

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA MADRE Y MAESTRA
Santiago de los Caballeros
Republica Dominicana

SEMINARIO DE INGENIERÍA SÍSMICA
Mayo 30 a Junio 3 de 2005

NOTAS DE CLASE

Profesores:

Eduardo A. Fierro P.E.
Wiss Janney Elstner Associates, Inc.
Emeryville, California
USA

Luis Enrique García Reyes
Departamento de Ingeniería Civil
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia

2005

PROGRAMA

Sesión Nº	Tema	Página
1	Conceptos básicos de dinámica	1
2	Sistemas lineales no amortiguados de un grado de libertad	11
3	Sistemas lineales amortiguados de un grado de libertad	17
4	Vibraciones forzadas armónicas y vibraciones transitorias	23
5	Excitación en la base	31
6	Obtención de la respuesta dinámica	34
7	Sismos, sismogramas y acelerogramas	41
8	Espectros de respuesta	56
9	Sistemas inelásticos de un grado de libertad	71
10	Ductilidad y disipación de energía en el rango inelástico	87
11	Movimiento sísmicos de diseño	101
12	Repaso de análisis matricial	130
13	Igualación y condensación de grados de libertad	155
14	Ecuaciones de equilibrio dinámico	166
15	Idealización dinámica de la estructura	171
16	Idealización de la rigidez y acople estático y acople dinámico	181
17	Análisis modal y desacoplaje de las ecuaciones de movimiento	218
18	Métodos numéricos para la obtención de los modos	237
19	Análisis modal contra el tiempo	247
20	Análisis modal espectral	285
	Bibliografía	319

Las presentes notas son un compendio del libro “Dinámica Estructural Aplicada al Diseño Sísmico”, de Luis E. García, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 1998, 574 pp. Al hacer el compendio se ha mantenido la numeración original de las secciones del libro. Por lo tanto si aparece alguna referencia cruzada a secciones que no están dentro del compendio, ésta debe consultarse en el documento original.

La reproducción de este material se ha autorizado únicamente para ser distribuido a los asistentes al Seminario de Ingeniería Sísmica que tendrá lugar en la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, Santiago de los Caballeros, República Dominicana.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin la autorización escrita del autor.

Derechos Reservados.

Copyright © 1998 por: Luis Enrique García Reyes

Copyright © 1998 por: Universidad de los Andes

Carrera 20 N° 84-14 Piso 7, Bogotá, Colombia

ISBN: 958-33-0768-8

Mayo de 2005

El libro “Dinámica Estructural Aplicada al Diseño Sísmico” se puede obtener a través de la Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, Carrera 20 N° 84-14, Of. 502, Bogotá, Colombia, Teléfono (Int+57+1) 530-0826, Fax (Int+57+1) 530-0826, e-mail: ais@uniandes.edu.co

Tema N° 1 — Conceptos básicos de dinámica

1.1 — Introducción

La dinámica, dentro del contexto de la mecánica, es el estudio de los cuerpos, o conjuntos de partículas, en movimiento. La dinámica se divide en dos campos: la *cinemática*, la cual estudia la geometría del movimiento, relacionando el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el tiempo, sin hacer referencia a las causas del movimiento; y la *cinética*, la cual estudia la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, la masa del cuerpo y su movimiento, permitiendo predecir los movimientos que causan las fuerzas, o determinar las fuerzas necesarias para producir un movimiento dado.

Cuando un cuerpo se desplaza de una posición de equilibrio estable, el cuerpo tiende a volver a esta posición al verse afectado por la acción de fuerzas que tienden a restablecer la situación de equilibrio. En general en el instante que el cuerpo vuelve a su posición de equilibrio tiene alguna velocidad que lo lleva más allá de esa posición, presentándose una oscilación alrededor del punto de equilibrio. Estas oscilaciones en el campo de la mecánica se denominan *vibraciones mecánicas*.

Si el cuerpo se considera como una unidad y se desprecian las deformaciones relativas entre sus diferentes partes se aplican los principios de la *dinámica de cuerpos rígidos*. Cuando es apropiado tener en cuenta los desplazamientos relativos entre las diferentes partes del cuerpo, se aplican los principios de la *dinámica de cuerpos flexibles*.

La *dinámica estructural* estudia las vibraciones de cuerpos flexibles, aunque en muchos casos las deformaciones relativas entre algunas partes de la estructura son de un orden de magnitud tan pequeño, que pueden aplicarse los principios de la dinámica de cuerpos rígidos en algunas porciones de la estructura.

1.2 — Leyes de Newton

Las leyes de Newton son el fundamento de la estática y de la dinámica, tanto de cuerpos rígidos como de cuerpos flexibles:

1ª Ley de Newton: *"Todo cuerpo permanece en su estado de reposo, o movimiento uniforme rectilíneo, a menos que sea obligado a cambiar ese estado debido a la aplicación de cualquier tipo de fuerzas."*

Esta primera ley de Newton se conoce también con el nombre de Ley de Inercia. Los marcos de referencia sobre los cuales se aplica son conocidos con el nombre de *marcos inerciales*. Estos marcos de referencia están fijos con respecto a una estrella distante, o se mueven a velocidad constante con respecto a ella. Es importante anotar también que la 1ª ley de Newton es válida tanto para cuerpos sobre los cuales no actúa ninguna fuerza, como para aquellos sobre los cuales actúan varias fuerzas cuya resultante es nula.

2ª Ley de Newton: *"La fuerza que actúa sobre un cuerpo y causa su movimiento, es igual a la tasa de cambio del momentum del cuerpo."*

Dado que el momentum Q , es igual a la masa del cuerpo por su velocidad, se puede expresar matemáticamente como:

$$Q = m v = m \frac{dx}{dt} = m \dot{x} \quad (1-1)$$

donde:

- Q = momentum del cuerpo
- m = masa del cuerpo
- v = velocidad del cuerpo
- x = desplazamiento del cuerpo o coordenada de localización del mismo

De acuerdo con la 2ª ley de Newton y bajo el supuesto de que la masa del cuerpo permanece constante, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son iguales a la tasa de cambio del momentum:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{mv}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{a} \quad (1-2)$$

donde:

\mathbf{F} = resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo

\mathbf{a} = aceleración del cuerpo

Por lo tanto la 2ª ley de Newton puede expresarse también como: *La resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración.*

Es importante anotar que la 1ª ley de Newton es un caso especial de la segunda ley, ya que si la aceleración es cero, entonces la resultante de las fuerzas también es igual a cero. En este caso el cuerpo está en reposo, o se mueve a una velocidad constante. La aceleración cero conduce a lo que llamamos *estática*, mientras que los casos de aceleración diferente de cero nos lleva al campo de la *dinámica*.

Con posterioridad a Newton, D'Alembert (1717-1783) sugirió que la ecuación (1-2) se escribiera de una manera similar a la ecuación de equilibrio en estática ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), en la forma que se conoce como principio de D'Alembert:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (1-3)$$

El principio de D'Alembert hace evidente que la denominada fuerza inercial ($m\mathbf{a}$) actúa en la dirección opuesta a la dirección de la aceleración del cuerpo.

3ª Ley de Newton: *"A toda acción se opone siempre una reacción de igual magnitud; o las acciones mutuas entre dos cuerpos son siempre iguales y opuestas."*

La 3ª ley de Newton permite extender las dos leyes anteriores a cuerpos compuestos por varios componentes o, cuando se fracciona un cuerpo en varias partes, a definir las fuerzas que obran sobre éstas. Este procedimiento se conoce como *cuerpo libre*, donde una fracción de un cuerpo se aísla de las otras partes y de esta manera se obtienen las fuerzas sobre los componentes. En el punto de aislamiento del cuerpo libre se tiene una fuerza de igual magnitud, pero opuesta en dirección, aplicada a cada una de las partes.

Las tres leyes de Newton son las bases sobre las cuales se desarrolla la dinámica de cuerpos rígidos y la dinámica estructural y se aplican repetidamente durante el desarrollo de la teoría de la dinámica estructural.

1.3 — Grados de libertad

El número de grados de libertad de un sistema, desde el punto de vista de la dinámica, corresponde al número mínimo de coordenadas necesarias para definir la posición en el espacio y en el tiempo de todas las partículas de masa del sistema. Cuando se trata de sistemas rígidos, en los cuales no puede haber desplazamiento relativo entre las partículas de masa, las propiedades de la masa se pueden describir referidas a su centro de masa. Esto conduce a lo que se conoce como sistemas de *masa concentrada*. Cuando la masa hace parte de un elemento flexible tenemos un sistema de *masa distribuida* y por consiguiente se puede hablar de un número infinito de grados de libertad.

Para aclarar estos conceptos, por ejemplo en una viga simplemente apoyada que está vibrando transversalmente, como indica la Figura 1-1(a), la masa proviene de la masa propia del material de la viga. Si se toma una longitud diferencial de la viga, Figura 1-1(b), esta longitud diferencial también tiene una masa diferencial. Para describir la posición de cada uno de estos elementos diferenciales de masa se necesita un número infinito de grados de libertad. Esto se resuelve por medio de una función matemática continua. Este mismo caso se puede visualizar acumulando porciones de la masa en

algunos puntos escogidos y tratándolas allí como varias masas concentradas, tal como se muestra en la Figura 1-1(c).

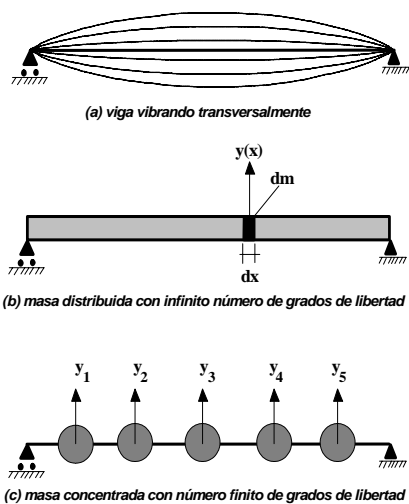


Figura 1-1 - Grados de libertad

La cantidad de lugares donde se concentre la masa va a depender de la precisión que se requiera en la solución del problema y de otros factores que se harán evidentes más adelante. Los sistemas de masa concentrada, en la medida que el número de puntos donde ésta se concentre se haga mayor, tienden en el límite a convertirse en sistemas continuos.

1.4 — Masa, peso y sistema de unidades

La *masa*, m , es una medida de la cantidad de materia. El *peso*, w , es una medida de la fuerza necesaria para impartir una aceleración dada a una masa. En la tierra, al nivel del mar, la aceleración que impone la gravedad del planeta se denomina g y tiene un valor aproximado de 9.81 m/s^2 ($= 9806.65 \text{ mm/s}^2$, por acuerdo internacional, para ser exactos). Por lo tanto el peso w que tiene una masa m en la tierra, al nivel del mar, es igual al producto $w = m g$.

Se ha escogido en la presentación el sistema internacional de medidas (SI), el cual por ser un sistema consistente de unidades, es el más apropiado para el trabajo en dinámica. Los ingenieros por muchos años utilizaron el sistema métrico tradicional, o sistema mks (metro-kilogramo-segundo), cuyas unidades son distancia, fuerza y tiempo. En este último sistema el kilogramo es una unidad de peso, correspondiente al peso de un litro de agua al nivel del mar, por esta razón es una unidad de fuerza que muchas veces se denomina kilogramo-fuerza (kgf). La tonelada dentro de este sistema corresponde también a una unidad de fuerza y tiene un valor de 1000 kgf. En el sistema SI las unidades son distancia, masa y tiempo. Como unidad de distancia se utiliza el metro (m), como unidad de masa el kilogramo (kg) y como unidad de tiempo el segundo (s). Dentro de este sistema la unidad de fuerza es el Newton (N), definido como la fuerza que impone una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de 1 kg.

El sistema SI se estableció en la Decimoprimer Conferencia Mundial de Pesos y Medidas, que tuvo lugar en Sevres, Francia, en 1960. El sistema está basado en siete unidades básicas, que son para longitud el metro (m), para masa el kilogramo (kg), para tiempo el segundo (s), para corriente eléctrica el amperio (A), para temperatura el kelvin (K), para intensidad luminosa el candela (cd) y para cantidad de sustancia el mol (mol). Estas unidades tienen definiciones físicas. Por ejemplo el metro (m) es la longitud de la trayectoria que viaja la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo equivalente a $1/299\,792\,458$ de segundo; y el kilogramo (kg) es igual a la masa de un prototipo internacional de iridio-platino, que conserva la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sevres, Francia. A continuación se presentan algunos conceptos básicos del sistema SI y se dan algunas conversiones que serán útiles para aquellas personas que no estén familiarizadas con él. Las unidades que se utilizan en el texto son las siguientes:

Unidades básicas:

distancia: el metro (m).

masa:	el kilogramo (kg).
tiempo:	el segundo (s).
<i>Unidades suplementarias:</i>	
ángulo plano:	el radian (rad)
<i>Unidades derivadas:</i>	
frecuencia:	el hertz (Hz) $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$
fuerza:	el newton (N) $1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$
esfuerzo:	el pascal (Pa) $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$
energía, trabajo	joule (J) $1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$

El sistema SI utiliza los siguientes prefijos: exa, E, (10^{18}); peta, P, (10^{15}); tera, T, (10^{12}); giga, G, (10^9); mega, M, (10^6); kilo, k, (10^3); mili, m, (10^{-3}); micro, μ , (10^{-6}); nano, n, (10^{-9}); pico, p, (10^{-12}); femto, f, (10^{-15}); y atto, a, (10^{-18}).

El sistema SI requiere que se diferencie claramente entre masa y peso, en lo cual se distingue de los sistemas de unidades “gravitacionales”. La masa de un cuerpo es independiente de su localización. Puede estar en el ecuador o en el polo, sumergido en agua, o en la Luna, y esto no afecta su masa pues la masa es la cantidad de materia que posee el cuerpo. La unidad de masa es el kilogramo (kg), la cual es igual a la del prototipo internacional (el cual tiene aproximadamente una masa igual a la de un decímetro cúbico, o sea un litro, de agua al nivel del mar). La atracción gravitacional de la tierra impone a un cuerpo en caída libre una aceleración g , cuyo valor varía aproximadamente del orden 0.5 por ciento sobre la superficie de la tierra, pero que se le ha dado un valor fijo estándar de $9.806\,650 \text{ m}/\text{s}^2$. Por lo tanto se requiere una fuerza de $9.806\,650 \text{ N}$ para sostener una masa de 1 kg sobre la superficie de la tierra, esto se conoce como el peso del cuerpo. Generalmente la masa de un cuerpo se obtiene pesándolo, o sea comparando la atracción gravitacional de la masa con la de otra conocida por medio de una balanza; de ahí la confusión común entre masa y peso. En el sistema métrico original se definió una unidad de fuerza equivalente a la que obtendría una masa unitaria al ser acelerada un g . Esta unidad se conoce como el kilogramo-fuerza (kgf) o kilopondio, y corresponde a $9.806\,65 \text{ N}$. Análogamente, para efectos de medir presión, o esfuerzo, en el sistema SI se utiliza el pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$), lo cual corresponde a valores relativamente pequeños, por esto se emplea el megapascal ($1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ N}/\text{m}^2$), el cual corresponde a $10.197 \text{ kgf}/\text{cm}^2$.

Con el fin de evitar confusión en el uso del sistema SI, existen las siguientes reglas aceptadas internacionalmente respecto a la sintaxis que debe emplearse:

- Nunca se intercambian minúsculas y mayúsculas: mm y no MM, o kg y no KG.
- Los símbolos no se alteran en el plural: kg, y no kgs.
- No se deja espacio entre el prefijo y el símbolo: MPa y no M Pa.
- No se agrega punto al final del símbolo, a menos que sea el punto final de una oración.
- Los símbolos no son abreviaturas, por lo tanto: Pa y no Pasc, m y no mts.
- En los productos de símbolos se utiliza un punto levantado: $\text{kN}\cdot\text{m}$.
- En los cocientes se utiliza un solo símbolo de división, o pueden utilizarse potencias negativas: $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$, o $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, pero no $\text{kg}/\text{m}/\text{s}$.
- Puede utilizarse punto, o coma, para indicar los decimales, dependiendo de la costumbre local. Esto significa que ninguno de los dos se debe utilizar para separar grupos de dígitos, para esto se utiliza un blanco. Ejemplo: $g = 9.806\,650 \text{ m}/\text{s}^2$.
- Para números menores que la unidad, no se omite el cero inicial: 0.123 y no $.123$.
- Debe haber siempre un espacio entre el número y las unidades: $12.3 \text{ m}/\text{s}$, excepto cuando se trata de grados celsius: 12°C .
- Las unidades cuyo nombre es el apellido de un científico, se emplean con mayúscula: N, Pa, etc., pero cuando se refiere a ellas no se utiliza la mayúscula: pascles, etc.

Nota: Para facilitar la solución de problemas de dinámica estructural, cuando se utiliza el sistema internacional de unidades (SI), se recomiendan dos alternativas: **(a)** emplear masas en Mg (megagramos = 1000 kg) y rigideces en kN/m donde $\text{kN}/\text{m} = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2 \cdot 1/\text{m} = 1000 \cdot \text{kg}/\text{s}^2$, o sea que son totalmente equivalentes pues las masas se van a multiplicar por aceleraciones en m/s^2 y las rigideces por m; o **(b)** emplear masas en kg y rigideces en N/m , caso en el cual dado que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$, las cuales también son equivalentes.

1.5 — Rigidez

Todo cuerpo elástico que sea sometido a fuerzas externas, ya sean estáticas o dinámicas, sufre una deformación. La rigidez se define como la relación entre estas fuerzas externas y las deformaciones que ellas inducen en el cuerpo. El caso más simple corresponde a un resorte helicoidal, como el que se muestra esquemáticamente en la Figura 1-2(a).

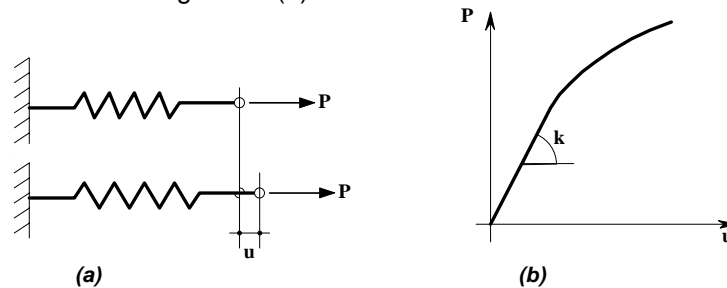


Figura 1-2 - Relación fuerza-deplazamiento para un resorte

Cuando el resorte se estira debido a la aplicación de una fuerza P en uno de sus extremos, estando el otro extremo adherido a un apoyo, las deformaciones son resistidas por medio de un trabajo interno que está asociado con la magnitud de la deformación del extremo libre. La relación entre la fuerza que resiste el resorte y la deformación entre sus extremos tiene la forma mostrada en la Figura 1-2(b). En general esta relación no es totalmente lineal, pero cuando las deformaciones son pequeñas se puede idealizar como una línea recta.

La *rigidez* es, por lo tanto, la relación entre las fuerzas y los desplazamientos y usualmente se denomina por medio de la letra k . Matemáticamente se expresa por medio de la siguiente relación:

$$k = \frac{P}{u} \quad (1-4)$$

El mismo concepto se puede extender a cuerpos elásticos que tienen otras formas. Es el caso, por ejemplo, mostrado en la Figura 1-3, en la cual se aplica una fuerza en la punta de una viga en voladizo, lo cual causa en su extremo libre un desplazamiento, u , en la dirección de la fuerza.

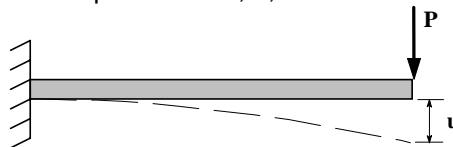


Figura 1-3 - Relación fuerza-deplazamiento para un voladizo

Utilizando los principios de la resistencia de materiales es posible demostrar que para el voladizo presentado en la Figura 1-3, la deflexión u , está dada por:

$$u = \frac{PL^3}{3EI}$$

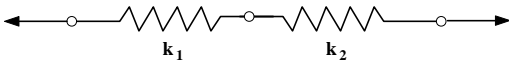
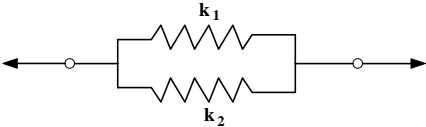
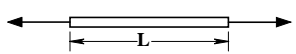
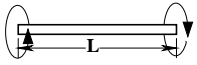
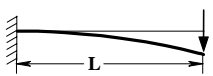
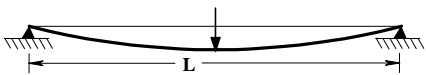
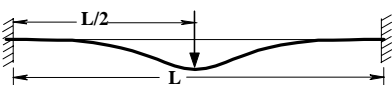
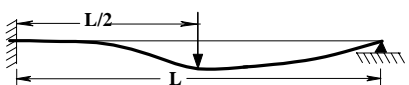
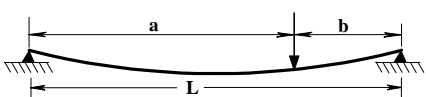
donde L es la luz de la viga, E es el módulo de elasticidad del material de la viga, e I es el momento de inercia de la sección de la viga. En este caso la rigidez k , está dada por:

$$k = \frac{P}{u} = \frac{3EI}{L^3}$$

La rigidez puede también definirse como la fuerza que debe aplicarse al sistema para obtener una deformación unitaria en la misma dirección y sentido de la carga.

A continuación se presentan varios casos comunes de rigidez para diferentes sistemas:

Tabla 1-1 - Rigidez de algunos sistemas elásticos

Resortes en serie: 	$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$
Resortes en paralelo: 	$k = k_1 + k_2$
Barra sometida a fuerza axial: 	$k = \frac{AE}{L}$
Barra sometida a torsión: 	$k = \frac{JG}{L}$
Barra en voladizo: 	$k = \frac{3EI}{L^3}$
Barra simplemente apoyada, fuerza transversal en el centro de la luz: 	$k = \frac{48EI}{L^3}$
Barra empotrada-empotrada, fuerza transversal en el centro de la luz: 	$k = \frac{192EI}{L^3}$
Barra empotrada-simplemente apoyada, fuerza transversal en el centro de la luz: 	$k = \frac{768EI}{7L^3}$
Barra simplemente apoyada, fuerza transversal en el cualquier punto: 	$k = \frac{3EIL}{a^2b^2}$

1.6 — Trabajo y energía

El trabajo realizado por una fuerza al recorrer una distancia, Figura 1-4(a), está dado por la siguiente expresión:

$$W = \int_0^L F dl = FL \quad (1-5)$$

Dibujando un gráfico, como el mostrado en la Figura 1-4(b), en el cual se presenta el valor de la fuerza P , contra la distancia recorrida L , es evidente a partir de la ecuación (1-5), que el trabajo realizado por la fuerza es igual al área bajo la curva que describe el valor de la fuerza, con respecto a su variación con la distancia recorrida, en este caso una línea recta horizontal.

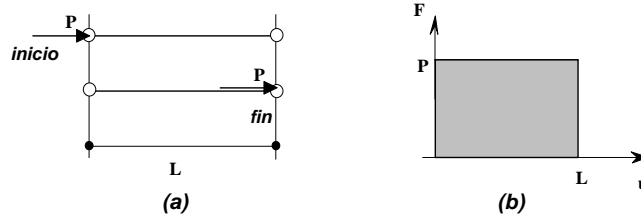


Figura 1-4 - Trabajo realizado por una fuerza

En el caso de una fuerza que se aplica en el extremo de un resorte, el valor de la fuerza es cero cuando se inicia el desplazamiento, y al final su valor es igual al producto ku .

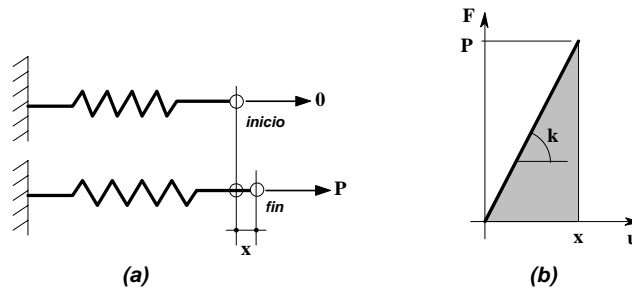


Figura 1-5 - Trabajo realizado por una fuerza que deforma un resorte

En este caso, que se muestra en la Figura 1-5, el área bajo la curva corresponde al trabajo realizado por la fuerza, el cual es equivalente a la energía de deformación acumulada en el resorte.

$$W = \int_0^x P du = \int_0^x k u du = \left[\frac{1}{2} k u^2 \right]_0^x = \frac{1}{2} k x^2 \quad (1-6)$$

La energía de deformación, o energía potencial, acumulada en un resorte que es mantenido en un estado de deformación por una fuerza, es igual a:

$$E_P = \frac{1}{2} k x^2 \quad (1-7)$$

donde x es la deformación relativa entre los extremos del resorte.

Cuando una masa m se encuentra en movimiento, la energía cinética que lleva la masa es:

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1-8)$$

donde v es la velocidad de la masa. En todo sistema conservativo la energía total es invariante, por esta razón la suma de la energía cinética y la energía potencial es igual a una constante:

$$E_C + E_P = r \quad (1-9)$$

y la derivada contra el tiempo de la energía es:

$$\frac{d}{dt}(E_C + E_P) = 0 \quad (1-10)$$

1.7 — Amortiguamiento

1.7.1 — Generalidades

En general en todo cuerpo en movimiento, éste último tiende a disminuir con el tiempo. La razón de esta disminución está asociada con una pérdida de la energía presente en el sistema. Esta pérdida de energía es producida por fuerzas de amortiguamiento o de fricción que obran sobre el sistema. La energía, ya sea cinética o potencial, se transforma en otras formas de energía tales como calor o ruido. Estos mecanismos de transformación de energía son complejos y no están totalmente entendidos, aún hoy en día. No obstante, existen varias formas de describir estos fenómenos que en alguna medida se ajustan a la observación. A continuación se presentan algunas de las formas más utilizadas para describir los fenómenos de amortiguamiento.

1.7.2 — Amortiguamiento viscoso

Un cuerpo que se encuentra en movimiento dentro de un fluido tiende a perder energía cinética debido a que la viscosidad del fluido se opone al movimiento. Esta pérdida de energía cinética está directamente asociada con la velocidad del movimiento. La descripción matemática del fenómeno de amortiguamiento viscoso es la siguiente:

$$F_a = c \dot{x} \quad (1-11)$$

donde:

- F_a = fuerza producida por el amortiguador
- c = constante del amortiguador
- \dot{x} = velocidad relativa entre los dos extremos del amortiguador

En general se representa por medio del diagrama de la Figura 1-6(a), el cual recuerda los amortiguadores utilizados en los automóviles, los cuales son amortiguadores viscosos pues producen un efecto de amortiguamiento al forzar el paso de un fluido viscoso a través de unos orificios en el émbolo de un pistón de acción doble.

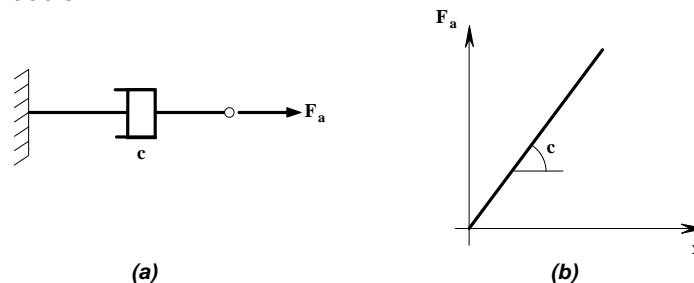


Figura 1-6 - Relación fuerza-velocidad para un amortiguador viscoso

El amortiguamiento viscoso se presta para una descripción matemática simple, lo cual permite resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento de un sistema dinámico sin mayor problema. Por esta razón se utiliza aún en casos en los cuales la descripción matemática no corresponde exactamente al fenómeno físico.

1.7.3 — Amortiguamiento de Coulomb

Este amortiguamiento corresponde al fenómeno físico de *fricción* entre superficies secas. La fuerza de fricción es igual al producto de la fuerza normal a la superficie N , y el coeficiente de fricción, μ . Se supone que el amortiguamiento de Coulomb es independiente de la velocidad del movimiento, una vez éste se inicia. Siempre se opone al movimiento, por lo tanto tiene el signo contrario al de la velocidad.

Matemáticamente se puede expresar por medio de la ecuación (1-12):

$$F_a = \pm \mu N \quad (1-12)$$

donde:

- F_a = fuerza producida por el amortiguamiento
 μ = coeficiente de fricción dinámica (adimensional)
 N = fuerza normal a la superficie de fricción

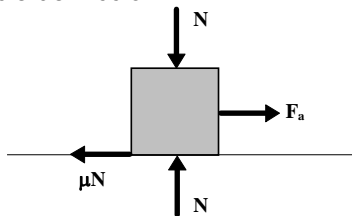


Figura 1-7 - Amortiguamiento de Coulomb

Su tratamiento matemático no puede realizarse por medio de funciones continuas, debido a que depende del signo de la velocidad, lo que introduce complejidad a la solución.

1.7.4 — Amortiguamiento histerético

La *histéresis* es un fenómeno por medio del cual dos, o más, propiedades físicas se relacionan de una manera que depende de la historia de su comportamiento previo. Este tipo de amortiguamiento se presenta cuando un elemento estructural es sometido a inversiones en el sentido de la carga aplicada cuando el material del elemento se encuentra en el rango *inelástico* o *no lineal*. El hecho de que la curva de carga tenga una trayectoria diferente a la curva de descarga conduce a que no toda la energía de deformación acumulada en el elemento se convierta en energía cinética en el ciclo de descarga. Dependiendo del tipo de material la forma tanto de la curva de carga como la de descarga varía. A modo ilustrativo, en la Figura 1-8 se muestra el comportamiento, en términos de fuerza-deformación, de un elemento estructural construido con un material inelástico durante unos ciclos de carga y descarga, incluyendo reversión del sentido de las fuerzas aplicadas.

En la figura se ha marcado la fuerza de fluencia F_y , a partir de la cual hay deformación sin que se presente un aumento en la fuerza. Una vez se invierte el movimiento, se inicia el ciclo de descarga, y el material reacciona de una manera diferente a cuando fue cargado, hasta cuando llega a la fluencia en el lado opuesto, $-F_y$.

La acumulación de energía de deformación corresponde al área bajo la curva de carga, Figura 1-9(a). Cuando el sistema descarga la energía que el sistema transfiere para convertirse en energía cinética corresponde al área bajo la curva de descarga, Figura 1-9(b). La diferencia entre las dos áreas corresponde a energía disipada por el sistema y que se convierte en calor, ruido u otros tipos de energía, Figura 1-9(c).

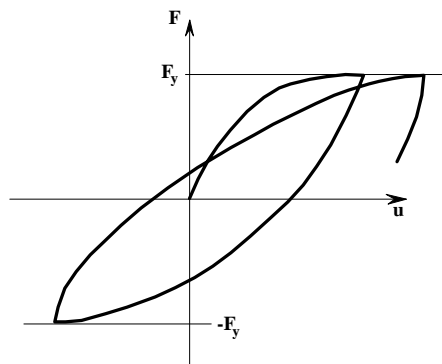


Figura 1-8 - Curva fuerza-deformación para un material inelástico

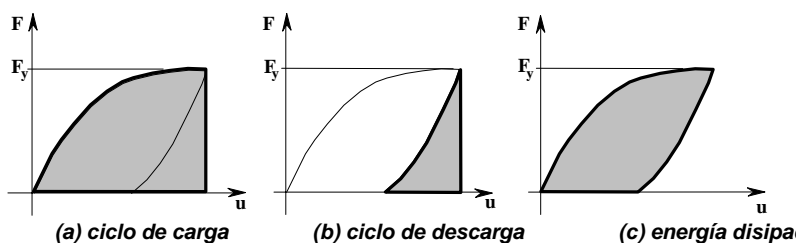


Figura 1-9 - Disipación de energía en un sistema inelástico

Aunque en algunos casos el comportamiento histerético de los elementos estructurales puede describirse por medio de modelos relativamente simples como es el modelo elasto-plástico, en la gran mayoría de los casos hay necesidad de recurrir a modelos matemáticos más complejos. Posteriormente se hace una descripción detallada de estos fenómenos para diferentes materiales estructurales.

1.8 — Tipos de excitación dinámica

Toda estructura se ve afectada numerosas veces durante su vida por efectos dinámicos que van desde magnitudes despreciables, hasta efectos que pueden poner en peligro su estabilidad. Dentro de los tipos de excitación dinámica que pueden afectar una estructura, o un elemento estructural, se cuenta (véase la Figura 1-10) entre otros:

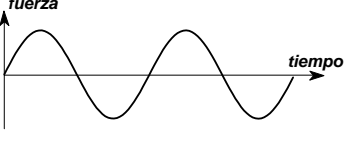
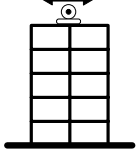
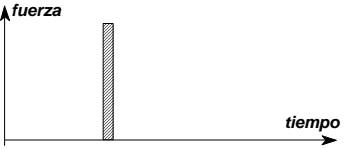
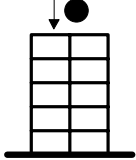
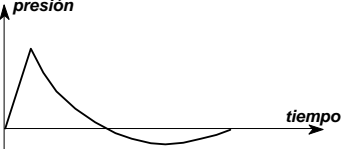
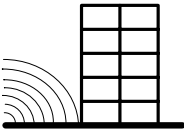
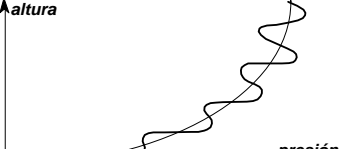
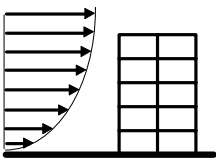
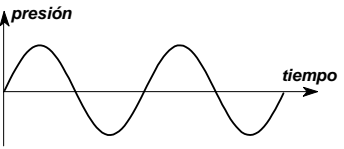
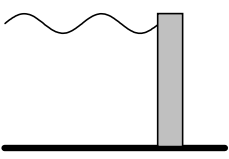

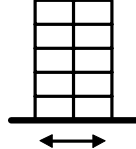
<p>Causada por equipos mecánicos</p> <p>Dentro de este grupo están los efectos causados por maquinarias y equipos que tengan componentes que roten o se desplacen periódicamente.</p>		
<p>Causada por impacto</p> <p>El hecho de que una masa sufra una colisión con otra, induce una fuerza impulsiva aplicada sobre las dos masas, la cual induce vibraciones.</p>		
<p>Causada por explosiones</p> <p>Una explosión produce ondas de presión en el aire, o movimientos del terreno. Ambos efectos afectan estructuras localizadas cerca del lugar de la explosión.</p>		
<p>Causada por el viento</p> <p>La intensidad de las presiones que ejercen el viento sobre las estructuras varía en el tiempo. Esto induce efectos vibratorios sobre ellas.</p>		
<p>Causada por olas</p> <p>En las estructuras hidráulicas las olas inducen efectos dinámicos correspondientes a las variaciones del empuje hidráulico sobre ellas.</p>		
<p>Causada por sismos</p> <p>El efecto sobre las estructuras de los movimientos del terreno producidos por la ocurrencia de un sismo conduce a vibraciones importantes de la estructura.</p>		

Figura 1-10 - Tipos de excitación dinámica

Tema N° 2 — Sistemas lineales no amortiguados de un grado de libertad

2.1 — Vibración libre no amortiguada

En la Figura 2-1(a) se muestra un sistema elástico de un grado de libertad compuesto por una masa m , la cual puede deslizarse sin fricción sobre una superficie horizontal y cuya posición se describe por medio de la coordenada x , y por un resorte que conecta la masa con un apoyo inmóvil.

