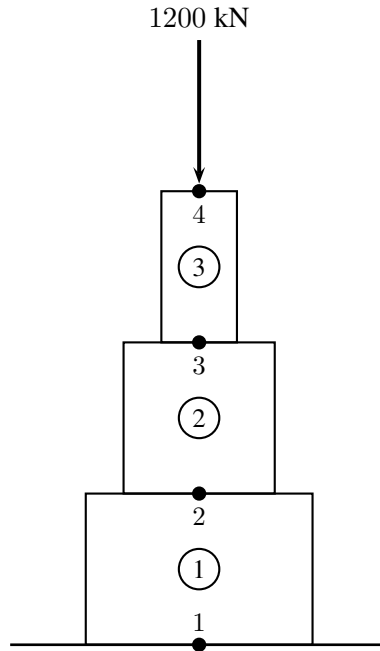


Figura 1.13: Columna de sección variable.

1.10. Ejemplo 1.1: Cadena de elementos en compresión

Consideremos la estructura mostrada en la figura 1.13, que consiste en tres elementos de diferente área seccional sometidos a una carga de compresión de valor 1200 kN. Las áreas de los elementos son $A_1 = 0,25$, $A_2 = 0,16$ y $A_3 = 0,09 \text{ m}^2$, mientras que el módulo de elasticidad es $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ para todos ellos. Por tanto, las matrices de rigidez son

$$k_e = \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

con $l_e = 1 \text{ m}$ para $e = 1, 2, 3$. El cuadro 1.2 muestra las correspondencias entre las numeraciones local y global.

Cuadro 1.2: Correspondencias de grados de libertad para la estructura de la figura 1.13

Elemento	Numeración local	Numeración global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	3
	2	4

Resolveremos en problema en MATLAB de la manera siguiente. En primer lugar, definimos los datos del problema:

```
E=2e7; A_1=0.25; A_2=0.16; A_3=0.09;
```

Con esta información las matrices de rigidez elementales son

```
k_1=E*A_1*[1 -1; -1 1]
```

```
k_1 =
```

```
5000000    -5000000
-5000000    5000000
```

```
k_2=E*A_2*[1 -1; -1 1];
```

```
k_3=E*A_3*[1 -1; -1 1]
```

En vista de que el número total de grados de libertad es igual a cuatro, para formar la matriz de rigidez global \mathbf{K} inicialmente la creamos como una matriz nula de tamaño 4×4 :

```
K=zeros(4,4);
```

Para incorporar la información del elemento 1, creamos un vector que informa los grados de libertad en numeración global que reúne este elemento:

```
g_1=[1 2];
```

A continuación, creamos la matriz $\Delta \mathbf{K}_1$ que traslada la contribución del elemento, de la numeración local a la global:

```
DeltaK_1=zeros(4,4); DeltaK_1(g_1,g_1)=k_1
```

```
DeltaK_1 =
```

```

    5000000    -5000000         0         0
   -5000000     5000000         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
```

Luego agregamos esta contribución a la matriz global:

```
K=K+DeltaK_1
```

```
K =
```

```

    5000000    -5000000         0         0
   -5000000     5000000         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
```

Al proceder de manera similar para los elementos 2 y 3, tenemos:

```
g_2=[2 3]; DeltaK_2=zeros(4,4); DeltaK_2(g_2,g_2)=k_2;
K=K+DeltaK_2;
```

```
g_3=[3 4]; DeltaK_3=zeros(4,4); DeltaK_3(g_3,g_3)=k_3;
K=K+DeltaK_3;
```

Después de realizadas estas operaciones, la matriz K de la estructura es

```
K =
```

```
1.0e+006 *
```

```

    5.0000    -5.0000         0         0
   -5.0000     8.2000    -3.2000         0
         0    -3.2000     5.0000    -1.8000
         0         0    -1.8000     1.8000
```

Las particiones de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas externas, definidas por la ecuación (1.100), se realizan fácilmente en MATLAB por medio de los vectores

```
a=[1]; b=[2 3 4];
```

que corresponden a los grados de libertad restringidos y no restringidos, respectivamente. Con ellos, las cuatro submatrices de la matriz de rigidez se calculan así:

```
K_aa=K(a,a); K_ab=K(a,b); K_ba=K(b,a); K_bb=K(b,b);
```

```

K_aa =
    5000000

K_ab =
   -5000000         0         0

K_ba =
   -5000000
         0
         0

K_bb =
    1.0e+006 *
    8.2000   -3.2000         0
   -3.2000    5.0000   -1.8000
         0   -1.8000    1.8000

```

Ahora bien, el vector de fuerzas externas es

```
P=[0 0 0 -1200]';
```

```

P =
     0
     0
     0
   -1200

```

De él extraemos el vector P_b de manera semejante a lo hecho con la matriz de rigidez:

```
P_b=P(b)
```

```

P_b =
     0
     0
   -1200

```

Al aplicar las ecuaciones (1.105) se obtienen los desplazamientos en los grados de libertad no restringidos

```
D_b=K_bb\P_b
```

```

D_b =
   -0.0002
   -0.0006
   -0.0013

```

así como la reacción en el apoyo:

$$P_a = K_{ab} \cdot D_b$$

$$P_a =$$

$$1.2000e+003$$

Obsérvese que los desplazamientos de los grados de libertad que forman el vector D_b son negativos, lo que indica el estado de compresión de la estructura en su conjunto. Además, crecen en valor absoluto, debido al decrecimiento del área seccional hacia arriba. Por otra parte, nótese que el valor de la reacción es igual al de la fuerza externa aplicada y de signo positivo, lo que demuestra que la estructura se encuentra en perfecto equilibrio.

El paso final es el cálculo de las fuerzas internas en cada elemento, por medio de la ecuación (1.18). Para ello formamos primero el vector completo D , que consta de $D_a = 0$ y D_b :

$$D = \text{zeros}(4, 1);$$

$$D(b) = D_b;$$

Los desplazamientos de los grados de libertad de cada elemento se extraen de D por medio del mismo vector de índices usado anteriormente. Para el elemento 1,

$$d_1 = D(g_1)$$

lo que da como resultado

$$d_1 =$$

$$1.0e-003 \cdot$$

$$\begin{matrix} 0 \\ -0.2400 \end{matrix}$$

La aplicación de la ecuación (1.18) da como resultado las siguientes fuerzas en los extremos del elemento:

$$p_1 = k_1 \cdot d_1$$

$$p_1 =$$

$$1.0e+003 \cdot$$

$$\begin{matrix} 1.2000 \\ -1.2000 \end{matrix}$$

Al proceder de manera análoga con para los elementos restantes se obtienen los siguientes resultados:

```
d_2 =  
  
1.0e-003 *  
  
-0.2400  
-0.6150
```

```
p_2 =  
  
1.0e+003 *  
  
1.2000  
-1.2000
```

```
d_3 =  
  
-0.0006  
-0.0013
```

```
p_3 =  
  
1200  
-1200
```

Obsérvese que todos los elementos se encuentran en un estado de compresión con fuerzas de 1200 kN, como se puede anticipar, al tratarse de una estructura estáticamente determinada en compresión simple.

Capítulo 2

Armaduras planas y espaciales

En este capítulo se extiende el método de rigidez, introducido en el capítulo anterior para cadenas de barras sometidas a tensión axial, a las armaduras o cerchas, compuestas de barras articuladas. Un ejemplo ilustrativo de esta clase de estructuras se muestra en la figura 2.1. Puesto que en las armaduras los elementos están sometidos al mismo estado tensional, la matriz de rigidez elemental es idéntica a la deducida en el capítulo anterior. La diferencia fundamental entre las armaduras y las cadenas reside en la diversa orientación de los elementos. Esto hace necesario el empleo de diferentes sistemas de coordenadas para cada elemento, por una parte, y para la estructura en general, por otra.

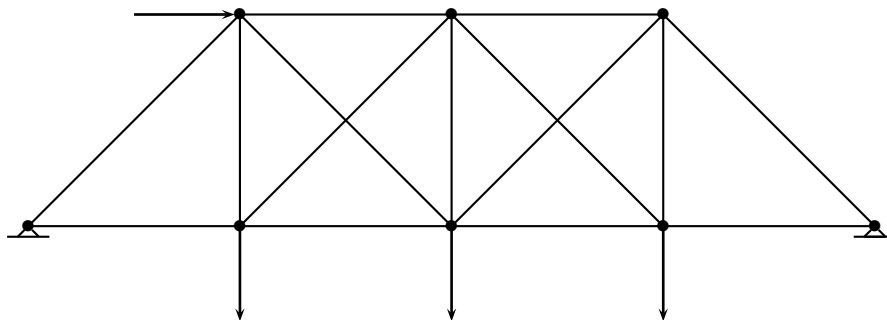


Figura 2.1: Armadura estáticamente indeterminada.

2.1. Grado de indeterminación estática

Para esta clase de estructuras, el grado de indeterminación estática (definido como la diferencia entre el número de fuerzas internas y reacciones desconocidas de la estructura y el número de ecuaciones que provee la estática) está dado por

$$h = m + r - 2j \quad (2.1)$$

donde m es el número de elementos articulados, r el número de reacciones en los apoyos y j el número de nodos. Para el caso que muestra la figura 2.1, $m = 15$, $r = 4$, $j = 8$, por lo cual $h = 3$. Si retiramos una diagonal por vano de las dos que hay en cada uno de ellos y cambiamos uno de los apoyos fijos por uno rodante, $m = 13$, $r = 3$, $j = 8$, por lo cual $h = 0$, es decir, la estructura queda estáticamente determinada.

2.2. Sistemas de coordenadas local y global

Consideremos la figura 2.1. Es claro que la barra inclinada señalada con * tendrá unas fuerzas internas como las que se muestran en la figura 2.2, que no son paralelas a ninguno de los dos ejes coordenados en los que están definidas las fuerzas externas y las reacciones. Entre las fuerzas internas N_i , N_j y los desplazamientos de los nodos i y j en la dirección del elemento media la relación deducida en el capítulo anterior

$$\begin{pmatrix} N_i \\ N_j \end{pmatrix} = \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

la cual se expresa en forma matricial como

$$p_e = k_e d_e \quad (2.3)$$

Como en toda la estructura los elementos tienen, en general, orientaciones diferentes, es necesario convertir todas las fuerzas internas a un sistema de coordenadas común, como el sistema cartesiano global, formado por un eje horizontal y otro vertical. Para realizar esta transformación, consideremos la figura 2.3, que muestra las fuerzas internas N , asociadas al eje axial la barra, x , y sus equivalentes en el sistema global. Con el fin de hacer una deducción general que sea útil para elementos de pórticos, en el sistema local se han añadido dos fuerzas cortantes V_i y V_j , asociadas al eje ortogonal y , que, obviamente, son nulas en el caso de armaduras.

La figura 2.4 muestra los paralelogramos de las fuerzas N y V , de una parte, y de las fuerzas \vec{X} y \vec{Y} de otra. en estas fuerzas se han retirado los subíndices que señalan los nodos i y j , pues la deducción ha de ser válida para cualquier punto. Como las fuerzas \vec{X} y \vec{Y} han de ser equivalentes a las fuerzas N y V , las diagonales de los paralelogramos han de coincidir, pues las resultantes de ambos pares de fuerzas deben ser iguales en magnitud y sentido. Por tanto, como muestra la parte (b) de la figura, las equivalencias son las siguientes:

$$\begin{aligned} N &= \vec{X} \cos \beta + \vec{Y} \sin \beta \\ V &= -\vec{X} \sin \beta + \vec{Y} \cos \beta \end{aligned} \quad (2.4)$$

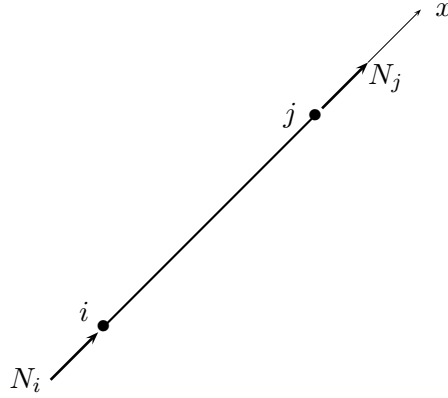


Figura 2.2: Fuerzas internas en un elemento de la armadura.

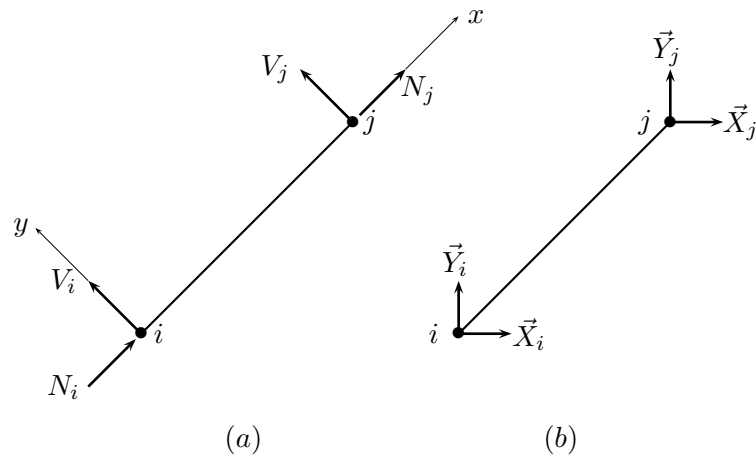


Figura 2.3: Fuerzas internas en un elemento de la armadura. (a) Sistema local; (b) sistema global

Para comprobar la validez de estas relaciones, calculemos el valor de la resultante en el sistema local:

$$\begin{aligned} N^2 &= \vec{X}^2 \cos^2 \beta + \vec{Y}^2 \sin^2 \beta + 2\vec{X}\vec{Y} \cos \beta \sin \beta \\ V^2 &= \vec{X}^2 \sin^2 \beta + \vec{Y}^2 \cos^2 \beta - 2\vec{X}\vec{Y} \cos \beta \sin \beta \end{aligned}$$

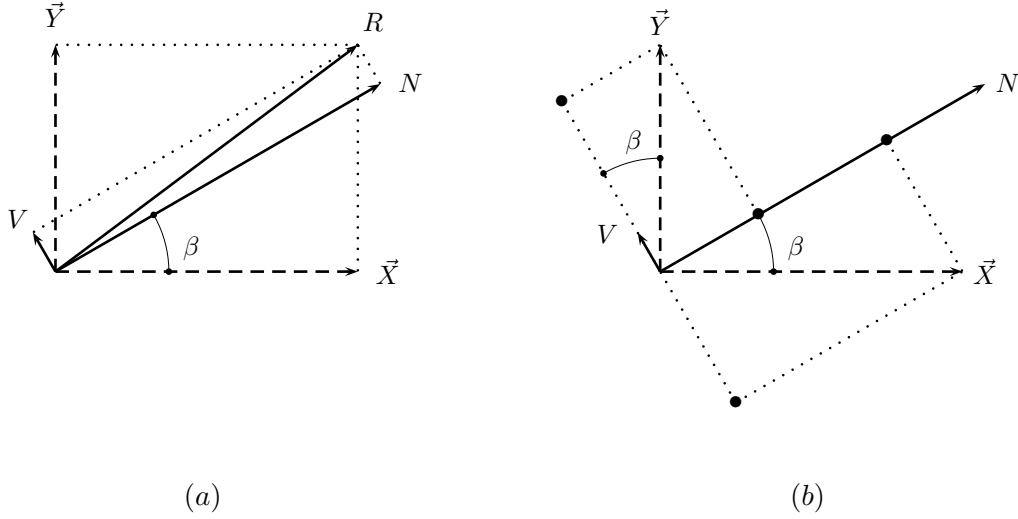


Figura 2.4: (a) Paralelogramos de fuerzas equivalentes. (b) Relaciones entre las fuerzas.

Por tanto

$$R^2 = N^2 + V^2 = \vec{X}^2 + \vec{Y}^2$$

lo cual indica que la resultante es la misma para ambos pares de fuerzas ortogonales (q.e.d). Las relaciones indicadas por la ecuación (2.4) se pueden presentar en la forma

$$\begin{pmatrix} N \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Esta ecuación se puede expresar de manera compacta en la forma siguiente:

$$\mathbf{p} = \mathbf{T} \mathbf{P} \quad (2.6)$$

con

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} N \\ V \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

La matriz \mathbf{T} se denomina *matriz de transformación* o *rotación*. Por otra parte, de la figura 2.4 resulta evidente que las fuerzas (\vec{X}, \vec{Y}) se pueden expresar en función de las fuerzas (N, V) en la forma

$$\begin{aligned}\vec{X} &= N \cos \beta - V \sin \beta \\ \vec{Y} &= N \sin \beta + V \cos \beta\end{aligned}\quad (2.8)$$

lo cual indica que

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}^T \mathbf{p} \quad (2.9)$$

Por simple comparación de las ecuaciones (2.6) y (2.9) se puede ver que

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (2.10)$$

es decir, que la inversa de la matriz de transformación está dada por su transpuesta. Las matrices que cumplen esta condición se denominan *ortogonales*. La ecuación anterior implica que

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{I} \quad (2.11)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de orden 2.

Con el fin de generalizar la transformación así deducida al caso de armaduras espaciales en el capítulo siguiente, es conveniente observar que la ecuación (2.5) se puede presentar en la forma

$$\begin{pmatrix} N \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} \\ \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

donde Φ_{AB} es el ángulo que forman los ejes A y B (ver la figura 2.5). Los elementos de la matriz de transformación reciben el nombre de *cosenos directores*.

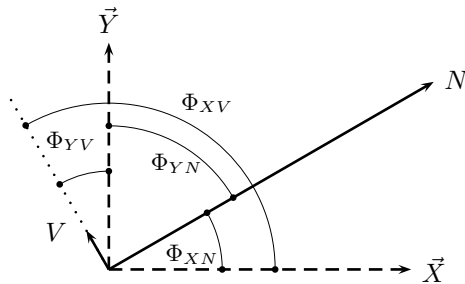


Figura 2.5: Generalización de la transformación de coordenadas.

2.3. Principio del contragradiante

Denotemos ahora por ρ, δ, ξ los desplazamientos en las direcciones de R, N, V , respectivamente, y por u, v los desplazamientos en las direcciones X, Y , respectivamente. El trabajo realizado por la resultante está dado por (ver la figura 2.6)

$$W = R\rho \quad (2.13)$$

Es evidente que el mismo trabajo lo realizan las fuerzas (N, V) o las fuerzas (\vec{X}, \vec{Y}) . Los valores de estos trabajos son

$$W = N\delta + V\xi = \vec{X}u + \vec{Y}v \quad (2.14)$$

Esta equivalencia puede ponerse en la forma

$$W = \mathbf{p}^T \mathbf{d} = \mathbf{P}^T \mathbf{D} \quad (2.15)$$

donde

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \delta \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Al incorporar la ecuación (2.6) en este resultado se obtiene

$$\mathbf{P}^T \mathbf{T}^T \mathbf{d} = \mathbf{P}^T \mathbf{D} \quad (2.17)$$

Esta ecuación expresa la identidad del trabajo realizado por las mismas fuerzas \mathbf{P} a lo largo de los desplazamientos $\mathbf{T}^T \mathbf{d}$, por una parte, y \mathbf{D} , por otra. Esto indica que

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \mathbf{d} \quad (2.18)$$

y, por tanto,

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{D} \quad (2.19)$$

en virtud de la ecuación (2.11). Considerando conjuntamente las ecuaciones (2.6) y (2.18) se tiene que, si las fuerzas en un sistema local se obtienen de las fuerzas del sistema global como $\mathbf{p} = \mathbf{T} \mathbf{P}$, los desplazamientos medidos en el sistema global se obtienen de los medidos en el sistema local por medio de la expresión $\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \mathbf{d}$. Esta ley se denomina *principio del contragradiante*. Este nombre proviene, por una parte, del hecho de que la matriz \mathbf{T} reúne las derivadas de \mathbf{p} con respecto a \mathbf{P} y, por otra, de la transposición de la matriz necesaria para realizar la conversión opuesta de los desplazamientos.

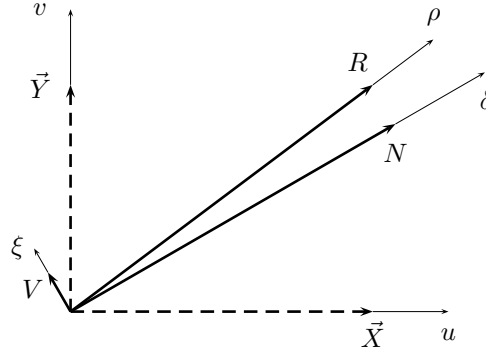


Figura 2.6: Trabajo realizado por las fuerzas en los sistemas local y global.

2.4. Matriz de rigidez de un elemento de armadura

Al especificar la ecuación (2.6) para los dos nodos i y j de un elemento de armadura como el mostrado en la figura 2.3, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ N_j \\ V_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_i \\ \vec{Y}_i \\ \vec{X}_j \\ \vec{Y}_j \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

la cual está compuesta por el *vector de fuerzas internas en coordenadas locales*

$$\mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ N_j \\ V_j \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

el *vector de fuerzas internas en coordenadas globales*

$$\mathbf{P}_e = \begin{pmatrix} \vec{X}_i \\ \vec{Y}_i \\ \vec{X}_j \\ \vec{Y}_j \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

y la *matriz de transformación de coordenadas del elemento*

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Esta última puede ser expresada de manera equivalente como

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} & 0 & 0 \\ \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} \\ 0 & 0 & \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

La relación entre las fuerzas internas en los dos sistemas se puede expresar en la forma compacta

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{P}_e \quad (2.25)$$

La matriz \mathbf{T}_e , de orden 4×4 cumple con las relaciones de ortogonalidad (2.10) y (2.11), es decir

$$\mathbf{T}_e^{-1} = \mathbf{T}_e^T, \quad \mathbf{T}_e \mathbf{T}_e^T = \mathbf{I} \quad (2.26)$$

Ahora bien, entre las fuerzas \mathbf{p}_e y los desplazamientos asociados a ellas

$$\mathbf{d}_e = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \xi_i \\ \delta_j \\ \xi_j \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

media la relación

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (2.28)$$

con

$$\mathbf{k}_e = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

que expresa, por una parte, las relaciones entre las fuerzas axiales colineales N_i, N_j y los desplazamientos en su propia dirección δ_i, δ_j deducidas en el capítulo anterior y, por otra, el hecho de que las fuerzas V_i, V_j son nulas:

$$\begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ N_j \\ V_j \end{pmatrix} = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \xi_i \\ \delta_j \\ \xi_j \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

2.5. Matriz de rigidez de la armadura

Al reemplazar la ecuación (2.25) en la ecuación (2.28) se obtiene

$$\mathbf{T}_e \mathbf{P}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (2.31)$$

Como $\mathbf{d}_e = (\mathbf{T}_e^T)^{-1} \mathbf{D}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e$, la ecuación anterior queda

$$\mathbf{T}_e \mathbf{P}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e \quad (2.32)$$

Premultiplicando ambos lados de la ecuación por \mathbf{T}_e^T

$$\mathbf{T}_e^T \mathbf{T}_e \mathbf{P}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e \quad (2.33)$$

y teniendo en cuenta que $\mathbf{T}_e \mathbf{T}_e^T = \mathbf{I}$ (ecuación 2.26), se llega finalmente a que las fuerzas internas del elemento en el sistema de coordenadas están dadas por

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{D}_e \quad (2.34)$$

con

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \quad (2.35)$$

Esta última es la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales. Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.23) y (2.29), el resultado de esta operación es el siguiente:

$$\mathbf{K}_e = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{pmatrix} \eta^2 & \eta\mu & -\eta^2 & -\eta\mu \\ \eta\mu & \mu^2 & -\eta\mu & -\mu^2 \\ -\eta^2 & -\eta\mu & \eta^2 & \eta\mu \\ -\eta\mu & -\mu^2 & \eta\mu & \mu^2 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

donde $\eta \equiv \cos \beta$ y $\mu \equiv \sin \beta$. Nótese que, a diferencia de la matriz de rigidez \mathbf{k}_e en coordenadas locales, dada por la ecuación (2.29), en coordenadas globales no hay necesariamente filas de valor nulo. Esto se explica por el hecho de que ninguna de las dos fuerzas \vec{X} e \vec{Y} es necesariamente paralela al eje del elemento. Por otra parte, obsérvese que los valores de η y μ pueden ser obtenidos directamente por medio de las siguientes expresiones:

$$\eta = \frac{X_j - X_i}{l_e} \quad (2.37)$$

$$\mu = \frac{Y_j - Y_i}{l_e} \quad (2.38)$$

donde (X_i, Y_i) y (X_j, Y_j) son las coordenadas de los nodos inicial y final del elemento e . En función de estas coordenadas, la longitud del elemento se puede obtener por el teorema de Pitágoras:

$$l_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (2.39)$$

En general, para efectos de automatización del método, asociaremos el nodo i al menor de los valores en la numeración global y j al mayor:

$$i < j \quad (2.40)$$

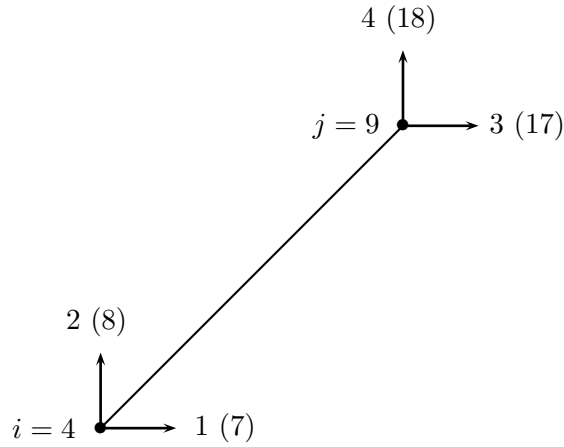


Figura 2.7: Ejemplo de correspondencia entre las numeraciones local y global de los grados de libertad.

Al estar expresadas las diversas matrices \mathbf{K}_e en un sistema común de coordenadas, la matriz de rigidez de la estructura se obtiene por superposición de las matrices $\Delta\mathbf{K}_e$ de todos los elementos, donde $\Delta\mathbf{K}_e$, de tamaño $n \times n$ se construye a partir del cuadro de correspondencias entre los grados de libertad en las numeraciones local y global, como se explicó en el capítulo anterior. Obsérvese que en este caso, n es igual a dos veces el número de nodos. Como ejemplo, la figura 2.7 muestra una barra que une los nodos 4 y 9 de una armadura. Para esta clase de elemento, los grados de libertad en la numeración local siempre llevan la numeración 1, 2, 3, 4, la cual determina la matriz \mathbf{K}_e de la ecuación (2.36). Por otra parte, los números que aparecen entre paréntesis en la figura corresponden a la numeración global de los grados, número que son obtenidos así:

- Número del grado de libertad horizontal del nodo i : $2i - 1$
- Número del grado de libertad vertical del nodo i : $2i$

En consecuencia, para la barra de la figura, la información de la matriz \mathbf{K}_e se pone de la siguiente

manera en la matriz ΔK_e : (1, 1) en (7, 7), (1, 2) en (7, 8), (1, 3) en (7, 17), (1, 4) en (7, 18), (2, 2) en (8, 8), etc.

Finalmente, la matriz de rigidez de la estructura se obtiene por superposición de todas las matrices ΔK_e :

$$K = \sum_{e=1}^m \Delta K_e \quad (2.41)$$

donde m es el número de elementos. El problema general queda entonces planteado en la forma

$$P = KD \quad (2.42)$$

donde P es el vector de fuerzas externas y D el de desplazamientos globales de la estructura. De acuerdo con lo expuesto en el capítulo anterior, las matrices que componen este problema se pueden fraccionar en la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} P_a \\ P_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_a \\ D_b \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

donde D_a, P_a son los subvectores de desplazamientos y fuerzas, respectivamente de los grados de libertad restringidos, mientras que D_b, P_b son los correspondientes subvectores de los grados de libertad libres. Por su parte, P_a corresponde a las reacciones en los apoyos. Como los elementos de D_a son todos nulos, los desplazamientos de los grados de libertad no restringidos y las reacciones en los apoyos se calculan por las siguientes expresiones, ya deducidas anteriormente:

$$D_b = K_{bb}^{-1} P_b \quad (2.44)$$

$$P_a = K_{ab} D_b \quad (2.45)$$

Como ejemplo, consideremos la armadura sencilla compuesta por dos barras de igual longitud l y área seccional A sometidas a las cargas que indica la figura 2.8. De acuerdo con la numeración de los nodos, la de los grados de libertad es la que aparece en la parte (b) de la figura. Igualmente, los ángulos que forman las barras con el eje horizontal son los que aparecen en el cuadro 1 junto con sus valores de η y μ .

Con base en esta información y de acuerdo con la ecuación (2.36), las matrices de rigidez de los dos elementos en coordenadas globales, toman los siguientes valores:

$$K_1 = \frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ & & 1 & -\sqrt{3} \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ & & 1 & \sqrt{3} \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

Cuadro 2.1: Valores angulares de las barras en la figura 2.8

Elemento	β	η	μ
1	-60°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	-120°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cuadro 2.2: Correspondencias de grados de libertad para la estructura de la figura 2.8

Elemento	Numeración local	Numeración global
1	1	1
	2	2
	3	5
	4	6
2	1	3
	2	4
	3	5
	4	6

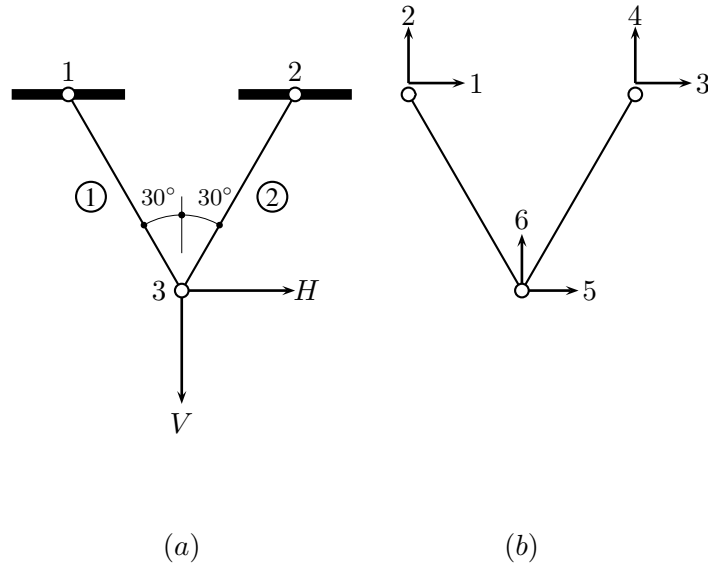


Figura 2.8: Armadura de dos barras. (a) Geometría y cargas. (b) Numeración de grados de libertad.

En estas ecuaciones sólo se muestra el triángulo superior de las matrices para facilitar su visualización.

Con el fin de obtener las contribuciones ΔK_e de estos elementos a la matriz de rigidez global necesitamos expandir estas matrices al orden 6×6 , de acuerdo con el cuadro de correspondencias 2.2. El resultado es

$$\Delta K_1 = \frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} \\ & 3 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -3 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -\sqrt{3} \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta K_2 = \frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ & & & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ & & & & 1 & \sqrt{3} \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

La suma de estas dos contribuciones da como resultado la matriz de rigidez de la estructura:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} \\ & 3 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -3 \\ & & 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ & & & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 6 \end{pmatrix}$$

mientras que el vector de fuerzas asociado a ella es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ H \\ -V \end{pmatrix}$$

Para resolver el problema $\mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{P}$ necesitamos fraccionar las matrices según los grados de libertad restringidos. Al estar libres de movimiento solamente los grados de libertad 5 y 6, el problema de cálculo de desplazamientos se reduce a

$$\frac{EA}{4l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ -V \end{pmatrix}$$

lo que da como resultado

$$D_5 = \frac{2Hl}{EA}, \quad D_6 = -\frac{2Vl}{3EA}$$

2.6. Cálculo de reacciones y fuerzas internas

Para calcular las fuerzas internas en los elementos seguimos el mismo derrotero planteado en el capítulo anterior, con la salvedad de que ahora se hace necesario usar una vez más la matriz de transformación \mathbf{T} . Así, del vector de desplazamientos $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_a \ \mathbf{D}_b]^T$ se extraen los desplazamientos propios de cada elemento \mathbf{D}_e , $e = 1, 2, \dots, m$. Las fuerzas internas del elemento e en coordenadas globales están dadas por la ecuación (2.34):

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{D}_e$$

donde $\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e$, según la ecuación (2.35). Las fuerzas internas del elemento en las coordenadas que le son propias, se obtienen finalmente por la ecuación (2.25):

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{P}_e$$

Al combinar estas ecuaciones se obtiene

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e$$

lo cual equivale a

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e \quad (2.46)$$

es decir,

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (2.47)$$

puesto que $\mathbf{d}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e$ y $\mathbf{T}_e \mathbf{T}_e^T = \mathbf{I}$ en el caso de vigas horizontales.

El vector \mathbf{p}_e tiene, o bien la composición $[-N \ 0 \ N \ 0]^T$, o bien la composición $[N \ 0 \ -N \ 0]^T$, donde N es una fuerza axial positiva. El primer caso indica que en el primer nodo del elemento hay una fuerza contraria al sentido positivo de los desplazamientos y fuerzas internas, mientras que en el nodo opuesto lo contrario, lo que significa que el elemento se encuentra en un estado de *tracción*. Lo contrario ocurre en el segundo caso, que denota un estado de *compresión*. Si se adopta la convención usual que define las tracciones como tensiones positivas mientras que las compresiones como tensiones negativas, se tiene que la tercera fila del vector \mathbf{p}_e contiene el signo correcto de las mismas en ambos casos. Por tanto, las tensiones en el elemento se calculan en la forma siguiente:

$$\sigma_e = \frac{\mathbf{p}_e(3)}{A_e} \quad (2.48)$$

De manera alternativa, al realizar el producto de la tercera fila de la matriz \mathbf{k}_e por la matriz \mathbf{T}_e se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \eta & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \eta \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -\eta & -\mu & \eta & \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con lo cual una expresión matricial de las tensiones es

$$\sigma_e = \frac{E}{l_e} \begin{pmatrix} -\eta & -\mu & \eta & \mu \end{pmatrix} \mathbf{D}_e \quad (2.49)$$

Esta expresión es de más fácil aplicación en la práctica, pues requiere menos operaciones. La fuerza de tensión axial en cada barra está dada por

$$\begin{aligned} N &= A_e \sigma_e \\ &= \frac{EA_e}{l_e} \begin{pmatrix} -\eta & -\mu & \eta & \mu \end{pmatrix} \mathbf{D}_e \end{aligned} \quad (2.50)$$

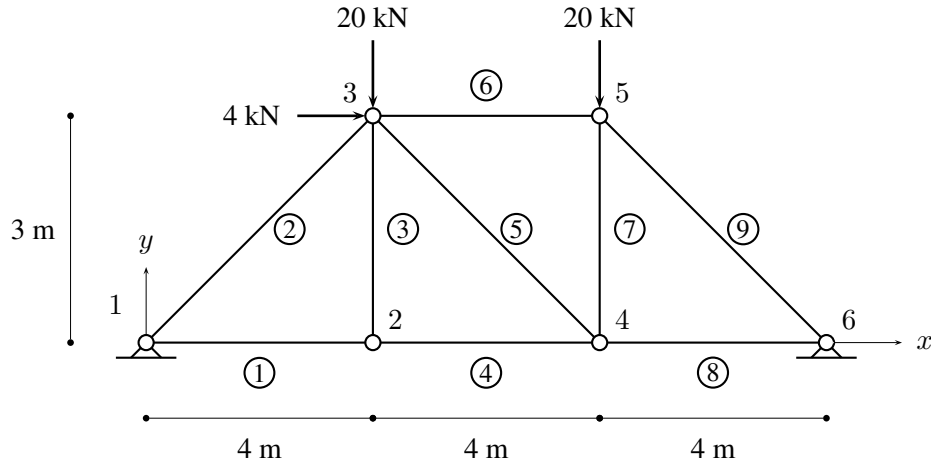


Figura 2.9: Armadura articulada. Geometría y cargas.

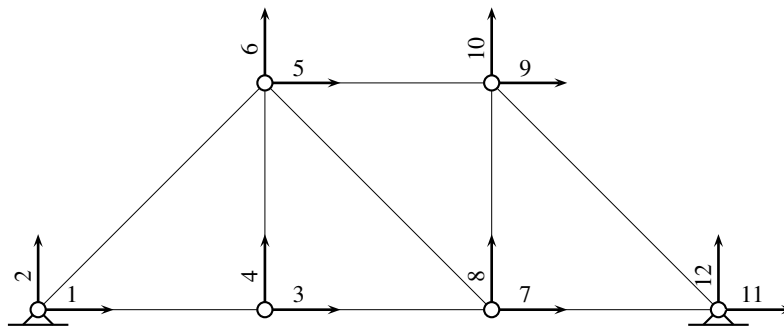


Figura 2.10: Armadura articulada. Numeración de grados de libertad.

2.7. Ejemplo 2.1: Armadura plana

Como ejemplo, consideremos la armadura metálica mostrada en la figura 2.9, sometida a la acción de dos cargas verticales y una horizontal. Todas las barras tienen un módulo de elasticidad $E =$

Cuadro 2.3: Ángulos de las barras de la armadura con el eje horizontal.

Barra	β
1	0
2	36.87
3	90
4	0
5	-36.87
6	0
7	90
8	0
9	-36.87

$2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ y un área seccional $A = 0,005 \text{ m}^2$.

En primer lugar creamos estas variables en MATLAB:

```
E=2e8; A=0.005;
```

A continuación ingresamos la información de las longitudes l_e de todos los elementos:

```
l_1=4; l_2=sqrt(4^2+3^2); l_3=3; l_4=4; l_5=sqrt(4^2+3^2);  
l_6=4; l_7=3; l_8=4; l_9=sqrt(4^2+3^2);
```

Con estos datos es posible calcular las matrices de rigidez elementales en coordenadas locales:

```
k_1=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_1
```

lo que da como resultado

```
k_1 =
```

```
    250000         0   -250000         0  
         0         0         0         0  
   -250000         0    250000         0  
         0         0         0         0
```

Análogamente,

```
k_2=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_2;  
k_3=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_3;  
k_4=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_4;  
k_5=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_5;  
k_6=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_6;  
k_7=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_7;  
k_8=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_8;  
k_9=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_9;
```

Para calcular las matrices de rigidez elementales en coordenadas globales se requiere el cálculo previo de los ángulos que forman los elementos con la dirección positiva del eje horizontal. Estos ángulos aparecen en el cuadro 2.3. Obsérvese que para los elementos 5 y 9 los ángulos tienen un valor negativo.

Calcularemos ahora las matrices de rigidez elementales en coordenadas globales K_e (ecuación 2.35). En primer lugar, con fines ilustrativos destacaremos el cálculo de las mismas para las barras 1 y 2:

```

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_1=T_1'*k_1*T_1

K_1 =

    250000         0    -250000         0
         0         0         0         0
   -250000         0    250000         0
         0         0         0         0

beta=36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_2=T_2'*k_2*T_2

K_2 =

1.0e+005 *

    1.2800    0.9600   -1.2800   -0.9600
    0.9600    0.7200   -0.9600   -0.7200
   -1.2800   -0.9600    1.2800    0.9600
   -0.9600   -0.7200    0.9600    0.7200

```

Nótese que la matriz de rigidez en coordenadas globales de la barra 1 carece de elementos diferentes de cero en las filas y columnas 2 y 4, mientras que la matriz correspondiente para la barra 2 tiene todos sus elementos diferentes de cero. Esto se debe a que la orientación de la barra 1 es horizontal, por lo que no aporta ninguna rigidez contra el movimiento en la dirección Y , mientras que la barra 2 es inclinada y, por tanto, aporta rigidez tanto en la dirección X como en la dirección Y .

Procederemos de manera análoga para el resto de elementos, así:

```

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_3=T_3'*k_3*T_3;

```



```

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_4= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_4=T_4'*k_4*T_4;

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_5= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_5=T_5'*k_5*T_5;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_6= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_6=T_6'*k_6*T_6;

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_7= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_7=T_7'*k_7*T_7;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_8= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_8=T_8'*k_8*T_8;

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_9= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_9=T_9'*k_9*T_9;

```

De manera equivalente, las anteriores matrices pueden ser obtenidas por medio de las ecuaciones (2.37) y (2.38), sin necesidad de calcular los ángulos β . Por ejemplo, para el elemento 2,

```
eta=4/5; mu=3/5;
```

Pasamos ahora a formar la matriz de rigidez de la estructura a partir de las contribuciones de los elementos ΔK_e , según lo explicado anteriormente (ecuación 2.41):

```

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4];
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[1 2 5 6];

```

```

DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[3 4 5 6];
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

g_4=[3 4 7 8];
DeltaK_4=zeros(12,12);
DeltaK_4(g_4,g_4)=K_4;
K=K+DeltaK_4;

g_5=[5 6 7 8];
DeltaK_5=zeros(12,12);
DeltaK_5(g_5,g_5)=K_5;
K=K+DeltaK_5;

g_6=[5 6 9 10];
DeltaK_6=zeros(12,12);
DeltaK_6(g_6,g_6)=K_6;
K=K+DeltaK_6;

g_7=[7 8 9 10];
DeltaK_7=zeros(12,12);
DeltaK_7(g_7,g_7)=K_7;
K=K+DeltaK_7;

g_8=[7 8 11 12];
DeltaK_8=zeros(12,12);
DeltaK_8(g_8,g_8)=K_8;
K=K+DeltaK_8;

g_9=[9 10 11 12];
DeltaK_9=zeros(12,12);
DeltaK_9(g_9,g_9)=K_9;
K=K+DeltaK_9;

```

Para comprender bien la técnica de ensamblaje, es instructivo comparar las matrices K_e y ΔK_e . Por ejemplo, para el elemento 3,

```

K_3
K_3 =
1.0e+005 *
    0         0         0         0
    0    3.3333         0   -3.3333
    0         0         0         0
    0   -3.3333         0    3.3333

```

DeltaK_3 =

1.0e+005 *

Columns 1 through 9

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3.3333	0	-3.3333	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-3.3333	0	3.3333	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 10 through 12

0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

Obsérvese que los elementos no nulos de la matriz K_3 han sido colocados en las filas y columnas indicadas por el vector $g_3 = [3 \ 4 \ 5 \ 6]$ en una matriz de tamaño 12×12 .

Con el fin de resolver el problema de desplazamientos se requiere partir la matriz de rigidez según los grados de libertad restringidos y no restringidos. De la figura 2.10 es claro que los vectores correspondientes son:

$a = [1 \ 2 \ 11 \ 12]; \ b = [3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10];$

Por tanto,

$K_{aa} = K(a, a); \ K_{ab} = K(a, b); \ K_{ba} = K(b, a); \ K_{bb} = K(b, b);$

De la figuras 2.9 y 2.10 resulta claro que el vector de fuerzas es

$P = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ -20 \ 0 \ 0 \ 0 \ -20 \ 0 \ 0]';$

y, por tanto, para los grados de libertad no restringidos se tiene que

$P_b = P(b);$

Esto permite calcular los desplazamientos los grados de libertad no restringidos y las reacciones en los apoyos, así:

$D_b = K_{bb} \backslash P_b;$
 $P_a = K_{ab} * D_b;$

Al reunir los desplazamientos en todos los grados de libertad se obtiene el vector

$D = \text{zeros}(12, 1);$
 $D(b) = D_b;$

cuyo valor es

$D =$

```

1.0e-003 *
    0
    0
    0.0018
   -0.3301
    0.0497
   -0.3301
    0.0036
   -0.3778
   -0.0623
   -0.3748
    0
    0

```

Para calcular las tensiones en los elementos aplicamos directamente la ecuación 2.49:

```

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_1=D(g_1);
sigma_1=E*[-eta -mu eta mu]*D_1/l_1

beta=36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_2=D(g_2);
sigma_2=E*[-eta -mu eta mu]*D_2/l_2

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_3=D(g_3);
sigma_3=E*[-eta -mu eta mu]*D_3/l_3

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_4=D(g_4);

```

```
sigma_4=E*[-eta -mu eta mu]*D_4/l_4
```

```
beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_5=D(g_5);
sigma_5=E*[-eta -mu eta mu]*D_5/l_5
```

```
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_6=D(g_6);
sigma_6=E*[-eta -mu eta mu]*D_6/l_6
```

```
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_7=D(g_7);
sigma_7=E*[-eta -mu eta mu]*D_7/l_7
```

```
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_8=D(g_8);
sigma_8=E*[-eta -mu eta mu]*D_8/l_8
```

```
beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_9=D(g_9);
sigma_9=E*[-eta -mu eta mu]*D_9/l_9
```

El resultado de estas operaciones es

```
sigma_1 =
```

```
88.8889
```

```
sigma_2 =
```

```
-6.3333e+003
```

```
sigma_3 =
```

```
4.8506e-012
```

```
sigma_4 =
```

```
88.8889
```

```
sigma_5 =
```

```
-333.3338
```

```
sigma_6 =
-5.6000e+003
```

```
sigma_7 =
200.0007
```

```
sigma_8 =
-177.7778
```

```
sigma_9 =
-7.0000e+003
```

La unidad de medida de estas tensiones es, obviamente, kN/m^2 . Obsérvese que el elemento 3 se encuentra sin tensión alguna, como puede deducirse por simple equilibrio del nodo 2. (El ínfimo valor que aparece más arriba obedece a la acumulación de errores de redondeo). Por su parte, los elementos 1, 4 y 7 se encuentran en tracción y los elementos restantes en compresión.

Con el fin de comprender mejor la situación de la estructura bajo las cargas a las que se encuentra sometida, es interesante dibujar su posición deformada sobrepuesta a su forma original. Para ello creamos primero una matriz XY que reúne las coordenadas x e y de los nodos:

```
XY=zeros(6,2);
XY(1,:)= [0 0];
XY(2,:)= [4 0];
XY(3,:)= [4 3];
XY(4,:)= [8 0];
XY(5,:)= [8 3];
XY(6,:)= [12 0];
```

Luego creamos una matriz con el estado de geometría deformada, XY_{def} , que se obtiene al sumar los desplazamientos amplificados por un factor a las coordenadas iniciales. En este caso adoptaremos un factor de 500:

```
XYdef=zeros(size(XY));
fac=500;
c=0;
for i=1:6
    c=c+1;
    XYdef(i,1)=XY(i,1)+fac*D(c);
    c=c+1;
    XYdef(i,2)=XY(i,2)+fac*D(c);
end
```

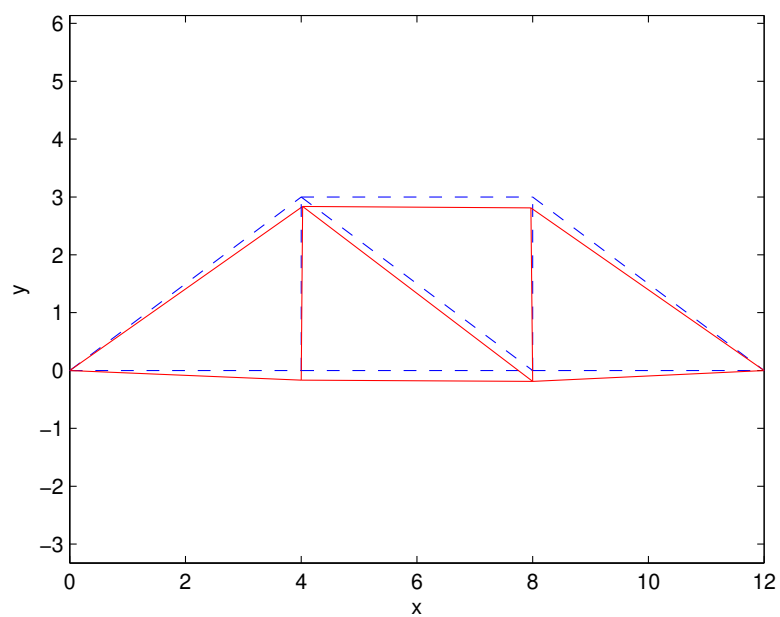


Figura 2.11: Estructura original y posición deformada (con un factor de amplificación de 500).

En el bucle se hace uso de un contador (*c*) que recibe dos valores por nodo, los cuales corresponden a los desplazamientos en las direcciones *X* e *Y* de cada uno.

Ahora crearemos la matriz topológica de la estructura, en la cual cada fila define los nodos inicial y final del elemento correspondiente:

```
IJ=zeros(9,2);
IJ(1,:)= [1 2];
IJ(2,:)= [1 3];
IJ(3,:)= [2 3];
IJ(4,:)= [2 4];
IJ(5,:)= [3 4];
IJ(6,:)= [3 5];
IJ(7,:)= [4 5];
IJ(8,:)= [4 6];
IJ(9,:)= [5 6];
```

Con esta información, el siguiente bucle crea las figuras original (*Q*) y deformada (*Qdef*) de la estructura por medio de la técnica de direccionamiento indirecto de MATLAB:

```
figure
for e=1:9
    Q=[XY(IJ(e,1),1) XY(IJ(e,1),2);...
       XY(IJ(e,2),1) XY(IJ(e,2),2)];
    Qdef=[XYdef(IJ(e,1),1) XYdef(IJ(e,1),2);...
          XYdef(IJ(e,2),1) XYdef(IJ(e,2),2)];
    plot(Q(:,1),Q(:,2),'--b',Qdef(:,1),Qdef(:,2),'-r')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal
```

La figura 2.11 muestra el resultado.

2.8. Armaduras espaciales

A partir de las deducciones realizadas anteriormente para el caso de armaduras planas, extendemos ahora el método de rigidez para el caso de armaduras espaciales como la mostrada en la figura 2.12. En este tipo de estructuras, el grado de indeterminación estática está dado por

$$h = m + r - 3j \quad (2.51)$$

donde *m* es el número de elementos articulados, *r* el número de reacciones en los apoyos y *j* el número de nodos.

En primer lugar, a las fuerzas *N* y *V* del sistema local se añade ahora una fuerza ortogonal de naturaleza cortante, que denotaremos por *G*. En el sistema local, las fuerzas correspondientes se denotan ahora por \vec{X} , \vec{Y} , \vec{Z} (ver la figura 2.13). En consecuencia, la ecuación (2.12), que relaciona los dos sistemas de fuerzas, toma ahora la forma

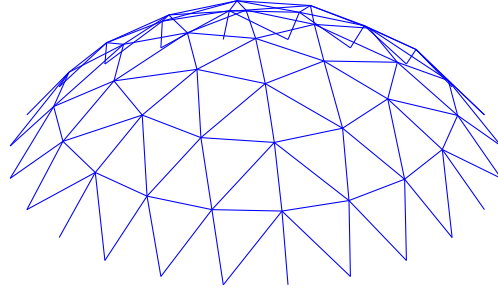


Figura 2.12: Ejemplo de armadura espacial.

$$\begin{pmatrix} N \\ V \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} & \cos \Phi_{ZN} \\ \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} & \cos \Phi_{ZV} \\ \cos \Phi_{XG} & \cos \Phi_{YG} & \cos \Phi_{ZG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Por su parte, la matriz de rigidez elemental en coordenadas locales, que en el sistema plano está dada por la ecuación (2.29), pasa a ser ahora

$$k_e = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

mientras que la matriz de transformación pasa a ser

$$T_e = \begin{pmatrix} \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} & \cos \Phi_{ZN} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} & \cos \Phi_{ZV} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \Phi_{XG} & \cos \Phi_{YG} & \cos \Phi_{ZG} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} & \cos \Phi_{ZN} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} & \cos \Phi_{ZV} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{XG} & \cos \Phi_{YG} & \cos \Phi_{ZG} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

A partir de las dos ecuaciones anteriores, resulta posible la aplicación de la ecuación (2.35) para obtener la matriz de rigidez de la barra en el sistema de coordenadas global:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e$$

Nótese que al realizar este producto los cosenos directores correspondientes a las fuerzas V y G resultan siempre multiplicados por cero, por lo cual el resultado final estará determinado exclusivamente por los cosenos $\cos \Phi_{XN}$, $\cos \Phi_{YN}$ y $\cos \Phi_{ZN}$. la matriz de rigidez es, en consecuencia,

$$\mathbf{K}_e = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{pmatrix} \eta^2 & \eta\mu & \eta\nu & -\eta^2 & -\eta\mu & -\eta\nu \\ \eta\mu & \mu^2 & \mu\nu & -\eta\mu & -\mu^2 & -\mu\nu \\ \eta\nu & \mu\nu & \nu^2 & -\eta\nu & -\mu\nu & -\nu^2 \\ -\eta^2 & -\eta\mu & -\eta\nu & \eta^2 & \eta\mu & \eta\nu \\ -\eta\mu & -\mu^2 & -\mu\nu & \eta\mu & \mu^2 & \mu\nu \\ -\eta\nu & -\mu\nu & -\nu^2 & \eta\nu & \mu\nu & \nu^2 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

donde los cosenos directores se obtienen por medio de las siguientes expresiones:

$$\eta \equiv \cos \Phi_{XN} = \frac{X_j - X_i}{l_e} \quad (2.56)$$

$$\mu \equiv \cos \Phi_{YN} = \frac{Y_j - Y_i}{l_e} \quad (2.57)$$

$$\nu \equiv \cos \Phi_{ZN} = \frac{Z_j - Z_i}{l_e} \quad (2.58)$$

con la longitud del elemento dada por

$$l_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (2.59)$$

Una vez calculadas las matrices de rigidez en coordenadas globales \mathbf{K}_e para todas las barras, el proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura \mathbf{K} se realiza por el mismo procedimiento automático ya mencionado. Esto es, la matriz de rigidez \mathbf{K}_e , de tamaño 6×6 se expande a una matriz $\Delta \mathbf{K}_e$ de tamaño $n \times n$, donde n es el número de grados de libertad, igual a tres veces el número de nodos. Por tanto, la primera diferencia con el problema plano reside en que, para cada nodo, los grados de libertad se obtienen de la manera siguiente:

- Número del grado de libertad del nodo i en la dirección x : $3i - 2$
- Número del grado de libertad del nodo i en la dirección y : $3i - 1$
- Número del grado de libertad del nodo i en la dirección z : $3i$

Una diferencia adicional tiene lugar al calcular las tensiones en las barras, dada para el caso plano por la ecuación (2.48). En el caso espacial, la posición indicativa No. 3 del vector \mathbf{p}_e pasa a ser la No. 4. Por tanto, la ecuación matricial correspondiente, obtenida de manera similar a la (2.49) es

$$\sigma_e = \frac{E}{l_e} \begin{pmatrix} -\eta & -\mu & -\nu & \eta & \mu & \nu \end{pmatrix} \mathbf{D}_e \quad (2.60)$$

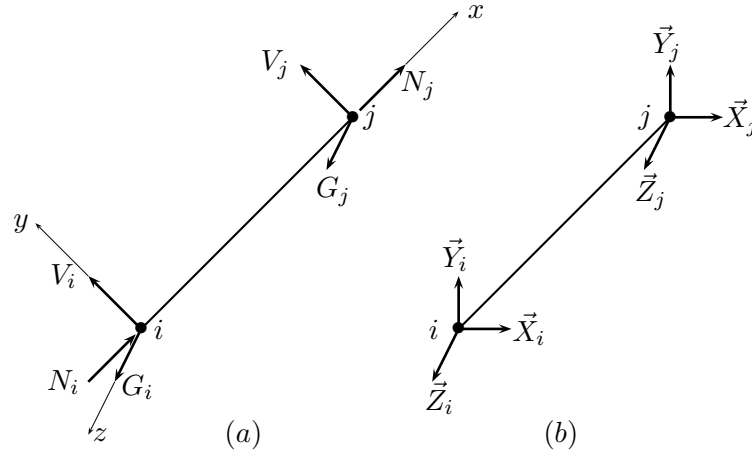


Figura 2.13: Fuerzas internas en un elemento de armadura espacial. (a) Sistema local ortogonal; (b) sistema global ortogonal.

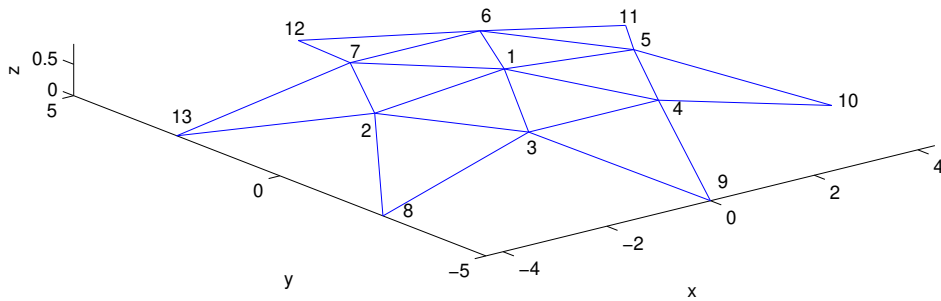


Figura 2.14: Armadura espacial con forma de casquete esférico.

2.9. Ejemplo 2.2: Armadura espacial

Consideremos la estructura mostrada en la figura 2.14. Se trata de un domo que se aproxima a la forma de un casquete esférico. Las coordenadas de los nodos aparecen en el cuadro 2.4 mientras

Cuadro 2.4: Coordenadas de los nodos del domo circular (en m).

Nodo	X	Y	Z
1	0	0	0.8216
2	-2.5	0	0.6216
3	-1.25	-2.165	0.6216
4	1.25	-2.165	0.6216
5	2.5	0	0.6216
6	1.25	2.165	0.6216
7	-1.25	2.165	0.6216
8	-4.33	-2.5	0
9	0	-5.0	0
10	4.33	-2.5	0
11	4.33	2.5	0
12	0	5.0	0
13	-4.33	2.5	0

que la topología de la estructura en el cuadro 2.5. El módulo de elasticidad de las barras es $E = 205,8 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ y el área seccional es $A = 0,0001 \text{ m}^2$ para todas ellas. La estructura se encuentra sometida a la acción de cargas verticales hacia abajo en los nodos 1 a 7. En el nodo 1 su valor es de 6 kN, mientras que en los restantes de 3 kN.

De acuerdo con esta información, la estructura tiene 13 nodos, $13 \times 3 = 39$ grados de libertad y 24 barras. Los nodos 8 a 13 se encuentran restringidos de movimiento en todas las direcciones. Por tanto, para la partición del problema definimos los vectores

```
a=22:39; b=1:21;
```

donde el primero corresponde a los grados restringidos (de $3 \times 8 - 2 = 22$ hasta $3 \times 13 = 39$) mientras que el segundo a los libres (de 1 hasta $3 \times 7 = 21$).

Comenzaremos por definir las propiedades generales

```
% M\{'o}dulo de elasticidad:
```

```
E=205.8*1e6;
```

```
% \{'Area:
```

```
A=1e-4;
```

y las cargas

```
P=zeros(39,1);
```

Cuadro 2.5: Topología del domo circular.

Barra	Nodo i	Nodo j
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	1	5
5	1	6
6	1	7
7	2	3
8	3	4
9	4	5
10	5	6
11	6	7
12	2	7
13	2	8
14	3	8
15	3	9
16	4	9
17	4	10
18	5	10
19	5	11
20	6	11
21	6	12
22	7	12
23	7	13
24	2	13

$P(3) = -6;$
 $P(6) = -3;$
 $P(9) = -3;$
 $P(12) = -3;$
 $P(15) = -3;$
 $P(18) = -3;$
 $P(21) = -3;$

Con base en la información contenida en los cuadros 2.4 y 2.5, la longitud del elemento 1, dada por la ecuación (2.59) es

$$l_1 = \sqrt{(x(2) - x(1))^2 + (y(2) - y(1))^2 + (z(2) - z(1))^2}$$

$$l_1 =$$

2.5159

mientras que los cosenos directores, dados por las ecuaciones (2.56), (2.57) y (2.58), son

```
eta=(x(2)-x(1))/l_1
mu=(y(2)-y(1))/l_1
nu=(z(2)-z(1))/l_1
```

eta =

-0.9937

mu =

0

nu =

-0.0795

Por tanto, la matriz de rigidez en coordenadas globales del elemento 1, K_1 y su contribución ΔK_1 a la matriz de rigidez general K se determinan de la manera explicada anteriormente:

```
K=zeros(39,39);
K_1= E*A/l_1*...
[eta^2      eta*mu      eta*nu      -eta^2      -eta*mu      -eta*nu;...
 eta*mu      mu^2        mu*nu      -eta*mu      -mu^2        -mu*nu;...
 eta*nu      mu*nu        nu^2        -eta*nu      -mu*nu        -nu^2;...
 -eta^2      -eta*mu      -eta*nu      eta^2        eta*mu        eta*nu;...
 -eta*mu      -mu^2        -mu*nu      eta*mu        mu^2        mu*nu;...
 -eta*nu      -mu*nu        -nu^2        eta*nu        mu*nu        nu^2]
```

K_1 =

1.0e+003 *

8.0764	0	0.6461	-8.0764	0	-0.6461
0	0	0	0	0	0
0.6461	0	0.0517	-0.6461	0	-0.0517
-8.0764	0	-0.6461	8.0764	0	0.6461
0	0	0	0	0	0
-0.6461	0	-0.0517	0.6461	0	0.0517

```
g_1=[1 2 3 4 5 6];
DeltaK_1=zeros(39,39);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;
```

Se deja como ejercicio al lector estudiar el código de este ejemplo suministrado en el Apéndice C. Con él se puede comprobar que los desplazamientos de los grados de libertad no restringidos son

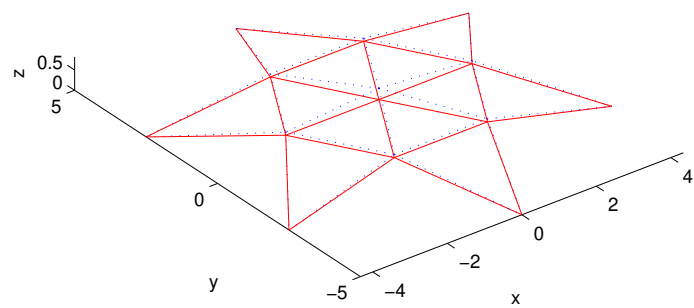


Figura 2.15: Posición deformada del casquete esférico.

```
D_b =  
  
  0.0000  
 -0.0000  
 -0.0279  
 -0.0001  
 -0.0000  
 -0.0077  
 -0.0000  
 -0.0001  
 -0.0077  
  0.0000  
 -0.0001  
 -0.0077  
  0.0001  
  0.0000  
 -0.0077  
  0.0000  
  0.0001  
 -0.0077  
 -0.0000  
  0.0001  
 -0.0077
```

mientras que el vector de tensiones en los 24 elementos es

```
sigma =
```

-12.5391
-12.5401
-12.5401
-12.5391
-12.5401
-12.5401
0.7233
0.7227
0.7233
0.7233
0.7227
0.7233
-10.1670
-10.1679
-10.1669
-10.1669
-10.1679
-10.1670
-10.1670
-10.1679
-10.1669
-10.1669
-10.1679
-10.1670

La figura 2.15 muestra la posición deformada del casquete, con deformaciones amplificadas con un factor de 10.

Capítulo 3

Vigas y parrillas

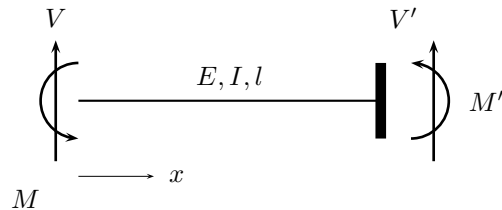


Figura 3.1: Viga en voladizo.

3.1. Matriz de rigidez de una viga

3.1.1. Deducción por la teoría de flexión de Euler

Consideremos la viga en voladizo de sección constante mostrada en la figura 3.1, la cual tiene un módulo de elasticidad E , momento de inercia I y longitud l . En el extremo libre de la viga se encuentran aplicados una carga V transversal y un momento flector M , ambos de sentido positivo. En la figura se representan también las reacciones V' y M' . Calcularemos en primer lugar la deflexión en el extremo y el ángulo de giro causados por la carga V solamente. De acuerdo con la ecuación de Euler, la ecuación diferencial de la deflexión u es

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (3.1)$$

donde x es la coordenada horizontal medida desde el extremo libre, la segunda derivada del desplazamiento $u(x)$ es una aproximación de la curvatura que adquiere la viga y $M(x)$ es el momento flector, el cual vale, evidentemente, $M(x) = Vx$. Al integrar se obtiene

$$\frac{du}{dx} = \frac{Vx^2}{2EI} + C \quad (3.2)$$

donde la constante de integración se obtiene de la condición

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = 0 \quad (3.3)$$

lo cual da como resultado

$$C = -\frac{Vl^2}{2EI} \quad (3.4)$$

con lo cual la ecuación del giro es

$$\frac{du}{dx} = \frac{V}{2EI}(x^2 - l^2) \quad (3.5)$$

Al integrar nuevamente y considerar la condición de frontera $u = 0$ para $x = l$, se obtiene la ecuación de la deflexión:

$$u(x) = \frac{V}{6EI}(x^3 - 3xl^2 + 2l^3) \quad (3.6)$$

Por tanto, el giro y la deflexión en el extremo izquierdo valen

$$\theta = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{Vl^2}{2EI}, \quad \xi = u(0) = \frac{Vl^3}{3EI} \quad (3.7)$$

Por otra parte, a causa del momento M , estos valores son

$$\theta = \frac{Ml}{EI}, \quad \xi = -\frac{Ml^2}{2EI} \quad (3.8)$$

En consecuencia, los valores totales son

$$\theta = -\frac{Vl^2}{2EI} + \frac{Ml}{EI}, \quad \xi = \frac{Vl^3}{3EI} - \frac{Ml^2}{2EI} \quad (3.9)$$

Con base en la definición de la matriz de rigidez dada en el capítulo 1 y en las anteriores ecuaciones, resolveremos los dos siguiente problemas, de lo cual saldrán los valores de las columnas de la matriz. El primer problema consiste en hallar los valores adecuados de V y M para $\theta = 0$. El segundo problema corresponde al caso contrario: $\xi = 0$.

Primer problema: Hallar V y M tales que $\theta = 0$.

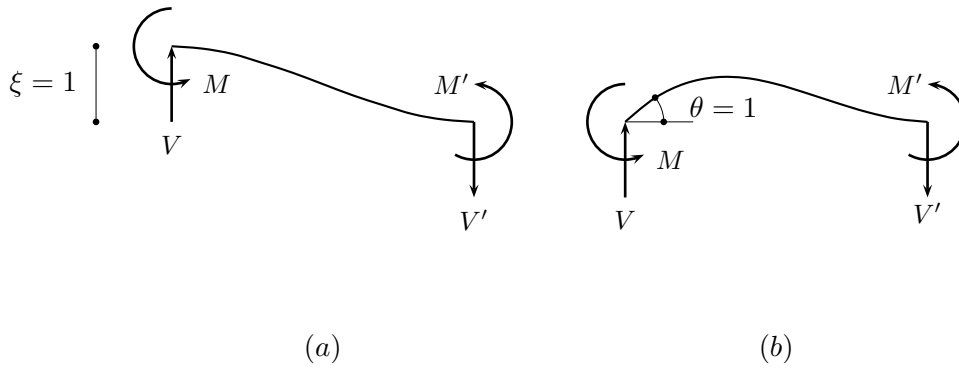


Figura 3.2: Problemas para deducir la matriz de rigidez de una barra en flexión. (a): Problema 1; (b) Problema 2.

De la ecuación (3.9) tenemos

$$EI\theta = -\frac{Vl^2}{2} + Ml = 0 \quad \therefore M = \frac{Vl}{2}$$

Por tanto,

$$EI\xi = \frac{Vl^3}{3} - \frac{Ml^2}{2} = \frac{Vl^3}{12}$$

lo cual quiere decir que

$$V = \frac{12EI}{l^3}\xi, \quad M = \frac{6EI}{l^2}\xi \quad (3.10)$$

En la figura 3.2 se encuentra representada esta solución junto con las reacciones en el apoyo, las cuales se obtienen por las ecuaciones de equilibrio. Sus valores son

$$V' = -\frac{12EI}{l^3}\xi, \quad M' = \frac{6EI}{l^2}\xi \quad (3.11)$$

En la figura se han omitido los signos de las fuerzas, que son indicados por las direcciones equivalentes. También se muestra la forma de la elástica que surge de las condiciones del problema.

Segundo problema: Hallar V y M tales que $\xi = 0$.

En este caso,

$$EI\xi = \frac{Vl^3}{3} - \frac{Ml^2}{2} = 0 \quad \therefore V = \frac{3M}{2l}$$

por lo cual

$$EI\theta = -\frac{3Ml}{4} + Ml$$

Esto implica que

$$M = \frac{4EI}{l}\theta, \quad V = \frac{6EI}{l^2}\theta \quad (3.12)$$

Por equilibrio,

$$V' = -\frac{6EI}{l^2}\theta, \quad M' = \frac{2EI}{l}\theta \quad (3.13)$$

Esta solución se presenta igualmente en la figura 3.2. Si denominamos los extremos izquierdo y derecho de la viga i y j , respectivamente, podemos hacer las equivalencias $\xi \equiv \xi_i, \theta \equiv \theta_i, V' \equiv V_i, M' \equiv M_i, V \equiv V_j, M \equiv M_j$. Así, las relaciones (3.10), (3.11), (3.12) y (3.13) se pueden superponer así:

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{12EI}{l^3}\xi_i + \frac{6EI}{l^2}\theta_i \\ M_i &= \frac{6EI}{l^2}\xi_i + \frac{4EI}{l}\theta_i \\ V_j &= -\frac{12EI}{l^3}\xi_i - \frac{6EI}{l^2}\theta_i \\ M_j &= \frac{6EI}{l^2}\xi_i + \frac{2EI}{l}\theta_i \end{aligned} \quad (3.14)$$

Con el fin de completar la deducción, es necesario resolver los dos problemas intercambiando las posiciones del apoyo y el extremo libre, como se indica en la figura 3.3. Al proceder de manera análoga a lo hecho anteriormente, y con las equivalencias $V \equiv V_j, M \equiv M_j, V' \equiv V_i, M' \equiv M_i$, obtenemos

$$\begin{aligned} V_i &= -\frac{12EI}{l^3}\xi_j + \frac{6EI}{l^2}\theta_j \\ M_i &= -\frac{6EI}{l^2}\xi_j + \frac{2EI}{l}\theta_j \\ V_j &= \frac{12EI}{l^3}\xi_j - \frac{6EI}{l^2}\theta_j \\ M_j &= -\frac{6EI}{l^2}\xi_j + \frac{4EI}{l}\theta_j \end{aligned} \quad (3.15)$$

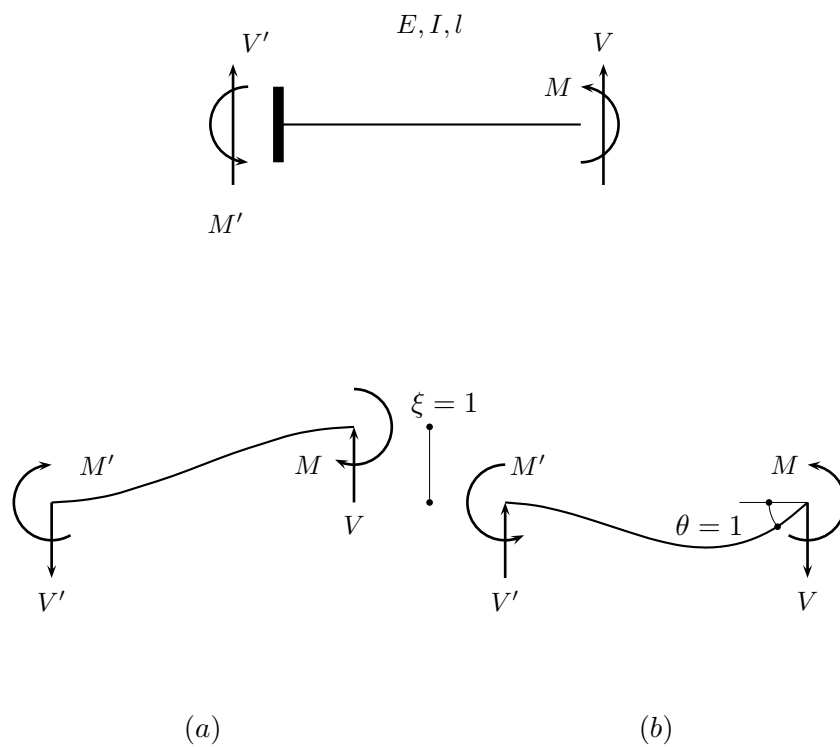


Figura 3.3: Solución de los problemas contrarios.

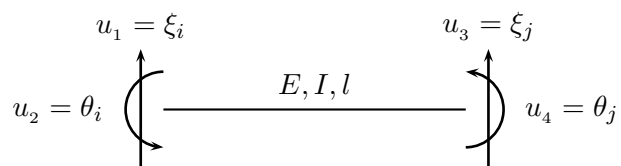


Figura 3.4: Numeración de los grados de libertad de la viga.

Al superponer las ecuaciones (3.14) y (3.15) se obtiene finalmente el siguiente resultado

$$\begin{pmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \theta_i \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Lo anterior significa que, en la ecuación básica

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (3.17)$$

la matriz de rigidez de un elemento de viga de sección constante es

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

de acuerdo con una numeración de los grados de libertad como la que muestra la figura 3.4.

3.1.2. Deducción por el método de elementos finitos

A continuación mostraremos que la matriz de rigidez del elemento de viga puede obtenerse de manera exacta por el método de elementos finitos, si se usan unas funciones de interpolación adecuadas. Para los grados de libertad mostrados en la figura 3.4, usaremos la interpolación

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_3 + N_4(x)u_4 \quad (3.19)$$

es decir,

$$u(x) = N_1(x)\xi_i + N_2(x)\theta_i + N_3(x)\xi_j + N_4(x)\theta_j \quad (3.20)$$

con las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_2(x) &= x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ N_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_4(x) &= \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

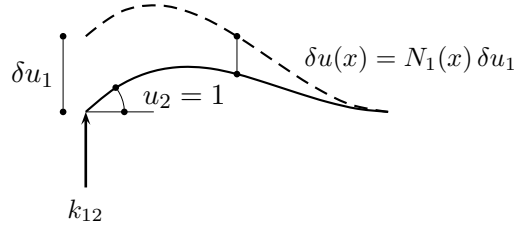


Figura 3.5: Deducción de la matriz de rigidez de una barra en flexión como elemento finito.

La figura 3.5 muestra la segunda de estas funciones. Puede verse que cumple con la condición básica de interpolación, es decir, $N_2(0) = 1, N_2(l) = 0$. Con base en estas funciones y con aplicación del Principio del Trabajo Virtual deduciremos el valor k_{12} de la matriz de rigidez, que en este contexto corresponde al trabajo realizado por la fuerza k_{12} a través del desplazamiento virtual δu_1 cuando tiene lugar un desplazamiento unitario en el grado de libertad 2. Para ese fin, usaremos como interpolación del desplazamiento virtual la función $N_1(x)$:

$$\delta u(x) = N_1(x) \delta u_1 \quad (3.22)$$

Esta función aparece superpuesta a la deflexión real como una línea discontinua en la figura 3.5. La curvatura correspondiente es

$$\frac{d^2 \delta u(x)}{dx^2} = N_1''(x) \delta u_1 \quad (3.23)$$

Por otra parte, el momento flector real es

$$m(x) = EI \frac{d^2 u}{dx^2} = EI N_2''(x) \quad (3.24)$$

La igualación del trabajo virtual externo con el interno da entonces como resultado

$$\delta u_1 k_{12} = \delta u_1 EI \int_0^l N_1''(x) N_2''(x) dx \quad (3.25)$$

con lo cual

$$k_{12} = EI \int_0^l N_1''(x) N_2''(x) dx \quad (3.26)$$

Las derivadas en esta ecuación tienen por valor

$$N_1''(x) = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \quad (3.27)$$

$$N_2''(x) = -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \quad (3.28)$$

En consecuencia

$$k_{12} = \frac{6EI}{l^2} \quad (3.29)$$

resultado que coincide con el correspondiente obtenido anteriormente. En general, un elemento cualquiera k_{ij} de la matriz puede obtenerse por medio de la integral

$$k_{ij} = EI \int_0^l N_i''(x) N_j''(x) dx \quad (3.30)$$

Al aplicar este método (que, como se dijo anteriormente, se conoce como *formulación débil o global*) se obtiene el mismo resultado que en la deducción anterior, lograda por medio de la *formulación fuerte o local* (ecuación 3.18):

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

3.2. Ensamblaje y solución

Obsérvese que el número de grados de libertad es igual al doble del número de nodos. Por tanto, de manera similar a los casos anteriores, el orden de los grados de libertad es el siguiente:

- Número del grado de libertad vertical ξ del nodo i : $2i - 1$
- Número del grado de libertad rotacional θ del nodo i : $2i$

Para el análisis de vigas, la solución del problema de desplazamientos y fuerzas internas sigue los mismos criterios del capítulo 1, puesto que no hay necesidad en este caso de realizar ninguna transformación de coordenadas, dado que, en las vigas, los elementos se encuentran orientados según

el eje horizontal. El ensamblaje de \mathbf{K} se hace teniendo en cuenta que la matriz \mathbf{K}_e es igual a \mathbf{k}_e o, lo que es equivalente, la matriz de transformación es igual a la matriz idéntica:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e = \mathbf{k}_e; \quad \mathbf{T}_e = \mathbf{I} \quad (3.32)$$

Este ensamblaje se realiza por el método del cuadro de correspondencias explicado en los capítulos anteriores. con esto se da forma al problema usual

$$\mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{P} \quad (3.33)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura, \mathbf{D} el vector de desplazamientos de los nodos y \mathbf{P} el vector de cargas aplicadas en ellos. Una vez resuelto el problema de desplazamientos (3.33), la ecuación (3.16) puede ser usada para la determinación de las fuerzas internas V y M , correspondientes a la fuerza cortante y al momento flector. Para ello, del vector \mathbf{D} extraemos los desplazamientos \mathbf{D}_e del elemento en coordenadas globales por medio del cuadro de correspondencias de las numeraciones local y global. Una vez realizado este paso, los desplazamientos en coordenadas locales se obtiene por medio de la ecuación

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e = \mathbf{D}_e \quad (3.34)$$

La aplicación de la ecuación (3.17) da entonces como resultado

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (3.35)$$

El análisis de vigas con cargas en los nodos se ilustra por medio del siguiente ejemplo.

3.3. Ejemplo 3.1: Viga de un vano

Consideremos la viga biempotrada que aparece en la figura 3.6 sometida a una carga $Q = 100\text{kN}$ en el centro de la luz. El material es concreto reforzado con un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^7 \text{kN/m}^2$. La longitud de la viga es 12 m, la sección rectangular tiene por medidas $b = 0,4 \text{ m}$ y $h = 1 \text{ m}$. El objetivo del análisis es calcular los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga, con lo cual podremos comprobar la exactitud del método matricial de rigidez, dada la disponibilidad de los resultados analíticos para esta viga deducidos al comienzo de este capítulo.

Comenzaremos por definir las cantidades básicas E, I para los elementos que componen la viga:

```
E=2e7;
b=0.4;
h=1;
I=b*h^3/12;
l_1=6;
l_2=6;
```

Las matriz de rigidez de los elementos, dada por la ecuación (3.18), es

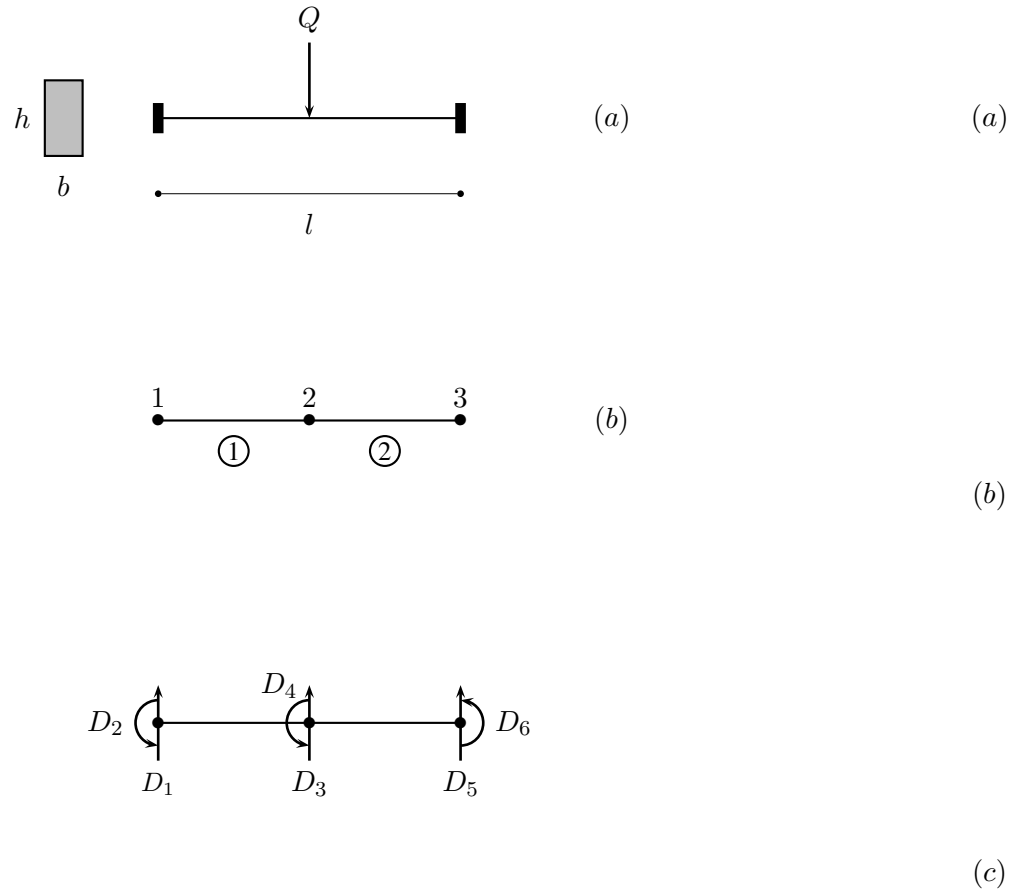


Figura 3.6: Viga biempotrada. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. (c) Numeración de grados de libertad.

```

k_1=zeros(4,4);
k_1(1,:)=E*I*[12/l_1^3    6/l_1^2 -12/l_1^3    6/l_1^2];
k_1(2,:)=E*I*[6/l_1^2    4/l_1  -6/l_1^2    2/l_1];
k_1(3,:)=E*I*[-12/l_1^3 -6/l_1^2  12/l_1^3   -6/l_1^2];
k_1(4,:)=E*I*[6/l_1^2    2/l_1  -6/l_1^2    4/l_1];

k_1 =

1.0e+005 *

```

```

0.3704    1.1111   -0.3704    1.1111
1.1111    4.4444   -1.1111    2.2222
-0.3704   -1.1111    0.3704   -1.1111
1.1111    2.2222   -1.1111    4.4444

k_2=zeros(4,4);
k_2(1,:)=E*I*[12/l_2^3    6/l_2^2 -12/l_2^3    6/l_2^2];
k_2(2,:)=E*I*[6/l_2^2    4/l_2  -6/l_2^2    2/l_2];
k_2(3,:)=E*I*[-12/l_2^3  -6/l_2^2  12/l_2^3  -6/l_2^2];
k_2(4,:)=E*I*[6/l_2^2    2/l_2  -6/l_2^2    4/l_2];

k_2 =

1.0e+005 *

0.3704    1.1111   -0.3704    1.1111
1.1111    4.4444   -1.1111    2.2222
-0.3704   -1.1111    0.3704   -1.1111
1.1111    2.2222   -1.1111    4.4444

```

El elemento 1 comprende los nodos $i = 1$ y $j = 2$ y, por tanto, sus grados de libertad son $(2i - 1, 2i, 2j - 1, 2j) = (1, 2, 3, 4)$. Análogamente, para el elemento 2, con nodos 2 y 3, sus grados de libertad son $(3, 4, 5, 6)$. Por tanto, el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura, de tamaño 6×6 se realiza según la siguiente secuencia de operaciones:

```

K=zeros(6,6);

g_1=[1 2 3 4];
K_1=k_1;
DeltaK_1=zeros(6,6);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[3 4 5 6];
K_2=k_2;
DeltaK_2=zeros(6,6);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

K =

1.0e+005 *

0.3704    1.1111   -0.3704    1.1111         0         0
1.1111    4.4444   -1.1111    2.2222         0         0
-0.3704   -1.1111    0.7407         0   -0.3704    1.1111
1.1111    2.2222         0    8.8889   -1.1111    2.2222

```

0	0	-0.3704	-1.1111	0.3704	-1.1111
0	0	1.1111	2.2222	-1.1111	4.4444

De la figura 3.6 es claro que los grados de libertad no restringidos son los de número 3 y 4, mientras que los demás (1,2,5,6) están restringidos. Por esto, la partición de la matriz de rigidez se realiza así:

```
a=[1 2 5 6]; b=[3 4];
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
```

K_bb =

```
1.0e+005 *
    0.7407      0
      0    8.8889
```

Puede verse que los elementos fuera de la diagonal de la matriz K_{bb} son nulos. Esto se debe a que, por la simetría de la estructura, las contribuciones correspondientes de los elementos 1 y 2 se anulan mutuamente.

El vector de cargas externas es

```
P=[0 0 -100 0 0 0]';
```

por lo cual la solución del problema de desplazamientos se realiza así:

```
P_b=P(b);
D_b=K_bb\ P_b;
P_a=K_ab*D_b;
```

```
D=zeros(6,1);
D(b)=D_b;
```

D =

```
0
0
-0.0014
0
0
0
```

Puede observarse que hay un único desplazamiento no nulo, que corresponde al grado de libertad 3: el desplazamiento vertical en el centro de la viga. El grado de libertad 4 es nulo por simetría. Los demás son nulos por estar restringidos.

El vector de las reacciones en los apoyos es

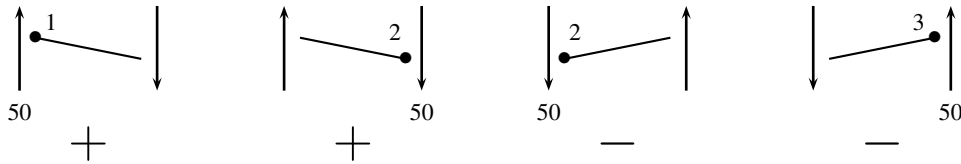


Figura 3.7: Equilibrio de los nodos en fuerzas cortantes.

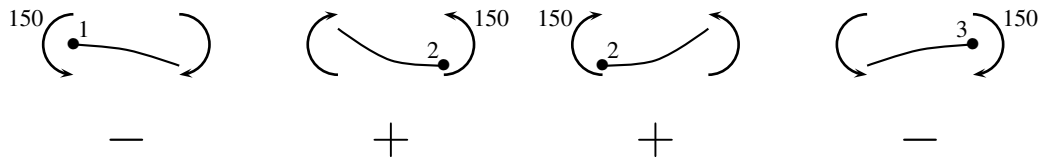


Figura 3.8: Equilibrio de los nodos en momentos flectores e interpretación de la deformación de la viga.

$P_a =$

50
150
50
-150

Evidentemente, este resultado coincide con el dado por las ecuaciones (3.36) y (3.37).

Los cortantes y momentos en los elementos se calculan por medio de la ecuación (3.16), previa extracción de los desplazamientos de cada elemento del vector D :

$D_1 = D(g_1);$
 $p_1 = k_1 * D_1;$

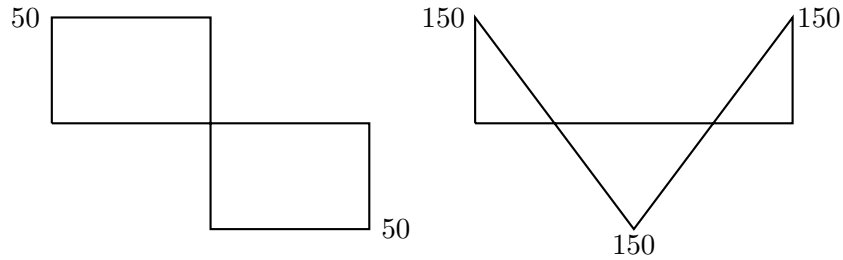


Figura 3.9: Diagramas de cortante y momento flector.

```
D_2=D (g_2) ;
p_2=k_2*D_2;
```

```
p_1 =
```

```
50
150
-50
150
```

```
p_2 =
```

```
-50
-150
50
-150
```

La interpretación de este resultado se muestra en la figuras 3.7 y 3.8, donde los signos de los valores son indicados por medio de las direcciones de los elementos. La segunda ofrece, además, una interpretación de la deformación de la viga, ya que ésta se encuentra determinada por el momento flector. Como es usual en el análisis de vigas, *se definen como positivos el momento flector que causa tracción en la fibra inferior y el cortante que produce un par de giro en el sentido de las agujas del reloj*. Con base en este análisis se obtienen los diagramas de cortante y momento flector mostrados en la figura 3.9.

3.4. Análisis de vigas biempotradas

Consideremos la figura 3.10 que muestra una viga empotrada en sus dos extremos sometida a la acción de una carga Q en el centro de la luz. La viga tiene módulo de elasticidad E , momento de

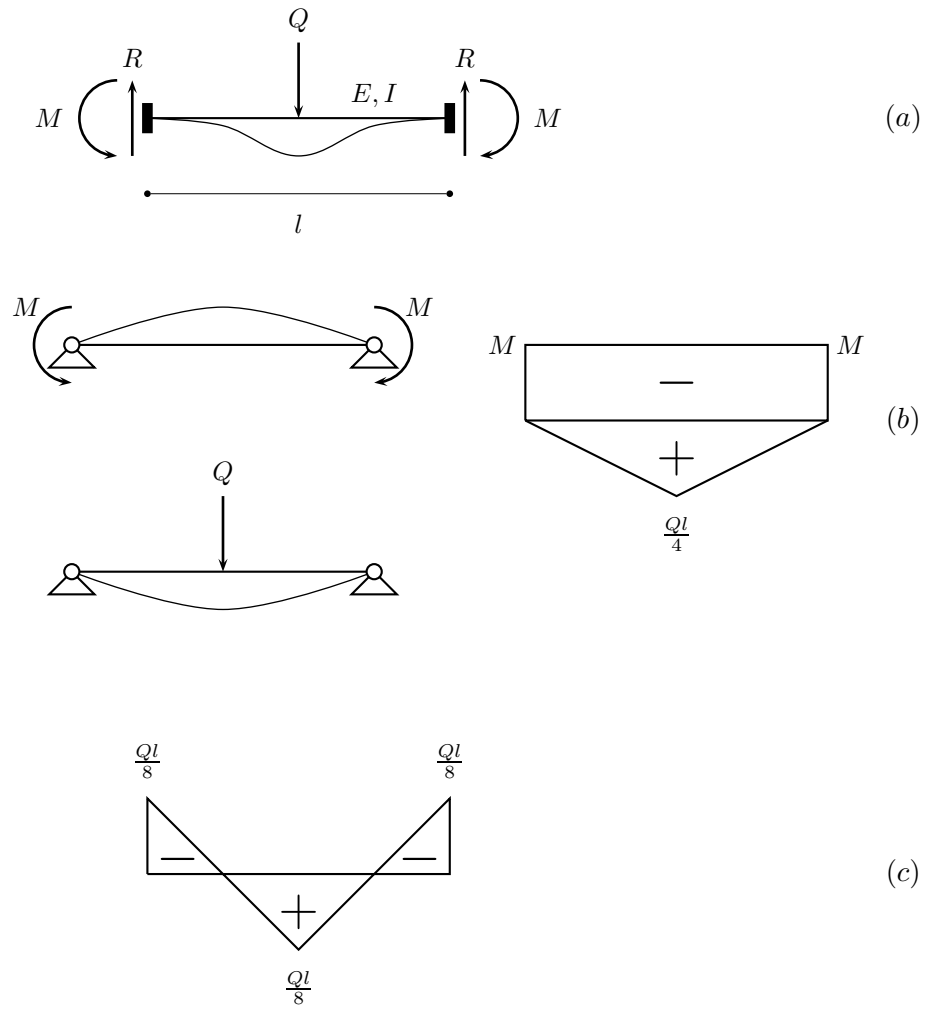


Figura 3.10: Viga biempotrada. (a) Modelo estructural. (b) Hipótesis de diagrama de momentos. (c) Diagrama de momentos final.

inercia I y longitud l . Se busca determinar el diagrama de momentos de la viga con base en el teorema de área de momentos.

Por ser la viga simétrica, evidentemente las reacciones en los apoyos tiene por valor

$$R = \frac{Q}{2} \quad (3.36)$$

mientras que el valor de los momentos de empotramiento no resulta evidente. Sin embargo, por la condición de que no se pueden producir giros en los extremos, es lógico inferir las direcciones de los mismos, mostradas en la parte superior de la figura. Además, podemos considerar el problema como el de una viga simplemente apoyada sometida a la acción de dos sistemas de fuerzas:

1. La fuerza Q aplicada en el centro del vano.
2. Dos momentos de valor M aplicados en los extremos y de signo contrario a los que aparecen como reacciones en la viga biempotrada.

La aplicación del segundo sistema de cargas tiene por fin contrarrestar el giro producido por la carga Q , de manera que la suma de ambos sea igual a cero, tal como debe ser el caso en la viga biempotrada. Los diagramas de momentos correspondientes a estas dos situaciones aparecen superpuestos en la figura. El correspondiente al primer sistema produce tracción en la fibra inferior de la viga y, por tanto, es de signo positivo. Por su parte, el producido por el segundo sistema produce compresión en la misma fibra y es en consecuencia negativo. Según el teorema de área de momentos, la deflexión en un extremo cualquiera de la viga tiene por valor

$$EI\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ql}{4} \cdot l - Ml$$

Al establecer la condición $\theta = 0$ se obtiene

$$M = \frac{Ql}{8} \quad (3.37)$$

Con las ecuaciones (3.36) y (3.37) se establece el diagrama final de momentos mostrado en la parte inferior de la figura 3.10.

Al proceder de manera semejante para otras cargas típicas se obtienen los resultados que aparecen en la figura 3.11. Nótese que el momento dado por la ecuación (3.37) es un caso particular del que muestra la figura 3.11(a), con $a = b = l/2$.

3.5. Cargas en el interior de una viga

En el análisis realizado en la sección anterior sobre una viga biempotrada (que denotaremos \mathcal{F}) usamos una viga simple como elemento auxiliar. Analizamos esta última en dos estados: el correspondiente a la carga externa (\mathcal{S}) y el constituido por las reacciones de la viga biempotrada (\mathcal{R}). El resultado del análisis puede interpretarse de la siguiente manera (ver la figura 3.12): Si los momentos de \mathcal{F} (y por tanto las deformaciones) se pueden obtener como los momentos de \mathcal{S} más los de \mathcal{R} , entonces los momentos de \mathcal{S} son iguales a los de \mathcal{F} menos los de \mathcal{R} .

Ahora bien, la elección de la viga simplemente apoyada como elemento auxiliar se hizo en el análisis anterior por razones de conveniencia para simplificar las operaciones. Por tanto el razonamiento anterior no está restringido, de ninguna manera, a tal clase de viga. Así, en general, para una estructura elástica \mathcal{S} con cargas en el interior de sus elementos, sus tensiones y deformaciones se pueden obtener como las resultantes de empotrar en ambos lados los elementos con tales cargas (\mathcal{F}) menos las que surjan por la aplicación de las reacciones de \mathcal{F} en los nodos de la estructura (\mathcal{R}). Simbólicamente,

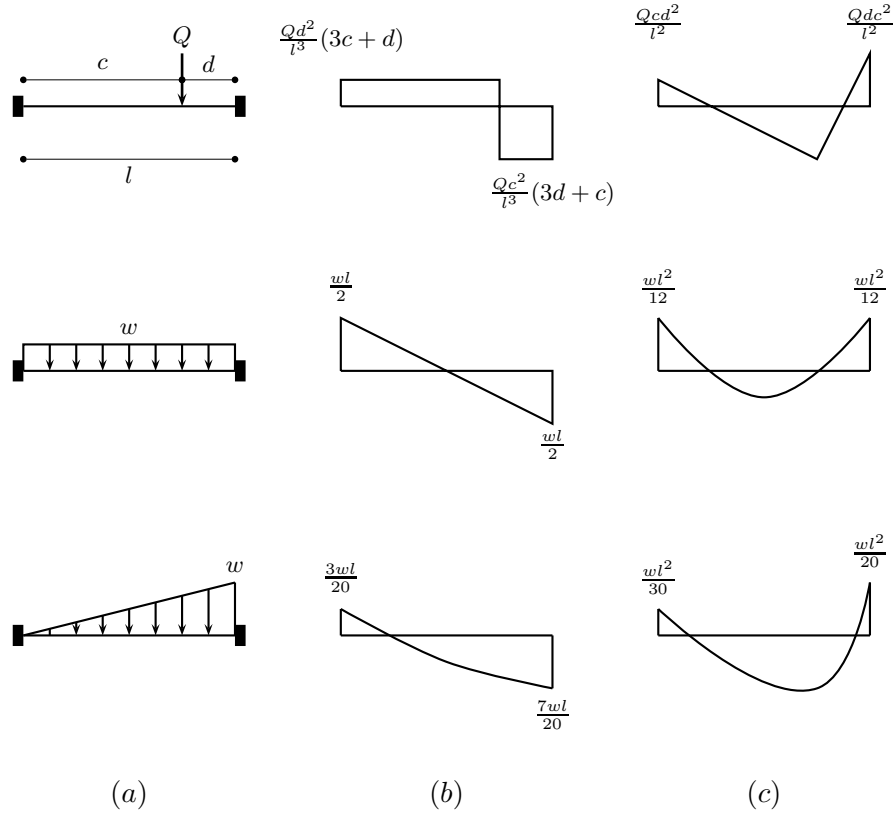


Figura 3.11: Vigas biempotradas. (a) Modelos estructurales. (b) Diagramas de cortante. (c) Diagramas de momento.

$$S = F - R \quad (3.38)$$

Esto significa que, cuando se tienen cargas en el interior de una viga (o columna, en el caso de pórticos), la ecuación matricial (3.33) pasa a ser

$$KD = P - R \quad (3.39)$$

donde R es el vector que reúne todas las reacciones de los elementos biempotrados que tengan cargas en su interior. En el caso, corriente en la práctica, de que en un nodo converjan varios elementos, el vector R se obtiene sumando las contribuciones correspondientes de cada elemento, de la siguiente manera.

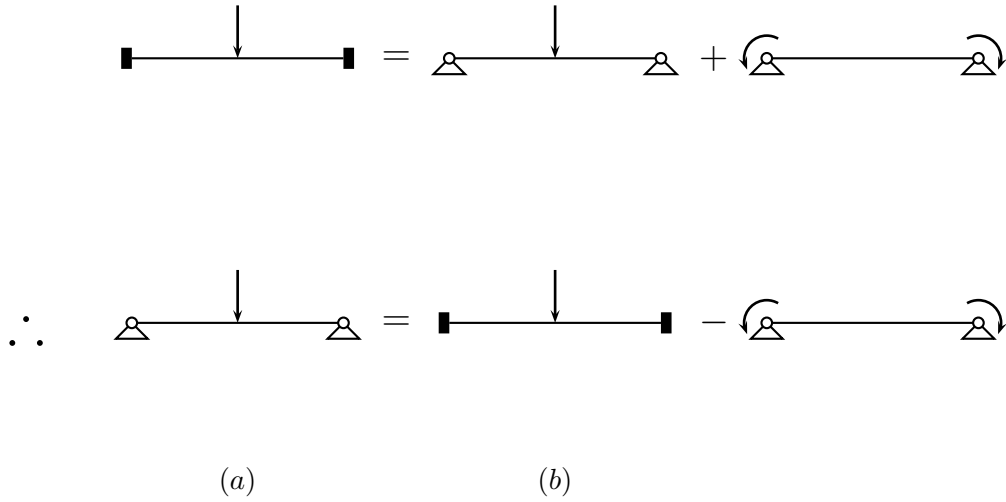


Figura 3.12: (a) Descomposición de una viga biempotrada. (b) Implicaciones para una estructura en general.

Llamemos $\mathbf{r}_e = [\bar{V}_i \quad \bar{M}_i \quad \bar{V}_j \quad \bar{M}_j]^T$ al vector de fuerzas de empotramiento en la numeración local. Por ejemplo, para una viga con carga uniformemente repartida w , de acuerdo con la figura 3.11,

$$\mathbf{r}_e = \begin{pmatrix} \bar{V}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{V}_j \\ \bar{M}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{wl}{2} \\ \frac{wl^2}{12} \\ \frac{wl}{2} \\ -\frac{wl^2}{12} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

En la numeración global, este vector pasa a ser $\Delta \mathbf{R}_e$, con sus cantidades trasladadas desde \mathbf{r}_e según el cuadro de correspondencias. Finalmente, el vector \mathbf{R} se obtiene por superposición:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^m \Delta \mathbf{R}_e \quad (3.41)$$

La solución del problema (3.39) pasa por la partición de las matrices implicadas según los grados de libertad restringidos (tipo a) y no restringidos (tipo b):

$$D_b = K_{bb}^{-1}(P_b - R_b) \quad (3.42)$$

$$P_a = K_{ab}D_b + R_a \quad (3.43)$$

donde R_a resulta de la extracción de los valores correspondientes a los grados de libertad restringidos del vector R . Esta adición se debe realizar ya que el valor $K_{ab}D_b$ sólo obedece a los desplazamientos causados por las cargas en los nodos, pero no tiene en cuenta las cargas en el interior de los elementos.

Finalmente, las fuerzas internas de los elementos se determinan por medio de la ecuación (3.35), a la cual se debe igualmente adicionar el efecto de las cargas en su interior:

$$p_e = k_e d_e + r_e \quad (3.44)$$

La solución de esta clase de problemas se ilustra con el siguiente ejemplo.

3.6. Ejemplo 3.2: Viga de dos vanos

Consideremos la viga biempotrada con un apoyo intermedio que aparece en la figura 3.13. La viga se encuentra sometida a una carga distribuida de 20 kN/m en el primer vano y una concentrada de 40 kN en el segundo. El material tiene un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ y el momento de inercia es $I = 0,1 \text{ m}^4$ en ambos vanos. Se busca calcular los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga.

Comenzaremos por definir las cantidades básicas E, I para los elementos que componen la viga:

```
E=2e7;
```

```
I_1=0.1;
```

```
I_2=0.1;
```

```
l_1=7;
```

```
l_2=5;
```

La matriz de rigidez de los elementos, definida por la ecuación (3.18), es

```
k_1=zeros(4,4);
k_1(1,:)=E*I_1*[12/l_1^3    6/l_1^2 -12/l_1^3    6/l_1^2];
k_1(2,:)=E*I_1*[6/l_1^2    4/l_1 -6/l_1^2    2/l_1];
k_1(3,:)=E*I_1*[-12/l_1^3 -6/l_1^2 12/l_1^3   -6/l_1^2];
k_1(4,:)=E*I_1*[6/l_1^2    2/l_1 -6/l_1^2    4/l_1];
```

```
k_2=zeros(4,4);
k_2(1,:)=E*I_2*[12/l_2^3    6/l_2^2 -12/l_2^3    6/l_2^2];
k_2(2,:)=E*I_2*[6/l_2^2    4/l_2 -6/l_2^2    2/l_2];
k_2(3,:)=E*I_2*[-12/l_2^3 -6/l_2^2 12/l_2^3   -6/l_2^2];
k_2(4,:)=E*I_2*[6/l_2^2    2/l_2 -6/l_2^2    4/l_2];
```

```
k_1 =
```

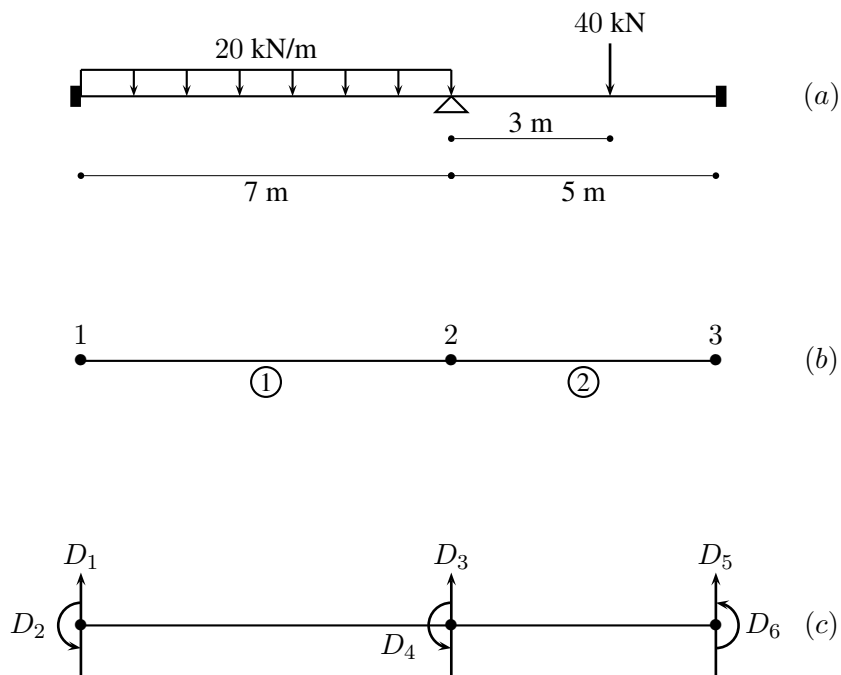


Figura 3.13: Viga continua. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. (c) Numeración de grados de libertad.

1.0e+006 *

0.0700	0.2449	-0.0700	0.2449
0.2449	1.1429	-0.2449	0.5714
-0.0700	-0.2449	0.0700	-0.2449
0.2449	0.5714	-0.2449	1.1429

k_2 =

192000	480000	-192000	480000
480000	1600000	-480000	800000

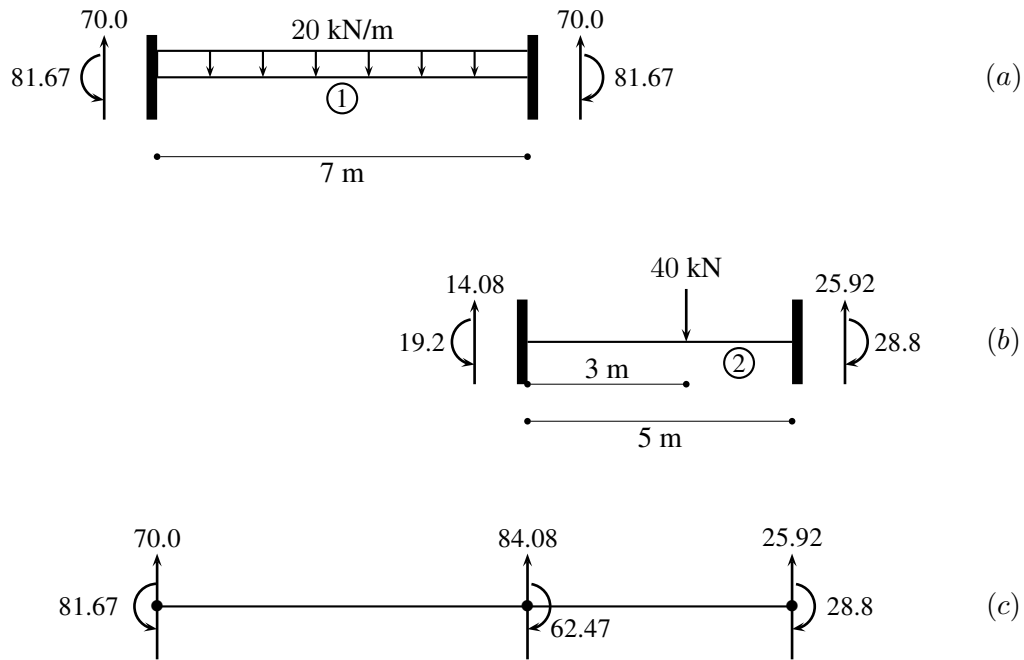


Figura 3.14: Viga continua. (a) Fuerzas de empotramiento en el elemento 1. (b) Fuerzas de empotramiento en el elemento 2. (c) Elementos del vector de fuerzas \mathbf{R} .

```

-192000    -480000    192000    -480000
 480000     800000   -480000    1600000

```

La matriz de rigidez de la estructura resulta del ensamblaje operado de la siguiente manera:

```

K=zeros(6,6);

g_1=[1 2 3 4]';
DeltaK_1=zeros(6,6);
DeltaK_1(g_1,g_1)=k_1;

```

```
K=K+DeltaK_1;
```

```
g_2=[3 4 5 6]';
DeltaK_2=zeros(6,6);
DeltaK_2(g_2,g_2)=k_2;
K=K+DeltaK_2;
```

```
K =
```

```
1.0e+006 *
```

```
0.0700    0.2449   -0.0700    0.2449         0         0
0.2449    1.1429   -0.2449    0.5714         0         0
-0.0700   -0.2449    0.2620    0.2351   -0.1920    0.4800
0.2449    0.5714    0.2351    2.7429   -0.4800    0.8000
         0         0   -0.1920   -0.4800    0.1920   -0.4800
         0         0    0.4800    0.8000   -0.4800    1.6000
```

Calcularemos ahora el vector de fuerzas de empotramiento. Con respecto a la figura 3.11, tenemos:

```
w=20;
```

```
r_1=[w*l_1/2;
      w*l_1^2/12;
      w*l_1/2;
      -w*l_1^2/12];
```

```
Q=40; c=3; d=l_2-c;
```

```
r_2=[Q*d^2*(3*c+d)/l_2^3;
      Q*c*d^2/l_2^2;
      Q*c^2*(3*d+c)/l_2^3;
      -Q*d*c^2/l_2^2];
```

```
r_1 =
```

```
70.0000
81.6667
70.0000
-81.6667
```

```
r_2 =
```

```
14.0800
19.2000
25.9200
-28.8000
```

```

R=zeros(6,1);
DeltaR_1=zeros(6,1);
DeltaR_2=zeros(6,1);

DeltaR_1(g_1)=r_1;
R=R+DeltaR_1;

DeltaR_2(g_2)=r_2;
R=R+DeltaR_2;

R =

    70.0000
    81.6667
    84.0800
   -62.4667
    25.9200
   -28.8000

```

La figura 3.14 ilustra la superposición de las fuerzas de empotramiento, de acuerdo con la ecuación (3.41). Por su parte, el vector de cargas externas es nulo, puesto que no hay cargas aplicadas directamente en los nodos:

```
P=zeros(6,1);
```

Realizaremos la partición de las matrices para resolver el problema. De acuerdo con la numeración de nodos que aparece en la figura 3.13, todos los grados de libertad se encuentran restringidos con excepción del No. 4. Por tanto,

```
a=[1 2 3 5 6]'; b=4;
```

y, en consecuencia,

```

K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P_b=P(b);
R_b=R(b);

```

El desplazamiento del grado de libertad desconocido y las reacciones en los apoyos se obtienen por medio de las ecuaciones (3.42):

```

D_b=K_bb\ (P_b-R_b);
P_a=K_ab*D_b+R(a);

```

```
D=zeros(6,1);
D(b)=D_b;
```

```
D =
```

```
1.0e-004 *
```

```
0
0
0
0.2277
0
0
```

```
P_a =
```

```
75.5774
94.6806
89.4343
14.9883
-10.5806
```

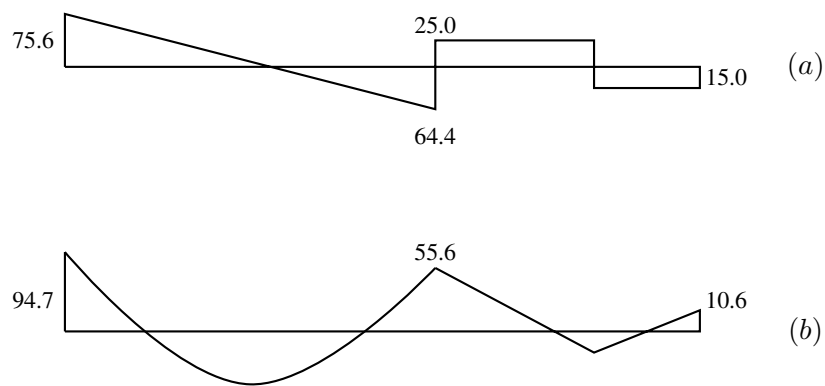


Figura 3.15: Viga continua. (a) Diagrama de cortante. (b) Diagrama de momentos.

Por último, las fuerzas internas en los elementos se determinan por medio de la ecuación (3.44), luego de extraer del vector de desplazamientos la información pertinente para cada elemento:

$$D_1 = D(g_1);$$

$$p_1 = k_1 * D_1 + r_1;$$

$$D_2 = D(g_2);$$

$$p_2 = k_2 * D_2 + r_2;$$

$$p_1 =$$

$$\begin{pmatrix} 75.5774 \\ 94.6806 \\ 64.4226 \\ -55.6389 \end{pmatrix}$$

$$p_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 25.0117 \\ 55.6389 \\ 14.9883 \\ -10.5806 \end{pmatrix}$$

Con este resultado se obtienen fácilmente los diagramas de cortante y momento flector mostrados en la figura 3.15. Se deja como ejercicio al lector evaluar los valores intermedios de los diagramas.

3.7. Simplificación del análisis

En el análisis de vigas, resulta conveniente considerar el hecho de que el desplazamiento vertical de los nodos que la definen se encuentra normalmente restringido. En otras palabras, los grados de libertad ξ_i y ξ_j en la ecuación 3.16 son nulos, lo cual permite escribir una relación simplificada:

$$\begin{pmatrix} M_i \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Con base en esta matriz elemental se procede a ensamblar la matriz de rigidez de la viga continua, en la cual los grados de libertad serán solamente los giros de los apoyos. Evidentemente, esta simplificación impide determinar directamente los cortantes V_i y V_j , los cuales deberán ser obtenidos por medio de las ecuaciones de equilibrio de cada elemento.

3.8. Líneas de influencia

Como es sabido, las líneas de influencia son diagramas que ilustran la variación de una cantidad determinada (normalmente, una fuerza interna) a la variación de la posición de una carga unitaria concentrada. Estas líneas resultan útiles para el análisis de estructuras sometidas a cargas móviles, tales como las vigas de puentes.

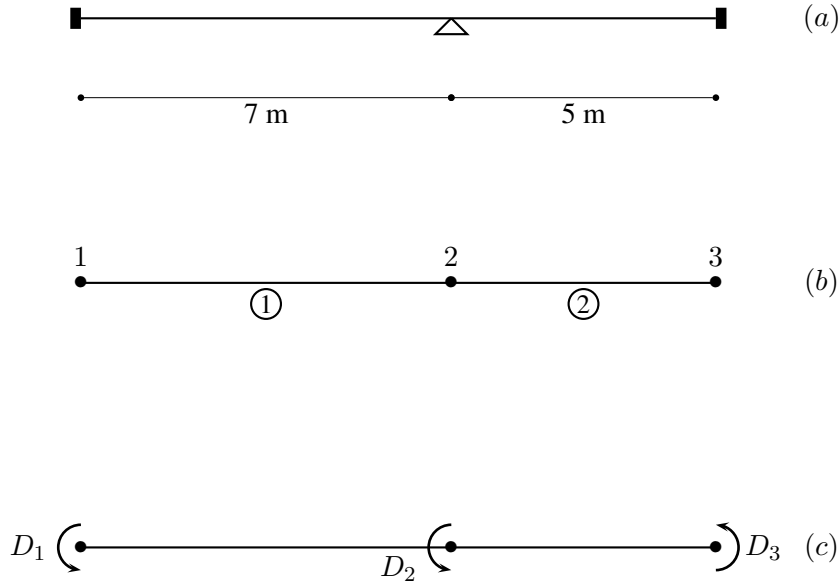


Figura 3.16: Viga continua con un grado de libertad por nodo. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos. (c) Numeración de grados de libertad.

Su cálculo por medio del método matricial se ilustra por medio del siguiente ejemplo. Consideremos la viga mostrada en la figura 3.16. El objetivo es calcular las ecuaciones del momento flector en el apoyo 2, para una carga que recorre la viga desde el extremo izquierdo al derecho. La solución del problema, con un grado de libertad por nodo haciendo uso de la ecuación 3.45, conduce directamente a que la matriz de rigidez del único grado de libertad libre es

$$\mathbf{K}_{bb} = \frac{4EI}{7} + \frac{4EI}{5} = \frac{48EI}{35}$$

a) Carga unitaria en el elemento 1:

Para una carga concentrada unitaria $Q = 1$ a ecuación 3.42 toma aquí la forma

$$\mathbf{K}_{bb}\mathbf{D}_b = -\mathbf{R}_b \quad (3.46)$$

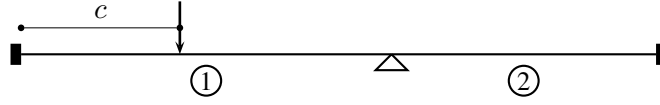


Figura 3.17: Carga unitaria para el cálculo de líneas de influencia en el elemento 1.

es decir,

$$\frac{48EI}{35}\theta_2 = \frac{dc^2}{49}$$

con lo cual

$$\theta_2 = \frac{35}{48EI} \frac{dc^2}{49}$$

El valor del momento en el apoyo se calcula por medio de la ecuación general

$$p_e = k_e d_e + r_e \quad (3.47)$$

cuya forma particular para este caso es

$$M_2(c) = \frac{4EI}{7}\theta_2 - \frac{dc^2}{49}$$

con lo que se obtiene el resultado final

$$M_2(c) = -\frac{(7-c)c^2}{84}$$

que es válido para $0 \leq c \leq 7$.

b) Carga unitaria en el elemento 2:

Al proceder de manera semejante al caso anterior, la ecuación que permite calcular el momento en el apoyo bajo una carga unitaria concentrada en el segundo elemento es

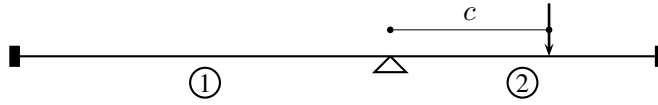


Figura 3.18: Carga unitaria para el cálculo de líneas de influencia en el elemento 2.

$$\frac{48EI}{35}\theta_2 = -\frac{cd^2}{25}$$

es decir,

$$\theta_2 = -\frac{35}{48EI} \frac{cd^2}{25}$$

y por tanto

$$M_2(c) = -\frac{4EI}{5}\theta_2 + \frac{cd^2}{25}$$

$$M_2(c) = \frac{c(5-c)^2}{60}$$

que rige para $0 \leq c \leq 5$.

La figura 3.19 ilustra estos resultados.

3.9. Parrillas

La figura 3.20 muestra un entramado compuesto por vigas entrecruzadas, comúnmente llamado *parrilla*. Es evidente que la aplicación de las cargas mostradas causa tanto flexión como torsión en ellas. Por ello resulta necesario retomar los conceptos esenciales de la teoría de torsión de la Resistencia de Materiales (ver la figura 3.21).

De acuerdo con tal teoría, el giro causado por un par torsor B en una viga como la mostrada en la figura 3.22 es

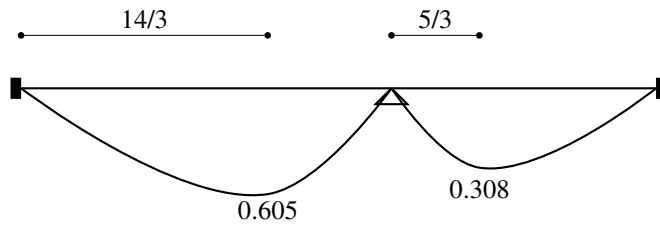


Figura 3.19: Viga continua. Línea de influencia del momento en el apoyo central.

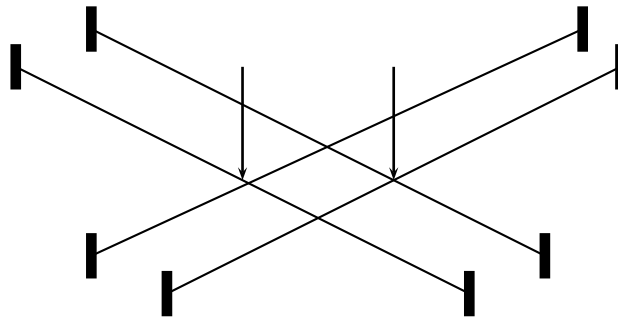


Figura 3.20: Parrilla formada por cuatro vigas empotradas.

$$\phi = \frac{Bl}{GJ} \quad (3.48)$$

donde G es el módulo de rigidez, dado por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.49)$$

En esta expresión ν es el módulo de Poisson. Por su parte J es el módulo transversal, que para secciones circulares es igual al momento polar de inercia, mientras que para secciones rectangulares

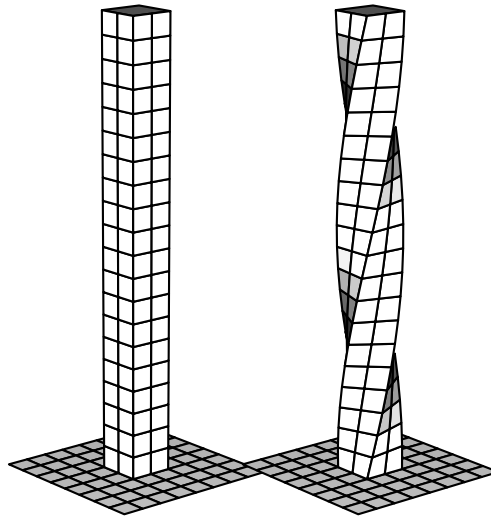


Figura 3.21: Barra sometida a torsión

(más comunes en la práctica) es igual a

$$J = \rho h b^3 \quad (3.50)$$

donde h es la dimensión mayor y b la menor de la sección transversal. El coeficiente ρ se obtiene de la tabla 3.1. Para valores intermedios de h/b , el valor de ρ puede obtenerse por interpolación.

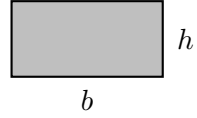
Estas ecuaciones implican que el par torsor y el giro que causa están relacionados por la ecuación

$$B = k\phi \quad (3.51)$$

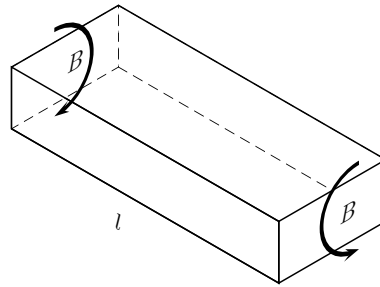
donde la rigidez a torsión k es

$$k = \frac{GJ}{l} \quad (3.52)$$

Ahora bien: en vista de que la torsión es independiente de la flexión (es decir, un giro en torsión no aumenta ni disminuye el giro en flexión, ni viceversa) y, por tanto, es también independiente de la fuerza cortante (la cual es la derivada del momento flector), podemos construir directamente la relación matricial entre fuerzas y desplazamientos, así.



(a)



(b)

Figura 3.22: Viga sometida a torsión. (a) Sección transversal. (b) Par torsor.

$$\begin{pmatrix} B_i \\ V_i \\ M_i \\ B_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \xi_i \\ \theta_i \\ \phi_j \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Cuadro 3.1: Coeficiente del módulo de torsión.

h/b	ρ
1	0.141
2	0.229
3	0.263
4	0.281
6	0.299
8	0.307

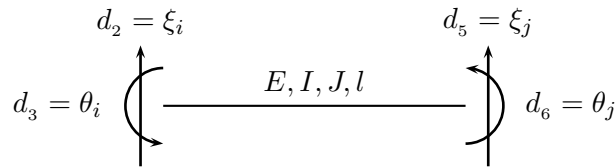


Figura 3.23: Numeración de los grados de libertad de la viga en flexión y torsión.

Esto indica que, para los vectores de desplazamientos y fuerzas, dados por

$$\mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} B_i \\ V_i \\ M_i \\ B_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_e = \begin{pmatrix} \phi_i \\ \xi_i \\ \theta_i \\ \phi_j \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

la matriz de rigidez que los relaciona es

$$k_e = \begin{pmatrix} \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

donde se ha omitido el subíndice e en las propiedades de los elementos en aras de la claridad en la notación. La ecuación matricial es, en consecuencia

$$p_e = k_e d_e \quad (3.56)$$

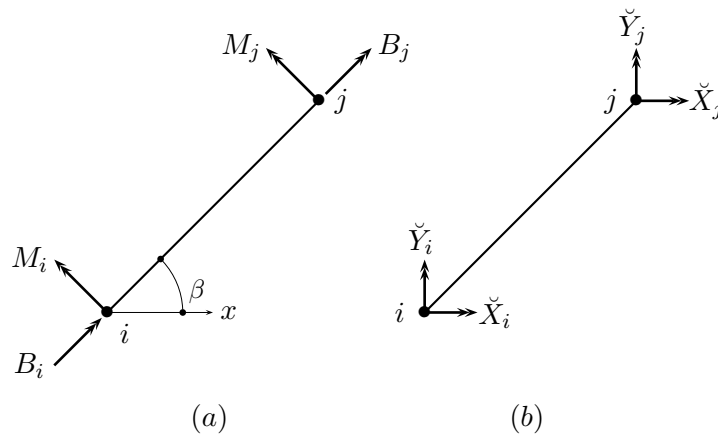


Figura 3.24: Transformación de momentos en un elemento de la parrilla. (a) Sistema local; (b) Sistema global

Una vez definida la matriz de rigidez del elemento, sólo resta deducir la matriz de transformación. A diferencia de las armaduras estudiadas en el capítulo anterior, la transformación no se realiza sobre fuerzas sino sobre momentos, como muestra la figura 3.24. De la analogía con lo deducido en dicho capítulo, se ve inmediatamente que la transformación de fuerzas en sistema global

$$\mathbf{P}_e = \begin{pmatrix} \check{X}_i \\ V_i \\ \check{Y}_i \\ \check{X}_j \\ V_j \\ \check{Y}_j \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

a fuerzas en el sistema local,

$$\mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} B_i \\ V_i \\ M_i \\ B_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

está dada por la matriz de transformación

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \eta & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & \eta \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

de suerte que $\mathbf{p}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{P}_e$.

3.10. Ejemplo 3.3: Parrilla

La figura 3.25 muestra una parrilla compuesta por cuatro vigas empotradas en sus extremos. La estructura está sometida a cuatro cargas verticales concentradas de 120 kN cada una, aplicadas en los cuatro puntos de cruce de las vigas. El material tiene un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ y un módulo de Poisson de 0.15. Las dimensiones de la sección transversal de las vigas son: base, 0.5 m, altura, 1 m. Se busca calcular el vector de desplazamientos de la estructura y los vectores de fuerzas internas.

Como la relación entre la dimensión mayor a la menor de la sección transversal es igual a 2, $\rho = 0,229$. A continuación se presenta la solución completa del problema.

```
% Parrilla
% M\{'o\}dulo de elasticidad:
E=2e7;
% M\{'o\}dulo de Poisson:
```

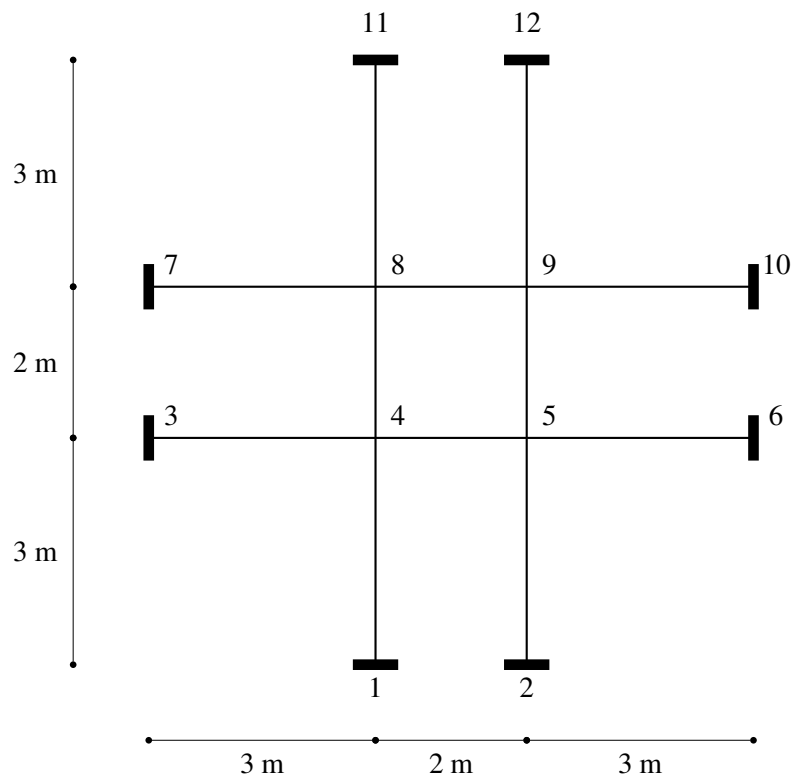


Figura 3.25: Parrilla formada por cuatro vigas empotradas (vista en planta)

```
nu=0.15;
```

```
% M\{'o}dulo de rigidez:
```

```
G=E/(2*(1+nu));
```

```
% \{'Areas, inercias y longitudes:
```

```
A=0.5*1;
```

```
I=0.5*1^3/12;
```

```
J=0.229*1*0.5^3;
```

```
l_1=3;
```

```
l_2=2;
```

```
l_3=3;
```

```
l_4=3;
```

```

l_5=2;
l_6=3;
l_7=3;
l_8=2;
l_9=3;
l_10=3;
l_11=2;
l_12=3;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=zeros(6,6);
l=l_1;

k_1(1,:)=G*J*[ 1/l      0      0     -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0     12/l^3     6/l^2      0    -12/l^3     6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0     6/l^2     4/l      0    -6/l^2     2/l];
k_1(4,:)=G*J*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0    -12/l^3    -6/l^2      0     12/l^3    -6/l^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0     6/l^2     2/l      0    -6/l^2     4/l];

k_2=zeros(6,6);
l=l_2;

k_2(1,:)=G*J*[ 1/l      0      0     -1/l      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0     12/l^3     6/l^2      0    -12/l^3     6/l^2];
k_2(3,:)=E*I*[ 0     6/l^2     4/l      0    -6/l^2     2/l];
k_2(4,:)=G*J*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0    -12/l^3    -6/l^2      0     12/l^3    -6/l^2];
k_2(6,:)=E*I*[ 0     6/l^2     2/l      0    -6/l^2     4/l];

k_3=zeros(6,6);
l=l_3;

k_3(1,:)=G*J*[ 1/l      0      0     -1/l      0      0];
k_3(2,:)=E*I*[ 0     12/l^3     6/l^2      0    -12/l^3     6/l^2];
k_3(3,:)=E*I*[ 0     6/l^2     4/l      0    -6/l^2     2/l];
k_3(4,:)=G*J*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_3(5,:)=E*I*[ 0    -12/l^3    -6/l^2      0     12/l^3    -6/l^2];
k_3(6,:)=E*I*[ 0     6/l^2     2/l      0    -6/l^2     4/l];

k_4=zeros(6,6);
l=l_4;

k_4(1,:)=G*J*[ 1/l      0      0     -1/l      0      0];
k_4(2,:)=E*I*[ 0     12/l^3     6/l^2      0    -12/l^3     6/l^2];
k_4(3,:)=E*I*[ 0     6/l^2     4/l      0    -6/l^2     2/l];
k_4(4,:)=G*J*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_4(5,:)=E*I*[ 0    -12/l^3    -6/l^2      0     12/l^3    -6/l^2];
k_4(6,:)=E*I*[ 0     6/l^2     2/l      0    -6/l^2     4/l];

k_5=zeros(6,6);
l=l_5;

```

```

k_5(1,:) = G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_5(2,:) = E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];
k_5(3,:) = E*I*[ 0      6/1^2      4/1      0      -6/1^2      2/1];
k_5(4,:) = G*J*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_5(5,:) = E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_5(6,:) = E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];

k_6=zeros(6,6);
l=l_6;

k_6(1,:) = G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_6(2,:) = E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];
k_6(3,:) = E*I*[ 0      6/1^2      4/1      0      -6/1^2      2/1];
k_6(4,:) = G*J*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_6(5,:) = E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_6(6,:) = E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];

k_7=zeros(6,6);
l=l_7;

k_7(1,:) = G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_7(2,:) = E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];
k_7(3,:) = E*I*[ 0      6/1^2      4/1      0      -6/1^2      2/1];
k_7(4,:) = G*J*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_7(5,:) = E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_7(6,:) = E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];

k_8=zeros(6,6);
l=l_8;

k_8(1,:) = G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_8(2,:) = E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];
k_8(3,:) = E*I*[ 0      6/1^2      4/1      0      -6/1^2      2/1];
k_8(4,:) = G*J*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_8(5,:) = E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_8(6,:) = E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];

k_9=zeros(6,6);
l=l_9;

k_9(1,:) = G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_9(2,:) = E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];
k_9(3,:) = E*I*[ 0      6/1^2      4/1      0      -6/1^2      2/1];
k_9(4,:) = G*J*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_9(5,:) = E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_9(6,:) = E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];

k_10=zeros(6,6);
l=l_10;

k_10(1,:) = G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_10(2,:) = E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];

```

```

k_10(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2    4/1      0    -6/1^2    2/1];
k_10(4,:)=G*J*[-1/1     0        0      1/1     0        0];
k_10(5,:)=E*I*[ 0    -12/1^3   -6/1^2    0     12/1^3   -6/1^2];
k_10(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2    2/1      0    -6/1^2    4/1];

```

```

k_11=zeros(6,6);
l=l_11;

```

```

k_11(1,:)=G*J*[ 1/1     0        0    -1/1     0        0];
k_11(2,:)=E*I*[ 0     12/1^3    6/1^2    0    -12/1^3    6/1^2];
k_11(3,:)=E*I*[ 0     6/1^2    4/1     0    -6/1^2    2/1];
k_11(4,:)=G*J*[-1/1     0        0    1/1     0        0];
k_11(5,:)=E*I*[ 0    -12/1^3   -6/1^2    0     12/1^3   -6/1^2];
k_11(6,:)=E*I*[ 0     6/1^2    2/1     0    -6/1^2    4/1];

```

```

k_12=zeros(6,6);
l=l_12;

```

```

k_12(1,:)=G*J*[ 1/1     0        0    -1/1     0        0];
k_12(2,:)=E*I*[ 0     12/1^3    6/1^2    0    -12/1^3    6/1^2];
k_12(3,:)=E*I*[ 0     6/1^2    4/1     0    -6/1^2    2/1];
k_12(4,:)=G*J*[-1/1     0        0    1/1     0        0];
k_12(5,:)=E*I*[ 0    -12/1^3   -6/1^2    0     12/1^3   -6/1^2];
k_12(6,:)=E*I*[ 0     6/1^2    2/1     0    -6/1^2    4/1];

```

% Matriz de rigidez de la estructura:

```

K=zeros(36,36);

g_1=[7 8 9 10 11 12];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1=[ eta 0 mu 0 0 0;...
      0 1 0 0 0 0;...
     -mu 0 eta 0 0 0;...
      0 0 0 eta 0 mu;...
      0 0 0 0 1 0;...
      0 0 0 -mu 0 eta];...
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(36,36);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

```

```

g_2=[10 11 12 13 14 15];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2=[ eta 0 mu 0 0 0;...
      0 1 0 0 0 0;...
     -mu 0 eta 0 0 0;...
      0 0 0 eta 0 mu;...
      0 0 0 0 1 0;...
      0 0 0 -mu 0 eta];...

```

```

K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(36,36);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[13 14 15 16 17 18];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta 0 mu 0 0 0;...
       0 1 0 0 0 0;...
      -mu 0 eta 0 0 0;...
       0 0 0 eta 0 mu;...
       0 0 0 0 1 0;...
       0 0 0 -mu 0 eta];...
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(36,36);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

g_4=[19 20 21 22 23 24];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_4= [ eta 0 mu 0 0 0;...
       0 1 0 0 0 0;...
      -mu 0 eta 0 0 0;...
       0 0 0 eta 0 mu;...
       0 0 0 0 1 0;...
       0 0 0 -mu 0 eta];...
K_4=T_4'*k_4*T_4;
DeltaK_4=zeros(36,36);
DeltaK_4(g_4,g_4)=K_4;
K=K+DeltaK_4;

g_5=[22 23 24 25 26 27];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_5= [ eta 0 mu 0 0 0;...
       0 1 0 0 0 0;...
      -mu 0 eta 0 0 0;...
       0 0 0 eta 0 mu;...
       0 0 0 0 1 0;...
       0 0 0 -mu 0 eta];...
K_5=T_5'*k_5*T_5;
DeltaK_5=zeros(36,36);
DeltaK_5(g_5,g_5)=K_5;
K=K+DeltaK_5;

g_6=[25 26 27 28 29 30];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_6= [ eta 0 mu 0 0 0;...
       0 1 0 0 0 0;...
      -mu 0 eta 0 0 0;...