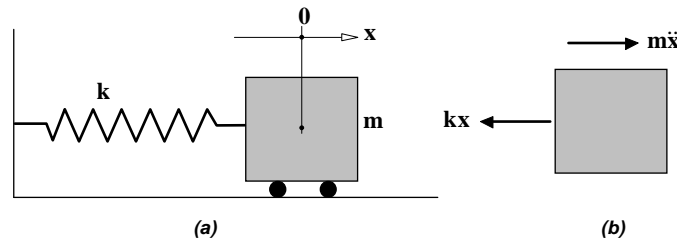


Figura 2-1 - Sistema elástico de un grado de libertad

Bajo el supuesto de que la fuerza ejercida para deformar el resorte, ya sea en tensión o en compresión, es proporcional a la deformación y siendo k la constante de proporcionalidad, o rigidez, podemos determinar la fuerza que ejerce el resorte por medio de:

$$F_r = k x \quad (2-1)$$

donde:

- F_r = fuerza ejercida por el resorte (N)
- k = rigidez del resorte (N/m)
- x = desplazamiento relativo entre los dos extremos del resorte (m)

La fuerza inercial que se tiene en la masa m debido a la aceleración a , está dada, según la segunda ley de Newton, por:

$$F_i = -m\ddot{x} \quad (2-2)$$

donde:

- F_i = fuerza inercial que obra sobre la masa (N)
- m = masa (kg)
- \ddot{x} = aceleración de la masa (m/s^2)

Esta fuerza inercial obra en la dirección contraria a la dirección de la aceleración. Aplicando el procedimiento de “cuerpo libre” en la masa, Figura 2-1(b), se obtienen las dos fuerzas que obran sobre la masa, correspondientes a la fuerza ejercida por el resorte y la fuerza inercial. Por lo tanto, aplicando el principio de D'Alembert:

$$F_r - F_i = k x + m\ddot{x} = 0 \quad (2-3)$$

Así se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio, correspondiente a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$m\ddot{x} + k x = 0 \quad (2-4)$$

Dividiendo por m y llamando ω^2 la constante k/m , se obtiene:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2-5)$$

y la solución de esta ecuación diferencial (2-5) es:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (2-6)$$

donde A y B dependen de las condiciones iniciales que indujeron el movimiento. Por lo tanto, si se define x_0 como el desplazamiento que tenía la masa en el momento $t=0$ y v_0 como su velocidad también en el tiempo $t=0$, se obtiene:

$$x_0 = A \operatorname{sen}(\omega 0) + B \cos(\omega 0) = B \quad (2-7)$$

Ahora derivando la ecuación (2-6):

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t) - B\omega \operatorname{sen}(\omega t) \quad (2-8)$$

que al tiempo $t=0$ es igual a:

$$v_0 = A\omega \cos(\omega 0) - B\omega \operatorname{sen}(\omega 0) = A\omega \quad (2-9)$$

y entonces

$$A = \frac{v_0}{\omega} \quad (2-10)$$

Por lo tanto la solución de la ecuación (2-5) se convierte en:

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega} \right) \operatorname{sen}(\omega t) + x_0 \cos(\omega t) \quad (2-11)$$

donde:

- v_0 = velocidad de la masa en el instante $t=0$ (m/s)
- x_0 = desplazamiento de la masa en el instante $t=0$ (m)
- ω = frecuencia natural del sistema (rad/s)

El haber introducido un desplazamiento y una velocidad iniciales a la masa hace que ésta oscile con un movimiento periódico a partir del momento ($t=0$) en que se introdujeron estas condiciones iniciales. En la Figura 2-2 se presenta el gráfico del desplazamiento de la masa con respecto al tiempo, correspondiente a la solución de la ecuación (2-11).

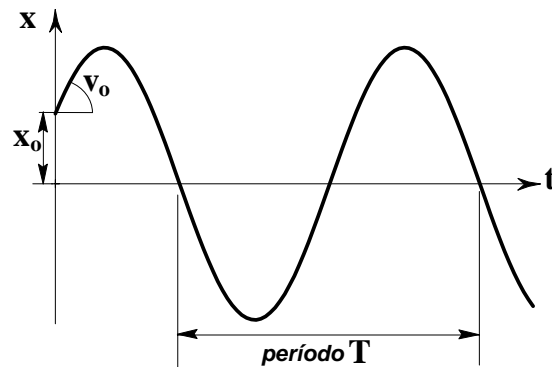


Figura 2-2 - Desplazamiento de la masa en el tiempo ante condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad

Puede verse que se trata de un movimiento periódico. Esta periodicidad hace que el valor de x sea el mismo cada $(2\pi/\omega)$ segundos. Por lo tanto, es posible definir los siguientes términos:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{frecuencia natural del sistema en radianes por segundo (rad/s)}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \text{frecuencia natural del sistema en ciclos por segundo o Hertz (Hz ó 1/s)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = \text{período natural del sistema en segundos (s)}$$

Estas relaciones se han enmarcado para resaltar su importancia.

Ejemplo 2-1

Una caja que tiene una masa de **1000 kg** es soltada desde **1 metro** de altura sobre el centro de la luz de una viga simplemente apoyada, de masa despreciable. La viga tiene una luz **L** de **10 m** y su sección tiene **0.20 m** de ancho por **0.50 m** de alto. Está construida de un material cuyo módulo de elasticidad **E** es **25 000 MPa**. En la Figura 2-3 se muestra el sistema.

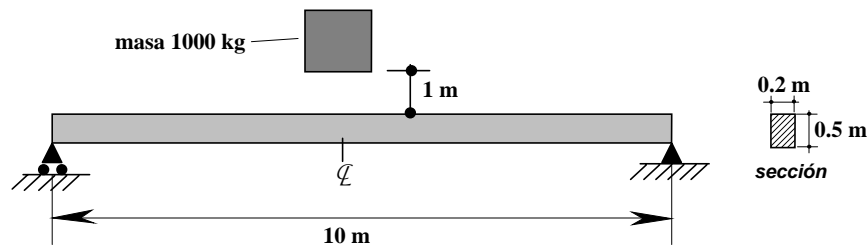


Figura 2-3 - Viga sobre la cual se deja caer una masa

Suponiendo que la caja queda totalmente adherida a la viga a partir del momento del contacto inicial, debe encontrarse una descripción del movimiento oscilatorio que se genera, la máxima deflexión vertical que tiene la viga y las fuerzas máximas que se inducen en la viga.

El primer paso en la solución consiste en formular el modelo de un sistema de un grado de libertad que nos permita describir el movimiento oscilatorio que se genera. Es evidente que una vez la caja se adhiere a la viga se tiene un sistema dinámico en el cual la masa proviene solamente de la caja dado que la viga tiene masa despreciable. La rigidez del sistema es la rigidez de la viga. Como la caja cae verticalmente, las deflexiones de la viga serán transversales a su luz. Para obtener la rigidez se debe determinar la deflexión de la viga en el centro de la luz (sitio del impacto) para una carga unitaria colocada allí, tal como se muestra en la Figura 2-4.

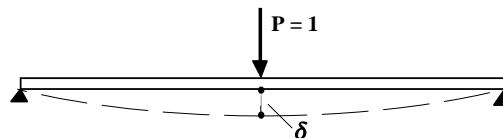


Figura 2-4 - Deflexión de la viga ante una carga unitaria

Utilizando cualquiera de los métodos clásicos de resistencia de materiales para calcular deflexiones en vigas (área momento, viga conjugada, etc.) es posible obtener (véase la Sección 1.5) la siguiente expresión para la deflexión en el centro de la luz de la viga:

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

donde

L = luz de la viga = **10 m**

E = módulo de elasticidad del material de la viga = **25 000 MPa**

I = momento de inercia de la sección de la viga = **$0.5^3 \cdot 0.2 / 12 = 0.002\,083\, \text{m}^4$**

Dado que **$P = k \delta$** , entonces

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{P 48EI}{PL^3} = \frac{48EI}{L^3}$$

y por lo tanto

$$k = 48 \cdot 25\,000 \cdot 0.002083 / 10^3 = 2.5\, \text{MPa} \cdot \text{m} = 2.5 \cdot 10^6\, \text{N/m}$$

La masa **m** de la caja es **1000 kg**, por lo tanto la frecuencia natural del sistema (viga + caja), en radianes por segundo, se obtiene de:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.5 \cdot 10^6\, \text{N/m}}{1000\, \text{kg}}} = \sqrt{2.5 \cdot 10^3\, \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} / \text{m}}{\text{kg}}} = 50\, \text{rad/s}$$

su frecuencia en ciclos por segundo

$$f = \omega/2\pi = 50/2\pi = 7.96\, \text{Hz}$$

y su periodo en segundos

$$T = 1/f = 1/7.96 = 0.126\, \text{s}$$

Con base en lo anterior, se puede plantear la ecuación diferencial de equilibrio según la ecuación (2-4), en la cual se ha tomado como nivel de referencia (**$x=0$**), el nivel al cual se encontraría la viga con la caja colocada lentamente, o sea al nivel de la deflexión estática **δ_e** , de la viga en el centro de su luz (**$\delta_e = W/k = mg/k$**):

$$m \ddot{x} + k x = 0$$

Dividiendo por **m**:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

La solución, de acuerdo con la ecuación (2-11), es:

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega} \right) \text{sen}(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)$$

donde **x** es la deflexión vertical de la viga, positiva hacia abajo.

Ahora, en el momento del impacto de la caja con la viga, el cual se define como **$t=0$** , el desplazamiento de la masa es cero, por lo tanto **$x_0=0$** .

Para obtener la velocidad que tiene la masa en el momento del impacto se debe obtener la velocidad que tiene la caja después de haber caído un metro. La energía cinética ($mv^2/2$) que tiene la caja en el momento del impacto es igual a la energía potencial que tiene antes de soltarla, (wh). Por lo tanto:

$$mv^2/2 = wh \text{ y dado que } m = w/g, \text{ se obtiene } v^2 = 2gh.$$

$$v^2 = 2gh = 2 \cdot 9.8 \cdot 1 = 19.6 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

La velocidad de la caja en el momento del impacto es, entonces:

$$v = 4.43 \text{ m/s}$$

Por lo tanto v_0 es **4.43 m/s** y la deflexión en el centro de la luz en cualquier instante después del impacto se puede obtener de:

$$x(t) = (v_0/\omega) \text{ sen}(\omega t) + x_0 \text{ cos}(\omega t) = (4.43/50) \text{ sen}(50t) + (0) \text{ cos}(50t) = 0.0886 \text{ sen}(50t)$$

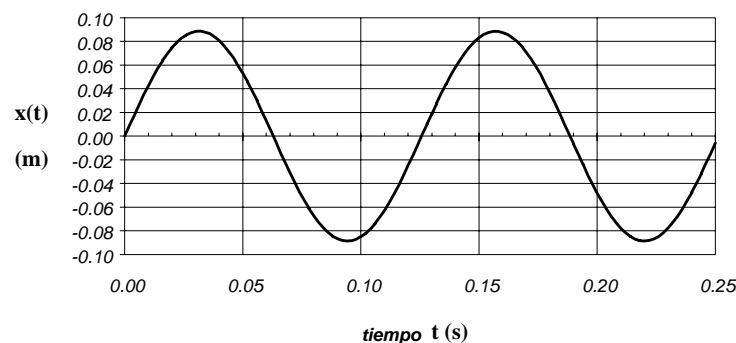


Figura 2-5 - Deflexión de la viga en el centro de la luz

La máxima deflexión dinámica que tiene la viga en su centro de la luz se presenta en el instante cuando $50t = \pi/2$, o sea cuando $t = \pi/100 = 0.0314 \text{ s}$, y esta deflexión tiene un valor de **0.0886 m**, igual a la amplitud de la función sinusoidal.

La máxima fuerza inercial que impone el movimiento a la viga es igual a la fuerza estática que habría necesidad de colocar para obtener la misma deflexión de **0.0886 m**, o sea:

$$0.0886 k = 0.0886 \cdot 2.5 \cdot 10^6 = 221\,500 \text{ N}$$

A esta misma fuerza se puede llegar calculando la máxima aceleración y multiplicándola por la masa. La ecuación de la aceleración se obtiene derivando dos veces contra el tiempo la ecuación del desplazamiento que se obtuvo anteriormente, la cual se presenta de nuevo a continuación:

$$x(t) = 0.0886 \text{ sen}(\omega t)$$

derivando una vez se obtiene la ecuación de la velocidad:

$$\dot{x}(t) = 0.0886 \omega \text{ cos}(\omega t)$$

y derivando nuevamente se determina la ecuación de la aceleración:

$$\ddot{x}(t) = -0.0886 \omega^2 \text{ sen}(\omega t) = -221.5 \text{ sen}(\omega t)$$

La máxima aceleración se presenta cuando $50t = \pi/2$, o sea cuando $t = \pi/100 = 0.0314$ s, o sea cuando el desplazamiento también es máximo, y tiene un valor de -221.5 m/s^2 . Por lo tanto la máxima fuerza inercial corresponde a:

$$F_i = -m\ddot{x} = -1000 \cdot -221.5 = 221\,500 \text{ N}$$

que es el mismo valor obtenido anteriormente.

Vale la pena resaltar la enorme diferencia que se obtendría si la caja se coloca sin dejarla caer, caso en el cual la carga sobre la viga sería $1000 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 9800 \text{ N}$ y la máxima deflexión vertical que tendría la viga sería $\delta_e = P/k = 9800/2.5 \cdot 10^6 = 0.004 \text{ m} = 4 \text{ mm}$. Debe advertirse que las deflexiones obtenidas corresponden únicamente a la parte dinámica, y que la viga tiene una deflexión estática, con un valor igual a 4 mm , o sea que las oscilaciones dinámicas son deflexiones relativas con respecto a esta deflexión estática.



Tema N° 3 — Sistemas lineales amortiguados de un grado de libertad

2.2 — Vibración libre amortiguada

Los movimientos oscilatorios tienden a disminuir con el tiempo hasta desaparecer. Esto se debe al amortiguamiento que se presenta, el cual hace que parte de la energía se disipe. Las causas de este amortiguamiento están asociadas con diferentes fenómenos dentro de los cuales se puede contar la fricción de la masa sobre la superficie de apoyo, el efecto del aire que rodea la masa, el cual tiende a impedir que ocurra el movimiento, la no linealidad del material del resorte, entre otros.

Existen numerosas maneras de describir matemáticamente el efecto de fricción. Dentro de estos modelos, uno de los más utilizados es el que se conoce como amortiguamiento viscoso (véase la Sección 1.7). En el amortiguamiento viscoso la fuerza de amortiguamiento es directamente proporcional a la velocidad relativa entre los extremos del amortiguador, lo cual se puede describir por medio de la siguiente ecuación:

$$F_a = c\dot{x} \quad (2-12)$$

donde:

- F_a = fuerza producida por el amortiguador (N)
- c = constante del amortiguador (N-s/m)
- \dot{x} = velocidad relativa entre los dos extremos del amortiguador (m/s)

En la Figura 2-6 se muestra un sistema lineal amortiguado de un grado de libertad. El grado de libertad está descrito por la ordenada x , la cual indica la posición de la masa m . A esta masa, colocada sobre una superficie sin fricción, están conectados un resorte con constante de rigidez k y un amortiguador cuya constante es c .

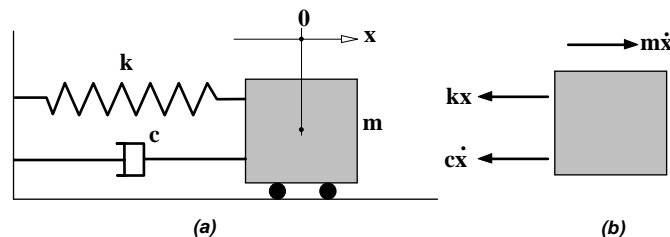


Figura 2-6 - Sistema lineal amortiguado de un grado de libertad

De la aplicación del procedimiento de cuerpo libre sobre la masa, se obtienen las tres fuerzas que obran sobre ella, correspondientes a la fuerza del resorte F_r , descrita por la ecuación (2-1); la fuerza inercial producida por la aceleración de la masa, dada por la ecuación (2-2) y por la fuerza ejercida por el amortiguador dada en la ecuación (2-12).

Utilizando el principio de D'Alembert puede plantearse la siguiente ecuación:

$$F_r + F_a - F_i = 0 \quad (2-13)$$

y al reemplazar las definiciones de las diferentes fuerzas:

$$kx + c\dot{x} - (-m\ddot{x}) = 0 \quad (2-14)$$

lo cual conduce a la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2-15)$$

La ecuación característica de la ecuación anterior es:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (2-16)$$

cuyas raíces son:

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (2-17)$$

o sea

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (2-17a)$$

y

$$\lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (2-17b)$$

Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial de equilibrio del sistema (2-15), es:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (2-18)$$

donde:

- A** = constante que depende de las condiciones iniciales del movimiento
- B** = constante que depende de las condiciones iniciales del movimiento
- e** = base de los logaritmos neperianos

Existen tres casos de solución para la ecuación anterior dependiendo del valor del radical de la ecuación (2-17), los cuales se presentan a continuación.

2.2.1 — Amortiguamiento crítico

Cuando el radical de la ecuación (2-17) es igual a cero la cantidad de amortiguamiento c , se denomina *amortiguamiento crítico* y se define como c_c y se obtiene así:

$$c_c^2 - 4mk = 0 \quad (2-19)$$

por lo tanto

$$c_c = 2\sqrt{mk} = 2\sqrt{mk(m/m)} = 2m\omega \quad (2-20)$$

Definiendo ξ como el *coeficiente de amortiguamiento crítico*, igual al cociente c/c_c , entonces:

$$c = 2\xi m\omega \quad (2-21)$$

que al ser reemplazado en las ecuaciones (2-17a) y (2-17b) se obtiene:

$$\lambda_1 = \left[-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right] \omega \quad (2-22)$$

y

$$\lambda_2 = \left[-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right] \omega \quad (2-23)$$

Ahora, los tres casos de interés se han convertido en $\xi = 1$, $\xi > 1$ y $\xi < 1$, que se denominan amortiguamiento igual, mayor y menor del crítico, respectivamente.

Para el caso de *amortiguamiento igual al crítico* ($\xi = 1$):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega \quad (2-24)$$

Debido a la doble raíz la solución para el movimiento x , es del tipo:

$$x(t) = A e^{-\omega t} + B t e^{-\omega t} \quad (2-25)$$

Reemplazando las condiciones iniciales se obtiene:

$$x(t) = [x_0 + t(v_0 + x_0 \omega)] e^{-\omega t} \quad (2-26)$$

donde x_0 y v_0 son el desplazamiento y la velocidad iniciales respectivamente.

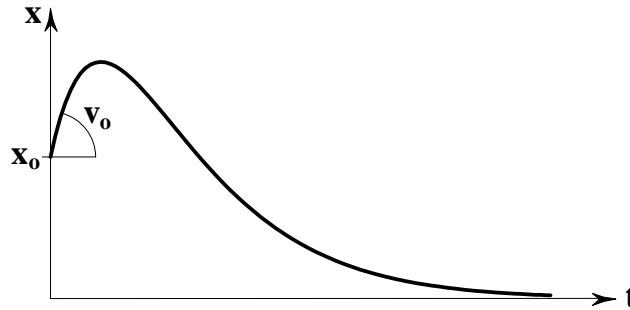


Figura 2-7 - Respuesta de un sistema con amortiguamiento igual al crítico

Este es un movimiento aperiódico pues no hay oscilación, como puede verse en la Figura 2-7. Este es el caso en el cual el sistema regresa de la manera más rápida a su condición de reposo.

2.2.2 — Amortiguamiento mayor que el crítico

En este caso $\xi > 1$. Tomando los valores de λ_1 y λ_2 de las ecuaciones (2-22) y (2-23) e introduciéndolos en la ecuación (2-18),

$$x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \quad (2-18)$$

se obtiene:

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} \left[A e^{\sqrt{\xi^2 - 1} \omega t} + B e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} \omega t} \right] \quad (2-27)$$

A y B son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales. En este caso el movimiento también es aperiódico como en el caso de amortiguamiento crítico, con la diferencia que el movimiento decrece más lentamente que cuando se tiene amortiguamiento igual al crítico.

2.2.3 — Amortiguamiento menor que el crítico

Corresponde a la posibilidad de mayor interés por cuanto se presenta vibración. La gran mayoría de aplicaciones prácticas en vibraciones están regidas por este caso debido al hecho de que la gran mayoría de los sistemas estructurales tiene valores de amortiguamiento bajos. En este caso $\xi < 1$. Tomando los valores de λ_1 y λ_2 de las ecuaciones (2-22) y (2-23) puede verse que la parte interna de los radicales es negativa, por lo tanto la solución es imaginaria:

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} \left[A e^{i\sqrt{1-\xi^2} \omega t} + B e^{-i\sqrt{1-\xi^2} \omega t} \right] \quad (2-28)$$

Aplicando la transformación de Euler, la cual se expresa como:

$$e^{iy} = \cos(y) + i \operatorname{sen}(y) \quad (2-29a)$$

y

$$e^{-iy} = \cos(y) - i \operatorname{sen}(y) \quad (2-29b)$$

se obtiene una forma no imaginaria de la ecuación (2-28):

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[C \cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega t) + D \operatorname{sen}(\sqrt{1-\xi^2}\omega t) \right] \quad (2-30)$$

Al resolver las constantes C y D para las condiciones iniciales de desplazamiento inicial x_0 , y velocidad inicial v_0 , se obtiene:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega_a t) + \left(\frac{v_0 + \xi x_0 \omega}{\omega_a} \right) \operatorname{sen}(\omega_a t) \right] \quad (2-31)$$

donde ω_a se conoce como la *frecuencia amortiguada* y está definida por:

$$\omega_a = \sqrt{1-\xi^2} \omega \quad (2-32)$$

El movimiento disminuye de amplitud exponencialmente como se muestra en la Figura 2-8. La porción oscilatoria tiene un período un poco mayor que el que tendría un sistema no amortiguado con la misma rigidez y masa:

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega} \quad (2-33)$$

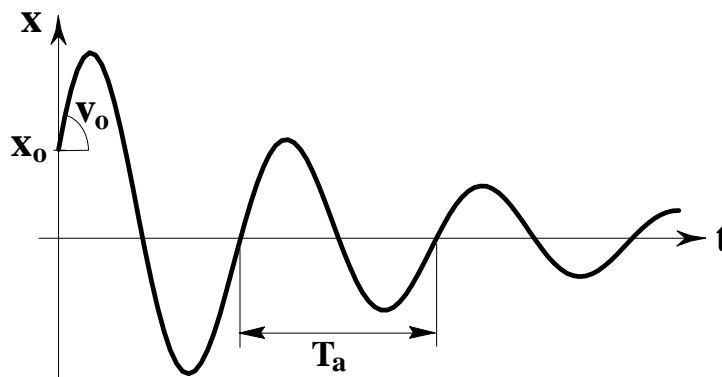


Figura 2-8 - Respuesta de un sistema con amortiguamiento menor del crítico

Ejemplo 2-2

Utilizando los datos del Ejemplo 2-1, en el cual se dejó caer una caja con una masa de **1000 kg** sobre una viga y que el sistema conjunto tiene una frecuencia natural de **50 rad/s**, se desea encontrar la máxima amplitud del movimiento dado que el sistema ahora tiene un amortiguamiento c de **5000 N · s/m**.

El coeficiente de amortiguamiento crítico, ξ , se obtiene de:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{5000}{2 \cdot 1000 \cdot 50} = 0.05 = 5\%$$

Dado que el coeficiente de amortiguamiento crítico es menor que la unidad, el movimiento está descrito por:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega_a t) + \left(\frac{v_0 + \xi x_0 \omega}{\omega_a} \right) \sin(\omega_a t) \right]$$

Al reemplazar los valores apropiados, tomados del ejemplo 2-1, se obtiene:

$$x = e^{-2.5t} \left[\frac{4.43}{\omega_a} \sin(\omega_a t) \right]$$

donde:

$$\omega_a = \sqrt{1 - \xi^2} \omega = \sqrt{1 - (0.05)^2} 50 = 49.94 \text{ rad/s}$$

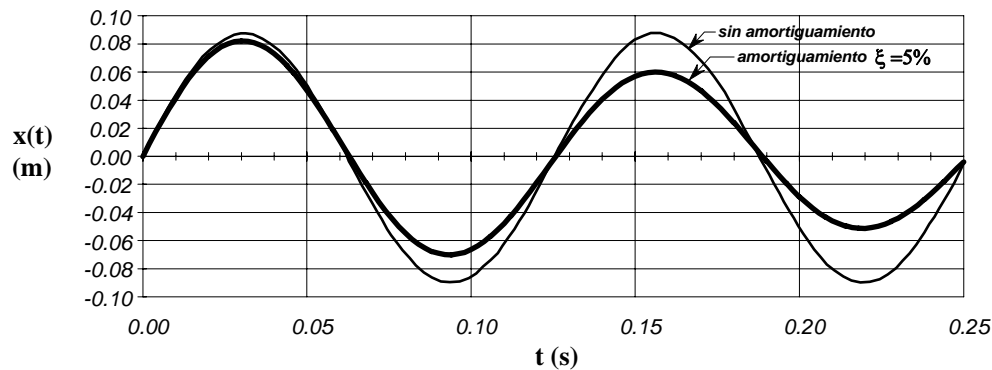


Figura 2-9 - Deflexión de la viga en el centro de la luz

El máximo movimiento ocurre para $\sin(\omega_a t) = 1$, o sea para $\omega_a t = \pi/2$, lo cual corresponde a $t = \pi/(2\omega_a) = 0.0315 \text{ s}$. La amplitud en este instante es:

$$x = e^{-2.5 \cdot 0.0315} \left[\frac{4.43}{49.94} \cdot 1 \right] = \frac{0.9243 \cdot 4.43}{49.94} = 0.082 \text{ m}$$

y la máxima fuerza inercial que se produce es:

$$F_i = 0.082 \text{ k} = 205 \text{ 000 N}$$

Esta fuerza es menor que la que se obtuvo en el Ejemplo 2-1 sin amortiguamiento. En la Figura 2-9 se muestra la respuesta de la viga en el caso amortiguado (Ejemplo 2-2) y no amortiguado (Ejemplo 2-1).

■

2.2.4 — Decremento logarítmico

Existen diferentes métodos para obtener el coeficiente de amortiguamiento crítico, ξ . Si se conocen las amplitudes de los picos de oscilaciones sucesivas, $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$, tal como se muestra en la Figura 2-10, es posible ver que el intervalo de tiempo entre picos sucesivos es el período amortiguado T_a .

Tomando el cociente entre la amplitud de dos picos sucesivos x_i/x_{i+1} y por medio de la ecuación (2-31), es posible obtener:

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = e^{-\xi\omega(t_i - t_{i+1})} = e^{\xi\omega T_a} \quad (2-34)$$

El logaritmo natural de este cociente se conoce con el nombre de *decremento logarítmico*:

$$\delta = \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = \xi \omega T_a = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2-35)$$

a partir del cual es posible calcular ξ :

$$\xi = \frac{\frac{\delta}{2\pi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}} \quad (2-36)$$

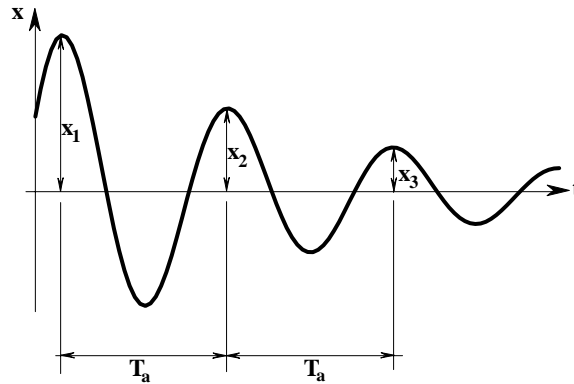


Figura 2-10 - Cálculo del decremento logarítmico

El valor del decremento logarítmico para valores pequeños de δ se convierte en:

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (2-37)$$

Por lo tanto, disponiendo de un registro de las oscilaciones es posible entonces determinar el coeficiente de amortiguamiento crítico con facilidad. Cuando el movimiento decrece muy poco, debido a que el amortiguamiento es pequeño, el valor del decremento logarítmico puede obtenerse comparando las amplitudes localizadas n ciclos aparte por medio de:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+n}}\right) \quad (2-38)$$

Ejemplo 2-3

El movimiento en vibración libre de un sistema decreció de una amplitud de **0.155 m** a **0.006 m** al cabo de **22** ciclos. Se desea saber cuál es el coeficiente de amortiguamiento crítico del sistema, ξ .

La solución es:

$$\delta = \frac{1}{22} \ln\left(\frac{0.155}{0.006}\right) = 0.1478 \quad \text{y} \quad \xi = \frac{\left(\frac{0.1478}{2\pi}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{0.1478}{2\pi}\right)^2}} = 0.0235 = 2.35\%$$

■

Tema N° 4 — Vibraciones forzadas armónicas y vibraciones transitorias

2.3 — Vibraciones forzadas armónicas

En la Figura 2-11 se presenta un sistema de un grado de libertad a cuya masa se le aplica una fuerza que varía en el tiempo con una periodicidad constante. Esta fuerza periódica puede describirse por medio de $F_0 \text{sen}(\Omega t)$, de la cual podemos decir que su máximo valor es F_0 y que tiene una frecuencia de Ω rad/s. Del cuerpo libre es posible plantear la siguiente ecuación de equilibrio:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \text{sen}(\Omega t) \quad (2-39)$$

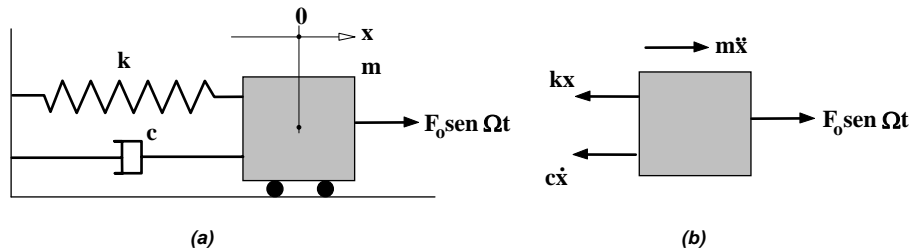


Figura 2-11 - Sistema de un grado de libertad sometido a excitación armónica

La solución de esta ecuación diferencial no homogénea de segundo orden se divide en dos partes: una solución homogénea y una solución particular. La solución homogénea corresponde a la respuesta ante las condiciones iniciales, la cual se rige por la ecuación (2-18) y dependiendo del valor del coeficiente del amortiguamiento crítico tiene las diferentes soluciones planteadas anteriormente. La solución particular depende de la fuerza externa que se le impone al sistema. Es importante anotar que la parte de la respuesta correspondiente a la solución homogénea desaparece pasado algún tiempo pues el amortiguamiento la disminuye; por lo tanto, sólo la solución particular es de interés cuando ha transcurrido algún tiempo después de iniciado el movimiento.

Puede suponerse que la solución particular tiene la siguiente forma:

$$x = X \text{sen}(\Omega t - \phi) \quad (2-40)$$

donde:

X = es la amplitud del movimiento (m)

ϕ = es el desfase de la respuesta con respecto a la excitación (rad)

Al derivar contra el tiempo la ecuación (2-40) se llega a:

$$\dot{x} = X\Omega \cos(\Omega t - \phi) \quad (2-41)$$

y derivando nuevamente:

$$\ddot{x} = -X\Omega^2 \text{sen}(\Omega t - \phi) \quad (2-42)$$

Reemplazando (2-40), (2-41) y (2-42) en (2-39), y pasando todos los términos al lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$$F_0 \text{sen}(\Omega t) + mX\Omega^2 \text{sen}(\Omega t - \phi) - cX\Omega \cos(\Omega t - \phi) - kX \text{sen}(\Omega t - \phi) = 0 \quad (2-43)$$

Para describir el movimiento puede utilizarse un sistema cartesiano en el cual alrededor de su origen rotan unos vectores correspondientes a cada uno de los términos de la ecuación (2-43). El eje de las

abscisas corresponde a la línea de referencia sobre la cual se mide el ángulo Ωt . La ecuación de equilibrio (2-43) se representa por medio de la proyección de sus términos sobre el eje vertical. Los vectores correspondientes a cada uno de los términos de la ecuación rotan con respecto al origen, y su posición se describe por medio del ángulo apropiado. En la Figura 2-12 se presenta de esta manera la ecuación (2-43).

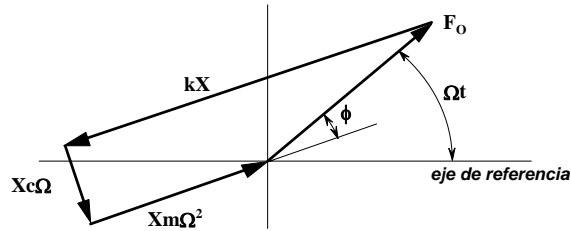


Figura 2-12 - Respuesta a la excitación armónica como vectores que rotan

El conjunto de vectores que rotan está en equilibrio, pues su suma vectorial conduce nuevamente al inicio del primer vector. Al sumar los vectores correspondientes a $\{kX\}$ y $\{Xm\Omega^2\}$ se obtiene la representación mostrada en la Figura 2-13.

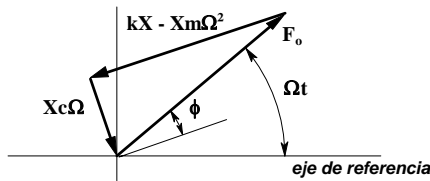


Figura 2-13 - Respuesta a la excitación armónica como vectores que rotan

Allí es posible, utilizando el teorema de Pitágoras, encontrar:

$$X^2(k - m\Omega^2)^2 + X^2(c\Omega)^2 = (F_o)^2 \quad (2-44)$$

de donde podemos calcular la magnitud de X

$$X = \frac{F_o}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \quad (2-45)$$

y el ángulo de desfase ϕ con respecto a la excitación:

$$\tan \phi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \quad (2-46)$$

Realizando las transformaciones apropiadas, las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$X = \frac{\left(\frac{F_o}{k}\right)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right]^2}} \quad (2-45a)$$

$$\tan \phi = \frac{2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (2-46a)$$

La ecuación (2-45) describe un fenómeno clásico de resonancia. Cuando el coeficiente de amortiguamiento crítico ξ , es igual a cero y la relación entre frecuencias (Ω/ω), es igual a la unidad, el denominador de la ecuación (2-45) es cero y por lo tanto la amplificación se convierte en infinito.

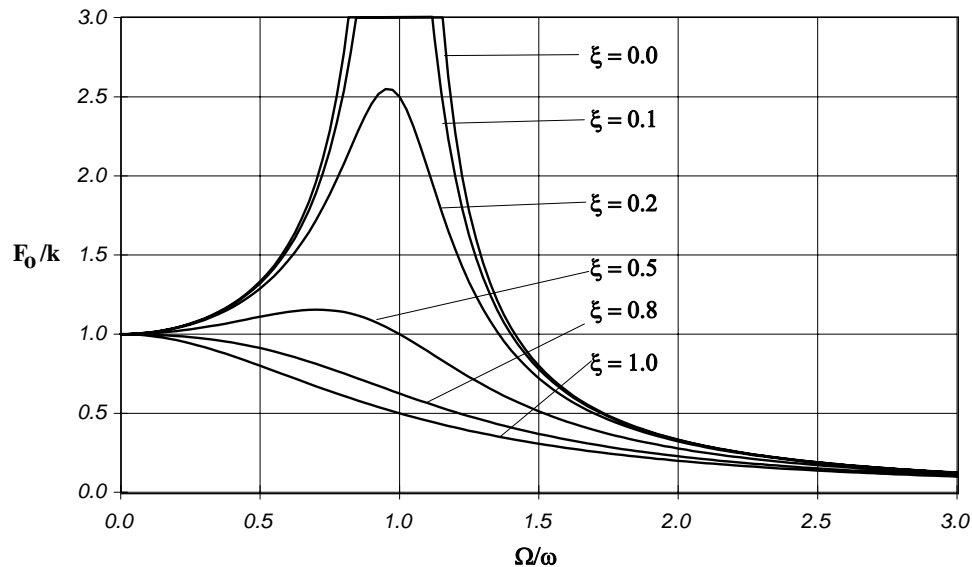


Figura 2-14 - Amplificación dinámica

El hecho de que el amortiguamiento no sea cero indica que este denominador es diferente de cero y por lo tanto la amplificación, aunque de magnitud importante, tiene un valor finito. Es posible demostrar que el máximo valor de X se obtiene cuando:

$$\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (2-47)$$

En la Figura 2-14 se muestra la amplificación dinámica en función del cociente entre las frecuencias, (Ω/ω). Es importante anotar que la amplificación está dada en función del desplazamiento estático del sistema (F_0/k), el cual corresponde a la deflexión que tendría el sistema si la fuerza F_0 se aplica muy lentamente.

En algunos casos es conveniente expresar la ecuación (2-40) como una suma de un seno y un coseno, en vez de un seno más un ángulo de desfase. Definiendo $\beta = \Omega/\omega$ y utilizando $\sin(\alpha - \gamma) = \sin\alpha \cos\gamma - \cos\alpha \sin\gamma$, obtenemos:

$$\sin\left(\Omega t - \tan^{-1}\left[\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right]\right) = \frac{1-\beta^2}{\sqrt{[1-\beta^2]^2 + [2\xi\beta]^2}} \sin(\Omega t) - \frac{2\xi\beta}{\sqrt{[1-\beta^2]^2 + [2\xi\beta]^2}} \cos(\Omega t) \quad (2-48)$$

y

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{[1-\beta^2]^2 + [2\xi\beta]^2} \left[(1-\beta^2) \sin(\Omega t) - 2\xi\beta \cos(\Omega t) \right] \quad (2-49)$$

Ejemplo 2-4

Un tanque de agua con una sección horizontal de 1 m^2 de área está colocado en la parte superior de una columna tubular de 8 m de altura cuya sección tiene un diámetro $d = 0.25 \text{ m}$ con una pared $t = 0.01 \text{ m}$ de espesor y construida de un material con un módulo de elasticidad $E = 200\,000 \text{ MPa}$.

En la parte inferior del tanque hay una bomba de agua que ejerce una fuerza horizontal armónica de $F_0 = 100 \text{ N}$ con una frecuencia $\Omega = 5 \text{ rad/s}$. El tanque vacío incluyendo la columna, tiene una masa de **500 kg**. El amortiguamiento del sistema es $\xi = 2\%$ del crítico.

En la Figura 2-15 se muestra como está dispuesto el sistema. Se desea saber la altura del agua del tanque para la cual se presentan las máximas fuerzas horizontales inducidas por la bomba y el momento flector que producen estas fuerzas en la base de la columna.