```

```

    0    0    0    eta    0    mu;...
    0    0    0    0    1    0;...
    0    0    0   -mu    0    eta];...
K_6=T_6'*k_6*T_6;
DeltaK_6=zeros(36,36);
DeltaK_6(g_6,g_6)=K_6;
K=K+DeltaK_6;

g_7=[1 2 3 10 11 12];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_7= [ eta    0    mu    0    0    0;...
       0    1    0    0    0    0;...
       -mu    0    eta    0    0    0;...
       0    0    0    eta    0    mu;...
       0    0    0    0    1    0;...
       0    0    0   -mu    0    eta];...
K_7=T_7'*k_7*T_7;
DeltaK_7=zeros(36,36);
DeltaK_7(g_7,g_7)=K_7;
K=K+DeltaK_7;

g_8=[10 11 12 22 23 24];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_8= [ eta    0    mu    0    0    0;...
       0    1    0    0    0    0;...
       -mu    0    eta    0    0    0;...
       0    0    0    eta    0    mu;...
       0    0    0    0    1    0;...
       0    0    0   -mu    0    eta];...
K_8=T_8'*k_8*T_8;
DeltaK_8=zeros(36,36);
DeltaK_8(g_8,g_8)=K_8;
K=K+DeltaK_8;

g_9=[22 23 24 31 32 33];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_9= [ eta    0    mu    0    0    0;...
       0    1    0    0    0    0;...
       -mu    0    eta    0    0    0;...
       0    0    0    eta    0    mu;...
       0    0    0    0    1    0;...
       0    0    0   -mu    0    eta];...
K_9=T_9'*k_9*T_9;
DeltaK_9=zeros(36,36);
DeltaK_9(g_9,g_9)=K_9;
K=K+DeltaK_9;

g_10=[4 5 6 13 14 15];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);

```



```

T_10= [ eta  0   mu   0   0   0;...
        0   1   0   0   0   0;...
       -mu   0   eta   0   0   0;...
        0   0   0   eta  0   mu;...
        0   0   0   0   1   0;...
        0   0   0  -mu   0   eta];...
K_10=T_10'*k_10*T_10;
DeltaK_10=zeros(36,36);
DeltaK_10(g_10,g_10)=K_10;
K=K+DeltaK_10;

g_11=[13 14 15 25 26 27];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_11= [ eta  0   mu   0   0   0;...
        0   1   0   0   0   0;...
       -mu   0   eta   0   0   0;...
        0   0   0   eta  0   mu;...
        0   0   0   0   1   0;...
        0   0   0  -mu   0   eta];...
K_11=T_11'*k_11*T_11;
DeltaK_11=zeros(36,36);
DeltaK_11(g_11,g_11)=K_11;
K=K+DeltaK_11;

g_12=[25 26 27 34 35 36];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_12= [ eta  0   mu   0   0   0;...
        0   1   0   0   0   0;...
       -mu   0   eta   0   0   0;...
        0   0   0   eta  0   mu;...
        0   0   0   0   1   0;...
        0   0   0  -mu   0   eta];...
K_12=T_12'*k_12*T_12;
DeltaK_12=zeros(36,36);
DeltaK_12(g_12,g_12)=K_12;
K=K+DeltaK_12;

display(K)

% C\{a}lculo de desplazamientos y reacciones:

a=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 16 17 18 19 20 21 28 29 30 31 32 33 34 35 36]';
b=[10 11 12 13 14 15 22 23 24 25 26 27]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(36,1);
P(11)=-120;
P(14)=-120;

```

```

P(23)=-120;
P(26)=-120;
P_b=P(b);
D_b=K_bb\ P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(36,1);
D(b)=D_b;

display(D)

% Torsiones, cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2;

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

D_4=D(g_4);
p_4=k_4*T_4*D_4;

D_5=D(g_5);
p_5=k_5*T_5*D_5;

D_6=D(g_6);
p_6=k_6*T_6*D_6;

D_7=D(g_7);
p_7=k_7*T_7*D_7;

D_8=D(g_8);
p_8=k_8*T_8*D_8;

D_9=D(g_9);
p_9=k_9*T_9*D_9;

D_10=D(g_10);
p_10=k_10*T_10*D_10;

D_11=D(g_11);
p_11=k_11*T_11*D_11;

D_12=D(g_12);
p_12=k_12*T_12*D_12;

display([p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 p_9 p_10 p_11 p_12])

```

Capítulo 4

Pórticos planos

4.1. Matriz de rigidez de un elemento de pórtico

La figura 4.1 muestra un pórtico típico compuesto por vigas y columnas sometido a la acción de cargas de gravedad (normalmente distribuídas de manera uniforme) y sísmicas (normalmente crecientes hacia arriba). Las uniones entre elementos permiten la transmisión de fuerzas horizontales, verticales y momentos. En este tipo de estructuras, el grado de indeterminación estática está dado por

$$h = 3m + r - 3j \quad (4.1)$$

donde m es el número de elementos articulados, r el número de reacciones en los apoyos y j el número de nodos.

Con base en lo expuesto en el capítulo anterior, deduciremos a continuación la matriz de un elemento de sección constante caracterizado por un módulo de elasticidad E , momento de inercia I y longitud l . Nótese que, con respecto al elemento usado en el capítulo anterior para una viga, tenemos ahora la presencia de fuerza axiales N_i y N_j , que se agregan a las fuerzas V_i, M_i, V_j y M_j . La ecuación matricial correspondiente a las nuevas fuerzas N_i y N_j es

$$\begin{pmatrix} N_i \\ N_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

mientras que la propia de las fuerzas restantes es

$$\begin{pmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \theta_i \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Al reunir ambas expresiones en una sola ecuación obtenemos:

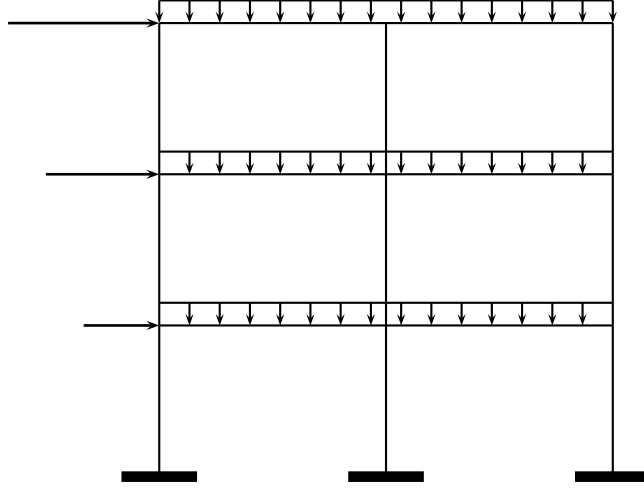


Figura 4.1: Pórtico de dos vanos y tres pisos sometido a la acción de cargas de gravedad y sísmicas.

$$\begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \xi_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Esto indica que, para los vectores de desplazamientos y fuerzas, dados por

$$\mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_e = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \xi_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

la matriz de rigidez que los relaciona es

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

donde se ha omitido el subíndice e en las propiedades de los elementos en aras de la claridad en la notación. La ecuación matricial es, en consecuencia

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (4.7)$$

Consideremos ahora la situación general en la que el elemento tiene un ángulo de inclinación β con respecto a la horizontal (figura 4.2). Al tener en cuenta las deducciones de transformación de fuerzas realizadas en el capítulo 2 y recordando que el vector de momentos es libre (lo cual implica que $M_i = Z_i$ y $M_j = Z_j$), se tiene que la matriz de transformación entre los sistemas de fuerzas local y global mostrados en la figura es

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \eta & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

donde, como de costumbre, $\eta \equiv \cos \beta$ y $\mu \equiv \sin \beta$, con sus valores dados por

$$\eta = \frac{x_j - x_i}{l_e} \quad (4.9)$$

$$\mu = \frac{y_j - y_i}{l_e} \quad (4.10)$$

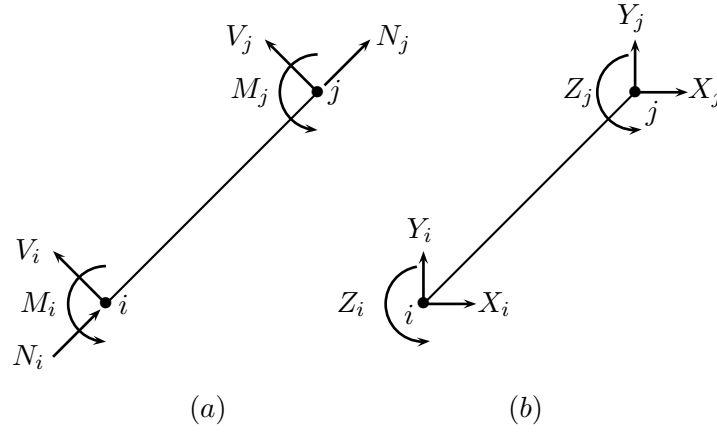


Figura 4.2: Fuerzas internas en un elemento de pórtico. (a) Sistema local; (b) sistema global.

En consecuencia, la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales se obtiene por la operación ya conocida:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \quad (4.11)$$

Consideremos los siguientes casos particulares:

1. Vigas de orientación horizontal ($\beta = 0$). En este caso, la matriz de rigidez en coordenadas globales es igual a la matriz en coordenadas locales, puesto que $\mathbf{T}_e = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{k}_e \quad (4.12)$$

2. Columnas verticales con numeración de nodos de abajo hacia arriba ($\beta = 90^\circ$). En este caso, $\eta = 0$, $\mu = 1$ y la ecuación (4.11) da como resultado

$$K_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

3. Columnas verticales con numeración de nodos de arriba hacia abajo ($\beta = -90^\circ$). En este caso, $\eta = 0$, $\mu = -1$ y la ecuación (4.11) da como resultado

$$K_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Como se ha explicado en los capítulos anteriores, los elementos de esta matriz deben ser colocados en una matriz ΔK_e , de tamaño $n \times n$, donde n es el número de grados de libertad, de acuerdo con el cuadro de correspondencias entre las numeraciones local y global. La matriz de rigidez del pórtico será entonces

$$K = \sum_{e=1}^m \Delta K_e \quad (4.15)$$

donde m es el número de elementos. Esta matriz relaciona las fuerzas y desplazamientos en el sistema global de coordenadas:

$$KD = P - R \quad (4.16)$$

Una vez resuelto el problema de desplazamientos, las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas de cada elemento (es decir, axiales, cortantes y momentos) se calculan por medio de las ecuaciones generales deducidas en los capítulos anteriores:

$$\begin{aligned}
 D_b &= K_{bb}^{-1}(P_b - R_b) \\
 P_a &= K_{ab}D_b + R_a \\
 d_e &= T_e D_e \\
 p_e &= k_e d_e + r_e = k_e d_e + r_e
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde R_a resulta de la extracción de los valores correspondientes a los grados de libertad restringidos del vector R y D_e de una extracción similar de los desplazamientos de los grados de libertad del elemento desde el vector D .

Para el dibujo de los diagramas de fuerzas internas se ha de definir una fibra de referencia. Normalmente se toma la fibra inferior para las vigas y la derecha para las columnas. Al igual que en las vigas, se define como positivo el momento flector que causa tracción en la fibra de referencia y el cortante que produce un par de giro en el sentido de las agujas del reloj. En cuanto a las tensiones axiales, se define como positiva la tracción y negativa la compresión. Por otra parte, para el dibujo del diagrama de momentos normalmente se ponen del lado de la fibra de referencia los momentos positivos y del lado contrario los negativos, ya que esto permite trazar con claridad la elástica de la viga y comprender el patrón de agrietamiento, inevitable en estructuras de materiales frágiles a la tracción como el concreto. En cuanto a los otros dos diagramas, las convenciones de dibujo son arbitrarias. Basta con colocar el signo en ellos.

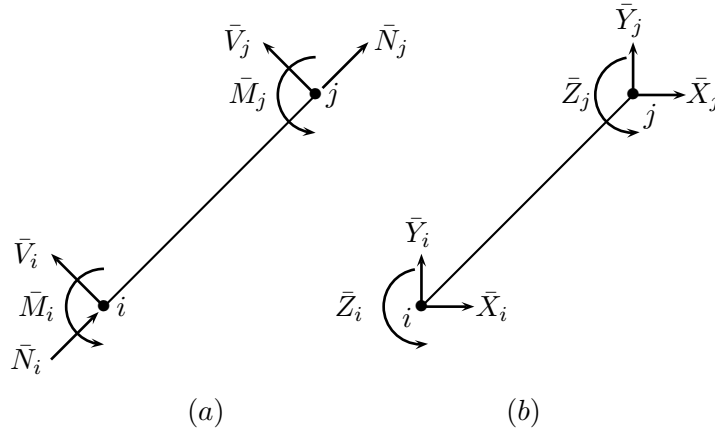


Figura 4.3: Fuerzas de empotramiento de un elemento de pórtico. (a) Sistema local (fuerzas r_e); (b) sistema global (fuerzas R_e)

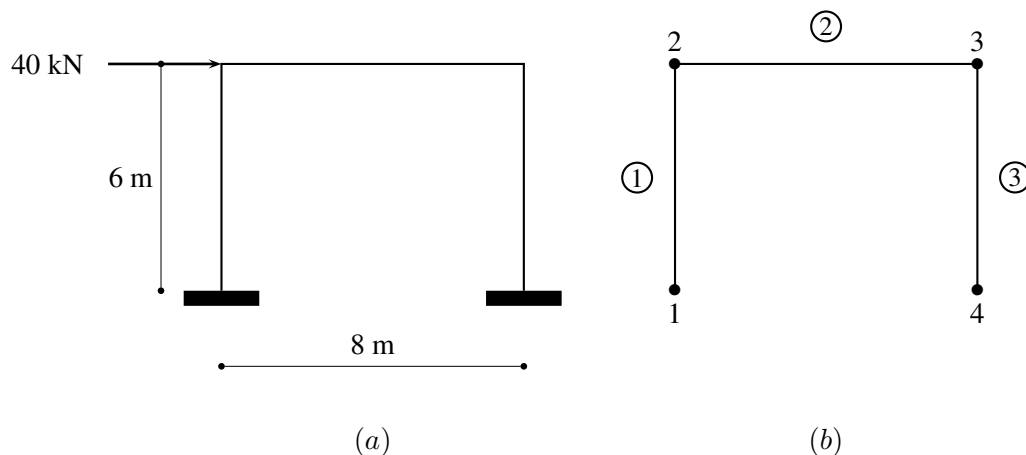


Figura 4.4: Pórtico sometido a una carga horizontal. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.

4.2. Ejemplo 4.1: Pórtico con carga horizontal

La figura 4.4 muestra un pórtico de acero sometido a una carga horizontal de 40 kN aplicada en la parte superior. El módulo de elasticidad del material es $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$. El área seccional de los elementos es $A = 0,0252 \text{ m}^2$ y el momento de inercia $I = 0,0014 \text{ m}^4$. Mostraremos a continuación todos los pasos necesarios para calcular con MATLAB los diagramas de fuerzas axiales y cortantes así como el de momento flector. Comenzamos por numerar los elementos y nodos, como muestra la figura, y definir las cantidades básicas:

```
E=2e8;
A=0.0252;
I=0.0014;
l_1=6;
l_2=8;
l_3=6;
```

Con base en esta información calculamos las matrices de rigidez en coordenadas locales:

```
k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0     -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0     -12/l^3      6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_1(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0     -12/l^3     -6/l^2      0      12/l^3     -6/l^2];
```

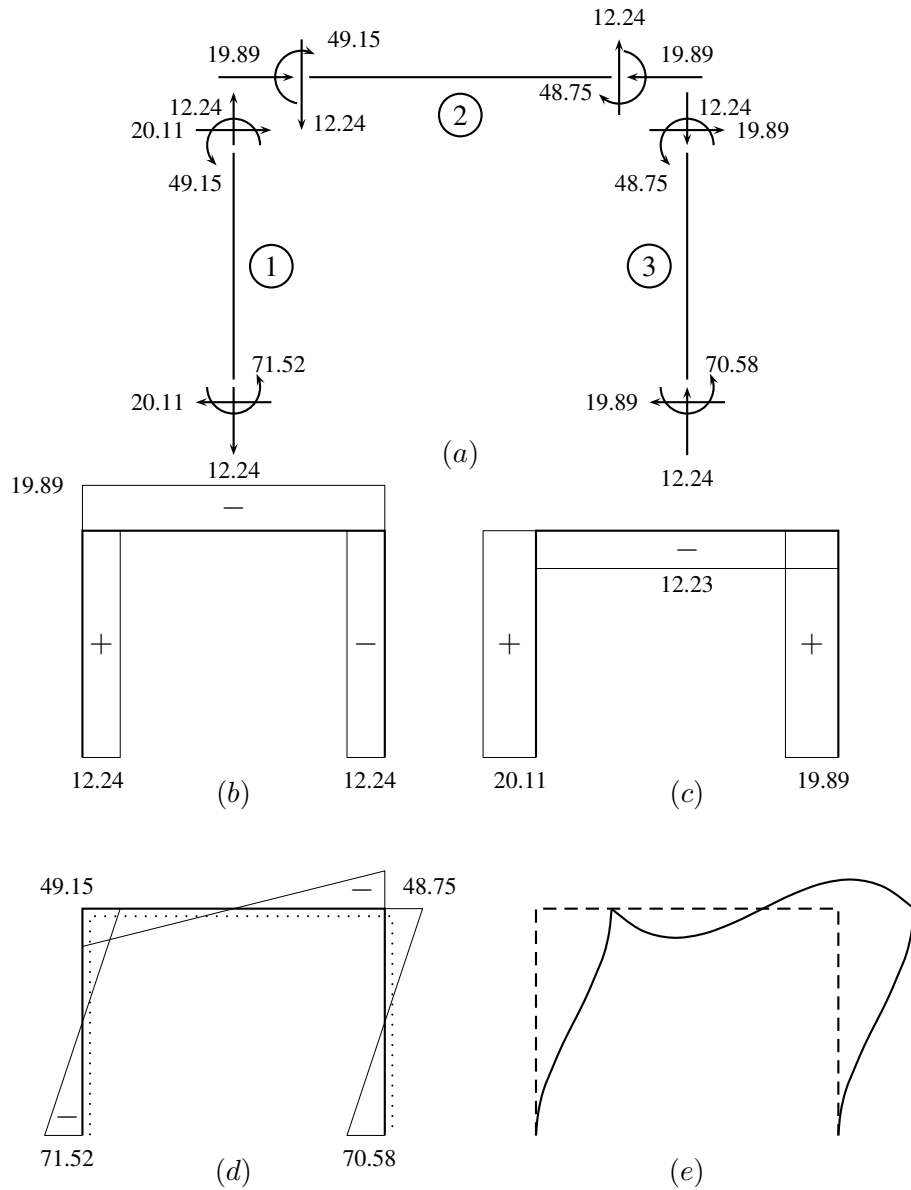


Figura 4.5: Diagramas de fuerzas internas del pórtico sometido a carga lateral. (a) Fuerzas internas de cada elemento. (b) Diagrama de fuerzas axiales. (c) Diagrama de cortantes. (d) Diagrama de momentos. (e) Elástica.

$$k_1(6,:) = E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6/l^2 & 2/l & 0 & -6/l^2 & 4/l \end{bmatrix};$$

```

k_2=zeros(6,6);
l=l_2;
k_2(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_2(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_2(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_2(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

k_3=zeros(6,6);
l=l_3;
k_3(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_3(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_3(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_3(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_3(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_3(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

```

La matriz de rigidez de la estructura se forma bajo la consideración de los grados de libertad de cada elemento en la numeración global mostrada en la figura 4.4:

```

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4 5 6];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[4 5 6 7 8 9];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[7 8 9 10 11 12];

```

```

beta=-90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta  mu  0  0  0  0;...
      -mu  eta  0  0  0  0;...
       0   0  1  0  0  0;...
       0   0  0  eta mu  0;...
       0   0  0 -mu  eta  0;...
       0   0  0  0  0  1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

```

Como de costumbre, la solución del problema de desplazamientos requiere la partición de las matrices según los grados de libertad fijos y móviles:

```

a=[1 2 3 10 11 12]'; b=[4 5 6 7 8 9]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=[0 0 0 40 0 0 0 0 0 0 0 0]';
P_b=P(b);
D_b=K_bb\P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;

```

El vector de desplazamientos resulta ser, en consecuencia,

D =

```

      0
      0
      0
  0.0020
  0.0000
 -0.0002
  0.0020
 -0.0000
 -0.0002
      0
      0
      0

```

El cálculo de las fuerzas axiales y cortantes y los momentos en las barras se realiza por medio de la ecuación (4.17):

```

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2;

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

P_1=K_1*D_1;
P_2=K_2*D_2;
P_3=K_3*D_3;

display([p_1 P_1])

ans =

    -12.2380    -20.1116
     20.1116   -12.2380
     71.5169     71.5169
     12.2380     20.1116
    -20.1116     12.2380
     49.1527     49.1527

display([p_2 P_2])

ans =

     19.8884     19.8884
    -12.2380    -12.2380
    -49.1527    -49.1527
    -19.8884    -19.8884
     12.2380     12.2380
    -48.7509    -48.7509

display([p_3 P_3])

ans =

     12.2380     19.8884
     19.8884    -12.2380
     48.7509     48.7509
    -12.2380    -19.8884
    -19.8884     12.2380
     70.5794     70.5794

```

Este resultado se muestra en la figura 4.5(a), en la que los signos de las cantidades son indicados por medio de las direcciones correspondientes. Obsérvese que para cada elemento los valores aparecen siempre en el orden indicado por la ecuación (4.5), es decir, $N_i, V_i, M_i, N_j, V_j, M_j$. Nótese la diferencia entre los signos y las posiciones de los valores entre \mathbf{p}_e y \mathbf{P}_e . En el primer caso, el orden

es el de fuerza axial, cortante y momento, mientras que en el segundo es fuerza horizontal, vertical y momento, ambos en cada nodo. Igualmente, puede observarse que las leyes de equilibrio se cumplen perfectamente. Esto es, al volver a unir los elementos separados en la figura 4.5(a) todas las fuerzas se anulan mutuamente, excepto las fuerzas en el nodo 2, cuya suma es $20,11 + 19,89 = 40$, que es igual a la fuerza externa aplicada.

4.3. Elementos cargados en el interior

Si hay miembros con cargas en su interior, se debe usar la ecuación modificada

$$KD = P - R \quad (4.18)$$

donde la matriz R reúne las fuerzas de empotramiento de todos los elementos en coordenadas generales. Como se explicó en el capítulo anterior, la contribución ΔR_e del elemento e en coordenadas generales se obtiene aplicando el cuadro de correspondencias a las fuerzas de empotramiento del elemento. En el caso general de elementos inclinados, sin embargo, se debe realizar previamente la transformación de fuerzas indicada en la figura 4.3:

$$R_e = \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \\ \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \\ \bar{Z}_j \end{pmatrix} = T_e^T r_e \quad (4.19)$$

donde $r_e = [\bar{N}_i \ \bar{V}_i \ \bar{M}_i \ \bar{N}_j \ \bar{V}_j \ \bar{M}_j]^T$ es el vector de fuerzas de empotramiento en la numeración local. La contribución ΔR_e del elemento e en coordenadas generales se obtiene aplicando el cuadro de correspondencias a las fuerzas de empotramiento del elemento en coordenadas generales R_e :

$$R = \sum_{i=1}^m \Delta R_e \quad (4.20)$$

Una vez calculado el vector de desplazamientos generales D por la manera ya conocida, se extraen de él los desplazamientos propios de cada elemento e (esto es, el vector D_e) y se calculan las fuerzas internas, definidas en la ecuación (4.5), reuniendo las deducciones realizadas en los capítulos anteriores:

$$p_e = k_e d_e + r_e \quad (4.21)$$

4.4. Ejemplo 4.2: Pórtico con carga distribuida

Analizaremos ahora el mismo pórtico del ejemplo anterior, pero sometido esta vez a una carga distribuida en la viga, de valor 20 kN/m, como se muestra en la figura 4.6. El vector de fuerzas de empotramiento se calcula como sigue:

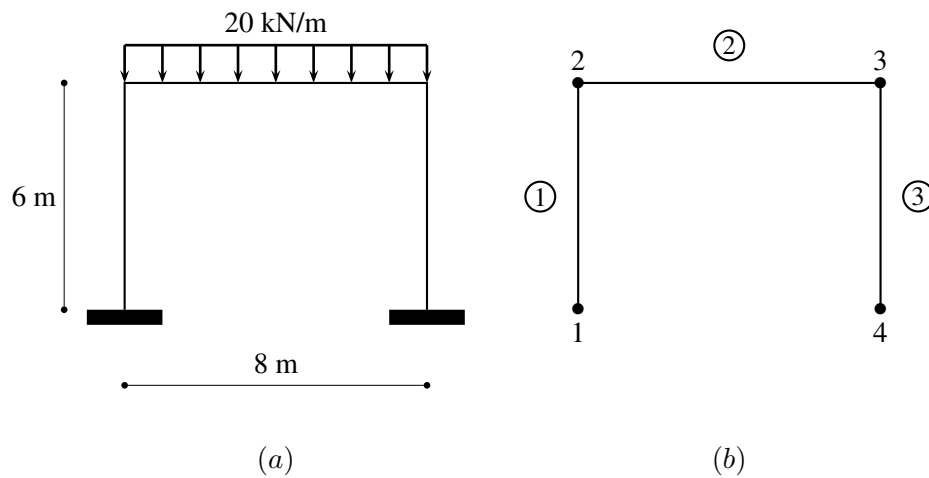


Figura 4.6: Pórtico sometido a una carga vertical distribuida uniformemente. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.

```
w=20;
r_2=[0;
     w*l_2/2;
     w*l_2^2/12;
     0;
     w*l_2/2;
     -w*l_2^2/12];
```

Como la viga está orientada según el eje horizontal, no es necesario realizar transformación de coordenadas para obtener el vector \mathbf{R} :

```
R_2=r_2;
g_2=[4 5 6 7 8 9];
DeltaR_2=zeros(12,1);
DeltaR_2(g_2)=R_2;
R=DeltaR_2;
```

Una vez realizada la partición de las matrices, el problema de desplazamientos y reacciones en los apoyos se resuelve por medio de la ecuación (4.17):

```
D_b=K_bb \ (P_b-R_b);
```

```
D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;

P_a=K_ab*D_b+R(a);
```

lo que da como resultado

```
D =

1.0e-003 *

     0
     0
     0
    0.0153
   -0.0952
   -0.4184
   -0.0153
   -0.0952
    0.4184
     0
     0
     0
```

```
P_a =

19.2857
80.0000
-38.3333
-19.2857
80.0000
38.3333
```

Finalmente, las fuerzas internas en los elementos se obtienen así:

```
D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2+r_2;

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

P_1=K_1*D_1;
P_2=K_2*D_2+R_2;
P_3=K_3*D_3;

display([p_1 P_1])

ans =
```

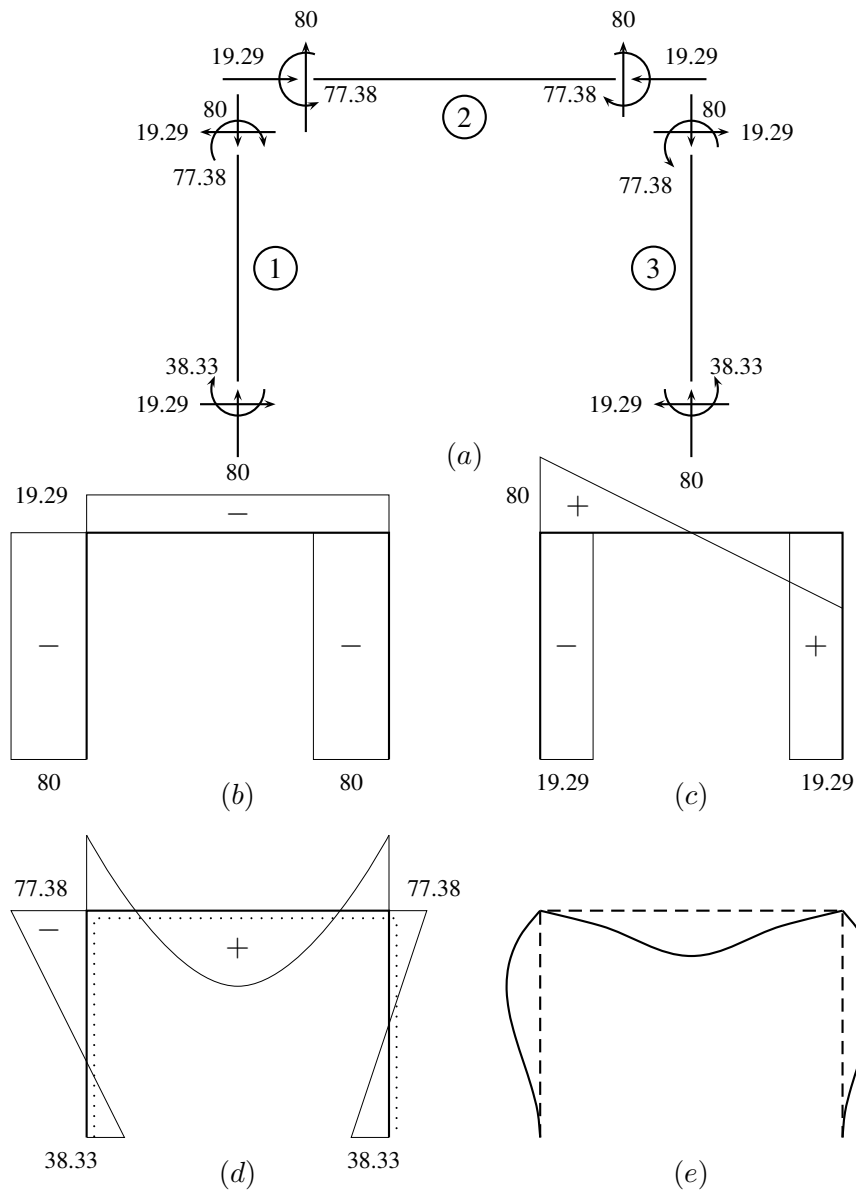



Figura 4.7: Diagramas de fuerzas internas del pórtico sometido a carga vertical distribuida uniformemente. (a) Fuerzas internas de cada elemento. (b) Diagrama de fuerzas axiales. (c) Diagrama de cortantes. (d) Diagrama de momentos. (e) Elástica.

```

-19.2857    80.0000
-38.3333   -38.3333
-80.0000   -19.2857
 19.2857   -80.0000
-77.3810   -77.3810

```

```
display([p_2 P_2])
```

```
ans =
```

```

19.2857    19.2857
80.0000    80.0000
77.3810    77.3810
-19.2857   -19.2857
80.0000    80.0000
-77.3810   -77.3810

```

```
display([p_3 P_3])
```

```
ans =
```

```

80.0000    19.2857
19.2857   -80.0000
77.3810    77.3810
-80.0000   -19.2857
-19.2857    80.0000
38.3333    38.3333

```

Queda como ejercicio al lector comprobar estos resultados, comprobar el equilibrio en los niveles de nodos, elementos y estructural y generar los diagramas que aparecen en la figura 4.7.

4.5. Ejemplo 4.3: Pórtico con carga vertical asimétrica

La figura 4.8 muestra el mismo pórtico analizado en los ejemplos anteriores, esta vez sometido a la acción de una carga vertical asimétrica de 160 kN.

Según lo indicado en el capítulo anterior, las fuerzas de empotramiento son

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \bar{N}_2 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{N}_3 \\ \bar{V}_3 \\ \bar{M}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Qd^2(3c+d)}{l^3} \\ \frac{Qcd^2}{l^2} \\ 0 \\ \frac{Qc^2(3d+c)}{l^3} \\ -\frac{Qdc^2}{l^2} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

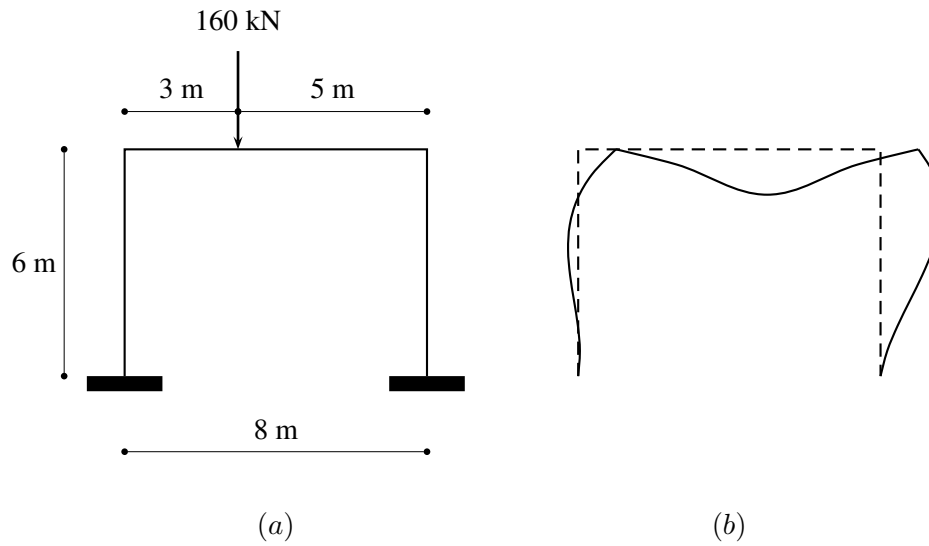


Figura 4.8: Pórtico bajo carga vertical concentrada y asimétrica. (a) Modelo estructural. (b) Elástica.

con $Q = 160$, $c = 3$, $d = 5$. El cálculo con MATLAB se realiza de la manera ya indicada:

```
Q=160;
c=3;
d=5;

r_2=[0;
      Q*d^2*(3*c+d)/l_2^3;
      Q*c*d^2/l_2^2;
      0;
      Q*c^2*(3*d+c)/l_2^3;
      -Q*d*c^2/l_2^2];

DeltaR_2=r_2;

R=zeros(12,1);
R(g_2)=DeltaR_2;

R =

    0
    0
    0
```

```

      0
109.3750
187.5000
      0
  50.6250
-112.5000
      0
      0
      0

```

En adelante, el análisis de la estructura sigue los mismos pasos de los ejemplos anteriores. El vector de desplazamientos tiene por valor

D =

```

1.0e-003 *
      0
      0
      0
  0.4440
 -0.1210
 -0.7292
  0.4010
 -0.0695
  0.4475
      0
      0
      0

```

```

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

```

```

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2+r_2;

```

```

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

```

```

P_1=K_1*D_1;
P_2=K_2*D_2+R_2;
P_3=K_3*D_3;

```

```

display([p_1 P_1])
display([p_2 P_2])
display([p_3 P_3])

```

ans =

```

101.6431    27.1205
-27.1205   101.6431
-47.3340   -47.3340
-101.6431   -27.1205

```

```

27.1205 -101.6431
-115.3892 -115.3892

```

ans =

```

27.1205 27.1205
101.6431 101.6431
115.3892 115.3892
-27.1205 -27.1205
58.3569 58.3569
-102.2447 -102.2447

```

ans =

```

58.3569 27.1205
27.1205 -58.3569
102.2447 102.2447
-58.3569 -27.1205
-27.1205 58.3569
60.4785 60.4785

```

Obsérvese que hay desplazamientos hacia la derecha en los nodos 2 y 3, de valor 0.444 m en el primero y 0.401 en el segundo. La diferencia entre ellos obedece a las fuerzas de compresión a la que queda sometida la viga, de valor 27.12 kN. El desplazamiento hacia la derecha de la estructura obedece a la asimetría de la carga vertical, la cual, al estar más cerca del nodo 2 que del 3, produce en aquél un momento de empotramiento mayor que en éste. Esto a su vez implica que el vector de fuerzas $\mathbf{P} - \mathbf{R}$ presenta un momento de $-187,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ en el nodo 2 y uno de $112,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Como el primero tiende a mover la estructura hacia la derecha, mientras que el segundo al contrario, se impone la tendencia dominante en valor absoluto, que es la del momento del nodo 2.

4.6. Elementos inclinados cargados

Consideremos ahora la situación de un elemento inclinado con carga de gravedad, como la viga biempotrada que aparece en la figura 4.9. Para casos como este se debe modificar el vector de fuerzas de empotramiento \mathbf{r}_e bajo la consideración de que la carga vertical Q se descompone en dos fuerzas, una perpendicular al eje del elemento ($Q_v = Q \cos \beta$) y otra paralela ($Q_n = Q \sin \beta$). La primera produce reacciones de cortante y flexión en los apoyos, las cuales se pueden obtener de acuerdo con lo mostrado en las figuras 3.11, mientras que la segunda produce reacciones axiales que, para el caso de carga concentrada Q mostrado en la figura 4.9 valen

$$\frac{d}{l} Q_n = \frac{d}{l} Q \sin \beta \quad (4.23)$$

en el apoyo izquierdo y

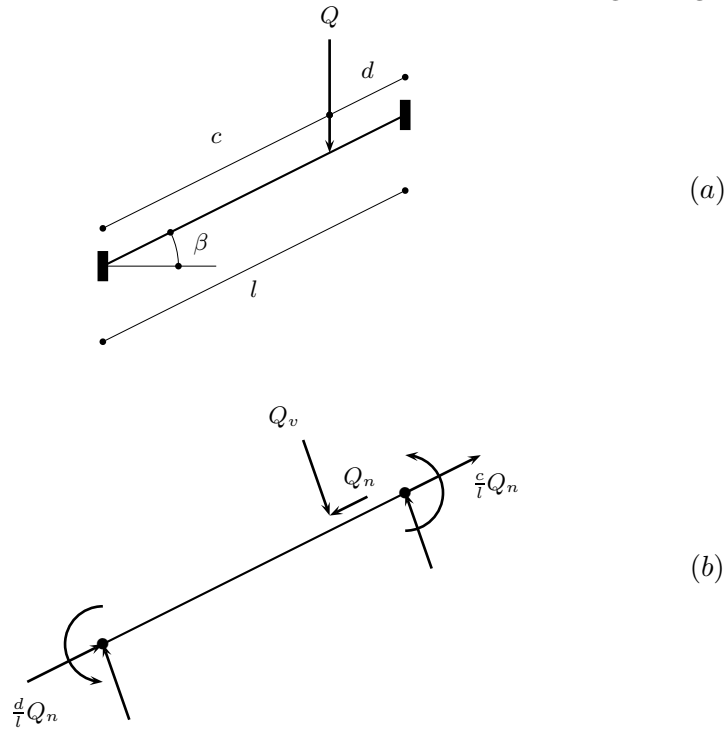


Figura 4.9: Viga inclinada biempotrada. (a) Modelo estructural. (b) Reacciones axiales.

$$\frac{c}{l}Q_n = \frac{c}{l}Q \sin \beta \quad (4.24)$$

en el derecho. Para el caso de fuerza uniformemente distribuida w , estas reacciones son

$$\frac{wl}{2} \sin \beta \quad (4.25)$$

en ambos apoyos, mientras que para una carga distribuida de forma triangular como la que muestra la figura 3.11, las reacciones valen

$$\frac{wl}{3} \sin \beta \quad (4.26)$$

en el apoyo izquierdo y

$$\frac{2wl}{3} \sin \beta \quad (4.27)$$

en el derecho.

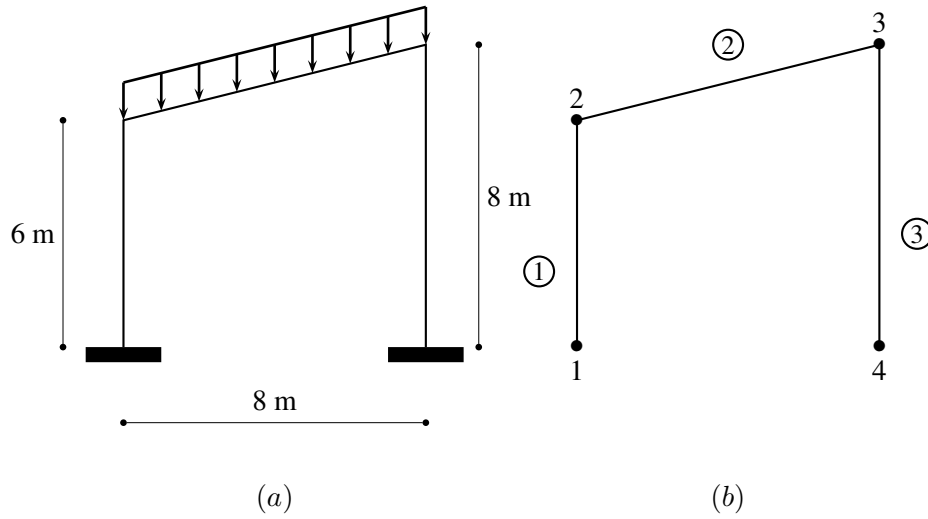


Figura 4.10: Pórtico con viga inclinada sometido a carga de gravedad uniformemente distribuida. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.

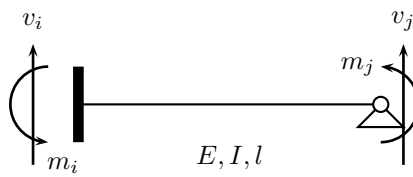


Figura 4.11: Modelo estructural para el cálculo de la matriz de rigidez de una viga con articulación en el extremo y momento de compensación m_j .

Como ilustración consideremos el pórtico mostrado en la figura 4.10. Los datos de la estructura son iguales al ejemplo 4.2, con la salvedad de que el nodo 3 se encuentra situado a 8 metros de altura con respecto a la base. Para abordar el análisis nos enfocaremos solamente en las diferencias

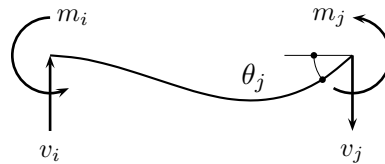


Figura 4.12: Aplicación de momento de compensación.

relevantes con respecto a dicho ejemplo. En primer lugar, las longitudes quedan definidas como

```
l_1=6;
l_2=sqrt(8^2 + 2^2);
l_3=8;
```

En segundo lugar, la matriz de rigidez del elemento 2 en el sistema global y su aporte a la matriz general se calcula de la manera siguiente:

```
g_2=[4 5 6 7 8 9];
beta=atand(2/8);
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;
```

donde hacemos notar el cálculo del ángulo de inclinación β del elemento. Finalmente, los vectores de fuerzas de empotramiento en ambos sistemas, r_e y R los calculamos así:


```

beta=atand(2/8);
wv=20*cosd(beta);
wn=20*sind(beta);

r_2=[wn*l_2/2;
      wv*l_2/2;
      wv*l_2^2/12;
      wn*l_2/2;
      wv*l_2/2;
      -wv*l_2^2/12];

R_2=T_2'*r_2;

DeltaR_2=zeros(12,1);
DeltaR_2(g_2)=R_2;

R=DeltaR_2;

```

En adelante, el cálculo sigue igual que en el ejemplo 4.2. Los vectores de fuerzas internas son:

```

display([p_1 p_2 p_3])

ans =

    85.4055    36.1355    79.5187
   -15.8962    79.0001    15.8962
   -23.3867    71.9905    80.2360
   -85.4055     3.8645   -79.5187
    15.8962    80.9999   -15.8962
   -71.9905   -80.2360    46.9337

```

4.7. Elementos articulados

4.7.1. Matriz de rigidez

Consideremos la viga empotrada en el extremo izquierdo i y articulada en el derecho j , la cual aparece en la figura 4.11. La viga está sometida únicamente a la acción del momento m_j , el cual induce el giro θ_j . Dado que hay restricción total en el extremo izquierdo y restricción al desplazamiento vertical en el derecho, es evidente que el momento aplicado m_j y las tres reacciones corresponden a la situación mostrada en la parte de la figura 3.3, que adaptamos en la figura 4.12. Sus valores se pueden obtener por medio de las ecuaciones (3.15) de la siguiente manera:

$$m_i = \frac{2EI}{l}\theta_j, \quad m_j = \frac{4EI}{l}\theta_j \quad (4.28)$$

con lo cual

$$m_i = \frac{1}{2}m_j \quad (4.29)$$

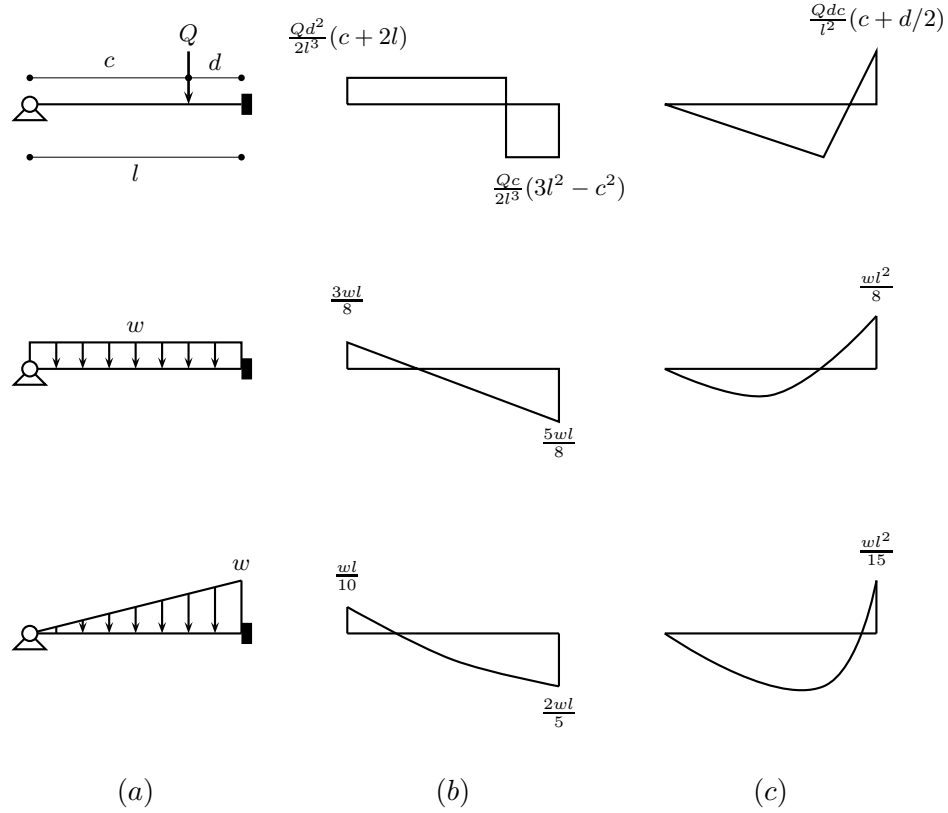


Figura 4.13: Vigas articuladas/empotradas. (a) Modelos estructurales. (b) Diagramas de cortante. (c) Diagramas de momento.

Al tomar momentos con respecto a cualquier punto resulta

$$v_i = -v_j = \frac{6EI}{l^2}\theta_j = \frac{3}{2l}m_j \quad (4.30)$$

De la ecuación matricial del elemento de viga

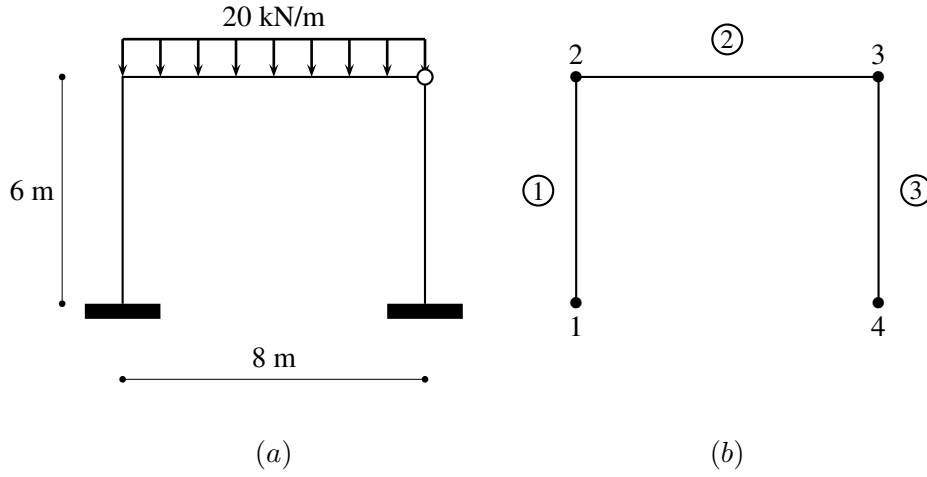


Figura 4.14: Pórtico con una articulación sometido a una carga vertical distribuida uniformemente. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.

$$\begin{pmatrix} V'_i \\ M'_i \\ V'_j \\ M'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \theta_i \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

tomamos la ecuación correspondiente a la cuarta fila para calcular así el momento m_j :

$$m_j = \frac{6EI}{l^2}\xi_i + \frac{2EI}{l}\theta_i - \frac{6EI}{l^2}\xi_j + \frac{4EI}{l}\theta_j \quad (4.32)$$

y reemplazamos este resultado en las ecuaciones (4.29) y (4.30):

$$m_i = \frac{3EI}{l^2}\xi_i + \frac{EI}{l}\theta_i - \frac{3EI}{l^2}\xi_j + \frac{2EI}{l}\theta_j \quad (4.33)$$

$$v_i - v_j = \frac{9EI}{l^3}\xi_i + \frac{3EI}{l^2}\theta_i - \frac{9EI}{l^3}\xi_j + \frac{6EI}{l^2}\theta_j \quad (4.34)$$

Con estas ecuaciones configuramos la siguiente formulación matricial

$$\begin{pmatrix} v_i \\ m_i \\ v_j \\ m_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{9EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{9EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{9EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \theta_i \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Ahora restamos el vector de fuerzas dado por esta ecuación del vector de fuerzas dado por la ecuación (4.31), correspondiente al elemento de viga sin articulaciones, con el fin de obtener un momento $M_j = M'_j - m_j = 0$. El resultado es:

$$\begin{pmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \theta_i \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

Ahora bien, si la articulación se encuentra en el nodo izquierdo i mientras que el nodo j es normal, al proceder de manera similar se encuentra la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3EI}{l^3} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EI}{l^3} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \theta_i \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

Al incorporar las ecuaciones correspondientes a las fuerzas axiales, las matrices anteriores quedan en la forma

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

para la articulación en el extremo j y

$$k_e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

para la articulación en el extremo i . Estas ecuaciones constituyen el problema de la forma

$$p_e = k_e d_e \quad (4.40)$$

para este caso.

4.7.2. Cargas en los elementos

La presencia de la rótula en un extremo implica que se deban usar valores diferentes de las reacciones en los extremos con el fin de formar el vector R . La figura 4.13 muestra los diagramas de cortante y momento para los tres casos más comunes. De ellos se pueden tomar los valores necesarios.

Para ilustrar este análisis, consideremos el pórtico considerado en el ejemplo 4.2, con una articulación en el nodo 3, tal como muestra la figura 4.14

De los cálculos realizados destacaremos solamente los cambios pertinentes con respecto al ejemplo 4.2. En primer lugar, para el elemento 2, la matriz de rigidez en el sistema local toma la forma

```
k_2=zeros(6,6);
l=l_2;
k_2(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0      3/l^3      3/l^2      0      -3/l^3      0];
k_2(3,:)=E*I*[ 0      3/l^2      3/l      0      -3/l^2      0];
k_2(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0      -3/l^3      -3/l^2      0      3/l^3      0];
k_2(6,:)=E*I*[ 0      0      0      0      0      0];
```

mientras que para el elemento 3 la matriz de rigidez mantiene su estructura convencional, dada por la ecuación (4.6).

En segundo lugar, el vector de cargas nodales correspondientes a la carga distribuida en el elemento 2 es

```
w=20;
r_2=[0;
      5*w*l_2/8;
      w*l_2^2/8;
      0;
      3*w*l_2/8;
      0];
```

Con estas modificaciones, se puede comprobar que los vectores de fuerzas internas son los siguientes:

```
display([p_1 p_2 p_3])

ans =

    88.2893    8.2638    71.7107
   -8.2638   88.2893    8.2638
    16.7316   66.3143   -0.0000
   -88.2893   -8.2638   -71.7107
     8.2638    71.7107   -8.2638
   -66.3143         0    49.5827
```

Nótese que el momento en el nodo articulado es igual a cero, tanto en el elemento 2 como en el 3.

4.8. Movimientos de los apoyos

Trataremos ahora el caso en que se contemplen movimientos en los apoyos, producto de la flexibilidad del suelo ante las cargas que le son transmitidas. Para ello formularemos el problema general

$$P = KD \quad (4.41)$$

con un vector D con tres tipos de grados de libertad, a saber, D_a , D_c y D_b . En el subvector D_a se reúnen los grados de libertad de los apoyos que permanecen inmóviles, mientras que en D_b se encuentran los grados de libertad móviles, como se ha hecho hasta ahora en el texto. En el nuevo subvector D_c almacenamos los grados de libertad de asentamientos en los apoyos; es, por tanto, al igual que D_a , un vector conocido.

Por otra parte, resolveremos solamente el problema sin ninguna carga adicional, es decir, bajo la condición

$$P_b = 0 \quad (4.42)$$

De esta suerte, aplicando el principio de superposición, el vector D obtenido en este análisis se puede sumar al vector D resultante de las cargas aplicadas y, a partir de ese resultado, calcular las fuerzas internas producidas por cargas y asentamientos conjuntamente.

Para resolver el problema planteado realizamos la partición siguiente:

$$\begin{pmatrix} P_a \\ P_c \\ P_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{aa} & K_{ac} & K_{ab} \\ K_{ca} & K_{cc} & K_{cb} \\ K_{ba} & K_{bc} & K_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_a \\ D_c \\ D_b \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

De la última fila,

$$P_b = K_{ba}D_a + K_{bc}D_c + K_{bb}D_b = 0 \quad (4.44)$$

lo que permite calcular los movimientos desconocidos así:

$$D_b = -K_{bb}^{-1}K_{bc}D_c \quad (4.45)$$

puesto que $D_a = 0$. De esta manera, las reacciones en los grados de libertad restringidos son

$$P_a = K_{ac}D_c + K_{ab}D_b \quad (4.46)$$

mientras que las reacciones en los grados de libertad correspondientes a D_c resultan ser

$$P_c = K_{cc}D_c + K_{cb}D_b \quad (4.47)$$

Como ejemplo, consideremos el mismo pórtico del ejemplo 4.2, sometido ahora solamente a la acción de un asentamiento vertical en el nodo 4, de valor 0.01 m, lo que corresponde al grado de libertad 11. Al igual que en caso anterior, ilustraremos unicamente las modificaciones pertinentes en el código de comandos del programa. Tales modificaciones conciernen solamente a la partición de las matrices básicas y al cálculo de los desplazamientos y las reacciones. La secuencia de comandos es la siguiente:

```
a=[1 2 3 10 12]'; c=11; b=[4 5 6 7 8 9]';
D=zeros(12,1);

D(c)=-0.01;

D_c=D(c);

K_bc=K(b,c);
K_bb=K(b,b);

D_b=-K_bb\ (K_bc*D_c);

D(b)=D_b;

K_ac=K(a,c);
K_ab=K(a,b);
K_cc=K(c,c);
K_cb=K(c,b);

P_a=K_ac*D_c + K_ab*D_b;
P_c=K_cc*D_c + K_cb*D_b;
```

Con estos cálculos, el vector de desplazamientos resulta ser:

```
D =
      0
      0
      0
    0.0031
   -0.0000
   -0.0010
    0.0031
   -0.0100
   -0.0010
      0
   -0.0100
      0
```

Nótese que el valor en el grado de libertad 11 es el asentamiento asignado. Las fuerzas internas en los elementos, en el sistema de coordenadas local, son las siguientes:

```
display([p_1 p_2 p_3])
ans =
    11.8980         0   -11.8980
     0.0000    11.8980     0.0000
    47.5921    47.5921   -47.5921
   -11.8980         0    11.8980
    -0.0000   -11.8980    -0.0000
   -47.5921    47.5921    47.5921
```

Obsérvese que las fuerzas cortantes en las columnas y, por consiguiente, la fuerza axial en la viga, son nulas.

4.9. Consideración de extremos rígidos

Consideremos una barra con extremos rígidos como la que muestra la figura 4.15. Los grados de libertad de los extremos de los elementos rígidos son

$$d_e = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \xi_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \xi_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

y

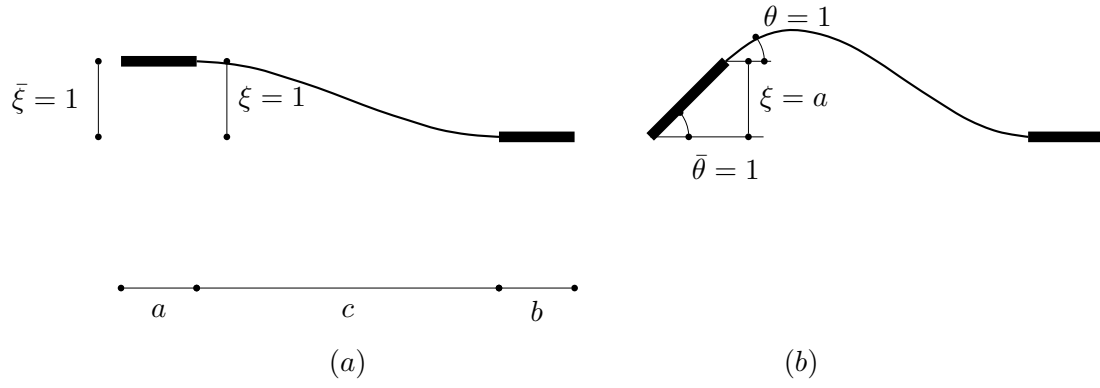


Figura 4.15: Deducción de la matriz de rigidez de una barra en flexión con extremos rígidos. (a): $\bar{\xi} = 1$; (b): $\bar{\theta} = 1$.

$$\bar{\mathbf{d}}_e = \begin{pmatrix} \bar{\delta}_i \\ \bar{\xi}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{\delta}_j \\ \bar{\xi}_j \\ \bar{\theta}_j \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

y se encuentran relacionados por

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{Q}_e \bar{\mathbf{d}}_e \quad (4.50)$$

donde la matriz de transformación es

$$Q_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

La matriz de rigidez de la barra flexible es la propia de una viga de longitud c :

$$\bar{k}_e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{c} & 0 & 0 & -\frac{EA}{c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{c^3} & \frac{6EI}{c^2} & 0 & -\frac{12EI}{c^3} & \frac{6EI}{c^2} \\ 0 & \frac{6EI}{c^2} & \frac{4EI}{c} & 0 & -\frac{6EI}{c^2} & \frac{2EI}{c} \\ -\frac{EA}{c} & 0 & 0 & \frac{EA}{c} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{c^3} & -\frac{6EI}{c^2} & 0 & \frac{12EI}{c^3} & -\frac{6EI}{c^2} \\ 0 & \frac{6EI}{c^2} & \frac{2EI}{c} & 0 & -\frac{6EI}{c^2} & \frac{4EI}{c} \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Al aplicar el principio del contragradiente, se obtiene la matriz de rigidez de la barra compuesta:

$$k_e = Q_e^T \bar{k}_e Q_e \quad (4.53)$$

Esta matriz se utiliza rutinariamente en programas profesionales de cálculo para la consideración del efecto de la zona de las barras de pórticos en las que el elemento se encuentra fundido monolíticamente con otro. En tal caso, para la viga mostrada en la figura 4.15, la longitud a denota la distancia entre el eje del elemento perpendicular situado a la izquierda y b lo equivalente del elemento de la derecha.

4.10. Consideración de deformaciones por cortante

Consideremos ahora el efecto de las deformaciones por cortante, el cual tiene importancia en elementos de área seccional grande, como es el caso de muros. Según se vió en el Capítulo 3, las deformaciones de la barra al considera solamente el efecto de la flexión son

$$\xi = \frac{Vl^3}{3EI} - \frac{Ml^2}{2EI}, \quad \theta = -\frac{Vl^2}{2EI} + \frac{Ml}{EI} \quad (4.54)$$

Al aplicar los principio de Resistencia de Materiales sobre el efecto del cortante en la deformación, estas ecuaciones pasan a ser

$$\xi = \left(\frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{GA_v} \right) V - \frac{Ml^2}{2EI}, \quad \theta = -\frac{Vl^2}{2EI} + \frac{Ml}{EI} \quad (4.55)$$

donde A_v es el área reducida por cortante ($A_v = 5A/6$ para secciones rectangulares). La matriz de rigidez de la barra toma entonces la forma

$$\mathbf{k}_e = \frac{1}{1 + \alpha} \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{l} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

donde

$$\alpha = \frac{12EI}{l^2 GA_v} \quad (4.57)$$

Estos efectos son normalmente considerados en muros de gran sección transversal. En tal caso, si su numeración de nodos es de abajo hacia arriba ($\beta = 90^\circ$), la matriz de rigidez en coordenadas globales es (ver ecuación 4.13):

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{(1+\alpha)l^3} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)l^2} & -\frac{12EI}{(1+\alpha)l^3} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)l^2} \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{(1+\alpha)l^2} & 0 & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)l} & \frac{6EI}{(1+\alpha)l^2} & 0 & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)l} \\ -\frac{12EI}{(1+\alpha)l^3} & 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)l^2} & \frac{12EI}{(1+\alpha)l^3} & 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)l^2} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{(1+\alpha)l^2} & 0 & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)l} & \frac{6EI}{(1+\alpha)l^2} & 0 & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)l} \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

donde se han incluido los términos correspondientes a la deformación axial, que no se ven afectados por las deformaciones de corte.

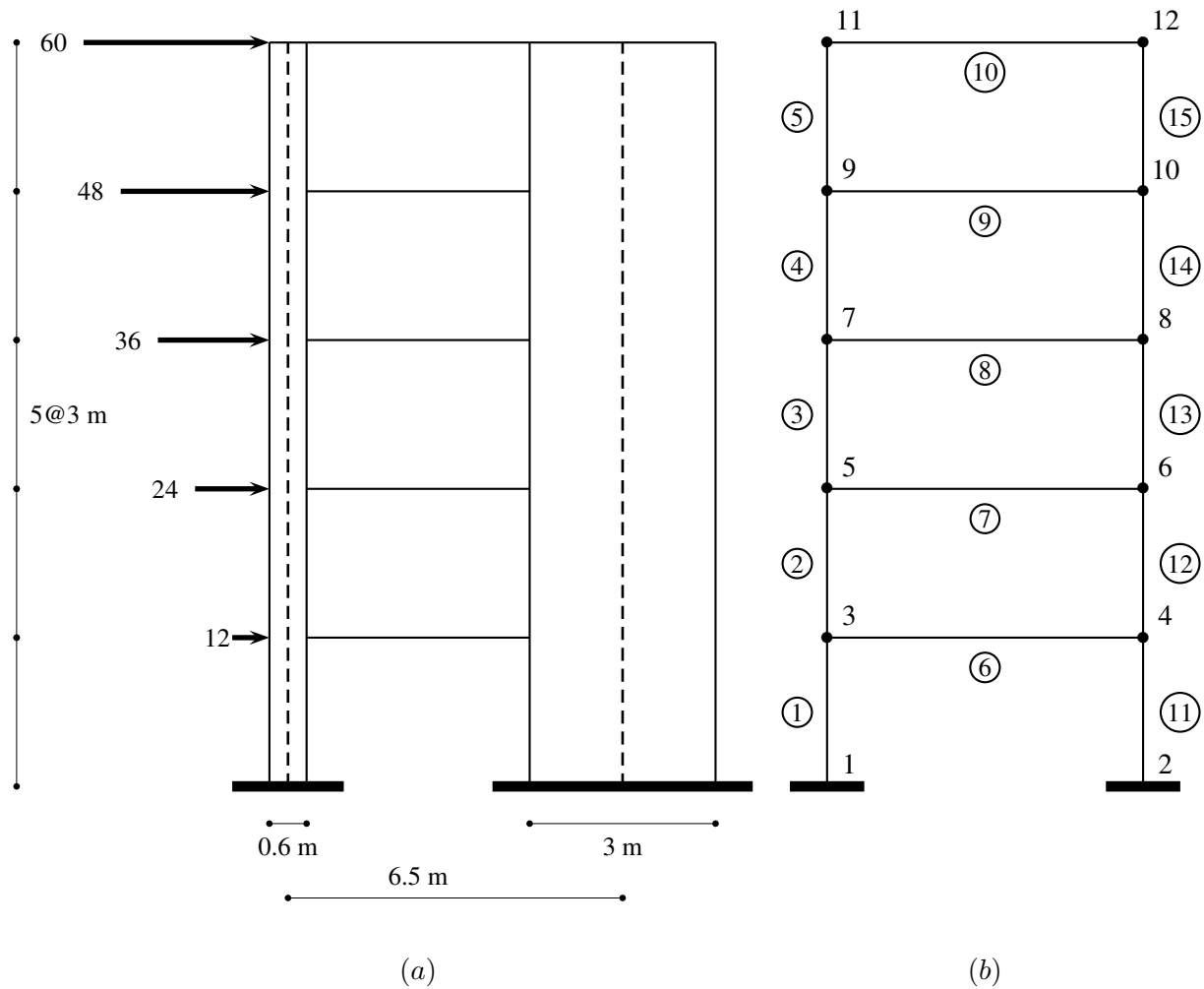


Figura 4.16: Pórtico con muro de cortante. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.

4.11. Ejemplo 4.4: Pórtico con muro de cortante

La figura 4.16 muestra un pórtico de cinco pisos con un muro de cortante de tres metros de largo y 0.4 m de grosor. Las dimensiones de las columnas y vigas en la dimensión perpendicular al plano de

la figura son 0.5 m y 0.4 m, respectivamente. La altura de las vigas es de 0.5 m. y las cargas sísmicas están expresadas en kN. El interés en este ejemplo es ilustrar la aplicación de la matriz de rigidez considerando los efectos de cortante solamente en el muro y la de transformación solamente en las vigas, donde se dan los extremos rígidos más largos. En efecto, éstos tienen por longitud $a = 0,3$, $b = 1,5$, como puede verse en la figura. El procedimiento de cálculo de las contribuciones de las vigas a la matriz de rigidez global es como sigue:

```

a=0.3;
b=1.5;
c=lv-b;
Q=eye(6);
Q(2,3)=a;
Q(5,6)=-b;
for e=6:10
    l=L(e);
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l;
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l;
    T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
            -mu eta 0 0 0 0;...
            0 0 1 0 0 0;...
            0 0 0 eta mu 0;...
            0 0 0 -mu eta 0;...
            0 0 0 0 0 1];
    k_e=zeros(6,6);
    k_e(1,:)=EA(e)*[ 1/c 0 0 -1/c 0 0];
    k_e(2,:)=EI(e)*[ 0 12/c^3 6/c^2 0 -12/c^3 6/c^2];
    k_e(3,:)=EI(e)*[ 0 6/c^2 4/c 0 -6/c^2 2/c];
    k_e(4,:)=EA(e)*[-1/c 0 0 1/c 0 0];
    k_e(5,:)=EI(e)*[ 0 -12/c^3 -6/c^2 0 12/c^3 -6/c^2];
    k_e(6,:)=EI(e)*[ 0 6/c^2 2/c 0 -6/c^2 4/c];
    k_e=Q'*k_e*Q;
    g_e=[3*IJ(e,1)-2 3*IJ(e,1)-1 3*IJ(e,1) 3*IJ(e,2)-2 3*IJ(e,2)-1 3*IJ(e,2)];
    K_e=T_e'*k_e*T_e;
    DeltaK_e=zeros(n,n);
    DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
    K=K+DeltaK_e;
end

```

Por otra parte, el procedimiento de cálculo de la contribución de los elementos del muro (donde el énfasis reside en la consideración de las deformaciones por cortante) es el siguiente:

```

Av=Am*5/6;
nu=0.15;
G=E/(2*(1+nu));
a=12*E*Im/(lm^2*G*Av);

for e=11:15
    l=L(e);

```

```

eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l;
mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l;
T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
        -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
k_e=zeros(6,6);
k_e(1,:)=EA(e)*[ 1/l 0 0 -1/l 0 0];
k_e(2,:)=EI(e)*[ 0 12/l^3 6/l^2 0 -12/l^3 6/l^2];
k_e(3,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 (4+a)/l 0 -6/l^2 (2-a)/l];
k_e(4,:)=EA(e)*[-1/l 0 0 1/l 0 0];
k_e(5,:)=EI(e)*[ 0 -12/l^3 -6/l^2 0 12/l^3 -6/l^2];
k_e(6,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 (2-a)/l 0 -6/l^2 (4+a)/l];
k_e=k_e/(1+a);
g_e=[3*IJ(e,1)-2 3*IJ(e,1)-1 3*IJ(e,1) 3*IJ(e,2)-2 3*IJ(e,2)-1 3*IJ(e,2)];
K_e=T_e'*k_e*T_e;
DeltaK_e=zeros(n,n);
DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
K=K+DeltaK_e;
end

```

Con base en este programa, el resultado obtenido para las fuerzas internas en los elementos del muro es el siguiente:

```

disp(p(:,11:15))
1.0e+03 *

```

0.3905	0.3398	0.2627	0.1731	0.0795
0.8738	0.7977	0.6553	0.4706	0.1918
2.4921	1.9297	1.3525	0.8173	0.2794
-0.3905	-0.3398	-0.2627	-0.1731	-0.0795
-0.8738	-0.7977	-0.6553	-0.4706	-0.1918
0.1292	0.4635	0.6135	0.5944	0.2961

Capítulo 5

Edificios

5.1. Configuración del edificio

La figura 5.1 muestra un edificio típico, compuesto por pórticos en direcciones x e y , los cuales se encuentra ensamblados en cada piso por una losa. La presencia de esta clase de elemento hace que el edificio tenga un comportamiento particular, diferente del que tendría un pórtico espacial formado por vigas y columnas. La diferencia reside en que en el edificio, las losas crean una fuerte dependencia mutua de los desplazamientos de los nodos, tanto mutuamente cercanos como lejanos, mientras que en los pórticos espaciales sin losas la dependencia entre nodos es muy débil, especialmente entre los que se encuentran muy distantes entre sí.

Las cargas son normalmente de dos clases:

1. **Cargas verticales**, que son debidas a la acción de la gravedad. Corresponden al peso de la construcción (*carga muerta*) y al uso que se le da (*carga viva*). Se modelan normalmente como cargas distribuidas en las losas y, por tanto, sus valores se dan en unidades de fuerza sobre unidad de área (kN/m^2 , por ejemplo).
2. **Cargas horizontales**, debidas a acciones naturales tales como sismos o vientos fuertes. Normalmente se modelan como cargas concentradas en el nivel de piso, tal como indica la figura 5.1, a las cuales se agregan momentos torsionales. Por ser fuerzas de inercia (es decir, resultantes del movimiento dinámico del edificio), el punto de aplicación de ambas clases de fuerzas es el centro de gravedad de la losa.

La presencia de la losa induce una coordinación de los desplazamientos horizontales de los diferentes pórticos, que debe ser considerada para calcular la estructura como un todo. Desde este punto de vista de movimientos horizontales la losa se denomina usualmente *diafragma*.

5.2. Noción de diafragma

La situación que se da típicamente en edificios es tal que la presencia de losas en cada nivel implica una estrecha relación entre ellos. En efecto, estos elementos, aunque flexibles en sentido ortogonal,

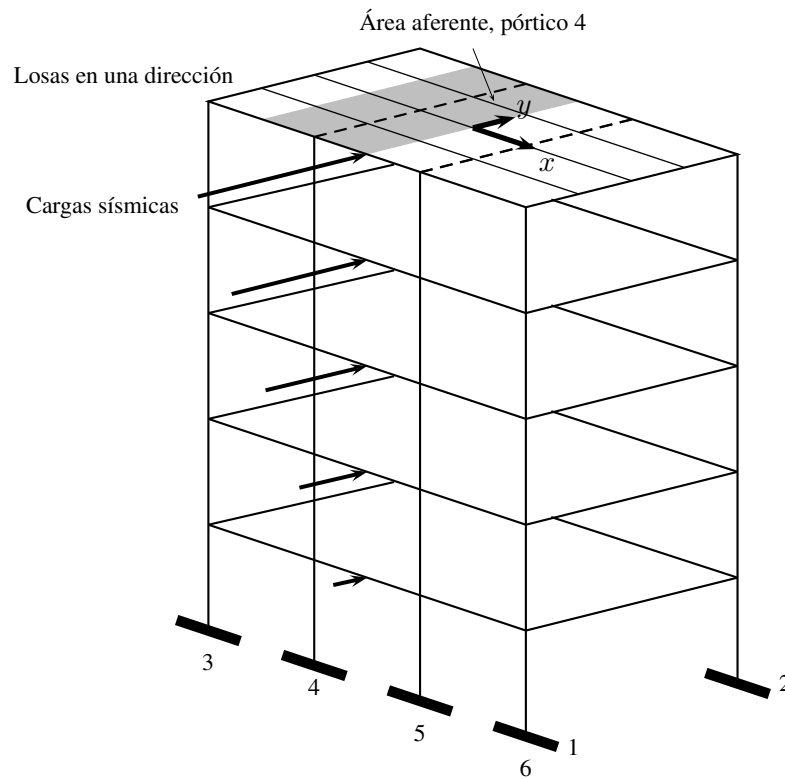


Figura 5.1: Configuración y cargas de un edificio típico.

exhiben en muchos casos una gran rigidez en su propio plano, lo cual hace que los movimientos horizontales de los nodos de los pórticos que los atraviesan estén coordinados. Esta situación se explica mejor con la ayuda de las figuras 5.2 y 5.3. En la primera aparece el conjunto losa – pórtico espacial sometido a un grupo de cargas verticales ortogonales al plano propio de la losa. En este sentido el diafragma puede considerarse como flexible. Sin embargo, en muchas situaciones dinámicas, tales como las pertinentes al empuje del viento o a la aceleración horizontal producidas por sismos, el interés recae sobre los movimientos horizontales de la estructura, que obviamente implican traslaciones horizontales de las losas. Desde este punto de vista, el diafragma puede ser rígido o flexible, como ilustra la figura 5.3, en dependencia de los materiales que lo constituyen, de la separación de las estructuras de soporte y de la dimensión del diafragma en el sentido paralelo a la acción horizontal. En el caso de un edificio, por ejemplo, se tienen típicamente diafragmas de concreto, soportados por estructuras verticales relativamente cercanas entre sí y con dimensiones comparables a tales separaciones. En contraste, los puentes se caracterizan por tener diafragmas de concreto apoyados en estructuras carac-

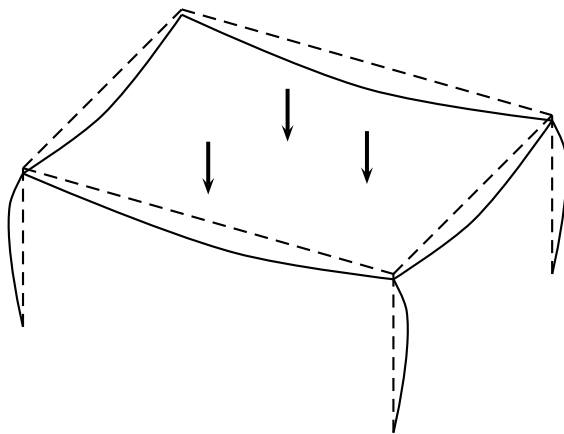


Figura 5.2: Diafragma flexible en un plano ortogonal.

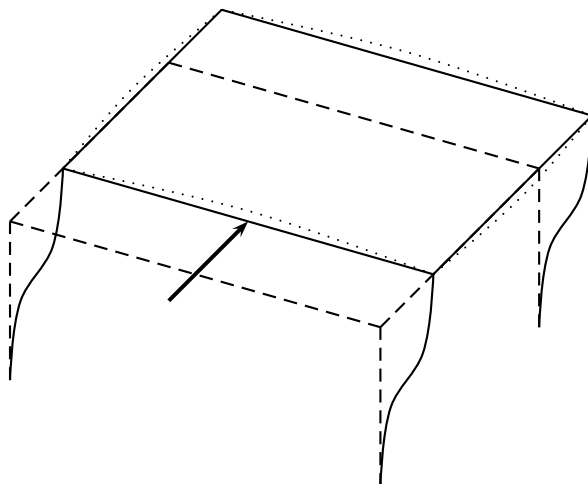


Figura 5.3: Diafragmas flexible (\cdots) y rígido (—) en su plano.

terizadas por un espaciamiento muy superior al de la dimensión transversal del puente. Por tanto, en

el caso de edificios es usual adoptar la hipótesis de diafragma rígido, mientras que en el análisis de puentes bajo carga dinámica transversal a su eje es conveniente adoptar la modelación de diafragma flexible. Sin embargo, si el diafragma de una estructura cualquiera es de madera, es dudoso que se pueda considerar como rígido, independientemente de sus dimensiones.

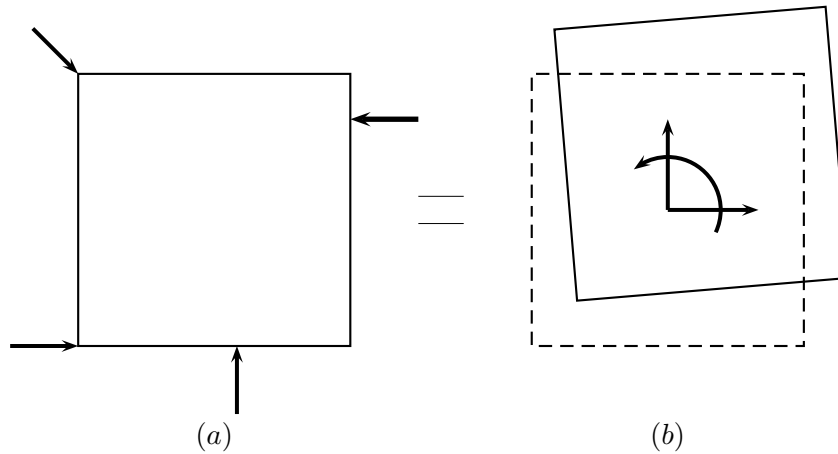


Figura 5.4: Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido en su plano.

Esta clasificación entre diafragmas rígidos y flexibles reviste gran importancia, ya que en la primera situación se puede hacer caso omiso de las deformaciones propias de la losa producidas por la carga horizontal, y considerarla como un cuerpo rígido en su propio plano. Esto permite, a su vez, hacer uso de una ley básica de la mecánica, según la cual en un cuerpo rígido las fuerzas coplanares que actúan sobre él se pueden componer en una única resultante y un par alrededor de un eje ortogonal al plano (figura 5.4). En consecuencia, una estructura con diafragmas rígidos, sometida a fuerzas dinámicas horizontales, puede modelarse con tres grados de libertad en cada diafragma, tales como los mostrados en la figura 5.4b. En el caso de diafragmas flexibles, esta simplificación no es posible, dado que la deformación del diafragma impide aplicar la composición de fuerzas mencionada. Como consecuencia, tampoco resulta válida la aplicación de las consiguientes relaciones geométricas simples que se dan en un diafragma rígido sometido a traslación y rotación.

La modelación de estructuras con diafragma rígido permite, en consecuencia, condensar la información estructural de rigidez en términos de los tres grados de libertad por piso. Por el contrario, en el caso de diafragmas flexibles se hace necesario, o bien discretizar el diafragma por medio de elementos finitos, con lo cual el número de grados de libertad por nivel es muchísimo mayor, o bien adoptar algunas hipótesis auxiliares que permitan la reducción del problema. Por otra parte, los tres grados de libertad surgen como necesarios por la razón siguiente. Supóngase que en el diafragma de la figura 5.5 la rigidez k_1 es mayor que k_2 ; por tanto, la resultante de las fuerzas de restauración de esta estructura en sentido vertical pasa por el punto κ . Como la fuerza externa, por ejemplo de viento

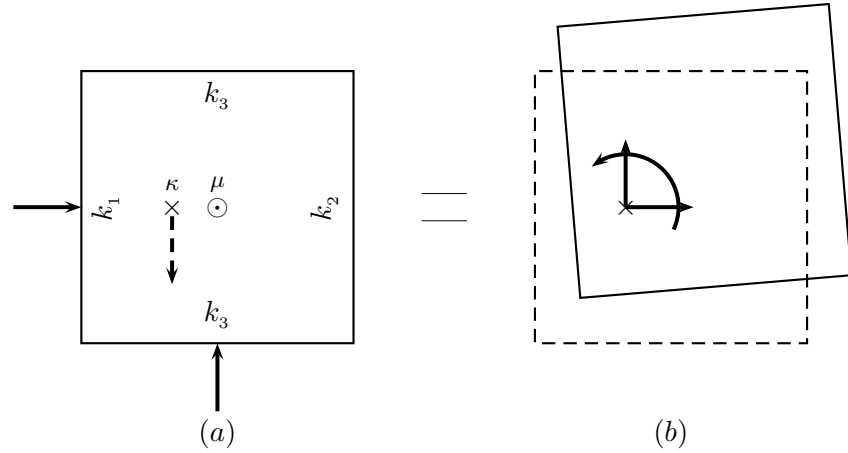


Figura 5.5: Sobre el grado de libertad torsional.

o de sismo, no necesariamente pasa por dicho punto (las de sismo se consideran aplicadas en el centro de masa μ , como en la figura, por ser fuerzas de inercia), se concluye que esta fuerza es equivalente al sistema de la figura 5.5b, en donde la fuerza externa ha sido trasladada al punto κ y se ha agregado un par torsional. Una situación similar puede darse en el sentido horizontal, si hay asimetría en dicho sentido, lo que no es del caso en la figura, en la cual sólo se ha introducido asimetría en el sentido vertical por simplicidad.

Como las cargas horizontales son generales para todo el edificio, se debe generar un problema de la forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}\mathbf{U} \quad (5.1)$$

donde \mathbf{U} son los movimientos del centro de gravedad de la losa y \mathbf{H} las cargas aplicadas en esos puntos (ver la figura 5.1). Por tanto, \mathbf{S} debe ser una matriz de rigidez adecuada para este caso.

5.3. Análisis bajo cargas verticales

El análisis bajo cargas verticales puede, en principio, ser descompuesto en una serie de problemas de pórticos planos como los estudiados en el capítulo 4. En efecto, como muestra la figura 5.1, para el caso corriente en que las losas se encuentran armadas en una sola dirección, las cargas en los pórticos que las soportan (3, 4, 5, 6 en la figura) se determinan multiplicando la carga distribuida en la losa (viva o muerta) por el *ancho aferente*, obtenido como el promedio de las longitudes de los vanos a ambos lados de cada pórtico. Sin embargo, la posibilidad de movimientos *horizontales* causados por cargas *verticales* en condiciones de asimetría, tal como se mostró en el capítulo 4, hace necesaria en este caso

la formulación de un problema similar al expresado por la ecuación (5.1). En efecto, como un pórtico asimétrico sometido a carga *vertical* tiende a desplazarse *horizontalmente*, este desplazamiento se traslada a la losa, la cual, a su vez, arrastra los pórticos restantes en la dirección de movimiento del pórtico en cuestión. De esta manera, otros pórticos de configuración simétrica, terminarán sufriendo desplazamientos laterales. Por otra parte, las cargas horizontales son generales para todo el edificio y actúan directamente sobre la losa, de manera que los desplazamientos que causen son generales para todos los pórticos. Por tanto, es necesario estudiar el efecto de ensamblaje que opera la losa con relación a los desplazamientos horizontales.

Más adelante en este capítulo estudiaremos el método para el análisis de edificios que se basa en las ideas anteriores, es decir, en la descomposición, tanto para cargas verticales y horizontales, en problemas de pórticos planos, con los cuales se forma un único problema de la forma expresada, a partir del cual resulta posible retornar al plano de cada pórtico para hallar las fuerzas internas en cada uno de sus elementos.

En vista de la sencillez del procedimiento para obtener las cargas verticales en los pórticos que se acaba de explicar, abordaremos directamente su ilustración con un ejemplo de naturaleza simétrica, el cual no requiere la formulación del problema espacial (5.1).

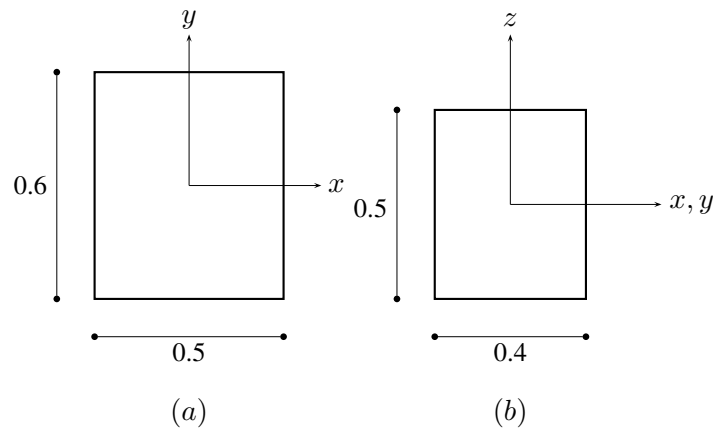


Figura 5.6: Secciones de las columnas (a) y las vigas (b).

5.4. Ejemplo 5.1: Portico de 5 pisos, cargas verticales

Consideremos el edificio mostrado en la figura 5.1. Las losas soportan una carga distribuida debida a su propio peso de 10 kN/m^2 . El material de los pórticos es concreto reforzado, con un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$. La dimensión de la sección de todas las columnas es de 0.5 m en

sentido x y 0.6 m en sentido y , mientras que en las vigas la base es de 0.4 m y la altura 0.5 m. Las alturas entre piso son todas de 3 m.

Realizaremos el análisis del pórtico 4 bajo cargas verticales, bajo la consideración de que los vanos en el sentido x tienen todos una longitud de 5 m. En estas circunstancias, el ancho aferente del pórtico es también de 5 m y, por tanto, la carga distribuida en cada piso es $w = 10 \times 5 = 50 \text{ kN/m}$. Por tanto, el pórtico resulta cargado como ilustra la figura 5.7. Con tres grados de libertad por nodo, el número total de grados es 36. Como todos los pórticos del edificio que soportan cargas gravitacionales son simétricos, y están cargados simétricamente, no se presentan desplazamientos horizontales en ellos, por lo cual cada uno puede ser analizado independientemente.

Comenzaremos por definir las propiedades básicas. Además del módulo de elasticidad

```
E=2e7;
```

para las columnas tenemos las cantidades

```
eta=0;
mu=1;
l=3;
A=0.5*0.6;
I=0.5*0.6^3/12;
```

mientras que para las vigas,

```
eta=1;
mu=0;
l=6;
A=0.4*0.5;
I=0.4*0.5^3/12;
```

Para todos los elementos la matriz de transformación es

```
T_e = [ eta  mu  0    0    0    0;...
        -mu  eta  0    0    0    0;...
         0    0  1    0    0    0;...
         0    0  0    eta  mu  0;...
         0    0  0   -mu  eta  0;...
         0    0  0    0    0  1];
```

Para generar la matriz de rigidez de la estructura inicialmente la hacemos nula:

```
K=zeros(36,36);
```

Ilustraremos el ensamblaje de la matriz de rigidez con un solo elemento, el No. 7. La matriz de rigidez elemental es

```
k_7=zeros(6,6);
k_7(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_7(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_7(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_7(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_7(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_7(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];
```

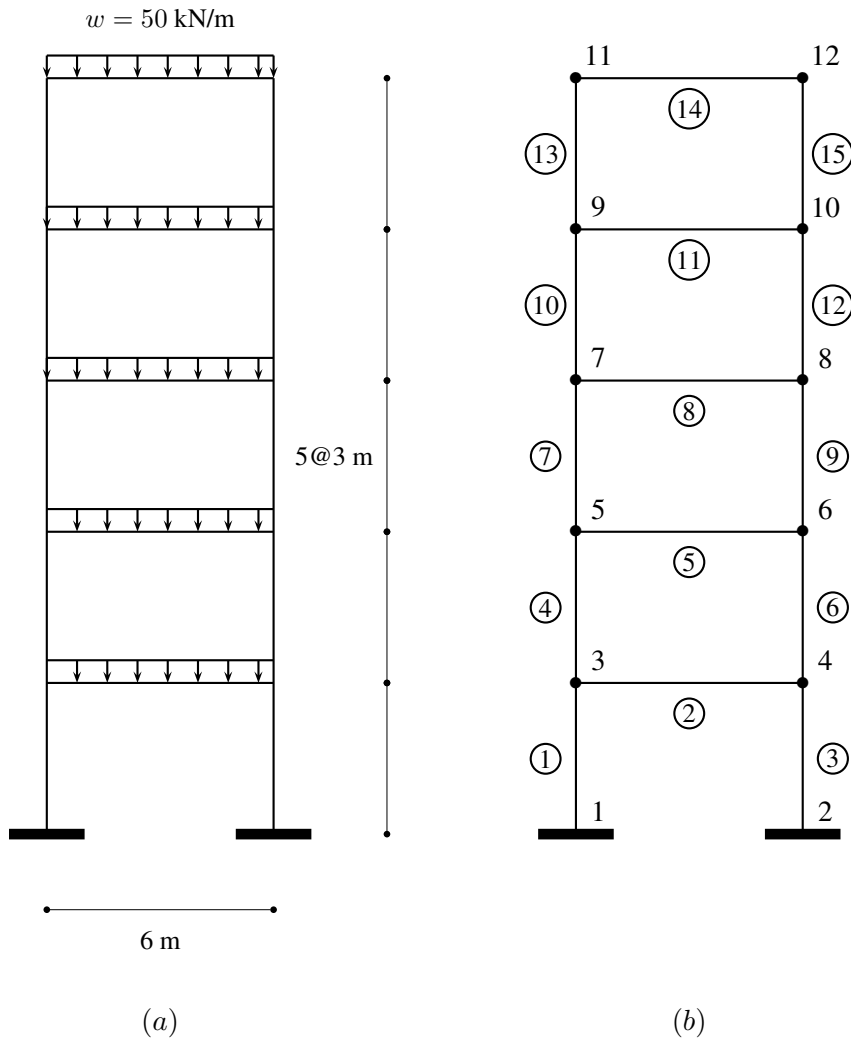


Figura 5.7: Pórtico de un vano y cinco pisos sometido a la acción de cargas verticales. (a) Modelo estructural. (b) Numeración de nodos y elementos.

mientras que su contribución a la global se calcula por el método ya conocido:

```
g_7=[13 14 15 19 20 21];
```

```

K_7=T_7'*k_7*T_7;
DeltaK_7=zeros(36,36);
DeltaK_7(g_7,g_7)=K_7;
K=K+DeltaK_7;

```

Al proceder de manera semejante con todos los elementos obtenemos la matriz global \mathbf{K} . Ahora calcularemos el vector de fuerzas de empotramiento. Para la viga No. 8, por ejemplo,

```

w=10*5;
l=6;
r_8=[0;
      w*l/2;
      w*l^2/12;
      0;
      w*l/2;
      -w*l^2/12];

```

Para ensamblar el vector \mathbf{R} procedemos de manera semejante al caso de la matriz de rigidez:

```

R=zeros(36,1);

```

Ilustraremos el ensamblaje del vector global \mathbf{R} con el caso del elemento No. 8:

```

DeltaR_8=zeros(36,1);
g_8=[19 20 21 22 23 24]';
DeltaR_8(g_8)=r_8;
R(g_8)=R+DeltaR_8;

```

Para obtener la solución del problema clasificamos primero los grados de libertad en restringidos y móviles:

```

a=[1 2 3 4 5 6]'; b=(7:36)';

```

con ello hacemos la partición de las matrices y el cálculo de los desplazamientos de la manera usual:

```

K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(36,1);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
D_b=K_bb\ (P_b-R_b);
P_a=K_ab*D_b+R(a);

D=zeros(36,1);
D(b)=D_b;

```

Para comprender mejor el resultado, presentaremos los desplazamientos con su número de orden y multiplicados por un factor de 10^3 :

```

[ (1:36)' 10^3*D]

ans =

    1.0000         0
    2.0000         0
    3.0000         0
    4.0000         0
    5.0000         0
    6.0000         0
    7.0000   -0.0151
    8.0000   -0.3750
    9.0000   -0.2511
   10.0000    0.0151
   11.0000   -0.3750
   12.0000    0.2511
   13.0000    0.0024
   14.0000   -0.6750
   15.0000   -0.1900
   16.0000   -0.0024
   17.0000   -0.6750
   18.0000    0.1900
   19.0000    0.0037
   20.0000   -0.9000
   21.0000   -0.2138
   22.0000   -0.0037
   23.0000   -0.9000
   24.0000    0.2138
   25.0000   -0.0228
   26.0000   -1.0500
   27.0000   -0.1302
   28.0000    0.0228
   29.0000   -1.0500
   30.0000    0.1302
   31.0000    0.0553
   32.0000   -1.1250
   33.0000   -0.5368
   34.0000   -0.0553
   35.0000   -1.1250
   36.0000    0.5368

```

Finalmente, calculamos las fuerzas internas en los elementos. Ilustraremos este paso de nuevo con los elementos 7 y 8:

```

D_7=D (g_7) ;
p_7=k_7*T_7*D_7

p_7 =

    450.0000
   -48.3479
   -71.0956
  -450.0000

```


48.3479
-73.9480

$D_8 = D(g_8);$
 $p_8 = k_8 * T_8 * D_8 + r_8$

$p_8 =$

4.9475
150.0000
144.0618
-4.9475
150.0000
-144.0618

5.5. Fuerzas sísmicas - Método de la fuerza horizontal equivalente

En esta sección describiremos los pasos necesarios para calcular las fuerzas y pares de torsión derivados de la acción de los sismos por el método simplificado que permite la Norma NSR-10, conocido con el nombre de *Método de la fuerza horizontal equivalente*. Más adelante en este capítulo se ilustra la aplicación del *Método del análisis dinámico*.

5.5.1. Fuerzas

En primer lugar se determina una aproximación del *periodo de la estructura*, definido como el tiempo necesario para que el edificio realice un ciclo completo en vibración libre:

$$T = CZ^\alpha \quad (5.2)$$

donde Z es la altura total del edificio y C, α son valores empíricos que dependen del tipo de estructura. Así, $C = 0,047, \alpha = 0,9$ para edificios de pórticos de concreto, $C = 0,072, \alpha = 0,8$ para edificios aporticados de acero y $C = 0,073, \alpha = 0,75$ para edificios de acero con pórticos arriostrados.

A continuación se estima la *aceleración espectral de respuesta del edificio* S_a , definida como la máxima aceleración de una estructura equivalente de un grado de libertad bajo la acción del sismo de diseño. Éste, a su vez, se define como el evento que tiene una probabilidad de 0.1 de ser excedido en el tiempo esperado de vida útil de la construcción (50 años).

$$S_a = \begin{cases} \frac{2,5A_a F_a I}{R} & \text{si } T < T_C \\ \frac{1,2A_v F_v I}{RT} & \text{si } T_C \leq T < T_L \\ \frac{1,2A_v F_v T_L I}{RT^2} & \text{si } T \geq T_L \end{cases} \quad (5.3)$$

con

$$T_C = 0,48 \frac{A_v F_v}{A_a F_a}; \quad T_L = 2,4 F_v \quad (5.4)$$

El significado de los parámetros es el siguiente:

1. Los parámetros A_a, A_v definen la aceleración máxima, como fracción de la aceleración de la gravedad, esperada en la región en un lapso de 475 años, lo que, en un enfoque probabilista, corresponde a una probabilidad de 0.1 de ser excedida en un lapso de 50 años. En otras palabras, si se acepta que la vida media de las estructuras es igual a este último valor, en dicho tiempo cabe esperar un sismo de aceleración máxima alrededor de A_a, A_v , con una probabilidad moderada (0.1) de que ocurra un sismo de mayor intensidad. Los valores de este parámetro para las diferentes regiones del país se pueden consultar en la norma.
2. Los parámetros F_a, F_v definen el tipo de suelo bajo la estructura en particular. Los valores respectivos deben identificarse cuidadosamente a partir de las pautas dadas en la norma. En general, puede decirse que los valores dependen de la flexibilidad del conjunto de estratos del terreno, la cual a su vez está determinada por la naturaleza misma del suelo y por altura de cada estrato. Así, los valores menores corresponden a rocas o suelos duros de poco espesor, mientras que los mayores a suelos blandos de gran espesor.
3. El parámetro I define la importancia de la edificación desde el punto de vista de los desastres sísmicos. En este sentido hay edificaciones claramente indispensables para la atención de la emergencia sísmica, tales como hospitales, centrales telefónicas, etc. ($I = 1,5$); edificaciones para atención de la población, tales como estaciones de policía, bomberos, etc. ($I = 1,25$); estructuras de alta ocupación, tales como teatros, universidades, estadios, etc. ($I = 1,1$); para las estructuras restantes $I = 1$.
4. El parámetro R es denominado *coeficiente de capacidad de disipación de energía* y se aplica para reducir las fuerzas de diseño y permitir así la disipación de energía en el campo inelástico en el sismo de diseño.

Finalmente se estiman las fuerzas en cada piso por medio de la fórmula siguiente:

$$H_j = \frac{m_j z_j^k}{\sum_i m_i z_i^k} M S_a g \quad (5.5)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, m_j es la masa del piso j , M es la masa total del edificio,

$$M = \sum_i m_i, \quad (5.6)$$

z_j es la altura del piso j medida desde la base del edificio y k es un exponente que le da cierta forma parabólica a la distribución vertical de las fuerzas:

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si } T < 0,5 \\ 0,75 + 0,5T & \text{si } 0,5 \leq T < 2,5 \\ 2 & \text{si } T \geq 2,5 \end{cases} \quad (5.7)$$

5.5.2. Pares de torsión

Además de aplicar las fuerzas H , la norma también requiere que se apliquen pares de torsión accidental dados en cada piso por

$$B = He \quad (5.8)$$

donde e es la excentricidad accidental que surge de posibles asimetrías en la distribución de la masa, la resistencia o la rigidez que resultan como consecuencia de la incertidumbre asociada a estos parámetros. El valor de e es igual al 5 por ciento de la longitud del piso j en la dirección perpendicular a H . La torsión que generan estos pares se agrega a la que produce la asimetría de la rigidez explicada anteriormente, H_θ , que es tomada en cuenta de manera implícita en la generación de la matriz de rigidez del edificio S (ecuación 5.45). En otras palabras, el par torsional es B , si las fuerzas se consideran aplicadas en el centro de masa, pero sería $B + H_\theta$ si las fuerzas se trasladaran al centro de rigidez. En consecuencia, cuando la matriz de rigidez S se genera con matrices de transformación A al centro de masa, de la manera descrita anteriormente, el cálculo de H_θ no resulta necesario.

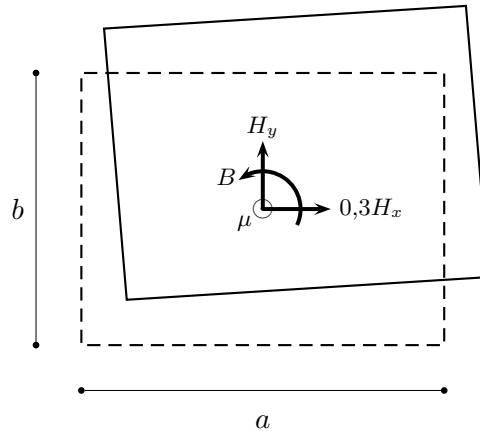


Figura 5.8: Acción sísmica bidireccional y torsión accidental.

5.5.3. Acción bidireccional

En vista de que la acción sísmica se desarrolla en dirección aleatoria en cada instante de tiempo, la fuerza en cada piso se descompone en dos fuerzas ortogonales de valor cambiante. Como es poco probable que las dos fuerzas H_x y H_y alcancen su valor máximo de manera simultánea (dado por la ecuación 5.5), la norma especifica que se debe combinar el 100 % de la fuerza en una dirección con el 30 % en la perpendicular. Además, como el movimiento sísmico es vibratorio, se debe contemplar la

posibilidad de que las fuerzas H_j cambien de signo, es decir $\pm H_j$. De esta manera, para contemplar las diversas situaciones se establecen las combinaciones

$$\begin{aligned} \pm H_x \pm 0,3H_y \\ \pm 0,3H_x \pm H_y \end{aligned} \quad (5.9)$$

cuyo número total es ocho. En consecuencia, los pares de torsión correspondientes son los siguientes:

$$\begin{aligned} \pm H_x e_y \pm 0,3H_y e_x \\ \pm 0,3H_x e_y \pm H_y e_x \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde, con referencia a la figura 5.8, $e_x = 0,05a$ y $e_y = 0,05b$.

5.6. Ensamblaje de pórticos planos

El análisis de edificios con diafragma rígido puede realizarse de dos maneras:

- Como un ensamblaje de pórticos planos realizado por el diafragma rígido.
- Como un único pórtico espacial con ciertos grados de libertad coordinados por el diafragma rígido.

A continuación expondremos en detalle el primero de estos dos métodos, mientras que el segundo se expondrá en el capítulo siguiente. Es de anotar, sin embargo, que, aunque el segundo es más riguroso, los resultados que arroja el primero son muy similares.

5.6.1. Condensación de las matrices de rigidez de pórticos planos

Por las razones explicadas anteriormente, para el análisis de edificios resulta conveniente separar los efectos de los desplazamientos laterales de los correspondientes a rotaciones y movimientos verticales de los nodos. Para realizar esta separación se realiza el procedimiento llamado *condensación estática*, en el cual las fuerzas asociadas a los grados de libertad diferentes a los desplazamientos laterales se consideran nulas. Por otra parte, si se quiere ser estrictamente consistente con la hipótesis de diafragma rígido, se debe suponer que las vigas no sufren deformación axial, ya que de otra manera se estaría permitiendo deformaciones del diafragma en su propio plano. Esto implica que solamente es necesario un grado de libertad horizontal por piso, puesto que los dos extremos de cada viga se desplazarán una cantidad igual, y, por tanto, la condensación estática ha de realizarse a partir de una matriz de rigidez del pórtico K ensamblada según los grados de libertad que muestra la figura 5.9. En todo caso, la supresión del grado de libertad mencionado no tiene una importancia cuantitativa muy alta y, además, la rigidez real del diafragma en su propio plano no es, literalmente, infinita. El problema se puede simplificar aún más si se desprecian las deformaciones axiales de las columnas, lo cual implica considerar, como grados de libertad secundarios, solamente los giros en los nodos.

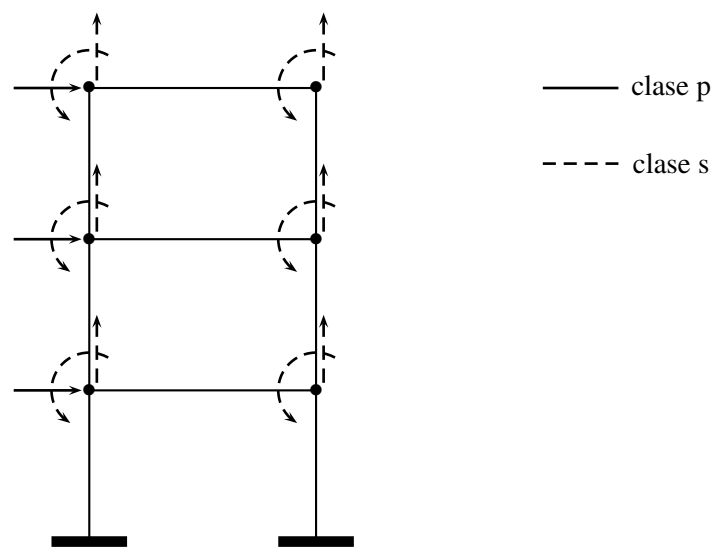


Figura 5.9: Grados de libertad móviles considerados en el cálculo de la matriz condensada.

La formación de la matriz de rigidez con los grados de libertad mostrados en la figura 5.9 implica que, para las columnas, se han de considerar 3 grados de libertad por nodo, lo que implica usar como matriz del elemento en coordenadas locales la matriz convencional

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

con la matriz de transformación usual:

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \eta & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales se obtiene de la manera usual:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \quad (5.13)$$

Como se indicó en el Capítulo 4, para columnas perfectamente verticales, se puede hacer uso directo de la matriz del elemento en coordenadas globales, así:

1. Columnas verticales con numeración de nodos de abajo hacia arriba ($\beta = 90^\circ$). En este caso, $\eta = 0$, $\mu = 1$ y la ecuación (5.13) da como resultado

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

2. Columnas verticales con numeración de nodos de arriba hacia abajo ($\beta = -90^\circ$). En este caso, $\eta = 0$, $\mu = -1$ y la ecuación (5.13) da como resultado

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

En las vigas, si se suprimen las deformaciones axiales como se dijo antes, se puede usar, o bien la matriz de 4 grados de libertad considerada en el capítulo 3,

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Para la matriz de transformación \mathbf{T}_e , al anular la posibilidad de deformación axial, la fuerza axial N resulta igualmente nula. Por tanto, en la ecuaciones (2.8), tenemos:

$$\begin{aligned} Y &= N \sin \beta + V \cos \beta \\ &= V \cos \beta \end{aligned} \quad (5.17)$$

sin que sea necesaria una ecuación para X . Al incorporar la relación entre los momentos de los sistemas local y global $Z = M$, la matriz de transformación para vigas queda así:

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

de suerte que si $\beta = 0$, como es usual, $\eta = \cos \beta = 1$ y la matriz de transformación se reduce a la matriz idéntica, $\mathbf{T}_e = \mathbf{I}$. Si la viga es perfectamente horizontal, $\mathbf{K}_e = \mathbf{k}_e$.

Para realizar el ensamblaje de K simplemente se ha de tener presente que el grado de libertad horizontal en cada piso está asociado a la fuerza rige para *todas* las columnas que se llegan a él, sea en su extremo superior o inferior. Este ensamblaje se ilustrará más adelante con ejemplos. Una vez formada la matriz de rigidez K , se puede descomponer en sus submatrices K_{aa} , K_{ab} , K_{ba} y K_{bb} de la manera usual.

Si en el vector de desplazamientos D_b , que surge de resolver el problema

$$P_b = K_{bb} D_b, \quad (5.19)$$

se hace una partición adicional según dos tipos de grados de libertad, principales (tipo p) secundarios (tipo s), la matriz de rigidez correspondiente, formulada según el conjunto completo de grados de libertad ($b = p \cup s$), puede condensarse para obtener una matriz menor, de tamaño $p \times p$. Para ello se hacen nulas las fuerzas asociadas a los grados de libertad secundarios en un problema estático:

$$P_b = \begin{pmatrix} P_p \\ P_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

En consecuencia, la matriz K_{bb} se descompone en

$$K_{bb} = \begin{pmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

y el problema planteado toma la forma

$$\begin{pmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_p \\ D_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

De aquí se deduce que

$$K_{pp} D_p + K_{ps} D_s = P_p \quad (5.23)$$

$$K_{sp} D_p + K_{ss} D_s = 0 \quad (5.24)$$

y, por tanto,

$$D_s = -K_{ss}^{-1} K_{sp} D_p \quad (5.25)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (5.23), se llega finalmente a

$$P_p = C D_p \quad (5.26)$$

donde C es la matriz condensada según los grados de libertad principales, de valor

$$C = K_{pp} - K_{ps} K_{ss}^{-1} K_{sp} \quad (5.27)$$

Obsérvese que este cálculo requiere la inversión de la matriz K_{ss} , la cual puede llegar a tener un gran tamaño en pórticos corrientes. Por tanto, los programas de computador profesionales aplican

métodos diferentes que requieren menos operaciones. Pero, salvo errores de redondeo, el resultado es equivalente al que da la ecuación (5.27).

Antes de ilustrar el cálculo de la matriz condensada con ejemplos, es importante explicar su interpretación física. La ecuación (5.27) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}_{pp} - \Delta \mathbf{K}_{pp} \quad (5.28)$$

con $\Delta \mathbf{K}_{pp} = \mathbf{K}_{ps} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sp}$. En esta forma, puede verse que la condensación implica un debilitamiento de la matriz \mathbf{K}_{pp} . Esta última, a su vez, representa la interacción de los grados de libertad principales entre sí. Con referencia a la definición de la matriz de rigidez, el término $k_{ij} \equiv (\mathbf{K}_{pp})_{ij}$ representa la fuerza en el piso i cuando en el piso j tiene lugar un desplazamiento unitario, manteniendo todos los demás desplazamientos y todos los giros iguales a cero. Esto indica que una matriz de rigidez igual a \mathbf{K}_{pp} se obtendría con un modelo de edificio en el cual las vigas tuviesen rigidez infinita a flexión, puesto que así los giros en los nodos son también nulos (figura 5.10). Este modelo se denomina *viga de cortante*, por razones que explicaremos a continuación.

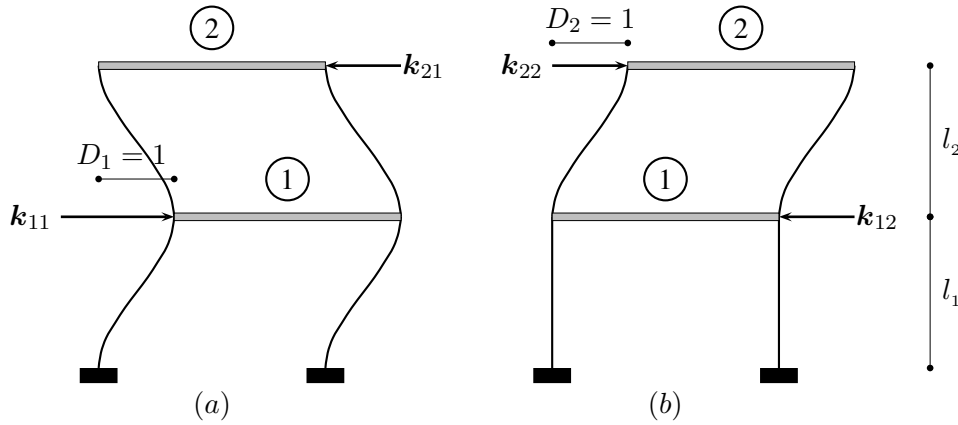


Figura 5.10: Viga de cortante.

La fuerza necesaria para causar una traslación unitaria de una columna de longitud l y rigidez de curvatura EI es $12EI/l^3$. En consecuencia, para el pórtico deformado de la figura 5.10a, la rigidez k_{11} es la necesaria para causar un desplazamiento unitario de las dos columnas del piso 1 y las dos del piso 2. Si las columnas de cada piso son iguales entre sí, tenemos

$$k_{11} = 2 \times \frac{12EI_1}{l_1^3} + 2 \times \frac{12EI_2}{l_2^3} = \frac{24EI_1}{l_1^3} + \frac{24EI_2}{l_2^3} \quad (5.29)$$

Por otra parte, la rigidez k_{21} es la fuerza que se debe aplicar en el piso 2 para evitar su desplazamiento, dado que ha ocurrido una traslación unitaria en el piso 1. En consecuencia,

$$\mathbf{k}_{21} = -\frac{24EI_2}{l_2^3} \quad (5.30)$$

Análogamente, cuando se impone a la estructura un desplazamiento unitario en el piso 2, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{12} &= -\frac{24EI_2}{l_2^3} \\ \mathbf{k}_{22} &= \frac{24EI_2}{l_2^3} \end{aligned} \quad (5.31)$$

de acuerdo con la figura 5.10b. Como resultado, la matriz de rigidez del pórtico completo es

$$\mathbf{k} = 24E \begin{pmatrix} \frac{I_1}{l_1^3} + \frac{I_2}{l_2^3} & -\frac{I_2}{l_2^3} \\ -\frac{I_2}{l_2^3} & \frac{I_2}{l_2^3} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

La generalización para una viga de cortante de n pisos con r_i columnas en cada nivel i es inmediata:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 & \dots & 0 \\ -\kappa_2 & \kappa_2 + \kappa_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \kappa_{n-1} + \kappa_n & -\kappa_n \\ 0 & \dots & -\kappa_n & \kappa_n \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

En esta ecuación

$$\kappa_i = \sum_{j=1}^{r_i} \frac{12EI_j}{l_i^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Este modelo se denomina de cortante por la razón siguiente: Si consideramos un problema estático con $n = 2$, por simplicidad, tendremos dos fuerzas aplicadas H_1 y H_2 , tales que

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 \\ -\kappa_2 & \kappa_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Las fuerzas cortantes acumuladas desde el segundo nivel valen

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 + H_2 \\ H_2 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

Si llamamos *deriva del piso i* , d_i , al desplazamiento relativo de un piso i con respecto al anterior ($i - 1$) se puede concluir fácilmente que

$$\begin{aligned} d_1 &= D_1 = \frac{V_1}{\kappa_1} \\ d_2 &= D_2 - D_1 = \frac{V_2}{\kappa_2} \end{aligned} \quad (5.36)$$

lo cual indica que para este tipo de sistemas, en cada piso la deriva es igual a la fuerza cortante dividida por la rigidez, lo cual explica su denominación. Obsérvese, de paso, la semejanza existente entre la ecuación

$$d_i = \frac{V_i}{\kappa_i}$$

y la que vincula la distorsión angular γ a la tensión cortante τ en resistencia de materiales:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

donde G es el módulo de rigidez. El paralelo entre ambas expresiones no es casual, ya que en vigas de cortante la distorsión angular de un nivel cualquiera i estaría dada por la relación entre la deriva del piso y su altura con respecto al nivel inmediatamente inferior.

La matriz \mathbf{k} así obtenida es equivalente a la submatrix \mathbf{K}_{pp} de un pórtico convencional. Esto demuestra lo enunciado anteriormente, a saber que la matriz condensada \mathbf{C} de un pórtico se puede interpretar como un debilitamiento de la matriz de rigidez de una viga de cortante $\mathbf{k} = \mathbf{K}_{pp}$, debido a la posibilidad de giros en los nodos, la cual no tiene lugar en ella pero sí en el pórtico.

5.6.2. Ejemplo 5.2: Matriz de rigidez condensada de un pórtico

En este ejemplo calcularemos la matriz de rigidez del pórtico simple mostrado en la figura 5.11a y la correspondiente matriz condensada, según los tres grados de libertad que aparecen allí solamente. Para simplificar el análisis, prescindiremos de las rigideces a fuerzas axiales tanto en las vigas como en las columnas. Esto tiene dos implicaciones. La primera, es que la matriz de rigidez elemental de todos los elementos es la propia de vigas, dada por la ecuación (5.16). La segunda es que, al no considerar deformación axial de la viga, sólo se requiere un grado de libertad horizontal D_1 , puesto que los dos extremos de la misma se desplazarán una cantidad igual, como ya ha quedado dicho.

Bajo estas consideraciones, la primera columna de la matriz se obtiene de la manera indicada en la figura 5.11b, haciendo $D_1 = 1$ y manteniendo $D_2 = D_3 = 0$. Por tanto,

$$k_{11} = \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} = \frac{24EI}{h^3}$$

$$k_{21} = \frac{6EI}{h^2}$$

$$k_{31} = \frac{6EI}{h^2}$$

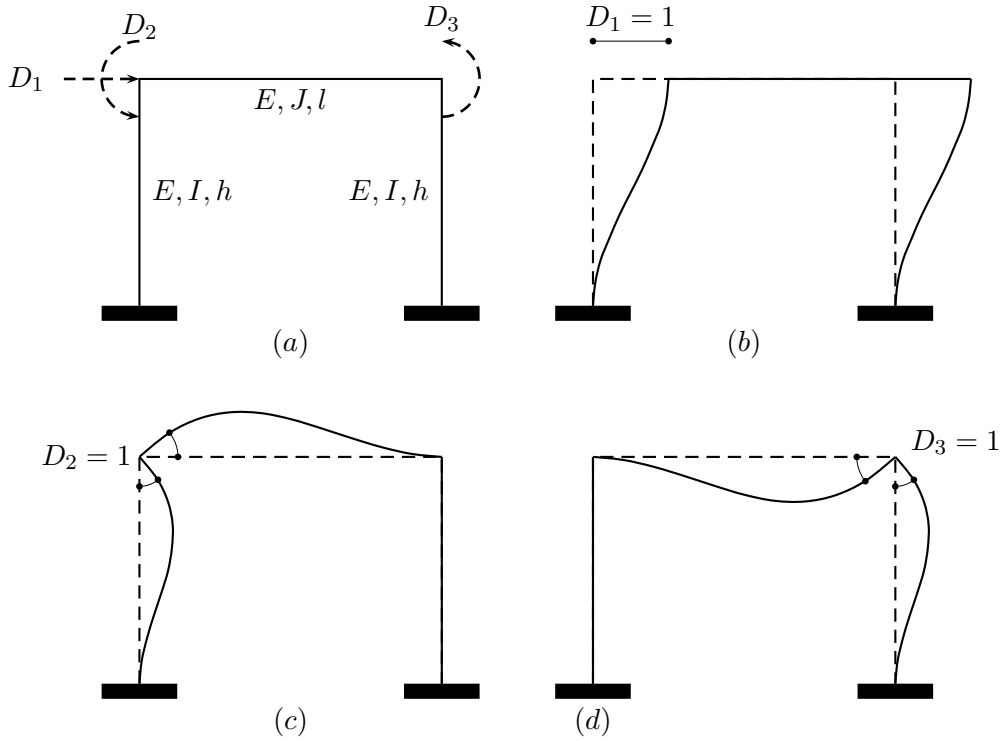


Figura 5.11: Construcción de la matriz de rigidez de un pórtico - Método directo.

en donde la rigidez k_{11} expresa la fuerza total necesaria para causar el desplazamiento unitario indicado, lo que implica a las dos columnas, mientras que las fuerzas k_{21} y k_{31} son fuerzas meramente reactivas necesarias para impedir los giros en los grados de libertad 2 y 3. Análogamente, la segunda columna corresponde a la situación ilustrada por la figura 5.11b, es decir, $D_2 = 1$, $D_1 = 0$, $D_3 = 0$. Por tanto,

$$k_{22} = \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l}$$

$$k_{12} = \frac{6EI}{h^2}$$

$$k_{32} = \frac{2EJ}{l}$$

De manera similar se obtienen los elementos de la tercera columna:

$$k_{33} = \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l}$$

$$k_{13} = \frac{6EI}{h^2}$$

$$k_{23} = \frac{2EJ}{l}$$

En consecuencia, la matriz de rigidez, según los grados de libertad de tipo estático, es

$$K = \begin{pmatrix} \frac{24EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & \frac{6EI}{h^2} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{2EJ}{l} & \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

Para el pórtico simple usado como ejemplo en el capítulo 4, la matriz de rigidez fue formada según las simplificaciones mencionadas anteriormente. En este caso, $p = 1$, $s = 2$ y, por tanto, las submatrices implicadas valen

$$K_{pp} = \left(\frac{24EI}{h^3} \right)$$

$$K_{ps} = \left(\frac{6EI}{h^2} \quad \frac{6EI}{h^2} \right)$$

$$K_{ss} = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ \frac{2EJ}{l} & \frac{4EI}{h} + \frac{4EJ}{l} \end{pmatrix}$$

mientras que $K_{sp} = K_{ps}^T$

5.6.3. Ejemplo 5.3: Matriz de rigidez condensada de un pórtico

Consideremos el pórtico mostrado en la figura 5.12. Todas las barras tienen un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, área 0.2 m^2 y momento de inercia 0.004 m^4 . Se pretende calcular la matriz de rigidez condensada de acuerdo con los grados de libertad mostrados en la figura 5.13: los principales son $p = [2 \ 3]$ mientras que los secundarios son $s = [8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15]$.

Comenzaremos por definir las cantidades básicas:

```
% M\{'o}dulo de elasticidad:
```

```
E=2e8;
```

```
% \ 'Areas, inercias y longitudes:
```

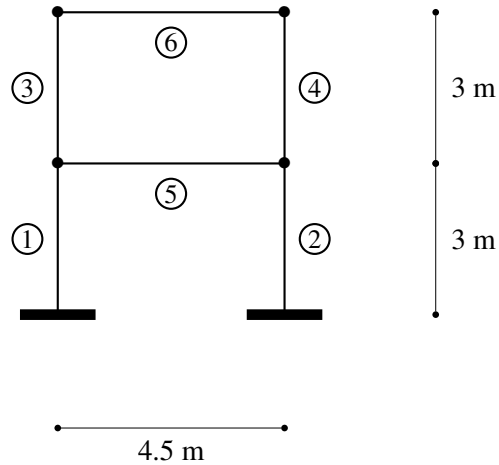


Figura 5.12: Ejemplo de cálculo de la matriz condensada.

```
A=0.2;
I=0.004;
l_1=3;
l_2=4.5;
```

Pasamos ahora a calcular las matrices de rigidez de los elementos en coordenadas locales. Para las columnas (elementos 1 a 4), según la ecuación (5.11), tenemos:

```
k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0     -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3     6/l^2     0     -12/l^3     6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2     4/l      0     -6/l^2     2/l];
k_1(4,:)=E*A*[-1/l     0      0      1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0     -12/l^3    -6/l^2     0      12/l^3    -6/l^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2     2/l      0     -6/l^2     4/l];

k_2=k_1;
k_3=k_1;
k_4=k_1;
```

Para las vigas, según la ecuación (5.16),

```
k_5=zeros(4,4);
l=l_2;
k_5(1,:)=E*I*[ 12/l^3    6/l^2   -12/l^3    6/l^2];
k_5(2,:)=E*I*[ 6/l^2    4/l     -6/l^2    2/l];
k_5(3,:)=E*I*[ -12/l^3   -6/l^2    12/l^3   -6/l^2];
k_5(4,:)=E*I*[ 6/l^2    2/l     -6/l^2    4/l];

k_6=k_5;
```

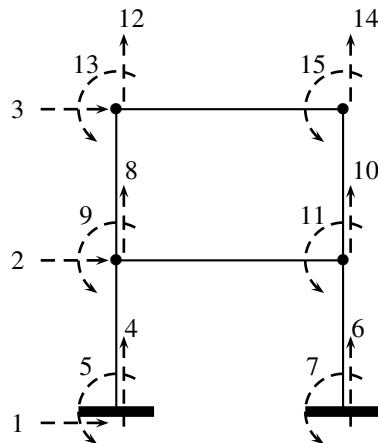


Figura 5.13: Grados de libertad considerados en el primer cálculo de la matriz condensada.

Procedemos ahora al ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura de acuerdo con lo explicado anteriormente. Obsérvense los grados de libertad en la numeración global en la figura 5.13. Así, para el elemento 1 (columna), se deben establecer las correspondencias entre los grados de libertad locales, que para todas las columnas es [1 2 3 4 5 6], con los globales [1 4 5 2 8 9]. Para el elemento 2, la correspondencia debe ser con los grados de libertad [1 6 7 2 10 11], para el 3 con [2 8 9 3 12 13] y para el 4 con [2 10 11 3 14 15]. Por otra parte, los cuatro grados de libertad de la viga 5 en coordenadas locales, [1 2 3 4], se deben poner en correspondencia con [8 9 10 11], mientras que para la viga 6 con [12 13 14 15]. El proceso completo de cálculo es el siguiente:

```

K=zeros(15,15);

g_1=[1 4 5 2 8 9];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(15,15);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[1 6 7 2 10 11];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(15,15);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[2 8 9 3 12 13];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(15,15);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

g_4=[2 10 11 3 14 15];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_4= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];

```



```

        0    0    0    0    0    1];
K_4=T_4'*k_4*T_4;
DeltaK_4=zeros(15,15);
DeltaK_4(g_4,g_4)=K_4;
K=K+DeltaK_4;

g_5=[8 9 10 11];
beta=0;
eta=cosd(beta);
T_5= [eta  0    0    0    ;...
      0    1    0    0    ;...
      0    0    eta  0    ;...
      0    0    0    1];
K_5=T_5'*k_5*T_5;
DeltaK_5=zeros(15,15);
DeltaK_5(g_5,g_5)=K_5;
K=K+DeltaK_5;

g_6=[12 13 14 15];
beta=0;
eta=cosd(beta);
T_6= [eta  0    0    0    ;...
      0    1    0    0    ;...
      0    0    eta  0    ;...
      0    0    0    1];
K_6=T_6'*k_6*T_6;
DeltaK_6=zeros(15,15);
DeltaK_6(g_6,g_6)=K_6;
K=K+DeltaK_6;

```

La partición de la matriz de rigidez según los grados de libertad restringidos y móviles se hace de la manera usual:

```

a=[1 4:7]'; b=[2 3 8:15]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);

```

Este paso, sin embargo, no es necesario para obtener la matriz condensada, ya que podemos realizar directamente la partición requerida para ese fin:

```

p=[2 3]'; s=(8:15)';

K_pp=K(p,p);
K_ps=K(p,s);
K_sp=K(s,p);
K_ss=K(s,s);

C=K_pp-K_ps*(K_ss\K_sp);

```

con el resultado

C =

```
1.0e+006 *
    1.1402    -0.4749
   -0.4749     0.3346
```

Alternativamente, se puede calcular la matriz con la matriz de rigidez global del pórtico con tres grados de libertad por nodo, pero empleando para las vigas un área mucho mayor. Con el fin de ilustrar esta técnica para el pórtico bajo análisis, usaremos los grados de libertad adicionales 16 a 18 que se ilustran en la figura 5.14 y un área 1000 veces mayor para las vigas, con el fin de que sus deformaciones axiales sean insignificantes. Las modificaciones esenciales del programa son las siguientes:

- Matriz de rigidez de las vigas

```
A1=1000*A;

k_5=zeros(6,6);
l=1_2;

k_5(1,:)=E*A1*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_5(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_5(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_5(4,:)=E*A1*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_5(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_5(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

k_6=k_5;
```

- Contribución de las vigas a la matriz global:

```
g_5=[2 8 9 17 10 11];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_5= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_5=T_5'*k_5*T_5;
DeltaK_5=zeros(18,18);
DeltaK_5(g_5,g_5)=K_5;
K=K+DeltaK_5;
```

```

g_6=[3 12 13 18 14 15];
beta=0;
eta=cosd(beta);
T_6= [ eta  mu  0    0    0    0;...
      -mu  eta  0    0    0    0;...
        0    0  1    0    0    0;...
        0    0  0    eta  mu  0;...
        0    0  0   -mu  eta  0;...
        0    0  0    0    0  1];
K_6=T_6'*k_6*T_6;
DeltaK_6=zeros(18,18);
DeltaK_6(g_6,g_6)=K_6;
K=K+DeltaK_6;

```

- Grados de libertad restringidos y libres:

```

a=[1 4:7 16]'; b=[2 3 8:15 17:18]';

p=[2 3]'; s=[8 9 10 11 12 13 14 15 17 18]';

```

Con estas modificaciones, la matriz condensada resulta ser:

```

C =

1.0e+06 *

    1.1401    -0.4749
   -0.4749     0.3346

```

que difiere muy poco de la anterior. Este método tiene la ventaja de que se puede emplear con la numeración automática de tres grados de libertad por nodo, sin necesidad de hacer las consideraciones especiales que exige el anterior.

5.6.4. Matriz de rigidez del edificio

La formación de la matriz de rigidez de la estructura completa, sobre la base de tres grados de libertad por piso, se hace de la misma manera que la correspondiente a la matriz global de rigidez de una estructura plana a partir de la matriz de rigidez de sus elementos, es decir, transfiriendo la información del sistema local al global, que normalmente tiene como origen el centro de masa μ , de coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) , ya que es el sitio de aplicación de la resultante de las fuerzas inerciales. Consideremos la figura 5.15, en la que sobre el plano del diafragma aparece una línea que representa al pórtico i cuya matriz de rigidez condensada según los desplazamientos laterales es C_i . La dimensión

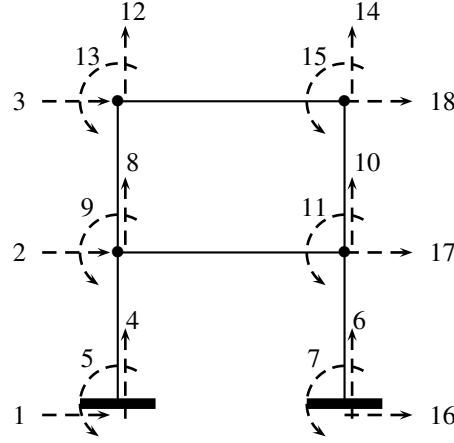


Figura 5.14: Grados de libertad considerados en el segundo cálculo de la matriz condensada.

de esta matriz es, por tanto, igual al número de diafragmas de la estructura, que en este caso es igual a uno. Como sólo se consideran en el sistema local los grados de libertad de desplazamiento lateral, el vector de fuerzas desarrolladas por el pórtico a lo alto del edificio es \mathbf{h}_i , que en este caso se puede presentar como una simple fuerza h_i . En el sistema global estas fuerzas equivalen a

$$\begin{aligned} H_{x,i} &= h_i \cos \beta \\ H_{y,i} &= h_i \sin \beta \\ H_{\varrho,i} &= h_i[(\bar{y} - y_i) \cos \beta - (\bar{x} - x_i) \sin \beta] \end{aligned} \quad (5.38)$$

lo cual se puede representar en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_{\varrho} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ (\bar{y} - y) \cos \beta - (\bar{x} - x) \sin \beta \end{pmatrix}_i h_i \quad (5.39)$$

lo cual se puede presentar en la forma

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{h}_i \quad (5.40)$$

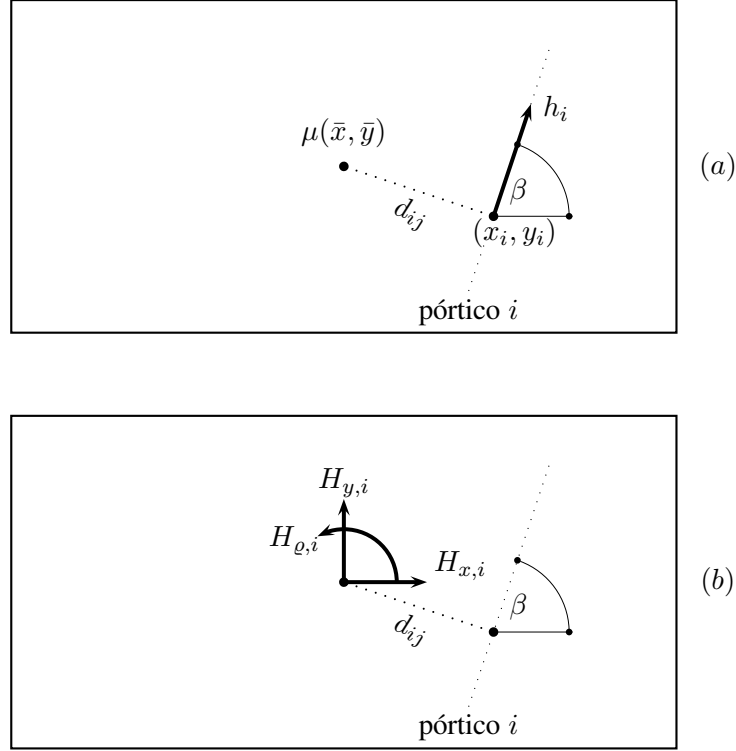


Figura 5.15: Equivalencia de fuerzas en un diafragma rígido que ensambla pórticos planos. (a): Fuerza en el sistema local. (b): Fuerzas equivalentes en el sistema global.

donde A_i es la matriz de transformación de la fuerza del pórtico i al centro de gravedad. Para un edificio de m pisos se tiene, en consecuencia,

$$H_i = A_i^T h_i \quad (5.41)$$

con la matriz de transformación definida ahora por

$$\mathbf{A}_i^T = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & 0 & \dots & 0 \\ \sin \beta_i & 0 & \dots & 0 \\ d_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \cos \beta_i \\ 0 & \dots & 0 & \sin \beta_i \\ 0 & \dots & 0 & d_{im} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

donde d_{ij} es la distancia del pórtico i al centro de gravedad del piso j :

$$d_{ij} = [(\bar{y} - y) \cos \beta - (\bar{x} - x) \sin \beta]_{ij} \quad (5.43)$$

Ahora bien, la aplicación de la ley del contragradiante indica que la contribución del pórtico i a la matriz de rigidez global, de tamaño $3m \times 3m$ es

$$\Delta \mathbf{C}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i \quad (5.44)$$

donde \mathbf{C}_i es la matriz de rigidez condensada del pórtico i , ya que ella relaciona las fuerzas \mathbf{h}_i con los desplazamientos correspondientes, según la ecuación (5.26). En esta ecuación se asume que el pórtico tiene los mismos p pisos que el edificio. Si no es así, la matriz condensada del pórtico se embebe en una matriz \mathbf{C}_i de tamaño $p \times p$ que la contenga en los pisos a los que el pórtico contribuya, con ceros en las posiciones restantes, de manera semejante a lo hecho en capítulos anteriores respecto a las contribuciones $\Delta \mathbf{K}_i$ de elementos de estructuras. De esta suerte, la matriz de rigidez del edificio se obtiene por la superposición de las contribuciones de todos los pórticos:

$$\mathbf{S} = \sum_i \Delta \mathbf{C}_i \quad (5.45)$$

Nótese que el tamaño de la matriz de rigidez \mathbf{S} es $3p \times 3p$, donde p es el número de pisos. Esta matriz relaciona los vectores de desplazamientos y fuerzas del edificio según los 3 grados de libertad por piso mostrados en la figura 5.15:

$$\mathbf{H} = \mathbf{S} \mathbf{U} \quad (5.46)$$

Una vez calculado el vector \mathbf{U} , la aplicación de la ley del contragradiante indica que los desplazamientos horizontales de cada pórtico se pueden obtener por medio de la ecuación

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{A} \mathbf{U}, \quad (5.47)$$

con lo cual los movimientos de los grados de libertad secundarios \mathbf{D}_s pueden ser obtenidos por medio de la ecuación (5.25). Con esto queda completamente resuelto el problema de calcular los efectos del sistema de cargas global \mathbf{H} en todos los pórticos del edificio. Para cada pórtico, dado el vector $\mathbf{D} = (\mathbf{D}_p \ \mathbf{D}_s)^T$, la obtención de las reacciones y de fuerzas internas resultantes de la carga horizontal del edificio se realiza según lo descrito en el capítulo 4.

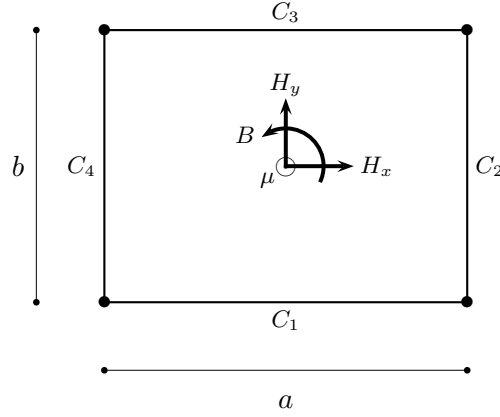


Figura 5.16: Ejemplo de cálculo de la matriz de rigidez de un edificio.

5.6.5. Ejemplo 5.4: Análisis de la asimetría

Consideremos la figura 5.16 en la que aparece un edificio de un piso sostenido por cuatro pórticos. Por tener un solo piso, cada pórtico tiene una matriz de rigidez condensada C_i de tamaño 1×1 , es decir, un escalar.

Supongamos inicialmente que el edificio es simétrico en rigidez, con $C_1 = C_3 = k_1$ y $C_2 = C_4 = k_2$. El centro de gravedad de la losa se encuentra en el punto de coordenadas $\mu(a/2, b/2)$. Evidentemente, los ángulos con el eje horizontal son $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = \beta_4 = 90$. La aplicación de las ecuaciones (5.42) y (5.43) da como resultado

$$\mathbf{A}_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

En consecuencia, de las ecuaciones (5.44) y (5.45) se obtiene finalmente que la matriz de rigidez del edificio para los tres grados de libertad mostrados en la figura 5.16 es

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2k_2 & 0 \\ 0 & 0 & (k_1 b^2 + k_2 a^2)/2 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

Ahora supongamos que el edificio presenta una asimetría en rigidez, determinada por el hecho de que $2C_1 = C_3 = 2k_1$ y $2C_2 = C_4 = 2k_2$, lo cual implica que el centro de rigidez κ se aleja del centro de gravedad μ y se acerca a la esquina superior izquierda del diafragma. Para este caso, el resultado es

$$S = \begin{pmatrix} 3k_1 & 0 & -k_1b/2 \\ 0 & 3k_2 & -k_2a/2 \\ -k_1b/2 & -k_2a/2 & 3(k_1b^2 + k_2a^2)/4 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

Comparemos las dos soluciones. Nótese que en la ecuación (5.48) la matriz resultante es diagonal mientras que en la (5.48) hay términos diferentes de cero en la tercera columna (y, por tanto, en la tercera fila, por ser la matriz de rigidez simétrica). Con referencia a la definición de la matriz de rigidez, los términos (1, 3) y (2, 3) corresponden a las fuerzas que se desarrollan en los pórticos horizontales y verticales, respectivamente, al tener lugar un giro unitario en el centro de masa. Por otra parte, el cero en (1, 2) refleja la falta de acoplamiento de los grados de libertad horizontal y vertical, pues el movimiento en una dirección es resistido exclusivamente por los pórticos orientados en ella. Este término y su simétrico (2, 1) serían diferentes de cero si hubiese al menos un pórtico que no fuese paralelo a ninguno de los dos ejes x e y .

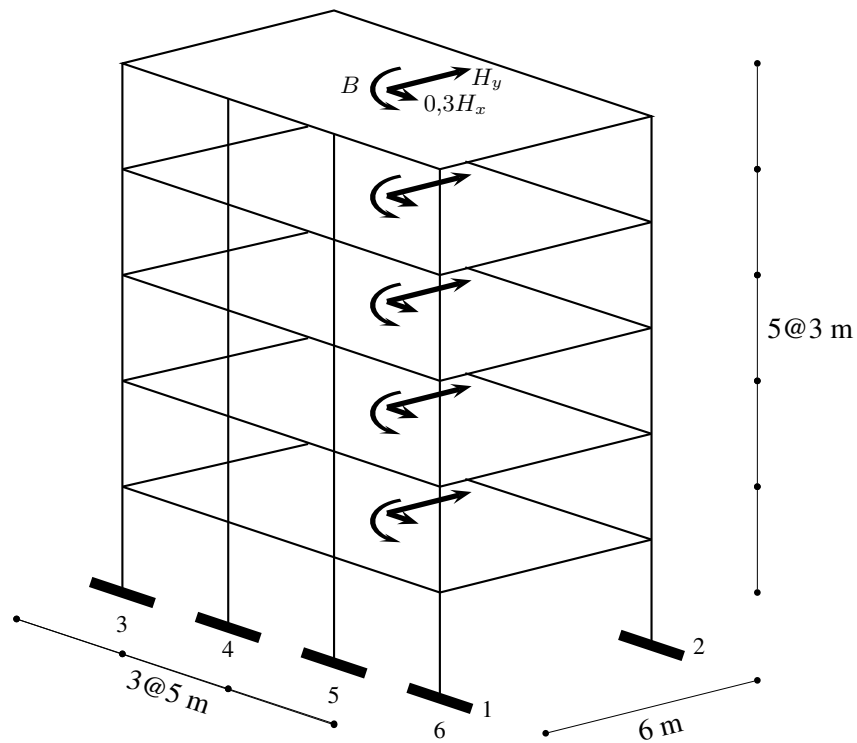


Figura 5.17: Edificio sometido a fuerzas sísmicas.

5.6.6. Resumen del análisis bajo cargas laterales

Presentamos a continuación un resumen del procedimiento para realizar el análisis de desplazamientos y fuerzas internas en un edificio:

- Para cada pórtico i del edificio, calcular:

- Matriz de rigidez:

$$K = \begin{pmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{pmatrix}$$

- Matriz de rigidez condensada:

$$K_{bb} = \begin{pmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{pmatrix}$$

$$C = K_{pp} - K_{ps}K_{ss}^{-1}K_{sp}$$

- Ensamblar la matriz de rigidez del edificio:

$$S = \sum_i A_i^T C_i A_i$$

- Resolver el problema de desplazamientos del edificio y cada combinación de cargas $j = 1, 2, \dots, 8$:

$$U_j = S^{-1}H_j$$

Obsérvese que este problema se puede resolver con una sola multiplicación matricial de la manera siguiente:

$$\mathcal{U} = S^{-1}\mathcal{H}$$

donde $\mathcal{U} = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_8]$ y $\mathcal{H} = [H_1 \ H_2 \ \dots \ H_8]$.

- Para cada pórtico i y cada combinación de cargas $j = 1, 2, \dots, 8$:

- Calcular los desplazamientos principales (horizontales):

$$D_p = AU$$

- Calcular los desplazamientos secundarios:

$$D_s = -K_{ss}^{-1}K_{sp}D_p$$

- Ensamblar el vector de desplazamientos:

$$D_b = \begin{pmatrix} D_p \\ D_s \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} D_a \\ D_b \end{pmatrix}$$

con $D_a = 0$.

- Calcular las reacciones en los apoyos:

$$P_a = K_{ab} D_b$$

- Para cada elemento e del pórtico:

- Calcular las fuerzas internas:

$$p_e = k_e T_e D_e$$

- Trazar los diagramas de axiales, cortantes y momentos flectores.