El sistema puede idealizarse como una columna en voladizo con una masa en la parte superior. Al aplicar una fuerza horizontal P en la parte superior de la columna es posible obtener por cualquier método de resistencia de materiales (véase la Sección 1.5) la siguiente relación:

$$P = k \delta = \frac{3EI}{L^3} \delta$$

Reemplazando los valores apropiados:

$$E = 200\,000 \text{ MPa}$$

$$I = \pi t d^3 / 8 = \pi \cdot 0.01 \cdot (0.25)^3 / 8 = 6.14 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$L = 8 \text{ m}$$

entonces

$$k = 3 \cdot 200\,000 \cdot 6.14 \cdot 10^{-5} / 8^3 = 72\,000 \text{ N/m}$$

La masa corresponde a la masa del tanque y la columna, más la del agua que contenga el tanque.

$$m = m_{\text{tan+col}} + m_{\text{agua}} = 500 + h \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 = 500 + 1000h \text{ (kg)}$$

La frecuencia natural del sistema es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72\,000}{500 + 1000h}} \text{ rad/seg}$$

La máxima fuerza horizontal se produce cuando se tiene la máxima amplitud, o sea cuando se presenta resonancia. Esto ocurre cuando el cociente Ω/ω es igual a:

$$\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{1 - 2\xi^2} = \sqrt{1 - 2(0.02)^2} = 0.9996 \approx 1.0$$

y

$$\omega = \sqrt{\frac{72\,000}{500 + 1000h}} = \Omega = 5 \text{ rad/seg}$$

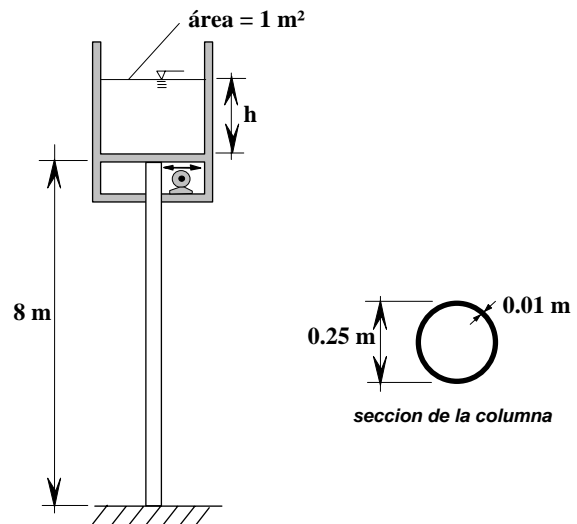


Figura 2-15 - Tanque de agua

$$h = \frac{72000/5^2 - 500}{1000} = 2.38 \text{ m}$$

Cuando el agua tiene una altura igual a **2.38 m** se presenta la máxima influencia de la vibración causada por la bomba de agua. La máxima amplitud de la deflexión horizontal se obtiene por medio de la ecuación (2-45):

$$X = \frac{\left(\frac{F_o}{k}\right)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right]^2}} = \frac{\left(\frac{100}{72000}\right)}{\sqrt{\left[1 - (1)^2\right]^2 + [2 \cdot 0.02(1)]^2}} = 0.035 \text{ m}$$

La máxima fuerza es por lo tanto:

$$P = k X = 72\,000 \cdot 0.035 = 2520 \text{ N}$$

y el máximo momento en la base de la columna es

$$M = P L = 2520 \cdot 8 = 20\,160 \text{ N} \cdot \text{m}$$

■

2.4 — Vibraciones transitorias

La determinación de la respuesta de un sistema de un grado de libertad que se ve afectado por una excitación que no es ni periódica ni armónica presenta un grado de complejidad mayor. No obstante, el planteamiento matemático de su solución es relativamente sencillo. En muchos casos prácticos donde se tienen excitaciones que no se prestan a una descripción matemática hay necesidad de recurrir a métodos numéricos para obtener la solución. Desde la aparición del computador la alternativa de utilizar soluciones por medio de métodos numéricos ha cobrado mayor popularidad y puede afirmarse que aún en muchos casos para los cuales existe solución trascendental, se recurre al computador. A continuación se presentan los fundamentos matemáticos del problema, y posteriormente en el Capítulo 3, la solución por medio de métodos numéricos.

2.4.1 — Respuesta a un impulso

Un impulso es una fuerza de gran magnitud que actúa durante un tiempo muy corto.

El efecto del impulso está definido por dos parámetros, el valor de la fuerza y su duración. En la Figura 2-16 se muestra un impulso cuya fuerza tiene una magnitud F y que obra por un instante de tiempo Δt .

La magnitud del impulso \hat{F} está definida por:

$$\hat{F} = \int_t^{t+\Delta t} F dt \quad (2-50)$$

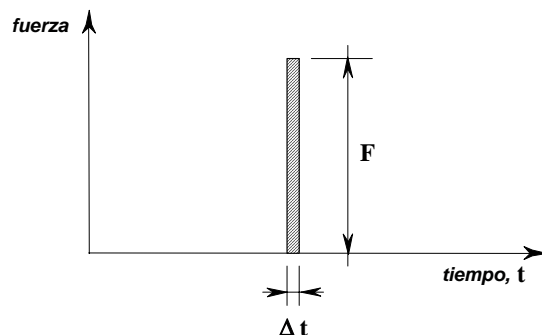


Figura 2-16 - Impulso

Utilizando la segunda ley de Newton, ecuación (1-2), la cual se puede expresar como:

$$F = m a = m \frac{dv}{dt} \quad (2-51)$$

Aceptando que la derivada de la velocidad es expresable como un diferencial se obtendría:

$$\mathbf{F} = m \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (2-52)$$

y al reordenar:

$$\mathbf{F} \Delta t = m \Delta \mathbf{v} \quad (2-53)$$

por lo tanto la magnitud del impulso $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \Delta t$, es equivalente a la masa multiplicada por un cambio en velocidad, $m \Delta \mathbf{v}$.

Al aplicar lo anterior a un sistema elástico de un grado de libertad imponiendo un impulso a la masa del sistema, o sea una fuerza de magnitud definida por un intervalo de tiempo muy corto, se le está produciendo un cambio de velocidad $\Delta \mathbf{v}$, que es equivalente a:

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\mathbf{F} \Delta t}{m} \quad (2-54)$$

Por lo tanto, el sistema sufre un cambio de velocidad pero no de desplazamiento. Esto es totalmente equivalente a imponer una condición inicial de velocidad \mathbf{v}_0 , mientras que la condición inicial de desplazamiento \mathbf{x}_0 , es nula. La condición inicial de velocidad es:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\hat{\mathbf{F}}}{m} \quad (2-55)$$

Entonces para un sistema no amortiguado en vibración libre con condiciones iniciales, ecuación (2-11), la respuesta al impulso para cualquier tiempo t después de su aplicación es:

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \right) \text{sen}(\omega t) = \left(\frac{\hat{\mathbf{F}}}{m \omega} \right) \text{sen}(\omega t) \quad (2-56)$$

y análogamente para el sistema amortiguado, ecuación (2-31), se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\xi \omega t} \left\{ \frac{\mathbf{v}_0}{\omega_a} \text{sen}(\omega_a t) \right\} = e^{-\xi \omega t} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{F}}}{m \omega_a} \text{sen}(\omega_a t) \right\} \quad (2-57)$$

que al incluir la definición de ω_a se convierte en:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\hat{\mathbf{F}}}{m \omega \sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega t} \left\{ \text{sen}(\sqrt{1 - \xi^2} \omega t) \right\} \quad (2-58)$$

Es evidente que esta ecuación adolece de la claridad que requiere la definición de impulso: "Es una fuerza de gran magnitud que actúa durante un tiempo muy corto".

Desde el punto de vista de ingeniería "gran" y "corto" no pasan de ser apreciaciones imperfectas sobre un fenómeno. Lo anterior se aclara en el numeral siguiente, donde esta definición se utiliza para plantear una integración clásica.

Basta recordar que el término $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \Delta t$ provino de expresar como diferencias las derivadas de la 2ª Ley de Newton y que por lo tanto al expresarla nuevamente en términos diferenciales $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} d\tau$, y para un impulso aplicado en cualquier tiempo τ las ecuaciones (2-56) y (2-58) se pueden expresar diferencialmente como:

$$d\dot{x} = \frac{F(\tau)}{m\omega} \text{sen}\{\omega(t-\tau)\} d\tau \quad (2-59)$$

y para el caso con amortiguamiento:

$$d\dot{x} = \frac{F(\tau)}{m\omega\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \left\{ \text{sen}\left[\sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau)\right] \right\} d\tau \quad (2-60)$$

2.4.2 — Excitación arbitraria

Cuando un sistema como el mostrado en la Figura 2-17 se somete a una excitación arbitraria expresada en términos de fuerza, como la indicada en la Figura 2-18, es posible dividirla en una serie de impulsos que se aplican en el tiempo τ y que tienen una duración $d\tau$.

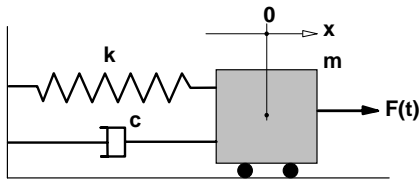


Figura 2-17 - Sistema lineal amortiguado

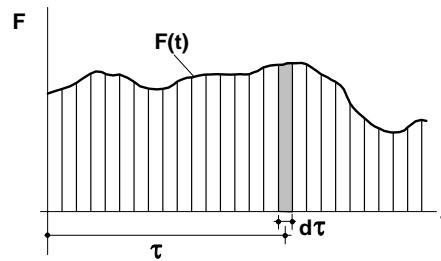


Figura 2-18 - Excitación Arbitraria

Al integrar el efecto de cada uno de estos impulsos diferenciales variando τ , se obtiene para el caso sin amortiguamiento:

$$x(t) = \int_0^t d\dot{x} = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \text{sen}\{\omega(t-\tau)\} d\tau \quad (2-61)$$

y para el caso con amortiguamiento:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\left[\sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau)\right] d\tau \quad (2-62)$$

Estas integrales se conocen como *integrales de convolución* o de *Duhamel*, y corresponden a la solución particular del sistema. Si hay condiciones iniciales hay necesidad de adicionarles la solución homogénea, ecuaciones (2-11) y (2-31) respectivamente.

Ejemplo 2-5

Un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento, $\xi=0$, es sometido a la fuerza mostrada en la Figura 2-19, conocida con el nombre de función escalón.

Debe encontrarse la respuesta en desplazamiento para cualquier tiempo t .

Utilizando la ecuación (2-61) se obtiene:

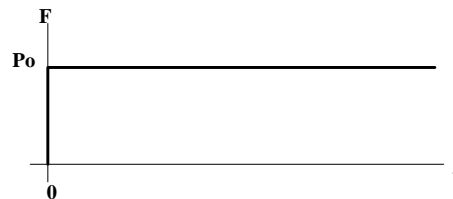


Figura 2-19 - Ejemplo 2-5
Excitación con una función escalón

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin\{\omega(t-\tau)\} d\tau = \frac{P_0}{m\omega} \int_0^t \sin\{\omega(t-\tau)\} d\tau \\
 &= \frac{P_0}{m\omega} \left[\frac{1}{\omega} \cos\{\omega(t-\tau)\} \right]_0^t = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t)
 \end{aligned}$$

En la Figura 2-20 se muestra el gráfico de la respuesta. Los máximos valores de la respuesta se obtienen cuando $\cos(\omega t)$ es igual a **-1.0**, lo cual ocurre para valores de $\omega t = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$, etc. El valor máximo que tiene la respuesta es:

$$x_{\max} = \frac{2P_0}{k}$$

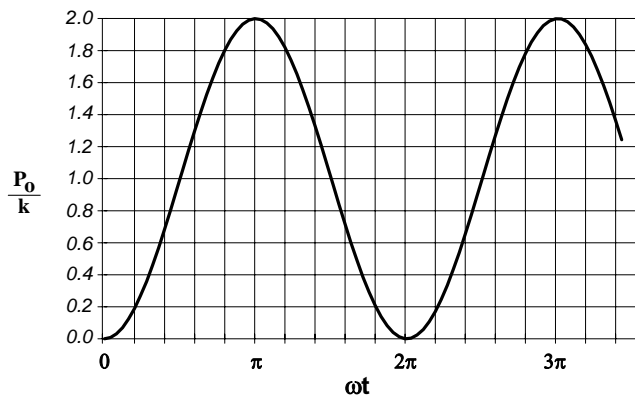


Figura 2-20 - Ejemplo 2-5 - Respuesta a la función escalón



Tema N° 5 — Excitación en la base

2.5 — Excitación en la base

El caso en el cual la excitación del sistema proviene de un movimiento en su base es muy importante en la dinámica estructural, pues la excitación sísmica induce este tipo de respuesta del sistema. En la Figura 2-21 se presenta la idealización de un sistema dinámico de un grado de libertad para este caso.

La ordenada x_0 describe el movimiento de la base de la estructura y la ordenada x corresponde a la posición de la masa. Los otros parámetros son los mismos de los sistemas estudiados anteriormente.

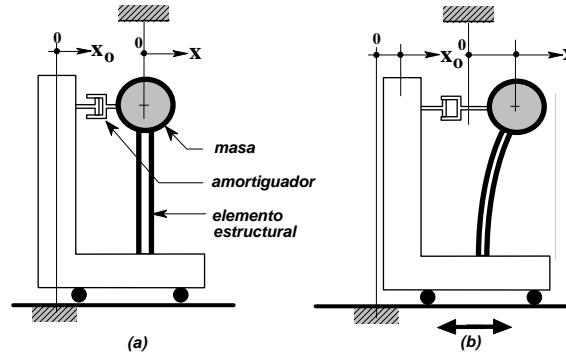


Figura 2-21 - Sistema sometido a excitación en su base

Al hacer cuerpo libre de la masa del sistema puede verse que la fuerza inercial, ecuación (2-2), está dada por:

$$F_i = -m\ddot{x} \quad (2-63)$$

La fuerza en el resorte, o elemento estructural, está descrita por la constante del resorte multiplicada por el desplazamiento relativo entre sus extremos, ecuación (2-1):

$$F_r = k(x - x_0) \quad (2-64)$$

De igual manera la fuerza ejercida por el amortiguador, ecuación (2-12), se determina por medio de la constante del amortiguador multiplicada por la velocidad relativa entre sus extremos:

$$F_a = c(\dot{x} - \dot{x}_0) \quad (2-65)$$

Al aplicar el principio de D'Alembert se obtiene:

$$F_r + F_a - F_i = 0 \quad (2-66)$$

Lo cual conduce a la siguiente ecuación diferencial de equilibrio:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_0) + k(x - x_0) = 0 \quad (2-67)$$

Si se define la variable u para describir el desplazamiento relativo entre la masa y la base de apoyo del sistema, entonces:

$$u = x - x_0 \quad (2-68)$$

que al derivarla contra el tiempo conduce a:

$$\dot{u} = \dot{x} - \dot{x}_0 \quad (2-69)$$

y al derivarla nuevamente:

$$\ddot{u} = \ddot{x} - \ddot{x}_0 \quad \text{y} \quad \ddot{x} = \ddot{u} + \ddot{x}_0 \quad (2-70)$$

Reemplazando (2-68), (2-69) y (2-70) en la ecuación (2-67) se obtiene la siguiente ecuación:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{x}_0 \quad (2-71)$$

La cual indica que un sistema al que se le introduce movimiento en su base es equivalente a un sistema con su base fija al cual se le aplica una fuerza igual a la masa del sistema multiplicada por el negativo de la aceleración del terreno. Utilizando la ecuación (2-62) se obtiene la siguiente solución para la respuesta del sistema:

$$u(t) = \frac{-1}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\left\{\sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau)\right\} d\tau \quad (2-72)$$

Ejemplo 2-6

Un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento ξ ; como el mostrado en la Figura 2-22, es sometido a una aceleración en su base tal como se muestra en la Figura 2-23(a), la cual corresponde a la suma de dos funciones escalón como muestra la Figura 2-23(b). La aceleración del terreno a_0 , es **0.20g** y el tiempo t_a de duración de la aceleración es de **10 s**.

Debe encontrarse la respuesta en términos de desplazamiento para cualquier tiempo t , para un sistema con un período T , de **2 s** y un coeficiente de amortiguamiento crítico ξ , de **5%**.

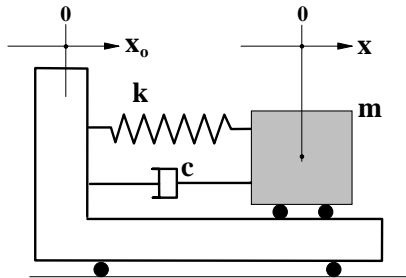


Figura 2-22 - Ejemplo 2-6 - Sistema sometido a excitación en su base

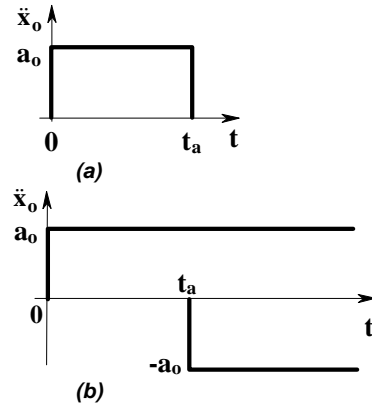


Figura 2-23 - Ejemplo 2-6 Aceleración en la base

Utilizando la ecuación (2-72) se obtiene para $0 \leq t < t_a$:

$$u(t) = \frac{-a_0}{\omega_a} \int_0^t e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\{\omega_a(t-\tau)\} d\tau$$

donde $\omega_a = \sqrt{1-\xi^2} \omega$

Por medio de la siguiente solución de la integral:

$$\int e^{\alpha y} \sin(\beta y) dy = \frac{e^{\alpha y}}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \sin(\beta y) - \beta \cos(\beta y)]$$

se obtiene la solución para el rango $0 \leq t < t_a$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{-a_o}{\omega_a} \left[\frac{-e^{-\xi \omega(t-\tau)}}{\omega^2} \{ \xi \omega \sin(\omega_a(t-\tau)) - \omega_a \cos(\omega_a(t-\tau)) \} \right]_0^t \\ &= \frac{-a_o}{\omega^2} \left(1 - \frac{e^{-\xi \omega t}}{\omega_a} \{ \xi \omega \sin(\omega_a t) + \omega_a \cos(\omega_a t) \} \right) \end{aligned}$$

y para $t \geq t_a$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{-a_o}{\omega \sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t e^{-\xi \omega(t-\tau)} \sin \{ \sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau) \} d\tau \\ &\quad + \frac{a_o}{\omega \sqrt{1-\xi^2}} \int_{t_a}^t e^{-\xi \omega(t-\tau)} \sin \{ \sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau) \} d\tau \end{aligned}$$

Al realizar las integrales correspondientes se llega para $t \geq t_a$, a:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{-a_o}{\omega^2} \left(1 - \frac{e^{-\xi \omega t}}{\omega_a} \{ \xi \omega \sin(\omega_a t) + \omega_a \cos(\omega_a t) \} \right) \\ &\quad + \frac{a_o}{\omega^2} \left(1 - \frac{e^{-\xi \omega(t-t_a)}}{\omega_a} \{ \xi \omega \sin(\omega_a(t-t_a)) + \omega_a \cos(\omega_a(t-t_a)) \} \right) \end{aligned}$$

Para un sistema con un período **T**, de **2 s** y un coeficiente de amortiguamiento crítico ξ , de **5%**, con una aceleración del terreno a_o , de **0.20g** y un tiempo t_a de duración de la aceleración de **10 s**, se obtiene la respuesta mostrada en la Figura 2-24.

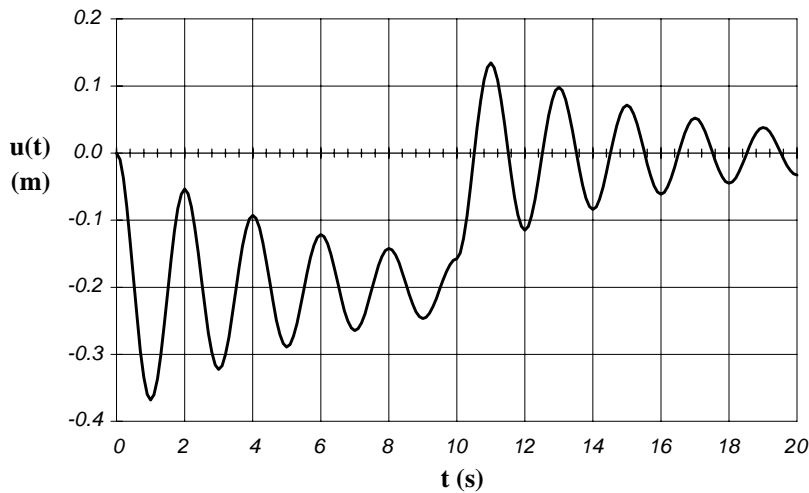


Figura 2-24 - Respuesta

Tema N° 6 — Obtención de la respuesta dinámica

3.1 — Introducción

En la medida que la excitación se hace más compleja su tratamiento por medio de la integral de convolución, ecuaciones (2-61) y (2-62), se hace más difícil, si no imposible. Por esta razón hay necesidad de recurrir a métodos numéricos de solución, los cuales utilizan diferentes técnicas y son apropiados para distintos problemas especiales fácilmente solucionables por medio del computador digital. A continuación se presentan algunos de los métodos más utilizados en la actualidad.

3.3 — Método de la aceleración lineal

Cuando se pretende determinar la respuesta de un sistema lineal de un grado de libertad utilizando procedimientos paso a paso, en general se conoce el desplazamiento de la masa, su velocidad y su aceleración en un instante t ; obteniendo su desplazamiento, velocidad y aceleración al final de un intervalo de tiempo Δt . Si inicialmente se supone que el movimiento es rectilíneo y éste tiene una aceleración constante a , entonces la velocidad v , después de un intervalo de tiempo Δt está dada por la siguiente expresión:

$$v = \int_t^{t+\Delta t} a \, dt = v_0 + (\Delta t) a \quad (3-17)$$

donde v_0 es la velocidad al comienzo del intervalo. El espacio que se recorre durante el intervalo de tiempo Δt corresponde a la siguiente expresión:

$$s = \int_t^{t+\Delta t} [v_0 + (\Delta t) a] \, dt = s_0 + (\Delta t) v_0 + (\Delta t)^2 a / 2 \quad (3-18)$$

donde s_0 es el espacio recorrido hasta el comienzo del intervalo Δt .

Si se toma un sistema lineal como el mostrado en la Figura 3-7, el cual es afectado por una fuerza arbitraria que varía en el tiempo $P(t)$, el comportamiento de este sistema está descrito por la siguiente ecuación diferencial de equilibrio:

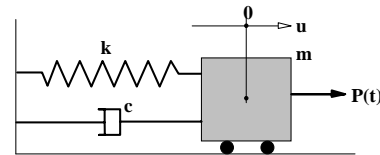


Figura 3-7 - Sistema lineal amortiguado

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = P(t) \quad (3-19)$$

La respuesta del sistema en términos de la aceleración de la masa \ddot{u} , tiene la forma mostrada en la Figura 3-8. Allí puede observarse que la aceleración de la masa no permanece constante durante el intervalo Δt . Además el hecho de que la fuerza no permanece constante durante el intervalo, introduce errores en la solución cuando se utiliza la aceleración promedio.

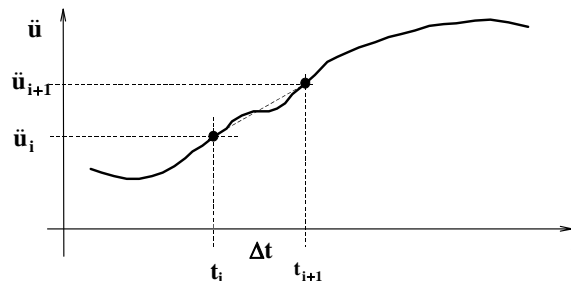


Figura 3-8 - Aceleración de la masa

Si se supone que la aceleración varía linealmente durante el intervalo de tiempo, entonces:

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}_i + \left(\frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \right) (t - t_i) \quad (3-20)$$

Integrando esta expresión se obtiene la siguiente ecuación para la velocidad:

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i (t - t_i) + \left(\frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \right) \frac{(t - t_i)^2}{2} \quad (3-21)$$

Cuando esta última ecuación se evalúa en el tiempo t_{i+1} se obtiene la siguiente expresión para la velocidad al final del intervalo Δt :

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (3-22)$$

Integrando la ecuación (3-21) se obtiene la siguiente ecuación para el desplazamiento:

$$u(t) = u_i + \dot{u}_i (t - t_i) + \ddot{u}_i \frac{(t - t_i)^2}{2} + \left(\frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \right) \frac{(t - t_i)^3}{6} \quad (3-23)$$

De la ecuación anterior se obtiene el desplazamiento al final del intervalo Δt :

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i (\Delta t) + \ddot{u}_i \frac{(\Delta t)^2}{3} + \ddot{u}_{i+1} \frac{(\Delta t)^2}{6} \quad (3-24)$$

Utilizando la ecuación de equilibrio, (3-19), evaluada al final del intervalo:

$$m \ddot{u}_{i+1} + c \dot{u}_{i+1} + k u_{i+1} = P(t = t_{i+1}) \quad (3-25)$$

Ahora se puede despejar el valor de la aceleración al final del intervalo, utilizando las ecuaciones (3-21) y (3-23) para los valores de la velocidad y el desplazamiento, respectivamente:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{P(t = t_{i+1})/m - \omega^2 u_i - (2\xi\omega + \omega^2 \Delta t) \dot{u}_i - (\omega \Delta t)(\xi + \omega \Delta t / 3) \ddot{u}_i}{1 + \xi\omega(\Delta t) + (\omega \Delta t)^2 / 6} \quad (3-26)$$

El intervalo de evaluación de la respuesta, nuevamente, debe ser lo suficientemente pequeño para garantizar que la respuesta se evalúa adecuadamente. Como mínimo debe corresponder a los puntos en los cuales cambia la fuerza de excitación.

Ejemplo 3-3

Se repite el ejemplo 3-2, utilizando el método de la aceleración lineal. Se define un intervalo de evaluación de la respuesta igual a **1/20** del período del sistema, o sea **0.1 s**. Luego se procede a calcular las siguientes constantes:

$$\Delta t = 0.1 \text{ s}$$

$$m = 1.0 \text{ kg (de los datos iniciales)}$$

$$\omega = 3.1416 \text{ rad/s (de los datos iniciales)}$$

$$\xi = 0.05 \text{ (de los datos iniciales)}$$

$$c_1 = \omega^2 = (3.1416)^2 = 9.8696 \text{ (rad/s)}^2$$

$$c_2 = 2\xi\omega + \omega^2 \Delta t = 2 \cdot 0.05 \cdot 3.1416 + (3.1416)^2 \cdot 0.1 = 1.30112$$

$$c_3 = (\omega \Delta t) (\xi + \omega \Delta t / 3) = (3.1416 \times 0.1) \cdot (0.05 + 3.1416 \cdot 0.1 / 3) = 0.048607$$

$$c_4 = 1 + \xi\omega \Delta t + (\omega \Delta t)^2 / 6 = 1 + 0.05 \cdot 3.1416 \cdot 0.1 + (3.1416 \cdot 0.1)^2 / 6 = 1.03216$$

$$c_5 = \Delta t / 2 = 0.1/2 = 0.05 \text{ s}$$

$$c_6 = \Delta t = 0.1 \text{ s}$$

$$c_7 = (\Delta t)^2 / 3 = (0.1)^2 / 3 = 0.0033333 \text{ s}^2$$

$$c_8 = (\Delta t)^2 / 6 = (0.1)^2 / 6 = 0.0016666 \text{ s}^2$$

En cada punto de evaluación se calcula lo siguiente:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{P(t = t_{i+1})/m - c_1 u_i - c_2 \dot{u}_i - c_3 \ddot{u}_i}{c_4}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + c_5 (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$u_{i+1} = u_i + c_6 \dot{u}_i + c_7 \ddot{u}_i + c_8 \ddot{u}_{i+1}$$

Utilizando estos datos se construye la siguiente tabla:

Tabla 3-3 - Respuesta utilizando el método de la aceleración lineal

t	F(t)	\ddot{u}_i	\dot{u}_i	u_i
0.00	-1.9600	-1.96000	0.00000	0.00000
0.10	-1.9600	-1.80663	-0.18833	-0.00954
0.20	-1.9600	-1.48518	-0.35292	-0.03687
0.30	-1.9600	-1.03150	-0.47876	-0.07884
0.40	-1.9600	-0.49300	-0.55498	-0.13097
0.50	-1.9600	0.07626	-0.57582	-0.18799
0.60	-1.9600	0.62090	-0.54096	-0.24428
0.70	-1.9600	1.08959	-0.45544	-0.29449
0.80	-1.9600	1.43982	-0.32897	-0.33400
0.90	-1.9600	1.64172	-0.17489	-0.35936
1.00	-1.9600	1.68049	-0.00878	-0.36858
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9.00	-1.9600	0.48600	-0.02286	-0.24710
9.10	-1.9600	0.46983	0.02493	-0.24699
9.20	-1.9600	0.40923	0.06888	-0.24225
9.30	-1.9600	0.31135	0.10491	-0.23347
9.40	-1.9600	0.18667	0.12981	-0.22164
9.50	-1.9600	0.04794	0.14154	-0.20795
9.60	-1.9600	-0.09116	0.13938	-0.19379
9.70	-1.9600	-0.21730	0.12396	-0.18052
9.80	-1.9600	-0.31883	0.09715	-0.16938
9.90	-1.9600	-0.38677	0.06187	-0.16137
10.00	-1.9600	-0.41567	0.02175	-0.15717

■

3.4 — Método Beta de Newmark

Otra manera de manejar el problema de que la aceleración no es constante durante el intervalo de evaluación fue desarrollada por Newmark [Newmark, 1959], utilizando un estimativo de la aceleración al final del intervalo, que se va corrigiendo por medio de un proceso iterativo lo que hace posible resolver el problema. Al respecto Newmark propuso utilizar la aceleración a expresada de la siguiente manera:

$$a = (1 - 2\beta) \ddot{u}_i + 2\beta \ddot{u}_{i+1} \quad (3-27)$$

donde β es una constante que varía entre 0 y 1/2, en la ecuación (3-27). En la Figura 3-9 se muestra la interpretación que se puede dar a diferentes valores de β .

Ahora, utilizando la aceleración promedio y el valor de la aceleración dado por la ecuación (3-27); se obtienen las siguientes expresiones (3-28) y (3-29) para la velocidad y el desplazamiento al final del intervalo de tiempo Δt en función de los valores al comienzo del intervalo:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \left(\frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}}{2} \right) \Delta t \quad (3-28)$$

y

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \quad (3-29)$$

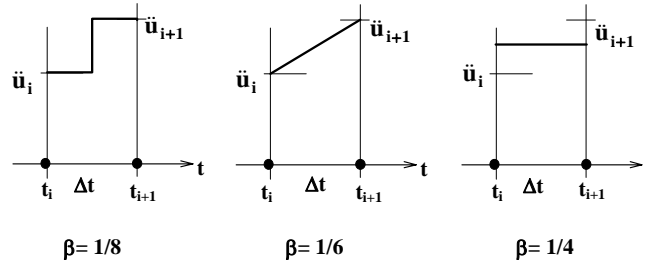


Figura 3-9 - Variación de la aceleración de la masa durante el intervalo Δt según el valor de β en el método Beta de Newmark

Utilizando los valores de desplazamiento y velocidad al final del intervalo obtenidos de las dos ecuaciones anteriores en la ecuación de equilibrio (3-19) del sistema, se obtiene un mejor valor de la aceleración al final del intervalo Δt :

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{P(t) - c \dot{u}_{i+1} - k u_{i+1}}{m} \quad (3-30)$$

Este valor de \ddot{u}_{i+1} se utiliza en la ecuación (3-27) y de nuevo se calculan los valores de \dot{u}_{i+1} , u_{i+1} y \ddot{u}_{i+1} por medio de las ecuaciones (3-28), (3-29) y (3-30) respectivamente. Este proceso iterativo se repite hasta que se obtenga un valor de la aceleración al final del intervalo que sea igual, con un error aceptable, a la estimada al inicio del proceso. En ese momento se incrementa el tiempo en un intervalo Δt y se repite el proceso para este nuevo intervalo de tiempo. De esta manera se determinan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la masa durante todo el tiempo de interés.

A medida que el intervalo de tiempo Δt que se utilice en el proceso numérico sea menor, mayor será la precisión de la respuesta. En general es recomendable utilizar valores menores de 1/10 del período de vibración del sistema. Respecto a la escogencia del valor de β no existe una regla definida, pero en general con $\beta = 1/6$ la respuesta es exacta si la aceleración varía linealmente durante el intervalo, con $\beta = 1/4$ la respuesta es exacta si la velocidad es constante durante el intervalo. Newmark sugirió que si se utilizan valores entre 1/6 y 1/4 la respuesta es satisfactoria desde todo punto de vista y que un valor de $\beta = 1/6$ es estable en todos los casos.

En resumen el procedimiento de solución es el siguiente:

1. Con los datos del sistema se selecciona un valor de Δt apropiado, en general menor de 1/10 del período del sistema:

$$\Delta t \leq \frac{T}{10} = \frac{1}{10} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

2. Se incrementa el tiempo (en el primer punto $i = 1$, $t_i = 0$) para localizarse en el punto $i+1$ de tal manera que: $t_{i+1} = t_i + \Delta t$
3. Se estima la aceleración al final del intervalo \ddot{u}_{i+1}^0 . En general se utiliza la aceleración del punto anterior \ddot{u}_i .
4. Se encuentra \dot{u}_{i+1} utilizando la ecuación (3-28):

$$\ddot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \left(\frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}^0}{2} \right) \Delta t$$

5. Se calcula **a** utilizando la ecuación (3-27):

$$a = (1 - 2\beta) \ddot{u}_i + 2\beta \ddot{u}_{i+1}^0$$

y con este valor se determina **u_{i+1}** utilizando la ecuación (3-29):

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

6. Se calcula **ü_{i+1}¹** utilizando la ecuación (3-30):

$$\ddot{u}_{i+1}^1 = \frac{P(t) - c \dot{u}_{i+1} - k u_{i+1}}{m}$$

7. Sí $|\ddot{u}_{i+1}^1 - \ddot{u}_{i+1}^0| < \varepsilon$,

donde ε es un error aceptable, los valores obtenidos son adecuados y **ü_{i+1}¹** se convierte en el valor definitivo de **ü_{i+1}** y el proceso se mueve al siguiente punto, **i = i+1**, incrementando el tiempo en el paso 2. Si el valor del error no es aceptable se realiza una nueva iteración haciendo **ü_{i+1}⁰ = ü_{i+1}¹**, y este nuevo valor se utiliza en el paso 4 y siguientes.

Ejemplo 3-4

Se repiten los primeros 2.2 s del ejemplo 3-2 utilizando el método Beta de Newmark con $\beta = 1/6$. El período **T**, es **2 s** y el coeficiente de amortiguamiento crítico ξ , es **5%**.

La aceleración del terreno **a_o**, es **0.20 m/s²** y el tiempo **t_a** de duración de la aceleración es **10 s**. Se utiliza un intervalo de tiempo igual a **1/10 de T**, o sea **Δt = 0.20 s**.

Tabla 3-4 - Respuesta utilizando el método Beta de Newmark

t (s)	ẍ_o (m/s ²)	ü (m/s ²)	ḡ (m/s)	u (m)	estación
0.000	0.000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	i₁⁰
0.000	0.200	0.00000000 -0.20000000	0.00000000 0.00000000	0.00000000 0.00000000	i₂⁰ ← i₂
0.200	0.200	-0.20000000 -0.14795521 -0.15301466 -0.15252281 -0.15257063 -0.15256598 -0.15256643 -0.15256639	-0.04000000 -0.03479552 -0.03530147 -0.03525228 -0.03525706 -0.03525660 -0.03525664 -0.03525664	-0.00400000 -0.00365303 -0.00368676 -0.00368349 -0.00368380 -0.00368377 -0.00368378 -0.00368378	i₃⁰ i₃¹ ← i₃
0.400	0.200	-0.15256639 -0.04327115 -0.05389610 -0.05286321 -0.05296362 -0.05295386 -0.05295481 -0.05295472 -0.05295473	-0.06576992 -0.05484039 -0.05590289 -0.05579960 -0.05580964 -0.05580866 -0.05580876 -0.05580875 -0.05580875	-0.01378643 -0.01305780 -0.01312863 -0.01312174 -0.01312241 -0.01312235 -0.01312235 -0.01312235 -0.01312235	i₄⁰ i₄¹ ← i₄
0.600	0.200	-0.05295473 0.07098743 0.05893860 0.06010991	-0.06639970 -0.05400548 -0.05521036 -0.05509323	-0.02534320 -0.02451692 -0.02459724 -0.02458944	i₅⁰ i₅¹ . .