Las fuerzas internas así obtenidas se han de combinar con las causadas por fuerzas gravitatorias de acuerdo con las normas de diseño de los materiales.

5.6.7. Ejemplo 5.5: Edificio de 5 pisos

Consideremos ahora el mismo edificio de los ejemplos anteriores. El análisis corresponde ahora a la acción de fuerzas sísmicas. Nos limitaremos a la combinación $0,3H_x + H_y$ a la que se suma los momentos torsionales B que causan estas fuerzas, tal como indica la figura 5.17.

Tomaremos los valores $A_a = A_v = 0,25$, $F_a = F_v = 1,5$, $I = 1$, $R = 7$. Consideraremos solamente la combinación de fuerzas

$$0,3H_x + H_y$$

y sus correspondientes pares torsionales.

Fuerzas sísmicas

Calcularemos inicialmente el periodo de la estructura, según la ecuación (5.2):

$$Z=15;$$

$$T=0.047 \cdot Z^{0.9}$$

$$T =$$

$$0.5377$$

Por su parte, teniendo en cuenta que la losa pesa 10kN/m^2 , el vector de masa de los pisos es

```
m=10*15*6*ones(5,1)/9.8;
```

de suerte que la masa total M tiene por valor

```
M=sum(m)
```

```
M =
```

```
459.1837
```

Para el cálculo de las fuerzas se necesita el vector de alturas:

```
z=[3 6 9 12 15]';
```

así como la aceleración espectral. Como el periodo es superior a $T_C = 0,48$ e inferior a $T_L = 3,6$, tomaremos la segunda de las ecuaciones (5.3):

```
Sa=1.2*Av*Fv*I/(R*T)
```

```
Sa =
```

```
0.1195
```

Además, el factor k vale

```
k=0.75+0.5*T
```

```
k =
```

```
1.0189
```

De acuerdo con esto, el procedimiento para aplicar las ecuaciones (5.5), es el siguiente:

```
g=9.8;
```

```
mz=m.*(z.^k);
```

```
H_y=mz*Sa*g*M/sum(mz);
```

```
H_x=mz*Sa*g*M/sum(mz)
```

```
H_x =
```

```
35.0472
```

```
71.0176
```

```
107.3447
```

```
143.9056
```

```
180.6412
```

Para el cálculo del par torsional necesitamos las excentricidades en todos los pisos, cuyos valores son

```
e_y=0.3*ones(5,1);
```

```
e_x=0.75*ones(5,1);
```

lo que da como resultado

$$B = 0.3 \cdot H_x \cdot e_y + H_y \cdot e_x$$

B =

```
29.4397
59.6548
90.1696
120.8807
151.7386
```

Si en cada piso damos el primer número al grado de libertad en sentido x , el segundo al del sentido y y el tercero a la torsión, los vectores de grados correspondientes son

```
g_x=[1 4 7 10 13];
g_y=[2 5 8 11 14];
g_b=[3 6 9 12 15];
```

con lo cual el vector de fuerzas sísmicas se construye de la manera siguiente

```
H=zeros(15,1);
H(g_x)=0.3*H_x;
H(g_y)=H_y;
H(g_b)=B
```

H =

```
10.5142
35.0472
29.4397
21.3053
71.0176
59.6548
32.2034
107.3447
90.1696
43.1717
143.9056
120.8807
54.1924
180.6412
151.7386
```

Caso simétrico

Ahora debemos calcular la matrices de rigidez de los pórticos y del edificio por medio de las ecuaciones (5.44) y (5.45). En primer lugar, hay dos tipos de pórticos, uno en la dirección x , con tres vanos de 5 m, que aparece en los ejes 1 y 2, y otro en la dirección y , con un vano de 6 m, en los ejes

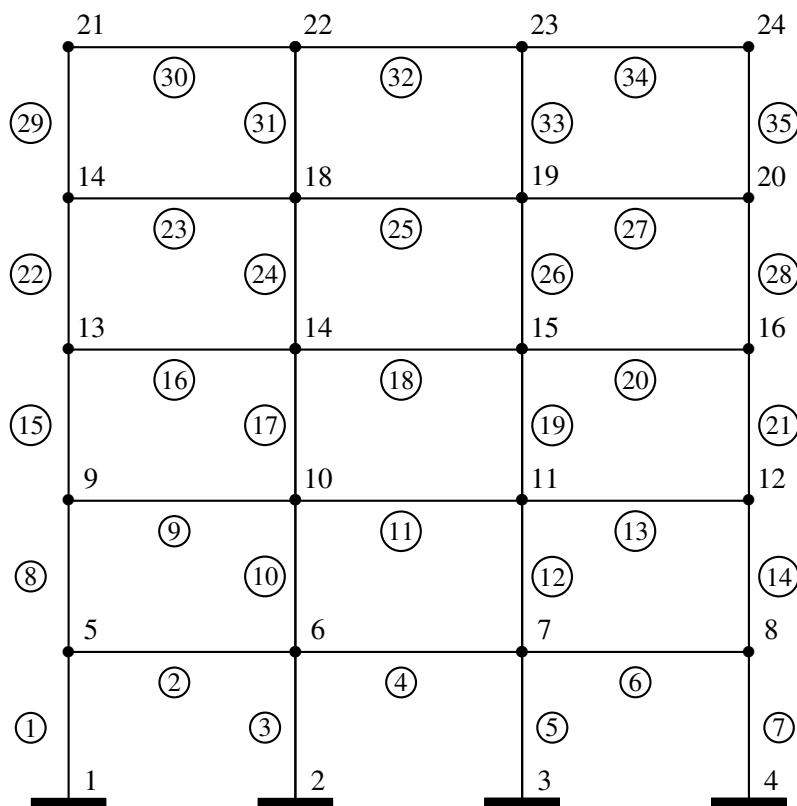


Figura 5.18: Pórtico de tres vanos y cinco pisos. Numeración de nodos y elementos.

3 a 6. La numeración de los elementos del primer tipo aparece en la figura 5.18, mientras que la del segundo en la figura 5.7. Calcularemos dos matrices condensadas C_x y C_y . Con referencia a la figura 5.6, nótese que, para los pórticos orientados en la dirección x el momento de inercia de las columnas vale $0,6 \times 0,5^3/12$, mientras que para los orientados en la dirección y el valor es $0,5 \times 0,6^3/12$. Para las vigas en ambos casos el momento de inercia es $0,4 \times 0,5^3/12$. Con estos datos, las matrices condensadas se obtienen con los programas

`ejemplo_5_5_Xcond`, `ejemplo_5_5_Ycond`

de la siguiente manera:

```
ejemplo_5_5_Xcond
C_x=C;
Kss_x=K_ss;
Kps_x=K_ps;
```

```
ejemplo_5_5_Ycond
C_y=C;
Kss_y=K_ss;
Kps_y=K_ps;
```

C_x =

```
1.0e+05 *

    3.7850   -2.2171    0.6332   -0.1194    0.0180
   -2.2171    3.1965   -2.1013    0.5976   -0.0865
    0.6332   -2.1013    3.1612   -2.0307    0.4551
   -0.1194    0.5976   -2.0307    2.8228   -1.2926
    0.0180   -0.0865    0.4551   -1.2926    0.9091
```

C_y =

```
1.0e+05 *

    2.6355   -1.5936    0.5345   -0.1158    0.0193
   -1.5936    2.1500   -1.4813    0.4923   -0.0773
    0.5345   -1.4813    2.1085   -1.3981    0.3501
   -0.1158    0.4923   -1.3981    1.7569   -0.7598
    0.0193   -0.0773    0.3501   -0.7598    0.4711
```

Ahora debemos generar las matrices de transformación A_i , de acuerdo con la ecuación (5.42). Para ese fin definiremos la siguiente matriz

```
A_p=[1 0 3; 1 0 -3; 0 1 -7.5; 0 1 -2.5; 0 1 2.5; 0 1 7.5];
```

que reúne los valores de $\cos \beta$, $\sin \beta$ y d_{ij} para cada pórtico en orden por filas. Luego trasladamos esta información a las posiciones adecuadas de una gran matriz y finalmente extraemos las submatrices respectivas para cada pórtico.

```
AA=zeros(30,15);
for k=1:6
    for i=1:5
        ik=(k-1)*5+i;
        g_i=[3*i-2 3*i-1 3*i];
        AA(ik,g_i)=A_p(k,:);
```

```

end
end

A_1=AA(1:5, :);
A_2=AA(6:10, :);
A_3=AA(11:15, :);
A_4=AA(16:20, :);
A_5=AA(21:25, :);
A_6=AA(26:30, :);

```

De esta manera, la matriz de rigidez del edificio, para los tres grados de libertad por piso mostrados en la figura 5.17, se obtiene por medio de la instrucción siguiente:

```

S=A_1'*C_x*A_1 + A_2'*C_x*A_2 + A_3'*C_y*A_3 + ...
  A_4'*C_y*A_4 + A_5'*C_y*A_5 + A_6'*C_y*A_6;

```

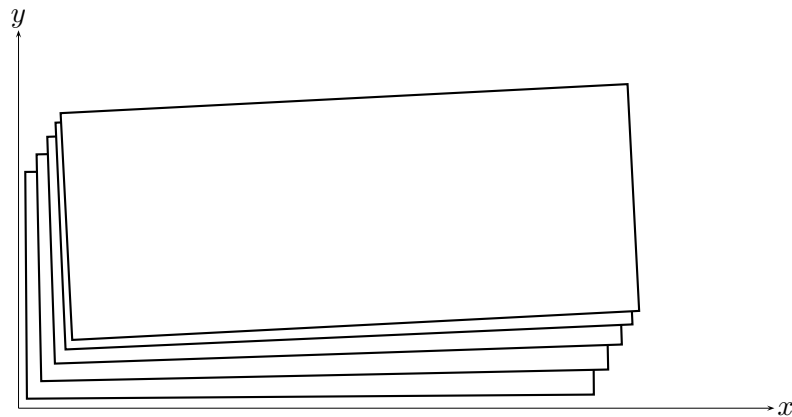


Figura 5.19: Desplazamientos de los pisos.

La solución del problema global (ecuación 5.46) $H = SU$ es

U =

```

0.0009
0.0031
0.0001
0.0024
0.0088
0.0002
0.0038

```

```

0.0147
0.0003
0.0049
0.0194
0.0004
0.0056
0.0227
0.0004

```

Los desplazamientos horizontales de los pórticos se obtienen por medio de la ecuación (5.47):

```

D_p1=A_1*U;
D_p2=A_2*U;
D_p3=A_3*U;
D_p4=A_4*U;
D_p5=A_5*U;
D_p6=A_6*U;

```

```
[D_p1 D_p2 D_p3 D_p4 D_p5 D_p6]
```

```
ans =
```

```

0.0011    0.0007    0.0026    0.0029    0.0033    0.0036
0.0030    0.0019    0.0075    0.0084    0.0093    0.0102
0.0047    0.0029    0.0124    0.0139    0.0154    0.0169
0.0061    0.0037    0.0165    0.0184    0.0204    0.0223
0.0069    0.0042    0.0193    0.0215    0.0238    0.0260

```

```
>>
```

Estos desplazamientos aparecen magnificados con un factor de 100 en la figura 5.19. Finalmente, los desplazamientos secundarios de los nodos de cada pórtico se obtienen por medio de la ecuación (5.25). Por ejemplo, para el pórtico 4,

```
D_s4=-Kss_y\ (Kps_y'*D_p4);
```

```
D_s4 =
```

```

-0.0014
-0.0014
-0.0017
-0.0017
-0.0015
-0.0015
-0.0011
-0.0011
-0.0007
-0.0007

```

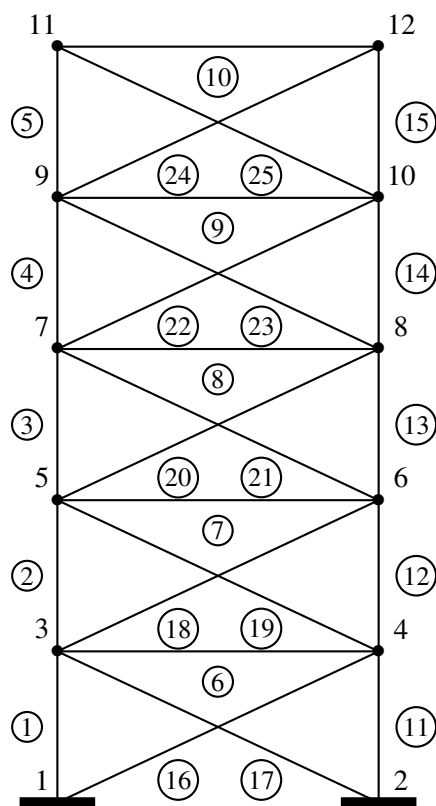



Figura 5.20: Pórtico con diagonales. Numeración de nodos y elementos.

Caso asimétrico

Consideremos ahora un caso en el cual el edificio se convierte en asimétrico por introducción de diagonales de acero en el pórtico 3, tal como ilustra la figura 5.20. Las diagonales consisten en un tubo de sección rectangular de acero, con lado exterior de 0.2m y espesor 0.01m. El módulo de elasticidad usado para el acero es $2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$. El programa

portico_diagonales.m

realiza el cálculo de la matriz de rigidez condensada de este pórtico. El resultado es

C =

```
1.0e+05 *
    6.9664   -3.8008    0.5399   -0.1127    0.1006
   -3.8008    6.4796   -3.6934    0.4892    0.0131
    0.5399   -3.6934    6.4354   -3.6182    0.4442
   -0.1127    0.4892   -3.6182    6.0707   -2.8543
    0.1006    0.0131    0.4442   -2.8543    2.2601
```

Al comparar la diagonal de esta matriz con la de los pórticos en sentido *y* mostrada anteriormente, se puede percibir que el efecto de la introducción de las diagonales es una rigidización aportada al eje 3 del orden del 300 %. Esto necesariamente se traduce en menores desplazamientos en dicho sentido, pero mayores ángulos de torsión. En efecto, los desplazamientos principales del edificio son ahora los que aparecen en la segunda solumna de la siguiente matriz, mientras que la primera muestra los correspondientes al caso simétrico:

```
0.0009    0.0009
0.0031    0.0023
0.0001    0.0002
0.0024    0.0024
0.0088    0.0063
0.0002    0.0006
0.0038    0.0038
0.0147    0.0104
0.0003    0.0011
0.0049    0.0049
0.0194    0.0137
0.0004    0.0014
0.0056    0.0056
0.0227    0.0160
0.0004    0.0016
```

5.7. Fuerzas sísmicas - Método del análisis dinámico

Como es sabido, la ecuación de la vibración de una estructura elástica y lineal bajo movimientos sísmicos en las direcciones *x* e *y* es

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = -M\mathbf{r}_x\ddot{u}_{g,x} - M\mathbf{r}_y\ddot{u}_{g,y} \quad (5.50)$$

donde *M*, *C*, *K* son respectivamente las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez; *u*, *u̇*, *ü* son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración de la estructura; *ü_{g,x}*, *ü_{g,y}* son las aceleraciones en *x* e *y*, respectivamente, y *r_x*, *r_y* son los vectores de conversión de un desplazamiento estático

del suelo en la dirección respectiva, en desplazamientos estáticos de los grados de libertad correspondientes de la estructura. Para el caso de edificios modelados con diafragmas rígidos y tres grados de libertad por piso, estos vectores tienen la estructura siguiente:

$$\mathbf{r}_x^T = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots) \quad (5.51)$$

$$\mathbf{r}_y^T = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots) \quad (5.52)$$

$$(5.53)$$

Sin embargo, como para fines de diseño no se emplea normalmente historias de aceleración $\ddot{u}_{g,x}, \ddot{u}_{g,y}$ sino un mismo espectro de diseño S_a para ambas direcciones, se puede usar un solo vector \mathbf{r} en el que se incluya la combinación de cargas, así:

$$\mathbf{r} = c_x \mathbf{r}_x + c_y \mathbf{r}_y \quad (5.54)$$

donde c_x, c_y son los factores de la combinación en cada caso ($\pm 1, \pm 0, 3$). Una vez calculados los periodos T_j y modos de vibración ϕ_j , las fuerzas sísmicas para cada modo se determinan según la ecuación

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{M} \phi_j q_j S_a(T_j) \quad (5.55)$$

donde q_j es el factor de participación del modo j :

$$q_j = \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{r}}{\phi_j^T \mathbf{M} \phi_j} \quad (5.56)$$

con \mathbf{r} dado por la ecuación 5.54. Denotaremos por \mathbf{F} la matriz formada con las fuerzas \mathbf{f}_j como columnas:

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_j\} \quad (5.57)$$

Con el fin de obtener una fuerza única de diseño para cada grado de libertad H_i , como hipótesis de fuerza máxima, se utiliza normalmente la combinación de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS) de las contribuciones de cada modo, lo cual se calcula de la siguiente manera:

$$H_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij}^2} \quad (5.58)$$

Finalmente, en los grados de libertad rotacionales es aconsejable agregar el momento de torsión accidental, dado por la ecuación 5.9.

5.7.1. Ejemplo 5.6: Fuerzas sísmicas - Método dinámico

Con el fin de ilustrar el método dinámico de cálculo de las fuerzas sísmicas, consideremos el mismo edificio del ejemplo anterior, tanto en el caso simétrico como en el asimétrico.

Caso simétrico

Del texto del programa de este ejemplo, que figura en el Apéndice C, extraemos solamente lo pertinente a las ecuaciones anteriores del método dinámico. Así, el cálculo de los periodos y modos de vibración comprende los siguientes pasos:

```
%
% Análisis modal
%

m=10*15*6*ones(5,1)/9.8;           % masas traslacionales
mr(1:5)=m(1:5)*(15^2+6^2)/12;       % masas rotacionales
Masa=diag([m(1) m(1) mr(1) m(2) m(2) mr(2) m(3) m(3) mr(3)...
           m(4) m(4) mr(4) m(5) m(5) mr(5)]);
[Phi, Omega]=dmodos(Masa, S);
T=2*pi./Omega;                      % Vector de periodos de los modos
```

El resultado de este cálculo es

```
T =

    0.6858
    0.6292
    0.4931
    0.1985
    0.1933
    0.1449
    0.1022
    0.0964
    0.0717
    0.0655
    0.0577
    0.0496
    0.0435
    0.0419
    0.0318
```

Con ayuda del programa grafedif.m que aparece en el Apéndice C, se pueden obtener gráficas de los diferentes modos de este edificio en particular, semejantes a la figura 5.19.

Las masas participantes de cada modo y sus porcentajes acumulados de participación se calculan de la siguiente manera:

```
% Masas participantes (NSR - A.5.4.2):

Mpart_x=zeros(15,1);
Mpart_y=zeros(15,1);
mu=diag(Masa);
mux=mu(g_x);
```

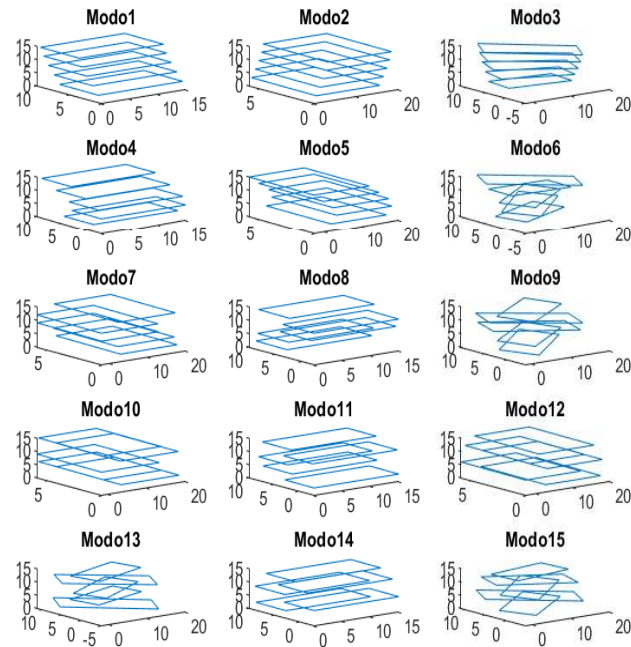


Figura 5.21: Modos de vibración del edificio simétrico.

```

muy=mu(g_y);

Phix=Phi(g_x,:);
Phiy=Phi(g_y,:);

for j=1:15
    Mpart_x(j)=(mux'*Phix(:,j))^2;
    Mpart_y(j)=(muy'*Phiy(:,j))^2;
end

% Porcentajes acumulados de participación:

Part_x=cumsum(Mpart_x)/M;
Part_y=cumsum(Mpart_y)/M;

```

El resultado de los factores acumulados en los sentidos x e y es

```
[Part_x Part_y]
```

ans =

0	0
0.8157	0.8157
0.8157	0.8157
0.8157	0.8157
0.9249	0.9249
0.9249	0.9249
0.9704	0.9704
0.9704	0.9704
0.9704	0.9704
0.9927	0.9927
0.9927	0.9927
1.0000	1.0000
1.0000	1.0000
1.0000	1.0000
1.0000	1.0000

lo cual indica que con los primeros cinco modos se supera el noventa por ciento de participación en la masa total.

Con base en los cálculos anteriores procedemos al cómputo de las fuerzas sísmicas de diseño por el método dinámico, usando la combinación SRSS. En primer lugar calculamos las ordenadas espectrales para cada modo:

```
T0=0.1*Av*Fv/(Aa*Fa);
Tc=0.48*Av*Fv/(Aa*Fa);
Tl=2.4*Fv;
Sa=zeros(size(T));
for i=1:15
    if T(i)<=T0
        Sa(i)=2.5*Aa*Fa*I*(0.4+0.6*T(i)/T0)/R;
    elseif T(i) <=Tc
        Sa(i)=2.5*Aa*Fa*I/R;
    elseif T(i) > Tc && T(i)<= Tl
        Sa(i)=1.2*Av*Fv*I/(R*T(i));
    elseif T(i) > Tl
        Sa(i)=1.2*Av*Fv*Tl*I/(R*T(i)^2);
    end
end
Sa=Sa*g;
```

A continuación, calculamos el vector r de la combinación por analizar, en este caso (0,3,1), de acuerdo con la ecuación 5.54:

```
rx=zeros(15,1);
ry=zeros(15,1);
rx(g_x)=0.3;
ry(g_y)=1;
r=rx+ry;
```

Finalmente, calculamos las fuerzas modales y las de diseño de acuerdo con las ecuaciones 5.55 a 5.57:

```
F=zeros(size(Phi));
q=zeros(size(T));
for j=1:15
    q(j)=Phi(:,j)'*Masa*r;          % factores de participación modal
    F(:,j)=Masa*Phi(:,j)*q(j)*Sa(j);
end

% Fuerzas de diseño - Método SRSS (raíz cuadrada de la suma de cuadrados)

Fsrss=zeros(15,1);
for k=1:15
    for i=1:15
        Fsrss(k)=Fsrss(k)+F(k,i)^2;
    end
end
%
Fsrss=sqrt(Fsrss);
Fx=Fsrss(g_x);                    %                en X
Fy=Fsrss(g_y);                    %                en Y
Bsrss=Fsrss(g_b);                 % Pares torsores
```

El resultado de este cálculo es, entonces,

```
Fsrss =

15.2376
49.1322
0.0000
23.7096
76.3670
0.0000
28.5470
88.9558
0.0000
32.8006
100.5598
0.0000
39.3055
125.3016
0.0000
```

Nótese que los pares torsores son en este caso nulos, debido a la simetría del edificio. Sin embargo, las normas permiten agregar el par torsor accidental, lo cual es siempre aconsejable. El resultado es

```
Ba_srss=Fx.*e_y + Fy.*e_x;        % Torsión accidental adicional (opcional - NSR A.3.6.7)
Btotal_srss = Bsrss + Ba_srss;
```

Btotal_srss =

41.4204
64.3882
75.2809
85.2600
105.7679

Con lo cual el vector definitivo de fuerzas de diseño es

Fsrss =

15.2376
49.1322
41.4204
23.7096
76.3670
64.3882
28.5470
88.9558
75.2809
32.8006
100.5598
85.2600
39.3055
125.3016
105.7679

Caso asimétrico

La asimetría inducida por medio de las diagonales del pórtico 3 conduce a valores diferentes de todas las cantidades calculadas en el caso simétrico. Las fuerzas de diseño resultan ser, en este caso, las siguientes:

Fsrss =

15.2376
40.9998
121.6194
23.7096
64.7913
219.3527
28.5470
78.0959
283.3208
32.8006
91.0219
341.7350

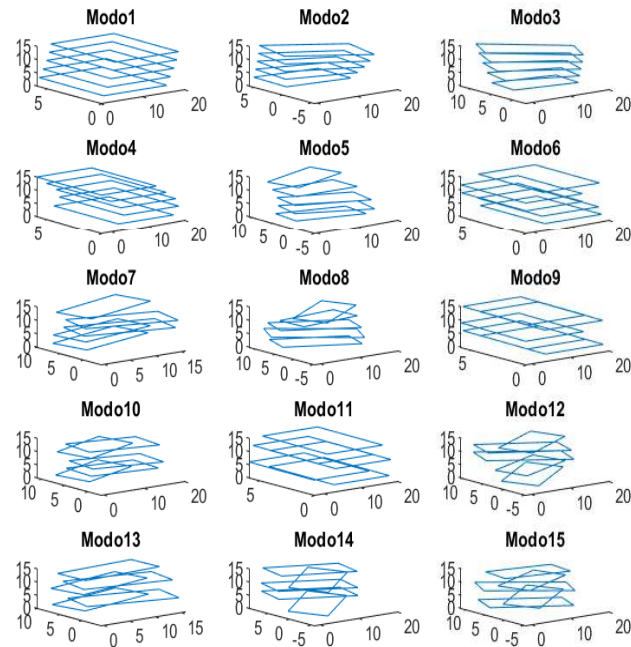


Figura 5.22: Modos de vibración del edificio asimétrico.

```

39.3055
111.9714
416.3561

```

Obsérvese que en este caso los pares torsores son muy diferentes de cero. Al agregar los pares de torsión accidental, el resultado definitivo es

```

Bsrss=Fsrss(g_b);           % Pares torsores
Ba_srss=Fx.*e_y + Fy.*e_x;  % Torsión accidental adicional (opcional - NSR-10 A.3.6.7)
Btotal_srss = Bsrss + Ba_srss;

Btotal_srss =

156.9406
275.0590
350.4568

```

419.8416
512.1263

Resulta instructivo comparar los resultados de las fuerzas de diseño por el método de la fuerza equivalente (primera columna) con los del análisis dinámico en los dos casos, simétrico (segunda columna) y asimétrico (tercera columna):

10.5142	15.2376	15.2376
35.0472	49.1322	40.9998
29.4397	41.4204	156.9406
21.3053	23.7096	23.7096
71.0176	76.3670	64.7913
59.6548	64.3882	275.0590
32.2034	28.5470	28.5470
107.3447	88.9558	78.0959
90.1696	75.2809	350.4568
43.1717	32.8006	32.8006
143.9056	100.5598	91.0219
120.8807	85.2600	419.8416
54.1924	39.3055	39.3055
180.6412	125.3016	111.9714
151.7386	105.7679	512.1263

Obsérvese que, salvo por los pares torsores, que en el tercer caso resultan muy grandes por causa de la asimetría estructural, los resultados para las fuerzas horizontales en ambos sentidos son semejantes. Además, las fuerzas del método estático equivalente no son siempre mayores que las dadas por el método dinámico.

5.8. Movimientos horizontales bajo cargas verticales

Tal como quedó dicho más arriba, la presencia del diafragma hace que los pórticos que, por sus condiciones de asimetría topológica o de carga, tiendan a desplazarse horizontalmente, induzcan desplazamientos horizontales en otros que, simétricos, no los tendrían. Por este motivo, y con el fin de calcular las fuerzas internas en los elementos debidas a toda clase de acciones, se hace necesario que el análisis de edificios bajo cargas verticales contemple estos movimientos en forma similar a lo hecho para cargas horizontales.

Consideremos de nuevo el pórtico simple bajo carga vertical asimétrica mostrado en la figura 5.23, que fue analizado en el Capítulo 4, Ejemplo 4.3. El análisis puede descomponerse en dos fases, como muestra la figura 5.24:

1. En la primera fase se analiza el pórtico con todas sus cargas verticales y con una restricción adicional en los grados de libertad horizontales en los niveles de las vigas (es decir, los grados tipo p). Llamaremos D_r al vector de desplazamientos así obtenido. Esta restricción genera una reacción de valor h .

2. En la segunda fase analizamos el pórtico bajo la única acción de la fuerza h , con sentido invertido, la cual causa el desplazamiento horizontal. El vector completo resultante de este cálculo es D_h .
3. El vector de desplazamientos totales es $D = D_r + D_h$.

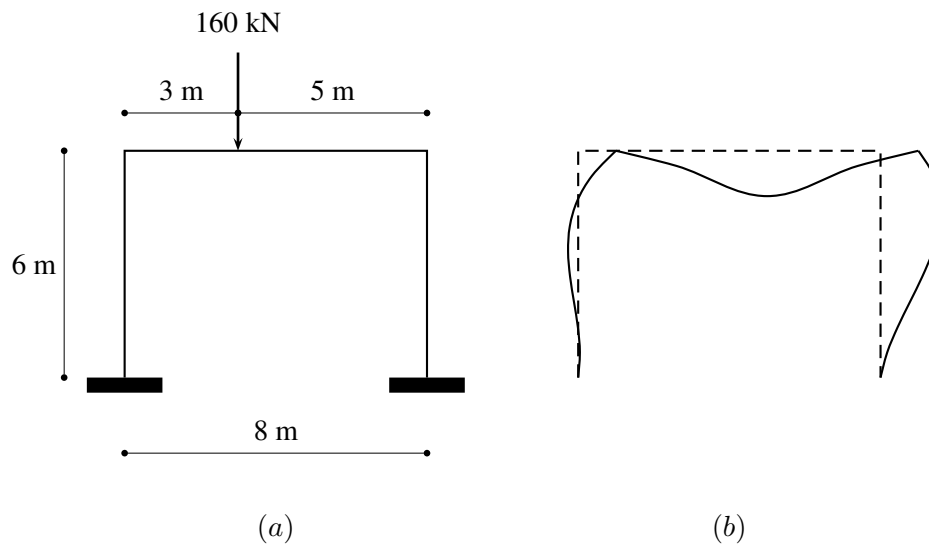


Figura 5.23: Pórtico bajo carga vertical concentrada y asimétrica. (a) Modelo estructural. (b) Elástica.

Es evidente que, al considerar conjuntamente las cargas externas, la fuerza h desaparece y que, al sumar los vectores de desplazamiento de ambos casos, se obtiene la elástica mostrada en la figura 5.23.

5.8.1. Ejemplo 5.7: Pórtico con carga vertical asimétrica

Con los datos del problema dados en el capítulo 4, y bajo la numeración de nodos dada allí, los vectores de los números de grados de libertad restringidos y móviles para la primera fase del análisis son

$$a = [1 \ 2 \ 3 \ 7 \ 10 \ 11 \ 12]'; \quad b = [4 \ 5 \ 6 \ 8 \ 9]';$$

donde el grado de libertad 7 corresponde al movimiento horizontal de la viga en el nodo 3. Con esta partición se obtiene como vector de desplazamientos el siguiente:

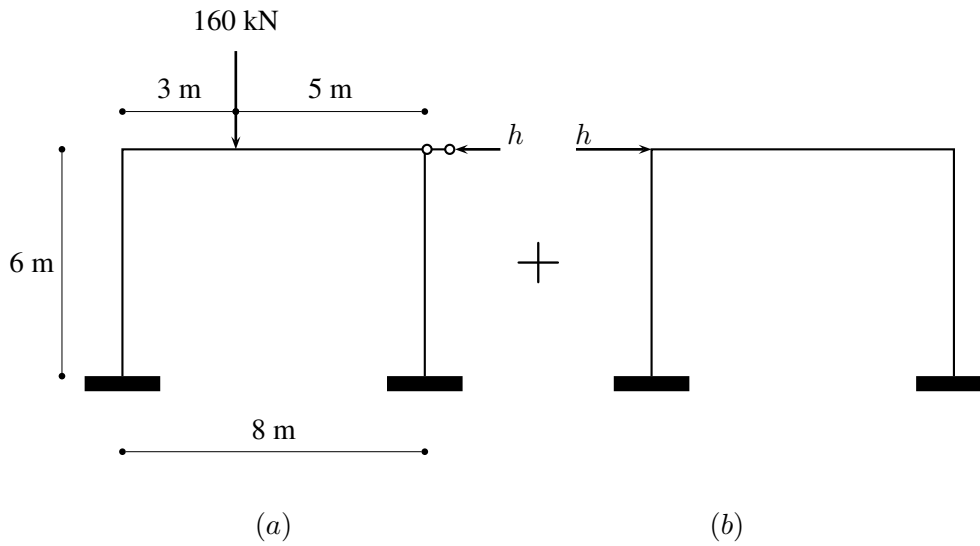


Figura 5.24: Superposición de análisis para considerar movimientos horizontales producidos por cargas verticales. (a) Modelo estructural con restricción lateral. (b) Aplicación de la reacción lateral.

D_r =

```

1.0e-003 *
    0
    0
    0
    0.0493
   -0.1239
   -0.6825
    0
  -0.0666
    0.4953
    0
    0
    0
  
```

Nótese que en la posición No. 7 se tiene un valor nulo. Las reacciones en esta fase se calculan de la manera usual:

$$P_{ar} = K_{ab} \cdot D_r(b) + R(a) ;$$

La reacción buscada h se encuentra en la cuarta posición de este vector (puesto que el No. 7 se encuentra en la cuarta posición del vector a). Así,

$h = P_ar(4)$

$h =$

-7.9727

Ahora bien, los vectores de números de grados de libertad restringidos y móviles para la segunda fase del análisis son

$a = [1 \ 2 \ 3 \ 10 \ 11 \ 12]'$; $b = [4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9]'$;

Obsérvese que el grado de libertad No. 7 ha pasado a ser móvil. Este pórtico se analiza solamente con el siguiente vector de cargas:

$P = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -h \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$;

Nótese que se ha introducido un signo negativo delante de la carga h con el fin de producir su anulación en la superposición indicada en la figura 5.24. Con estos datos, el vector de desplazamientos correspondiente a la segunda fase es

$D_h =$

$1.0e-003 \ *$

0
0
0
0.3947
0.0029
-0.0466
0.4010
-0.0029
-0.0478
0
0
0

La superposición de las dos fases da como resultado

$D = D1 + D2$

$D =$

$1.0e-003 \ *$

0
0
0

```

0.4440
-0.1210
-0.7292
0.4010
-0.0695
0.4475
0
0
0

```

Este vector coincide con el obtenido en el análisis directo realizado en el capítulo 4.

5.8.2. Resumen del análisis bajo cargas verticales

Con base en lo así expuesto, el procedimiento para realizar el análisis de edificios bajo cargas verticales es en esencia el mismo expuesto anteriormente bajo cargas horizontales (sección 10 de este capítulo), con las diferencias siguientes.

- Para cada pórtico se debe calcular el vector de desplazamientos D_r y el vector de fuerzas h resultantes del análisis del pórtico con todas las cargas verticales aplicadas pero restringido ante movimientos laterales. Recuérdese que el vector h es igual a las reacciones de las restricciones horizontales impuestas pero con el signo cambiado.
- El vector de fuerzas horizontales del edificio se obtiene a partir de la ecuación (5.41):

$$H = \sum_i A_i^T h_i \quad (5.59)$$

donde la suma se realiza sobre el número de pórticos.

- Una vez obtenido el vector de desplazamientos del edificio con tres grados de libertad por piso, $U = S^{-1}H$, se obtiene el vector de desplazamientos de cada pórtico por medio del siguiente proceso:
 - $D_p = AU$
 - $D_s = -K_{ss}^{-1}K_{sp}D_p$
 - $D_b = \begin{pmatrix} D_p \\ D_s \end{pmatrix}$
 - $D_h = \begin{pmatrix} D_a \\ D_b \end{pmatrix}, D_a = 0$
 - $D = D_r + D_h$

Capítulo 6

Pórticos espaciales

De manera similar a las armaduras espaciales, los pórticos espaciales son ensamblajes de barras que forman una estructura en tres dimensiones, pero a diferencia de ellas, las barras se encuentran soldadas, de manera que se inducen giros y, por tanto, momentos, en las tres direcciones del espacio. Como los efectos de estos momentos son mutuamente independientes, para formar sus ecuaciones básicas de análisis basta reunir los elementos presentados en los capítulos anteriores.

En este tipo de estructuras, el grado de indeterminación estática está dado por

$$h = 6m + r - 6j \quad (6.1)$$

donde m es el número de elementos articulados, r el número de reacciones en los apoyos y j el número de nodos.

6.1. Matriz de rigidez de un elemento de pórtico espacial

Para las fuerzas en sistema local mostradas en las figuras 6.1 y 6.2 formamos el vector \mathbf{p}_e de la manera siguiente:

$$\mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ G_i \\ B_i \\ M_i \\ W_i \\ N_j \\ V_j \\ G_j \\ B_j \\ M_j \\ W_j \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

La matriz de rigidez en tal sistema que le corresponde es, por tanto,

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

donde las submatrices son

$$\mathbf{k}_{ii} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{k}_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{k}_{jj} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

con $\mathbf{k}_{ji} = \mathbf{k}_{ij}^T$. Con estas definiciones se tiene constituida la relación básica

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (6.7)$$

donde \mathbf{d}_e es el vector de desplazamientos locales asociado a \mathbf{p}_e .

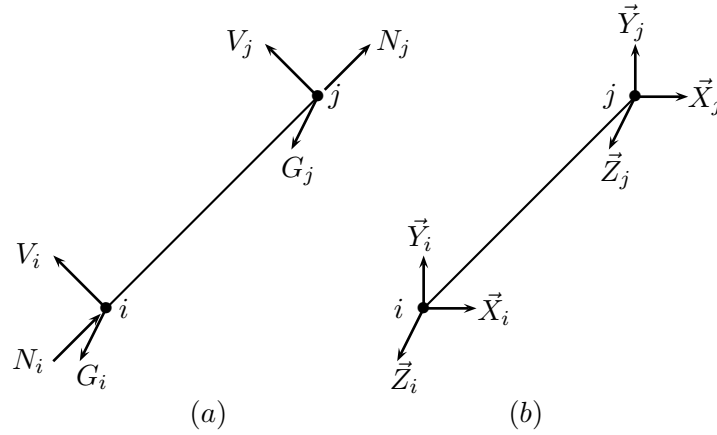


Figura 6.1: Fuerzas internas en un elemento de pórtico espacial. (a) Sistema local ortogonal; (b) sistema global ortogonal.

6.2. Transformación de coordenadas

En el sistema global, el vector de fuerzas internas es

$$\mathbf{P}_e = \begin{pmatrix} \vec{X}_i \\ \vec{Y}_i \\ \vec{Z}_i \\ \vec{X}_i \\ \vec{Y}_i \\ \vec{Z}_i \\ \vec{X}_j \\ \vec{Y}_j \\ \vec{Z}_j \\ \vec{X}_j \\ \vec{Y}_j \\ \vec{Z}_j \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

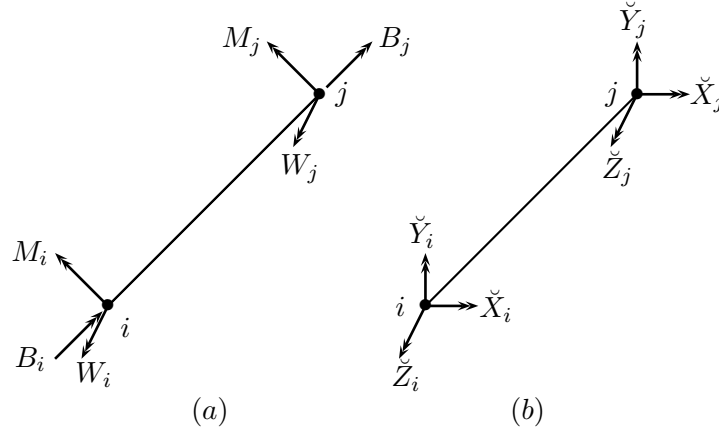


Figura 6.2: Momentos internos en un elemento de pórtico espacial. (a) Sistema local ortogonal; (b) sistema global ortogonal.

la relación que liga a los vectores de fuerzas en los sistemas local y global es, como de costumbre,

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{P}_e \quad (6.9)$$

con la matriz de transformación siguiente:

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \begin{pmatrix} \cos \Phi_{XN} & \cos \Phi_{YN} & \cos \Phi_{ZN} \\ \cos \Phi_{XV} & \cos \Phi_{YV} & \cos \Phi_{ZV} \\ \cos \Phi_{XG} & \cos \Phi_{YG} & \cos \Phi_{ZG} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Phi_{Xx} & \cos \Phi_{Yx} & \cos \Phi_{Zx} \\ \cos \Phi_{Xy} & \cos \Phi_{Yy} & \cos \Phi_{Zy} \\ \cos \Phi_{Xz} & \cos \Phi_{Yz} & \cos \Phi_{Zz} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dado que toda barra tiene una orientación definida por su eje, que a lo largo de este libro se ha identificado con el eje local x o con las fuerzas axiales N , mientras que la dirección de los ejes locales y y z resulta arbitraria (dentro de los límites que imponga la ortogonalidad de los tres), resulta conveniente expresar todos los cosenos directores recogidos en la submatriz \mathbf{t} en función de los cosenos directores que forma dicho eje:

$$\begin{aligned}
\eta &= \cos \Phi_{Xx} \\
\mu &= \cos \Phi_{Yx} \\
\nu &= \cos \Phi_{Zx}
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Seleccionaremos el eje y (identificado con fuerzas de corte V) como el producto vectorial de los ejes x , cuyo vector unitario \mathbf{x} tiene las direcciones (η, μ, ν) , y el eje Z , cuyo vector unitario \mathbf{Z} tiene dirección $(0, 0, 1)$, dado que tal producto genera un vector ortogonal al formado por los otros dos:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z} \times \mathbf{x} = \frac{1}{Q} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \eta & \mu & \nu \end{vmatrix} = \frac{1}{Q} \begin{pmatrix} -\mu \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

donde Q es una cantidad introducida para lograr que \mathbf{y} sea un vector unitario. Su valor es, evidentemente $Q = \sqrt{\eta^2 + \mu^2}$. Finalmente, el vector unitario de z , identificado con las fuerzas de corte G , se determina por ortogonalidad con \mathbf{x} y \mathbf{y} :

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \frac{1}{Q} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \eta & \mu & \nu \\ -\mu & \eta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{Q} \begin{pmatrix} -\eta\nu \\ -\mu\nu \\ Q^2 \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

Con este resultado, la matriz \mathbf{t} toma la forma

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \eta & \mu & \nu \\ -\frac{\mu}{Q} & \frac{\eta}{Q} & 0 \\ -\frac{\eta\nu}{Q} & -\frac{\mu\nu}{Q} & Q \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

Ahora bien, si la barra tiene orientación vertical (como es el caso típico de las columnas y muros de cortante), el eje x será paralelo al eje Z y, por tanto

$$\begin{aligned}
\eta &= 0 \\
\mu &= 0 \\
\nu &= 1
\end{aligned} \tag{6.16}$$

En consecuencia $Q = 0$ y se tendrá así una matriz \mathbf{t} indeterminada. Para esta situación, el simple examen visual de la rotación del sistema local (x, y, z) , en el que x toma la misma orientación vertical de Z manteniendo la estructura dextrógira del mismo, conduce a que y se orienta paralelo y en la misma dirección de Y y z paralelo a X pero en dirección contraria. En tal caso,

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Si, por el contrario, la orientación de x es contraria a la de Z (lo que ocurre cuando la numeración de los nodos de la barra se realiza de arriba hacia abajo), la matriz es

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

como puede comprobarse fácilmente.

6.3. Ensamblaje y solución

Al haber seis grados de libertad por nodo, la numeración de los mismos para un nodo cualquiera i presenta la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \vec{X}_i &: 6i - 5 \\ \vec{Y}_i &: 6i - 4 \\ \vec{Z}_i &: 6i - 3 \\ \check{X}_i &: 6i - 2 \\ \check{Y}_i &: 6i - 1 \\ \check{Z}_i &: 6i \end{aligned} \quad (6.19)$$

Con esta precisión se hace posible realizar el ensamblaje de las matrices de rigidez y fuerzas externas, tal como se ha hecho en los capítulos anteriores. Por otra parte, la relación fundamental en el sistema global es, como de costumbre,

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{D}_e \quad (6.20)$$

con

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \quad (6.21)$$

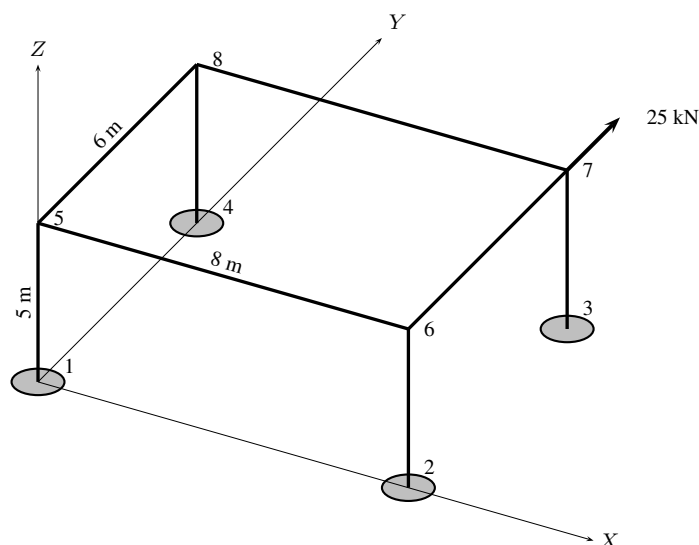


Figura 6.3: Pórtico espacial.

Cuadro 6.1: Pórtico espacial. Numeración de elementos.

Elemento	Nodo i	Nodo j
1	1	5
2	2	6
3	3	7
4	4	8
5	5	6
6	6	7
4	7	8
8	5	8

6.4. Ejemplo 6.1: Pórtico espacial

La figura 6.3 muestra un pórtico espacial de acero sometido a una carga horizontal de 40 kN aplicada en la parte superior. El módulo de elasticidad del material es $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ y el de rigidez $G = 9 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$. El área seccional de los elementos es $A = 0,02 \text{ m}^2$ y los momentos de inercia son $I_y = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $I_z = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ y $J = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^4$. El pórtico se encuentra sometido

a una carga de 25 kN aplicada como muestra la figura, la cual incluye también la numeración de los nodos.

La numeración de los elementos se muestra en la tabla 6.1. Evidentemente, los grados de libertad restringidos tiene los números de 1 a 24. Al usar el programa que aparece en el Apéndice C, se puede comprobar fácilmente que los vectores de fuerzas internas son los siguientes:

■ Columnas:

```
>> P_e(:,1:4)

ans =

-1.3732    -1.3732     1.3732     1.3732
-1.0410   -11.4454   -11.4727   -1.0409
-1.3039    -6.1307     6.1307     1.3039
 3.3640    36.7796    36.8851     3.3639
-4.1478    -4.1478     4.1478     4.1478
-0.0441    -0.0441    -0.0442    -0.0442
 1.3732     1.3732    -1.3732    -1.3732
 1.0410    11.4454    11.4727     1.0409
 1.3039     6.1307    -6.1307    -1.3039
 1.8409    20.4473    20.4785     1.8407
-2.7184    -2.7184     2.7184     2.7184
 0.0441     0.0441     0.0442     0.0442
```

■ Vigas:

```
>> P_e(:,5:8)

ans =

-0.0000    -1.3732    -0.0000    -1.3732
-1.0382   -12.4836     1.0437    -0.0027
-0.6729    -6.8036    -0.6729    -0.6310
 0.0521   -20.3952    -0.0523    -1.8930
 2.6916     0.0268    -2.6916     0.0268
-4.1530     4.1089    -4.1747     4.1089
 0.0000     1.3732     0.0000     1.3732
 1.0382    12.4836    -1.0437     0.0027
 0.6729     6.8036     0.6729     0.6310
-0.0521   -20.4262     0.0523    -1.8931
 2.6916    -0.0268    -2.6916    -0.0268
-4.1530     4.1305    -4.1747     4.1305
```

6.5. Pórtico espacial con diafragma rígido

Consideraremos ahora la modelación del edificio de un piso como un pórtico espacial en el cual los desplazamientos de los nodos están coordinados por un diafragma rígido.

6.5.1. Desplazamientos globales

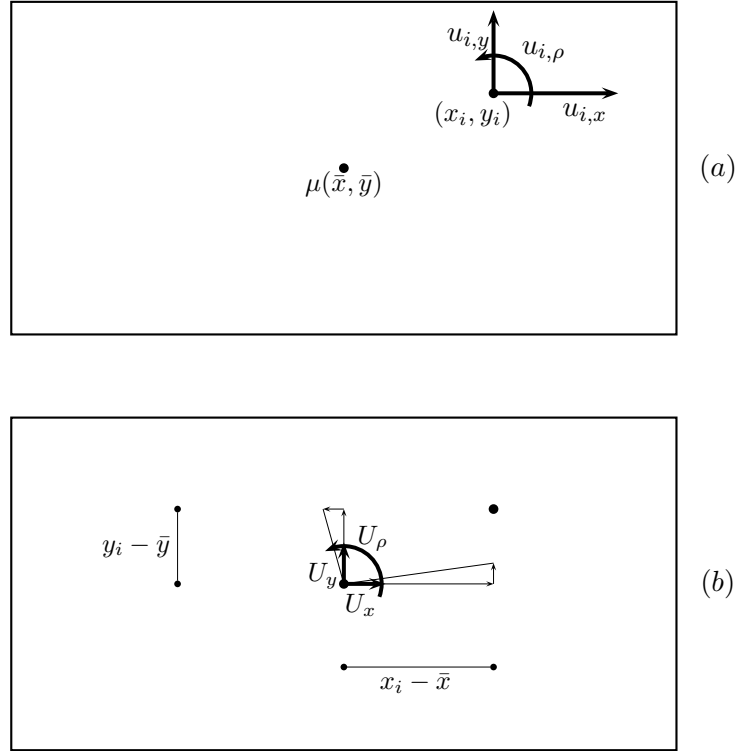


Figura 6.4: Relación entre los grados de libertad en los nodos esclavo y maestro en un pórtico espacial con diafragma rígido. (a): Movimientos del nodo esclavo i . (b): Movimientos del nodo maestro.

Consideremos la figura 6.4. En ella se muestra, por una parte, los desplazamientos del nodo i (*nodo esclavo*) de la estructuras y, por la otra, los desplazamientos globales del diafragma en un punto de referencia llamado *nodo maestro*. Es evidente que los desplazamientos del primero están relacionados con los del segundo por el sistema de ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} u_{i,x} &= U_x - (y_i - \bar{y})U_\rho \\ u_{i,y} &= U_y + (x_i - \bar{x})U_\rho \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$u_{i,\rho} = U_\rho \quad (6.23)$$

Este sistema puede ser presentado en forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} u_{i,x} \\ u_{i,y} \\ u_{i,\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(y_i - \bar{y}) \\ 0 & 1 & (x_i - \bar{x}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_\rho \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Evidentemente, la matriz que permite pasar del sistema global al local es una matriz de transformación y, por tanto, su transpuesta permite realizar la operación inversa.

Para resolver el problema global, supondremos la existencia de una columna virtual que enlaza todos los nodos maestros, sobre la cual se aplican seis fuerzas en cada nodo, correspondientes a los seis grados de libertad generales de un punto en el espacio. Para la modelación usual de fuerzas sísmicas, solamente tres de estas seis fuerzas serán diferentes de cero, como se mostró en el capítulo 5. El ensamblaje de la matriz \mathbf{S} de tal columna virtual correspondiente al pórtico espacial con diafragma rígido se realiza por medio de la siguiente operación:

$$\mathbf{S} = \sum_e \Delta \mathbf{S}_e \quad (6.25)$$

La formulación de la matriz $\Delta \mathbf{S}_e$ depende de si se trata de columnas, en la que un extremo y otro pertenecen a dos diafragmas distintos, k y $k+1$, o de vigas, en las que los dos extremos pertenecen al mismo diafragma. Para columnas, la matriz de transformación es

$$\mathbf{A}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t}_{k+1} \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

con

$$\mathbf{t}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y_i - \bar{y}_k) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (x_i - \bar{x}_k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

y lo propio para el diafragma $k+1$. Para las vigas, por estar ambos nodos contenidos en el mismo plano, se tiene

$$\mathbf{A}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_{ik} \\ \mathbf{t}_{jk} \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

$$\mathbf{t}_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y_i - \bar{y}_k) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (x_i - \bar{x}_k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

para el extremo i y lo propio para el nodo j . En esta ecuación, se asume que todos los grados de libertad de la viga se encuentran activos, lo cual se da en el caso de diafragmas flexibles. Sin embargo, si se adopta la modelación de diafragma rígido, se puede suprimir el grado de libertad correspondiente a la deformación axial de la viga.

Para todos los elementos estructurales calcularemos ahora su contribución a la rigidez global de los elementos de la columna virtual. Esta contribución se obtiene por la operación conocida

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e \quad (6.30)$$

con $\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e$ (ecuación 6.21). Como resultado la matriz \mathbf{S}_e tiene un tamaño de 12×12 en el caso de columnas o muros. Para vigas, la misma operación (usando la matriz de transformación dada por la ecuación 6.28) da como resultado una matriz de tamaño 6×6 . Los valores contenidos en estas matrices se trasladan a matrices $\Delta \mathbf{S}_e$, de acuerdo con la correspondencia existente entre la numeración de los grados de libertad en la matriz \mathbf{S}_e en cada piso y los grados de libertad de la columna virtual que representa al edificio. Nótese que el tamaño de las matrices $\Delta \mathbf{S}_e$ es $6(p+1) \times 6(p+1)$, donde p es el número de pisos. La matriz de rigidez condensada del edificio se obtiene por la ecuación 6.25. Sin embargo, al subrimir los grados de libertad de la base de la columna virtual, el tamaño final de la matriz de rigidez \mathbf{S} se reduce a $6p \times 6p$, mientras que en la modelación estudiada en el capítulo 5 es $3p \times 3p$.

Una vez ensamblada la matriz \mathbf{S} , el cálculo de los desplazamientos globales del edificios se realiza resolviendo el problema ya conocido

$$\mathbf{H} = \mathbf{S} \mathbf{U} \quad (6.31)$$

6.5.2. Desplazamientos de los nodos

Una vez conocidos los desplazamientos del nodo maestro, los tres desplazamientos principales del nodo i en el diafragma k se obtienen por medio de la ecuación (cf. ecuación 5.47)

$$\mathbf{D}_{p,ik} = \mathbf{A}_{ik} \mathbf{U}_k, \quad (6.32)$$

donde (cf. ecuación 6.24)

$$\mathbf{A}_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(y_i - \bar{y}_k) \\ 0 & 1 & (x_i - \bar{x}_k) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

El vector general de desplazamientos principales de los nodos, \mathbf{D}_p se obtiene ensamblando los vectores $\mathbf{D}_{p,ik}$ obtenidos por este procedimiento.

Los desplazamientos secundarios de cada nodo son los tres restantes. Para obtener su vector general \mathbf{D}_s , se hace necesario ensamblar la matriz de rigidez \mathbf{K} del pórtico espacial sin diafragma rígido y luego aplicar la ecuación (5.25), que repetimos aquí por conveniencia:

$$D_s = -K_{ss}^{-1} K_{sp} D_p \quad (6.34)$$

En todo este desarrollo se debe ignorar la deformación axial de la viga, por las razones antes expuestas. Esto se realiza simplemente asignándoles un área seccional nula en la matriz elemental de rigidez.

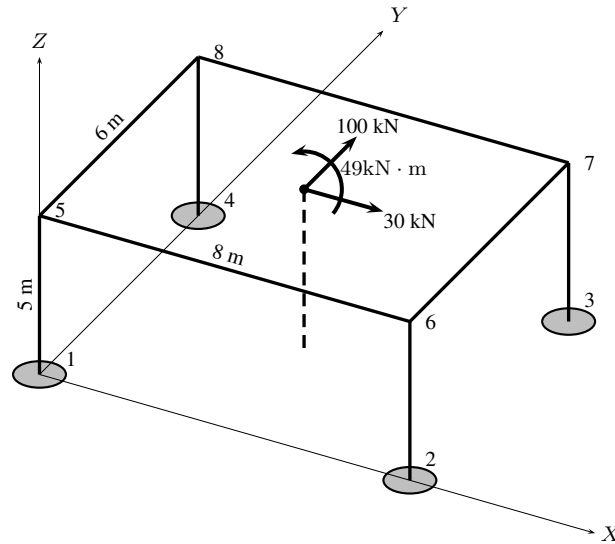


Figura 6.5: Pórtico espacial con diafragma rígido. La línea punteada corresponde a la columna virtual.

6.5.3. Ejemplo 6.2: Pórtico espacial de un piso con diafragma rígido

Consideremos el edificio mostrado en la figura 6.5, el cual consta del pórtico espacial del Ejemplo 6.1 y un diafragma rígido. Las cargas se encuentran aplicadas en el nodo maestro ubicado en el centro del diafragma rectangular. Las cargas son iguales a 30 kN en el sentido Y , 30 kN en el sentido X y el par torsor que ambas originan con una excentricidad de cinco por ciento de la dimensión en planta en cada sentido, de manera que $B = 0,4 \times 100 + 0,3 \times 30 = 49 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

En vista de que la matriz de rigidez K ha sido formada en dicho ejemplo, nos concentraremos en los aspectos relevantes de este tipo de modelo, que han sido introducidos en esta sección. En primer lugar, introducimos las coordenadas del nodo maestro:

```
%
% Nodo maestro:
%
xm=4; ym=3;
```

En segundo lugar, para las columnas, la aplicación de la ecuación (6.26) se realiza dentro del bucle de construcción de K de la siguiente manera:

```

q=eye(6);
q(1,6)=-(y(IJ(e,2))-ym);
q(3,6)=(x(IJ(e,2))-xm);
A_e=[q zeros(6,6);zeros(6,6) q];
S_e=A_e'*K_e*A_e;
g_e=1:12;
DeltaS_e=zeros(12,12);
DeltaS_e(g_e,g_e)=S_e;
S=S+DeltaS_e;

```

Finalmente, para las vigas, se realiza el siguiente proceso, en correspondencia con lo expresado en las ecuaciones (6.28) y (6.29):

```

qi=eye(6);
qi(1,6)=-(y(IJ(e,1))-ym);
qi(3,6)=(x(IJ(e,1))-xm);
qj=eye(6);
qj(1,6)=-(y(IJ(e,2))-ym);
qj(3,6)=(x(IJ(e,2))-xm);
A_e=[qi qj];
S_e=A_e'*K_e*A_e;
g_e=7:12;
DeltaS_e=zeros(12,12);
DeltaS_e(g_e,g_e)=S_e;
S=S+DeltaS_e;

```

El cálculo de desplazamientos y reacciones sigue los pasos descritos anteriormente:

```
% Desplazamientos del nodo maestro:
```

```

m=(7:12)';
S_mm=S(m,m);
H=zeros(12,1);
H(7)=30;
H(8)=100;
H(12)=49;
H_m=H(m);
U=S_mm\H_m;
U_m=[U(1);U(2);U(6)];

```

```
% Desplazamientos de los nodos:
```

```

D_p=zeros(12,1);
p=zeros(12,1);
s=zeros(12,1);
kk=0;
for i=5:8
    kk=kk+3;
    q=eye(3);
    q(1,3)=-(XYZ(i,2))-ym);
    q(2,3)=(XYZ(i,1))-xm);

```

```

d=q*U_m;
pp=[6*i-5 6*i-4 6*i];
p(kk-2:kk,1)=pp;
D_p(kk-2:kk,1)=d;
ss=[6*i-3 6*i-2 6*i-1];
s(kk-2:kk,1)=ss;
end

K_ss=K(s,s);
K_sp=K(s,p);
D_s=-inv(K_ss)*K_sp*D_p;

D=zeros(48,1);
D(p)=D_p;
D(s)=D_s;

a=(1:24)'; b=(25:48)';
D_b=D(b);
K_ab=K(a,b);
P_a=K_ab*D_b;

```

Los desplazamientos del nodo maestro son los siguientes:

```

U_m =

    0.0064
    0.0121
    0.0002

```

Por otra parte, las fuerzas internas de columnas y vigas en el sistema global son, respectivamente, las siguientes:

```

>> P_e(:,1:4)

ans =

   -8.0481   -8.0481   -6.9465   -6.9465
  -23.6899  -26.2644  -26.2644  -23.6899
  -18.0610  -11.6501   19.0470   10.6642
   76.1841   84.4540   84.4540   76.1841
  -24.3569  -24.3569  -21.0288  -21.0288
   -0.0140   -0.0140   -0.0140   -0.0140
    8.0481    8.0481    6.9465    6.9465
   23.6899   26.2644   26.2644   23.6899
   18.0610   11.6501  -19.0470  -10.6642
   42.2656   46.8678   46.8678   42.2656
  -15.8835  -15.8835  -13.7039  -13.7039
    0.0140    0.0140    0.0140    0.0140

>> P_e(:,5:8)

```

ans =

0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
-3.9682	-15.6183	3.4287	-14.0928
0.0129	-46.8549	-0.0129	-42.2785
15.8727	0.0108	13.7147	0.0108
-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
3.9682	15.6183	-3.4287	14.0928
-0.0129	-46.8549	0.0129	-42.2785
15.8727	-0.0108	13.7147	-0.0108
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

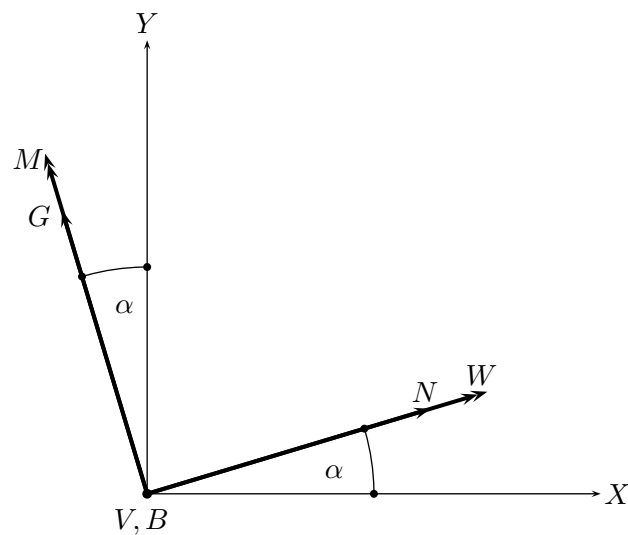


Figura 6.6: Geometría de los grados de libertad para generación de la matriz L_e en elementos de orientaciones diversas.

6.5.4. Elementos con diferentes orientaciones

En la práctica, es frecuente encontrar edificios en los que, por razones arquitectónicas, los elementos estructurales tienen orientaciones diversas, de manera que el sistema de coordenadas de cada

elemento no coincide totalmente con el sistema general de coordenadas. En esta sección describiremos los lineamientos generales de transformación de las matrices de rigidez de los elementos para la formación de las matrices globales \mathbf{K} y \mathbf{S} .

- Para obtener la matriz \mathbf{K} se debe realizar una transformación adicional de todos los elementos, así:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{L}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{L}_e \mathbf{T}_e \quad (6.35)$$

donde \mathbf{L}_e es una matriz de transformación generada con respecto al plano del diafragma, con base en el ángulo que el elemento forme con el eje horizontal del sistema de coordenadas del nodo maestro, de manera semejante a lo realizado en parrillas (Ecuación 3.59). Por su parte, \mathbf{T}_e es la matriz de transformación dada por la ecuación 6.10.

- Para formar la matriz \mathbf{S}_e se debe realizar, además, la transformación con la matriz \mathbf{A}_e definida por las ecuaciones 6.26 y 6.28, para elementos verticales y horizontales, respectivamente, de manera que la matriz \mathbf{S}_e (ecuación 6.30) es ahora

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{A}_e^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{L}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{L}_e \mathbf{T}_e \mathbf{A}_e \quad (6.36)$$

El significado de estas ecuaciones es el siguiente: la matriz de rigidez elemental \mathbf{k}_e sufre primero una rotación para ajustarla al sistema de coordenadas del plano horizontal de la losa (con la matriz \mathbf{L}_e), luego la transformación por inclinación en el plano vertical con respecto al sistema de tres coordenadas espaciales (con la matriz \mathbf{T}_e), y, finalmente, para formar la matriz \mathbf{S} , la transformación para asociar los tres grados de libertad principales del elemento a los tres del piso (con la matriz \mathbf{A}_e). En las secciones anteriores no era necesario generar la matriz \mathbf{L}_e dado que el sistema de coordenadas de cada elemento coincidía plenamente con el sistema general.

Al considerar la figura 6.6 y el vector de cargas en el sistema local dado por la ecuación 6.2, es fácil concluir que la matriz \mathbf{L}_e debe tener la forma

$$\mathbf{L}_e = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

con

$$l = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

Una vez hallados los desplazamientos principales del edificio, se obtienen los desplazamientos principales y secundarios del nodo i en el piso k por medio de las ecuaciones 6.32 y 6.34, de la manera explicada anteriormente. Con los dos nodos que componen el elemento se obtiene de esta

manera el vector D_e , de tamaño 12×1 . Para obtener las fuerzas internas del elemento, se aplica la ecuación básica

$$p_e = k_e d_e \quad (6.39)$$

donde los desplazamientos en el sistema local están dados por

$$d_e = L_e T_e D_e \quad (6.40)$$

pues la matriz T_e gira el sistema de coordenadas global en el sentido vertical y luego la matriz L_e hace lo propio en el plano horizontal de el o los diafragmas en los cuales se encuentran los nodos del elemento. Para las vigas embebidas en diafragmas planos, $T_e = I$.

Capítulo 7

Elementos finitos triangulares y tetraédricos

7.1. Definiciones

Se dice que una estructura se encuentra en estado de *tensión plana* cuando se cumplen los dos requisitos siguientes:

1. El espesor es pequeño en comparación con las dimensiones restantes.
2. Las cargas externas actúan sobre su plano medio, el cual es ortogonal al eje sobre el cual se mide el espesor.

Estas condiciones quedan satisfechas por estructuras tales como vigas de gran canto (comúnmente llamadas *vigas pared*, como la que muestra la figura 7.1), para las cuales no resulta adecuada la hipótesis simplificadora de la teoría elemental de flexión, según la cual las secciones planas planas permanecen planas después de la flexión. Esto se debe a que en ellas el efecto de las tensiones de corte no es despreciable.

Por otra parte, el estado de *deformación plana* corresponde a un caso en cierta medida opuesto al anterior, es decir, a aquél en el que el espesor es mucho mayor que las dimensiones restantes de la estructura, sin que varíe la forma seccional. Además, se debe cumplir que las cargas se encuentren repartidas de manera uniforme sobre el eje paralelo al espesor, de suerte que el análisis de una sección de espesor unitario refleje adecuadamente el comportamiento de toda la estructura. Por tanto, el análisis de una sección de espesor unitario refleja fielmente el estado de tensiones y deformaciones de toda la estructura. Estas condiciones se dan, por ejemplo, en una presa de gravedad como la que muestra la figura 7.2.

Si la dirección del eje paralelo al espesor del cuerpo es z , de acuerdo a las ecuaciones fundamentales expuestas en el Apéndice A, ambos estados pueden ser caracterizados por

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (7.1)$$

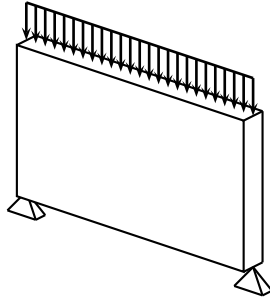


Figura 7.1: Estado de tensión plana.

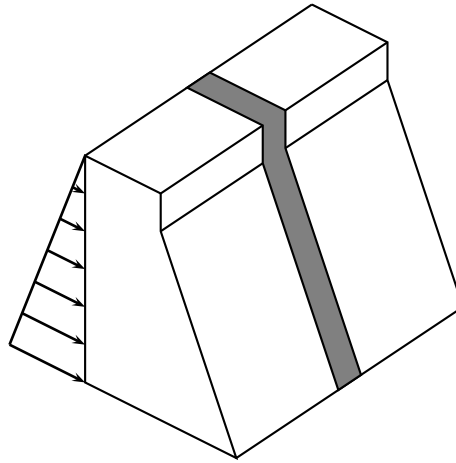


Figura 7.2: Estado de deformación plana.

debido a que sólo hay cargas en el plano (x, y) . Por otra parte, en el caso de deformación plana la deformación ϵ_z se toma como nula, dado que se supone que en ambos extremos de la estructura sobre el eje z hay restricciones a la deformación. En el caso de tensión plana, por contra, la suposición de que no hay cargas en las caras del cuerpo normales al eje z implica que $\sigma_z = 0$. En consecuencia, ambos estados se pueden caracterizar por el conjunto de deformaciones

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

y por el conjunto de tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

De acuerdo con la ecuación fundamental (7.1) que define a ambos estados, las relaciones elásticas entre tensiones y deformaciones resultan ser las siguientes:

1. *Tensión plana.* Como en este caso se tiene que $\sigma_z = 0$, las relaciones generales tridimensionales para el caso isotrópico (A.17) se reducen a

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Resolviendo el sistema anterior para σ_x, σ_y y τ_{xy} resulta la siguiente ecuación matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = E \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (7.5)$$

La deformación en z se puede obtener a partir de

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E} [\sigma_x + \sigma_y] \quad (7.6)$$

2. *Deformación plana.* En este caso $\epsilon_z = 0$ y por tanto

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z = 0 &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (7.7)$$

De la tercera de las ecuaciones anteriores se deduce que

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (7.8)$$

por lo cual el resultado final es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\sigma} = E \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\epsilon} \quad (7.9)$$

En las ecuaciones anteriores C es la *matriz constitutiva* de elasticidad bidimensional isotrópica. La matriz correspondiente a los casos ortotrópico y anisotrópico puede encontrarse en textos de Teoría de la Elasticidad.