		0.05999604 0.06000711 0.06000604 0.06000614 0.06000613	-0.05510462 -0.05510351 -0.05510362 -0.05510361 -0.05510361	-0.02459019 -0.02459012 -0.02459013 -0.02459013 -0.02459013	. . i_5^0 . i_5^1 . $\Leftarrow i_5$
0.800	0.200	0.06000613 0.15316126 0.14410534 0.14498570 0.14490012 0.14490844 0.14490763 0.14490771	-0.04310239 -0.03378687 -0.03469246 -0.03460443 -0.03461299 -0.03461216 -0.03461224 -0.03461223	-0.03441073 -0.03378969 -0.03385007 -0.03384420 -0.03384477 -0.03384471 -0.03384472 -0.03384472	i_6^0 i_6^1 . i_6^2 . i_6^3 . i_6^4 . i_6^5 $\Leftarrow i_6$
1.000	0.200	0.14490771 0.17552104 0.17254502 0.17283433 0.17280621 0.17280894 0.17280867 0.17280870	-0.00563069 -0.00256936 -0.00286696 -0.00283803 -0.00284084 -0.00284057 -0.00284059 -0.00284059	-0.03786901 -0.03766492 -0.03768476 -0.03768283 -0.03768302 -0.03768300 -0.03768300 -0.03768300	i_7^0 i_7^1 . i_7^2 . i_7^3 . i_7^4 . i_7^5 $\Leftarrow i_7$
1.200	0.200	0.17280870 0.13344682 0.13727332 0.13690133 0.13693749 0.13693398 0.13693432 0.13693429	0.03172116 0.02778497 0.02816762 0.02813042 0.02813404 0.02813369 0.02813372 0.02813372	-0.03479494 -0.03505736 -0.03503185 -0.03503433 -0.03503409 -0.03503411 -0.03503411 -0.03503411	i_8^0 i_8^1 . i_8^2 . i_8^3 . i_8^4 . i_8^5 $\Leftarrow i_8$
1.400	0.200	0.13693429 0.04576696 0.05462964 0.05376806 0.05385182 0.05384368 0.05384447 0.05384439 0.05384440	0.05552058 0.04640384 0.04729011 0.04720396 0.04721233 0.04721152 0.04721160 0.04721159 0.04721159	-0.02666867 -0.02727646 -0.02721737 -0.02722312 -0.02722256 -0.02722261 -0.02722261 -0.02722261 -0.02722261	i_9^0 i_9^1 . i_9^2 . i_9^3 . i_9^4 . i_9^5 $\Leftarrow i_9$
1.600	0.200	0.05384440 -0.05335917 -0.04293755 -0.04395067 -0.04385218 -0.04386176 -0.04386083 -0.04386092 -0.04386091	0.05798047 0.04726011 0.04830227 0.04820096 0.04821081 0.04820985 0.04820995 0.04820994 0.04820994	-0.01670340 -0.01741809 -0.01734861 -0.01735537 -0.01735471 -0.01735477 -0.01735477 -0.01735477 -0.01735477	i_{10}^0 i_{10}^1 . i_{10}^2 . i_{10}^3 . i_{10}^4 . i_{10}^5 $\Leftarrow i_{10}$
1.800	0.200	-0.04386091 -0.12760987 -0.11946836 -0.12025982 -0.12018288 -0.12019036 -0.12018963 -0.12018970	0.03943775 0.03106286 0.03187701 0.03179786 0.03180556 0.03180481 0.03180488 0.03180487	-0.00859000 -0.00914832 -0.00909405 -0.00909932 -0.00909881 -0.00909886 -0.00909886 -0.00909886	i_{11}^0 i_{11}^1 . i_{11}^2 . i_{11}^3 . i_{11}^4 . i_{11}^5 $\Leftarrow i_{11}$
2.000	0.200	-0.12018970 -0.15169376 -0.14863115 -0.14892888 -0.14889993 -0.14890275 -0.14890247 -0.14890250	0.00776693 0.00461652 0.00492278 0.00489301 0.00489590 0.00489562 0.00489565 0.00489565	-0.00514167 -0.00535170 -0.00533128 -0.00533327 -0.00533308 -0.00533309 -0.00533309 -0.00533309	i_{12}^0 i_{12}^1 . i_{12}^2 . i_{12}^3 . i_{12}^4 . i_{12}^5 $\Leftarrow i_{12}$
2.200	0.200	-0.14890250 -0.11981811 -0.12264550 -0.12237064	-0.02488486 -0.02197642 -0.02225916 -0.02223167	-0.00733202 -0.00713812 -0.00715697 -0.00715514	i_{13}^0 i_{13}^1 . i_{13}^2 . i_{13}^3

		-0.12239736	-0.02223435	-0.00715531	.
		-0.12239476	-0.02223409	-0.00715530	.
		-0.12239501	-0.02223411	-0.00715530	.
		-0.12239499	-0.02223411	-0.00715530	$\Leftarrow i_{13}$

3.5 — Otros métodos

Existen otros métodos para lograr la solución numérica de la respuesta del sistema; en [Berg, 1989] se presentan varios, incluyendo una serie de programas de computador de cada uno de ellos. Así mismo en [Humar, 1990] y [Bathe, 1996] se discuten las bondades, ventajas y desventajas de cada uno de estos métodos. Dentro de aquellos diferentes a los presentados, que son utilizados en la actualidad se pueden mencionar: el uso de la expansión por series de Taylor, el método de Adams-Stoermer, la utilización de los procedimientos de Runge-Kutta, el método Teta de Wilson, y muchos otros que son variaciones de los anteriores. En general el método Beta de Newmark cumple la función de ilustrar sobre el procedimiento de solución de una manera sencilla y en general es aplicable a la gran mayoría de los problemas dinámicos que se encuentran en la práctica.

3.8 — Uso del computador

Indudablemente el computador digital ha facilitado enormemente las labores de evaluación de la respuesta de sistemas dinámicos, aún para excitaciones que no se prestan a un tratamiento analítico. Algunas de las metodologías se pueden aplicar por medio de hojas electrónicas, otras requieren el uso de programas especiales, desarrollados en cualquiera de los lenguajes disponibles en la actualidad. Un aspecto que ha cambiado recientemente es la facilidad de producir gráficas de muy buena calidad por medio de las hojas electrónicas o de los lenguajes de programación.

Dentro de los programas de computador suministrados se ha incluido el programa RESDIN3, el cual permite encontrar la respuesta de sistemas de un grado de libertad, lineales y no lineales, para diferentes tipos de excitación, inclusive aceleración en la base, utilizando el método Beta de Newmark tal como se presentó en la Sección 3.4. En la Sección 6.8 se presenta el programa RESDIN en detalle.

Tema N° 7 — Sismos, sismogramas y acelerogramas

4.1 — Introducción

El presente texto no pretende cubrir temas tan amplios y especializados como son la sismología y la ingeniería sísmica. No obstante para efectos de poder explicar algunos aspectos fundamentales de la respuesta sísmica de estructuras se requieren algunos conocimientos básicos sobre estas disciplinas. Las personas interesadas en ampliar sus conocimientos sobre el tema deben dirigirse a publicaciones especializadas como la referencia [Sarria, 1995a].

4.2 — Causas de los temblores

4.2.1 — Tectónica y sismicidad global

Al aceptar la comunidad científica el hecho de que la corteza terrestre está en un estado permanente de cambio, la explicación sobre las causas de los sismos fue adquiriendo connotaciones cada vez más realistas. La corteza terrestre es relativamente delgada. Se extiende hasta profundidades de 70 km en los océanos y 150 km bajo los continentes. Es muy válida la analogía, [Gere y Shah, 1984], de que al comparar la Tierra con un huevo duro, la corteza tendría un espesor semejante a la cáscara y ésta estaría fracturada en una serie de fragmentos que en la Tierra se conocen con el nombre de *placas tectónicas*.

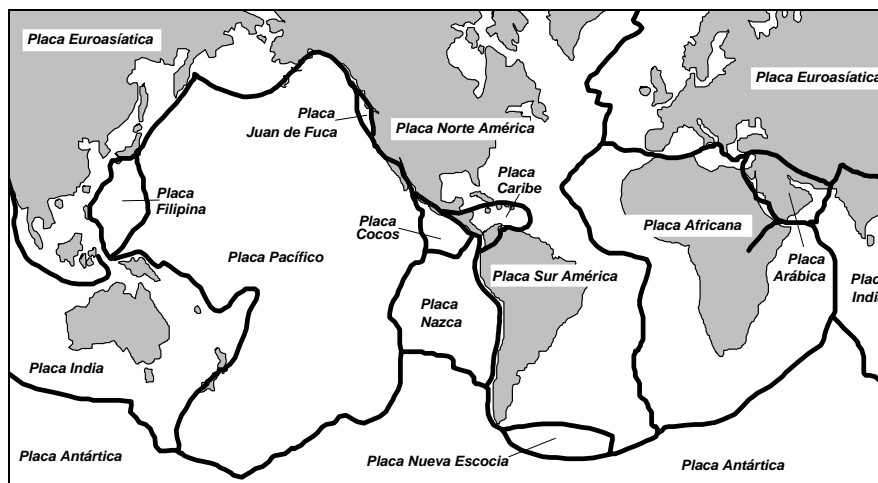


Figura 4-1 - Placas tectónicas de la Tierra

En la Figura 4-2, adaptada de [Bolt, 1993a], se muestra la distribución de sismos en el mundo, la cual está muy asociada con los bordes de estas placas tectónicas.

Hay fuerzas bajo la corteza terrestre que hacen que estas placas tectónicas se muevan a velocidades pequeñas del orden de centímetros por año. La causa de estas fuerzas no está muy entendida, pero la explicación prevaleciente en la actualidad es que son causadas por flujos lentos de magma en el *manto* terrestre. Estos flujos son producidos por convección térmica y por los efectos dinámicos de la rotación de la Tierra. En algunas regiones las placas se están separando en la medida que sale a la superficie nuevo material de corteza desde el interior de la Tierra, estos lugares en general están localizados en el fondo de los océanos y tienen el nombre de *crestas o dorsales marinas*. Un sitio donde ocurre esto está localizado en el centro del Océano Atlántico. En otros lugares las placas se deslizan una al lado de la otra como, ocurre en la Falla de San Andrés en California, USA. En otros sitios, llamados *zonas de subducción*, las placas se empujan una contra otra haciendo que una de las dos se introduzca por debajo. Esto último ocurre a todo lo largo de la costa sobre el Océano Pacífico de Centro y Sur América.

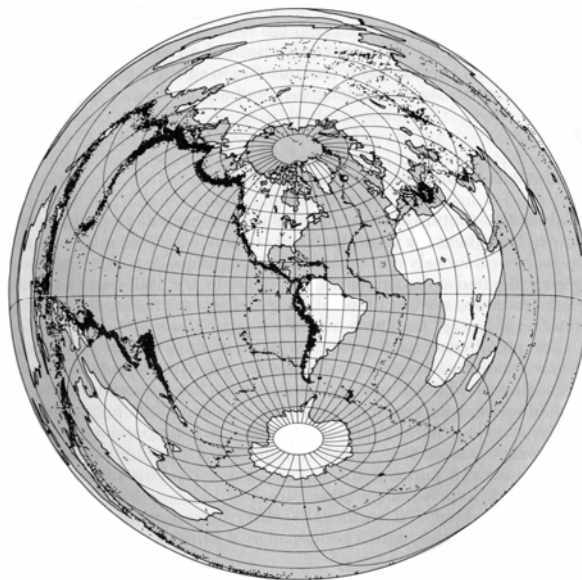


Figura 4-2 - Distribución de los sismos en la Tierra

El movimiento relativo entre placas tectónicas colindantes, independientemente de su dirección, acumula energía hasta un momento en el cual causa una fractura en la roca, liberando abruptamente esta energía acumulada, la cual se manifiesta con la generación de ondas sísmicas.

La gran mayoría de los sismos en el mundo ocurre en las fronteras entre placas. Estos sismos se conocen con el nombre de *sismos tectónicos*. Un porcentaje pequeño de los sismos que ocurren en el mundo se localiza en el interior de las placas tectónicas y reciben el nombre de *sismos intraplaca*. Además en algunas regiones del mundo donde hay volcanes, las erupciones generalmente son acompañadas por sismos que se conocen con el nombre de *sismos volcánicos*.

Además de los anteriores algunas actividades humanas generan sismos, como es el caso de los asociados con el llenado de grandes embalses, o causados por explosiones importantes. En la Figura 4-3 se muestra un corte en una zona de subducción y los puntos donde se generan sismos causados por los movimientos de las placas tectónicas.

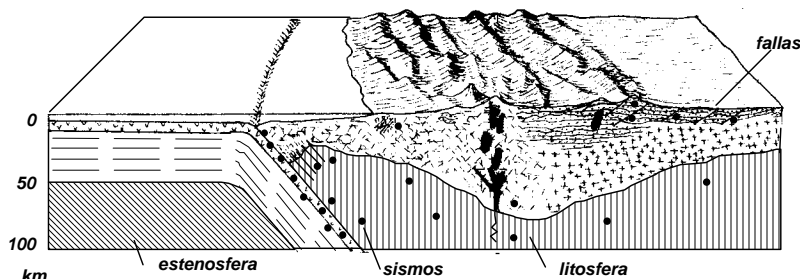


Figura 4-3 - Zona de subducción

En general las fronteras entre placas tectónicas no son superficies de fallamiento simples y únicas. El movimiento relativo entre las dos placas se extiende a grupos de fallas paralelas a la subducción y los sismos no solo ocurren en estas fallas sino también en fallas transversales a las fronteras entre placas, formadas también por los movimientos entre ellas.

4.2.2 — Fallas geológicas

Las fallas geológicas que son capaces de producir sismos se conocen con el nombre de *fallas activas*. Los esfuerzos que induce en la corteza terrestre el movimiento entre placas en la subducción producen fallamientos dentro de la placa, algunas veces alejados de la zona de subducción. En razón de lo anterior, la acumulación de energía causada por la imposición de movimiento puede conducir a deslizamientos pequeños, pero permanentes. En este caso no se presentan sismos.

Cuando la fricción entre las superficies del fallamiento es alta se produce lo que se llama un *engatillamiento* de la falla. Cuando la energía acumulada vence esta fricción se presenta un deslizamiento súbito de la falla, asociado con la liberación de la energía acumulada, lo cual produce el sismo.

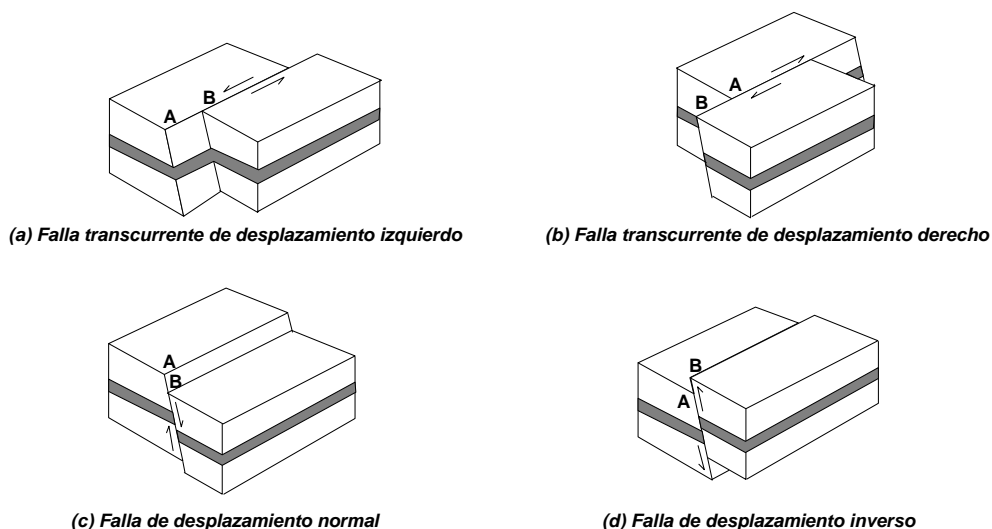


Figura 4-4 - Tipos de movimiento en las fallas geológicas

En la Figura 4-4 se muestran los tipos de fallamiento de acuerdo con el movimiento en la falla. La distancia de A a B corresponde al desplazamiento de la falla. En los casos mostrados en las Figuras 4-4 (a) y (b), la falla presenta *desplazamiento lateral*, con la dirección del movimiento identificado como derecho o izquierdo. Nótese que la dirección del movimiento es independiente del lado que se tome como referencia. Las fallas de *desplazamiento normal*, Figura 4-4(c) presentan movimiento normal a la falla pero no hay desplazamiento lateral. En los casos de *desplazamiento inverso*, Figura 4-4(d), el movimiento también es normal a la falla sin desplazamiento lateral, presentándose compresión entre dos puntos opuestos localizados a través de la falla. Las tasas de desplazamiento relativo en las fallas varían entre unos milímetros por año hasta un máximo cercano a 100 mm/año. El desplazamiento súbito que se presenta al ocurrir un sismo en la falla puede variar entre menos de 100 mm y hasta 10 metros. Hay evidencia de grandes desplazamientos ocurridos durante sismos importantes. Por ejemplo el sismo de San Francisco, California, ocurrido el 18 de Abril de 1906, involucró 430 km de la falla de San Andrés. El movimiento en la falla fue principalmente horizontal alcanzando un máximo de 6 metros al norte de San Francisco. El máximo desplazamiento vertical observado fue del orden de un metro.

4.2.3 — Mecanismo focal

Al ocurrir un sismo, el punto donde se inicia la ruptura es el punto donde comienza la liberación de energía del sismo, y se conoce con el nombre de *hipocentro* o *foco* del sismo. Para un sismo pequeño es razonable considerar el hipocentro como el punto donde se libera la energía. En un sismo grande donde la ruptura puede involucrar cientos de kilómetros cuadrados de superficie de falla, el punto de inicio de la liberación de energía sigue siendo el hipocentro del temblor, pero en general no es descriptivo de la zona de fallamiento. El *epicentro* es la proyección sobre la superficie de la Tierra del hipocentro y la *profundidad focal* es la profundidad del hipocentro, medida desde el epicentro. La *distancia focal* es la distancia al hipocentro desde un punto cualquiera de referencia.

Dado que la superficie de la roca en la falla no es lisa ni uniforme, la propagación de la ruptura a través de ella no ocurre a una velocidad constante, sino a través de una serie de movimientos súbitos. Esto explica, en alguna manera, la forma irregular y aleatoria de las ondas que produce el sismo. La zona de ruptura se extiende a partir del foco en todas las direcciones, llegando hasta la superficie en algunos casos. En la medida que el foco es más profundo, las características de la roca allí son diferentes, debido a la mayor presión y temperatura a que se encuentran sometidas comparativamente con las de la roca en la superficie; esto conduce a que la forma como ocurre la ruptura sea diferente. La explicación prevaleciente en la actualidad está asociada con cambios en el volumen de la roca, como consecuencia de cambios en el estado de fase del material que las compone, algo similar al cambio de volumen que le

ocurre al agua cuando la temperatura baja de 4° C, [Bolt, 1993b], aunque existen diversas teorías al respecto.

En general los sismos se dividen en: superficiales, cuando ocurren a profundidades menores de 70 km, de foco intermedio, entre 70 y 300 km, y profundos cuando su profundidad es mayor de 300 km. Existen registros de sismos hasta profundidades de 700 km. Desde el punto de vista de los efectos del sismo, definitivamente, entre más superficial, mayor su predisposición de producir daños. En aquellas regiones de la Tierra donde existen cadenas montañosas importantes, suelen presentarse sismos dentro de toda la gama de profundidades, mientras en aquellas regiones donde la corteza terrestre es delgada, hay una mayor preponderancia de los sismos superficiales.

4.2.4 — Premonitorios y réplicas

En algunos casos se presentan uno o varios sismos pequeños, antes de la ocurrencia del evento principal. Estos eventos se conocen con el nombre de *premonitorios*. De igual manera, con posterioridad a un sismo importante, se presentan temblores de menor magnitud, a los que se les conoce con el nombre de *réplicas*. Sólo los sismos superficiales y de profundidad moderada producen réplicas, las cuales son de gran importancia para determinar el plano de falla, y esta es la razón por la cual se instalan redes sismológicas móviles con posterioridad a un sismo de importancia.

4.3 — Ondas sísmicas

La energía liberada por el sismo se propaga por medio de varios tipos de *ondas sísmicas*. Las *ondas de cuerpo* que se generan en el punto de ruptura incluyen *ondas P* (primarias u ondas de dilatación), las cuales manifiestan desplazamientos de las partículas en la misma dirección de la propagación de la onda, y *ondas S* (secundarias u ondas de cortante) que manifiestan desplazamientos de las partículas en la dirección perpendicular a la dirección de propagación.

Cuando las ondas llegan a la superficie, se reflejan pero al mismo tiempo inducen *ondas de superficie*, entre las cuales se cuentan las *ondas de Rayleigh* y las *ondas de Love* (Ondas R y L respectivamente). Las ondas de Love producen movimientos horizontales transversales a la dirección de propagación. Las ondas de Rayleigh producen movimientos circulares semejantes al de las olas en el mar. La amplitud de estas ondas decrece marcadamente con la profundidad medida desde la superficie.

4.4 — Sismogramas

Uno de los instrumentos empleados en sismología es el *sismógrafo*, el cual es adecuado para registrar sismos que ocurren a distancias apreciables, inclusive de miles de kilómetros. Los sismógrafos, en general, se salen de rango de medición cuando el sismo ocurre cerca a su localización. El registro obtenido por este instrumento se denomina *sismograma*. En la Figura 4-5 se muestra un sismograma.

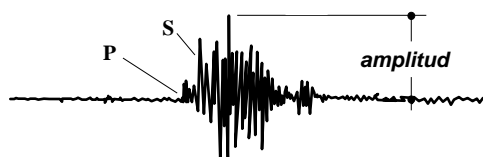


Figura 4-5 - Sismograma

Allí puede identificarse la llegada en el tiempo de las ondas P y de las ondas S. Dado que la velocidad de propagación de las dos ondas es diferente, siendo mayor la de la onda P; utilizando la diferencia en tiempo entre las llegadas de las dos ondas, es posible determinar la distancia a que ocurrió el sismo. Conociendo los sismogramas de varias estaciones es posible localizar el hipocentro del sismo con base en las distancias determinadas de los tiempos entre llegadas de las ondas.

4.5 — Magnitud del sismo

4.5.1 — Definición de la magnitud de Richter

La *magnitud* del sismo es una medida de la energía liberada por él. Es una medición instrumental y se calcula a partir del sismograma. Fue definida por C. Richter en 1935 de ahí su nombre de *magnitud de Richter*. Su definición original era para sismos locales, o cercanos, como el logaritmo en base 10 de la amplitud de la máxima onda sísmica (véase la Figura 4-5), expresada en milésimos de milímetro, registrada en un sismógrafo marca Wood-Anderson, localizado a 100 km del epicentro. Existe un procedimiento para ajustar la medición cuando el registro se toma a distancias diferentes de 100 km. En general todo sismógrafo tiene definidas las relaciones correspondientes para ajustar los valores medidos a los del sismógrafo Wood-Anderson.

La definición original de la magnitud de Richter, también conocida como *magnitud local* (M_L), no especificaba el tipo de ondas a utilizar en la determinación de la amplitud, pues simplemente indicaba que debía ser la mayor amplitud. La magnitud local es muy sensitiva al tipo de instrumento empleado y a la distancia a la cual se realizó el registro. No obstante estas limitaciones la magnitud local correlaciona de una manera bastante buena con el daño que produce el sismo a las edificaciones, por esta razón se sigue calculando su valor en muchos casos. La definición de la magnitud se ha extendido posteriormente, para ser utilizada en diferentes métodos para calcular la distancia epicentral, los cuales dependen de la escogencia de la amplitud de la onda sísmica apropiada. La magnitud es una escala que no tiene ni mínimo ni máximo aunque en alguna medida debe existir un límite superior impuesto por las características mecánicas de las rocas que componen la corteza terrestre, lo cual se aprecia en los gráficos de número de eventos contra magnitud, en los cuales se puede apreciar un cruce en la curva, volviéndose asíntota a un valor cercano a 9. La magnitud máxima registrada hasta la actualidad ha sido del orden de 8.9.

4.5.2 — Tipos de magnitud

La práctica actual en los observatorios sismológicos es utilizar dos procedimientos para el cálculo de la magnitud, los cuales difieren de la definición original de Richter. La necesidad de disponer de dos escalas proviene del hecho de que los temblores profundos producen sismogramas de tipología diferente a los de sismos superficiales. En general los sismogramas de temblores profundos no manifiestan trenes de ondas superficiales mientras que éstos si se manifiestan en un sismograma de un temblor superficial. Dado que en ambos tipos de sismos se presentan ondas P la magnitud se evalúa utilizando estas ondas y se conoce con el nombre de *magnitud de ondas de cuerpo* (m_b) (o magnitud de onda P). El período de vibración al cual se realiza la medición de la magnitud m_b es generalmente de 1 s, dado que la mayoría de los instrumentos de la red sismológica mundial son sismógrafos de período corto del orden de un segundo. Algunas veces se emplean instrumentos de período largo, con respuestas predominantes en el rango de 5 a 15 s, en la determinación de la magnitud de ondas de cuerpo, y en estos casos la magnitud así determinada se denomina m_B .

En los sismos superficiales el sismograma generalmente presenta trenes de ondas de superficie por lo tanto es práctica común utilizar la amplitud máxima dentro del tren de ondas superficiales. La magnitud calculada de esta manera se llama *magnitud de ondas de superficie* (M_s). Existen correlaciones locales que permiten convertir la magnitud de una escala a la otra, las cuales provienen de aquellos casos en que es posible definir las dos, debido a que se presentan ondas de superficie en el sismograma. En general los valores de m_b obtenidos para el mismo sismo son menores que los valores de M_s . Existen además otras definiciones de magnitud, como puede ser la *magnitud de momento sísmico* (M_w) la cual se evalúa utilizando el momento sísmico que se calcula multiplicando la rigidez de la roca por el área de fallamiento y por el desplazamiento en la falla, lo cual tiene unidades de momento (fuerza por distancia).

La *energía liberada* por el sismo se ha correlacionado con la magnitud por medio de la siguiente ecuación:

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 M_s \quad (4-1)$$

con la energía E expresada en joules. Esto indica que por cada cambio de una unidad en la magnitud la energía liberada aumenta en $10^{1.5} = 32$ joules por lo tanto un sismo de magnitud 8 libera

aproximadamente 32 veces la energía de un sismo de magnitud 7. Desde el punto de vista de los efectos del sismo en las estructuras, se considera que una magnitud 5 es el límite inferior de los sismos que causan daños.

4.5.3 — Magnitud de algunos sismos importantes

A continuación se relacionan las características de algunos sismos importantes en el mundo y en Colombia, para los cuales hay un cálculo de la magnitud.

Tabla 4-1 - Magnitud y víctimas de algunos sismos importantes en el mundo

Año	Mes	Día	Localización	Magnitud	Muertos
1906	Ene	31	Costa Pacífica de Colombia cerca a Tumaco	$m = 8.9$	400
1906	Mar	16	Kagi, Formosa	$M_s = 7.1$	1 300
1906	Abr	18	San Francisco, USA	$M_s = 8.2$	700
1906	Ago	17	Valparaíso, Chile	$M_s = 8.6$	20 000
1908	Dic	28	Messina, Italia	$M_s = 7.5$	120 000
1920	Dic	16	Kansu, China	$M_s = 8.5$	180 000
1922	Nov	11	Atacama, Perú	$M_s = 8.4$	600
1923	Sep	1	Kwanto, Japón	$M_s = 8.2$	143 000
1927	May	22	Nan Chan, China	$M_s = 8.3$	200 000
1935	May	30	Quetta, Pakistán	$M_s = 7.5$	30 000
1939	Ene	4	Chillán, Chile	$M_s = 7.7$	30 000
1939	Dic	26	Erzincan, Turquía	$M_s = 7.9$	30 000
1946	Nov	10	Ancash, Perú	$M_s = 7.3$	1 400
1949	Ago	5	Ambato, Ecuador	$M_s = 6.8$	6 000
1957	Jul	28	México	$M_s = 7.8$	55
1960	Feb	29	Agadir, Marruecos	$M_s = 5.9$	14 000
1960	May	21	Sur de Chile	$M_s = 8.5$	5 700
1964	Mar	28	Alaska, USA	$M_s = 8.6$	131
1964	Jun	16	Niigata, Japón	$M_s = 7.4$	36
1965	Mar	28	Valparaíso, Chile	$M_s = 7.5$	600
1970	May	31	Perú	$M_s = 7.8$	66 000
1971	Feb	9	San Fernando, California, USA	$M_s = 6.5$	65
1972	Dic	23	Managua, Nicaragua	$M_s = 6.2$	5 000
1976	Feb	4	Guatemala	$M_s = 7.9$	22 000
1976	Jul	27	Tangshan, China	$M_s = 7.6$	250 000
1977	Mar	4	Vrancea, Rumania	$M_s = 7.2$	2 000
1980	Nov	23	Sur de Italia	$M_s = 7.2$	3 000
1985	Mar	3	Valparaíso, Chile	$M_s = 7.8$	177
1985	Sep	19	Michoacán, México	$M_s = 7.9$	9 500
1986	Oct	10	San Salvador, El Salvador	$M_s = 5.4$	1 000
1987	Mar	6	Ecuador, frontera con Colombia	$M_s = 7.0$	1 000
1988	Dic	7	Spitak, Armenia	$M_s = 7.0$	25 000
1989	Oct	17	Loma Prieta, California, USA	$M_s = 7.0$	63
1990	Jul	16	Luzón, Filipinas	$M_s = 7.8$	1 700
1992	Jun	28	Landers, California, USA	$M_s = 7.5$	1
1994	Ene	17	Northridge, California, USA	$M_s = 6.8$	60
1995	Ene	17	Kobe, Japón	$M_s = 7.2$	5 000

4.6 — Intensidad del sismo

4.6.1 — Escala de intensidades de Mercalli modificada (IMM)

La *intensidad* de un sismo es por otro lado una medida totalmente subjetiva de los efectos que el sismo causa en un lugar determinado, la cual se realiza por medio de observadores, que se desplazan a las diferentes zonas afectadas por el sismo y allí asignan la intensidad para cada sitio, de acuerdo con los efectos observados. Por lo tanto no es una medida única para un sismo, dado que el efecto producido en diferentes lugares por el mismo sismo es distinto y que en la medida que el lugar se encuentre más alejado de la zona epicentral menores serán los efectos. La escala más utilizada en el ámbito mundial para describirla es la *escala de intensidades de Mercalli modificada* (IMM). En esta escala de acuerdo con los efectos en el sitio se asigna la intensidad dentro de valores que van de uno (I-MM) a doce (XII-MM). Es importante tener en cuenta que los periodistas al reportar los sismos tienden a confundir magnitud con intensidad y es muy claro que se trata de dos medidas totalmente diferentes y que se utilizan para describir efectos totalmente distintos. A continuación se presenta la escala de intensidades de Mercalli modificada:

ESCALA DE INTENSIDADES DE MERCALLI MODIFICADA

Tipos de Mampostería

Mampostería tipo A - Buen diseño, ejecución y morteros. Reforzada, especialmente para cargas laterales y amarrada por medio de acero y concreto. Diseñada para cargas laterales.

Mampostería tipo B - Buena ejecución y morteros. Reforzada, pero no diseñada especialmente para resistir cargas laterales.

Mampostería tipo C - Ejecución y morteros ordinarios. Con buenas trabas en las esquinas de los muros, pero ni diseñada ni reforzada para resistir cargas laterales.

Mampostería tipo D - Materiales débiles, como adobe, morteros pobres, bajo nivel de calidad de la mano de obra. Débil para resistir cargas laterales.

Valor de la Intensidad	Descripción
I	No es sentido.
II	Sentido por personas quietas, en pisos altos o favorablemente localizadas.
III	Sentido dentro de las edificaciones. Objetos colgantes se balancean. Se siente vibración similar a la del paso de un camión liviano. Es posible estimar la duración. Puede no ser reconocido como un temblor.
IV	Objetos colgantes se balancean. Se siente vibración similar a la del paso de un camión pesado, o sensación de que un objeto pesado está sacudiendo las paredes. Los automóviles estacionados se balancean. Las ventanas, platos y puertas vibran produciendo sonido. Los vidrios tintinean. La loza colocada en aparadores se golpetea. En el rango superior de IV, las paredes de madera y sus marcos crujen.
V	Sentido afuera, es posible estimar la dirección. Se despiertan las personas durmiendo. Los líquidos se mueven y algunos se derraman. Objetos pequeños inestables se desplazan o vuelcan. Las puertas se balancean, abren o cierran. Persianas y cuadros se mueven. Los relojes de péndulo se detienen o cambian de ritmo.
VI	Sentido por todos. Muchos se asustan y corren hacia afuera. Hay dificultad para caminar. Se rompen ventanas, loza y cristal. Objetos y libros se caen de los aparadores. Los cuadros se caen de las paredes. Los muebles se mueven o vuelcan. Pañetes débiles y mampostería tipo D se agrietan. Campanas pequeñas tañen (iglesias y escuelas). Los árboles y arbustos se mueven visiblemente, o producen ruido.
VII	Dificultad para permanecer parado. Es notado por los conductores de vehículos. Objetos colgantes se mecen. Daño a mampostería tipo D, incluyendo grietas. Chimeneas débiles se rompen en el punto en que sobresalen del tejado. Caída de pañetes, ladrillos sueltos, enchapes en piedra, baldosines, cornisas, parapetos no arriostrados y decoraciones arquitectónicas. Algunas grietas en mampostería tipo C. Ondas en los charcos, el agua se enturbia con barro. Pequeños deslizamientos y hundimientos en los taludes de arena o grava. Las campanas grandes tañen. Se dañan canales de irrigación de concreto.
VIII	Se afecta la conducción de vehículos. Daños a mampostería tipo C, con colapso parcial. Algún daño a mampostería tipo B, ningún daño en mampostería tipo A. Caída del estucado y de algunas paredes de mampostería. Desplazamiento y caída de chimeneas, silos en las fábricas, monumentos, torres, tanques elevados. Casas de madera movidas sobre sus cimientos cuando no están ancladas a ellos, paneles sueltos de las paredes caen hacia afuera. Pilotes de madera en mal estado se parten. Se caen ramas de los árboles. Cambios en el flujo y temperatura de fuentes, aljibes y pozos. Grietas en terrenos húmedos y en taludes inclinados.
IX	Pánico general. Mampostería tipo D destruida, mampostería tipo C apreciablemente dañada, inclusive con colapso total, mampostería tipo B seriamente dañada. Daño general a las fundaciones. Casas de madera que no estén ancladas se salen de sus cimientos, y sus marcos se mueven. Daños graves en represas. Rotura de tubos enterrados. Agrietamientos evidentes en el suelo. En zonas aluviales brota arena y barro, aparecen fuentes y se forman cráteres de arena.
X	La gran mayoría de las casas de mampostería y madera destruidas, incluyendo sus cimentaciones. Algunas estructuras y puentes de madera bien contruidos destruidos. Daños graves a presas, diques y terraplenes. Deslizamientos grandes. El agua se sale en las orillas de canales, ríos, lagos, etc. Arena y barro se mueve horizontalmente en las playas y en terreno plano. Los rieles de ferrocarril alcanzan a doblarse algo.
XI	Los rieles de ferrocarril se doblan totalmente. Tuberías enterradas totalmente fuera de servicio.
XII	Destrucción casi total. Grandes masas de roca desplazadas. Las líneas de visión y nivel distorsionadas durante el movimiento. Se presentan objetos lanzados al aire.

Es importante anotar que las prácticas constructivas locales afectan la manera como se asignan las intensidades, por esta razón muchos países han desarrollado sus propias escalas de intensidad. Otro aspecto está asociado con la influencia que tiene la frecuencia con que ocurran sismos dañinos, pues entre más infrecuentes hay tendencia, por parte de los observadores locales, a asignar intensidades mayores, y entre más frecuentes, menores.

4.6.2 — Mapas de isosistas

Una vez se ha determinado la intensidad en diferentes lugares, es posible definir un *mapa de isosistas* en el cual se dibujan contornos de áreas afectadas por la misma intensidad. Rutinariamente estos mapas se evalúan con posterioridad a la ocurrencia de sismos importantes. A modo de ejemplo, en la Figura 4-6 se presenta el mapa de isosistas del sismo de Murindó, del 18 de Octubre de 1992, el cual tuvo una magnitud $M_s = 7.2$ y una profundidad de 15 km [Martínez, et al., 1994].

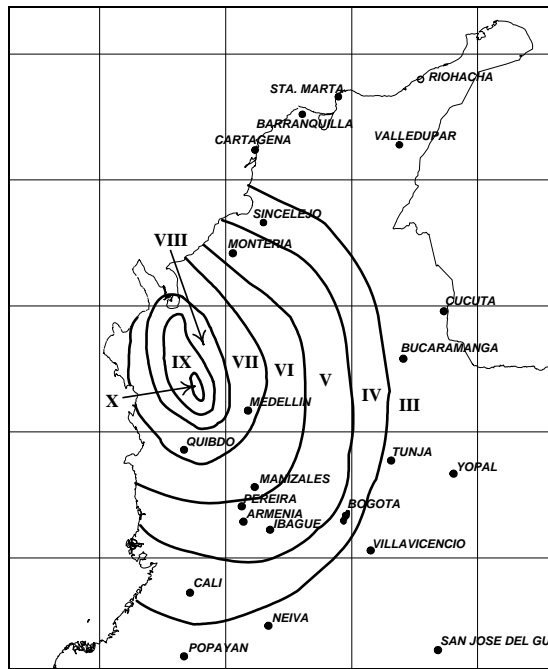
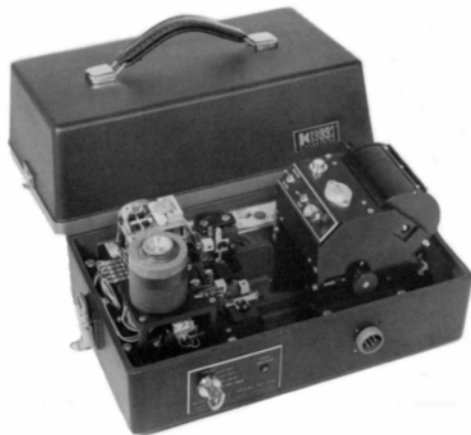


Figura 4-6 - Mapa de isosistas del sismo colombiano del 18 de Octubre de 1992

4.8 — Acelerogramas

4.8.1 — Acelerógrafos de movimiento fuerte

Para efectos de ingeniería la información producida por los sismogramas tiene poco interés fuera de su utilización en estudios de amenaza sísmica, pues permiten definir la localización y magnitud de los eventos sísmicos que se incluyen en los catálogos. Por esta razón se desarrolló otro tipo de instrumentos llamados *acelerógrafos de movimiento fuerte*, como el mostrado en la Figura 4-9(a). Existen diversas clases de ellos. Hay instalados en el mundo una gran cantidad del tipo mostrado en la Figura 4-9(a), el cual registra sobre papel fotográfico. Recientemente se han popularizado instrumentos que registran digitalmente la señal recibida, como el mostrado en la Figura 4-9(b).



(a)



(b)

Figura 4-9 - Acelerógrafos de movimiento fuerte

En general el acelerógrafo consta de una serie de componentes dentro de los que se cuentan: un disparador que activa el instrumento al detectar que está ocurriendo un movimiento con aceleraciones mayores de un valor determinado o umbral de disparo, un grupo de tres péndulos que pueden oscilar en dos direcciones horizontales ortogonales y en dirección vertical, un medio de registro de las oscilaciones

de los péndulos, ya sea fotográfico o digital y por último un reloj que marca de una manera precisa el tiempo que transcurre durante el registro de la señal. A diferencia de los sismógrafos, los acelerógrafos están diseñados para registrar aceleraciones muy altas. Por esta razón son los instrumentos adecuados para registrar las aceleraciones del terreno durante la ocurrencia de un sismo fuerte.

4.8.2 — Registros acelerográficos

El registro obtenido por el acelerógrafo se denomina *acelerograma* y corresponde a los valores de aceleración horizontal del terreno medidos en dos direcciones horizontales ortogonales y los valores de la aceleración vertical. El acelerograma se digitaliza cuando se registra en papel fotográfico y se corrige para una serie de errores producidos por la misma digitalización así como para tener en cuenta el hecho de que se pierde parte de la información inicial mientras el mecanismo de disparo del acelerógrafo activa su funcionamiento. En [Hudson, 1979] se describen en detalle estos procesos de corrección.

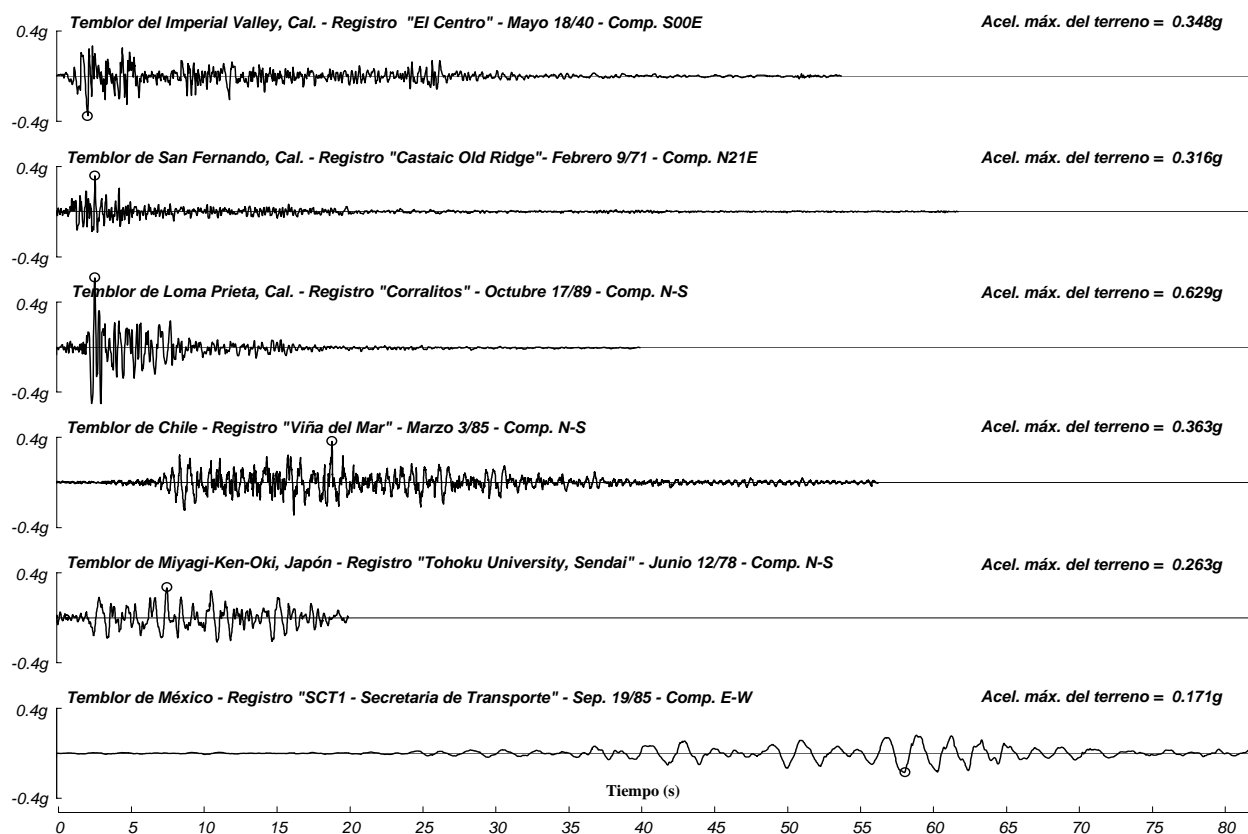


Figura 4-10 - Acelerogramas de algunos sismos importantes

En la Figura 4-10 se muestran los acelerogramas de seis sismos importantes, cuya descripción es la siguiente:

El Centro - Corresponde a la componente N-S del registro tomado en El Centro, California, del temblor del Imperial Valley, de Mayo 18 de 1940. Tiene una aceleración horizontal máxima del 34.8% de la gravedad. Fue por muchos años el registro acelerográfico más fuerte, tomado cerca de la falla que lo causó, de que se disponía en el mundo. Está registrado en un sitio donde hay cerca de 300 m de aluvión denso entre la superficie del suelo y la roca.

Castaic - Componente N21°E del registro tomado en Castaic Old Ridge Route, del temblor de San Fernando, California, del 9 de Febrero de 1971. Tiene una aceleración horizontal máxima del 31.6% de la gravedad.

Corralitos - Registro tomado en Corralitos, localizado en el Eureka Canyon, del temblor de Loma Prieta, California, del 17 de Octubre de 1989. Tiene una aceleración horizontal máxima del 62.9% de la gravedad.

Viña del Mar - Registro tomado en Viña del Mar del temblor de Chile de Marzo 3 de 1985. Tiene una aceleración horizontal máxima del 36.3% de la gravedad. Corresponde a un registro típico de la zona de subducción de la costa del Pacífico de Suramérica.

Miyagi - Registro tomado en Sendai, Japón, del sismo de Miyagi-Ken-Oki, Japón, del 12 de Junio de 1978. Tiene una aceleración horizontal máxima del 26.3% de la gravedad.

México - Registro tomado en la Secretaría de Transporte de la ciudad de México D. F., del temblor de México del 19 de Septiembre de 1985. El temblor se originó en el Océano Pacífico cerca al estado de Michoacán, a más de 400 km de distancia de la Ciudad de México. Tiene una aceleración horizontal máxima del 16.1% de la gravedad. Corresponde a un registro tomado en la superficie de un valle donde hay depósitos de arcilla entre la roca y la superficie, los cuales amplificaron la onda sísmica.

Es importante hacer notar las características aleatorias de los movimientos registrados, así como las diferencias importantes entre los acelerogramas registrados en suelo blando, como son el de Miyagi y el de Ciudad de México, en comparación con los registrados en roca o aluvión, como son El Centro, Castaic, Corralitos y Viña del Mar.

4.8.3 — Definición de los movimientos máximos del terreno

Si un acelerograma se integra contra el tiempo, se obtiene el registro de las velocidades que describió el terreno durante el sismo; y si se integra nuevamente se determinan los desplazamientos del terreno.

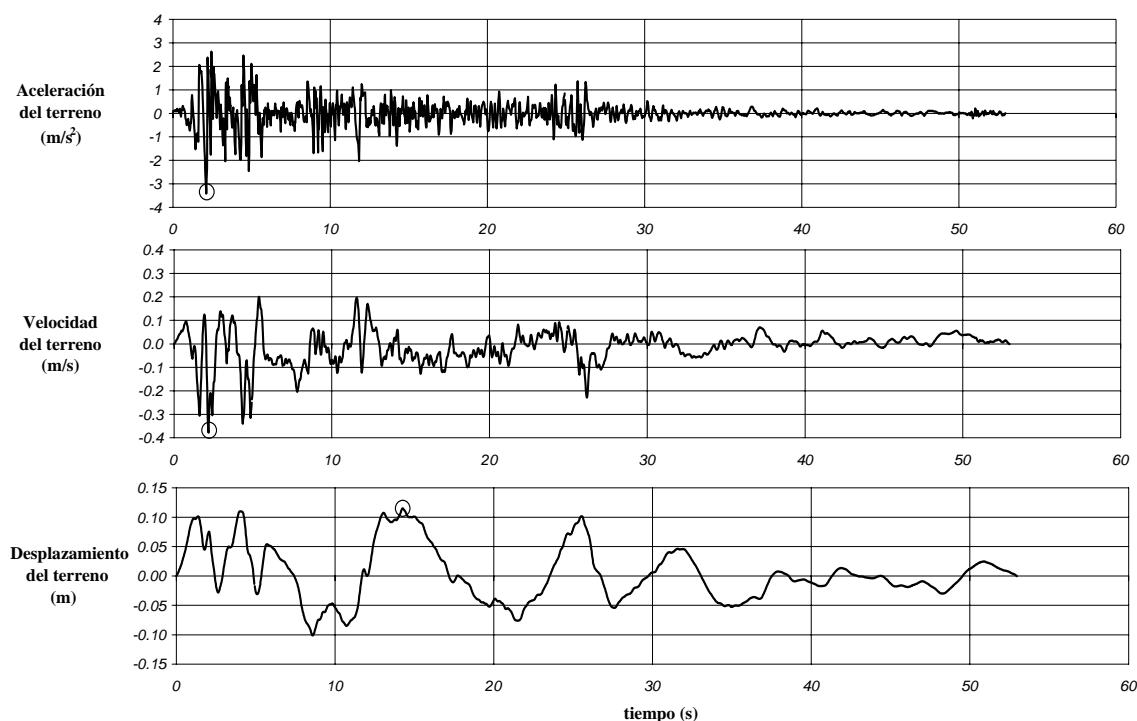


Figura 4-11 - Temblor del Imperial Valley, "El Centro" - Mayo 18 de 1940 - Movimientos máximos del terreno: $A_{te} = 3.417 \text{ m/s}^2$, $V_{te} = 0.334 \text{ m/s}$ y $D_{te} = 0.109 \text{ m}$

En la Figura 4-11 se muestra para el temblor de El Centro de Mayo 18 de 1940, el registro original de aceleraciones, el de velocidades del terreno, que se obtuvo al integrar el de aceleraciones y el de desplazamientos del terreno, que a su vez proviene de integrar el de velocidades del terreno. En los gráficos se han marcado los máximos para la aceleración del terreno ($A_{te} = 3.417 \text{ m/s}^2$, equivalente a $0.348g$), la velocidad del terreno ($V_{te} = 0.334 \text{ m/s}$), y el desplazamiento del terreno ($D_{te} = 0.109 \text{ m}$).

La relación que puede existir entre estos tres parámetros ha sido estudiada desde hace algún tiempo. En [Newmark, 1968] y [Newmark, 1969], N. M. Newmark indicaba que la siguiente relación era siempre válida:

$$D_{te} A_{te} > V_{te}^2 \quad (4-2)$$

y que en general:

$$\frac{D_{te} A_{te}}{V_{te}^2} \approx (5 \text{ a } 15) \quad (4-3)$$

Estudios posteriores realizados por B. Mohraz, [Mohraz, 1976], para diferentes tipos de suelo, indican las relaciones entre los diferentes movimientos máximos del terreno, evaluadas en la media estadística, dadas en la Tabla 4-5.

Tabla 4-5 - Relaciones entre los movimientos máximos del terreno

Tipo de suelo	V_{te}/A_{te} (m/s)/g	$A_{te}D_{te}/(V_{te})^2$	D_{te}/A_{te} (m/ g)
Roca	0.61	5.3	0.20
Menos de 9 m de aluvión sobre la roca	0.76	4.5	0.28
De 9 a 60 m de aluvión sobre la roca	0.76	5.1	0.30
Mas de 60 m de aluvión	1.22	3.9	0.58

B. Seed, [Seed y Idriss, 1982], indica que a pesar de que los valores de V_{te}/A_{te} varían con la distancia al lugar de ocurrencia del sismo, para distancias menores de aproximadamente 50 km, los siguientes valores, en (m/s)/g son representativos: 0.55 para roca, 1.10 para depósitos de suelos rígidos de profundidad menor a 60 m, y 1.35 para depósitos de suelos rígidos con mas de 60 m de profundidad.

Más adelante, en los Capítulos 6 y 7 se verá que los movimientos sísmicos de diseño se definen en función de estimativos de los movimientos máximos del terreno.

4.8.4 — Efecto de las condiciones locales del suelo

El efecto de los sismos se ve influenciado enormemente por las características locales del suelo, en la zona afectada. Dentro de estos efectos se cuentan grandes avalanchas o deslizamientos, como la que produjo el sismo de Páez en Colombia, del 6 de Junio de 1994, en el cañón del río Páez en el Huila. En aquellos casos en los cuales el suelo consiste en material granular suelto, el movimiento cíclico del sismo tiende a compactarlo, lo cual conduce al desarrollo de exceso de presión de poros lo cual, a su vez, puede causar licuación del suelo. Este fenómeno se observó en los márgenes de los ríos cercanos al epicentro, durante el sismo de Murindó el 18 de Octubre de 1992.

Por otro lado, desde hace mucho tiempo se sabe que la estratigrafía del suelo en el lugar tiene una influencia importante en los daños observados. Solo en la medida que se tuvo mayor cantidad de acelerógrafos en lugares cercanos al epicentro, fue posible observar las variaciones en los acelerogramas, dependiendo de las condiciones del suelo subyacente en el sitio del acelerógrafo. La rigidez del suelo y sus características de amortiguamiento, así como la magnitud del sismo y su distancia hipocentral, tienen gran influencia. Un caso clásico de este tipo de fenómenos es la enorme amplificación de las ondas sísmicas en el valle donde se encuentra localizada Ciudad de México, como se muestra en la Figura 4-10, en el registro del sismo del 19 de Septiembre de 1985.

Las variaciones que se presentan, a partir de los movimientos registrados en roca, consisten en una amplificación de las ondas sísmicas con frecuencias de vibración similares a las dominantes del depósito de suelo; un aumento en la duración del sismo; y un aumento de las aceleraciones, velocidades y desplazamientos observados.

A modo de ejemplo de las variaciones que se pueden obtener, en la Figura 4-12 se muestran tres registros del sismo del 19 de Enero de 1995 en Tauramena, Casanare, Colombia, todos ellos obtenidos

por la Red Simológica Nacional de Colombia. El sismo de Tauramena tuvo una magnitud m_b de 6.5, fue localizado en las coordenadas 5.01° N y 74.08° W, y tuvo una profundidad de alrededor de 15 km.

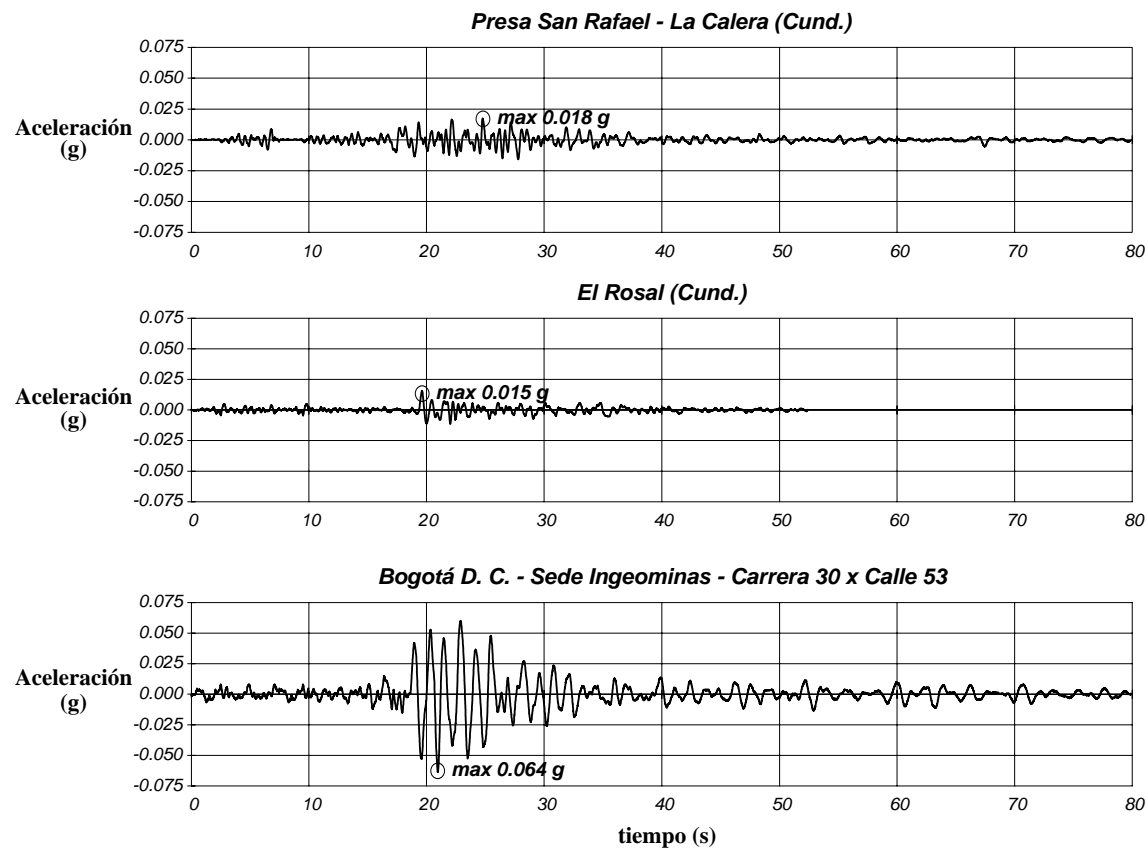


Figura 4-12 - Registros acelerográficos del sismo de Tauramena de Enero 19 de 1995.

El primer registro fue obtenido en la población de La Calera, al oriente de Bogotá. El acelerógrafo está instalado en roca en uno de los túneles de la presa de San Rafael. La distancia del instrumento al epicentro es de 134 km. El segundo registro, se obtuvo en la población de El Rosal, localizada en el costado occidental de la Sabana de Bogotá. El instrumento está instalado también en roca y su distancia al epicentro es de 156 km. El tercer registro se obtuvo en la sede de Ingeominas en la ciudad de Bogotá (Carrera 30 con Calle 53). En este lugar el suelo está caracterizado por un depósito de arcilla de un poco más de 180 m de espesor. La capa superficial está preconsolidada en su primeros 3 a 5 m, con resistencias relativamente buenas, debajo de la cual se encuentra la arcilla normalmente consolidada de muy baja resistencia en la parte superior, pero con aumento de la resistencia con la profundidad. Es importante notar la amplificación de las aceleraciones máximas del terreno, y el cambio en el contenido frecuencial de los registros. En [Yamín y Ojeda, 1995], [Espinosa, 1995] se presenta información para el caso específico de Bogotá, respecto a la amplificación sísmica que producen sus suelos. Recientemente se concluyó la microzonificación de la ciudad de Bogotá [Ingeominas y Universidad de los Andes, 1997], en la cual se tipifican desde este punto de vista los suelos de la ciudad, y se dan espectros de diseño para las diferentes zonas.

4.8.6 — Tipos de temblores según el acelerograma

Los registros acelerográficos, varían para eventos producidos por diferentes fuentes sismogénicas, e inclusive para sismos producidos por la misma falla. Un ejemplo de esto es el caso de “El Centro” en California, allí se tienen registros acelerográficos de eventos ocurridos en 1934, 1940 y 1979. Aunque los tres eventos fueron producidos por la misma falla, los tres tienen aceleraciones máximas del terreno diferentes y duraciones diferentes.

Newmark y Rosenblueth, [Newmark y Rosenblueth, 1971], clasifican los temblores de la siguiente manera, según su acelerograma:

Tipo 1 - El acelerograma prácticamente consiste en un pulso único. En la Figura 4-15 se muestra un registro acelerográfico de este tipo de sismo. Registros de este tipo sólo se obtienen a distancias cercanas al epicentro, sólo en terreno firme, y únicamente durante sismos superficiales. Cuando estas condiciones no se cumplen, las múltiples reflexiones y difracciones de las ondas sísmicas cambian la naturaleza del movimiento. Este tipo de sismos se ha presentado en Agadir en 1960, Libia en 1963, Skopio en 1963 y San Salvador en 1965. Muy seguramente el sismo de Popayán de Marzo 31 de 1983 fue de este tipo. Este tipo de registros se obtienen en temblores de magnitud moderada (5.4 a 6.2), con foco superficial (menos de 30 km), y los efectos se sienten como un pulso unidireccional, más fuerte en una dirección que en la opuesta. Excita períodos de vibración cortos, del orden de 0.2 segundos.

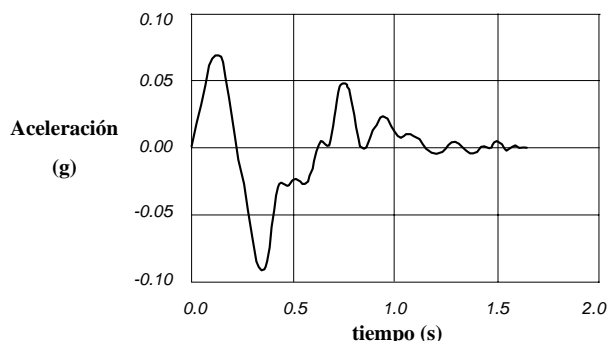


Figura 4-15 - Acelerograma del temblor de Port Hueneme de Marzo 18 de 1958

Tipo 2 - Están representados por un movimiento extremadamente irregular de duración moderada. El sismo de “El Centro” de 1940, es el ejemplo clásico de este tipo de registros (Figura 4-16). Está asociado con distancias focales moderadas y ocurren únicamente en suelo firme. La gran mayoría de los sismos que se generan en el Anillo Circumpacífico son de este tipo. Excitan un amplio rango de períodos de vibración (con un mínimo entre 0.05 y 0.5 segundos, y un máximo entre 2.5 y 6 segundos). Generalmente tienen la misma forma en las tres direcciones principales.

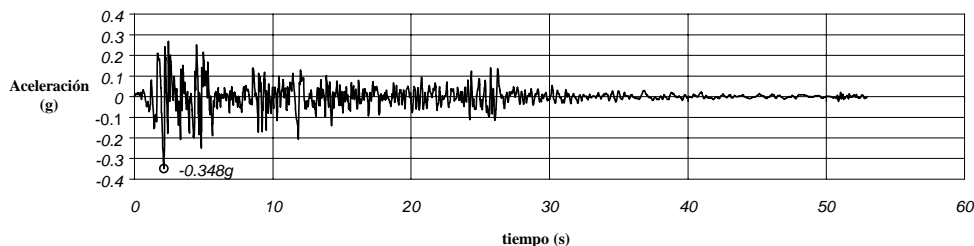


Figura 4-16 - Acelerograma del temblor de “El Centro” Mayo 18 de 1940

Tipo 3 - Un movimiento del terreno de mucha duración y que manifiesta períodos de vibración muy definidos. En la Figura 4-17 se muestra el acelerograma registrado en suelo blando del sismo de Ciudad de México de Septiembre 19 de 1985, el cual es un ejemplo clásico de este tipo de sismos. Esta es la consecuencia de sismos de los tipos anteriores que son filtrados a través de estratos de suelo blando, en los cuales las ondas sísmicas sufren reflexiones sucesivas en las fronteras entre estratos.

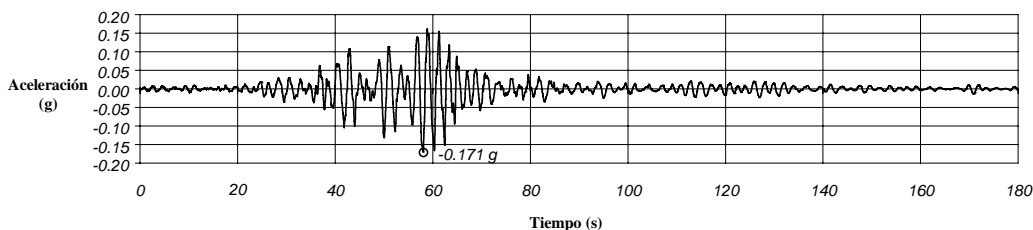


Figura 4-17 - Acelerograma del temblor de México de Sep. 19 de 1985, comp. EW

Tipo 4 - Este tipo de movimiento comprende aquellos casos en los cuales se presentan deformaciones permanentes a gran escala del terreno. En los lugares de interés se puede presentar licuación o grandes deslizamientos. El temblor de Alaska de 1964 es un ejemplo clásico de este tipo de movimientos, así como el temblor de Nigata, Japón, del mismo año.

Esta clasificación de sismos fue postulada hace más de 25 años, y sigue siendo vigente. Newmark y Rosenblueth planteaban que las técnicas analíticas prevalecientes en ese entonces permitían el estudio de los primeros tres tipos de registros, quejándose de la falta de registros del primer tipo. Con respecto al cuarto tipo, Newmark y Rosenblueth, indicaban que los conocimientos del momento no permitían la construcción de una estructura sobre un suelo que sufriera deformaciones del tipo indicado allí. Esto sigue siendo válido en la actualidad.

4.9 — Estudios de amenaza sísmica

4.9.1 — Metodología

En la actualidad existen diversas tipologías de estudios de amenaza sísmica, dependiendo del fin para el cual se realizan. Un tipo de estudios de amenaza sísmica, son aquellos que se realizan para obras de gran importancia, cuya falla debido a un sismo puede ser catastrófica, y que se realizan para fijar parámetros de diseño, los cuales sólo son utilizables para diseño de la obra propuesta. Otro tipo, corresponde a aquellos que se realizan dentro del contexto de una reglamentación de construcción sismo resistente, con el fin de fijar parámetros comparativos dentro del territorio de aplicabilidad de la norma, conduciendo a mapas de zonificación sísmica. Un tercer tipo corresponde a los estudios de microzonificación, en los cuales una ciudad, o una región relativamente pequeña, se estudia con respecto a la respuesta sísmica esperada en diferentes lugares, agrupando en microzonas aquellos sitios que tienen características similares. La metodología a emplear varía según el tipo de estudio, pero existen características comunes, y en algunos casos sólo se diferencian por el alcance mismo de los estudios que se realizan. A continuación se presenta la metodología general, indicando en qué casos se utiliza ese paso, dentro de los tipos de estudios anunciados anteriormente. La presentación está basada en [Bolt, 1989], adaptada a lo que ha sido práctica en el país.

Tabla 4-6 - Metodología en los estudios de amenaza sísmica

Etapas mínimas a realizar en un estudio de amenaza sísmica	Obras Importantes	Mapas de Amenaza para Normas Sísmicas	Estudios de Microzonificación
Consideraciones geológicas			
1. Obtención de la información geológica existente sobre la región, con especial interés en la neotectónica regional, incluyendo identificación de los movimientos recientes en la corteza causados por sismos.	•	•	•
2. Compilación de las fallas activas en la región, con la definición del tipo de movimiento (lateral, normal, etc.).	•	•	•
3. En algunos casos hay necesidad de realizar trabajo de campo. Es de particular importancia definir el tipo de movimientos que han ocurrido en el Holoceno (últimos 10 000 años), por medio de evaluación de los desplazamientos de la capa de suelo, dataciones por medio de Carbono 14 de materiales orgánicos obtenidos de trincheras de exploración de las fallas, y otros métodos.	•		•
4. Elaboración de mapas de la geología estructural en una zona suficientemente amplia para cubrir las fuentes sismogénicas cuyos eventos puedan afectar el sitio de interés, prestando especial atención a los escarpes en la roca, los efectos diferenciales de la erosión, y los desplazamientos de las capas superficiales de materiales sedimentarios. Este tipo de mapas debe mostrar los tipos de roca, las estructuras de superficie, y las fallas locales, incluyendo estimativos acerca de su longitud, continuidad y tipo de movimiento que han sufrido.	•		•
5. En el caso de fallas que estén localizadas inmediatamente debajo del sitio de interés, deben llevarse a cabo exploraciones por métodos geofísicos, con el fin de determinar la localización de rupturas recientes de las fallas y otros lineamientos. Dentro de los métodos geofísicos que se utilizan están las mediciones de resistividad eléctrica y de gravimetría, a lo largo de un perfil perpendicular a la falla. Otro tipo de información que es de importancia, consiste en	•		•

	la búsqueda de evidencia de segmentación de la longitud total de la falla, tales como superposición de alineamientos, o cambios en el alineamiento general.			
6.	Descripción de deslizamientos, asentamientos, doblamientos de estratos, inundaciones por avenidas o <i>tsunamis</i> en el lugar.	●		●
7.	Verificación de los niveles de agua freática, con el fin de determinar si existen barreras dentro de la tabla de agua, las cuales pueden ser asociadas con fallas, o afectar la respuesta del suelo durante un sismo.	●		●
Información sísmológica				
1.	Documentación detallada de la historia sísmica de la región. Se deben preparar catálogos sísmicos de los eventos que se han sentido en el sitio. Estos catálogos deben contener la fecha, la localización, la profundidad, la magnitud y la intensidad de Mercalli, para cada sismo. Esta información debe ilustrarse por medio de mapas regionales.	●	●	●
2.	Elaboración, donde la información lo permita, de curvas de recurrencia de la frecuencia de sismos regionales, incluyendo magnitudes pequeñas. El estimativo de la frecuencia de ocurrencia de sismos dañinos se puede estimar de estas estadísticas.	●	●	●
3.	Estudio de los registros acelerográficos disponibles, de los reportes de daños y toda la información de intensidades locales existente sobre la región donde está localizado el sitio de interés.	●		●
4.	Elaboración de estimativos de la máxima intensidad de Mercalli en terreno firme, cercano al sitio, que debe haberse sentido con los sismos importantes que han afectado el sitio.	●		●
Definición de los sismos de diseño				
1.	Por medio de modelos probabilísticos apropiados, utilizando la información geológica y sísmológica, se definen curvas de recurrencia de los parámetros relevantes del sismo de diseño. Estos parámetros generalmente son la aceleración máxima en roca del sismo de diseño, o la intensidad de Mercalli en roca o suelo firme. La interpretación de estas curvas de recurrencia requiere la introducción de valores correctivos provenientes de las incertidumbres asociadas con la información y la definición de un período de retorno promedio del sismo de diseño. En muchos casos se definen diferentes sismos de diseño, correspondientes a diferentes estados límites (Estado Límite Último o de colapso, o Estado Límite de Servicio o umbral de daño).	●	●	●
2.	En lo posible, deben definirse las fallas geológicas cuya ruptura pueda ocurrir, indicando el tipo de mecanismo de desplazamiento (lateral, normal, etc.). A pesar de las numerosas incertidumbres asociadas con ello, debe estimarse la profundidad focal, la longitud de ruptura y el desplazamiento esperado, para los eventos de diseño.	●		●
3.	Cuando se trata de una zonificación, deben elaborarse mapas donde se agrupan aquellas regiones o sitios donde los parámetros de los sismos de diseño tienen valores semejantes, conformando así zonas de amenaza sísmica similar.		●	
Estudios geotécnicos				
1.	Identificación y estudio de aspectos geotécnicos y geológicos locales, referentes a la posición y espesores de la estratificación dominante y la profundidad de la roca de base.	●		●
2.	Estudio de las propiedades, desde el punto de vista de ingeniería, de los suelos superficiales que afecten la decisión del tipo de fundaciones a emplear. Dentro de esta etapa deben detectarse, utilizando sondeos, apiques, etc., estratos de arenas sueltas y saturadas que puedan sufrir licuación; también depósitos profundos de arcillas blandas.	●		●
3.	Definición de las propiedades del suelo tales como: peso específico, contenido de humedad, resistencia al cortante, comportamiento bajo cargas cíclicas a través del módulo dinámico de cortante, valores de la capacidad de amortiguamiento histerético. Estas propiedades deben establecerse utilizando mediciones en el sitio, o ensayos de laboratorio sobre muestras obtenidas de los sondeos.	●		●
4.	Determinación de las velocidades de las ondas P y S, utilizando correlaciones o por medio de procedimientos de medición en el sitio (técnicas cross-hole o down-hole).	●		●
5.	Definición de unas curvas de transferencia de los suelos localizados entre roca y la superficie, las cuales permiten definir las variaciones, de amplificación o deamplificación, de las ondas sísmicas para los diferentes períodos de vibración de interés.	●		●
6.	Estudio de los efectos de amplificación generados por accidentes topográficos como pueden ser las laderas y colinas aisladas.	●		●
7.	Síntesis de los resultados agrupando en zonas de características de amplificación o deamplificación similares. Definición de los criterios a emplear en zonas de transición entre un tipo de comportamiento del suelo y otro.			●

Tema N° 8 — Espectros de respuesta

5.1 — Introducción

En los Capítulos 2 y 3 se discutieron los diferentes sistemas dinámicos de un grado de libertad y la manera de obtener la respuesta a una excitación dinámica; ya sea por medio de la solución trascendental de la integral de convolución, o por medio de técnicas numéricas. En el Capítulo 4 se vió la forma que tienen los registros acelerográficos obtenidos de los movimientos del terreno inducidos por un sismo. En general, éstos son movimientos que varían aleatoriamente en el tiempo. El siguiente paso es obtener la respuesta de un sistema dinámico de un grado de libertad a uno de estos registros acelerográficos.

En la Figura 5-1, se muestra el sistema de un grado de libertad que se empleará para estudiar los efectos de un movimiento sísmico en su base. El sistema consiste en una masa soportada por un elemento estructural cuyas relaciones fuerza-deformación son conocidas, y además tiene un amortiguador viscoso. La variable x_0 describe los movimientos de la base de la estructura, y la variable x describe la posición de la masa con respecto a una localización fija, como lo requiere la 2ª ley de Newton.

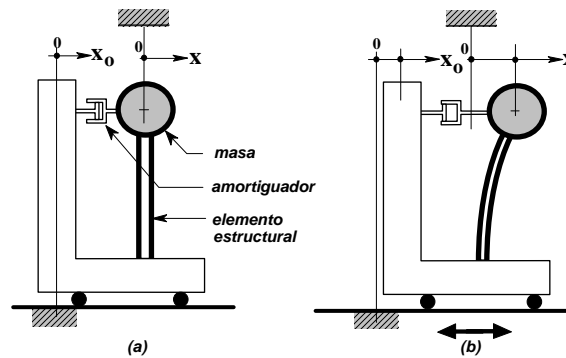


Figura 5-1 - Sistema de un grado de libertad sometido a una aceleración en su base

La forma como se estudian los efectos de un movimiento en la base de un sistema de un grado de libertad se planteó en la Sección 2.5. Allí se encontró la ecuación diferencial de equilibrio, ecuación (2-71), que rige la respuesta dinámica de sistemas linealmente elásticos ante una excitación en su base. Por comodidad, a continuación, se transcribe la ecuación (2-71); llamándola (5-1).

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{x}_0 \quad (5-1)$$

En esta ecuación $u = x - x_0$, $\dot{u} = \dot{x} - \dot{x}_0$, y $\ddot{u} = \ddot{x} - \ddot{x}_0$. La aceleración que tiene el terreno corresponde a \ddot{x}_0 , o sea que un acelerograma estaría representado por esta variable. La constante m corresponde a la masa; c a la constante del amortiguador; y k la rigidez del elemento estructural, o resorte, que da apoyo a la masa. La solución de esta ecuación diferencial de equilibrio se puede obtener por medio de alguno de los métodos presentados en el Capítulo 3, tal como el método de la aceleración lineal, o el método Beta de Newmark.

Suponiendo que un sistema de un grado de libertad, como el mostrado en la Figura 5-1, con un período de vibración de 1 segundo y un coeficiente de amortiguamiento de 5% del crítico, es sometido en su base a los 25 primeros segundos del acelerograma del temblor de El Centro, se obtendría una respuesta en el tiempo del sistema como la indicada en la Figura 5-2. Esta respuesta se obtuvo matemáticamente utilizando el método Beta de Newmark.

Es importante anotar que la respuesta presentada en la Figura 5-2 se ha expresado contra el tiempo en función del desplazamiento relativo entre la masa y la base, u ; de la velocidad relativa entre la masa y la base, \dot{u} ; y de la aceleración absoluta de la masa, $\ddot{x} = \ddot{u} + \ddot{x}_0$. Se utiliza la aceleración absoluta dado que

la 2ª ley de Newton está postulada con respecto a una aceleración absoluta y por lo tanto la fuerza inercial sobre la masa es igual al producto de la masa por la aceleración absoluta.