Por medio del método de los elementos finitos se pueden hallar valores suficientemente aproximados de los desplazamientos de la estructura, así como de las tensiones σ_x , σ_y y τ_{xy} en diferentes puntos de la estructura. Una vez halladas, resulta posible calcular las tensiones principales en cada punto, haciendo uso de las ecuaciones clásicas de la Resistencia de Materiales:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \tau_{\max} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \quad (7.10)$$

El ángulo que forman con el eje x está dado por

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

Estas ecuaciones, como se sabe, pueden representarse gráficamente por medio del círculo de Mohr. Así, para el trazado del círculo se supone positiva una tensión tangencial en el plano que cause una rotación en sentido horario del elemento. Por tanto, el círculo de Mohr correspondiente al estado de tensiones mostrado en la figura 7.3(a) es el que aparece en la figura 7.3(b). En él puede verse que la tensión τ_{xy} se ha representado como negativa, mientras que la tensión τ_{yx} es positiva y de igual valor. En la figura 7.3(b) se tiene

$$\begin{aligned} OA = OC + CA &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_1 \\ OB = OC - CB &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_2 \end{aligned}$$

y

$$\tan \beta = \frac{X'X}{CX} = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

por lo que $\beta = 2\theta$. Esto indica que la dirección de la tensión principal σ_1 se obtiene girando desde el eje x un ángulo θ – en el mismo sentido en que hay que girar desde el plano CX hasta el plano CA ,

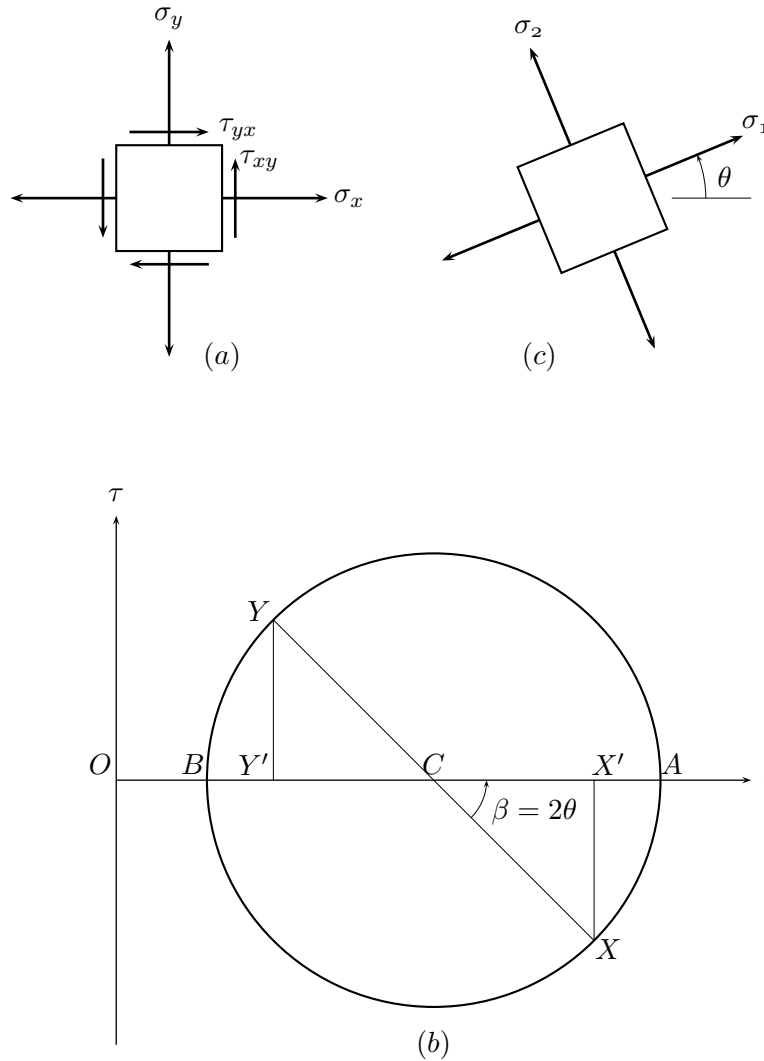


Figura 7.3: Tensiones principales y círculo de Mohr.

ya que el punto X representa justamente el estado de tensiones correspondiente al eje x en la figura 7.3(a). La figura 7.3(c) muestra la orientación de las tensiones principales.

Finalmente, es necesario introducir un criterio para definir si el material se encuentra cercano o no

al estado de cedencia en los diferentes puntos de la estructura. Obsérvese que en el caso unidimensional dicho estado se define de manera inequívoca por medio de una tensión, mientras que en los casos bi- y tri-dimensional esto no es posible, ya que se tienen varias tensiones actuando de manera simultánea. Por esta razón, en la Teoría de la Plasticidad se han desarrollado varios criterios para definir el inicio de la plastificación en tales situaciones. Uno de ellos es el de von Mises, que para el caso de tensión y deformación planas toma la forma

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (7.11)$$

De esta suerte, el material se considera que permanece elástico (es decir, que su forma original es recuperable al retirar la carga) si la tensión de von Mises σ_m no supera la tensión de cedencia σ_c del material.

7.2. Elemento triangular de deformación constante

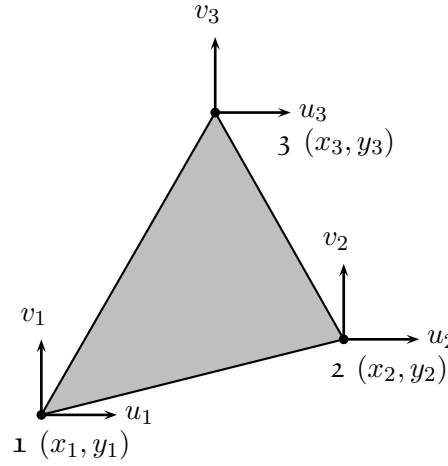


Figura 7.4: Elemento triangular de tres nodos.

Consideremos un elemento finito triangular como el mostrado en la figura 7.4. La numeración de los nodos 1, 2, 3 corresponde al sistema local, mientras que en el sistema global los nodos se identificarán por números enteros cualesquiera. Los desplazamientos en los sentidos x e y se pueden interpolar en función de los desplazamientos nodales u_i y v_i , $i = 1, 2, 3$ en la forma usual

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ v(x, y) &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \end{aligned} \quad (7.12)$$

donde las funciones de forma $N_i = N_i(x, y)$ deben ser tales que sean iguales a 1 en el nodo respectivo y 0 en los restantes. Normalmente, la dependencia de estas funciones de las coordenadas x e y se omite en aras de la simplicidad de la notación. Puede verse que se han asignado las mismas funciones para los desplazamientos u y v aunque, en principio, podrían ser diferentes si el problema así lo exige. La ecuación anterior puede plantearse de forma matricial como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}}_{\psi(x, y)} = \underbrace{\begin{pmatrix} N_1 & 0 & \vdots & N_2 & 0 & \vdots & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & \vdots & 0 & N_2 & \vdots & 0 & N_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_e} \quad (7.13)$$

Para facilidad en la deducción de las matrices de rigidez y fuerzas equivalentes, es conveniente escribir la matriz de funciones de forma \mathbf{N} y el vector de desplazamientos nodales \mathbf{d}_e como

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3]$$

$$\mathbf{d}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

de acuerdo a las particiones indicadas en la ecuación anterior. Como las funciones de forma dependen de las coordenadas x e y , se pueden plantear las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (7.15)$$

De acuerdo con esta formulación, los desplazamientos nodales u_i pueden ser escritos igualmente en la forma

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ u_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \end{aligned} \quad (7.16)$$

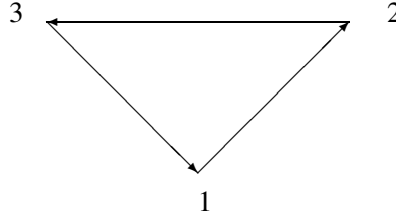
Ecuaciones semejantes vinculan los desplazamientos v_i con las coordenadas nodales. Al resolver el sistema de ecuaciones anterior con respecto a las variables α_i , reemplazar los resultados en (7.15) y comparar con la ecuación (7.12) se llega a que

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad (7.17)$$

donde A es el área del elemento y

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \end{aligned} \quad (7.18)$$

para $i, j, k = 1, 2, 3$. Esto indica que los sub-índices toman cíclicamente los valores 1,2,3 como muestra el diagrama siguiente:



En consecuencia,

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ b_1 &= y_2 - y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 \\ c_1 &= x_3 - x_2 & c_2 &= x_1 - x_3 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (7.19)$$

En la figura 7.5 se encuentra la representación de las funciones de forma del elemento triangular de tres nodos. La matriz de deformación correspondiente a las funciones de forma adoptadas se obtiene fácilmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \vdots & b_2 & 0 & \vdots & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & \vdots & 0 & c_2 & \vdots & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & \vdots & c_2 & b_2 & \vdots & c_3 & b_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Esta matriz relaciona las deformaciones ϵ definidos en la ecuación (7.2) con los desplazamientos nodales d_e de la forma usual:

$$\epsilon = B d_e \quad (7.21)$$

El hecho de que los elementos de la matriz B no dependan de x ni de y implica que las deformaciones contenidas en el vector ϵ son constantes, lo que da el nombre al elemento.

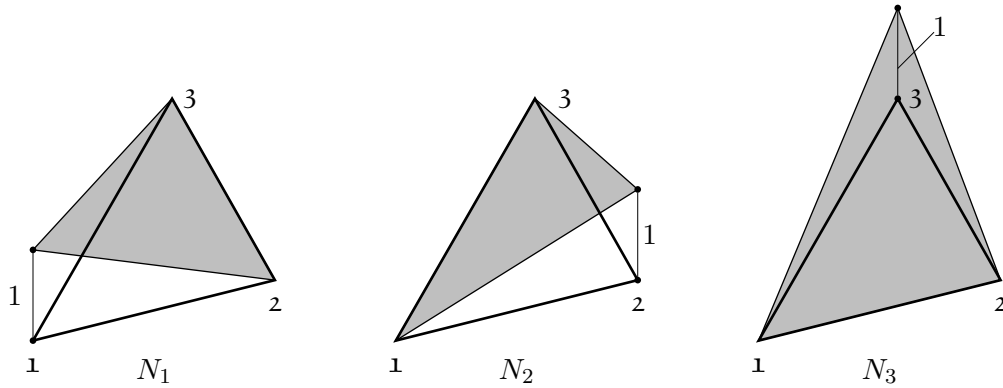


Figura 7.5: Funciones de forma del elemento triangular de tres nodos.

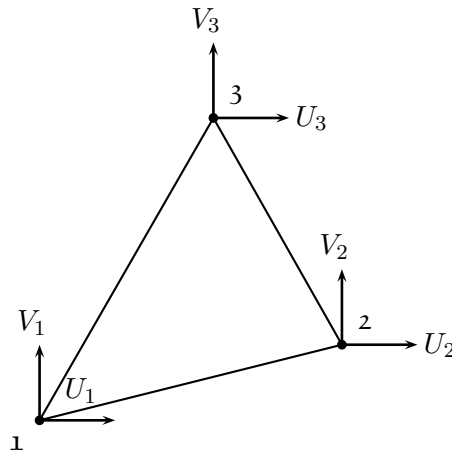


Figura 7.6: Fuerzas en el elemento triangular.

Consideremos el estado de fuerzas y tensiones existente en el elemento triangular de la figura 7.6, el cual tiene un espesor constante t . En él se encuentran aplicadas las fuerzas concentradas en

cada nodo, U_i y V_i . Sobre este elemento apliquemos un vector de deformaciones virtuales $\delta\epsilon$ al que corresponderán los desplazamientos virtuales $\delta u_i, \delta v_i$ causados por las fuerzas de equilibrio U_i y V_i . Aplicando el Principio de Trabajos Virtuales se tiene

$$t \int_A \delta\epsilon^T \boldsymbol{\sigma} dA = \sum_{i=1}^n \delta u_i U_i + \sum_{i=1}^n \delta v_i V_i \quad (7.22)$$

La ecuación anterior se puede escribir en la forma

$$t \int_A \delta\epsilon^T \boldsymbol{\sigma} dA = \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{p}_e \quad (7.23)$$

con

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{d}_e^T &= [\delta u_1 \delta v_1 \delta u_2 \delta v_2 \delta u_3 \delta v_3] \\ \mathbf{p}_e &= [U_1 V_1 U_2 V_2 U_3 V_3]^T \end{aligned} \quad (7.24)$$

Como

$$\boldsymbol{\psi}(x, y) = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$$

el vector de deformaciones se convierte en

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad (7.25)$$

Esto conduce a que la interpolación de los desplazamientos y deformaciones virtuales puede plantearse en la forma siguiente:

$$\delta\epsilon(x, y)^T = \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{B}^T \quad (7.26)$$

Reemplazando se llega a que

$$\delta \mathbf{d}_e^T \left[t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA \cdot \mathbf{d}_e - \mathbf{p}_e \right] = 0 \quad (7.27)$$

Si se considera que los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{d}_e$ son arbitrarios y se sustituye las ecuaciones (7.5) y (7.25) en la ecuación anterior, se llega al siguiente resultado final:

$$\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{p}_e \quad (7.28)$$

donde

$$\mathbf{k}_e = t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA \quad (7.29)$$

es la matriz de rigidez del elemento. Como las matrices bajo el integrando son todas constantes, el resultado es

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} t A \quad (7.30)$$

cuya expresión final depende del estado de la estructura (tensión o deformación planas). Por su parte, \mathbf{p}_e es el vector de fuerzas aplicadas en el elemento.

El ensamblaje de las matrices globales se efectúa bajo la convención de que los nodos 1,2,3 en el sistema local corresponden a los nodos en el sistema global i, j, k , ordenados en forma ascendente, es decir $i < j < k$, de manera semejante a como se ha hecho en los capítulos anteriores para elementos de barra.

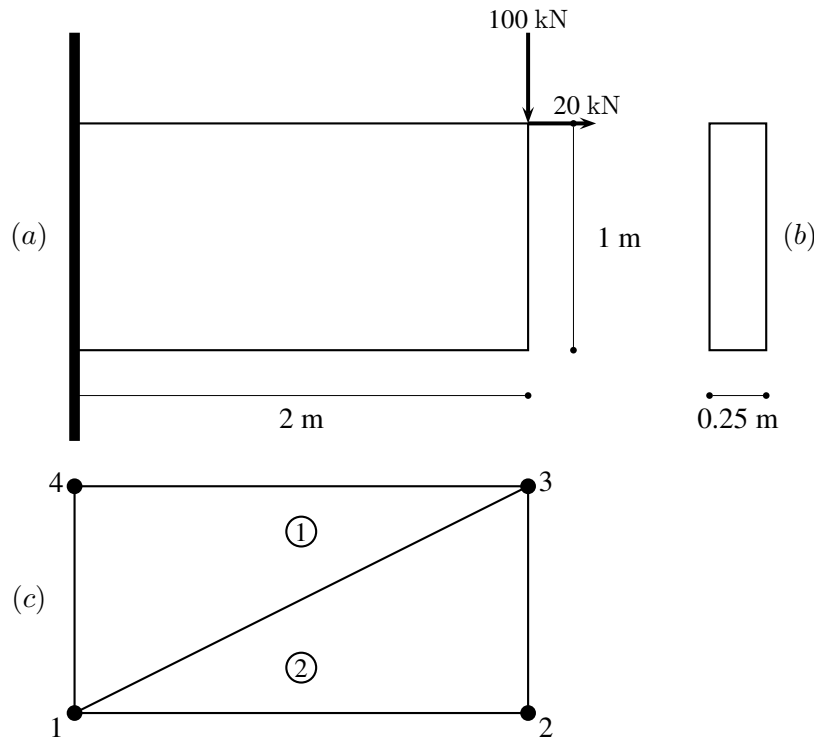


Figura 7.7: Ejemplo 7.1. (a), (b): Geometría y cargas. (c): Modelo de elementos finitos.

7.3. Ejemplo 7.1

La figura 7.7 muestra una viga alta de largo 2 m, altura 1 m y espesor 0.25 m sometida a dos fuerzas concentradas. El módulo de elasticidad es $2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ y el módulo de Poisson es 0.2. Utilizando dos elementos finitos como muestra la figura, calcularemos los desplazamientos de la estructura y las tensiones en los elementos.

De acuerdo con la información dada el problema es de tensión plana. La matriz C es por tanto

$$C = E \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Al sustituir los datos se obtiene

$$C = \frac{2 \times 10^7}{0,96} \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

Las matrices de funciones de forma y de deformación requieren el cálculo de las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \end{aligned} \quad (7.33)$$

tal como se indicó anteriormente. La tabla 7.1 muestra los valores de las constantes a_i , b_i y c_i .

Cuadro 7.1: Valores de las constantes a_i , b_i y c_i

Elemento 1	a_i	b_i	c_i
1	2	0	-2
3	0	1	0
4	0	-1	2
Elemento 2	a_i	b_i	c_i
1	2	-1	0
2	0	1	-2
3	0	0	2

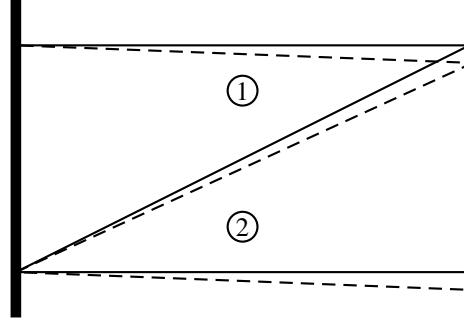


Figura 7.8: Ejemplo 7.1 – Estado final (Desplazamientos magnificados 5,000 veces).

Matrices de rigidez elementales

Elemento 1: La ecuación básica en este paso es

$$\mathbf{k}_e = t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA$$

donde

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \vdots & b_2 & 0 & \vdots & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & \vdots & 0 & c_2 & \vdots & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & \vdots & c_2 & b_2 & \vdots & c_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

y por ende

$$k_1 = \frac{0,25 \times 10^7}{1,92} \begin{pmatrix} 1,6 & 0 & \vdots & 0 & -0,8 & \vdots & -1,6 & 0,8 \\ 0 & 4 & \vdots & -0,4 & 0 & \vdots & 0,4 & -4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -0,4 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & -1 & 0,4 \\ -0,8 & 0 & \vdots & 0 & 0,4 & \vdots & 0,8 & -0,4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1,6 & 0,4 & \vdots & -1 & 0,8 & \vdots & 2,6 & -1,2 \\ 0,8 & -4 & \vdots & 0,4 & -0,4 & \vdots & -1,2 & 4,4 \end{pmatrix}$$

Elemento 2: En este caso,

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Procediendo de manera similar a lo hecho anteriormente, se llega fácilmente a la siguiente expresión de la matriz del elemento:

$$k_2 = \frac{0,25 \times 10^7}{1,92} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & -1 & 0,4 & \vdots & 0 & -0,4 \\ 0 & 0,4 & \vdots & 0,8 & -0,4 & \vdots & -0,8 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0,8 & \vdots & 2,6 & -1,2 & \vdots & -1,6 & 0,4 \\ 0,4 & -0,4 & \vdots & -1,2 & 4,4 & \vdots & 0,8 & -4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -0,8 & \vdots & -1,6 & 0,8 & \vdots & 1,6 & 0 \\ -0,4 & 0 & \vdots & 0,4 & -4 & \vdots & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez global y desplazamientos

Con fundamento en la tabla 7.2 se obtiene la matriz de rigidez global de la estructura:

Cuadro 7.2: Ejemplo 7.1 – Correspondencia de grados de libertad en sistemas local y global

Elemento 1	Local	Global
	1	1
	2	2
	3	5
	4	6
	5	7
	6	8
Elemento 2	Local	Global
	1	2
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6

$$\mathbf{K} = 1,3021 \times 10^6 \begin{pmatrix} 2,6 & 0 & -1 & 0,8 & 0 & -1,2 & -1,6 & 0,8 \\ 0 & 4,4 & 0,8 & -0,4 & -1,2 & 0 & 0,4 & -4 \\ -1 & 0,8 & 2,6 & -1,2 & -1,6 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,8 & -0,4 & -1,2 & 4,4 & 0,8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2 & -1,6 & 0,8 & 2,6 & 0 & -1 & 0,4 \\ -1,2 & 0 & 0,4 & -4 & 0 & 4,4 & 0,8 & -0,4 \\ -1,6 & 0,4 & 0 & 0 & -1 & 0,8 & 2,6 & -1,2 \\ 0,8 & -4 & 0 & 0 & 0,4 & -0,4 & -1,2 & 4,4 \end{pmatrix}$$

La condiciones de contorno son $u_1 = u_2 = u_7 = u_8 = 0$. La solución final

$$\mathbf{K}_{bb} \mathbf{D}_b = \mathbf{P}_b$$

es

```
>> a=[1 2 7 8];
```

```

>> b=[3 4 5 6];
>> K_bb=K(b,b)

K_bb =

    1.0e+06 *

     3.3854    -1.5625    -2.0833     0.5208
    -1.5625     5.7292     1.0417    -5.2083
    -2.0833     1.0417     3.3854         0
     0.5208    -5.2083         0     5.7292

>> P_b=[0 0 20 -100]';

P_b =

     0
     0
    20
   -100

>> D_b=K_bb\P_b

D_b =

    1.0e-03 *

   -0.0245
   -0.1604
    0.0402
   -0.1610

```

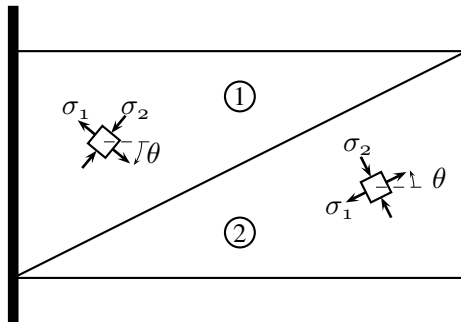


Figura 7.9: Ejemplo 7.1 – Tensiones principales.

Tensiones

Una vez calculados los desplazamientos del sistema resulta posible calcular las tensiones en cada elemento. Para ello se utilizará la fórmula básica

$$\sigma = CBd_e$$

donde d_e son los desplazamientos de los nodos del elemento e . Para el elemento 1 se tiene

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 418,2546 \\ 83,6509 \\ -670,8727 \end{pmatrix}$$

Las tensiones principales valen

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 942,3717 \\ \sigma_2 &= -440,4661 \\ \theta &= -37,9986^\circ \end{aligned} \quad (7.34)$$

Análogamente, para el elemento 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -256,2050 \\ -64,0512 \\ -128,1025 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= -322,8183 \\ \theta &= 26,5651^\circ \end{aligned} \quad (7.35)$$

La figura 7.9 muestra la interpretación de estos resultados.

7.4. Estructuras en tres dimensiones

En las secciones siguientes estudiaremos el análisis por elementos finitos de estructuras espaciales, esto es, las formadas por sólidos masivos en tres dimensiones, tales como presas, silos, etc. Dentro de este grupo se da un caso especial cual es el de estructuras de revolución. Desde un punto de vista geométrico, éstas surgen de la rotación circular de un área plana, llamada *sección meridional*, alrededor de un eje vertical, como ilustra la figura 7.10. Los ejemplos más relevantes son los silos y los depósitos de sección circular. Si además de la simetría que le es propia a este tipo de estructuras se da simetría en las cargas, las cuales normalmente son repartidas de manera horizontal, entonces se tiene el caso de *estructuras de revolución axi-simétricas*, las cuales pueden ser tratadas como una extensión de la deformación plana, estudiada en el capítulo anterior, lo que evita hacer un estudio

tridimensional. De todas maneras, aún en el caso de estructuras de revolución con cargas asimétricas es posible aprovechar este sencillo tratamiento del problema en dos dimensiones, por medio de la descomposición de la carga en series de Fourier. Una condición básica que se debe cumplir para que sea válido el tratamiento del problema como axi-simétrico es que la pared de la estructura no sea muy delgada, caso en el cual debe tratarse como una lámina de revolución, en la que surge la necesidad de considerar grados de libertad rotacionales. Por tanto, en este capítulo se estudiará solamente el caso de estructuras de revolución con paredes relativamente gruesas en comparación con su altura y sometidas a la acción de cargas externas horizontales y verticales simétricas con respecto al eje de revolución.

Después del estudio de estructuras de revolución examinaremos el problema general de estructuras tridimensionales. En general, se hace necesario recurrir a este tipo de formulación, que es altamente exigente en términos computacionales, cuando la estructura espacial no puede ser analizada como un sistema en deformación plana ni como una estructura de revolución. Restringiremos el análisis por elementos finitos al caso sencillo de elementos tetraédricos, con los cuales se puede formar diversos tipos de estructuras debido a su versatilidad.

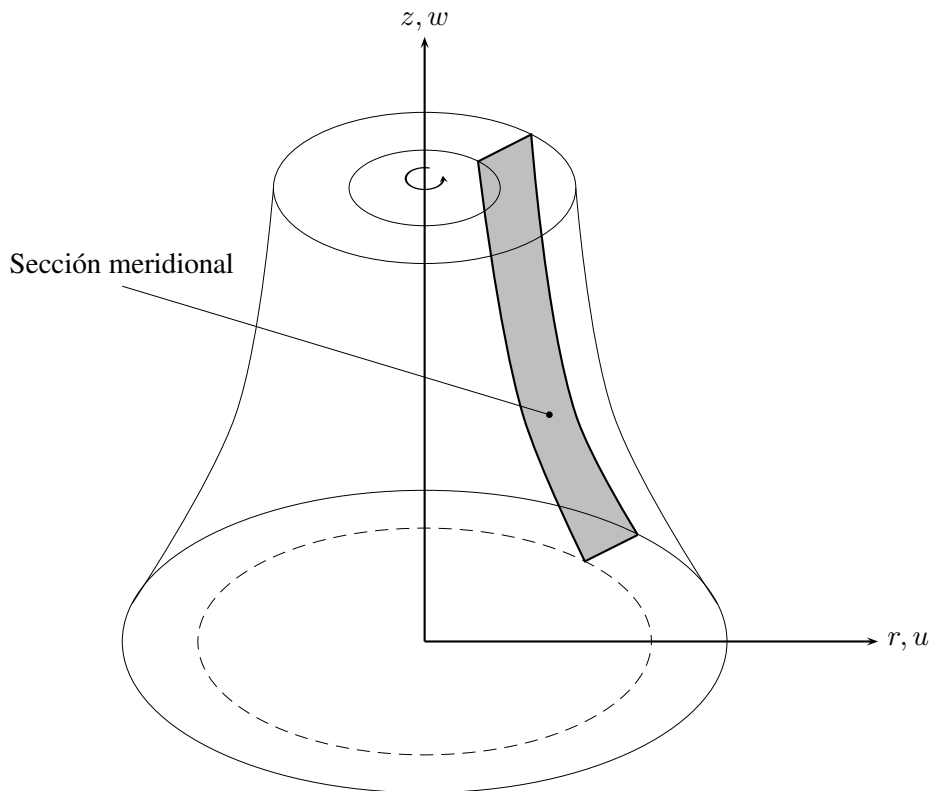


Figura 7.10: Estructura de revolución.

7.5. Elemento infinitesimal axi-simétrico

La figura 7.11 muestra un elemento infinitesimal de la pared de la estructura, de dimensiones $d\theta$, dr y dz , donde r es el radio de la sección circular de la cara interna de la pared. Los desplazamientos a los que se ve expuesta la estructura son, de manera predominante, en los sentidos radial, u , y vertical, w . Bajo carga simétrica, que es la condición impuesta anteriormente, los desplazamientos en sentido tangencial, v , son nulos. De esta manera, el vector de funciones de desplazamiento es

$$\psi(r, z) = \begin{pmatrix} u(r, z) \\ w(r, z) \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

Consideremos ahora la figura 7.12, que destaca el desplazamiento radial solamente. Si el desplazamiento en la cara interior de la pared es u , evidentemente en la cara exterior es

$$u + \frac{\partial u}{\partial r} dr \quad (7.37)$$

ya que $\frac{\partial u}{\partial r}$ es la tasa de variación del desplazamiento en el sentido radial. Por tanto, la deformación radial es

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} dr \quad (7.38)$$

Deduciremos ahora el valor de la deformación en sentido tangencial. Si bien el desplazamiento tangencial v es nulo, se da una deformación tangencial por el hecho de que la sección transversal de la estructura se amplía, como indica la figura 7.12. Por este motivo, la longitud del arco interior pasa de ser $r d\theta$ a ser $(r + u) d\theta$. Por ende, la deformación en el sentido tangencial es

$$\epsilon_\theta = \frac{(r + u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r} \quad (7.39)$$

Restan aún por definir las deformaciones en el plano de la sección meridional mostrada en la figura 7.10. Evidentemente, la presión horizontal de las cargas externas combinada con la acción de las cargas verticales causa distorsiones como la que muestra la figura 7.13. La analogía de este diagrama con el que aparece en la figura A.5 permite inferir fácilmente que la deformación en sentido vertical vale

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7.40)$$

así como que la deformación cortante en el plano (r, z) es

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (7.41)$$

De esta manera, tenemos que el vector de deformaciones ϵ es

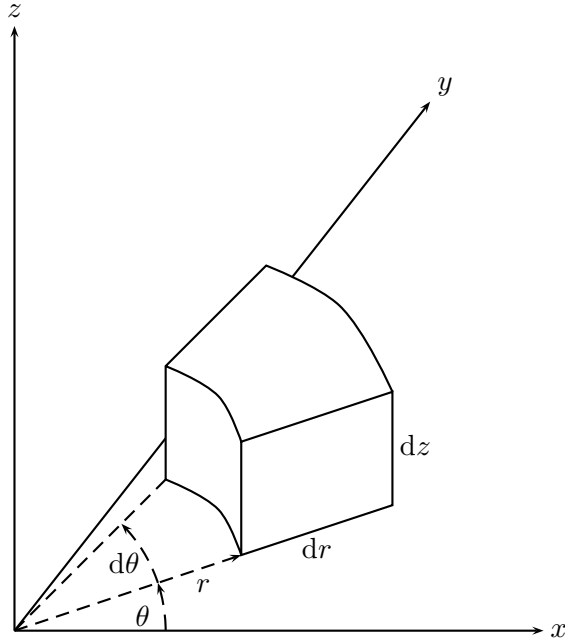


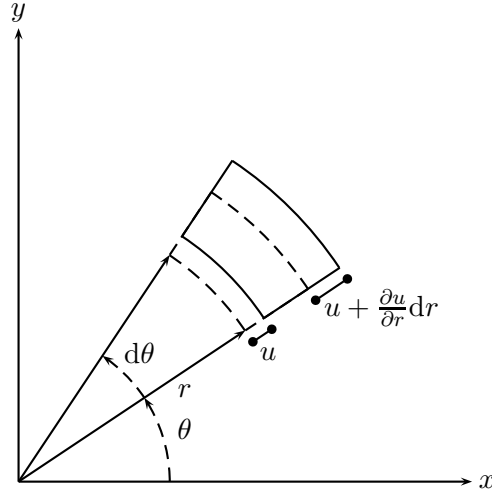
Figura 7.11: Elemento infinitesimal de revolución.

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

Ahora bien, las tensiones a las que está sometido el elemento infinitesimal corresponden a las deformaciones así establecidas (figura 7.14), y están dadas por

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

Como a nivel infinitesimal las tres primeras de estas tensiones son ortogonales entre sí, se puede aplicar directamente las ecuaciones del tipo (A.15) con las modificaciones correspondientes, para establecer las relaciones elásticas de estas tensiones con las deformaciones longitudinales. Asimismo,

Figura 7.12: Deformación del elemento infinitesimal en el plano (x, y) .

se sigue el mismo criterio usado para obtener el valor de la tensión cortante en tensión plana. El resultado es

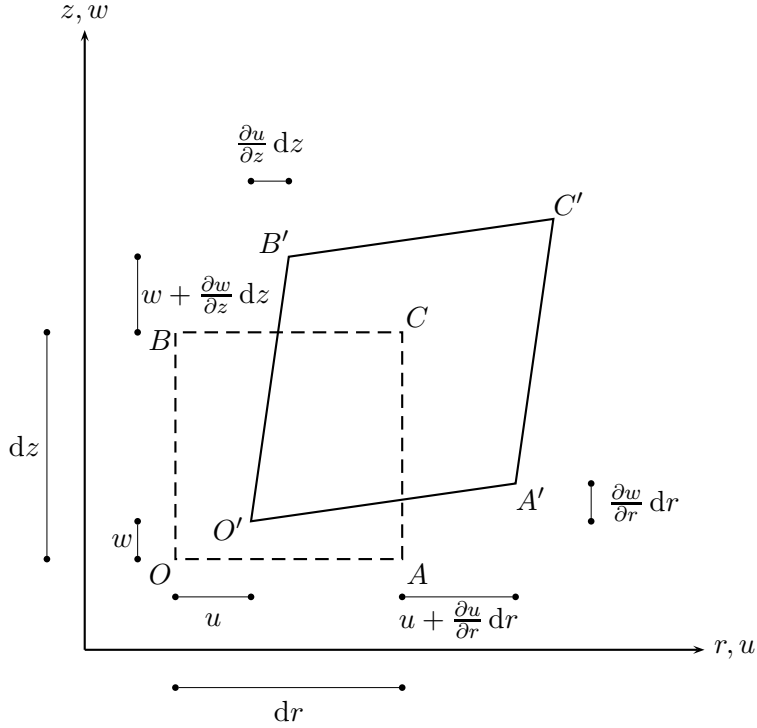
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (7.44)$$

Plantearemos ahora la expresión del principio de trabajos virtuales para esta situación. De la figura 7.11 se desprende que el diferencial de volumen vale

$$dV = r d\theta \cdot dr dz = r d\theta \cdot dA \quad (7.45)$$

donde $dA = dr dz$ es el área de la sección meridional del elemento infinitesimal. El principio de trabajos virtuales toma entonces la forma

$$\begin{aligned} \int_A \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} r d\theta \cdot dr dz &= \int_A \int_0^{2\pi} \delta \boldsymbol{\psi}(x, y)^T \mathbf{b} r d\theta \cdot dr dz + \\ &\quad \oint_l \int_0^{2\pi} \delta \bar{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{q} r d\theta \cdot ds + \sum_{i=1}^n \int_0^{2\pi} \delta u_i \mathbf{p}_i d\theta \end{aligned} \quad (7.46)$$

Figura 7.13: Deformación del elemento infinitesimal en el plano (r, z) .

donde

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_r \\ b_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_r \\ q_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} p_{ri} \\ p_{zi} \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

son respectivamente las fuerzas másicas (distribuidas sobre el volumen), las fuerzas superficiales (distribuidas sobre las superficies interior o exterior del cuerpo) y las fuerzas aplicadas sobre contornos, sea de manera radial (p_r) o axial (p_z). Algunas de estas fuerzas aparecen en la figura 7.15. Al integrar sobre θ y proceder de manera semejante a lo hecho en los capítulos anteriores, se obtiene la ecuación de equilibrio del sistema discreto de elementos finitos es

$$\mathbf{k}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)} \quad (7.48)$$

donde

$$\mathbf{k}^{(e)} = 2\pi \int_A \int B^T \mathbf{D} B r dr dz \quad (7.49)$$

es la matriz de rigidez del elemento. Por otra parte

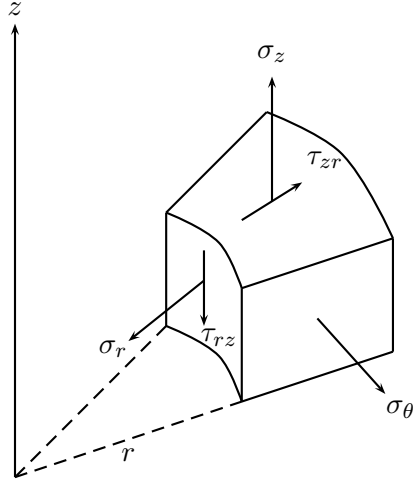


Figura 7.14: Tensiones en el elemento infintesimal.

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{f}_b^{(e)} + \mathbf{f}_q^{(e)} + \mathbf{f}_p^{(e)} \quad (7.50)$$

es el vector de fuerzas externas, que está compuesto por el vector de fuerzas concentradas equivalentes a las fuerzas másicas,

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = 2\pi \int \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{b} r dr dz \quad (7.51)$$

el vector de fuerzas concentradas equivalentes a las superficiales,

$$\mathbf{f}_q^{(e)} = 2\pi \sum_{m=1}^n \oint_{l^{(m)}} r \mathbf{N}_m^T \mathbf{q}^{(m)} ds \quad (7.52)$$

y el vector de fuerzas concentradas equivalentes a las fuerzas distribuidas circularmente:

$$\mathbf{f}_p^{(e)} = 2\pi r \mathbf{p}^{(e)} \quad (7.53)$$

En estas ecuaciones n es el número de lados del elemento y $\mathbf{p}^{(e)}$ es el vector de los valores de las intensidades de las fuerzas puntuales repartidas circunferencialmente en los nodos del elemento:

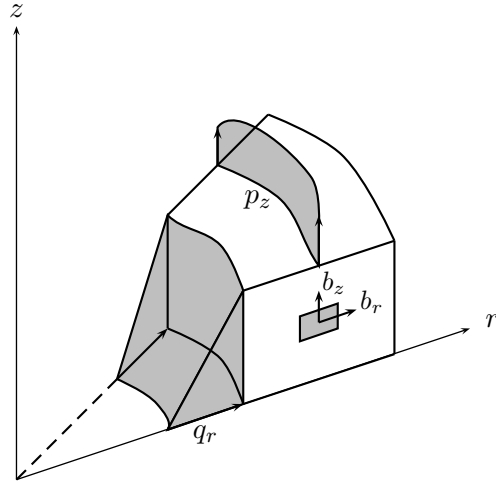


Figura 7.15: Fuerzas en cuerpos de revolución.

$$\mathbf{p}^{(e)} = [U_1 \ W_1 \ U_2 \ W_2 \ \dots]^T \quad (7.54)$$

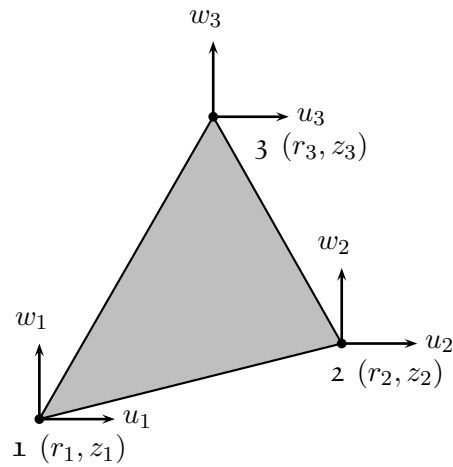


Figura 7.16: Elemento axi-simétrico triangular de tres nodos.

7.6. Elemento finito axi-simétrico triangular de tres nodos

Deduciremos a continuación la matriz de rigidez de un elemento axi-simétrico de tres nodos, como el que aparece en la figura 7.16. Los desplazamientos en los sentidos radial r y vertical z se pueden interpolar en función de los desplazamientos nodales u_i y $w_i, i = 1, 2, 3$ en forma semejante a lo hecho en el caso del elemento triangular de deformación constante (ecuación 7.12):

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 \end{aligned} \quad (7.55)$$

En este caso las funciones de forma dependen de las coordenadas r y z en lugar de las x e y . Por tanto, sus expresiones son

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i r + c_i z] \quad (7.56)$$

con

$$\begin{aligned} a_i &= r_j z_k - r_k z_j \\ b_i &= z_j - z_k \\ c_i &= r_k - r_j \end{aligned} \quad (7.57)$$

para $i, j, k = 1, 2, 3$, valores que rotan cíclicamente como se indicó en el caso de tensión y deformación planas. La relación entre desplazamientos nodales y desplazamientos en el interior del elemento es, en consecuencia,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}}_{\psi(x,y)} = \underbrace{\begin{pmatrix} N_1 & 0 & \vdots & N_2 & 0 & \vdots & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & \vdots & 0 & N_2 & \vdots & 0 & N_3 \end{pmatrix}}_N \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_3 \\ w_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}^{(e)}} \quad (7.58)$$

lo que puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} N &= [N_1 \ N_2 \ N_3] \\ \mathbf{d}^{(e)} &= \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.59)$$

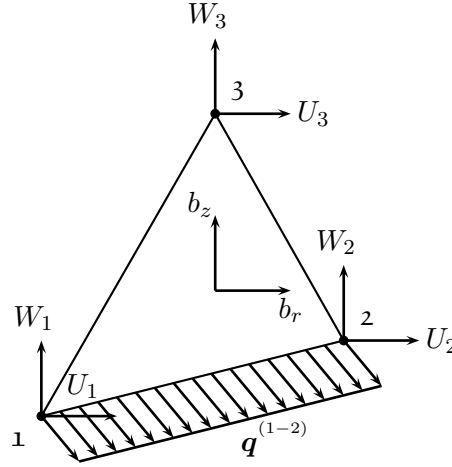


Figura 7.17: Fuerzas en un elemento triangular axi-simétrico.

según las particiones indicadas. Finalmente, a partir de la ecuación (7.42) obtenemos la matriz cinemática \mathbf{B} de este elemento:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \vdots & \frac{N_2}{r} & 0 & \vdots & \frac{N_3}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \vdots & b_2 & 0 & \vdots & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & \vdots & 0 & c_2 & \vdots & 0 & c_3 \\ \frac{a_1}{r} + b_1 + \frac{c_1 z}{r} & 0 & \vdots & \frac{a_2}{r} + b_2 + \frac{c_2 z}{r} & 0 & \vdots & \frac{a_3}{r} + b_3 + \frac{c_3 z}{r} & 0 \\ c_1 & b_1 & \vdots & c_2 & b_2 & \vdots & c_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad (7.60)$$

Esta matriz relaciona las deformaciones ϵ definidas en la ecuación (7.2) con los desplazamientos nodales $\mathbf{d}^{(e)}$ de la forma usual:

$$\epsilon = \mathbf{B} \mathbf{d}^{(e)} \quad (7.61)$$

Nótese que, a diferencia del elemento de tres nodos en tensión o deformación planas, algunos elementos de la matriz \mathbf{B} son en este caso funciones de r y z , por lo que el elemento deja de denominarse de deformación constante. Esto se da en la tercera fila de la matriz, en los lugares correspondientes

a los términos $\frac{N_i}{r}$. Una aproximación comúnmente usada es calcular estos valores únicamente en el baricentro del triángulo, que tiene por coordenadas

$$(\bar{r}, \bar{z}) = \left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right) \quad (7.62)$$

En tal caso la matriz deviene constante. Si se toma la misma aproximación para el valor de r en la ecuación de la matriz de rigidez (7.49), entonces no hay necesidad de efectuar la integración. En consecuencia,

$$\mathbf{k}^{(e)} \doteq 2\pi \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \bar{r} \quad (7.63)$$

donde $\bar{\mathbf{B}}$ es la matriz cinemática evaluada en el baricentro. Se ha comprobado que esta aproximación es aproximadamente exacta si la malla es suficientemente fina en los lugares de máximas tensiones.

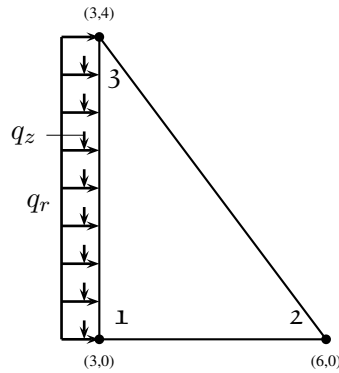


Figura 7.18: Ejemplo – Elemento finito axi-simétrico con fuerzas superficiales.

7.7. Ejemplo 7.2

La figura 7.18 enseña un elemento finito axi-simétrico sometido a fuerzas superficiales constantes. Se busca calcular el vector de fuerzas equivalentes $\mathbf{f}_q^{(e)}$ según la ecuación (7.52).

En vista de que hay sólo un lado cargado, la ecuación toma la forma

Cuadro 7.3: Valores de las constantes a_i , b_i y c_i

Nodo	a_i	b_i	c_i
1	24	-4	-3
3	0	0	3

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_q^{(e)} &= 2\pi \oint_0^l r \mathbf{N}|_{1-3}^T \mathbf{q}^{(1-3)} ds \\
 &= 2\pi \int_0^4 r_1 \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{pmatrix}_{(1-3)} \begin{pmatrix} q_r \\ q_z \end{pmatrix} ds
 \end{aligned}
 \tag{7.64}$$

La aplicación de las ecuaciones (7.57) da como resultado los valores de las constantes que aparecen en la tabla 7.3. En consecuencia, las funciones de forma toman los valores siguientes:

$$\begin{aligned}
 N_1|_{(1-3)} &= \frac{1}{2A} [a_1 + b_1 r_1 + c_1 z] = \frac{1}{6} [12 - 3z] \\
 N_2|_{(1-3)} &= 0 \\
 N_3|_{(1-3)} &= \frac{1}{2A} [a_3 + b_3 r_3 + c_3 z] = \frac{1}{6} [3z]
 \end{aligned}
 \tag{7.65}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_q^{(e)} &= 2\pi \int_0^4 3 \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12-3z & 0 \\ 0 & 12-3z \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_r \\ q_z \end{pmatrix} ds \\
 &= \begin{pmatrix} 24q_r \\ 24q_z \\ 0 \\ 0 \\ 24q_r \\ 24q_z \end{pmatrix} \pi
 \end{aligned} \tag{7.66}$$

♣

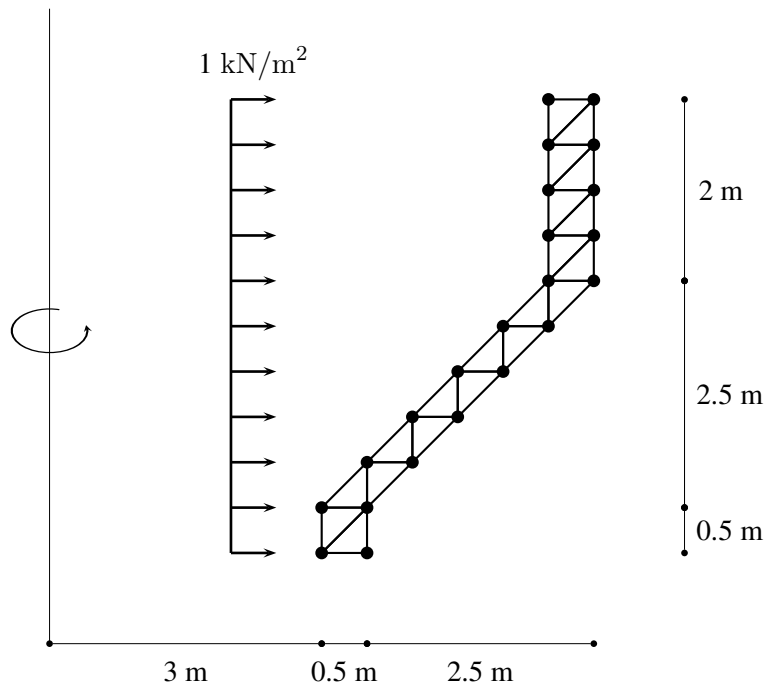


Figura 7.19: Ejemplo – Estructura axi-simétrica con fuerzas radiales.

Ejemplo

La figura 7.19 muestra un modelo, compuesto por 20 elementos finitos, referente a una estructura

de revolución sometida a una presión interna de 1 kN/m^2 . El módulo de elasticidad del material es $2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ y el módulo de Poisson es 0,15. La estructura se considera fija en los dos nodos inferiores, tanto para desplazamientos radiales como verticales.

La matriz constitutiva, de acuerdo con la ecuación (7.44), es

$$\mathbf{D} = 1 \times 10^7 \begin{pmatrix} 2,112 & 0,373 & 0,373 & 0 \\ 0,373 & 2,112 & 0,373 & 0 \\ 0,373 & 0,373 & 2,112 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ,870 \end{pmatrix}$$

El cálculo se ha hecho aplicando la técnica de integración aproximada expuesta anteriormente. Como ilustración, la matriz de rigidez del elemento superior, obtenida por la ecuación (7.63) es

$$\mathbf{k}^{(20)} = 1 \times 10^8 \begin{pmatrix} 1,551 & -0,020 & 0,023 & -1,548 & -1,564 & 1,568 \\ -0,020 & 3,760 & -0,683 & 0 & 0,644 & -3,760 \\ 0,023 & -0,683 & 3,802 & 0 & -3,756 & 0,683 \\ -1,548 & 0 & 0 & 1,548 & 1,548 & -1,548 \\ -1,564 & ,644 & -3,756 & 1,548 & 5,272 & -2,192 \\ 1,568 & -3,760 & 0,683 & -1,548 & -2,192 & 5,308 \end{pmatrix}$$

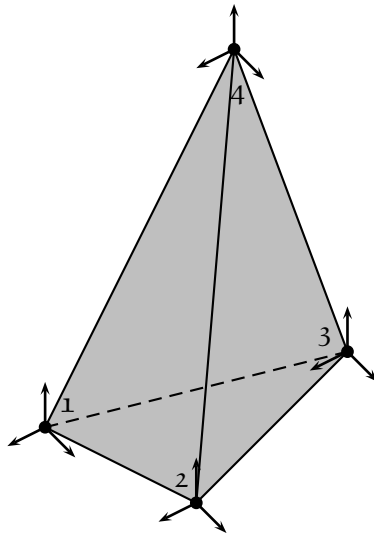


Figura 7.20: Elemento finito tetraédrico.

7.8. Elemento tetraédrico

Consideraremos ahora la aproximación con elemento finito al inifinitésimo espacial elástico e isotrópico estudiado en el Capítulo 3, para el cual las relaciones elásticas son las dadas por la ecuación (A.18), la cual conviene reescribir aquí:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (7.67)$$

El elemento finito que examinaremos en esta sección es un tetraedro como el que aparece en la figura 7.20. La convención de numeración local de los nodos es la siguiente: al mirar desde el nodo con numeración superior (4) el plano en el que se encuentran los tres primeros nodos (1, 2, 3), éstos deben formar una sucesión en sentido antihorario, tal como se muestra en la figura. La hipótesis básica es que los desplazamientos se pueden interpolar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ v(x, y, z) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ w(x, y, z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{aligned} \quad (7.68)$$

Al proceder de manera semejante a la deducción de las ecuaciones de interpolación del elemento triangular de deformación constante en el Capítulo 4, se obtiene la siguiente relación

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{pmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}^{(e)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\psi}(x, y, z)} \quad (7.69)$$

En este caso, las funciones de forma son

$$N_i = \frac{1}{6V} [a_i + b_i x + c_i y + d_i z] \quad (7.70)$$

donde V es el volumen del elemento. Estas cantidades están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$6V = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \quad (7.71)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & b_1 &= - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ c_1 &= \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} & d_1 &= - \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & b_2 &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ c_2 &= - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} & d_2 &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & b_3 &= - \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ c_3 &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} & d_3 &= - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} & b_4 &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ c_4 &= - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} & d_4 &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(7.72)

Al tomar en cuenta la relación entre deformaciones y desplazamientos, dada por

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (7.73)$$

se concluye que la matriz cinemática es

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4) \quad (7.74)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6V} \begin{pmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ d_i & 0 & b_i \\ 0 & d_i & c_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.75)$$

Como antes, la matriz \mathbf{B} relaciona las deformaciones ϵ , definidas en la ecuación (7.67), con los desplazamientos nodales $\mathbf{d}^{(e)}$ de la forma usual:

$$\epsilon = \mathbf{B} \mathbf{d}^{(e)} \quad (7.76)$$

Finalmente, las tensiones en cada elemento, definidas por la ecuación (7.67), se calculan como

$$\sigma = \mathbf{D} \epsilon = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{d}^{(e)} \quad (7.77)$$

De nuevo, al igual que en el caso del elemento triangular de tres nodos para tensión y deformación planas, el hecho de que los elementos de la matriz \mathbf{B} sean constantes implica que las deformaciones y las tensiones en cada elementos no varíen en su interior. La matriz de rigidez del elemento es

$$\mathbf{k}^{(e)} = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} V \quad (7.78)$$

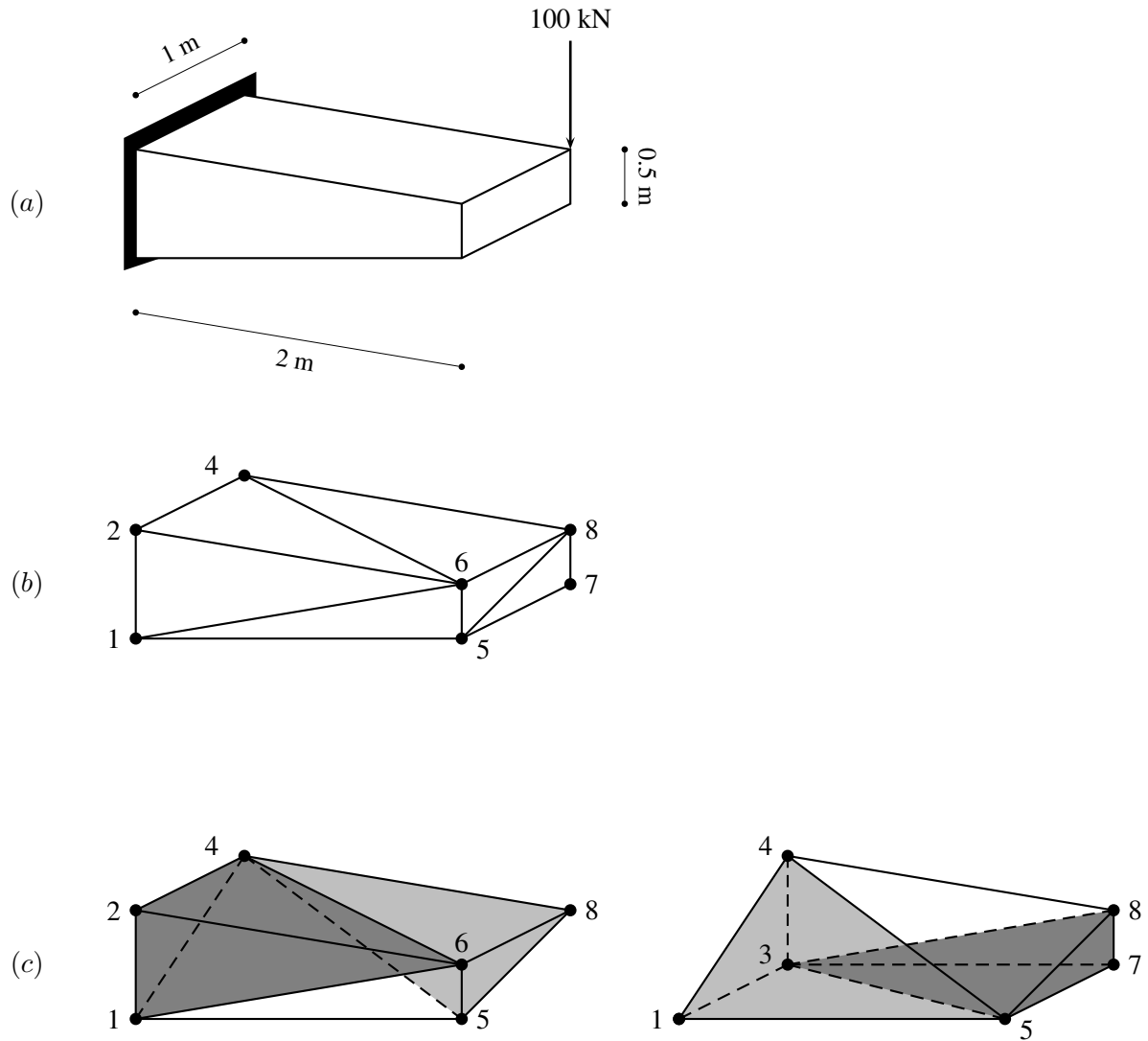


Figura 7.21: Ejemplo – Viga en voladizo de sección variable. (a): Descripción geométrica. (b): Modelo de elementos finitos. (c): Tetraedros.

7.9. Ejemplo 7.3

La figura 7.21(a) muestra una viga en voladizo de sección variable sujeta a la acción de una carga excéntrica. La viga se analizará con seis elementos tetraédricos definidos por los nodos que

aparecen en la parte (b) de la figura. Los tetraedros se muestran claramente en la parte (c). La tabla 7.4 contiene las correspondencias entre las numeraciones local y global. La primera de ellas ha sido fijada siguiendo la convención definida anteriormente, esto es, que desde el nodo 4 en numeración local en cada elemento, los tres nodos restantes aparecen conformando un esquema sucesivo ordenado en el sentido antihorario.

Cuadro 7.4: Tabla de correspondencias - Figura 7.21

Elemento	Numeración local	Numeración global
1	1	1
	2	4
	3	2
	4	6
2	1	5
	2	4
	3	6
	4	8
3	1	5
	2	6
	3	4
	4	1
4	1	1
	2	3
	3	4
	4	5
5	1	5
	2	8
	3	7
	4	3
6	1	3
	2	8
	3	4
	4	5

De acuerdo con los datos, la matriz constitutiva es

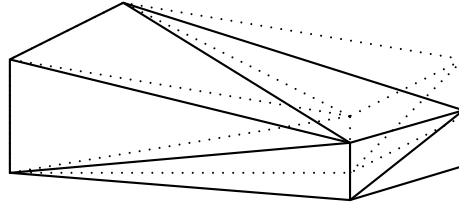


Figura 7.22: Ejemplo – Representación esquemática de los desplazamientos.

$$D = 1 \times 10^7 \begin{pmatrix} 2,112 & 0,373 & 0,373 & 0 & 0 & 0 \\ 0,373 & 2,112 & 0,373 & 0 & 0 & 0 \\ 0,373 & 0,373 & 2,112 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,870 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,870 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,870 \end{pmatrix}$$

El cálculo de la matriz de rigidez de cada elemento comienza con la determinación de los valores que forman la matriz cinamética B de cada elemento. Como ejemplo, se muestra el resultado de esta matriz para el elemento 6:

$$B^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & -0,5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0,5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -0,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Después de calcular las matrices de rigidez de cada elemento y ensamblarlas de la manera usual, se obtiene el siguiente vector de desplazamientos:

$$\begin{pmatrix} u_5 \\ v_5 \\ w_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ w_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ w_7 \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,002 \\ 0,033 \\ -0,340 \\ 0,056 \\ 0,042 \\ -0,335 \\ -0,042 \\ 0,019 \\ -0,440 \\ 0,020 \\ 0,041 \\ -0,449 \end{pmatrix}$$

La figura 7.22 contiene una representación ilustrativa de este resultado.

Apéndice A

Nociones de teoría de la elasticidad

A.1. Introducción

Se dice que un cuerpo perfectamente elástico es aquel que recupera su forma después de retirar las fuerzas que actúan sobre él. Esta hipótesis se cumple con diferente grado de aproximación para la mayoría de materiales estructurales, si las fuerzas no superan un umbral definido. En caso contrario, se inducen en el cuerpo fenómenos de plasticidad.

Por otra parte, la elasticidad puede ser de tipo lineal o no lineal, dependiendo si se cumple o no el principio de superposición, es decir, si hay proporcionalidad entre las tensiones y las deformaciones (o ley de Hooke). Algunos materiales elásticos no son lineales, como por ejemplo el caucho natural. Igualmente, algunos estados de deformación de materiales elásticos violan tal condición, al existir una dependencia entre las tensiones y las deformaciones. Un ejemplo clásico es el del estado de pandeo, en el que el momento flector adicional inducido por las fuerzas de compresión depende del valor del desplazamiento lateral.

En este capítulo se examinará la teoría de cuerpos elásticos y lineales. En primer lugar se definen algunos conceptos relativos a las fuerzas externas e internas. Luego se introducen los vectores de tensiones y deformaciones para el caso estático. A continuación se define la ley de Hooke generalizada y los coeficientes de elasticidad o coeficientes de Lamé. Finalmente se expone el concepto de energía de deformación y se extiende el principio del trabajo virtual al caso general de un infinitésimo en tres dimensiones examinado a lo largo del capítulo.

A.2. Tensiones

A.2.1. Fuerzas másicas y superficiales

Consideremos el cuerpo mostrado en la figura A.1. Sobre esta ilustración distinguiremos dos clases de fuerzas: másicas y superficiales. Las segundas se aplican sobre la superficie y pueden ser *concentradas*, que en la figura se denotan por \mathbf{p} , o *distribuidas*, simbolizadas con la letra \mathbf{q} . La forma de la distribución de estas últimas es arbitraria y puede depender de una, dos o tres dimensiones. Ejemplos de estas fuerzas son la presión hidrostática, el empuje de suelos, el contacto entre dos cuerpos, etc.

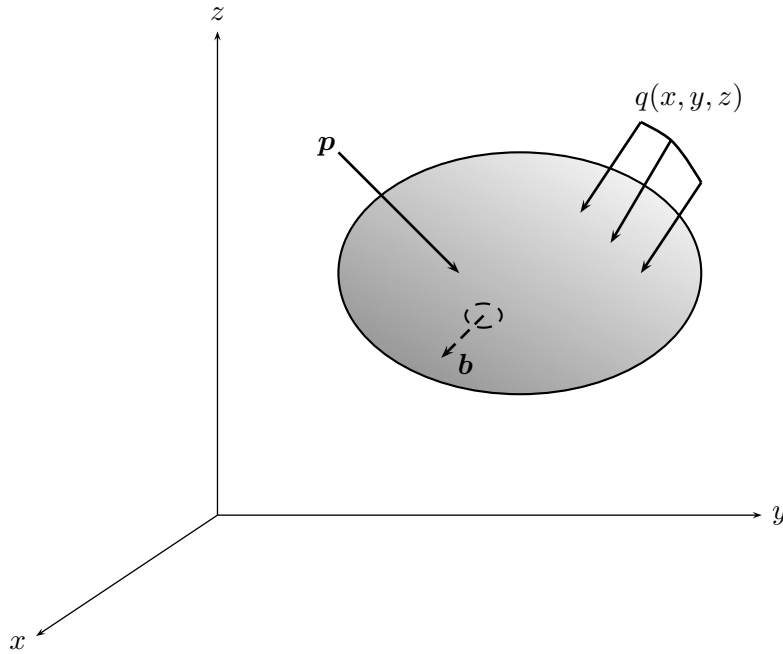


Figura A.1: Fuerzas másicas y superficiales.

Todo cuerpo siempre presenta una fuerza interna distribuida en el espacio, dada por el peso propio. Si el eje vertical se denota por z , esta fuerza b_z apuntará en la dirección negativa del eje z , en general, su valor en cada punto dependerá de las coordenadas del mismo, ya que la densidad del cuerpo puede ser variable. Por tanto, se puede denotar, en general, por $b_z(x, y, z)$.

La fuerza de gravedad anterior es solamente un caso particular de las llamadas *fuerzas másicas*, denotadas por \mathbf{b} en la figura. Otros ejemplos son las fuerzas que se generan por procesos de centrifugación, las fuerzas magnéticas y las fuerzas de inercia causadas por aceleración del cuerpo, que se examinan en el Capítulo 8. El nombre de estas fuerzas se deriva del hecho de que su valor depende estrechamente de la masa del cuerpo.

Por efecto de las fuerzas anteriormente descritas, se presentan en el cuerpo tensiones de dos tipos: normales y tangenciales. La figura A.2 muestra un cubo elemental de dimensiones infinitesimales sobre el cual se encuentran aplicadas todas las componentes de las tensiones en tres dimensiones. Las tensiones normales se denotan con el símbolo σ , mientras que las tangenciales con la letra τ . De éstas, el primer subíndice indica el eje ortogonal a la cara sobre la cual se encuentran los vectores, mientras que el segundo indica la dirección de la tensión respectiva. En cuanto a los signos, una tensión normal es positiva cuando produce tracción y negativa cuando su efecto es compresivo. En el caso de tensiones tangenciales, la tensión es positiva si tanto la normal a la cara donde se encuentra aplicada así como el

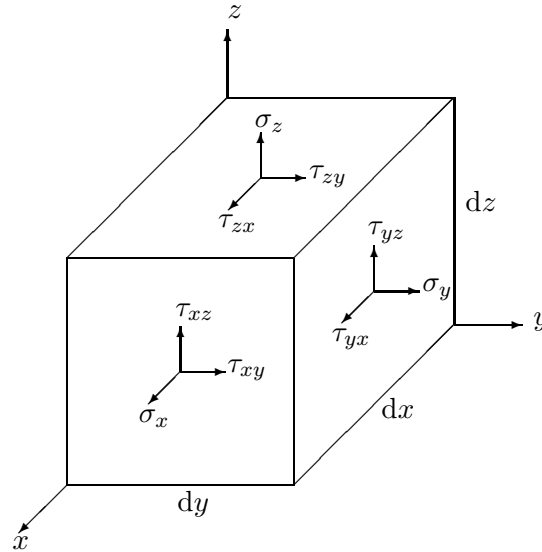


Figura A.2: Tensiones en un cubo infinitesimal.

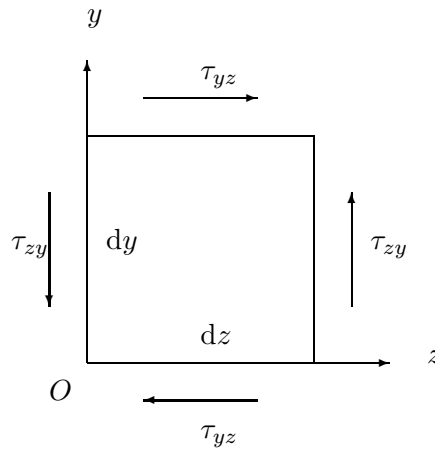


Figura A.3: Equilibrio de tensiones tangenciales.

vector de la tensión en ella tienen direcciones positivas o negativas, a juzgar por la orientación de los ejes de coordenadas. De esta manera, todas las tensiones que aparecen en la figura A.2 son positivas.

En la figura A.2 aparecen tres tensiones normales, a saber, σ_x , σ_y , σ_z y seis tangenciales, τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy} . Es fácil demostrar que estas últimas se reducen a tres tensiones solamente. De hecho, considérense las fuerzas de la figura A.3 que representa una de las caras del cubo infinitesimal. Al plantear las ecua-

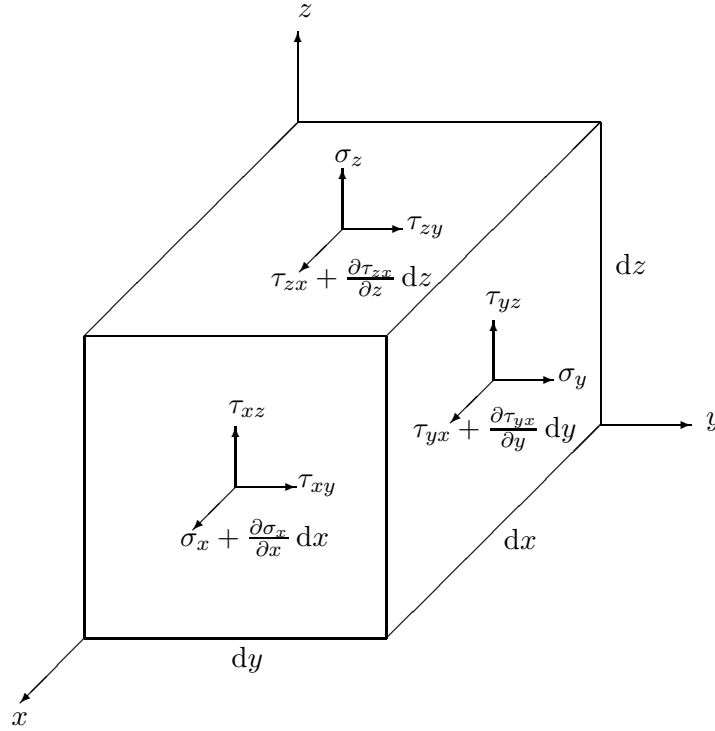


Figura A.4: Equilibrio estático.

ciones de equilibrio sobre las fuerzas de la figura se pueden despreciar las fuerzas másicas, ya que son proporcionales al volumen del cuerpo, $dx dy dz$, mientras que las fuerzas tangenciales lo son a $dx dy$, por lo que las fuerzas másicas son infinitésimos de un orden superior al de las fuerzas superficiales mostradas. Tomando momentos con respecto al origen de coordenadas se tiene

$$\tau_{yz}(dx dz) dy = \tau_{zy}(dx dy) dz \quad (\text{A.1})$$

donde los productos contenidos entre paréntesis indican el área de la cara sobre la cual se aplican las fuerzas. De aquí resulta que $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. En general,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (\text{A.2})$$

A.2.2. Ecuaciones de equilibrio

Las tensiones introducidas en la sección anterior guardan entre sí varias relaciones de equilibrio que es necesario formular explícitamente, ya que son útiles para varias deducciones posteriores. Con-

sideremos el cuerpo infinitesimal mostrado en la figura A.4. Al aplicar las leyes de equilibrio en el sentido x se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \\ - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy \\ + f_x dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde f_x es la componente en el sentido x de la resultante de las fuerzas externas y másicas. Al cancelar algunos términos y hacer un desarrollo similar para los ejes restantes, se llega a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x(t) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y(t) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.3. Deformaciones

Consideremos un cuerpo con vínculos y apoyos suficientes tales que eviten su desplazamiento como cuerpo rígido. Esta condición, que, como es obvio, debe ser satisfecha por las estructuras civiles, obliga a que sólo sea posible un desplazamiento de un punto cualquiera del cuerpo si el mismo se deforma por acción de las cargas internas y externas.