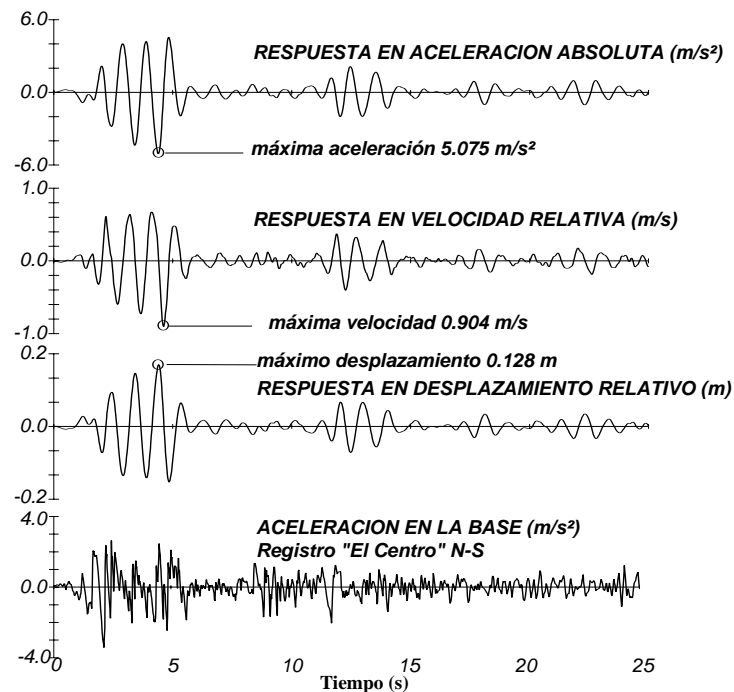


Figura 5-2 - Cálculo de la respuesta para los 25 primeros segundos del Temblor de El Centro de un sistema de un grado de libertad con un período de vibración de 1 segundo y $\xi = 5\%$

5.2 — Obtención del espectro de respuesta

En la Figura 5-2 se han marcado los valores máximos del desplazamiento relativo, de la velocidad relativa y de la aceleración absoluta. El máximo desplazamiento relativo multiplicado por la constante del resorte, k , conduce a la máxima fuerza que se ejerce sobre el resorte durante todo el movimiento estudiado. La máxima velocidad relativa multiplicada por la constante del amortiguador, c , define la máxima fuerza en el amortiguador. La máxima aceleración absoluta multiplicada por la masa, m , da la máxima fuerza inercial. Es evidente que desde el punto de vista de ingeniería estos máximos son los parámetros de mayor interés.

En la Figura 5-3, inspirada por [Chopra, 1980], se repite el mismo ejercicio mostrado en la Figura 5-2, pero ahora para diferentes valores del período de vibración del sistema. Allí sólo se muestra la respuesta en términos de desplazamiento relativo, marcando los máximos valores obtenidos. Es evidente, del estudio de la respuesta para diferentes valores del período de vibración, que la respuesta del sistema cambia notoriamente al variar su período y que el sistema filtra la excitación produciendo una respuesta en la cual está muy marcado el período mismo del sistema.

En el lado derecho de la figura se ha dibujado un gráfico en el cual se ha colocado el máximo desplazamiento relativo de la masa graficado contra el período de vibración del sistema. Este gráfico se conoce con el nombre de *espectro de respuesta de desplazamiento* y es de gran utilidad, pues si se desea determinar la máxima fuerza en el resorte de un sistema de un grado de libertad con un período dado cuando se le somete al acelerograma de El Centro, basta con entrar al gráfico con el período del sistema y leer el máximo desplazamiento relativo, el cual al ser multiplicado por la constante del resorte permite obtener la máxima fuerza a que éste puede verse sometido. El cálculo del espectro se puede realizar para diferentes valores del amortiguamiento y se obtiene un gráfico como el mostrado en la Figura 5-4

De una manera análoga es posible construir gráficos de la máxima velocidad relativa a que se ve sometido el sistema, el cual se llama *espectro de respuesta de velocidades*, y de máxima aceleración

absoluta, el cual se llama *espectro de respuesta de aceleraciones*. En la Figura 5-5 se muestra el de velocidades y en la Figura 5-6 el de aceleraciones, ambos para el temblor de El Centro y para diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento.

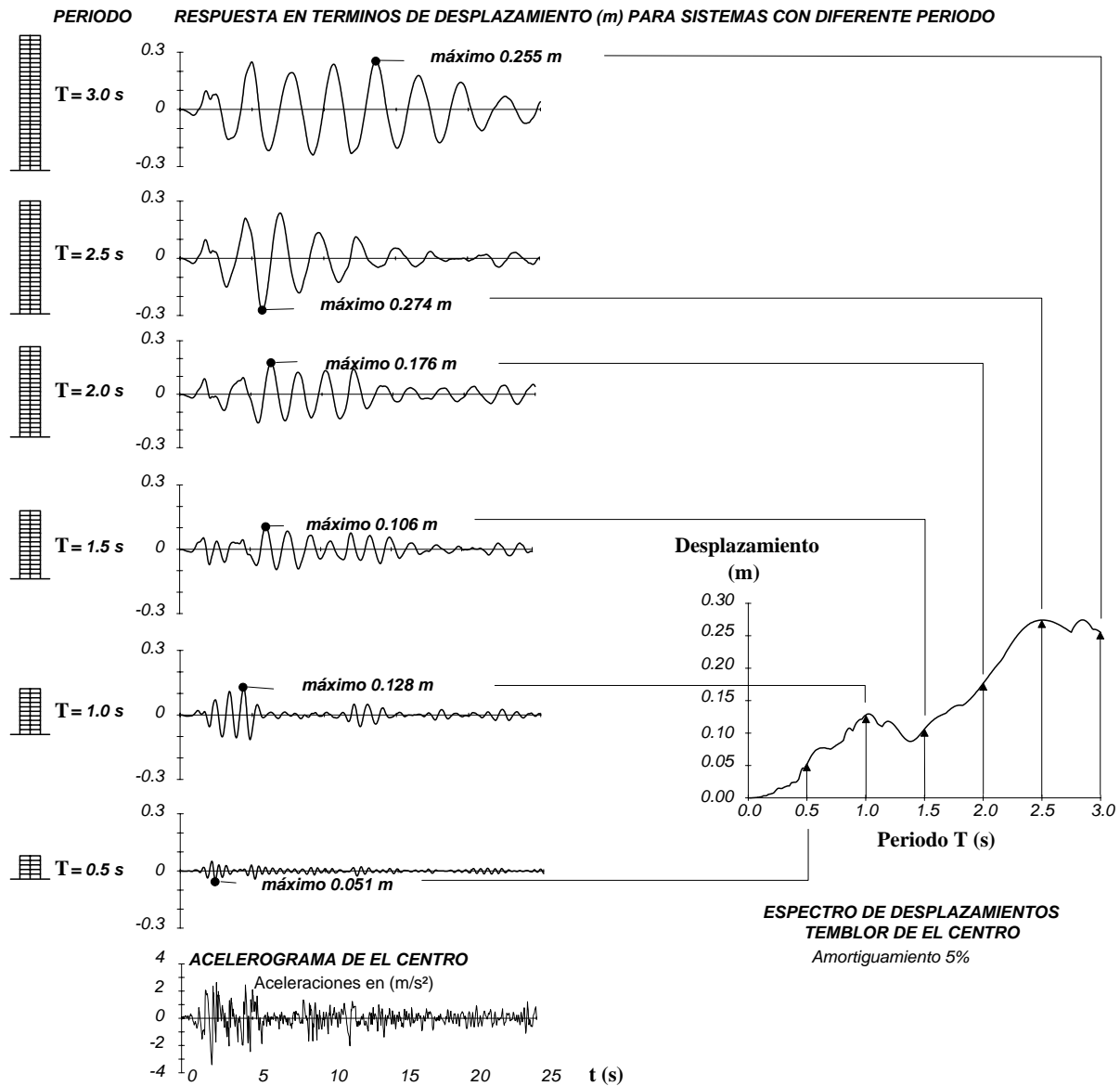


Figura 5-3 - Cálculo del espectro de respuesta de desplazamientos del Temblor de El Centro

Por lo tanto la definición del espectro de respuesta de desplazamientos es:

$$S_d(T, \xi) = |\mathbf{u}|_{\max} \quad (5-2)$$

Entonces el valor del espectro de respuesta de desplazamientos, para un período de vibración T y un coeficiente de amortiguamiento ξ , es el máximo valor del desplazamiento relativo \mathbf{u} , en valor absoluto, que tendría un sistema de un grado de libertad con estas propiedades al verse sometido al acelerograma. De igual manera, la definición del espectro de velocidades es:

$$S_v(T, \xi) = |\dot{\mathbf{u}}|_{\max} \quad (5-3)$$

y la del espectro de respuesta de aceleraciones es:

$$S_a(T, \xi) = |\ddot{u} + \ddot{x}_0|_{\max} \quad (5-4)$$

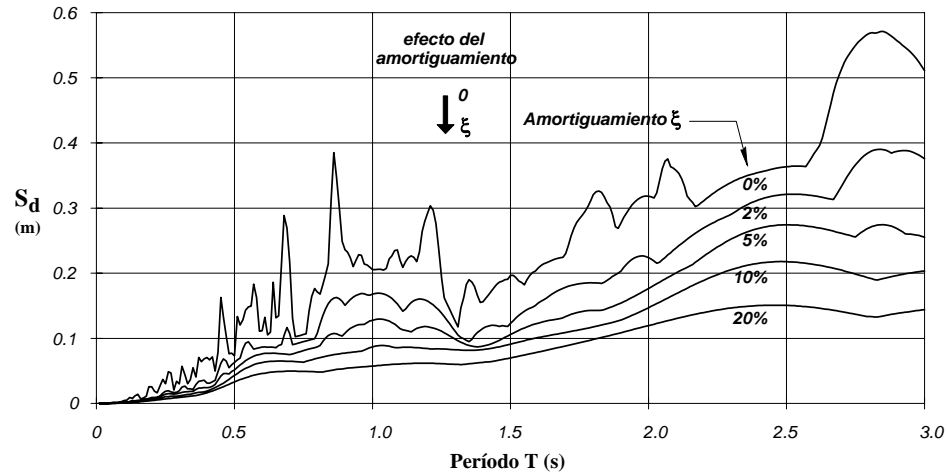


Figura 5-4 - Espectro de desplazamientos del temblor de El Centro, 1940

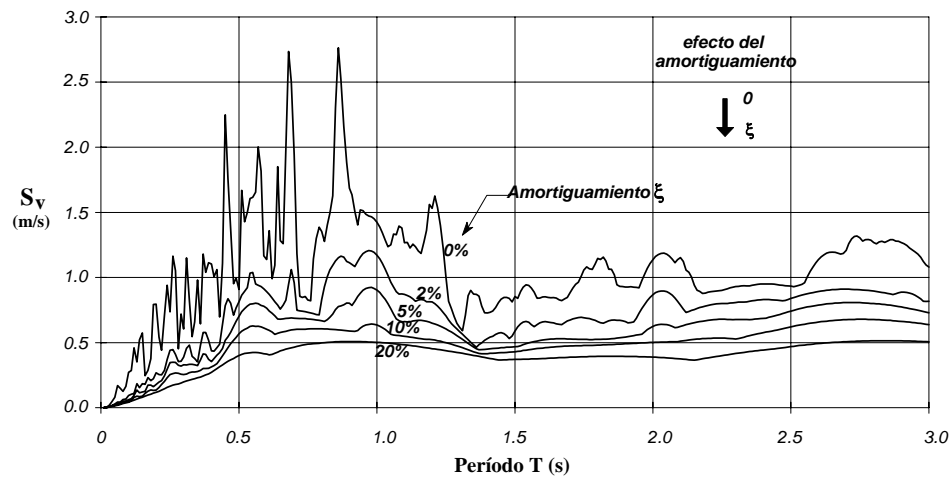


Figura 5-5 - Espectro de velocidades del temblor de El Centro, 1940

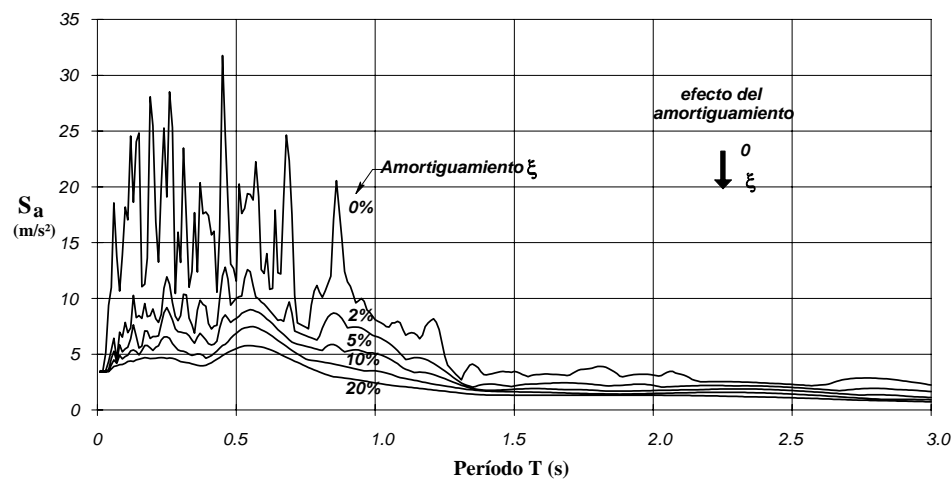


Figura 5-6 - Espectro de aceleraciones del temblor de El Centro, 1940

5.3 — Relación entre S_a , S_v y S_d

Derivando la integral de convolución por medio de la cual se calcula la respuesta del sistema, ecuación (2-72), que se reproduce aquí por comodidad:

$$u(t) = \frac{-1}{\omega \sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{x}_o(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\left\{\sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau)\right\} d\tau \quad (5-5)$$

es posible obtener la siguiente expresión para calcular la velocidad:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & -\int_0^t \ddot{x}_o(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos\left\{\sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau)\right\} d\tau \\ & + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{x}_o(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\left\{\sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau)\right\} d\tau \end{aligned} \quad (5-6)$$

y al derivar nuevamente, obtener la expresión para la aceleración total:

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + \ddot{x}_o(t) = & 2\xi\omega \int_0^t \ddot{x}_o(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos\left\{\sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau)\right\} d\tau \\ & + \frac{\omega(1-2\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{x}_o(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\left\{\sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau)\right\} d\tau \end{aligned} \quad (5-7)$$

Bajo las premisas de que: (a) en la mayoría de las aplicaciones prácticas el coeficiente de amortiguamiento ξ , es menor del 10%, y por lo tanto:

$$\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-0.01} \cong 1$$

y (b) que el temblor es suficientemente largo de tal manera que el coseno que aparece en las ecuaciones (5-6) y (5-7) puede ser aproximado por un seno; las ecuaciones anteriores se simplifican en:

$$u(t) \cong \frac{-1}{\omega} \int_0^t \ddot{x}_o(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\left\{\sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau)\right\} d\tau \quad (5-8)$$

$$\dot{u}(t) \cong -\int_0^t \ddot{x}_o(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\left\{\sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau)\right\} d\tau \quad (5-9)$$

y

$$\ddot{u}(t) + \ddot{x}_o \cong -\omega \int_0^t \ddot{x}_o(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}\left\{\sqrt{1-\xi^2} \omega(t-\tau)\right\} d\tau \quad (5-10)$$

Es evidente entonces que:

$$\boxed{S_d(T, \xi) \cong \frac{S_v(T, \xi)}{\omega} \cong \frac{S_a(T, \xi)}{\omega^2}} \quad (5-11)$$

La ecuación anterior se ha enmarcado para resaltar su importancia. Dado que hay una aproximación en esta operación, el espectro de velocidades obtenido de multiplicar cada ordenada del espectro de desplazamientos por el valor de ω se conoce con el nombre de *espectro de pseudo-velocidades*:

$$PS_v(T, \xi) = \omega S_d(T, \xi) = \frac{2\pi}{T} S_d(T, \xi) \quad (5-12)$$

y de igual manera el espectro de aceleraciones que se obtiene al multiplicar el espectro de desplazamientos por el valor de ω^2 se conoce con el nombre de *espectro de pseudo-aceleraciones*:

$$PS_a(T, \xi) = \omega^2 S_d(T, \xi) = \frac{4\pi^2}{T^2} S_d(T, \xi) \quad (5-13)$$

5.4 — Representación tripartita

N. M. Newmark sugirió una manera de presentar los tres espectros en un solo gráfico, que denominó tripartita, en el cual se coloca en el eje horizontal el logaritmo del período de vibración T y en eje vertical el logaritmo de la ordenada del espectro de pseudo-velocidades calculado a partir del espectro de desplazamientos. En la Figura 5-7 se muestra el espectro de pseudo-velocidades del temblor de El Centro, graficado en papel log-log. Allí se dibujaron las líneas: a-b y c-d, una con pendiente 1 y la otra con pendiente -1, respectivamente. Para los puntos marcados como a y b se tiene:

$$\frac{\log S_v^a - \log S_v^b}{\log T_a - \log T_b} = 1 \quad (5-14)$$

y utilizando $T = 2\pi/\omega$, y $S_a = S_v/\omega$:

$$\frac{\log\left(\frac{S_a^a}{\omega_a}\right) - \log\left(\frac{S_a^b}{\omega_b}\right)}{\log\left(\frac{2\pi}{\omega_a}\right) - \log\left(\frac{2\pi}{\omega_b}\right)} = \frac{\log\left(\frac{S_a^a \omega_b}{S_a^b \omega_a}\right)}{\log\left(\frac{\omega_b}{\omega_a}\right)} = 1 \quad (5-15)$$

por lo tanto:

$$\log\left(\frac{S_a^a \omega_b}{S_a^b \omega_a}\right) = \log\left(\frac{\omega_b}{\omega_a}\right) \quad (5-16)$$

y

$$S_a^a = S_a^b \quad (5-17)$$

Esto quiere decir que la línea a-b corresponde a una línea de aceleración constante. La misma deducción puede hacerse para la línea c-d, la cual corresponde a una línea de desplazamiento constante.

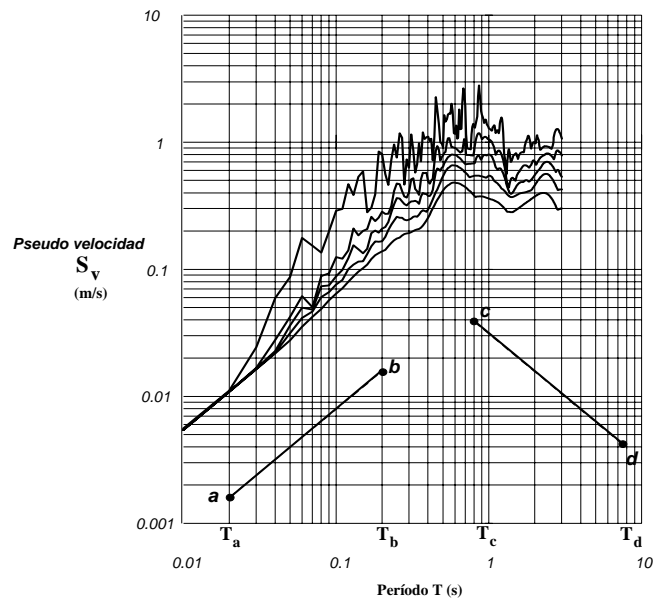
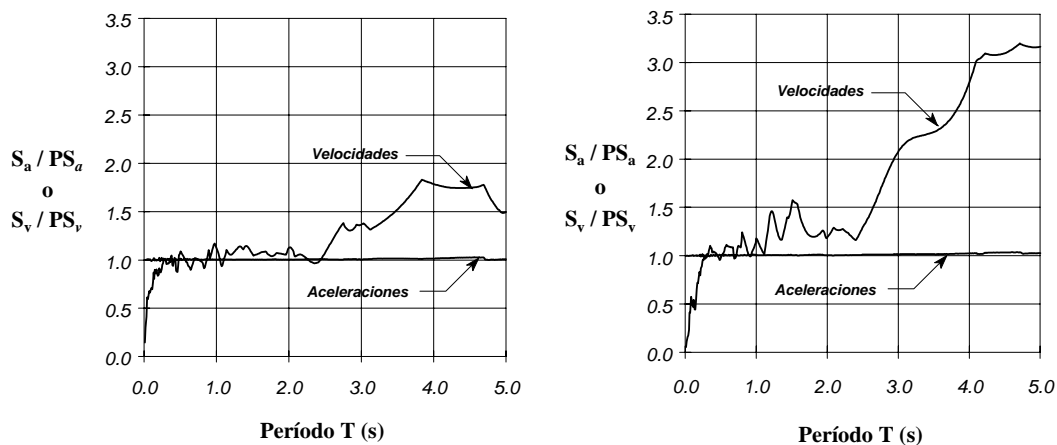


Figura 5-7 - Espectro de Pseudo-velocidades Temblor de El Centro para amortiguamientos, ξ , de 0%, 2%, 5%, 10% y 20% , graficado en papel log-log

Posteriormente en la Figura 5-9 se muestra el espectro de El Centro en papel tripartita. Allí pueden leerse los tres espectros en el mismo gráfico. Por ejemplo un sistema con un período de vibración de 0.6 segundos sin amortiguador ($\xi = 0\%$) al verse sometido al temblor de El Centro, su masa tendría una aceleración máxima de aproximadamente $1g$ (9.8 m/s^2), una velocidad máxima relativa entre la masa y su apoyo de 1 m/s y un desplazamiento relativo entre la masa y el apoyo de 0.10 m . Al final del Capítulo 7 se incluye un papel logarítmico tripartita, el cual puede ser fotocopiado para hacer ejercicios de obtención de espectros.

No sobra insistir que en esta representación, sólo los desplazamientos corresponden al espectro verdadero, tanto el de velocidades como el de aceleraciones corresponden a los valores del de desplazamientos multiplicados por ω y por ω^2 respectivamente. En la Figura 5-8 se muestra el error en que se incurre con esta representación, allí se indican las diferencias entre el espectro de aceleraciones verdadero y el espectro de pseudo-aceleraciones; y entre el de velocidades y el de pseudo-velocidades para los registros de El Centro y Corralitos. Puede verse que para los dos casos en el espectro de pseudo-aceleraciones prácticamente no hay error en todo el rango de períodos. Para el de pseudo-velocidades, el error es mayor para períodos bajos (menos de 0.5 s) y para períodos altos (más de 2.5 s).



(a) Temblor de El Centro, 1940

(b) Temblor de Loma Prieta - Corralitos 1989

Figura 5-8 - Error en los espectros de pseudo aceleraciones y pseudo-velocidades ($\xi = 5\%$)

5.5 — Influencia de los movimientos máximos del terreno

La forma aproximadamente trapezoidal del espectro es evidente en la Figura 5-9. En general en la zona de la derecha, de períodos largos, el desplazamiento espectral es constante, en la zona central, con períodos moderados, la velocidad espectral es aproximadamente constante y en la zona de la izquierda, de períodos cortos, la aceleración es constante.

En la Figura 5-10 se ha expresando el espectro del temblor de El Centro en papel tripartita, pero utilizando escalas que estén en función de los movimientos máximos del terreno (véase la Figura 4-11); o sea la aceleración en función de la aceleración máxima del terreno, A_{te} , de 3.417 m/s^2 , la velocidad en función de la velocidad máxima del terreno, V_{te} , de 0.334 m/s , y el desplazamiento en función del desplazamiento máximo del terreno, D_{te} , de 0.109 m .

En esta figura puede verse que para períodos bajos, menores de 0.1 segundos, el espectro tiende a la aceleración del terreno para cualquier amortiguamiento. Esto se debe a que el resorte es muy rígido y/o la masa pequeña, por lo tanto tiende a no haber deformación relativa entre los extremos del resorte y por ende la masa tiene aceleraciones aproximadamente iguales a la máxima del terreno.

Para períodos altos, mayores de 3 segundos, el espectro tiende a tener un desplazamiento igual al desplazamiento máximo del terreno. Esto se debe a que los sistemas con períodos altos tienen resortes poco rígidos y/o masas grandes, o sea que el resorte aísla la masa de los movimientos del terreno, produciendo el efecto de que la masa queda quieta y por lo tanto el desplazamiento relativo entre los extremos del resorte tiende a ser igual al máximo del terreno.

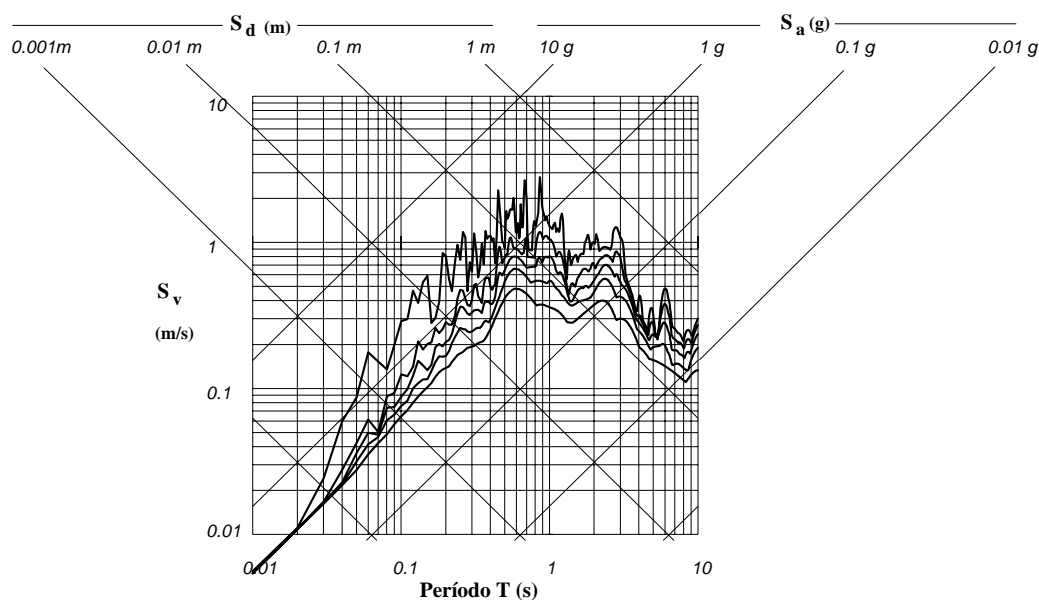


Figura 5-9 - Representación tripartita del espectro del Temblor de El Centro en para amortiguamientos, ξ , de 0%, 2%, 5%, 10% y 20%

Para la zona de períodos intermedios puede verse que la velocidad espectral tiende a ser constante, con un valor mayor que la velocidad máxima del terreno, dependiendo del amortiguamiento que tenga el sistema. De lo anterior se puede deducir que para períodos intermedios hay una amplificación de la velocidad espectral con respecto a la velocidad máxima del terreno.

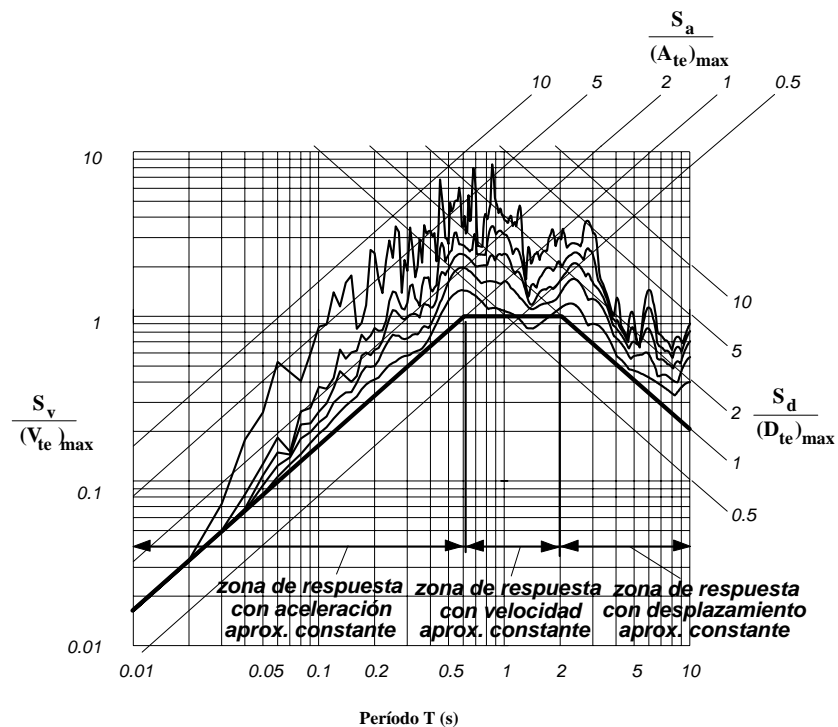


Figura 5-10 - Espectro de El Centro expresado en función de los máximos movimientos del terreno para amortiguamientos, ξ , de 0%, 2%, 5%, 10% y 20%

5.6 — Relación entre las diferentes componentes

Los movimientos sísmicos son tridimensionales y extremadamente aleatorios. El acelerógrafo sólo registra los movimientos traslacionales en tres direcciones, dos horizontales y una vertical, como muestra la Figura 5-11. No necesariamente el movimiento se limita a efectos traslacionales. Los acelerógrafos no registran los parámetros rotacionales del movimiento. Estos se pueden determinar utilizando grupos de acelerógrafos localizados cerca y con un registro de tiempo unificado, lo cual permite calcular las velocidades angulares de los efectos rotacionales del movimiento; lo cual, desafortunadamente, sólo se logra en muy contadas ocasiones. Por esta razón la discusión aquí se limita a los efectos traslacionales únicamente, tal como los muestra la Figura 5-11. No sobra advertir que la localización del instrumento es totalmente arbitraria y no siempre se hace con uno de sus ejes coincidiendo con el norte.

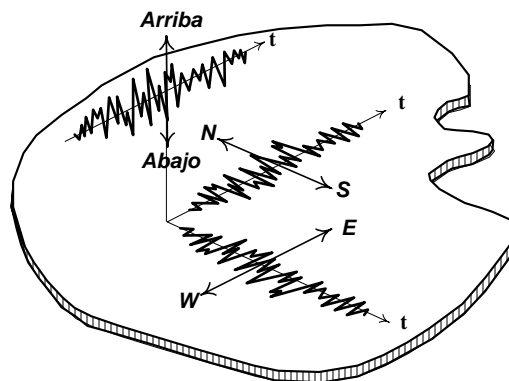


Figura 5-11 - Componentes que se registran en un acelerógrafo

En general las componentes horizontales tienen valores de aceleración mayores que la componente vertical; aunque existen numerosos casos en los cuales la componente vertical registrada fue mayor que

las horizontales. Para efectos ilustrativos, en la Figura 5-12 se muestra el espectro para la componente vertical del temblor de El Centro de 1940, comparado con una de las componentes horizontales.

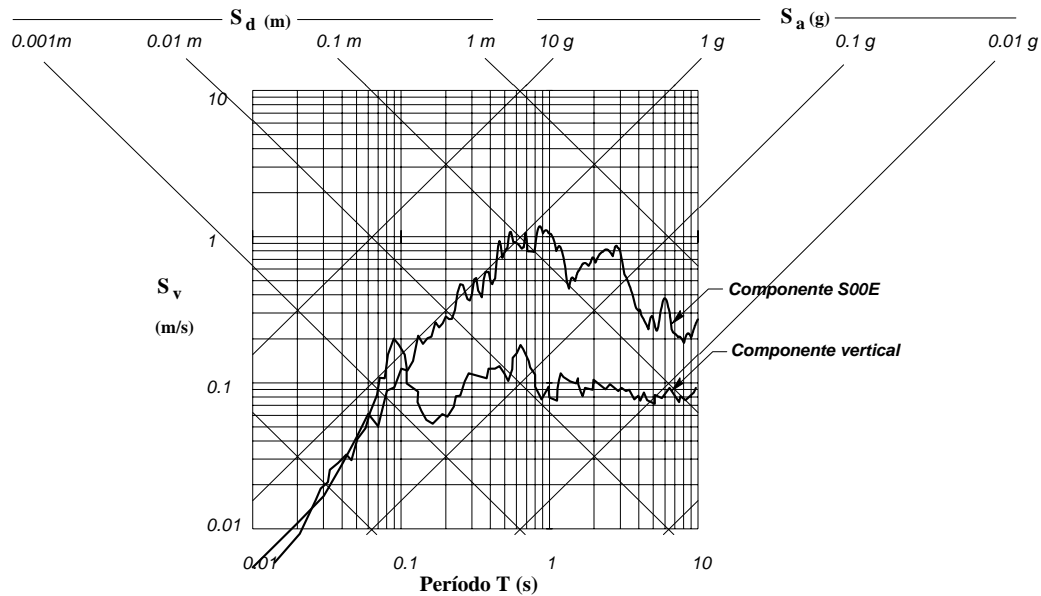


Figura 5-12 - Espectro de la componentes vertical y S00E del registro de El Centro de 1940 para amortiguamientos, ξ , de 2%

El registro de las dos componentes horizontales del movimiento, corresponde a las dos proyecciones sobre dos ejes horizontales ortogonales, contenidos en el plano del terreno. Por lo tanto, al recomponer las dos componentes en un vector y dibujarlo sobre un plano horizontal se tiene una idea de los efectos direccionales en el plano horizontal, de las aceleraciones registradas.

En la Figura 5-13 se muestran las aceleraciones del terreno causadas por el temblor de Loma Prieta, California, del 17 de Octubre de 1989, tal como se registraron en Corralitos, en Eureka Canyon, muy cerca a la falla que causó el sismo.

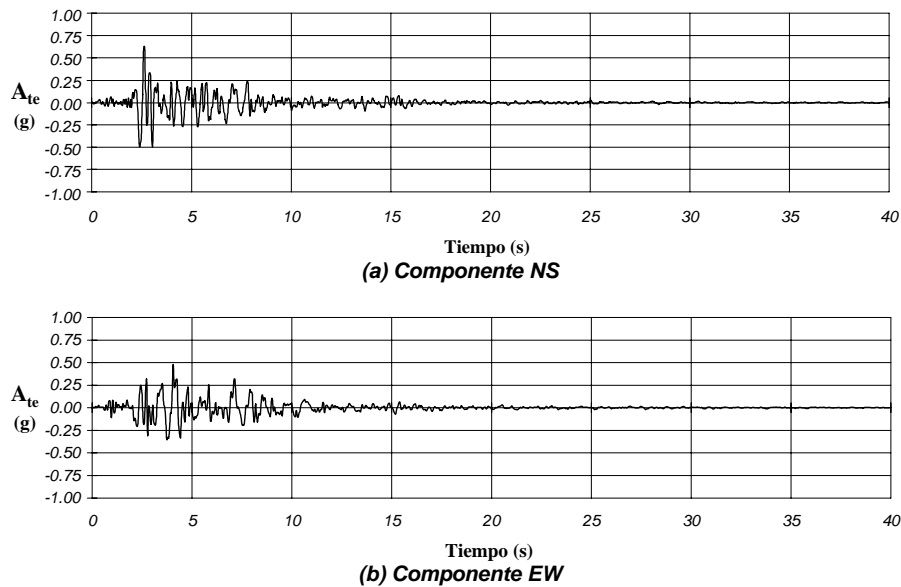


Figura 5-13 - Aceleraciones del temblor de Loma Prieta de 1989, registro de Corralitos

Si para cada instante de los acelerogramas de la Figura 5-13, se dibuja el vector de aceleraciones en un plano, se obtiene el gráfico presentado en la Figura 5-14.

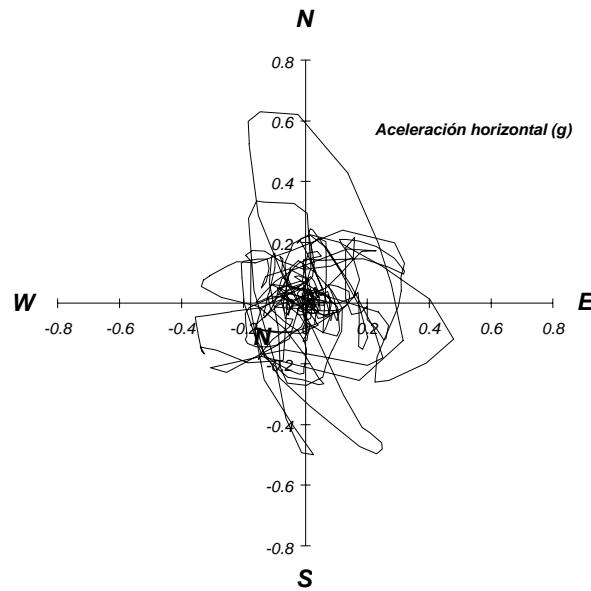
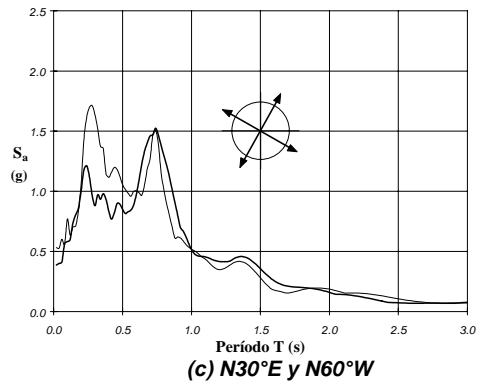
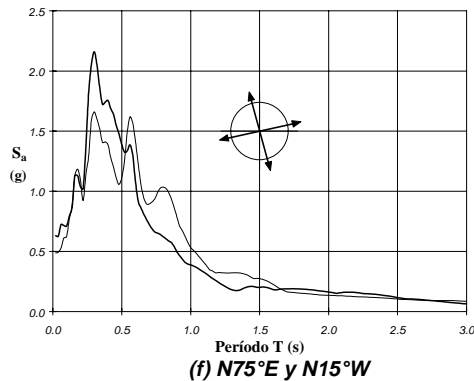
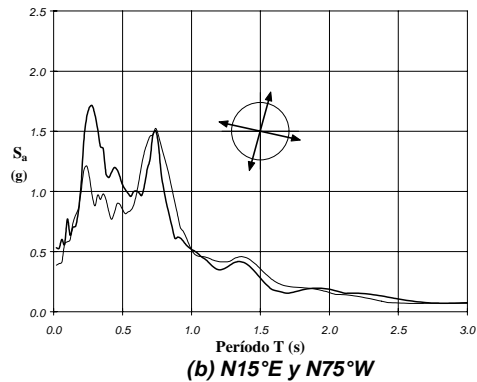
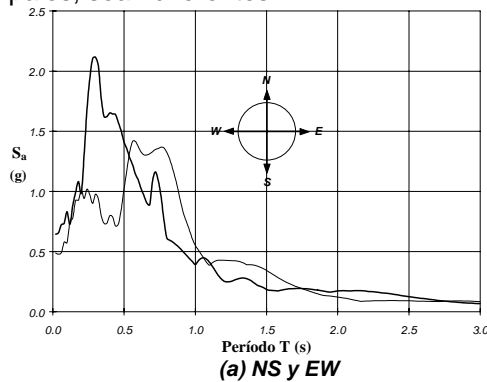


Figura 5-14 - Aceleraciones horizontales del registro de Corralitos

El movimiento, como puede verse, es extremadamente aleatorio en sus aspectos direccionales, aunque hay ciertas preferencias, como en este caso hacia la dirección N15°W; los cuales tienen que ver con la localización del instrumento con respecto a la falla que causó los movimientos, aspectos de la geología local, el tipo de mecanismo focal, y otros, sobre los cuales se conoce muy poco en la actualidad.

Esta variabilidad direccional conduce a que los espectros que se calculan para cada una de las direcciones principales, y para cualquier dirección que se recomponga de las dos direcciones principales, sean diferentes.



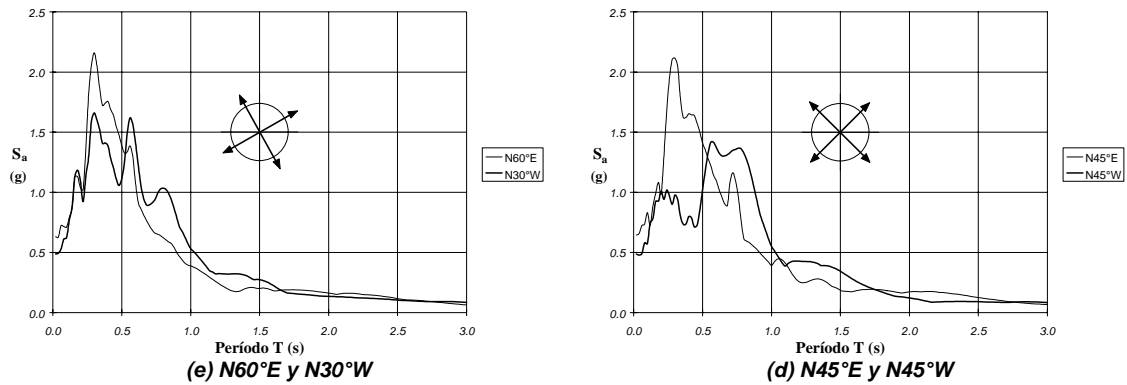
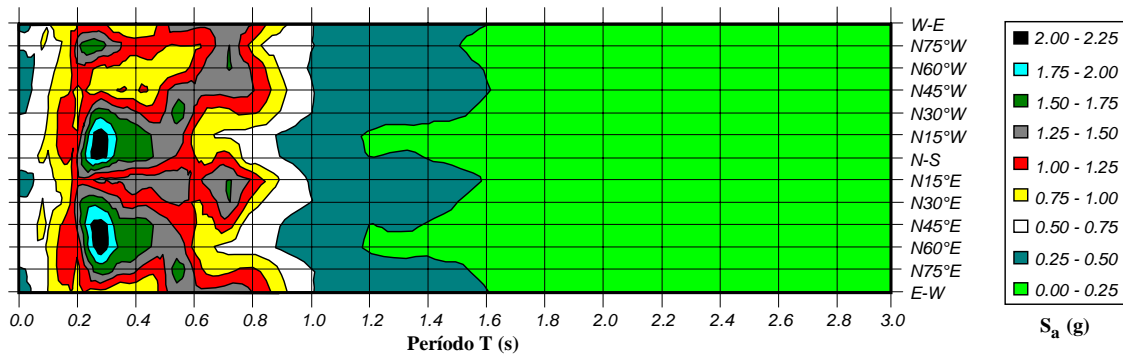


Figura 5-15 - Espectros para diferentes direcciones del registro de Corralitos, ξ de 5%

En la Figura 5-15 se muestran los espectros calculados para el mismo registro de Corralitos, para componentes en direcciones que van variando desde EW hasta WE de 15° en 15°. Allí puede verse que los espectros varían apreciablemente. En la Figura 5-16 se muestran en conjunto los valores del espectro de aceleraciones para las diferentes direcciones. Hay cierta repetitividad en la forma del espectro y especialmente en sus picos, aunque no sobra insistir sobre la variabilidad que se observa.



5.7 — Espectros de algunos sismos

A continuación, en la Figura 5-17 se presentan los espectros de aceleraciones y en la 5-18 los de desplazamientos de los seis acelerogramas de la Figura 4-10, calculados para un amortiguamiento del 5% del crítico. Con los registros presentados se cubre una gama amplia de movimientos sísmicos, con situaciones de suelo blando, con períodos preponderantemente largos, como es el caso de los registros de México y Miyagi, con alto contenido de períodos cortos, como son El Centro, Castaic y Viña del Mar, y con preponderancia a los períodos intermedios como es el caso de San Fernando.

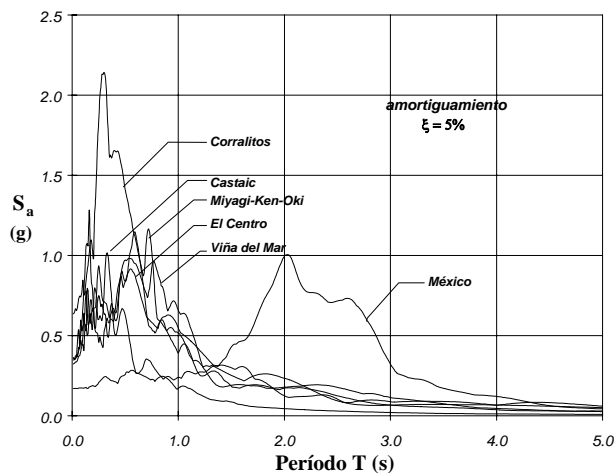


Figura 5-17 - Espectros de aceleraciones de los acelerogramas mostrados en la Figura 4-10, ξ de 5%

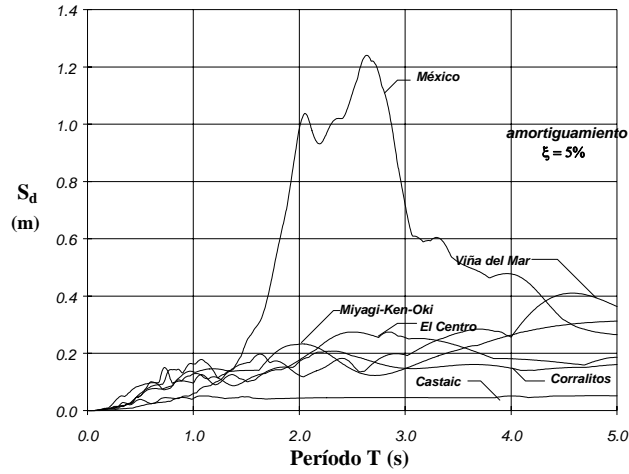


Figura 5-18 - Espectros de desplazamientos de los acelerogramas mostrados en la Figura 4-10, ξ de 5%

5.8 — Espectros de Fourier

El contenido frecuencial de los movimientos sísmicos se puede identificar convirtiéndolo del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, por medio de un procedimiento que consiste en representarlo por medio de series de Fourier, similar al empleado en la Sección 3.7. Es posible probar, [Kreyszig, 1993], que la *transformada de Fourier* de una función es:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \text{ donde } i = \sqrt{-1} \quad (5-18)$$

Si aplicamos la transformada de Fourier a un acelerograma, integrando para toda su duración, t_{dur} , obtenemos:

$$F(\omega) = \int_0^{t_{dur}} \ddot{x}_0(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5-19)$$

Aplicando, ahora, la transformación de Euler, ecuación (2-29b) de la Sección 2.2.3; la integral anterior se convierte en:

$$F(\omega) = \int_0^{t_{dur}} \ddot{x}_0(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt \quad (5-20)$$

Por definición, entonces, el *espectro de amplitudes de Fourier* $FS(\omega)$ es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la parte real y de la parte imaginaria de $F(\omega)$:

$$FS(\omega) = \sqrt{\left[\int_0^{t_{dur}} \ddot{x}_0(t) \cos(\omega t) dt \right]^2 + \left[\int_0^{t_{dur}} \ddot{x}_0(t) \sin(\omega t) dt \right]^2} \quad (5-21)$$

Dado que el acelerograma no se puede expresar por medio de una función trascendental, debe emplearse la *transformada discreta de Fourier*:

$$F(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ddot{x}_0(t_j) e^{-i2\pi(nj/N)} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (5-22)$$

donde N es el número de puntos del acelerograma. Esto genera $N-1$ amplitudes complejas, y la frecuencia asociada, en rad/s, con cada una de las amplitudes que se calculan corresponde a:

$$\omega = \frac{\frac{j}{2} - 1}{2\pi N \Delta t} \quad (5-23)$$

siendo Δt el intervalo de digitalización del acelerograma. Existe una manera de realizar el cálculo de las series, lo cual conduce a la *transformada rápida de Fourier* [Clough y Penzien, 1993], [Paz, 1991], lo cual agiliza el proceso numérico.

A modo de ejemplo del uso del espectro de Fourier, se genera una onda que es la superposición de dos ondas sinusoidales, una con un período de 2 s y otra que cabalga sobre ella con un período de 0.25 s. En la Figura 5-19 se muestran, tanto el acelerograma como su espectro de Fourier que se obtiene. Como puede verse el espectro de Fourier asocia la energía que lleva la onda en cada uno de los períodos, con el máximo para un período de 2 s, y el segundo pico para un período de 0.25 s.

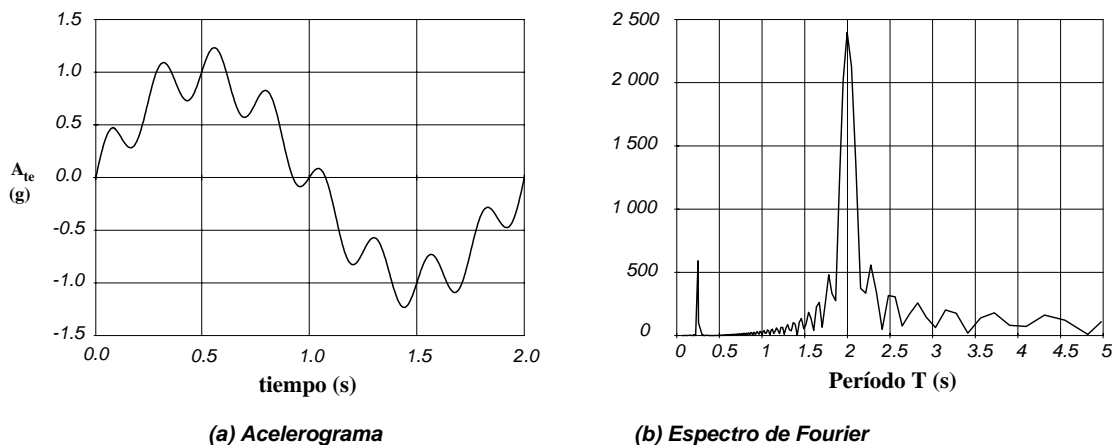


Figura 5-19 - Espectro de Fourier de una onda con períodos de 2 s y 0.25 s

En la Figura 5-20 se presenta el espectro de Fourier del sismo de El Centro de 1940, y en la Figura 5-21 el del sismo de México de 1985. La amplitud del espectro de Fourier tiene unidades de longitud sobre tiempo. En este caso las amplitudes se obtuvieron utilizando el acelerograma como fracción de g ., por lo tanto las unidades de la amplitud son segundo sobre g ; y al multiplicar la amplitud por la aceleración de la gravedad se obtienen unidades de m/s. Puede verse que las mayores amplitudes se presentan para períodos menores de 1 s en el caso de El Centro, como muestra la Figura 5-20.

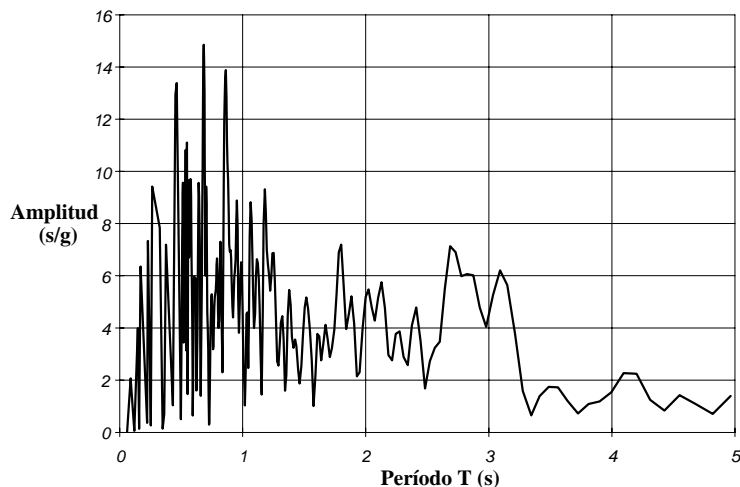


Figura 5-20 - Espectro de Fourier del temblor de El Centro de 1940

En el caso de México, en la figura siguiente, se observa que la máxima amplitud se presenta para un período cercano a 2 s y que las amplitudes para períodos cortos son muy pequeñas. Esto se debe a que el registro de México es un registro que fue amplificado por el suelo en el lugar del registro, variando las amplitudes con respecto al registro en roca.

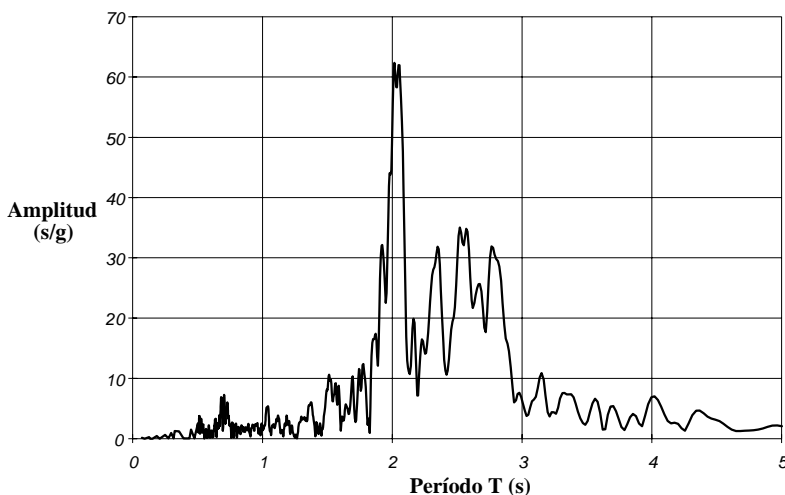


Figura 5-21 - Espectro de Fourier del temblor de México de 1985

En la Sección 2.6 se indicó que la energía que impone una aceleración en su base a una estructura tiene una relación con el espectro de Fourier. Aunque tiene gran importancia la definición de la energía que disipa el amortiguamiento dentro de un sistema, este aspecto adquiere características totalmente diferentes, en su orden de magnitud, cuando entra en juego la respuesta inelástica del sistema. La interpretación de los valores de la amplitud de los espectros de Fourier no tiene gran valor desde el punto de vista práctico de ingeniería de diseño; no obstante, es una gran herramienta para la definición de los períodos de vibración dominantes en un acelerograma, especialmente en el estudio de los efectos de amplificación de las ondas sísmicas debida a la estratificación del suelo en el lugar de interés.

5.9 — Programas para el cálculo de espectros

Dentro de los programas que se suministran, se incluyeron dos programas: **ESPEC2000**, el cual calcula los espectros de aceleraciones, velocidad, desplazamientos, y de amplitudes de Fourier para un acelerograma. Algunas de las hojas electrónicas disponibles en la actualidad, están capacitadas para calcular la transformada rápida de Fourier.

Tema N° 9 — Sistemas inelásticos de un grado de libertad

6.1 — Introducción

El limitar el estudio de la dinámica estructural a sistemas linealmente elásticos reduciría su rango de aplicación enormemente; pues la gran mayoría de los materiales estructurales muestran dentro del rango de esfuerzos utilizados en la práctica, en alguna medida, características inelásticas. Más aún, algunos materiales como el concreto son inelásticos en casi todo el rango útil de esfuerzos. Además, en la respuesta de estructuras sometidas a los efectos de sismos fuertes, muy seguramente éstas actuarán más allá del rango elástico; permitiendo que parte de la energía que impone el movimiento sísmico se pierda como energía disipada; reduciendo la energía que se convierte en energía cinética; y disminuyendo las fuerzas inerciales a que se ve sometida la estructura. En principio, en el análisis de la respuesta dinámica de una estructura, hay necesidad de disponer de una relación fuerza-desplazamiento que describa lo que ocurre en la estructura, para cualquier nivel de desplazamiento y a cualquier velocidad de deformación, durante una serie de sollicitaciones alternantes.

La formulación de un modelo matemático que permita estudiar la respuesta inelástica de sistemas dinámicos, depende fundamentalmente de cómo actúa cada material estructural en particular. Un aspecto importante en la capacidad de un material de responder dinámicamente en el rango inelástico está asociado con la ausencia de modos frágiles de falla. Cuando se presenta una falla frágil, se viola la premisa básica de que el sistema estructural sobreviva la excitación dinámica. Por esta razón se buscan maneras de disponer y diseñar los materiales estructurales para que respondan dinámicamente en el rango inelástico, sin pérdida grave de la resistencia y estabilidad del sistema estructural. Esta particularidad de los materiales de resistir deformaciones en el rango inelástico sin falla, se ha enmarcado dentro de términos tales como *ductilidad* y *tenacidad*. Por lo tanto es deseable que los materiales estructurales se diseñen y detallen de tal manera que tengan una ductilidad y tenacidad apropiada, con el fin de que puedan tener respuestas dinámicas inelásticas adecuadas.

Desafortunadamente, no existe una manera única de describir, a diferencia de los sistemas elásticos, el comportamiento inelástico de todos los materiales estructurales. Por esta razón hay modelos matemáticos apropiados para cada uno de ellos, y en algunos casos para algunos tipos particulares de elementos estructurales contruidos con uno de los materiales.

A continuación se discute, de una manera resumida, el comportamiento en el rango inelástico de varios materiales estructurales, y de elementos contruidos con ellos, para poder formular modelos matemáticos que lo describan analíticamente. Posteriormente, se tratará de una manera más detallada el comportamiento estructural inelástico del concreto, el acero estructural y la mampostería, respectivamente.

6.2 — Respuesta histerética

6.2.1 — Materiales y elementos estructurales elásticos e inelásticos

Desde el punto de vista técnico [Popov, 1968], la *elasticidad de un material* se define como la capacidad de éste de volver a sus dimensiones originales, después de que se haya retirado una fuerza impuesta, recobrando totalmente la forma que tenía antes de imponer la fuerza. Por lo tanto, el comportamiento elástico implica la ausencia de cualquier *deformación permanente* debido a que se haya aplicado y retirado la fuerza. Algunos materiales exhiben una relación esencialmente lineal entre esfuerzos y deformaciones, como muestra la Figura 6-1(a), y se denominan *materiales linealmente elásticos*. Otros materiales muestran alguna curvatura en sus relaciones esfuerzo-deformación, como se muestra en la Figura 6-1(b); y se denominan *materiales no linealmente elásticos*. En ambos casos la curva de carga y de descarga es la misma. Un tercer caso es el *material inelástico*, en el cual la descarga no ocurre siguiendo la misma trayectoria de la carga y se presenta *deformación permanente*, como muestra la Figura 6-1(c).

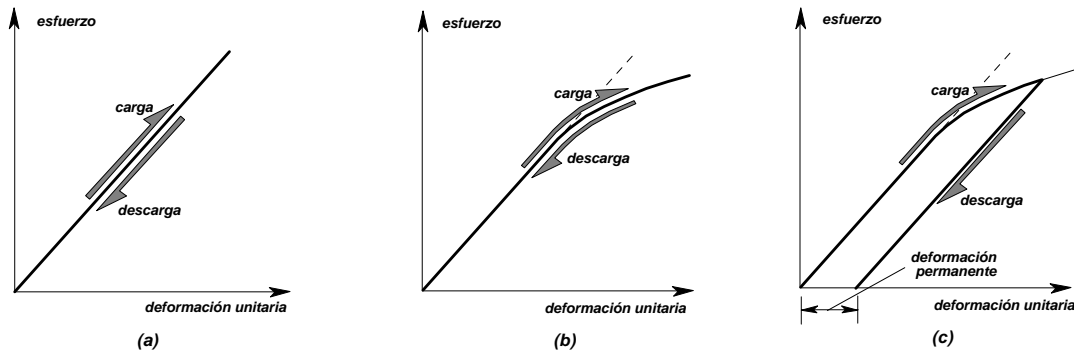


Figura 6-1 - Material: (a) linealmente elástico, (b) no linealmente elástico, y (c) inelástico

Esta distinción entre materiales elásticos e inelásticos es algo ambigua; debido a que prácticamente todos los materiales presentan las dos características cuando se observan las relaciones esfuerzo-deformación en todo el rango de esfuerzos posibles, hasta llevarlos a la falla. En general la clasificación anterior hace referencia al comportamiento del material en el rango inicial de carga, cuando los esfuerzos y las deformaciones son pequeños.

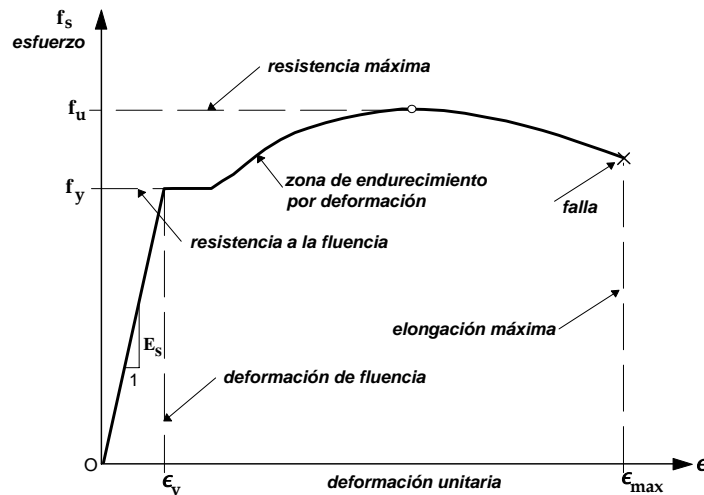


Figura 6-2(a) - Curva esfuerzo-deformación del acero de refuerzo

En la Figura 6-2(a) se muestra la curva esfuerzo-deformación para el acero de refuerzo y en la Figura 6-2(b) la del concreto no confinado. Allí puede verse que el acero es linealmente elástico hasta que llega al punto de fluencia, mientras que el concreto no es propiamente linealmente elástico en ningún momento.

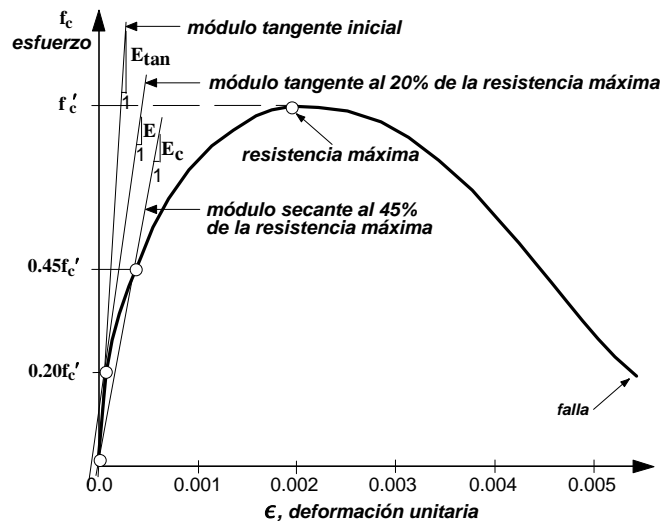


Figura 6-2(b) - Curva esfuerzo-deformación del concreto no confinado

El área bajo la curva esfuerzo-deformación de cualquier material que se lleva hasta la falla, es una medida de la capacidad del material para absorber energía por unidad de volumen, y se denomina *tenacidad* del material (*toughness*, en inglés). Entre mayor sea el área bajo la curva, el material tiene mayor tenacidad. Los materiales inelásticos muestran características especiales cuando la carga no se aumenta *monotónicamente* hasta la falla. Se entiende por ensayo *monotónico* aquel en que se carga el material sin que haya inversión en el sentido de las fuerzas aplicadas.

En la Figura 6-3, basada en [Popov, 1968], se muestra un material que fue cargado desde 0 hasta el punto A; luego fue descargado, y tomó la trayectoria AB. Tanto en la parte inicial de la carga como en la descarga, el material tuvo una respuesta esencialmente elástica con el módulo de elasticidad inicial del material. A pesar de esto, debido a que entró en el rango inelástico antes de llegar al punto A, se presenta una deformación permanente. Además, la energía de deformación que había acumulado hasta el punto A, no fue liberada totalmente en la descarga; por lo tanto, el material disipó la energía correspondiente al área sombreada, tal como se explicó en la Sección 1.7.4. En el rango inelástico, sólo una parte pequeña de la energía absorbida por el material se recupera al descargarlo.

En la Figura 6-3 puede observarse que al cargar nuevamente el material a partir del punto B; éste se comporta como un material elástico, hasta que encuentra la curva original en el punto C; y que al seguirlo cargando sigue la curva original. Si en el punto D se retira nuevamente la carga, el material llega al punto E de cero esfuerzo aplicado. Cargándolo nuevamente en el sentido contrario a partir del punto E, desde F el material comienza a comportarse inelásticamente. Vale la pena anotar que el esfuerzo f_b en el punto F es menor que el que tuvo al descargarlo, f_a , en el punto D. Esto se conoce como *efecto de Bauschinger*, quien fue el primero en observarlo, y por esto lleva su nombre.

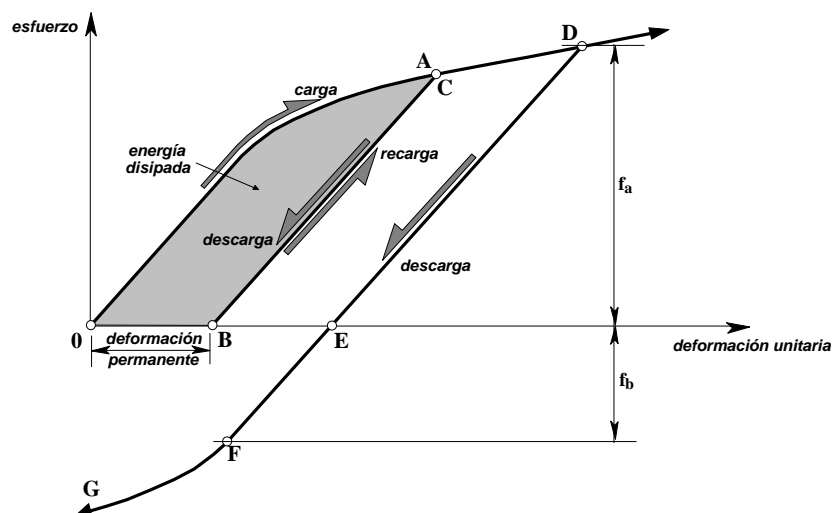


Figura 6-3 - Efecto de carga y descarga, con inversión del sentido de la fuerza

Cuando al material se le imponen una serie de ciclos de carga, descarga, y carga en el sentido opuesto; en los cuales los esfuerzos sobrepasan el límite elástico del material, se obtiene el comportamiento que se mostró en la Figura 1-8. Este comportamiento se conoce con el nombre de *respuesta histerética*. Tal como se indicó en la Sección 1.7.4, la histéresis es un fenómeno por medio del cual dos, o más, propiedades físicas se relacionan de una manera que depende de la historia de su comportamiento previo. Por lo tanto, hace referencia al comportamiento de los materiales estructurales cuando se ven sometidos a deformaciones o esfuerzos alternantes que están fuera del rango de respuesta lineal, o elástica, ante una sollicitación; ya sea de fuerza o de deformación impuesta. Una gran parte de la energía que es capaz de disipar el material estructural en el rango inelástico de respuesta se asocia con el área comprendida dentro de los ciclos de histéresis.

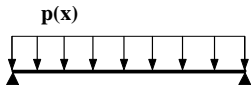
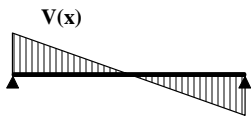
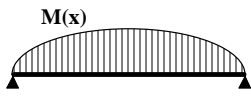
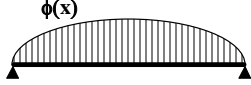
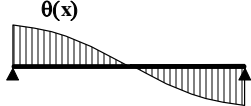
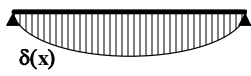
Desde el punto de vista del elemento estructural construido con un material elástico, o inelástico, es conveniente ver cómo se manifiesta la inelasticidad en comparación con el elemento construido con un material elástico. Vale la pena, en este momento, repasar el proceso matemático que se emplea para determinar la *línea elástica*, o *curva de deflexiones* de una barra prismática, sometida a flexión

transversal en su sección. Con base en la teoría matemática de la elasticidad [Timoshenko y Young, 1962] es posible demostrar que la siguiente ecuación diferencial describe la línea elástica $y = f(x)$ del elemento estructural:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = p(x) \quad (6-1)$$

Donde y corresponde a la deflexión transversal de la línea elástica, x es la variable que describe la posición a lo largo del eje longitudinal del elemento, E es el módulo de elasticidad del material, I el momento de inercia de la sección, y $p(x)$ es la función que describe las cargas transversales al eje del elemento. La solución de esta ecuación diferencial se obtiene integrando cuatro veces y resolviendo las constantes de integración por medio de las condiciones de apoyo. La Tabla 6-1 muestra este proceso de una manera esquemática.

Tabla 6-1 - De carga a deflexión

(a) Carga	$p(x)$	
(b) Cortante	$V(x) = \int p(x) dx$	
(c) Momento	$M(x) = \int V(x) dx$	
(d) Curvatura	$\phi(x) = \frac{M(x)}{EI}$	
(e) Rotación	$\theta(x) = \int \phi(x) dx$	
(f) Deflexión	$\delta(x) = \int \theta(x) dx$	

La relación de momento-curvatura ($M-\phi$), mostrada en la etapa (d) de la Tabla 6-1, supone que las deformaciones son linealmente proporcionales a los esfuerzos, a través de la rigidez, EI , de la sección del elemento. Por lo tanto, la ecuación es válida para elementos cuyo material no llega a esfuerzos que superen el límite elástico, o sea materiales linealmente elásticos.

Cuando el elemento estructural responde inelásticamente, conociendo la relación momento curvatura, es posible llegar a determinar las deflexiones, realizando el proceso de integración, probablemente utilizando técnicas matemáticas algo más elaboradas. A modo ilustrativo, en la Figura 6-4 se presenta la relación momento-curvatura ($M-\phi$) de la sección de una viga de concreto reforzado, que se carga monotónicamente a flexión. Allí es importante anotar, que la sección se comporta de una manera linealmente elástica hasta el punto en el cual se fisura el concreto en tensión en la parte inferior de la viga. Este punto se denomina punto de agrietamiento, y le corresponden un momento de agrietamiento, M_{cr} , una curvatura de agrietamiento, ϕ_{cr} , y la rigidez hasta este punto se puede describir por medio de EI_g , donde I_g es la inercia de la sección no fisurada. En la medida que se aumenta el momento se incrementa la fisuración en la parte inferior de la viga; el eje neutro de la sección sube; y los esfuerzos, tanto en el concreto como en el acero, se incrementan. En el momento en que el acero de refuerzo llega a su resistencia de fluencia f_y (véase la Figura 6-2a), hay un cambio en el comportamiento de la sección,

que es consecuencia del cambio en el comportamiento del acero. Allí es posible definir un momento de fluencia, M_y , una curvatura de fluencia, ϕ_y , y una rigidez, EI_{cr} , que se denomina rigidez fisurada. Esta rigidez, describe aproximadamente el comportamiento de la sección entre el punto de fisuración y el de fluencia. A partir de ese punto hay un aumento en la curvatura de la sección, sin que se presente un mayor aumento en el momento, presentándose disminución en la rigidez de la sección. Esta situación se mantiene hasta el punto en que se empieza a presentar un aumento de la resistencia del acero debida al fenómeno de *endurecimiento por deformación* (strain-hardening en inglés), allí puede definirse una curvatura para endurecimiento por deformación, ϕ_s . La resistencia a momento se incrementa hasta llegar al punto de máxima resistencia del acero, f_u , obteniéndose así la máxima resistencia de la sección, M_u . El momento empieza a disminuir en la medida que la resistencia del acero baja, hasta que éste falla a la tensión. Allí se obtiene la máxima curvatura en la sección, ϕ_u .

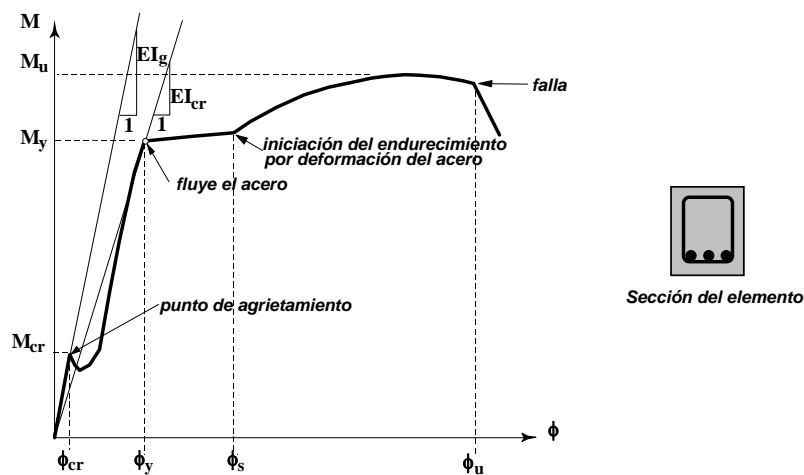


Figura 6-4 - Relación momento curvatura típica de una viga de concreto reforzado

El comportamiento mostrado en la figura anterior se presenta cuando la cuantía de acero longitudinal es relativamente baja, permitiendo que el acero de refuerzo llegue a fluencia, antes de que se presente una falla por compresión en el concreto. O sea es válido para cuantías menores que la cuantía balanceada, ρ_b . Así mismo, la sección debe tener una resistencia a esfuerzos cortantes adecuada, para que la falla sea por flexión y no por cortante, la cual es una falla frágil. De igual manera, debe garantizarse que no haya una falla por adherencia del acero de refuerzo con el concreto.

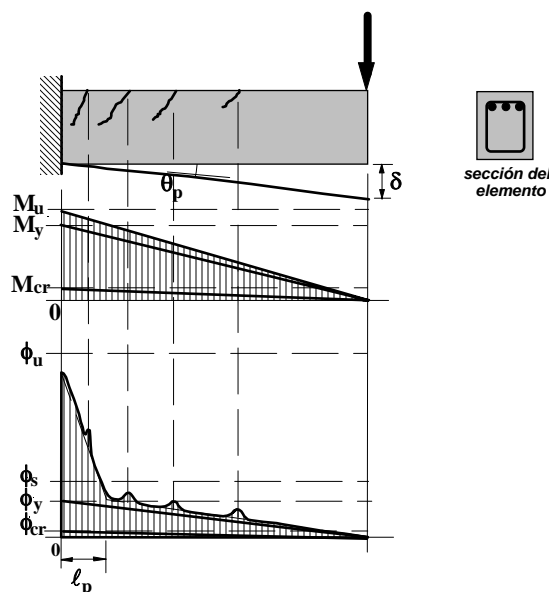


Figura 6-5 - Distribución de la curvatura en una viga en voladizo que se lleva a la falla

Supongamos, ahora, una viga en voladizo que tiene una sección similar a la estudiada. A esta viga se le coloca una carga en el extremo libre. En la Figura 6-5 se presentan las curvaturas correspondientes a la aplicación de una carga tal que se presente en la base del voladizo respectivamente el momento de agrietamiento, el de fluencia y el momento último. Allí puede observarse que cuando se llega al momento último hay una concentración de cambio en curvatura en la base del voladizo, y esto corresponde a un incremento local de la rotación, θ_p . Generalmente este lugar donde se presenta la concentración de cambio en curvatura se denomina *articulación plástica*. La distancia en la cual se presenta se llama la *longitud de plastificación*, ℓ_p .