Una suposición adicional es la de que el cuerpo sólo sufre deformaciones pequeñas, ya que la suposición de grandes deformaciones nos alejaría de la hipótesis de linealidad que cubija a los sistemas estudiados en este texto. Denotemos por u , v y w las deformaciones del cuerpo en las direcciones x , y y z , respectivamente. La figura A.5 muestra la posición deformada de las dos aristas de una de las caras del cubo infinitesimal mostrado en la figura A.2. Es evidente que, si la longitud de la arista OA era inicialmente dx , después de la deformación es igual a

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (\text{A.5})$$

lo que indica que la *deformación unitaria* de la arista es

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{A.6})$$

De igual forma

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.7})$$

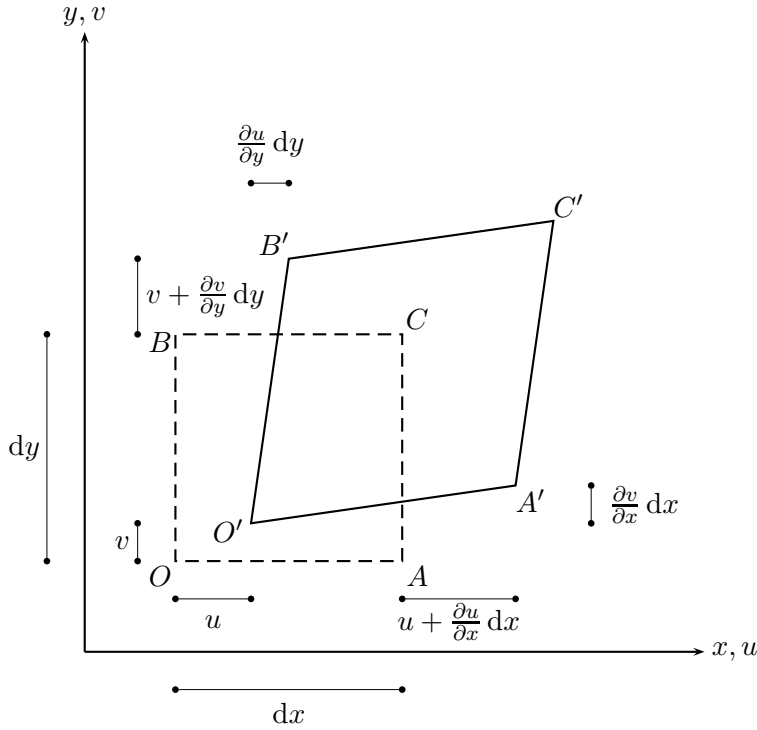


Figura A.5: Deformaciones en un rectángulo infinitesimal

Ahora bien, tal como lo indica la figura A.5, la forma inicial del cubo también se altera de manera angular. El movimiento vertical del punto A es

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (\text{A.8})$$

mientras que el movimiento horizontal del punto B es

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (\text{A.9})$$

Esto indica que la *deformación angular* en el plano xy es la suma de las distorsiones angulares de las dos caras, es decir,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.10})$$

Análogamente

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{A.11})$$

Para fines de cálculo por el método de los elementos finitos, conviene representar el conjunto completo de las seis deformaciones (tres longitudinales y tres angulares) en la forma matricial siguiente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}}_{\epsilon} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}}_{\psi(x,y,z)} \quad (\text{A.12})$$

donde L es un operador diferencial definido de manera que el producto de sus elementos por u, v o w da como resultado la derivada parcial correspondiente.

A.4. Relaciones elásticas

La *ley de Hooke* junto con la *relación de Poisson* proveen una manera simple de relacionar las tensiones y las deformaciones expuestas anteriormente. En efecto, bajo la acción única de la tensión σ_x , la deformación unitaria en la dirección x es

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{A.13})$$

mientras que las deformaciones causadas en las direcciones y y z son

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{A.14})$$

donde E y ν son los coeficientes de elasticidad (o de Young) y de Poisson, respectivamente. En vista de que la ley de Hooke establece una proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones (tal como la existente en las ecuaciones A.13 y A.14), resulta posible aplicar el principio de superposición para obtener el efecto conjunto de las tensiones σ_x, σ_y y σ_z . En consecuencia, se tiene

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

La deducción del valor de las deformaciones tangenciales como función de las tensiones puede realizarse a partir de un estado de tensión tangencial pura, como el que muestra la figura A.6. En efecto, si $|\sigma_z| = |\sigma_y|$ y $\sigma_x = 0$, en las caras del elemento $abcd$, inclinado $\pi/4$ radianes con respecto a la horizontal, sólo se presentan esfuerzos cortantes τ , cuyo valor se puede obtener planteando el equilibrio de fuerzas en el elemento obc :

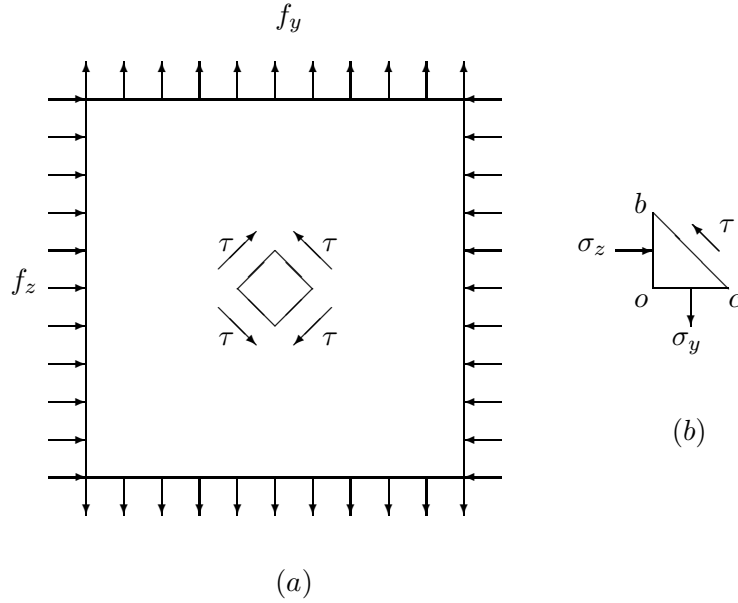


Figura A.6: Deformaciones tangenciales.

$$\sigma_z A \cos \frac{\pi}{4} - \sigma_y A \sin \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\sigma_z A \sin \frac{\pi}{4} + \sigma_y A \cos \frac{\pi}{4} - \frac{\tau A}{\cos \frac{\pi}{4}} = 0$$

donde A es el área de las caras verticales. De aquí se obtiene que

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_y) = \sigma_y$$

Por causa de estos esfuerzos tangenciales, el elemento obc sufre una distorsión angular igual a $\gamma/2$, ya que γ corresponde al elemento completo. En consecuencia, se tiene que

$$\frac{oc}{ob} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \epsilon_y}{1 + \epsilon_z}$$

Para valores pequeños de γ resulta válida la siguiente aproximación:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\gamma}{2}} \approx \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

Como $\sigma_x = 0$ y $\sigma_y = -\sigma_z$, tenemos que

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu\sigma_y] = \frac{(1 + \nu)\sigma_z}{E}$$

Análogamente,

$$\epsilon_y = \frac{(1 + \nu)\sigma_y}{E}$$

De esta manera se llega a que

$$\gamma = \frac{2(1 + \nu)\tau}{E}$$

o bien

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

donde G es llamado *módulo de rigidez*. En el caso general en tres dimensiones se tiene

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}\tag{A.16}$$

Estas ecuaciones pueden presentarse de manera matricial de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{E} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}}\tag{A.17}$$

donde \boldsymbol{D} es la *matriz constitutiva elástica* definida por la relación inversa de la anterior:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\epsilon}}\tag{A.18}$$

Esta relación inversa entre tensiones y deformaciones puede obtenerse a partir de la *dilatación cúbica*, definida por

$$\varepsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (\text{A.19})$$

y de la suma de esfuerzos normales

$$\Sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (\text{A.20})$$

En efecto, al sumar las ecuaciones (A.15) se llega a que

$$\varepsilon = \frac{1 - 2\nu}{E} \Sigma \quad (\text{A.21})$$

Despejando sucesivamente σ_x , σ_y y σ_z de las ecuaciones (A.15) y teniendo en cuenta que $\sigma_y + \sigma_z = \Sigma - \sigma_x$, etc., se llega a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon + 2G\epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon + 2G\epsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda \varepsilon + 2G\epsilon_z \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

donde

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (\text{A.23})$$

Las constantes λ y G se conocen como *constantes de Lamé*. Por otra parte, de (A.16),

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

A.5. Consideraciones energéticas

En esta sección expondremos dos principios generales ampliamente usados para la deducción de ecuaciones del método de elementos finitos, los cuales hacen uso de los conceptos de trabajo y energía. Por ello se hace necesaria una breve introducción a estos conceptos, después de la cual se deducirá la expresión de los mencionados principios.

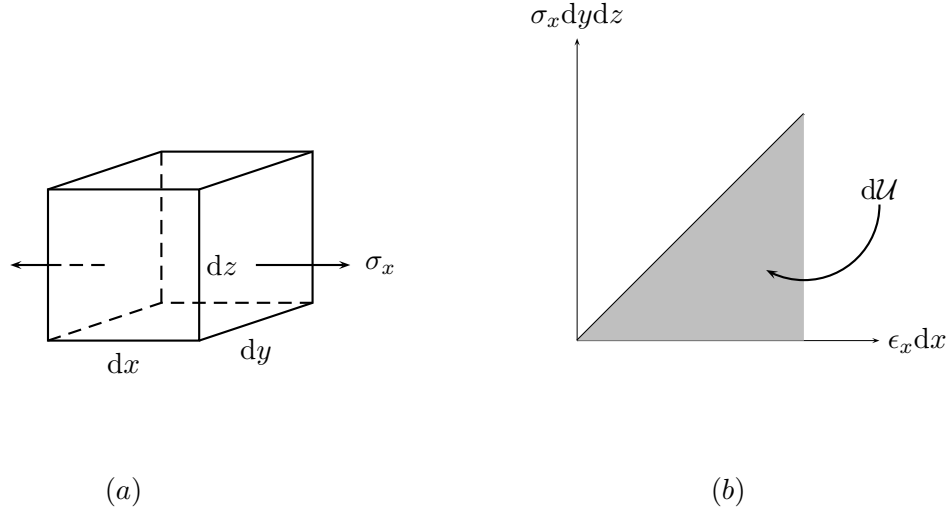


Figura A.7: Energía de deformación

A.5.1. Energía de deformación

En la figura A.7(a) aparece un cubo infinitesimal sometido a la acción de una única tensión normal σ_x . La fuerza aplicada sobre la cara de área $dydz$ es igual a $\sigma_x dydz$ y el estiramiento total es $\epsilon_x dx$. Por tanto, el trabajo realizado por esta fuerza, bajo la hipótesis de la ley de Hooke, se expresa en la figura A.7(b) por el área sombreada, de valor

$$d\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad (\text{A.25})$$

Si se admite que estas fuerzas no producen calor al causar la deformación del cuerpo, este trabajo se almacena totalmente en forma de *energía potencial* (también llamada *energía de deformación*). En general, si en el cuerpo infinitesimal hacen presencia todas las tensiones definidas anteriormente, la energía total consistirá en la suma de todas las contribuciones del tipo expresado por la ecuación (A.25), es decir,

$$\begin{aligned} d\mathcal{U} &= \mathcal{U}_0 dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

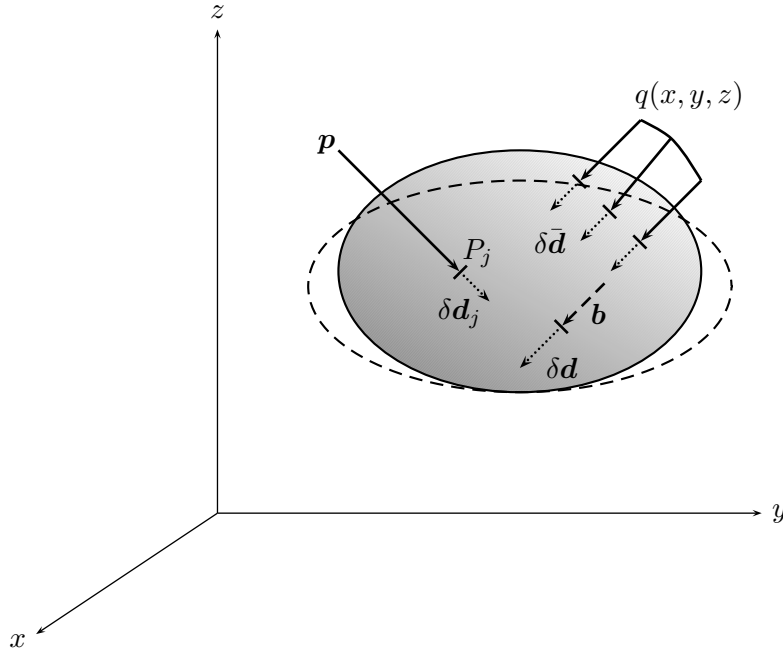


Figura A.8: Desplazamientos virtuales.

A.5.2. Principio del trabajo virtual

Antes de concluir este capítulo, es conveniente presentar la forma general que asume este principio, que fue introducido en el Capítulo 1. Como se recordará, el principio establece que el trabajo realizado por las fuerzas externas a través de un desplazamiento virtual equivale al de las fuerzas internas a través de las deformaciones virtuales asociadas al mismo. Supongamos que al cuerpo de la figura A.8 se le imprime un desplazamiento virtual que varía con las variable independientes x, y, z , esto es,

$$\delta\psi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \delta u(x, y, z) \\ \delta v(x, y, z) \\ \delta w(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Esta función toma valores especiales en la parte de la superficie del cuerpo que se encuentra cargada con fuerzas distribuidas, S , denotados por $\delta\bar{\psi}(x, y, z)$,

$$\delta\bar{\psi}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \delta u(x, y, z) \\ \delta v(x, y, z) \\ \delta w(x, y, z) \end{pmatrix}_S \quad (\text{A.28})$$

y valores

$$\delta \mathbf{d}_j = \begin{pmatrix} \delta u(x, y, z) \\ \delta v(x, y, z) \\ \delta w(x, y, z) \end{pmatrix}_{P_j} \quad (\text{A.29})$$

en los puntos P_j de aplicación de las fuerzas \mathbf{p}_j . Las fuerzas asociadas a los desplazamientos $\delta \psi(x, y, z)$, $\delta \bar{\psi}(x, y, z)$ y $\delta \mathbf{d}_j$ son, respectivamente, las fuerzas másicas

$$\mathbf{b}(x, y, z) = \begin{pmatrix} b_x(x, y, z) \\ b_y(x, y, z) \\ b_z(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

las fuerzas repartidas sobre la superficie S

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \begin{pmatrix} q_x(x, y, z) \\ q_y(x, y, z) \\ q_z(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.31})$$

y las fuerzas concentradas en los diversos puntos P_j :

$$\mathbf{p}_j = \begin{pmatrix} p_{j,x}(x, y, z) \\ p_{j,y}(x, y, z) \\ p_{j,z}(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

Como el trabajo es una cantidad escalar, el trabajo de un vector de fuerzas \mathbf{a} a través de un vector de desplazamientos \mathbf{b} es igual al producto escalar de los dos vectores. Si estos son vectores columna, como son los vectores anteriores, entonces el trabajo es

$$W = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} \quad (\text{A.33})$$

Esto indica que, para el cuerpo infinitesimal mostrado en la figura A.2, el segundo de estos trabajos virtuales es

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{A.34})$$

donde $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ es el vector de deformaciones virtuales y $\boldsymbol{\sigma}$ el vector de tensiones, definido en la ecuación (A.17). Para un cuerpo cualquiera, como el que muestra la figura A.1, el trabajo virtual total de las fuerzas internas se obtiene integrando sobre su volumen total V :

$$\int \int \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{A.35})$$

Consideremos ahora el trabajo realizado por las fuerzas externas, que son tanto las de tipo superficial como las másicas. El trabajo virtual de las J fuerzas concentradas es

$$\sum_{j=1}^J \delta \mathbf{d}_j^T \mathbf{p}_j \quad (\text{A.36})$$

El trabajo virtual de las fuerzas distribuidas es

$$\int_S \int \delta \bar{\boldsymbol{\psi}}(x, y, z)^T \mathbf{q}(x, y, z) dS \quad (\text{A.37})$$

Finalmente, en lo que respecta a las fuerzas másicas, distribuidas en todo el volumen del cuerpo, su trabajo total virtual es

$$\int_V \int \int \delta \boldsymbol{\psi}(x, y, z)^T \mathbf{b}(x, y, z) dV \quad (\text{A.38})$$

Por tanto, la expresión que toma el principio del trabajo virtual es

$$\begin{aligned} \int_V \int \int \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV &= \sum_{j=1}^J \delta \mathbf{d}_j^T \mathbf{p}_j + \int_S \int \delta \bar{\boldsymbol{\psi}}(x, y, z)^T \mathbf{q}(x, y, z) dS \\ &\quad + \int_V \int \int \delta \boldsymbol{\psi}(x, y, z)^T \mathbf{b}(x, y, z) dV \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Apéndice B

Nociones de MATLAB

Este apéndice está dedicado a una breve exposición de los elementos esenciales del lenguaje MATLAB, con el propósito de facilitar la creación de variables usuales en Análisis de Estructuras y ejecutar algunos de los programas expuestos en este texto, así como las rutinas incorporadas en el lenguaje.

B.1. Características de MATLAB

MATLAB es tanto un lenguaje de programación como un entorno de trabajo. Por esta razón se puede trabajar en él tanto en el modo *consola* (es decir, en el que se hacen cálculos cuyo resultado se obtiene inmediatamente por medio de los comandos adecuados, que se dan en línea) como en el modo *rutina* (esto es, programas cuyos comandos están codificados). Ambos modos pueden ponerse en relación entre sí. Por ejemplo, una rutina (cuya denotación general es un archivo M, *.m) puede pedir datos de la consola, a través del comando `input`; igualmente, una estructura típica de un programa, como es un bucle `for - end` se puede pulsar en la consola directamente sin necesidad de hacer un programa tipo M.

Las características más importantes de MATLAB son su manejo directo de vectores, matrices y cadenas de caracteres como objetos; su posibilidad de trabajar con números reales o complejos indistintamente; la no exigencia de declarar variables y arreglos para reserva de memoria; y la posibilidad de combinar matemática simbólica con numérica, entre otras. Todo esto, aunado a la disponibilidad de múltiples funciones matemáticas ya programadas y librerías especializadas (los famosos *toolboxes*) hacen que los programas escritos en MATLAB sean altamente compactos en comparación con los equivalentes en FORTRAN, C, PASCAL, etc. Esto reporta grandes ventajas para la textos de carácter didáctico, debido a que se facilita el estudio de un programa complejo de ciencias o de ingeniería, al ocupar todos los comandos unas pocas líneas. Esto es especialmente cierto cuando se manejan vectores y matrices como bloques enteros, es decir, cuando no es necesario trabajar con sus elementos individuales. En el caso del análisis de estructuras el manejo de bloques enteros es posible salvo cuando se requiere ensamblar matrices de rigidez, por ejemplo.

Estudiaremos en primer lugar las comandos básicos para creación variables, funciones, vectores y matrices. Luego estudiaremos la creación de archivos M.

B.2. Operaciones fundamentales

Una variable se crea en MATLAB asignándole un valor:

```
x=3
```

```
x =
```

```
3
```

Un punto y coma (;) al final de cada instrucción inhibe la aparición de un resultado:

```
x=3;
```

```
y=2;
```

Las siguientes son las operaciones aritméticas básicas:

```
x+y
```

```
ans =
```

```
5
```

```
x-y
```

```
ans =
```

```
1
```

```
x*y
```

```
ans =
```

```
6
```

```
x/y
```

```
ans =
```

```
1.5000
```

```
x^y
```

```
ans =
```

```
9
```

Las siguientes son algunas funciones de uso corriente:

```
sqrt(3)
```

```

ans =

    1.7321

cos(pi/4)

ans =

    0.7071

sin(pi/6)

ans =

    0.5000

exp(1)

ans =

    2.7183

log(exp(1))

ans =

    1

log10(10)

ans =

    1

```

Las funciones trigonométricas `sin`, `cos`, etc están definidas en radianes. Sus homólogos en grados son `sind`, `cosd`, etc.:

```

cosd(60)

ans =

    0.5000

```

B.3. Vectores y matrices

1. Creación de un vector con elementos dados:

Un vector fila se crea en la forma

```
a=[1 2 3 4];
```

Si se trata de un vector columna, se puede crear como

```
a=[1; 2; 3; 4];
```

o bien como

```
a=[1 2 3 4]';
```

El símbolo ' denota transposición matricial. La multiplicación de todos los elementos de un vector por un escalar es simple:

```
a=[1 2 3 4]'; b=2*a
```

```
b =
```

```
2
4
6
8
```

2. Creación de un vector con intervalos regulares.

El comando

```
t=linspace(1,10,5)
```

```
t =
```

```
1.0000    3.2500    5.5000    7.7500   10.0000
```

crea un vector fila de 5 elementos regularmente espaciados entre 1 y 10. Esta instrucción se utiliza corrientemente para crear un vector de abscisas en las cuales se ha de evaluar una función determinada.

3. Suma de dos vectores:

```
a=[1 2 3 4]';
b=[4 3 2 1]';
c=a+b
```

```
c =
```

```
5
5
5
5
```


4. Producto escalar de dos vectores.

Con los datos anteriores, en que tanto el vector a como el b tienen dimensión 4×1 , el producto escalar $d = a \cdot b \equiv a^T b = \sum_{i=1}^4 a(i) \times b(i)$ implica trasponer el vector a para que la multiplicación matricial tenga sentido. Por tanto,

```
d=a' *b
```

```
ans =
```

```
20
```

Por el contrario, la instrucción

```
e=a.*b
```

```
e =
```

```
4
```

```
6
```

```
6
```

```
4
```

corresponde al producto de a y b elemento por elemento. Notése que la instrucción

```
sum(e)
```

```
ans =
```

```
20
```

da como resultado el producto escalar de los dos vectores, ya obtenido por otra vía. De manera similar se obtiene la división de dos vectores elemento por elemento:

```
v1=[2 4 6];
```

```
v2=[2 2 2];
```

```
v1./v2
```

```
ans =
```

```
1
```

```
2
```

```
3
```

Finalmente, algunas operaciones importantes sobre vectores son las siguientes: el máximo elemento ($\max(a)$); el mínimo ($\min(a)$), los elementos que sean mayores o iguales que un cierto escalar x ($i=a \geq x$), o iguales a él ($i=a == x$), etc. Por ejemplo,

```
a=[4 9 5 4]; i=a==4
i =
     1     0     0     1
```

5. Creación de una matriz.

Las matrices se crean de manera similar a los vectores:

```
m1=[1 2 3; 6 5 4; 3 1 3]
m1 =
     1     2     3
     6     5     4
     3     1     3
```

Un elemento de una matriz se extrae de acuerdo a la notación usual en matemáticas:

```
m1(2,3)
ans =
     4
```

El símbolo `:` se utiliza para denotar todos los elementos de una fila o de una columna. Por tanto, la instrucción `m1(2,:)` entrega la segunda fila de la matriz `m1`, mientras que `m1(:,3)` hace lo propio con la tercera columna:

```
m1(2,:)
ans =
     6     5     4

m1(:,3)
ans =
     3
     4
     3
```

Algunas matrices especiales de uso frecuente son la de ceros, la de unos y la idéntica:

```
zeros(3,3)
ans =
```

```

0      0      0
0      0      0
0      0      0

```

```
ones(3,3)
```

```
ans =
```

```

1      1      1
1      1      1
1      1      1

```

```
eye(3)
```

```
ans =
```

```

1      0      0
0      1      0
0      0      1

```

6. Direccionamiento indirecto.

Una de las posibilidades de MATLAB de mayor importancia para el análisis matricial de estructuras es el direccionamiento indirecto. Consideremos el vector

```
v=[6 9 8 4 5 3];
```

Supongamos que queremos poner en otro vector w los elementos 2 y 3 de v . Para ello creamos el vector

```
a=[2 3];
```

y escribimos

```
w=v(a);
```

con el resultado esperado

```
w =
```

```

9      8

```

El mismo procedimiento se utiliza para extraer submatrices de una matriz. Por ejemplo, de la matriz

```
m=[1 2 3 4 5; 6 5 4 2 1;3 1 3 8 7; 9 2 6 4 3]
```

```
m =
```

1	2	3	4	5
6	5	4	2	1
3	1	3	8	7
9	2	6	4	3

deseamos extraer los elementos 1, 3 y 5 de las filas 2 y 3 y ponerlos en la matrix n. Para ello efectuamos el procedimiento siguiente:

```
a=[2 3]
```

```
a =
```

2	3
---	---

```
b=[1 3 5]
```

```
b =
```

1	3	5
---	---	---

```
n=m(a,b)
```

```
n =
```

6	4	1
3	3	7

7. Suma y producto de dos matrices.

```
m1=[1 2 3; 6 5 4;3 1 3]
```

```
m1 =
```

1	2	3
6	5	4
3	1	3

```
m2=rand(3,3)
```

```
m2 =
```

0.2190	0.6793	0.5194
0.0470	0.9347	0.8310
0.6789	0.3835	0.0346

```
m3=m1+m2
```

```
m3 =
```

```
    1.2190    2.6793    3.5194
    6.0470    5.9347    4.8310
    3.6789    1.3835    3.0346
```

```
m4=m1*m2
```

```
m4 =
```

```
    2.3496    3.6992    2.2851
    4.2644   10.2833    7.4096
    2.7405    4.1231    2.4929
```

En este ejemplo $m2 = \text{rand}(3, 3)$ es una matriz de números aleatorios con distribución uniforme entre 0 y 1. Es necesario recordar que el producto de dos matrices de dimensiones (m, n) y (p, q) debe respetar la norma $n = p$. De lo contrario el producto no es factible:

```
m6=[2 2; 2 2]
```

```
m6 =
```

```
    2    2
    2    2
```

```
m1*m6 ??? Error using ==> * Inner matrix dimensions must agree.
```

8. Inversa de una matriz.

```
m5=inv(m1)
```

```
m5 =
```

```
   -0.3929    0.1071    0.2500
    0.2143    0.2143   -0.5000
    0.3214   -0.1786    0.2500
```

9. Creación de una matriz diagonal:

```
m7=diag([3 3 2])
```

```
m7 =
```

```
    3    0    0
    0    3    0
    0    0    2
```

10. Solución de ecuaciones simultáneas.

El problema usual $Ax = b$, donde A es una matriz de coeficientes de las incógnitas x y b es un vector de términos independientes, se resuelve, o bien de la manera clásica $x = \text{inv}(A) * b$, o bien por medio de la operación

```
x=A\b
```

que calcula la llamada descomposición LU de la matriz A y luego obtiene el vector de incógnitas x . La descomposición LU está definida como la obtención de dos matrices, una triangular inferior L (por *lower*, en inglés) y otra superior U (*upper*), cuyo producto es igual a A . Esta técnica es preferible para resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneas que el método de la matriz inversa.

11. Autovalores y autovectores de una matriz.

Para una matriz simétrica, los autovalores (`lambda`) y los autovectores (`phi`) se obtienen de la manera siguiente:

```
m8=[1 2 3; 2 4 5; 3 5 6]
```

```
m8 =
```

```
1    2    3
2    4    5
3    5    6
```

```
[phi,lambda]=eig(m8)
```

```
phi =
```

```
0.5910   -0.7370   0.3280
-0.7370   -0.3280   0.5910
0.3280    0.5910   0.7370
```

```
lambda =
```

```
0.1709         0         0
0   -0.5157         0
0         0  11.3448
```

Si la matriz no es simétrica los autovalores y autovectores son complejos:

```
m9=[1 2 3; 6 4 5; 7 9 6]
```

```
m9 =
```

```
1    2    3
6    4    5
7    9    6
```

```
[phi,lambda]=eig(m9)

phi =

-0.2610          0.2075 + 0.5245i    0.2075 - 0.5245i
-0.5389          0.3908 - 0.3290i    0.3908 + 0.3290i
-0.8009         -0.6244 - 0.1762i   -0.6244 + 0.1762i

lambda =

14.3366          0          0
0         -1.6683 + 1.0262i    0
0          0         -1.6683 - 1.0262i
```

B.4. Funciones

Las funciones en MATLAB se pueden tratar directamente como vectores o matrices, lo cual implica grandes ahorros de líneas de codificación. Por ejemplo, si un vector de tiempo es

```
t=linspace(0,0.5,5)

t =

0    0.1250    0.2500    0.3750    0.5000
```

y una frecuencia angular ω es igual a 2π ($w=2*\pi$), la función $r = \cos(\omega t)$ es el vector

```
r=cos(w*t)

r =

1.0000    0.7071    0.0000   -0.7071   -1.0000
```

De manera semejante se calculan otras funciones, sin importar si la variable dependiente es un vector o una matriz:

```
m1

m1 =

1    2    3
6    5    4
3    1    3

exp(m1)

ans =
```

2.7183	7.3891	20.0855
403.4288	148.4132	54.5982
20.0855	2.7183	20.0855

B.5. Bucles y decisiones condicionales

El bucle `for - end` es la estructura de MATLAB adecuada para hacer cálculos vinculados a índices en general. Por ejemplo, el cálculo del factorial de un número (en este caso, 10) se hace de la siguiente forma:

```
nfact=1;
n=10;
for i=1:n;
    nfact=nfact*i;
end;

nfact

nfact =

    3628800
```

La estructura de condicionamiento lógico es `if - elseif - else - end`, que se explica aquí con respecto a la definición de la función de signo:

$$y = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

```
if x < 0;
    y = -1;
elseif x==0;
    y=0;
else;
    y=1;
end
```

Por ejemplo, si se asigna el valor `x=3` antes de la ejecución de esta secuencia, después de ella el valor de `y` es

```
y

y =

    1
```

Se puede suspender la ejecución de un bucle `for - end` por medio de la instrucción `break`. Por ejemplo, la secuencia de instrucciones


```

nfact=1;
n=10;
for i=1:n;
    if i==5;
        break;
    end;
    nfact=nfact*i;
end;

nfact

nfact =

    24

```

calcula esta fórmula recurrente sólo hasta cuatro.

B.6. Programas

Un programa en MATLAB se constituye como un archivo tipo M (* .m). Su creación se hace en un editor de texto cualquiera en ASCII. La edición puede comenzar directamente con una serie de líneas de código, caso en el cual el programa siempre dará los mismos resultados, o bien comenzando con una instrucción del tipo

```
function [resultados]=nombre(datos)
```

En esta descripción, [resultados] es un grupo de resultados que se espera del programa y que quedan disponibles para el uso por consola, cuyos nombres están separados por comas: [a, b, c], donde a, b, c pueden ser escalares, vectores, matrices o cadenas alfanuméricas. De la misma manera se da al programa el conjunto [datos]. El nombre del programa debe coincidir con el del archivo.

Como ejemplo, el siguiente programa crea un vector f cuyos elementos son los factoriales de sus números ordinales de posición; es decir, $f = [1!, 2!, \dots, n!]$

```

function [f]=fact(n)
%
%-----
% [f]=fact(n)
%-----
%
% Calcula un vector cuyos elementos son los
% factoriales desde 1 hasta n
%
%-----
%
%
nfact=1;
for i=1:n;
    nfact=nfact*i;
    f(i)=nfact;
end;

```

```

end;
%
%
%----- fin

```

El programa se activa con la orden `[f]=fact(n):`

```

[f]=fact(4)

f =

     1     2     6    24

```

Si escribimos en la consola `help fact` obtenemos

```

-----
[f]=fact(n)
-----

Calcula un vector cuyos elementos son los
factoriales desde 1 hasta n

-----

```

que son las líneas que aparecen entre el encabezado del programa y la primera línea de comandos, comentadas con el signo de porcentaje. En general, el comando `help` da esta información para cualquier programa tipo M escrito, bien por la casa matriz de MATLAB, o bien por un usuario cualquiera.

B.7. Archivos de datos y resultados

Un archivo de datos en ASCII se puede importar al programa por medio de la instrucción `load`:

```
load datos.dat;
```

Por su parte un archivo de cálculos se puede guardar con la instrucción `save`:

```
save resul.res;
```

Las diversas posibilidades de esos dos comandos se pueden consultar por medio de `help`.

Apéndice C

Códigos de los ejemplos

C.1. Ejemplo 1.1

```
% Cadena de elementos

% Módulo de elasticidad:

E=2e8;

% Áreas:

A_1=0.5*0.5;
A_2=0.4*0.4;
A_3=0.3*0.3;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=E*A_1*[1 -1; -1 1];
k_2=E*A_2*[1 -1; -1 1];
k_3=E*A_3*[1 -1; -1 1];

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(4,4);
g_1=[1 2];
DeltaK_1=zeros(4,4);
DeltaK_1(g_1,g_1)=k_1;
K=K+DeltaK_1;
g_2=[2 3];
DeltaK_2=zeros(4,4);
DeltaK_2(g_2,g_2)=k_2;
K=K+DeltaK_2;
g_3=[3 4];
DeltaK_3=zeros(4,4);
DeltaK_3(g_3,g_3)=k_3;
K=K+DeltaK_3;
```

```
% Cálculo de desplazamientos y reacciones:
```

```
a=1; b=[2 3 4]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=[0 0 0 -1200]';
P_b=P(b);
D_b=K_bb\ P_b;
P_a=K_ab*D_b;
```

```
D=zeros(4,1);
D(b)=D_b;
```

```
% Tensiones en las barras:
```

```
d_1=D(g_1);
p_1=k_1*d_1;
d_2=D(g_2);
p_2=k_2*d_2;
d_3=D(g_3);
p_3=k_3*d_3;
```

C.2. Ejemplo 2.1

```
% Armadura plana
```

```
% Módulo de elasticidad:
```

```
E=2e8;
```

```
% Áreas y longitudes:
```

```
A=0.005;
l_1=4;
l_2=sqrt(4^2+3^2);
l_3=3;
l_4=4;
l_5=sqrt(4^2+3^2);
l_6=4;
l_7=3;
l_8=4;
l_9=sqrt(4^2+3^2);
```

```
% Matrices de rigidez en coordenadas locales:
```

```
k_1=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_1;
k_2=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_2;
```

```

k_3=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_3;
k_4=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_4;
k_5=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_5;
k_6=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_6;
k_7=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_7;
k_8=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_8;
k_9=E*A*[1 0 -1 0; 0 0 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 0]/l_9;

```

```
% Matrices de rigidez en coordenadas globales:
```

```

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_1=T_1'*k_1*T_1;

```

```

beta=36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_2=T_2'*k_2*T_2;

```

```

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_3=T_3'*k_3*T_3;

```

```

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_4= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_4=T_4'*k_4*T_4;

```

```

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_5= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_5=T_5'*k_5*T_5;

```

```

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_6= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_6=T_6'*k_6*T_6;

```

```

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_7= [ eta mu 0      0; -mu eta 0  0;
       0      0 eta mu;  0      0 -mu eta];
K_7=T_7'*k_7*T_7;

```

```

beta=0;

```

```

eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_8= [ eta mu 0      0; -mu  eta 0  0;
      0      0 eta mu;   0      0 -mu eta];
K_8=T_8'*k_8*T_8;

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_9= [ eta mu 0      0; -mu  eta 0  0;
      0      0 eta mu;   0      0 -mu eta];
K_9=T_9'*k_9*T_9;

% Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4];
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[1 2 5 6];
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[3 4 5 6];
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

g_4=[3 4 7 8];
DeltaK_4=zeros(12,12);
DeltaK_4(g_4,g_4)=K_4;
K=K+DeltaK_4;

g_5=[5 6 7 8];
DeltaK_5=zeros(12,12);
DeltaK_5(g_5,g_5)=K_5;
K=K+DeltaK_5;

g_6=[5 6 9 10];
DeltaK_6=zeros(12,12);
DeltaK_6(g_6,g_6)=K_6;
K=K+DeltaK_6;

g_7=[7 8 9 10];
DeltaK_7=zeros(12,12);
DeltaK_7(g_7,g_7)=K_7;
K=K+DeltaK_7;

g_8=[7 8 11 12];
DeltaK_8=zeros(12,12);

```

```

DeltaK_8(g_8,g_8)=K_8;
K=K+DeltaK_8;

g_9=[9 10 11 12];
DeltaK_9=zeros(12,12);
DeltaK_9(g_9,g_9)=K_9;
K=K+DeltaK_9;

display(K)

% Cálculo de desplazamientos y reacciones:

a=[1 2 11 12]'; b=[3 4 5 6 7 8 9 10]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=[0 0 0 0 4 -20 0 0 0 -20 0 0]';
P_b=P(b);
D_b=K_bb\ P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;

disp(D)

% Tensiones en las barras:

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_1=D(g_1);
sigma_1=E*[-eta -mu eta mu]*D_1/l_1;

beta=36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_2=D(g_2);
sigma_2=E*[-eta -mu eta mu]*D_2/l_2;

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_3=D(g_3);
sigma_3=E*[-eta -mu eta mu]*D_3/l_3;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_4=D(g_4);
sigma_4=E*[-eta -mu eta mu]*D_4/l_4;

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_5=D(g_5);
sigma_5=E*[-eta -mu eta mu]*D_5/l_5;

```

```

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_6=D(g_6);
sigma_6=E*[-eta -mu eta mu]*D_6/l_6;

beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_7=D(g_7);
sigma_7=E*[-eta -mu eta mu]*D_7/l_7;

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_8=D(g_8);
sigma_8=E*[-eta -mu eta mu]*D_8/l_8;

beta=-36.87;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
D_9=D(g_9);
sigma_9=E*[-eta -mu eta mu]*D_9/l_9;

% Dibujo de la armadura y su posición deformada

XY=zeros(6,2);
XY(1,:)=[0 0];
XY(2,:)=[4 0];
XY(3,:)=[4 3];
XY(4,:)=[8 0];
XY(5,:)=[8 3];
XY(6,:)=[12 0];

XYdef=zeros(size(XY));
fac=500;
c=0;
for i=1:6
    c=c+1;
    XYdef(i,1)=XY(i,1)+fac*D(c);
    c=c+1;
    XYdef(i,2)=XY(i,2)+fac*D(c);
end

IJ=zeros(9,2);
IJ(1,:)=[1 2];
IJ(2,:)=[1 3];
IJ(3,:)=[2 3];
IJ(4,:)=[2 4];
IJ(5,:)=[3 4];
IJ(6,:)=[3 5];
IJ(7,:)=[4 5];
IJ(8,:)=[4 6];

```



```

IJ(9,:)= [5 6];

figure
for e=1:9
    Q=[XY(IJ(e,1),1) XY(IJ(e,1),2);...
        XY(IJ(e,2),1) XY(IJ(e,2),2)];
    Qdef=[XYdef(IJ(e,1),1) XYdef(IJ(e,1),2);...
        XYdef(IJ(e,2),1) XYdef(IJ(e,2),2)];
    plot(Q(:,1),Q(:,2),'--b',Qdef(:,1),Qdef(:,2),'-r')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal

```

C.3. Ejemplo 2.2

```

% Armadura espacial

% Módulo de elasticidad:

E=205.8*1e6;

% Área:

A=100/1e6;

% Coordenadas de los nodos:

XYZ=[0 0 821.6; -2500 0 621.6; -1250 -2165 621.6; 1250 -2165 621.6; ...
    2500 0 621.6; 1250 2165 621.6; -1250 2165 621.6; -4330 -2500 0; 0 -5000 0; 4330 -2500 0;...
    4330 2500 0; 0 5000 0; -4330 2500 0]/1e3;

x=XYZ(:,1);
y=XYZ(:,2);
z=XYZ(:,3);

% Topología:

IJ=[1 2; 1 3; 1 4; 1 5; 1 6; 1 7; 2 3; 3 4; 4 5; 5 6; 6 7; 7 2; ...
    2 8; 8 3; 3 9; 9 4; 4 10; 10 5; 5 11; 11 6; 6 12; 12 7; 7 13; 13 2];

% Dibujo de la estructura:

figure
for e=1:24
    Q=[XYZ(IJ(e,1),1) XYZ(IJ(e,1),2) XYZ(IJ(e,1),3);...
        XYZ(IJ(e,2),1) XYZ(IJ(e,2),2) XYZ(IJ(e,2),3)];
    plot3(Q(:,1),Q(:,2),Q(:,3),'-b')
    hold on

```

```

end
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
axis equal

% Longitudes de todas las barras

l=zeros(24,1);

for e=1:24
    l(e)=sqrt((x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))^2+(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))^2+(z(IJ(e,2))-z(IJ(e,1)))^2);
end

% Matriz de rigidez:

K=zeros(39,39);

for e=1:24
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l(e);
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l(e);
    nu=(z(IJ(e,2))-z(IJ(e,1)))/l(e);
    K_e= E*A/l(e)*[eta^2      eta*mu    eta*nu    -eta^2      -eta*mu    -eta*nu;...
                   eta*mu    mu^2      mu*nu    -eta*mu    -mu^2      -mu*nu;...
                   eta*nu    mu*nu    nu^2      -eta*nu    -mu*nu    -nu^2;...
                   -eta^2     -eta*mu    -eta*nu    eta^2      eta*mu    eta*nu;...
                   -eta*mu    -mu^2      -mu*nu    eta*mu    mu^2      mu*nu;...
                   -eta*nu    -mu*nu    -nu^2      eta*nu    mu*nu    nu^2];
    g_e=[3*IJ(e,1)-2    3*IJ(e,1)-1    3*IJ(e,1)    3*IJ(e,2)-2    3*IJ(e,2)-1    3*IJ(e,2)];
    DeltaK_e=zeros(39,39);
    DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
    K=K+DeltaK_e;
end

% Cálculo de desplazamientos y reacciones:

a=(22:39)'; b=(1:21)';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(39,1);
P(3)=-6;
P(6)=-3;
P(9)=-3;
P(12)=-3;
P(15)=-3;
P(18)=-3;
P(21)=-3;
P_b=P(b);
D_b=K_bb\P_b;
P_a=K_ab*D_b;

```

```

D=zeros(39,1);
D(b)=D_b;

disp(D)

% Tensiones en las barras:

sigma=zeros(24,1);
for e=1:24
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l(e);
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l(e);
    nu=(z(IJ(e,2))-z(IJ(e,1)))/l(e);
    g_e=[3*IJ(e,1)-2    3*IJ(e,1)-1    3*IJ(e,1)  3*IJ(e,2)-2    3*IJ(e,2)-1    3*IJ(e,2)];
    D_e=D(g_e);
    sigma(e)=E*[-eta -mu -nu eta mu nu]*D_e/l(e);
end

% Dibujo de la armadura y su posición deformada

XYZdef=zeros(size(XYZ));
fac=10;
k=0;
for e=1:13
    k=k+1;
    XYZdef(e,1)=XYZ(e,1)+fac*D(k);
    k=k+1;
    XYZdef(e,2)=XYZ(e,2)+fac*D(k);
    k=k+1;
    XYZdef(e,3)=XYZ(e,3)+fac*D(k);
end

figure
for e=1:24
    Q=[XYZ(IJ(e,1),1) XYZ(IJ(e,1),2) XYZ(IJ(e,1),3);...
        XYZ(IJ(e,2),1) XYZ(IJ(e,2),2) XYZ(IJ(e,2),3)];
    Qdef=[XYZdef(IJ(e,1),1) XYZdef(IJ(e,1),2) XYZdef(IJ(e,1),3);...
        XYZdef(IJ(e,2),1) XYZdef(IJ(e,2),2) XYZdef(IJ(e,2),3)];
    plot3(Q(:,1),Q(:,2),Q(:,3),'b',Qdef(:,1),Qdef(:,2),Qdef(:,3),'-r')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
axis equal

```

C.4. Ejemplo 3.1

```
% Viga de un vano
```

```

% Módulo de elasticidad:

E=2e7;

% Inercias y longitudes:

b=0.4;
h=1;
I=b*h^3/12;
l_1=6;
l_2=6;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=zeros(4,4);
k_1(1,:)=E*I*[12/l_1^3    6/l_1^2 -12/l_1^3    6/l_1^2];
k_1(2,:)=E*I*[6/l_1^2    4/l_1  -6/l_1^2    2/l_1];
k_1(3,:)=E*I*[-12/l_1^3 -6/l_1^2  12/l_1^3   -6/l_1^2];
k_1(4,:)=E*I*[6/l_1^2    2/l_1  -6/l_1^2    4/l_1];

disp(k_1)

k_2=zeros(4,4);
k_2(1,:)=E*I*[12/l_2^3    6/l_2^2 -12/l_2^3    6/l_2^2];
k_2(2,:)=E*I*[6/l_2^2    4/l_2  -6/l_2^2    2/l_2];
k_2(3,:)=E*I*[-12/l_2^3 -6/l_2^2  12/l_2^3   -6/l_2^2];
k_2(4,:)=E*I*[6/l_2^2    2/l_2  -6/l_2^2    4/l_2];

disp(k_2)

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(6,6);

g_1=[1 2 3 4];
K_1=k_1;
DeltaK_1=zeros(6,6);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[3 4 5 6];
K_2=k_2;
DeltaK_2=zeros(6,6);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

display(K)

% Cálculo de desplazamientos y reacciones:

a=[1 2 5 6]'; b=[3 4]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);

```

```

K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=[0 0 -100 0 0 0]';
P_b=P(b);
D_b=K_bb\ P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(6,1);
D(b)=D_b;

disp(D)

% Cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*D_2;

```

C.5. Ejemplo 3.2

```

% Viga de dos vanos

% Módulo de elasticidad:

E=2e7;

% Inercias y longitudes:

I_1=0.1;
I_2=0.1;
l_1=7;
l_2=5;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=zeros(4,4);
k_1(1,:)=E*I_1*[12/l_1^3    6/l_1^2 -12/l_1^3    6/l_1^2];
k_1(2,:)=E*I_1*[6/l_1^2    4/l_1 -6/l_1^2    2/l_1];
k_1(3,:)=E*I_1*[-12/l_1^3 -6/l_1^2 12/l_1^3   -6/l_1^2];
k_1(4,:)=E*I_1*[6/l_1^2    2/l_1 -6/l_1^2    4/l_1];

disp(k_1)

k_2=zeros(4,4);
k_2(1,:)=E*I_2*[12/l_2^3    6/l_2^2 -12/l_2^3    6/l_2^2];
k_2(2,:)=E*I_2*[6/l_2^2    4/l_2 -6/l_2^2    2/l_2];
k_2(3,:)=E*I_2*[-12/l_2^3 -6/l_2^2 12/l_2^3   -6/l_2^2];

```

```

k_2(4,:) = E*I_2*[6/l_2^2      2/l_2      -6/l_2^2      4/l_2];

disp(k_2)

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(6,6);

g_1=[1 2 3 4]';
DeltaK_1=zeros(6,6);
DeltaK_1(g_1,g_1)=k_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[3 4 5 6]';
DeltaK_2=zeros(6,6);
DeltaK_2(g_2,g_2)=k_2;
K=K+DeltaK_2;

display(K)

% Vector de fuerzas de empotramiento:

w=20;

r_1=[w*l_1/2;
      w*l_1^2/12;
      w*l_1/2;
      -w*l_1^2/12];

Q=40; c=3; d=l_2-c;

r_2=[Q*d^2*(3*c+d)/l_2^3;
      Q*c*d^2/l_2^2;
      Q*c^2*(3*d+c)/l_2^3;
      -Q*d*c^2/l_2^2];

R=zeros(6,1);
DeltaR_1=zeros(6,1);
DeltaR_2=zeros(6,1);

DeltaR_1(g_1)=r_1;
R=R+DeltaR_1;

DeltaR_2(g_2)=r_2;
R=R+DeltaR_2;

% Cálculo de desplazamientos y reacciones:

P=zeros(6,1);

a=[1 2 3 5 6]'; b=4;
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);

```

```

K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
D_b=K_bb\ (P_b-R_b);
P_a=K_ab*D_b+R(a);

D=zeros(6,1);
D(b)=D_b;

disp(D)

% Cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*D_1+r_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*D_2+r_2;

display(P_a)
display(p_1)
display(p_2)

```

C.6. Ejemplo 3.3

```

% Parrilla

% Módulo de elasticidad:

E=2e7;

% Módulo de Poisson:

nu=0.15;

% Módulo de rigidez:

G=E/(2*(1+nu));

% Áreas, inercias y longitudes:

A=0.5*1;
I=0.5*1^3/12;
J=0.229*1*0.5^3;
l_1=3;
l_2=2;
l_3=3;

```

```

l_4=3;
l_5=2;
l_6=3;
l_7=3;
l_8=2;
l_9=3;
l_10=3;
l_11=2;
l_12=3;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=zeros(6,6);
l=l_1;

k_1(1,:)=G*J*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_1(4,:)=G*J*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

k_2=zeros(6,6);
l=l_2;

k_2(1,:)=G*J*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_2(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_2(4,:)=G*J*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_2(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

k_3=zeros(6,6);
l=l_3;

k_3(1,:)=G*J*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_3(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_3(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_3(4,:)=G*J*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_3(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_3(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

k_4=zeros(6,6);
l=l_4;

k_4(1,:)=G*J*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_4(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_4(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_4(4,:)=G*J*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_4(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_4(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

k_5=zeros(6,6);

```



```
l=l_5;
```

```
k_5(1,:)=G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_5(2,:)=E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];
k_5(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2      4/1      0      -6/1^2      2/1];
k_5(4,:)=G*J*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_5(5,:)=E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_5(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];
```

```
k_6=zeros(6,6);
l=l_6;
```

```
k_6(1,:)=G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_6(2,:)=E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];
k_6(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2      4/1      0      -6/1^2      2/1];
k_6(4,:)=G*J*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_6(5,:)=E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_6(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];
```

```
k_7=zeros(6,6);
l=l_7;
```

```
k_7(1,:)=G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_7(2,:)=E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];
k_7(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2      4/1      0      -6/1^2      2/1];
k_7(4,:)=G*J*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_7(5,:)=E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_7(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];
```

```
k_8=zeros(6,6);
l=l_8;
```

```
k_8(1,:)=G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_8(2,:)=E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];
k_8(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2      4/1      0      -6/1^2      2/1];
k_8(4,:)=G*J*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_8(5,:)=E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_8(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];
```

```
k_9=zeros(6,6);
l=l_9;
```

```
k_9(1,:)=G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_9(2,:)=E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];
k_9(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2      4/1      0      -6/1^2      2/1];
k_9(4,:)=G*J*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_9(5,:)=E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_9(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];
```

```
k_10=zeros(6,6);
l=l_10;
```

```
k_10(1,:)=G*J*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
```

```

k_10(2,:)=E*I*[ 0      12/1^3    6/1^2    0    -12/1^3    6/1^2];
k_10(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2    4/1    0    -6/1^2    2/1];
k_10(4,:)=G*J*[-1/1    0      0    1/1    0      0];
k_10(5,:)=E*I*[ 0    -12/1^3    -6/1^2    0    12/1^3    -6/1^2];
k_10(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2    2/1    0    -6/1^2    4/1];

```

```

k_11=zeros(6,6);
l=l_11;

```

```

k_11(1,:)=G*J*[ 1/1    0      0    -1/1    0      0];
k_11(2,:)=E*I*[ 0      12/1^3    6/1^2    0    -12/1^3    6/1^2];
k_11(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2    4/1    0    -6/1^2    2/1];
k_11(4,:)=G*J*[-1/1    0      0    1/1    0      0];
k_11(5,:)=E*I*[ 0    -12/1^3    -6/1^2    0    12/1^3    -6/1^2];
k_11(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2    2/1    0    -6/1^2    4/1];

```

```

k_12=zeros(6,6);
l=l_12;

```

```

k_12(1,:)=G*J*[ 1/1    0      0    -1/1    0      0];
k_12(2,:)=E*I*[ 0      12/1^3    6/1^2    0    -12/1^3    6/1^2];
k_12(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2    4/1    0    -6/1^2    2/1];
k_12(4,:)=G*J*[-1/1    0      0    1/1    0      0];
k_12(5,:)=E*I*[ 0    -12/1^3    -6/1^2    0    12/1^3    -6/1^2];
k_12(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2    2/1    0    -6/1^2    4/1];

```

```

% Matriz de rigidez de la estructura:

```

```

K=zeros(36,36);

```

```

g_1=[7 8 9 10 11 12];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta  0  mu  0  0  0;...
      0  1  0  0  0  0;...
     -mu  0  eta  0  0  0;...
      0  0  0  eta  0  mu;...
      0  0  0  0  1  0;...
      0  0  0  -mu  0  eta];...
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(36,36);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

```

```

g_2=[10 11 12 13 14 15];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta  0  mu  0  0  0;...
      0  1  0  0  0  0;...
     -mu  0  eta  0  0  0;...
      0  0  0  eta  0  mu;...
      0  0  0  0  1  0;...

```

```

        0    0    0  -mu    0    eta];...
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(36,36);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[13 14 15 16 17 18];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta    0    mu    0    0    0;...
        0    1    0    0    0    0;...
       -mu    0    eta    0    0    0;...
        0    0    0    eta    0    mu;...
        0    0    0    0    1    0;...
        0    0    0  -mu    0    eta];...
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(36,36);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

g_4=[19 20 21 22 23 24];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_4= [ eta    0    mu    0    0    0;...
        0    1    0    0    0    0;...
       -mu    0    eta    0    0    0;...
        0    0    0    eta    0    mu;...
        0    0    0    0    1    0;...
        0    0    0  -mu    0    eta];...
K_4=T_4'*k_4*T_4;
DeltaK_4=zeros(36,36);
DeltaK_4(g_4,g_4)=K_4;
K=K+DeltaK_4;

g_5=[22 23 24 25 26 27];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_5= [ eta    0    mu    0    0    0;...
        0    1    0    0    0    0;...
       -mu    0    eta    0    0    0;...
        0    0    0    eta    0    mu;...
        0    0    0    0    1    0;...
        0    0    0  -mu    0    eta];...
K_5=T_5'*k_5*T_5;
DeltaK_5=zeros(36,36);
DeltaK_5(g_5,g_5)=K_5;
K=K+DeltaK_5;

g_6=[25 26 27 28 28 30];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_6= [ eta    0    mu    0    0    0;...
        0    1    0    0    0    0;...

```

```

    -mu    0    eta    0    0    0;...
    0      0    0      eta    0    mu;...
    0      0    0      0      1    0;...
    0      0    0      -mu    0    eta];...
K_6=T_6'*k_6*T_6;
DeltaK_6=zeros(36,36);
DeltaK_6(g_6,g_6)=K_6;
K=K+DeltaK_6;

g_7=[1 2 3 10 11 12];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_7= [ eta    0    mu    0    0    0;...
       0      1    0      0    0    0;...
       -mu    0    eta    0    0    0;...
       0      0    0      eta    0    mu;...
       0      0    0      0      1    0;...
       0      0    0      -mu    0    eta];...
K_7=T_7'*k_7*T_7;
DeltaK_7=zeros(36,36);
DeltaK_7(g_7,g_7)=K_7;
K=K+DeltaK_7;

g_8=[10 11 12 22 23 24];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_8= [ eta    0    mu    0    0    0;...
       0      1    0      0    0    0;...
       -mu    0    eta    0    0    0;...
       0      0    0      eta    0    mu;...
       0      0    0      0      1    0;...
       0      0    0      -mu    0    eta];...
K_8=T_8'*k_8*T_8;
DeltaK_8=zeros(36,36);
DeltaK_8(g_8,g_8)=K_8;
K=K+DeltaK_8;

g_9=[22 23 24 31 32 33];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_9= [ eta    0    mu    0    0    0;...
       0      1    0      0    0    0;...
       -mu    0    eta    0    0    0;...
       0      0    0      eta    0    mu;...
       0      0    0      0      1    0;...
       0      0    0      -mu    0    eta];...
K_9=T_9'*k_9*T_9;
DeltaK_9=zeros(36,36);
DeltaK_9(g_9,g_9)=K_9;
K=K+DeltaK_9;

g_10=[4 5 6 13 14 15];
beta=90;

```

```

eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_10= [ eta 0 mu 0 0 0;...
        0 1 0 0 0 0;...
        -mu 0 eta 0 0 0;...
        0 0 0 eta 0 mu;...
        0 0 0 0 1 0;...
        0 0 0 -mu 0 eta];...
K_10=T_10'*k_10*T_10;
DeltaK_10=zeros(36,36);
DeltaK_10(g_10,g_10)=K_10;
K=K+DeltaK_10;

g_11=[13 14 15 25 26 27];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_11= [ eta 0 mu 0 0 0;...
        0 1 0 0 0 0;...
        -mu 0 eta 0 0 0;...
        0 0 0 eta 0 mu;...
        0 0 0 0 1 0;...
        0 0 0 -mu 0 eta];...
K_11=T_11'*k_11*T_11;
DeltaK_11=zeros(36,36);
DeltaK_11(g_11,g_11)=K_11;
K=K+DeltaK_11;

g_12=[25 26 27 34 35 36];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_12= [ eta 0 mu 0 0 0;...
        0 1 0 0 0 0;...
        -mu 0 eta 0 0 0;...
        0 0 0 eta 0 mu;...
        0 0 0 0 1 0;...
        0 0 0 -mu 0 eta];...
K_12=T_12'*k_12*T_12;
DeltaK_12=zeros(36,36);
DeltaK_12(g_12,g_12)=K_12;
K=K+DeltaK_12;

display(K)

% Cálculo de desplazamientos y reacciones:

a=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 16 17 18 19 20 21 28 29 30 31 32 33 34 35 36]';
b=[10 11 12 13 14 15 22 23 24 25 26 27]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(36,1);
P(11)=-120;

```

```

P(14)=-120;
P(23)=-120;
P(26)=-120;
P_b=P(b);
D_b=K_bb\ P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(36,1);
D(b)=D_b;

disp(D)

% Torsiones, cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2;

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

D_4=D(g_4);
p_4=k_4*T_4*D_4;

D_5=D(g_5);
p_5=k_5*T_5*D_5;

D_6=D(g_6);
p_6=k_6*T_6*D_6;

D_7=D(g_7);
p_7=k_7*T_7*D_7;

D_8=D(g_8);
p_8=k_8*T_8*D_8;

D_9=D(g_9);
p_9=k_9*T_9*D_9;

D_10=D(g_10);
p_10=k_10*T_10*D_10;

D_11=D(g_11);
p_11=k_11*T_11*D_11;

D_12=D(g_12);
p_12=k_12*T_12*D_12;

display([p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 p_9 p_10 p_11 p_12])

```

C.7. Ejemplo 4.1

```
% Pórtico con carga horizontal

% Módulo de elasticidad:

E=2e8;

% Áreas, inercias y longitudes:

A=0.0252;
I=0.0014;
l_1=6;
l_2=8;
l_3=6;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_1(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

disp(k_1)

k_2=zeros(6,6);
l=l_2;
k_2(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_2(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_2(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_2(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

disp(k_2)

k_3=zeros(6,6);
l=l_3;
k_3(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_3(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_3(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_3(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_3(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_3(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];
```

```

disp(k_3)

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4 5 6];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[4 5 6 7 8 9];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[7 8 9 10 11 12];
beta=-90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

display(K)

% Cálculo de desplazamientos y reacciones:

a=[1 2 3 10 11 12]'; b=[4 5 6 7 8 9]';

```



```

K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=[0 0 0 40 0 0 0 0 0 0 0 0]';
P_b=P(b);
D_b=K_bb\P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;

disp(D)

% Axiales, cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2;

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

P_1=K_1*D_1;
P_2=K_2*D_2;
P_3=K_3*D_3;

display([p_1 P_1])
display([p_2 P_2])
display([p_3 P_3])

```

C.8. Ejemplo 4.2

```

% Pórtico con carga distribuida

% Módulo de elasticidad:

E=2e8;

% Áreas, inercias y longitudes:

A=0.0252;
I=0.0014;
l_1=6;
l_2=8;
l_3=6;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

```

```

k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_1(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

disp(k_1)

k_2=zeros(6,6);
l=l_2;
k_2(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_2(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_2(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_2(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

disp(k_2)

k_3=zeros(6,6);
l=l_3;
k_3(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_3(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_3(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_3(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_3(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_3(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

disp(k_3)

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4 5 6];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[4 5 6 7 8 9];

```

```

beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[7 8 9 10 11 12];
beta=-90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

display(K)

% Vector de fuerzas de empotramiento:

w=20;

r_2=[0;
     w*l_2/2;
     w*l_2^2/12;
     0;
     w*l_2/2;
     -w*l_2^2/12];

R_2=r_2;

display(R_2)

DeltaR_2=zeros(12,1);
DeltaR_2(g_2)=R_2;

R=DeltaR_2;

% Cálculo de desplazamientos y reacciones:

a=[1 2 3 10 11 12]'; b=[4 5 6 7 8 9]';
K_aa=K(a,a);

```

```

K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(12,1);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
D_b=K_bb\ (P_b-R_b);
P_a=K_ab*D_b+R(a);

D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;

disp(D)

% Axiales, cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2+r_2;

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

P_1=K_1*D_1;
P_2=K_2*D_2+R_2;
P_3=K_3*D_3;

display([p_1 P_1])
display([p_2 P_2])
display([p_3 P_3])

```

C.9. Ejemplo 4.3

```

% Pórtico con carga vertical asimétrica

% Módulo de elasticidad:

E=2e8;

% Áreas, inercias y longitudes:

A=0.0252;
I=0.0014;
l_1=6;
l_2=8;

```

```

l_3=6;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_1(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

disp(k_1)

k_2=zeros(6,6);
l=l_2;
k_2(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_2(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_2(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_2(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

disp(k_2)

k_3=zeros(6,6);
l=l_3;
k_3(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_3(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_3(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_3(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_3(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_3(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

disp(k_3)

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(12,12);

g_1=[1 2 3 4 5 6];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1=[ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;

```

```

K=K+DeltaK_1;

g_2=[4 5 6 7 8 9];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[7 8 9 10 11 12];
beta=-90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

display(K)

% Vector de fuerzas de empotramiento:

Q=160;
c=3;
d=5;

r_2=[0;
     Q*d^2*(3*c+d)/l_2^3;
     Q*c*d^2/l_2^2;
     0;
     Q*c^2*(3*d+c)/l_2^3;
     -Q*d*c^2/l_2^2];

R_2=r_2;

display(R_2)

DeltaR_2=zeros(12,1);
DeltaR_2(g_2)=R_2;

R=DeltaR_2;

```

```

% Cálculo de desplazamientos y reacciones:

a=[1 2 3 10 11 12]'; b=[4 5 6 7 8 9]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(12,1);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
D_b=K_bb\ (P_b-R_b);
P_a=K_ab*D_b+R(a);

D=zeros(12,1);
D(b)=D_b;

disp(D)

% Axiales, cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2+r_2;

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

P_1=K_1*D_1;
P_2=K_2*D_2+R_2;
P_3=K_3*D_3;

disp([p_1 P_1])
disp([p_2 P_2])
disp([p_3 P_3])

```

C.10. Ejemplo 4.4

```

% Pórtico con muro de cortante

% Módulo de elasticidad:

E=2e7;

```

```

% Áreas, inercias y longitudes:

Ac=0.5*0.6;
Av=0.4*0.5;
Am=0.4*3;
Ic=0.5*0.6^3/12;
Iv=0.4*0.5^3/12;
Im=0.4*3^3/12;
lv=6.5;
lc=3;
lm=3;
EA=E*[Ac*ones(1,5) Av*ones(1,5) Am*ones(1,5)];
EI=E*[Ic*ones(1,5) Iv*ones(1,5) Im*ones(1,5)];
L=[lc*ones(1,5) lv*ones(1,5) lm*ones(1,5)];

XY=zeros(12,2);
XY(1,:)= [0 0];
XY(2,:)= [6.5 0];
XY(3,:)= [0 3];
XY(4,:)= [6.5 3];
XY(5,:)= [0 6];
XY(6,:)= [6.5 6];
XY(7,:)= [0 9];
XY(8,:)= [6.5 9];
XY(9,:)= [0 12];
XY(10,:)= [6.5 12];
XY(11,:)= [0 15];
XY(12,:)= [6.5 15];

% Topología:

IJ=[1 3; 3 5; 5 7; 7 9; 9 11;...
    3 4; 5 6; 7 8; 9 10; 11 12; ...
    2 4; 4 6; 6 8; 8 10; 10 12];

x=XY(:,1);
y=XY(:,2);
n=36;
K=zeros(n,n);

% Matriz de rigidez:
% Contribuciones de las columnas:

for e=1:5
    l=L(e);
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l;
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l;
    T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
           -mu eta 0 0 0 0;...
           0 0 1 0 0 0;...
           0 0 0 eta mu 0;...
           0 0 0 -mu eta 0;...
           0 0 0 0 0 1];

```



```

k_e=zeros(6,6);
k_e(1,:)=EA(e)*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_e(2,:)=EI(e)*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_e(3,:)=EI(e)*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_e(4,:)=EA(e)*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_e(5,:)=EI(e)*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_e(6,:)=EI(e)*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];
g_e=[3*IJ(e,1)-2    3*IJ(e,1)-1    3*IJ(e,1)    3*IJ(e,2)-2    3*IJ(e,2)-1    3*IJ(e,2)];
K_e=T_e'*k_e*T_e;
DeltaK_e=zeros(n,n);
DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
K=K+DeltaK_e;
end

% Contribuciones de las vigas:
a=0.3;
b=1.5;
c=l-v-b;
Q=eye(6);
Q(2,3)=a;
Q(5,6)=-b;
for e=6:10
    l=L(e);
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l;
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l;
    T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
            -mu eta 0 0 0 0;...
            0 0 1 0 0 0;...
            0 0 0 eta mu 0;...
            0 0 0 -mu eta 0;...
            0 0 0 0 0 1];
    k_e=zeros(6,6);
    k_e(1,:)=EA(e)*[ 1/c      0      0      -1/c      0      0];
    k_e(2,:)=EI(e)*[ 0      12/c^3      6/c^2      0      -12/c^3      6/c^2];
    k_e(3,:)=EI(e)*[ 0      6/c^2      4/c      0      -6/c^2      2/c];
    k_e(4,:)=EA(e)*[-1/c      0      0      1/c      0      0];
    k_e(5,:)=EI(e)*[ 0      -12/c^3      -6/c^2      0      12/c^3      -6/c^2];
    k_e(6,:)=EI(e)*[ 0      6/c^2      2/c      0      -6/c^2      4/c];
    k_e=Q'*k_e*Q;
    g_e=[3*IJ(e,1)-2    3*IJ(e,1)-1    3*IJ(e,1)    3*IJ(e,2)-2    3*IJ(e,2)-1    3*IJ(e,2)];
    K_e=T_e'*k_e*T_e;
    DeltaK_e=zeros(n,n);
    DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
    K=K+DeltaK_e;
end

% Contribución del muro:
Av=Am*5/6;
nu=0.15;
G=E/(2*(1+nu));
a=12*E*Im/(lm^2*G*Av);

```

```

for e=11:15
    l=L(e);
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l;
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l;
    T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
           -mu eta 0 0 0 0;...
           0 0 1 0 0 0;...
           0 0 0 eta mu 0;...
           0 0 0 -mu eta 0;...
           0 0 0 0 0 1];
    k_e=zeros(6,6);
    k_e(1,:)=EA(e)*[ 1/l 0 0 -1/l 0 0];
    k_e(2,:)=EI(e)*[ 0 12/l^3 6/l^2 0 -12/l^3 6/l^2];
    k_e(3,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 (4+a)/l 0 -6/l^2 (2-a)/l];
    k_e(4,:)=EA(e)*[-1/l 0 0 1/l 0 0];
    k_e(5,:)=EI(e)*[ 0 -12/l^3 -6/l^2 0 12/l^3 -6/l^2];
    k_e(6,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 (2-a)/l 0 -6/l^2 (4+a)/l];
    k_e=k_e/(1+a);
    g_e=[3*IJ(e,1)-2 3*IJ(e,1)-1 3*IJ(e,1) 3*IJ(e,2)-2 3*IJ(e,2)-1 3*IJ(e,2)];
    K_e=T_e'*k_e*T_e;
    DeltaK_e=zeros(n,n);
    DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
    K=K+DeltaK_e;
end

figure
for e=1:15
    W=[XY(IJ(e,1),1) XY(IJ(e,1),2);...
       XY(IJ(e,2),1) XY(IJ(e,2),2)];
    plot(W(:,1),W(:,2),'-b')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal

% Solución:
a=[1 2 3 4 5 6]'; b=(7:36)';
K_ab=K(a,b);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(36,1);
P(7)=12;
P(13)=24;
P(19)=36;
P(25)=48;
P(31)=60;
P(7)=12;
P_b=P(b);

D_b=K_bb\P_b;
P_a=K_ab*D_b;

```

```

D=zeros(36,1);
D(b)=D_b;

disp(D)

XYdef=zeros(size(XY));
fac=50;
c=0;
for i=1:12
    c=c+1;
    XYdef(i,1)=XY(i,1)+fac*D(c);
    c=c+1;
    XYdef(i,2)=XY(i,2)+fac*D(c);
    c=c+1;
end
figure
for e=1:15
    W=[XY(IJ(e,1),1) XY(IJ(e,1),2);...
        XY(IJ(e,2),1) XY(IJ(e,2),2)];
    Wdef=[XYdef(IJ(e,1),1) XYdef(IJ(e,1),2);...
        XYdef(IJ(e,2),1) XYdef(IJ(e,2),2)];
    plot(W(:,1),W(:,2),'--b',Wdef(:,1),Wdef(:,2),'-r')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal

% Axiales, cortantes y momentos en los elementos:

p=zeros(6,15);

for e=1:15
    l=L(e);
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l;
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l;
    T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
           -mu eta 0 0 0 0;...
           0 0 1 0 0 0;...
           0 0 0 eta mu 0;...
           0 0 0 -mu eta 0;...
           0 0 0 0 0 1];
    k_e=zeros(6,6);
    k_e(1,:)=EA(e)*[ 1/l 0 0 -1/l 0 0];
    k_e(2,:)=EI(e)*[ 0 12/l^3 6/l^2 0 -12/l^3 6/l^2];
    k_e(3,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 4/l 0 -6/l^2 2/l];
    k_e(4,:)=EA(e)*[-1/l 0 0 1/l 0 0];
    k_e(5,:)=EI(e)*[ 0 -12/l^3 -6/l^2 0 12/l^3 -6/l^2];
    k_e(6,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 2/l 0 -6/l^2 4/l];
    g_e=[3*IJ(e,1)-2 3*IJ(e,1)-1 3*IJ(e,1) 3*IJ(e,2)-2 3*IJ(e,2)-1 3*IJ(e,2)];
    D_e=D(g_e);
    p_e=k_e*T_e*D_e;

```

```

    p(:,e)=p_e;
end

```

C.11. Ejemplo 5.1

```

% Pórtico de 5 pisos, cargas verticales

% Módulo de elasticidad:

E=2e7;

% Áreas, inercias y longitudes:

Ac=0.5*0.6;
Av=0.4*0.5;
Ic=0.5*0.6^3/12;
Iv=0.4*0.5^3/12;
lv=6;
lc=3;
EA=E*[Ac Av Ac Ac Av Ac Ac Av Ac Ac Av Ac Ac Av Ac];
EI=E*[Ic Iv Ic Ic Iv Ic Ic Iv Ic Ic Iv Ic Ic Iv Ic];
L=[lc lv lc lc lv lc lc lv lc lc lv lc lc lv lc];

XY=zeros(12,2);
XY(1,:)=[0 0];
XY(2,:)=[6 0];
XY(3,:)=[0 3];
XY(4,:)=[6 3];
XY(5,:)=[0 6];
XY(6,:)=[6 6];
XY(7,:)=[0 9];
XY(8,:)=[6 9];
XY(9,:)=[0 12];
XY(10,:)=[6 12];
XY(11,:)=[0 15];
XY(12,:)=[6 15];

% Topología:

IJ=[1 3; 3 4; 2 4; 3 5; 5 6; 4 6; 5 7; 7 8; 6 8; 7 9; 9 10; 8 10; 9 11; 11 12; 10 12];

x=XY(:,1);
y=XY(:,2);
n=36;
K=zeros(n,n);

% Matriz de rigidez:

```

```

for e=1:15
    l=L(e);
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l;
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l;
    T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
           -mu eta 0 0 0 0;...
           0 0 1 0 0 0;...
           0 0 0 eta mu 0;...
           0 0 0 -mu eta 0;...
           0 0 0 0 0 1];
    k_e=zeros(6,6);
    k_e(1,:)=EA(e)*[ 1/l 0 0 -1/l 0 0];
    k_e(2,:)=EI(e)*[ 0 12/l^3 6/l^2 0 -12/l^3 6/l^2];
    k_e(3,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 4/l 0 -6/l^2 2/l];
    k_e(4,:)=EA(e)*[-1/l 0 0 1/l 0 0];
    k_e(5,:)=EI(e)*[ 0 -12/l^3 -6/l^2 0 12/l^3 -6/l^2];
    k_e(6,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 2/l 0 -6/l^2 4/l];
    g_e=[3*IJ(e,1)-2 3*IJ(e,1)-1 3*IJ(e,1) 3*IJ(e,2)-2 3*IJ(e,2)-1 3*IJ(e,2)];
    K_e=T_e'*k_e*T_e;
    DeltaK_e=zeros(n,n);
    DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
    K=K+DeltaK_e;
end

figure
for e=1:15
    Q=[XY(IJ(e,1),1) XY(IJ(e,1),2);...
       XY(IJ(e,2),1) XY(IJ(e,2),2)];
    plot(Q(:,1),Q(:,2),'-b')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal

% Vector de fuerzas de empotramiento:

w=10*5;
l=lv;
r_e=[0;
     w*l/2;
     w*l^2/12;
     0;
     w*l/2;
     -w*l^2/12];

rt=[r_e;r_e;r_e;r_e;r_e];
R=zeros(36,1);
g_w=7:36;
R(g_w)=rt;
disp(R)

```

```

% Solución:

a=[1 2 3 4 5 6]'; b=(7:36)';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(36,1);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
D_b=K_bb\ (P_b-R_b);
P_a=K_ab*D_b+R(a);

D=zeros(36,1);
D(b)=D_b;

disp(D)

XYdef=zeros(size(XY));
fac=50;
c=0;
for i=1:12
    c=c+1;
    XYdef(i,1)=XY(i,1)+fac*D(c);
    c=c+1;
    XYdef(i,2)=XY(i,2)+fac*D(c);
    c=c+1;
end
figure
for e=1:15
    Q=[XY(IJ(e,1),1) XY(IJ(e,1),2);...
        XY(IJ(e,2),1) XY(IJ(e,2),2)];
    Qdef=[XYdef(IJ(e,1),1) XYdef(IJ(e,1),2);...
        XYdef(IJ(e,2),1) XYdef(IJ(e,2),2)];
    plot(Q(:,1),Q(:,2),'--b',Qdef(:,1),Qdef(:,2),'-r')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal

% Axiales, cortantes y momentos en los elementos:

p=zeros(6,15);

for e=1:15
    l=L(e);
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l;
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l;
    T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
            -mu eta 0 0 0 0;...
            0 0 1 0 0 0;...

```

```

0    0    0    eta    mu    0;...
0    0    0   -mu    eta    0;...
0    0    0     0     0    1];
k_e=zeros(6,6);
k_e(1,:)=EA(e)*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_e(2,:)=EI(e)*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_e(3,:)=EI(e)*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_e(4,:)=EA(e)*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_e(5,:)=EI(e)*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_e(6,:)=EI(e)*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];
g_e=[3*IJ(e,1)-2   3*IJ(e,1)-1   3*IJ(e,1)   3*IJ(e,2)-2   3*IJ(e,2)-1   3*IJ(e,2)];
D_e=D(g_e);
p_e=k_e*T_e*D_e;
p(:,e)=p_e;
end

for e=2:3:14
    p(:,e)=p(:,e)+r_e;
end

```

C.12. Ejemplo 5.3

■ Primer método:

```

% Matriz de rigidez condensada de un pórtico

% versión para el primer método

% Módulo de elasticidad:

E=2e8;

% Áreas, inercias y longitudes:

A=0.2;
I=0.004;
l_1=3;
l_2=4.5;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

%% columnas

k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_1(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];

```

```

k_1(5,:)=E*I*[ 0      -12/1^3   -6/1^2    0      12/1^3   -6/1^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2    2/1      0      -6/1^2    4/1];

k_2=k_1;
k_3=k_1;
k_4=k_1;

disp(k_1)

%% vigas

k_5=zeros(4,4);
l=l_2;
k_5(1,:)=E*I*[ 12/1^3    6/1^2   -12/1^3    6/1^2];
k_5(2,:)=E*I*[ 6/1^2    4/1   -6/1^2    2/1];
k_5(3,:)=E*I*[ -12/1^3   -6/1^2    12/1^3   -6/1^2];
k_5(4,:)=E*I*[ 6/1^2    2/1   -6/1^2    4/1];

disp(k_2)

k_6=k_5;

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(15,15);

g_1=[1 4 5 2 8 9];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(15,15);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[1 6 7 2 10 11];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(15,15);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

```



```

g_3=[2 8 9 3 12 13];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(15,15);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

g_4=[2 10 11 3 14 15];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_4= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
        0 0 1 0 0 0;...
        0 0 0 eta mu 0;...
        0 0 0 -mu eta 0;...
        0 0 0 0 0 1];
K_4=T_4'*k_4*T_4;
DeltaK_4=zeros(15,15);
DeltaK_4(g_4,g_4)=K_4;
K=K+DeltaK_4;

g_5=[8 9 10 11];
beta=0;
eta=cosd(beta);
T_5= [eta 0 0 0 ;...
       0 1 0 0 ;...
       0 0 eta 0 ;...
       0 0 0 1];
K_5=T_5'*k_5*T_5;
DeltaK_5=zeros(15,15);
DeltaK_5(g_5,g_5)=K_5;
K=K+DeltaK_5;

g_6=[12 13 14 15];
beta=0;
eta=cosd(beta);
T_6= [eta 0 0 0 ;...
       0 1 0 0 ;...
       0 0 eta 0 ;...
       0 0 0 1];
K_6=T_6'*k_6*T_6;
DeltaK_6=zeros(15,15);
DeltaK_6(g_6,g_6)=K_6;
K=K+DeltaK_6;

```

```

display(K)

a=[1 4:7]'; b=[2 3 8:15]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);

p=[2 3]'; s=(8:15)';

K_pp=K(p,p);
K_ps=K(p,s);
K_sp=K(s,p);
K_ss=K(s,s);

C=K_pp-K_ps*(K_ss\K_sp);

display(C)

```

■ Segundo método:

```

% Matriz de rigidez condensada de un pórtico

% versión para el segundo método
% considera 3 grados de libertad por nodo y área 1000 veces mayor en vigas
% resultados casi iguales a ejemplo_5_3a.m
%

% Módulo de elasticidad:

E=2e8;

% Áreas, inercias y longitudes:

A=0.2;
I=0.004;
l_1=3;
l_2=4.5;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

%% columnas

k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];

```

```

k_1(4,:)=E*A*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];

k_2=k_1;
k_3=k_1;
k_4=k_1;

disp(k_1)

%% vigas

A=1000*A;

k_5=zeros(6,6);
l=l_2;

k_5(1,:)=E*A*[ 1/1      0      0      -1/1      0      0];
k_5(2,:)=E*I*[ 0      12/1^3      6/1^2      0      -12/1^3      6/1^2];
k_5(3,:)=E*I*[ 0      6/1^2      4/1      0      -6/1^2      2/1];
k_5(4,:)=E*A*[-1/1      0      0      1/1      0      0];
k_5(5,:)=E*I*[ 0      -12/1^3      -6/1^2      0      12/1^3      -6/1^2];
k_5(6,:)=E*I*[ 0      6/1^2      2/1      0      -6/1^2      4/1];

disp(k_2)

k_6=k_5;

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(18,18);

g_1=[1 4 5 2 8 9];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1=[ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(18,18);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[16 6 7 17 10 11];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2=[ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...

```

```

        0    0    0  -mu  eta  0;...
        0    0    0    0    0  1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(18,18);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[2 8 9 3 12 13];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta  mu  0    0    0  0;...
      -mu  eta  0    0    0  0;...
        0    0  1    0    0  0;...
        0    0  0    eta  mu  0;...
        0    0  0   -mu  eta  0;...
        0    0  0    0    0  1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(18,18);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

g_4=[17 10 11 18 14 15];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_4= [ eta  mu  0    0    0  0;...
      -mu  eta  0    0    0  0;...
        0    0  1    0    0  0;...
        0    0  0    eta  mu  0;...
        0    0  0   -mu  eta  0;...
        0    0  0    0    0  1];
K_4=T_4'*k_4*T_4;
DeltaK_4=zeros(18,18);
DeltaK_4(g_4,g_4)=K_4;
K=K+DeltaK_4;

g_5=[2 8 9 17 10 11];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_5= [ eta  mu  0    0    0  0;...
      -mu  eta  0    0    0  0;...
        0    0  1    0    0  0;...
        0    0  0    eta  mu  0;...
        0    0  0   -mu  eta  0;...
        0    0  0    0    0  1];
K_5=T_5'*k_5*T_5;
DeltaK_5=zeros(18,18);
DeltaK_5(g_5,g_5)=K_5;
K=K+DeltaK_5;

g_6=[3 12 13 18 14 15];
beta=0;
eta=cosd(beta);
T_6= [ eta  mu  0    0    0  0;...
```

```

-mu eta 0 0 0 0;...
0 0 1 0 0 0;...
0 0 0 eta mu 0;...
0 0 0 -mu eta 0;...
0 0 0 0 0 1];
K_6=T_6'*k_6*T_6;
DeltaK_6=zeros(18,18);
DeltaK_6(g_6,g_6)=K_6;
K=K+DeltaK_6;

display(K)

a=[1 4:7 16]'; b=[2 3 8:15 17:18]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);

p=[2 3]'; s=[8 9 10 11 12 13 14 15 17 18]';

K_pp=K(p,p);
K_ps=K(p,s);
K_sp=K(s,p);
K_ss=K(s,s);

C=K_pp-K_ps*(K_ss\K_sp);

display(C)

```

C.13. Ejemplo 5.5

- Matriz condensada de los pórticos en sentido X:

```

% Edificio de 5 pisos, pórtico en sentido X. Matriz condensada

% Módulo de elasticidad:

E=2e7;

% Áreas, inercias y longitudes:

Ac=0.5*0.6;
Av=0.4*0.5*1e4;          % áreas de vigas amplificadas por 1000
Ic=0.6*0.5^3/12;
Iv=0.4*0.5^3/12;
lv=6;
lc=3;
EA=E*[Ac Av Ac Av Ac Av Ac ...

```

```

Ac Av Ac Av Ac Av Ac ...
Ac Av Ac Av Ac Av Ac ...
Ac Av Ac Av Ac Av Ac ...
Ac Av Ac Av Ac Av Ac];
EI=E*[Ic Iv Ic Iv Ic Iv Ic ...
Ic Iv Ic Iv Ic Iv Ic ...
Ic Iv Ic Iv Ic Iv Ic ...
Ic Iv Ic Iv Ic Iv Ic ...
Ic Iv Ic Iv Ic Iv Ic];
L=[lc lv lc lv lc lv lc ...
lc lv lc lv lc lv lc ...
lc lv lc lv lc lv lc ...
lc lv lc lv lc lv lc ...
lc lv lc lv lc lv lc];

```

```

XY=zeros(24,2);
XY(1,:)= [0 0];
XY(2,:)= [5 0];
XY(3,:)= [10 0];
XY(4,:)= [15 0];
XY(5,:)= [0 3];
XY(6,:)= [5 3];
XY(7,:)= [10 3];
XY(8,:)= [15 3];
XY(9,:)= [0 6];
XY(10,:)= [5 6];
XY(11,:)= [10 6];
XY(12,:)= [15 6];
XY(13,:)= [0 9];
XY(14,:)= [5 9];
XY(15,:)= [10 9];
XY(16,:)= [15 9];
XY(17,:)= [0 12];
XY(18,:)= [5 12];
XY(19,:)= [10 12];
XY(20,:)= [15 12];
XY(21,:)= [0 15];
XY(22,:)= [5 15];
XY(23,:)= [10 15];
XY(24,:)= [15 15];

```

```
% Topología:
```

```

IJ=[1 5; 5 6; 2 6; 6 7; 3 7; 7 8; 4 8; ...
5 9; 9 10; 6 10; 10 11; 7 11; 11 12; 8 12; ...
9 13; 13 14; 10 14; 14 15; 11 15; 15 16; 12 16;...
13 17; 17 18; 14 18; 18 19; 15 19; 19 20; 16 20; ...
17 21; 21 22; 18 22; 22 23; 19 23; 23 24; 20 24];

```

```
x=XY(:,1);
```

```

y=XY(:,2);
n=72;
K=zeros(n,n);

% Matriz de rigidez:

for e=1:35
    l=L(e);
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l;
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l;
    T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
           -mu eta 0 0 0 0;...
           0 0 1 0 0 0;...
           0 0 0 eta mu 0;...
           0 0 0 -mu eta 0;...
           0 0 0 0 0 1];

    k_e=zeros(6,6);
    k_e(1,:)=EA(e)*[ 1/l 0 0 -1/l 0 0];
    k_e(2,:)=EI(e)*[ 0 12/l^3 6/l^2 0 -12/l^3 6/l^2];
    k_e(3,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 4/l 0 -6/l^2 2/l];
    k_e(4,:)=EA(e)*[-1/l 0 0 1/l 0 0];
    k_e(5,:)=EI(e)*[ 0 -12/l^3 -6/l^2 0 12/l^3 -6/l^2];
    k_e(6,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 2/l 0 -6/l^2 4/l];
    g_e=[3*IJ(e,1)-2 3*IJ(e,1)-1 3*IJ(e,1) 3*IJ(e,2)-2 3*IJ(e,2)-1 3*IJ(e,2)];
    K_e=T_e'*k_e*T_e;
    DeltaK_e=zeros(n,n);
    DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
    K=K+DeltaK_e;
end

figure
for e=1:35
    Q=[XY(IJ(e,1),1) XY(IJ(e,1),2);...
       XY(IJ(e,2),1) XY(IJ(e,2),2)];
    plot(Q(:,1),Q(:,2),'-b')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal

% Solución:

p=13:12:61;
u=13:72;
s=setdiff(u,p);

K_pp=K(p,p);
K_ps=K(p,s);
K_sp=K(s,p);
K_ss=K(s,s);

C=K_pp-K_ps*(K_ss\K_sp);

```

■ Matriz condensada de los pórticos en sentido Y:

```
% Edificio de 5 pisos, pórtico en sentido Y. Matriz condensada

% Módulo de elasticidad:

E=2e7;

% Áreas, inercias y longitudes:

Ac=0.5*0.6;
Av=0.4*0.5*1e3;           % áreas de vigas amplificadas por 1000
Ic=0.5*0.6^3/12;
Iv=0.4*0.5^3/12;
lv=6;
lc=3;
EA=E*[Ac Av Ac Ac Av Ac Ac Av Ac Ac Av Ac Ac Av Ac];
EI=E*[Ic Iv Ic Ic Iv Ic Ic Iv Ic Ic Iv Ic Ic Iv Ic];
L=[lc lv lc lc lv lc lc lv lc lc lv lc lc lv lc];

XY=zeros(12,2);
XY(1,:)= [0 0];
XY(2,:)= [6 0];
XY(3,:)= [0 3];
XY(4,:)= [6 3];
XY(5,:)= [0 6];
XY(6,:)= [6 6];
XY(7,:)= [0 9];
XY(8,:)= [6 9];
XY(9,:)= [0 12];
XY(10,:)= [6 12];
XY(11,:)= [0 15];
XY(12,:)= [6 15];

% Topología:

IJ=[1 3; 3 4; 2 4; 3 5; 5 6; 4 6; 5 7; 7 8; 6 8; 7 9; 9 10; 8 10; 9 11; 11 12; 10 12];

x=XY(:,1);
y=XY(:,2);
n=36;
K=zeros(n,n);

% Matriz de rigidez:
```



```

for e=1:15
    l=L(e);
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l;
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l;
    T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
           -mu eta 0 0 0 0;...
           0 0 1 0 0 0;...
           0 0 0 eta mu 0;...
           0 0 0 -mu eta 0;...
           0 0 0 0 0 1];
    k_e=zeros(6,6);
    k_e(1,:)=EA(e)*[ 1/l 0 0 -1/l 0 0];
    k_e(2,:)=EI(e)*[ 0 12/l^3 6/l^2 0 -12/l^3 6/l^2];
    k_e(3,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 4/l 0 -6/l^2 2/l];
    k_e(4,:)=EA(e)*[-1/l 0 0 1/l 0 0];
    k_e(5,:)=EI(e)*[ 0 -12/l^3 -6/l^2 0 12/l^3 -6/l^2];
    k_e(6,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 2/l 0 -6/l^2 4/l];
    g_e=[3*IJ(e,1)-2 3*IJ(e,1)-1 3*IJ(e,1) 3*IJ(e,2)-2 3*IJ(e,2)-1 3*IJ(e,2)];
    K_e=T_e'*k_e*T_e;
    DeltaK_e=zeros(n,n);
    DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
    K=K+DeltaK_e;
end

figure
for e=1:15
    Q=[XY(IJ(e,1),1) XY(IJ(e,1),2);...
       XY(IJ(e,2),1) XY(IJ(e,2),2)];
    plot(Q(:,1),Q(:,2),'-b')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal

% Solución:

p=7:6:31;
u=7:36;
s=setdiff(u,p);

K_pp=K(p,p);
K_ps=K(p,s);
K_sp=K(s,p);
K_ss=K(s,s);

C=K_pp-K_ps*(K_ss\K_sp);

```

■ Programa principal:

```

% Edificio bajo cargas sísmicas

% Utiliza los programas: ejemplo_5_5_Xcond, ejemplo_5_5_Ycond
%

ejemplo_5_5_Xcond
C_x=C;
Kss_x=K_ss;
Kps_x=K_ps;

ejemplo_5_5_Ycond
C_y=C;
Kss_y=K_ss;
Kps_y=K_ps;

% Matrices de transformación de los pórticos:

A_p=[1 0 3; 1 0 -3; 0 1 -7.5; 0 1 -2.5; 0 1 2.5; 0 1 7.5];

AA=zeros(30,15);
for k=1:6
    for i=1:5
        ik=(k-1)*5+i;
        g_i=[3*i-2 3*i-1 3*i];
        AA(ik,g_i)=A_p(k,:);
    end
end

A_1=AA(1:5,:);
A_2=AA(6:10,:);
A_3=AA(11:15,:);
A_4=AA(16:20,:);
A_5=AA(21:25,:);
A_6=AA(26:30,:);

% Matriz de rigidez del edificio:

S=A_1'*C_x*A_1 + A_2'*C_x*A_2 + A_3'*C_y*A_3 + ...
  A_4'*C_y*A_4 + A_5'*C_y*A_5 + A_6'*C_y*A_6;

% Fuerza horizontal equivalente:

z=[3 6 9 12 15]';
m=10*15*6*ones(5,1)/9.8;
M=sum(m);
Z=15;
T=0.047*Z^0.9;
I=1;
R=7;
Aa=0.25;
Av=0.25;

```

```

Fa=1.5;
Fv=1.5;
Tc=0.48*Av*Fv/(Aa*Fa);
Tl=2.4*Fv;
Sa=1.2*Av*Fv*I/(R*T);
k=0.75+0.5*T;
g=9.8;
mz=m.*(z.^k);
H_y=mz*Sa*g*M/sum(mz);
H_x=mz*Sa*g*M/sum(mz);

% Momentos de torsión:

e_y=0.3*ones(5,1);
e_x=0.75*ones(5,1);
B=0.3*H_x.*e_y + H_y.*e_x;

% Combinación de cargas: 30% en X, 100% en Y:

H=zeros(15,1);
g_x=[1 4 7 10 13];
g_y=[2 5 8 11 14];
g_b=[3 6 9 12 15];
H(g_x)=0.3*H_x;
H(g_y)=H_y;
H(g_b)=B;

disp(H)

% Desplazamientos de los centros de masa:

U=S\H;

disp(U)

% Desplazamientos principales de los pórticos:

D_p1=A_1*U;
D_p2=A_2*U;
D_p3=A_3*U;
D_p4=A_4*U;
D_p5=A_5*U;
D_p6=A_6*U;

disp([D_p1 D_p2 D_p3 D_p4 D_p5 D_p6])

% Desplazamientos secundarios:

D_s1=-Kss_x\'(Kps_x'*D_p1);
D_s2=-Kss_x\'(Kps_x'*D_p2);
D_s3=-Kss_y\'(Kps_y'*D_p3);
D_s4=-Kss_y\'(Kps_y'*D_p4);
D_s5=-Kss_y\'(Kps_y'*D_p5);

```

```
D_s6=-Kss_y\'(Kps_y'*D_p6);
```

■ Matriz condensada del pórtico con diagonales:

```
% Edificio de 5 pisos, pórtico en sentido Y con diagonales. Matriz condensada
```

```
% Módulos de elasticidad de concreto y acero:
```

```
E=2e7;
```

```
Ea=2e8;
```

```
% Áreas, inercias y longitudes:
```

```
Ac=0.5*0.6;
```

```
Av=0.4*0.5*1e3; % áreas de vigas amplificadas por 1000
```

```
Ad=0.2^2-0.18^2;
```

```
Ic=0.5*0.6^3/12;
```

```
Iv=0.4*0.5^3/12;
```

```
Id=(0.2^4-0.18^4)/12;
```

```
lv=6;
```

```
lc=3;
```

```
ld=sqrt(lv^2 + lc^3);
```

```
EA=E*[Ac Av Ac Ac Av Ac Ac Av Ac Ac Av Ac Ac Av Ac ...
```

```
ones(1,10)*Ad*Ea/E];
```

```
EI=E*[Ic Iv Ic Ic Iv Ic Ic Iv Ic Ic Iv Ic Ic Iv Ic ...
```

```
ones(1,10)*Id*Ea/E];
```

```
L=[lc lv lc lc lv lc lc lv lc lc lv lc lc lv lc ...
```

```
ones(1,10)*ld];
```

```
XY=zeros(12,2);
```

```
XY(1,:)= [0 0];
```

```
XY(2,:)= [6 0];
```

```
XY(3,:)= [0 3];
```

```
XY(4,:)= [6 3];
```

```
XY(5,:)= [0 6];
```

```
XY(6,:)= [6 6];
```

```
XY(7,:)= [0 9];
```

```
XY(8,:)= [6 9];
```

```
XY(9,:)= [0 12];
```

```
XY(10,:)= [6 12];
```

```
XY(11,:)= [0 15];
```

```
XY(12,:)= [6 15];
```

```
% Topología:
```

```
IJ=[1 3; 3 4; 2 4; 3 5; 5 6; 4 6; 5 7; 7 8; 6 8; 7 9; 9 10; ...
```

```
8 10; 9 11; 11 12; 10 12; ...
```

```
1 4; 2 3; 3 6; 4 5; 5 8; 6 7; 7 10; 8 9; 9 12; 10 11];
```

```
x=XY(:,1);
```

```

y=XY(:,2);
n=36;
K=zeros(n,n);

% Matriz de rigidez:

for e=1:25
    l=L(e);
    eta=(x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))/l;
    mu=(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))/l;
    T_e = [ eta mu 0 0 0 0;...
           -mu eta 0 0 0 0;...
           0 0 1 0 0 0;...
           0 0 0 eta mu 0;...
           0 0 0 -mu eta 0;...
           0 0 0 0 0 1];

    k_e=zeros(6,6);
    k_e(1,:)=EA(e)*[ 1/l 0 0 -1/l 0 0];
    k_e(2,:)=EI(e)*[ 0 12/l^3 6/l^2 0 -12/l^3 6/l^2];
    k_e(3,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 4/l 0 -6/l^2 2/l];
    k_e(4,:)=EA(e)*[-1/l 0 0 1/l 0 0];
    k_e(5,:)=EI(e)*[ 0 -12/l^3 -6/l^2 0 12/l^3 -6/l^2];
    k_e(6,:)=EI(e)*[ 0 6/l^2 2/l 0 -6/l^2 4/l];
    g_e=[3*IJ(e,1)-2 3*IJ(e,1)-1 3*IJ(e,1) 3*IJ(e,2)-2 3*IJ(e,2)-1 3*IJ(e,2)];
    K_e=T_e'*k_e*T_e;
    DeltaK_e=zeros(n,n);
    DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
    K=K+DeltaK_e;
end

figure
for e=1:25
    Q=[XY(IJ(e,1),1) XY(IJ(e,1),2);...
       XY(IJ(e,2),1) XY(IJ(e,2),2)];
    plot(Q(:,1),Q(:,2),'-b')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal

% Solución:

p=7:6:31;
u=7:36;
s=setdiff(u,p);

K_pp=K(p,p);
K_ps=K(p,s);
K_sp=K(s,p);
K_ss=K(s,s);

C=K_pp-K_ps*(K_ss\K_sp);

```

C.14. Programa de análisis modal

```
function [Phi, Omega]=dmodos(m,k)
%
%-----
% [Phi, Omega]=dmodos(m,k)
%-----
%
% Calcula las formas y frecuencias modales para dos matrices
% cualesquiera m (masa) y k (rigidez)
%
%
% Por: Jorge E. Hurtado G.
%     Universidad Nacional, Manizales
%
%-----
%
%
[V, Omega2] = eig(k,m);           % autovalores y autovectores
[n, ~]=size(m);
Omega=sqrt(diag(Omega2));          % frecuencias angulares
[W, I]=sort(Omega);               % ordena las frecuencias
Phi=zeros(size(k));
for i=1:n                          % ordena los modos de acuerdo con
    Phi(:,i)=V(:,I(i));           % el orden de las frecuencias
end
q=Phi'*m*Phi;
q=diag(q);
for j=1:n                          % normaliza los modos
    Phi(:,j)=Phi(:,j)/sqrt(q(j));
end
Omega=W;
%
%
%----- fin
```

C.15. Ejemplo 5.6

■ Caso simétrico

```
% Edificio simétrico bajo cargas sísmicas
% Cálculo de fuerza horizontal equivalente y análisis modal (SRSS y CQC)

% Utiliza los programas: portico_X.m, portico_Y.m
%
```

```

portico_X
C_x=C;
Kss_x=K_ss;
Kps_x=K_ps;

portico_Y
C_y=C;
Kss_y=K_ss;
Kps_y=K_ps;

% Matrices de transformación de los pórticos:

A_p=[1 0 3; 1 0 -3; 0 1 -7.5; 0 1 -2.5; 0 1 2.5; 0 1 7.5];

AA=zeros(30,15);
for k=1:6
    for i=1:5
        ik=(k-1)*5+i;
        g_i=[3*i-2 3*i-1 3*i];
        AA(ik,g_i)=A_p(k,:);
    end
end

A_1=AA(1:5,:);
A_2=AA(6:10,:);
A_3=AA(11:15,:);
A_4=AA(16:20,:);
A_5=AA(21:25,:);
A_6=AA(26:30,:);

% Matriz de rigidez del edificio:

S=A_1'*C_x*A_1 + A_2'*C_x*A_2 + A_3'*C_y*A_3 + ...
  A_4'*C_y*A_4 + A_5'*C_y*A_5 + A_6'*C_y*A_6;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Fuerza horizontal equivalente:

z=[3 6 9 12 15]';
m=10*15*6*ones(5,1)/9.8;
M=sum(m);
Z=15;
T_feq=0.047*Z^0.9;
I=1;
R=7;
Aa=0.25;
Av=0.25;
Fa=1.5;
Fv=1.5;
Sa_feq=1.2*Av*Fv*I/(R*T_feq);

```

[illegible]


```

% Análisis modal
%

m=10*15*6*ones(5,1)/9.8;      % masas traslacionales
mr(1:5)=m(1:5)*(15^2+6^2)/12;  % masas rotacionales

Masa=diag([m(1) m(1) mr(1) m(2) m(2) mr(2) m(3) m(3) mr(3)...
           m(4) m(4) mr(4) m(5) m(5) mr(5)]);

[Phi, Omega]=dmodos(Masa, S);

T=2*pi./Omega;                % Vector de periodos de los modos

disp(T)
disp(Phi)

% Masas participantes (NSR - A.5.4.2):

Mpart_x=zeros(15,1);
Mpart_y=zeros(15,1);
mu=diag(Masa);
mux=mu(g_x);
muy=mu(g_y);

Phix=Phi(g_x,:);
Phiy=Phi(g_y,:);

for j=1:15
    Mpart_x(j)=(mux'*Phix(:,j))^2;
    Mpart_y(j)=(muy'*Phiy(:,j))^2;
end

% Porcentajes acumulados de participación:

Part_x=cumsum(Mpart_x)/M;
Part_y=cumsum(Mpart_y)/M;

disp([Mpart_x Mpart_y])
disp([Part_x Part_x])

% Cargas por análisis dinámico
% Ordenadas espectrales:

T0=0.1*Av*Fv/(Aa*Fa);
Tc=0.48*Av*Fv/(Aa*Fa);
Tl=2.4*Fv;
Sa=zeros(size(T));
for i=1:15
    if T(i)<=T0
        Sa(i)=2.5*Aa*Fa*I*(0.4+0.6*T(i)/T0)/R;
    elseif T(i) <=Tc
        Sa(i)=2.5*Aa*Fa*I/R;
    elseif T(i) > Tc && T(i)<= Tl

```

```

        Sa(i)=1.2*Av*Fv*I/(R*T(i));
    elseif T(i) > Tl
        Sa(i)=1.2*Av*Fv*Tl*I/(R*T(i)^2);
    end
end

Sa=Sa*g;

% Vector r de la combinación bajo análisis:

rx=zeros(15,1);
ry=zeros(15,1);
rx(g_x)=0.3;
ry(g_y)=1;
r=rx+ry;

F=zeros(size(Phi));
q=zeros(size(T));
for j=1:15
    q(j)=Phi(:,j)'*Masa*r/(Phi(:,j)'*Masa*Phi(:,j));    % factores de participación modal
    F(:,j)=Masa*Phi(:,j)*q(j)*Sa(j);
end

% Fuerzas finales - Método RCSC (NSR-10 A.5.4.4)

Fsrss=zeros(15,1);
for k=1:15
    for i=1:15
        Fsrss(k)=Fsrss(k)+F(k,i)^2;
    end
end
%
Fsrss=sqrt(Fsrss);
disp(Fsrss)

Fx=Fsrss(g_x);                                % en X
Fy=Fsrss(g_y);                                % en Y
Bsrss=Fsrss(g_b);                              % Pares torsores
Ba_srss=Fx.*e_y + Fy.*e_x;                    % Torsión accidental adicional (opcional - NSR-10 A.3.6.7)
Btotal_srss = Bsrss + Ba_srss;
Facc=zeros(15,1);
Facc(g_b)=Ba_srss;
Fsrss=Fsrss+Facc;

%                               Método CQC (Combinación cuadrática total)

xsi=0.05;
rho=zeros(size(Phi));
for i=1:15
    for j=1:15
        beta=Omega(i)/Omega(j);
        rho(i,j)=8*xsi^2*(1+beta)*beta^1.5/((1-beta^2)^2+4*xsi^2*beta*(1+beta)^2);
    end
end

```

```

end

Fcqc=zeros(15,1);
for k=1:15
    for i=1:15
        for j=1:15
            Fcqc(k)=Fcqc(k)+rho(i,j)*F(k,i)*F(k,j);
        end
    end
end

Fcqc=sqrt(Fcqc);
Px=Fcqc(g_x);           % en X
Py=Fcqc(g_y);           % en Y
Bcqc=Fcqc(g_b);         % Pares torsores
Ba_cqc=Px.*e_y + Py.*e_x; % Torsión accidental adicional (opcional - NSR A.3.6.7)
Btotal_cqc = Bcqc + Ba_cqc;
Facc=zeros(15,1);
Facc(g_b)=Ba_cqc;
Fcqc=Fcqc+Facc;
disp([H Fsrss Fcqc])

```

■ Caso asimétrico

```

% Edificio asimétrico bajo cargas sísmicas
% Asimetría inducida por diagonales en el eje 3
% Cálculo de fuerza horizontal equivalente y análisis modal (SRSS y CQC)

% Utiliza los programas: portico_X.m, portico_Y.m, portico_diagonales.m
%

portico_X
C_x=C;
Kss_x=K_ss;
Kps_x=K_ps;

portico_Y
C_y=C;
Kss_y=K_ss;
Kps_y=K_ps;

portico_diagonales
C_d=C;
Kss_d=K_ss;
Kps_d=K_ps;

% Matrices de transformación de los pórticos:

A_p=[1 0 3; 1 0 -3; 0 1 -7.5; 0 1 -2.5; 0 1 2.5; 0 1 7.5];

```

```

AA=zeros(30,15);
for k=1:6
    for i=1:5
        ik=(k-1)*5+i;
        g_i=[3*i-2 3*i-1 3*i];
        AA(ik,g_i)=A_p(k,:);
    end
end

A_1=AA(1:5,:);
A_2=AA(6:10,:);
A_3=AA(11:15,:);
A_4=AA(16:20,:);
A_5=AA(21:25,:);
A_6=AA(26:30,:);

% Matriz de rigidez del edificio:

S=A_1'*C_x*A_1 + A_2'*C_x*A_2 + A_3'*C_d*A_3 + ...
  A_4'*C_y*A_4 + A_5'*C_y*A_5 + A_6'*C_y*A_6; % C_d en lugar de C_y en el eje 3

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Fuerza horizontal equivalente:

z=[3 6 9 12 15]';
m=10*15*6*ones(5,1)/9.8;
M=sum(m);
Z=15;
T_feq=0.047*Z^0.9;
I=1;
R=7;
Aa=0.25;
Av=0.25;
Fa=1.5;
Fv=1.5;
Sa_feq=1.2*Av*Fv*I/(R*T_feq);
k=0.75+0.5*T_feq;
g=9.8;
mz=m.*(z.^k);
h=mz*Sa_feq*g*M/sum(mz);

% Combinación de cargas: 30% en X, 100% en Y (NSR - A.3.6.3):
%      Momentos de torsión:

e_y=0.05*6*ones(5,1);
e_x=0.05*15*ones(5,1);
B=0.3*h.*e_y + h.*e_x;

%      Vector completo de cargas:

H=zeros(15,1);

```

```

g_x=1:3:13;
g_y=2:3:14;
g_b=3:3:15;
H(g_x)=0.3*h;
H(g_y)=h;
H(g_b)=B;

disp(H)

% Desplazamientos de los centros de masa:

U=S\H;

disp(U)

% Desplazamientos principales de los pórticos:

D_p1=A_1*U;
D_p2=A_2*U;
D_p3=A_3*U;
D_p4=A_4*U;
D_p5=A_5*U;
D_p6=A_6*U;

disp([D_p1 D_p2 D_p3 D_p4 D_p5 D_p6])

% Desplazamientos secundarios:

D_s1=-Kss_x\'(Kps_x'*D_p1);
D_s2=-Kss_x\'(Kps_x'*D_p2);
D_s3=-Kss_d\'(Kps_d'*D_p3);      % pórtico con diagonales: usa Kss_d, Kps_d
D_s4=-Kss_y\'(Kps_y'*D_p4);
D_s5=-Kss_y\'(Kps_y'*D_p5);
D_s6=-Kss_y\'(Kps_y'*D_p6);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%
% Análisis modal
%

m=10*15*6*ones(5,1)/9.8;
mr(1:5)=m(1:5)*(15^2+6^2)/12;
Masa=diag([m(1) m(1) mr(1) m(2) m(2) mr(2) m(3) m(3) mr(3)...
           m(4) m(4) mr(4) m(5) m(5) mr(5)]);
[Phi,Omega]=dmodos(Masa,S);
T=2*pi./Omega;      % Vector de periodos de los modos

disp(T)
disp(Phi)

% Masas participantes (NSR - A.5.4.2):

```

```

Mpart_x=zeros(15,1);
Mpart_y=zeros(15,1);
mu=diag(Masa);
mux=mu(g_x);
muy=mu(g_y);

Phix=Phi(g_x,:);
Phiy=Phi(g_y,:);

for j=1:15
    Mpart_x(j)=(mux'*Phix(:,j))^2;
    Mpart_y(j)=(muy'*Phiy(:,j))^2;
end

% Porcentajes acumulados de participación:

Part_x=cumsum(Mpart_x)/M;
Part_y=cumsum(Mpart_y)/M;

disp([Mpart_x Mpart_y])
disp([Part_x Part_y])

% Cargas por análisis dinámico
% Ordenadas espectrales:

T0=0.1*Av*Fv/(Aa*Fa);
Tc=0.48*Av*Fv/(Aa*Fa);
Tl=2.4*Fv;
Sa=zeros(size(T));
for i=1:15
    if T(i)<=T0
        Sa(i)=2.5*Aa*Fa*I*(0.4+0.6*T(i)/T0)/R;
    elseif T(i) <=Tc
        Sa(i)=2.5*Aa*Fa*I/R;
    elseif T(i) > Tc && T(i)<= Tl
        Sa(i)=1.2*Av*Fv*I/(R*T(i));
    elseif T(i) > Tl
        Sa(i)=1.2*Av*Fv*Tl*I/(R*T(i)^2);
    end
end

Sa=Sa*g;

% Vector r de la combinación bajo análisis:

rx=zeros(15,1);
ry=zeros(15,1);
rx(g_x)=0.3;
ry(g_y)=1;
r=rx+ry;

F=zeros(size(Phi));

```

```

q=zeros(size(T));
for j=1:15
    q(j)=Phi(:,j)'*Masa*r/(Phi(:,j)'*Masa*Phi(:,j));    % factores de participación modal
    F(:,j)=Masa*Phi(:,j)*q(j)*Sa(j);
end

% Fuerzas finales - Método RCSC (NSR-10 A.5.4.4)

Fsrss=zeros(15,1);
for k=1:15
    for i=1:15
        Fsrss(k)=Fsrss(k)+F(k,i)^2;
    end
end
%
Fsrss=sqrt(Fsrss);
disp(Fsrss)

Fx=Fsrss(g_x);                %                      en X
Fy=Fsrss(g_y);                %                      en Y
Bsrss=Fsrss(g_b);              % Pares torsores
Ba_srss=Fx.*e_y + Fy.*e_x;     % Torsión accidental adicional (opcional - NSR-10 A.3.6.7)
Btotal_srss = Bsrss + Ba_srss;
Facc=zeros(15,1);
Facc(g_b)=Ba_srss;
Fsrss=Fsrss+Facc;

%                      Método CQC (Combinación cuadrática total)

xsi=0.05;
rho=zeros(size(Phi));
for i=1:15
    for j=1:15
        beta=Omega(i)/Omega(j);
        rho(i,j)=8*xsi^2*(1+beta)*beta^1.5/((1-beta^2)^2+4*xsi^2*beta*(1+beta)^2);
    end
end

Fcqc=zeros(15,1);
for k=1:15
    for i=1:15
        for j=1:15
            Fcqc(k)=Fcqc(k)+rho(i,j)*F(k,i)*F(k,j);
        end
    end
end

Fcqc=sqrt(Fcqc);
Px=Fcqc(g_x);                %                      en X
Py=Fcqc(g_y);                %                      en Y
Bcqc=Fcqc(g_b);              % Pares torsores
Ba_cqc=Px.*e_y + Py.*e_x;     % Torsión accidental adicional (opcional - NSR A.3.6.7)
Btotal_cqc = Bcqc + Ba_cqc;

```

```

Facc=zeros(15,1);
Facc(g_b)=Ba_cqc;
Fcqc=Fcqc+Facc;

disp([H Fsrss Fcqc])

```

C.16. Programa grafedif.m

```

function a=grafedif(U)
%
% Dibuja un esquema de desplazamientos del edificio
% U: vector de desplazamientos o matriz modal

% a=building_plot(U)
% a=building_plot(Phi)
%
%
a=1;
X=[0 0; 15 0; 15 6; 0 6];
Xcg=[7.5 3];
Z=3:3:15;

[n,m]=size(U);
ffd=50; % factor de escala para desplazamiento
ffr=50; % factor de escala para rotación
np=n/3;
Q=zeros(size(X));
for j=1:m
    subplot(5,3,j)
    title(['Modo',num2str(j)])
    for k=1:np
        for i=1:4
            ux=U((k-1)*3+1,j);
            uy=U((k-1)*3+2,j);
            ur=U((k-1)*3+3,j);
            Q(i,1)=X(i,1)+(ffd*ux-ffr*ur*(X(i,2)-Xcg(2)));
            Q(i,2)=X(i,2)+(ffd*uy+ffr*ur*(X(i,1)-Xcg(1)));
        end
        Q=Q';
        xq=Q(1,:);
        yq=Q(2,:);
        line([xq(1) xq(2)], [yq(1) yq(2)], [Z(k) Z(k)])
        line([xq(2) xq(3)], [yq(2) yq(3)], [Z(k) Z(k)])
        line([xq(3) xq(4)], [yq(3) yq(4)], [Z(k) Z(k)])
        line([xq(4) xq(1)], [yq(4) yq(1)], [Z(k) Z(k)])
        view(3)
        hold on
    end
end
end

```


C.17. Ejemplo 5.7

```

% Pórtico con carga vertical asimétrica.
% Análisis en dos fases (restricción lateral más carga lateral)

% Módulo de elasticidad:

E=2e8;

% Áreas, inercias y longitudes:

A=0.0252;
I=0.0014;
l_1=6;
l_2=8;
l_3=6;

% Matrices de rigidez en coordenadas locales:

k_1=zeros(6,6);
l=l_1;
k_1(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_1(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_1(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_1(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_1(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_1(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

k_2=zeros(6,6);
l=l_2;
k_2(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_2(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_2(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_2(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_2(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_2(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

k_3=zeros(6,6);
l=l_3;
k_3(1,:)=E*A*[ 1/l      0      0      -1/l      0      0];
k_3(2,:)=E*I*[ 0      12/l^3      6/l^2      0      -12/l^3      6/l^2];
k_3(3,:)=E*I*[ 0      6/l^2      4/l      0      -6/l^2      2/l];
k_3(4,:)=E*A*[-1/l      0      0      1/l      0      0];
k_3(5,:)=E*I*[ 0      -12/l^3      -6/l^2      0      12/l^3      -6/l^2];
k_3(6,:)=E*I*[ 0      6/l^2      2/l      0      -6/l^2      4/l];

% Matriz de rigidez de la estructura:

K=zeros(12,12);

```

```

g_1=[1 2 3 4 5 6];
beta=90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_1= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_1=T_1'*k_1*T_1;
DeltaK_1=zeros(12,12);
DeltaK_1(g_1,g_1)=K_1;
K=K+DeltaK_1;

g_2=[4 5 6 7 8 9];
beta=0;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_2= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_2=T_2'*k_2*T_2;
DeltaK_2=zeros(12,12);
DeltaK_2(g_2,g_2)=K_2;
K=K+DeltaK_2;

g_3=[7 8 9 10 11 12];
beta=-90;
eta=cosd(beta); mu=sind(beta);
T_3= [ eta mu 0 0 0 0;...
      -mu eta 0 0 0 0;...
      0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 eta mu 0;...
      0 0 0 -mu eta 0;...
      0 0 0 0 0 1];
K_3=T_3'*k_3*T_3;
DeltaK_3=zeros(12,12);
DeltaK_3(g_3,g_3)=K_3;
K=K+DeltaK_3;

%display(K)

% Vector de fuerzas de empotramiento:

Q=160;
c=3;
d=5;

r_2=[0;
     Q*d^2*(3*c+d)/1_2^3;

```

```

    Q*c*d^2/l_2^2;
    0;
    Q*c^2*(3*d+c)/l_2^3;
    -Q*d*c^2/l_2^2];

R_2=r_2;

display(R_2)

DeltaR_2=zeros(12,1);
DeltaR_2(g_2)=R_2;

R=DeltaR_2;

% Fase 1

a=[1 2 3 7 10 11 12]'; b=[4 5 6 8 9]';
K_ab=K(a,b);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(12,1);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
D_b=K_bb\ (P_b-R_b);
D_r=zeros(12,1);
D_r(b)=D_b;
P_ar=K_ab*D_r(b)+R(a);

% Fase 2

h= P_ar(4);
P=[0 0 0 0 0 0 -h 0 0 0 0 0]';

a=[1 2 3 10 11 12]'; b=[4 5 6 7 8 9]';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P_b=P(b);
R_b=R(b);
D_b=K_bb\ P_b;

D_h=zeros(12,1);
D_h(b)=D_b;

D=D_r+D_h;
P_a=K_ab*D(b)+R(a);

display(D)
display(P_a)

```

```
% Axiales, cortantes y momentos en los elementos:

D_1=D(g_1);
p_1=k_1*T_1*D_1;

D_2=D(g_2);
p_2=k_2*T_2*D_2+r_2;

D_3=D(g_3);
p_3=k_3*T_3*D_3;

display(p_1)
display(p_2)
display(p_3)
```

C.18. Ejemplo 6.1

```
% Pórtico espacial

% Módulo de elasticidad:

E=2e8;
G=9e6;

% Areas y momentos de inercia:

A=2e-2;
Iy=1e-4;
Iz=2e-4;
J=5e-5;

% Coordenadas de los nodos:

XYZ=[0 0 0; 8 0 0; 8 6 0; 0 6 0; ...
      0 0 5; 8 0 5; 8 6 5; 0 6 5];

x=XYZ(:,1);
y=XYZ(:,2);
z=XYZ(:,3);

% Topología:

IJ=[1 5; 2 6; 3 7; 4 8; 5 6; 6 7; 7 8; 5 8];

% Dibujo de la estructura:

figure
for e=1:8
    Q=[XYZ(IJ(e,1),1) XYZ(IJ(e,1),2) XYZ(IJ(e,1),3);...
```

```

        XYZ(IJ(e,2),1) XYZ(IJ(e,2),2) XYZ(IJ(e,2),3)];
    plot3(Q(:,1),Q(:,2),Q(:,3),'-b')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
axis equal

% Longitudes de todas las barras

l=zeros(8,1);

for e=1:8
    l(e)=sqrt((x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))^2 +(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))^2+(z(IJ(e,2))-z(IJ(e,1)))^2);
end

% Matriz de rigidez:

K=zeros(48,48);

for e=1:8
    L=l(e);
    x1=x(IJ(e,1));
    x2=x(IJ(e,2));
    y1=y(IJ(e,1));
    y2=y(IJ(e,2));
    z1=z(IJ(e,1));
    z2=z(IJ(e,2));
    if x1==x2 && y1==y2 % para elementos paralelos a Z
        if z2 > z1
            t=[0 0 1; 0 1 0;-1 0 0];
        else
            t=[0 0 -1; 0 1 0;1 0 0];
        end
    else
        Xx=(x2-x1)/L;
        Yx=(y2-y1)/L;
        Zx=(z2-z1)/L;
        Q=sqrt(Xx^2+Yx^2);
        Xy=-Yx/Q;
        Yy=Xx/Q;
        Zy=0;
        Xz=-Xx*Zx/Q;
        Yz=-Yx*Zx/Q;
        Zz=Q;
        t=[Xx Yx Zx; Xy Yy Zy; Xz Yz Zz];
    end
end

%
if e==1 || e==5 || e==8 % Muestra la matriz t para
    disp(e) % elementos paralelos a los ejes Z, X, Y:
    disp(t)
end

```

```

T_e=blkdiag(t,t,t,t);
kii=zeros(6,6);
kii(1,:)= E*A*[1/L 0 0 0 0 0];
kii(2,:)=E*Iz*[0 12/L^3 0 0 0 6/L^2];
kii(3,:)=E*Iy*[0 0 12/L^3 0 -6/L^2 0];
kii(4,:)= G*J*[0 0 0 1/L 0 0];
kii(5,:)=E*Iy*[0 0 -6/L^2 0 4/L 0];
kii(6,:)=E*Iz*[0 6/L^2 0 0 0 4/L];
kij=zeros(6,6);
kij(1,:)= E*A*[-1/L 0 0 0 0 0];
kij(2,:)=E*Iz*[0 -12/L^3 0 0 0 6/L^2];
kij(3,:)=E*Iy*[0 0 -12/L^3 0 -6/L^2 0];
kij(4,:)= G*J*[0 0 0 -1/L 0 0];
kij(5,:)=E*Iy*[0 0 6/L^2 0 2/L 0];
kij(6,:)=E*Iz*[0 -6/L^2 0 0 0 2/L];
kjj=zeros(6,6);
kjj(1,:)= E*A*[1/L 0 0 0 0 0];
kjj(2,:)=E*Iz*[0 12/L^3 0 0 0 -6/L^2];
kjj(3,:)=E*Iy*[0 0 12/L^3 0 6/L^2 0];
kjj(4,:)= G*J*[0 0 0 1/L 0 0];
kjj(5,:)=E*Iy*[0 0 6/L^2 0 4/L 0];
kjj(6,:)=E*Iz*[0 -6/L^2 0 0 0 4/L];
kji=kij';
k_e=[kii kij; kji kjj];
K_e=T_e'*k_e*T_e;
g_e=[6*IJ(e,1)-5 6*IJ(e,1)-4 6*IJ(e,1)-3 6*IJ(e,1)-2 6*IJ(e,1)-1 6*IJ(e,1) ...
      6*IJ(e,2)-5 6*IJ(e,2)-4 6*IJ(e,2)-3 6*IJ(e,2)-2 6*IJ(e,2)-1 6*IJ(e,2)];
DeltaK_e=zeros(48,48);
DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
K=K+DeltaK_e;
end

% Cálculo de desplazamientos y reacciones:

a=(1:24)'; b=(25:48)';
K_aa=K(a,a);
K_ab=K(a,b);
K_ba=K(b,a);
K_bb=K(b,b);
P=zeros(48,1);
P(38)=25;
P_b=P(b);
D_b=K_bb\ P_b;
P_a=K_ab*D_b;

D=zeros(48,1);
D(b)=D_b;

display(D_b)

% Fuerzas internas en las barras:

for e=1:8

```

```

L=l(e);
x1=x(IJ(e,1));
x2=x(IJ(e,2));
y1=y(IJ(e,1));
y2=y(IJ(e,2));
z1=z(IJ(e,1));
z2=z(IJ(e,2));
if x1==x2 && y1==y2
    if z2 > z1
        t=[0 0 1; 0 1 0;-1 0 0];
    else
        t=[0 0 -1; 0 1 0;1 0 0];
    end
else
    Xx=(x2-x1)/L;
    Yx=(y2-y1)/L;
    Zx=(z2-z1)/L;
    Q=sqrt(Xx^2+Yx^2);
    Xy=-Yx/Q;
    Yy=Xx/Q;
    Zy=0;
    Xz=-Xx*Zx/Q;
    Yz=-Yx*Zx/Q;
    Zz=Q;
    t=[Xx Yx Zx; Xy Yy Zy; Xz Yz Zz];
end
%
T_e=blkdiag(t,t,t,t);
kii=zeros(6,6);
kii(1,:)=E*A*[1/L 0 0 0 0 0];
kii(2,:)=E*Iz*[0 12/L^3 0 0 0 6/L^2];
kii(3,:)=E*Iy*[0 0 12/L^3 0 -6/L^2 0];
kii(4,:)=G*J*[0 0 0 1/L 0 0];
kii(5,:)=E*Iy*[0 0 -6/L^2 0 4/L 0];
kii(6,:)=E*Iz*[0 6/L^2 0 0 0 4/L];
kij=zeros(6,6);
kij(1,:)=E*A*[-1/L 0 0 0 0 0];
kij(2,:)=E*Iz*[0 -12/L^3 0 0 0 6/L^2];
kij(3,:)=E*Iy*[0 0 -12/L^3 0 -6/L^2 0];
kij(4,:)=G*J*[0 0 0 -1/L 0 0];
kij(5,:)=E*Iy*[0 0 6/L^2 0 2/L 0];
kij(6,:)=E*Iz*[0 -6/L^2 0 0 0 2/L];
kjj=zeros(6,6);
kjj(1,:)=E*A*[1/L 0 0 0 0 0];
kjj(2,:)=E*Iz*[0 12/L^3 0 0 0 -6/L^2];
kjj(3,:)=E*Iy*[0 0 12/L^3 0 6/L^2 0];
kjj(4,:)=G*J*[0 0 0 1/L 0 0];
kjj(5,:)=E*Iy*[0 0 6/L^2 0 4/L 0];
kjj(6,:)=E*Iz*[0 -6/L^2 0 0 0 4/L];
kji=kij';
k_e=[kii kij; kji kjj];
K_e=T_e'*k_e*T_e;
g_e=[6*IJ(e,1)-5 6*IJ(e,1)-4 6*IJ(e,1)-3 6*IJ(e,1)-2 6*IJ(e,1)-1 6*IJ(e,1) ...

```

```

        6*IJ(e,2)-5 6*IJ(e,2)-4 6*IJ(e,2)-3 6*IJ(e,2)-2 6*IJ(e,2)-1 6*IJ(e,2)];
D_e=D(g_e);
P_e=K_e*D_e;
disp(e)
disp(P_e)
end
%
```

C.19. Ejemplo 6.2

```

% Pórtico espacial con diafragma rígido
%
%
% Módulo de elasticidad:

E=2e8;
G=9e6;

% Areas y momentos de inercia:

A=2e-2;
Iy=1e-4;
Iz=2e-4;
J=5e-5;

% Coordenadas de los nodos:

XYZ=[0 0 0; 8 0 0; 8 6 0; 0 6 0; ...
      0 0 5; 8 0 5; 8 6 5; 0 6 5];

x=XYZ(:,1);
y=XYZ(:,2);
z=XYZ(:,3);

% Topología:

IJ=[1 5; 2 6; 3 7; 4 8; 5 6; 6 7; 7 8; 5 8];

% Dibujo de la estructura:

figure
for e=1:8
    Q=[XYZ(IJ(e,1),1) XYZ(IJ(e,1),2) XYZ(IJ(e,1),3);...
        XYZ(IJ(e,2),1) XYZ(IJ(e,2),2) XYZ(IJ(e,2),3)];
    plot3(Q(:,1),Q(:,2),Q(:,3),'-b')
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
```



```

axis equal

% Longitudes de todas las barras

l=zeros(8,1);

for e=1:8
    l(e)=sqrt((x(IJ(e,2))-x(IJ(e,1)))^2 +(y(IJ(e,2))-y(IJ(e,1)))^2+(z(IJ(e,2))-z(IJ(e,1)))^2);
end
%
% Nodo maestro:
%
xm=4; ym=3;
%
% Matrices de rigidez:

K=zeros(48,48);
S=zeros(12,12);
%
% Columnas:
%
for e=1:4
    L=l(e);
    x1=x(IJ(e,1));
    x2=x(IJ(e,2));
    y1=y(IJ(e,1));
    y2=y(IJ(e,2));
    z1=z(IJ(e,1));
    z2=z(IJ(e,2));
    if x1==x2 && y1==y2 % para elementos paralelos a Z
        if z2 > z1
            t=[0 0 1; 0 1 0;-1 0 0];
        else
            t=[0 0 -1; 0 1 0;1 0 0];
        end
    else
        Xx=(x2-x1)/L;
        Yx=(y2-y1)/L;
        Zx=(z2-z1)/L;
        Q=sqrt(Xx^2+Yx^2);
        Xy=-Yx/Q;
        Yy=Xx/Q;
        Zy=0;
        Xz=-Xx*Zx/Q;
        Yz=-Yx*Zx/Q;
        Zz=Q;
        t=[Xx Yx Zx; Xy Yy Zy; Xz Yz Zz];
    end
end
%
T_e=blkdiag(t,t,t,t);
kii=zeros(6,6);
kii(1,:)=E*A*[1/L 0 0 0 0 0];
kii(2,:)=E*Iz*[0 12/L^3 0 0 0 6/L^2];

```

```

kii(3,:)=E*Iy*[0    0    12/L^3    0   -6/L^2    0];
kii(4,:)= G*J*[0    0    0    1/L    0    0];
kii(5,:)=E*Iy*[0    0   -6/L^2    0    4/L    0];
kii(6,:)=E*Iz*[0    6/L^2    0    0    0    4/L];
kij=zeros(6,6);
kij(1,:)= E*A*[-1/L 0    0    0    0    0];
kij(2,:)=E*Iz*[0   -12/L^3 0    0    0  6/L^2];
kij(3,:)=E*Iy*[0    0   -12/L^3 0   -6/L^2    0];
kij(4,:)= G*J*[0    0    0   -1/L    0    0];
kij(5,:)=E*Iy*[0    0    6/L^2    0    2/L    0];
kij(6,:)=E*Iz*[0   -6/L^2 0    0    0    2/L];
kjj=zeros(6,6);
kjj(1,:)= E*A*[1/L 0    0    0    0    0];
kjj(2,:)=E*Iz*[0   12/L^3 0    0    0   -6/L^2];
kjj(3,:)=E*Iy*[0    0    12/L^3 0    6/L^2    0];
kjj(4,:)= G*J*[0    0    0    1/L    0    0];
kjj(5,:)=E*Iy*[0    0    6/L^2    0    4/L    0];
kjj(6,:)=E*Iz*[0   -6/L^2 0    0    0    4/L];
kji=kij';
k_e=[kii kij; kji kjj];
K_e=T_e'*k_e*T_e;
g_e=[6*IJ(e,1)-5 6*IJ(e,1)-4 6*IJ(e,1)-3 6*IJ(e,1)-2 6*IJ(e,1)-1 6*IJ(e,1) ...
      6*IJ(e,2)-5 6*IJ(e,2)-4 6*IJ(e,2)-3 6*IJ(e,2)-2 6*IJ(e,2)-1 6*IJ(e,2)];
DeltaK_e=zeros(48,48);
DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
K=K+DeltaK_e;
%
%   restricciones por nodo maestro
%
q=eye(6);
q(1,6)=-(y(IJ(e,2))-ym);
q(2,6)=(x(IJ(e,2))-xm);
B_e=[q zeros(6,6);zeros(6,6) q];
S_e=B_e'*K_e*B_e;
g_e=1:12;
DeltaS_e=zeros(12,12);
DeltaS_e(g_e,g_e)=S_e;
S=S+DeltaS_e;
end
%
% Vigas:
%
for e=5:8
    L=l(e);
    x1=x(IJ(e,1));
    x2=x(IJ(e,2));
    y1=y(IJ(e,1));
    y2=y(IJ(e,2));
    z1=z(IJ(e,1));
    z2=z(IJ(e,2));
    if x1==x2 && y1==y2    % para elementos paralelos a Z
        if z2 > z1
            t=[0 0 1; 0 1 0;-1 0 0];

```

```

else
    t=[0 0 -1; 0 1 0;1 0 0];
end
else
    Xx=(x2-x1)/L;
    Yx=(y2-y1)/L;
    Zx=(z2-z1)/L;
    Q=sqrt(Xx^2+Yx^2);
    Xy=-Yx/Q;
    Yy=Xx/Q;
    Zy=0;
    Xz=-Xx*Zx/Q;
    Yz=-Yx*Zx/Q;
    Zz=Q;
    t=[Xx Yx Zx; Xy Yy Zy; Xz Yz Zz];
end
T_e=blkdiag(t,t,t,t);
kii=zeros(6,6);
kii(1,:)= E*A*[1/L 0 0 0 0 0];
kii(2,:)=E*Iz*[0 12/L^3 0 0 0 6/L^2];
kii(3,:)=E*Iy*[0 0 12/L^3 0 -6/L^2 0];
kii(4,:)= G*J*[0 0 0 1/L 0 0];
kii(5,:)=E*Iy*[0 0 -6/L^2 0 4/L 0];
kii(6,:)=E*Iz*[0 6/L^2 0 0 0 4/L];
kij=zeros(6,6);
kij(1,:)= E*A*[-1/L 0 0 0 0 0];
kij(2,:)=E*Iz*[0 -12/L^3 0 0 0 6/L^2];
kij(3,:)=E*Iy*[0 0 -12/L^3 0 -6/L^2 0];
kij(4,:)= G*J*[0 0 0 -1/L 0 0];
kij(5,:)=E*Iy*[0 0 6/L^2 0 2/L 0];
kij(6,:)=E*Iz*[0 -6/L^2 0 0 0 2/L];
kjj=zeros(6,6);
kjj(1,:)= E*A*[1/L 0 0 0 0 0];
kjj(2,:)=E*Iz*[0 12/L^3 0 0 0 -6/L^2];
kjj(3,:)=E*Iy*[0 0 12/L^3 0 6/L^2 0];
kjj(4,:)= G*J*[0 0 0 1/L 0 0];
kjj(5,:)=E*Iy*[0 0 -6/L^2 0 4/L 0];
kjj(6,:)=E*Iz*[0 -6/L^2 0 0 0 4/L];
kji=kij';
k_e=[kii kij; kji kjj];
K_e=T_e'*k_e*T_e;
g_e=[6*IJ(e,1)-5 6*IJ(e,1)-4 6*IJ(e,1)-3 6*IJ(e,1)-2 6*IJ(e,1)-1 6*IJ(e,1) ...
    6*IJ(e,2)-5 6*IJ(e,2)-4 6*IJ(e,2)-3 6*IJ(e,2)-2 6*IJ(e,2)-1 6*IJ(e,2)];
DeltaK_e=zeros(48,48);
DeltaK_e(g_e,g_e)=K_e;
K=K+DeltaK_e;
%
% restricciones por nodo maestro
%
qi=eye(6);
qi(1,6)=-(y(IJ(e,1))-ym);
qi(2,6)=(x(IJ(e,1))-xm);
qj=eye(6);

```

```

    qj(1,6)=-(y(IJ(e,2))-ym);
    qj(2,6)=(x(IJ(e,2))-xm);
    B_e=[qi; qj];
    S_e=B_e'*K_e*B_e;
    g_e=7:12;
    DeltaS_e=zeros(12,12);
    DeltaS_e(g_e,g_e)=S_e;
    S=S+DeltaS_e;
end
%
%
% Desplazamientos del nodo maestro:

m=(7:12)';
S_mm=S(m,m);
H=zeros(12,1);
H(7)=30;
H(8)=100;
H(12)=0.4*H(8)+0.3*H(7);
H_m=H(m);
U=S_mm\H_m;
disp(U)
U_m=[U(1);U(2);U(6)];

display(U)
display(U_m)

% Desplazamientos de los nodos:

D_p=zeros(12,1);
p=zeros(12,1);
s=zeros(12,1);
kk=0;
for i=5:8
    kk=kk+3;
    q=eye(3);
    q(1,3)=-(XYZ(i,2))-ym);
    q(2,3)=(XYZ(i,1))-xm);
    d=q*U_m;
    disp(i)
    display(d)
    pp=[6*i-5 6*i-4 6*i];
    p(kk-2:kk,1)=pp;
    D_p(kk-2:kk,1)=d;
    ss=[6*i-3 6*i-2 6*i-1];
    s(kk-2:kk,1)=ss;
end

disp(p)
disp(s)

K_ss=K(s,s);
K_sp=K(s,p);

```

```

D_s=-inv(K_ss)*K_sp*D_p;

D=zeros(48,1);
D(p)=D_p;
D(s)=D_s;

a=(1:24)'; b=(25:48)';
D_b=D(b);
K_ab=K(a,b);
P_a=K_ab*D_b;

disp(D_b)

% Fuerzas internas en las barras:

Pint=zeros(12,8);
for e=1:8
    L=l(e);
    x1=x(IJ(e,1));
    x2=x(IJ(e,2));
    y1=y(IJ(e,1));
    y2=y(IJ(e,2));
    z1=z(IJ(e,1));
    z2=z(IJ(e,2));
    if x1==x2 && y1==y2
        if z2 > z1
            t=[0 0 1; 0 1 0;-1 0 0];
        else
            t=[0 0 -1; 0 1 0;1 0 0];
        end
    else
        Xx=(x2-x1)/L;
        Yx=(y2-y1)/L;
        Zx=(z2-z1)/L;
        Q=sqrt(Xx^2+Yx^2);
        Xy=-Yx/Q;
        Yy=Xx/Q;
        Zy=0;
        Xz=-Xx*Zx/Q;
        Yz=-Yx*Zx/Q;
        Zz=Q;
        t=[Xx Yx Zx; Xy Yy Zy; Xz Yz Zz];
    end
end

%
T_e=blkdiag(t,t,t,t);
kii=zeros(6,6);
kii(1,:)=E*A*[1/L 0 0 0 0 0];
kii(2,:)=E*Iz*[0 12/L^3 0 0 0 6/L^2];
kii(3,:)=E*Iy*[0 0 12/L^3 0 -6/L^2 0];
kii(4,:)=G*J*[0 0 0 1/L 0 0];
kii(5,:)=E*Iy*[0 0 -6/L^2 0 4/L 0];
kii(6,:)=E*Iz*[0 6/L^2 0 0 0 4/L];
kij=zeros(6,6);

```

```

kij(1,:)= E*A*[-1/L 0 0 0 0];
kij(2,:)=E*Iz*[0 -12/L^3 0 0 0 6/L^2];
kij(3,:)=E*Iy*[0 0 -12/L^3 0 -6/L^2 0];
kij(4,:)= G*J*[0 0 0 -1/L 0 0];
kij(5,:)=E*Iy*[0 0 6/L^2 0 2/L 0];
kij(6,:)=E*Iz*[0 -6/L^2 0 0 0 2/L];
kjj=zeros(6,6);
kjj(1,:)= E*A*[1/L 0 0 0 0 0];
kjj(2,:)=E*Iz*[0 12/L^3 0 0 0 -6/L^2];
kjj(3,:)=E*Iy*[0 0 12/L^3 0 6/L^2 0];
kjj(4,:)= G*J*[0 0 0 1/L 0 0];
kjj(5,:)=E*Iy*[0 0 6/L^2 0 4/L 0];
kjj(6,:)=E*Iz*[0 -6/L^2 0 0 0 4/L];
kji=kij';
k_e=[kii kij; kji kjj];
K_e=T_e'*k_e*T_e;
g_e=[6*IJ(e,1)-5 6*IJ(e,1)-4 6*IJ(e,1)-3 6*IJ(e,1)-2 6*IJ(e,1)-1 6*IJ(e,1) ...
      6*IJ(e,2)-5 6*IJ(e,2)-4 6*IJ(e,2)-3 6*IJ(e,2)-2 6*IJ(e,2)-1 6*IJ(e,2)];
D_e=D(g_e);
P_e=K_e*D_e;
disp(e)
disp(P_e)
Pint(:,e)=P_e;
end
%
disp(Pint(:,1:4));
disp(Pint(:,5:8));

```