El caso presentado en la Figura 6-5 corresponde, nuevamente, a un ensayo monotónico, en el cual no hay reversión de las cargas. A continuación se presenta cualitativamente el comportamiento histerético, obtenido de ensayos experimentales, de los principales materiales estructurales: concreto reforzado, acero estructural y mampostería estructural, cuando hay reversión de las cargas aplicadas.

6.2.2 — Concreto estructural

El concreto reforzado puede decirse que es el matrimonio de dos materiales con propiedades mecánicas totalmente diferentes, como puede comprobarse de la simple observación de la Figura 6-2. Para solicitaciones estáticas, las características de los dos materiales han obligado a respaldar los criterios de diseño con investigaciones experimentales. Para solicitaciones dinámicas, especialmente cuando se esperan respuestas en el rango inelástico, la experimentación adquiere un carácter aún más importante. Todo lo que se conoce actualmente acerca del comportamiento dinámico en el rango inelástico del concreto reforzado se ha obtenido de amplios y costosos programas experimentales.

Con el fin de ilustrar el comportamiento histerético de elementos de concreto reforzado; en la Figura 6-6, adaptada de [Sozen, 1974], se presenta la respuesta ante cargas alternantes de una viga en voladizo, con refuerzo longitudinal simétrico. La viga se somete a un programa de deformaciones consistente en dos ciclos completos de deflexiones verticales iguales en las dos direcciones. Las deformaciones se logran por medio de fuerzas verticales aplicadas en el extremo libre del voladizo. Se supone que el refuerzo longitudinal de la viga está adecuadamente anclado de tal manera que no haya problemas de adherencia del refuerzo. Igualmente se supone que dispone de suficiente refuerzo transversal. En la Figura 6-6(a) se muestra la viga, su sección y el programa de deformaciones.

En la Figura 6-6(b) se muestra el primer ciclo de respuesta en términos de la fuerza aplicada y del desplazamiento vertical en el extremo libre del voladizo. El primer cuarto de ciclo de respuesta muestra tres etapas bastante bien definidas: AB, BC y CD. La etapa AB representa la respuesta de la viga antes de que ocurra fisuración del concreto en tensión en la parte superior de la sección. La aparición de la primera fisura, usualmente en la base del voladizo, reduce apreciablemente la rigidez de la viga. Esta reducción es mayor al comienzo, cerca a B, y luego va disminuyendo gradualmente en la medida que se acerca al punto C; y es consecuencia de la mayor fisuración, de la aparición de deformaciones en el rango inelástico del concreto, de la reducción de la zona de compresión al subir la localización del eje neutro de la sección, y del resbalamiento del acero de refuerzo debido a la disminución de su adherencia al concreto. La reducción en rigidez puede verse a través de la diferencia entre k_g y k_{cr} , correspondiendo la primera a la sección no fisurada y la segunda a la sección fisurada, cuando el refuerzo en tensión está llegando al punto de fluencia.

En el punto C el acero superior de la viga, el cual está en tensión, fluye llegando a f_y ; véase la Figura 6-2(a). En este punto, la viga típicamente tiene una serie de *microfisuras* de diferente longitud vertical, como muestra la Figura 6-6(c), con su trayectoria dictada por el estado de esfuerzos principales que existen en una viga no fisurada. Hasta este momento la distribución de la curvatura de las secciones de la viga es directamente proporcional al diagrama de momentos, con la excepción de pequeñas desviaciones causadas por la separación finita entre microfisuras. Estas desviaciones son mayores para vigas con muy poco refuerzo longitudinal. A medida que la deformación se aumenta más allá del punto C, hay un aumento importante de la deformación causado por un pequeño aumento de la carga; con un cambio apreciable en la distribución de curvatura a lo largo de la viga. El aumento en deflexión se debe principalmente a un aumento en rotación, o concentración de curvatura, en la vecindad del apoyo. El elemento no falla necesariamente en este punto. La deformación que el elemento admite más allá del punto de fluencia se denomina *capacidad de deformación inelástica* [Abrams, 1991].

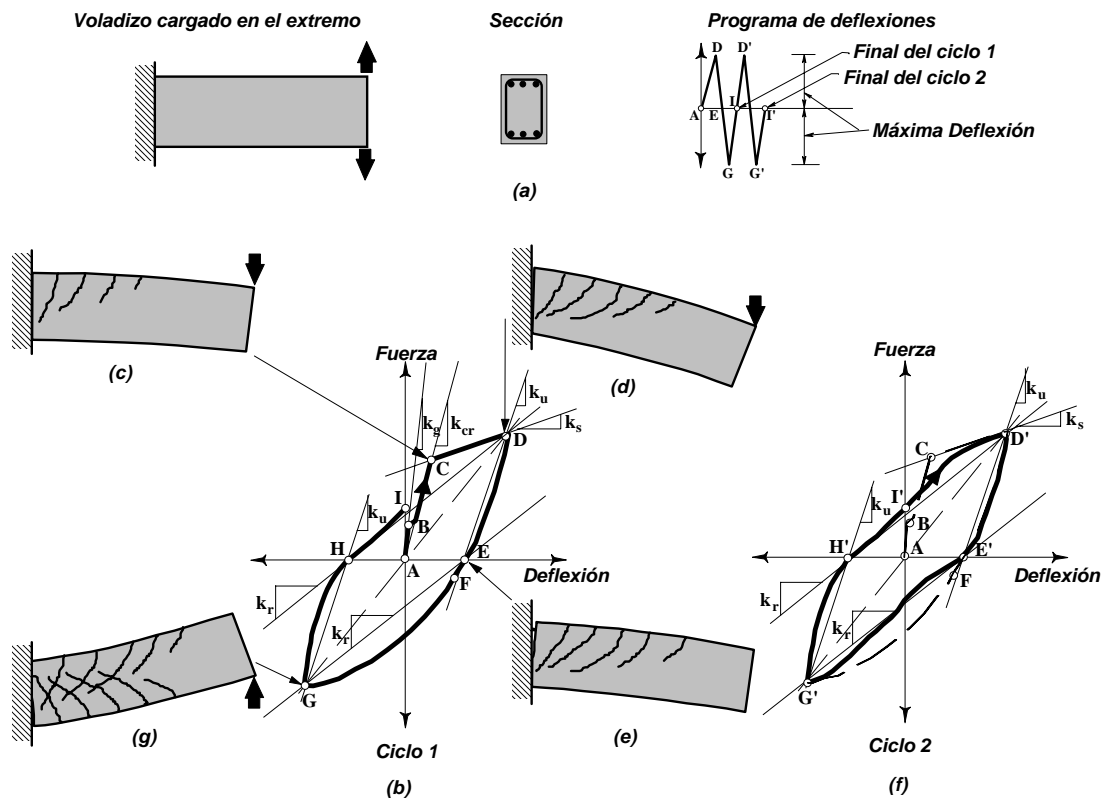


Figura 6-6 - Respuesta histerética de una viga de concreto reforzado en voladizo

En el punto D las fisuras son mayores dentro de una distancia del apoyo igual a la altura del elemento, que en el resto de él, como muestra la Figura 6-6(d). Se presenta, generalmente, un *descascamiento* del concreto en la fibra extrema en compresión, cerca a la cara del apoyo. El cambio en rigidez es mucho más marcado entre el tramo CD, que en el tramo BC. La rigidez del tramo CD está descrita por medio de k_s . Esta pendiente está dictada por la capacidad de *endurecimiento por deformación* que tenga el acero de refuerzo, la cual se muestra en la Figura 6-2(a). Además influyen en su magnitud: el espesor del recubrimiento en comparación con las dimensiones de la sección confinada por el refuerzo transversal, y la cuantía de este último.

La deformación impuesta se invierte arbitrariamente en el punto D. Al ir de D hacia E, disminuyen los esfuerzos en el acero de refuerzo y en el concreto, reduciéndose la carga y la deflexión. El acero de refuerzo tiende a volver a su posición original. El agrietamiento que se presentó durante la etapa anterior no cierra en su totalidad. La pendiente del tramo DE tiende a reducirse en la medida que la curva se acerca al punto E, de cero carga. En el punto E la viga tiene una deflexión permanente. Las fisuras son visibles, pero tienen un espesor muy pequeño, si es que no se han cerrado totalmente. La variación en la rigidez, está descrita a través de la pendiente k_u .

En el punto E, de inversión de la carga, la viga es casi tan rígida como en el punto inicial A. Esto se debe a que el concreto en la zona de abajo (ahora tensión) está todavía intacto, aunque haya fisuras de la zona de arriba (antes tensión) sin cerrar en su totalidad. Por esta razón, la curva procede hacia el punto F con una pendiente aproximadamente igual a la inicial (pendiente del tramo AB). En F se produce la fisuración por tensión de la parte inferior de la viga. En los ciclos de carga subsiguientes, esta parte de la respuesta histerética es diferente, como puede verse en la Figura 6-6(f) correspondiente al segundo ciclo de carga y donde el primer ciclo se ha dibujado punteado.

La forma de la curva entre los puntos F y G depende de una interacción compleja entre las propiedades esfuerzo-deformación del acero de refuerzo, la cuantía de refuerzo longitudinal, y la distribución y ancho de las fisuras existentes. Generalmente la curva procede hacia G con una pendiente que se va reduciendo gradualmente. No obstante, diferentes combinaciones de las variables mencionadas pueden producir cambios locales en la pendiente de la curva entre F y G. Por ejemplo, si las fisuras de la parte superior de la viga no se han cerrado totalmente en el momento que el acero de refuerzo superior fluye

en compresión, puede producirse un cambio brusco de la pendiente, acompañado por una rigidización cuando las fisuras efectivamente se cierran. Aparecen fisuras causadas por tensión en la parte inferior de la viga (zona de compresión durante la parte inicial del ciclo carga), obteniéndose un comportamiento análogo al de CD. Las deflexiones son producidas por los esfuerzos de compresión en el concreto y de tensión en el acero de la zona de tensión; así como por resbalamiento del refuerzo debido a la disminución de su adherencia con el concreto. Acercándose al punto G, el acero en tensión fluye con el consecuente aumento en la deflexión. El punto de fluencia no se presenta de una manera tan definida como en C. Esto se debe a que el refuerzo de tensión puede haber fluido en compresión en el ciclo anterior, antes de que ocurriera la inversión en la dirección de la carga; presentándose un efecto de Bauschinger. La tendencia general en esta zona está descrita a través de la pendiente k_r . En el punto G el patrón de fisuración es similar al de D, solo que ahora se presenta en la parte inferior de la viga, como muestra la Figura 6-6(g).

En el punto G ocurre una nueva inversión arbitraria en el sentido de las deformaciones. La porción GH es similar a DE. En H hay nuevamente una deformación permanente, similar a la del punto E; pero ahora en la dirección inversa. La magnitud de esta deformación depende de la *degradación de la rigidez* que haya ocurrido anteriormente [Abrams, 1991]. En la medida que la carga aumenta a partir de H hacia D', se pasa por el punto I, el cual marca el fin del primer ciclo. A partir de H se presenta un pequeño aumento de la rigidez causado por las fisuras que se cierran en la nueva zona de compresión. A diferencia del tramo FG, este comportamiento se extiende más allá del punto de cero deflexión. Las fisuras existentes no se han cerrado totalmente en el punto de cero deflexión. Esto se debe a que algunas fisuras se abren antes de que las anteriores se cierren. Pueden existir fisuras abiertas en ambas caras del elemento. Al presentarse deflexión más allá del punto de cero carga, se aumenta la rigidez debido a que las fisuras en la zona de compresión se cierran totalmente. En muchos casos los esfuerzos de compresión en esta etapa son resistidos casi en su totalidad por el refuerzo de la zona en compresión.

El segundo ciclo se muestra en la Figura 6-6(f), donde el primer ciclo se ha dibujado como referencia, por medio de una línea punteada. Entre I y D' el miembro resiste la carga con una respuesta que manifiesta mucho menor rigidez que la observada durante el ciclo de carga inicial. Esto se debe: a un *ablandamiento* del acero de refuerzo causado por haberlo deformado cíclicamente en tensión y en compresión; a una degradación del módulo de elasticidad original del concreto; y a un deterioro del mismo concreto con menor adherencia del refuerzo. En este caso la fluencia del acero de refuerzo no es una característica sobresaliente, debido al ablandamiento del acero. La porción D'E' del nuevo ciclo es muy similar a la porción GH del primer ciclo, debido a que la viga se descarga bajo condiciones similares. Idealmente, un número moderado de ciclos con los mismos límites de deflexión no debe producir un cambio en el tipo de respuesta; produciéndose ciclos de histéresis subsiguientes con las mismas características del segundo ciclo [Sozen, 1974].

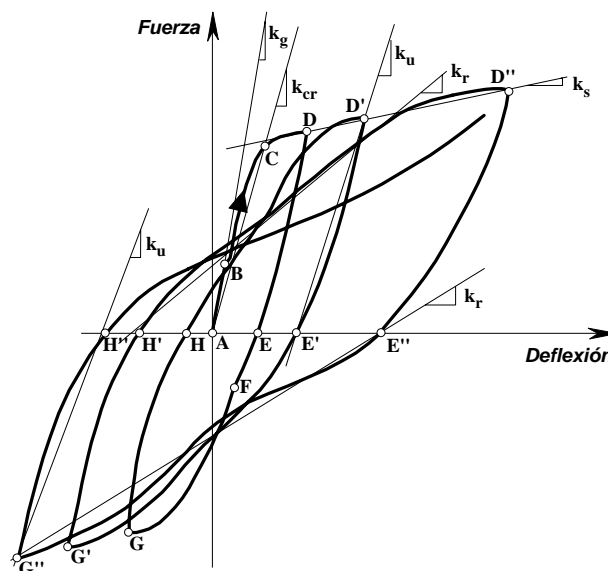


Figura 6-7 - Rigidez durante los ciclos de histéresis de elementos de concreto reforzado

Cuando se presentan nuevos ciclos de carga con deflexiones mayores que las impuestas anteriormente, como se muestra en la Figura 6-7, adaptada de [Riddell y Newmark, 1979]; se presenta una degradación de la rigidez, la cual se manifiesta con un corrimiento del punto D hacia la derecha y del punto G hacia la izquierda. La deflexión a la cual se presenta el aumento de la rigidez en H'D' o en E'G', aumenta progresivamente de ciclo en ciclo debido a la acumulación de deformación inelástica en el refuerzo y al resbalamiento del refuerzo en compresión. La pendiente general de la curva carga-deflexión, representada por la línea que une los dos extremos del ciclo, DG; se reduce en la medida que ocurren más ciclos de carga.

En la Figura 6-7, además, se resumen las rigideces asociadas a diferentes etapas de los ciclos de histéresis, donde:

- k_g = rigidez con la sección no fisurada, antes de que se presente cualquier sollicitación
- k_{cr} = rigidez con la sección fisurada, y evaluada al nivel de fluencia del acero en tensión
- k_s = pendiente, expresada en términos de rigidez, del incremento en resistencia producido por el acero de refuerzo longitudinal sometido a deformaciones en la zona de endurecimiento por deformación
- k_u = pendiente, expresada en términos de rigidez, de la curva que se obtiene cuando el elemento se descarga después de que el acero de tensión ha fluido
- k_r = pendiente, expresada en términos de rigidez, de la curva que se observa cuando el elemento se carga en el sentido contrario al de un ciclo de carga que acaba de terminar. También se conoce como rigidez de recarga, o de nueva carga.

Es importante anotar que el comportamiento descrito corresponde al de un elemento que disipa energía por flexión. Para lograr este comportamiento debe garantizarse que el elemento no falle por esfuerzos cortantes o por ausencia de un refuerzo transversal de confinamiento adecuado, Figura 6-8(a) adaptada de [Wight y Sozen, 1973]; ni el refuerzo longitudinal falle por adherencia, Figura 6-8(b), adaptada de [Higashi y Takeda, 1972]. Allí se muestran los efectos de *degradación de la resistencia* y de *degradación de la rigidez*, respectivamente.

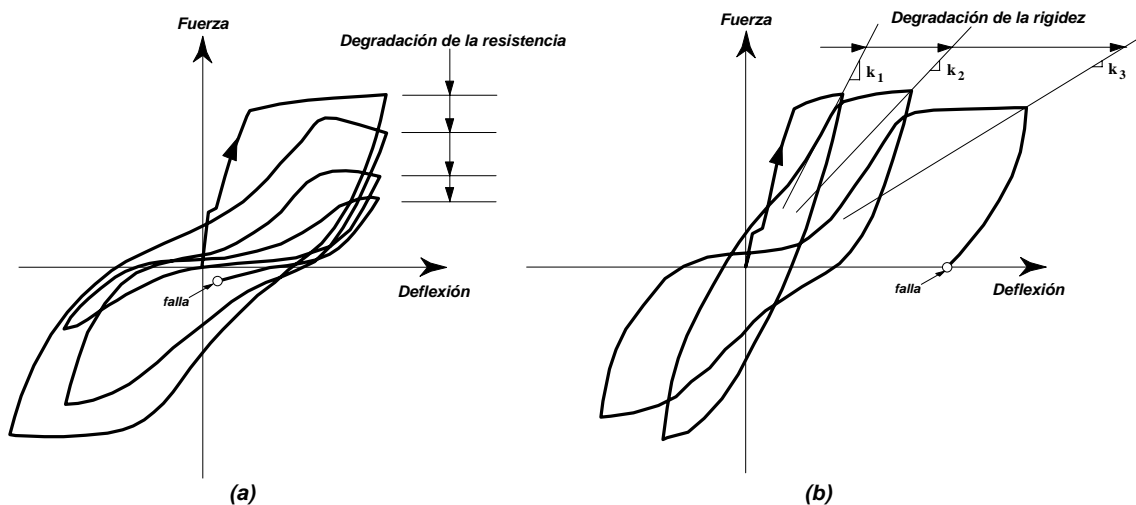


Figura 6-8 - Falla por falta de refuerzo transversal adecuado y falla por adherencia del refuerzo longitudinal

Dentro de los factores que influyen en la forma de los ciclos de histéresis de elementos de concreto reforzado [Sozen, 1974] y [Abrams, 1991], se cuentan los siguientes:

- cuantía de refuerzo longitudinal y las propiedades esfuerzo-deformación del acero de refuerzo,
- carga axial sobre el elemento,
- nivel de fisuración en función de la distribución y espesor de las grietas,
- eficacia de la adherencia entre el refuerzo y el concreto,
- distribución del refuerzo en la sección (generalmente asimétrica en vigas),
- esfuerzos cortantes y cantidad de refuerzo transversal,
- distorsiones generales y locales de los nudos de los extremos del elemento,

- forma de la sección del elemento (viga T diferente a viga rectangular), y
- estabilidad lateral de las barras de refuerzo.

En algunos tipos de elementos de concreto reforzado, a pesar de que se presentan ciclos de histéresis estables, la cantidad de energía que se disipa puede verse afectada por el *estrangulamiento* (pinching, en inglés), que se presenta en los ciclos de histéresis debido a que no se cierran las fisuras de los ciclos de carga anteriores; llegándose a tener una fisura abierta que pasa por toda la sección del elemento. Esto produce un alargamiento del elemento, el cual ha sido observado experimentalmente [Fenwick y Davidson, 1995].

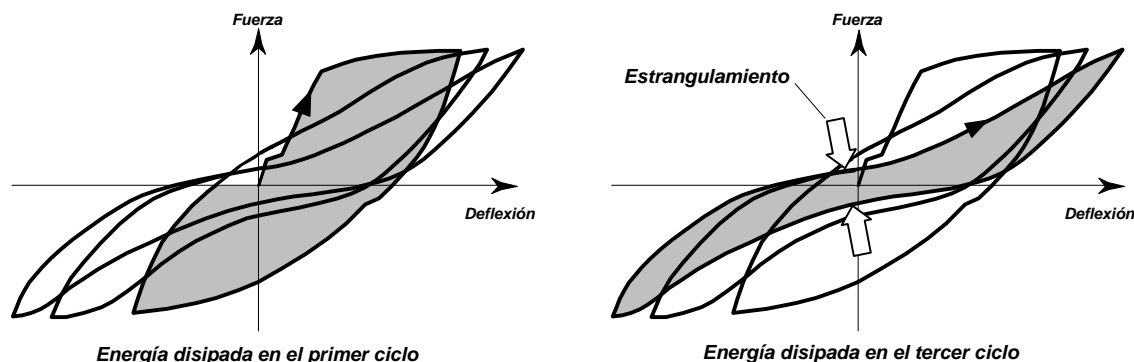


Figura 6-9 - Energía disipada y estrangulamiento de los ciclos de histéresis.

La rigidez en la zona de reversión de la carga (tramos EG y HD en las Figuras 6-6 y 6-7), se limita a la que aporta el refuerzo longitudinal, sin contribución del concreto. El cortante que necesariamente acompaña el momento aplicado, es resistido en la base del elemento tan solo por efecto de espigo del acero longitudinal; y en algunos casos se presenta resbalamiento en la base del elemento, lo cual contribuye a que se presente el estrangulamiento. La energía disipada y el estrangulamiento de los ciclos de histéresis se muestran en la Figura 6-9, adaptada de [Bertero y Popov, 1977].

6.2.3 — Acero estructural

El comportamiento histerético de elementos de acero laminados en caliente es mucho más simple que el de concreto reforzado, dado que se trata de elementos hechos de un solo material. Las bondades del comportamiento del acero como material se trasladan a los elementos construidos con él. No obstante, todos los problemas asociados con estabilidad local de las alas y el alma, estabilidad general del elemento, alabeo, fractura frágil, etc.; se agravan dado que el elemento va a trabajar en el rango inelástico. Los problemas de comportamiento histerético del acero estructural se relacionan principalmente con la necesidad de proveer secciones estables en el rango inelástico, lo que se denomina *secciones compactas*; y la forma como se realicen las conexiones entre elementos, especialmente cuando se requiere que éstas sean resistentes a momentos.

En la Figura 6-10, basada en [Popov y Bertero, 1973], se ilustra cualitativamente el comportamiento histerético de una viga en voladizo de acero estructural. En la Figura 6-10(a) se muestra la viga ensayada y la columna de apoyo, de mayor sección, la cual tiene atezadores soldados para evitar distorsiones y falla dentro del panel de la conexión. En la Figura 6-10(b), se muestra la respuesta de la viga cuando su conexión a la columna de apoyo es soldada; al no haber problemas en la junta; los ciclos de histéresis son totalmente estables, aún después de un número muy alto de ellos. En la Figura 6-10(c) se muestra el ensayo de una conexión pernada. Las porciones relativamente planas de los ciclos de histéresis están relacionadas con resbalamiento de los conectores. La rigidización posterior está asociada con el asiento sobre los tornillos.

En la Figura 6-11 se muestra cualitativamente la respuesta histerética de una columna de acero sometida a fuerza axial constante, y a una fuerza horizontal alternante.

Debido al temblor de Northridge, California, USA, suburbio de la ciudad de Los Angeles, ocurrido el 17 de Enero de 1994, [SAC Joint Venture, 1995]; se presentaron daños graves en más de 100 edificios de acero cuyo sistema estructural consistía en pórticos soldados resistentes a momento, sin diagonales de

arriostramiento. Los daños estuvieron concentrados en las conexiones de viga con columna. Se presentaron problemas en edificios de un piso hasta de 26 pisos; incluyendo desde algunos que estaban en construcción, hasta edificios con más de 30 años de construidos. Hubo daños graves en lugares donde las aceleraciones registradas localmente fueron relativamente moderadas. Los edificios que estaban localizados en las zonas que fueron afectadas por las mayores aceleraciones, tuvieron daños muy graves, cercanos al colapso.

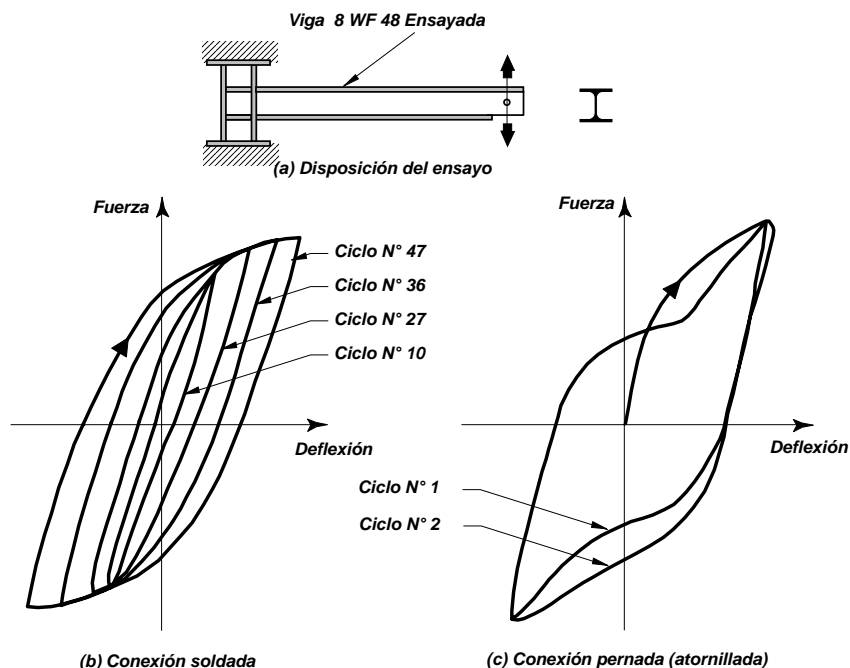


Figura 6-10 - Respuesta histerética de vigas de acero estructural en voladizo

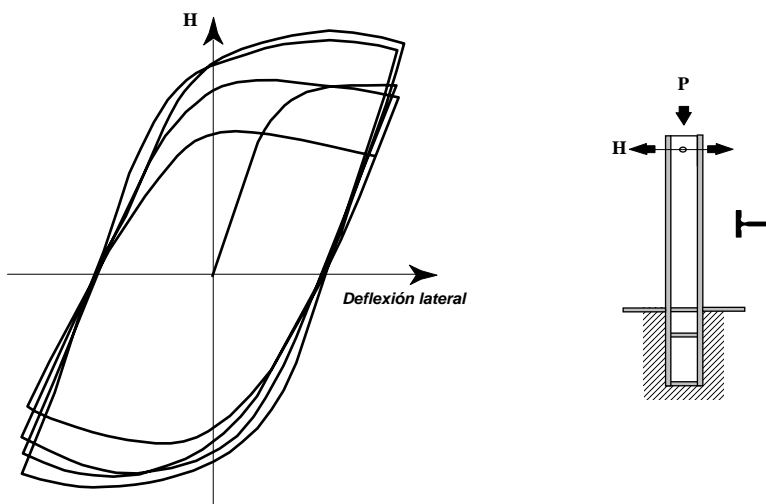


Figura 6-11 - Respuesta histerética de una columna de acero estructural sometida a fuerza axial y horizontal

Lo indicado en [SAC Joint Venture, 1995], que se transcribe a continuación, habla por sí solo: “Los pórticos resistentes a momentos de acero soldado se utilizan ampliamente en todos los Estados Unidos y en el resto del mundo, especialmente en edificios en altura. Con anterioridad al temblor de Northridge, este tipo de construcción era considerado uno de los mejores sistemas estructurales sismo resistentes; debido a que existían muy pocos casos de daños graves a este tipo de estructuras en sismos ocurridos anteriormente, y no existe evidencia de que se hayan producido colapsos de este tipo de edificios construidos de acuerdo con la práctica actual dentro de los Estados Unidos. No obstante, el daño grave generalizado dentro de este tipo de estructuras, ocurrido a raíz del temblor de Northridge; exige que esta premisa se revise”.

En la Figura 6-12(a), basada en [SAC Joint Venture, 1995], se muestran algunos de los problemas que fueron detectados en vigas y columnas, en las cercanías de la conexión. En la Figura 6-12(b) se muestran algunos de los problemas que fueron detectados dentro del panel de las conexiones.

Estos hechos condujeron a cambios de emergencia en los requisitos de acero estructural de los códigos de construcción, los cuales limitaron el uso de este tipo de estructuras mientras se realizan amplias investigaciones experimentales que permitan establecer los criterios de diseño y construcción que deben emplearse para evitarlos. Estas investigaciones todavía están en curso. Por esta razón, deben esperarse próximamente cambios importantes en la normativa de este tipo de estructuras.

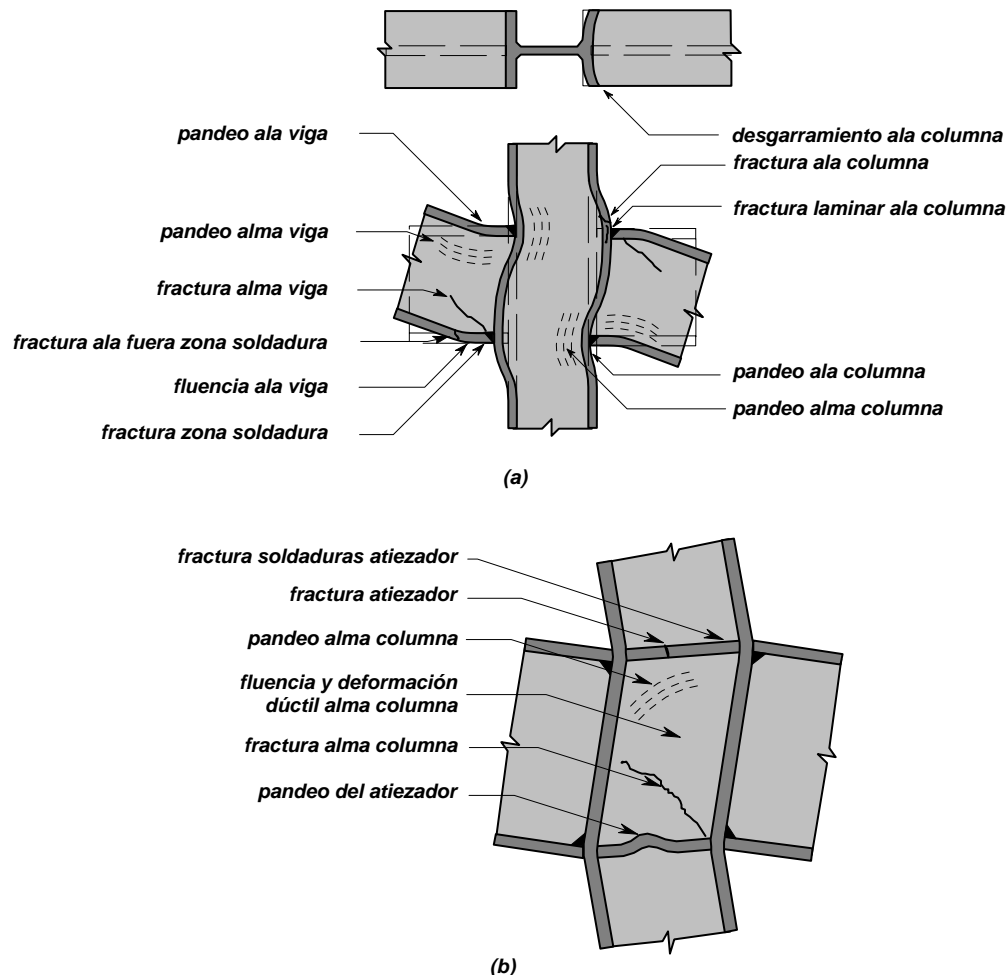


Figura 6-12 - Tipo de problemas en la zona del nudo en estructuras de acero

El tipo de problemas detectados se limitó a estructuras aporticadas resistentes a momentos. En las estructuras de acero cuyo sistema de resistencia sísmica consistía en pórticos arriostrados con diagonales, no se manifestaron problemas y su comportamiento fue satisfactorio.

En la Figura 6-13, adaptada de [Wakabayashi, 1986], se muestran los ciclos de histéresis típicos de un elemento de diagonal en acero; obtenidos de cargar ciclicamente un elemento de acero estructural a diferentes amplitudes de deformación. Como puede verse, se forma una articulación plástica debido al pandeo en compresión y a la elongación inelástica que sucede a la fluencia del material. En la medida que el elemento tenga una relación de esbeltez menor, la capacidad de disipación de energía se vuelve menor.

Para el caso de estructuras compuesta de acero y concreto, deben distinguirse dos casos: aquellas estructuras en las cuales un perfil de acero estructural se rodea de concreto; y un segundo caso en el

cual se coloca concreto por dentro de una sección tubular. En el primer caso, de acero rodeado de concreto, hay evidencia de buen comportamiento ante solicitaciones sísmicas, dado que por muchos años este tipo de solución se utilizó como protección para incendio. La observación acerca de problemas con las conexiones es aquí también válida. Para el segundo caso de concreto rodeado de acero, existe muy poca información experimental, y no es extrapolable la información de otros tipos de construcción. El comportamiento sísmico de este tipo de estructuras debe manejarse con cuidado; hasta tanto no se realicen programas experimentales que permitan fijar criterios de diseño adecuados.

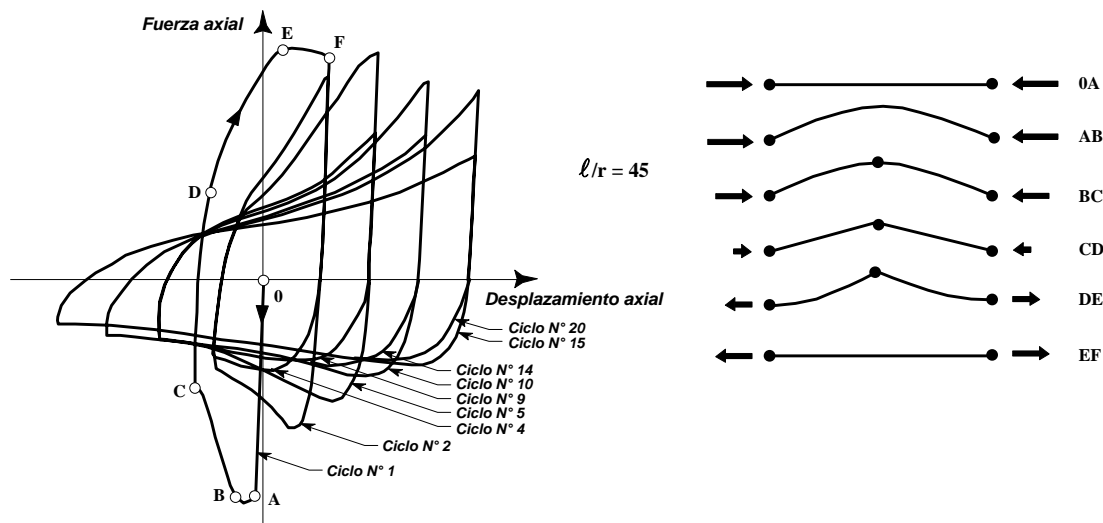


Figura 6-13 - Ciclos de histéresis para un elemento de diagonal de arriostramiento de acero

Respecto al comportamiento de elementos de celosía utilizados dentro de estructuras resistentes a momentos, debe tenerse especial cuidado, pues hay evidencia de muy mal comportamiento sísmico. Durante el sismo de México de 1985 se presentó el colapso de un edificio de 21 pisos, cuyas vigas eran elementos en celosía, construidas con ángulos, y ángulos soldados para conformar secciones tubulares; y las columnas eran secciones tubulares construidas con platina soldada en las aristas de la sección, con algunos atiesadores internos. El informe [ASCE, 1987], pone en duda que las especificaciones de acero estructural de la AISC sean aplicables a este tipo de estructuras. Esta situación no ha cambiado con las nuevas especificaciones [AISC, 1994].

No sobra insistir sobre tres aspectos que conforman la mayor fuente de problemas desde el punto de vista del comportamiento sísmico del acero estructural: (a) el uso de estructuras aporticadas resistentes a momentos, con conexiones soldadas; (b) el uso de estructuras construidas con perfiles ensamblados utilizando platina soldada, debido a estas soldaduras y a que los perfiles resultantes no conformen secciones compactas; y (c), el uso de elementos en celosía dentro de estructuras que conformen pórticos resistentes a momentos.

6.2.4 — Mampostería estructural

Dentro del contexto de lo que se presenta a continuación, la mampostería estructural hace referencia a *mampostería reforzada*; ya sea por medio de barras de acero de refuerzo colocadas dentro de celdas que posteriormente se inyectan con mortero, o dentro del mortero de pega, como es el caso de la *mampostería de bloque de perforación vertical*; o bien dentro de elementos de concreto reforzado de sección pequeña, que rodean el muro, como puede ser el caso de la *mampostería confinada*. Se hace referencia, cualitativamente, al comportamiento histerético de muros de mampostería de bloque de perforación vertical y de mampostería confinada.

Al igual que el concreto reforzado, la mampostería estructural es un sistema constructivo que combina materiales de diferentes características mecánicas, solo que en mayor número; pues intervienen: las unidades de mampostería, que a su vez pueden ser de concreto, de arcilla, o de silical; el acero de refuerzo; el mortero de pega; el mortero de inyección; y, aunque no sea un material, la calidad de la mano de obra de ejecución, la cual generalmente tiene una influencia determinante en el comportamiento de la mampostería. Como resultado se tiene una mayor dificultad que en los otros

materiales estructurales generales, para poder definir unos patrones de comportamiento inelástico; pero al igual que ellos, este comportamiento tiene que estar sustentado en trabajos investigativos experimentales.

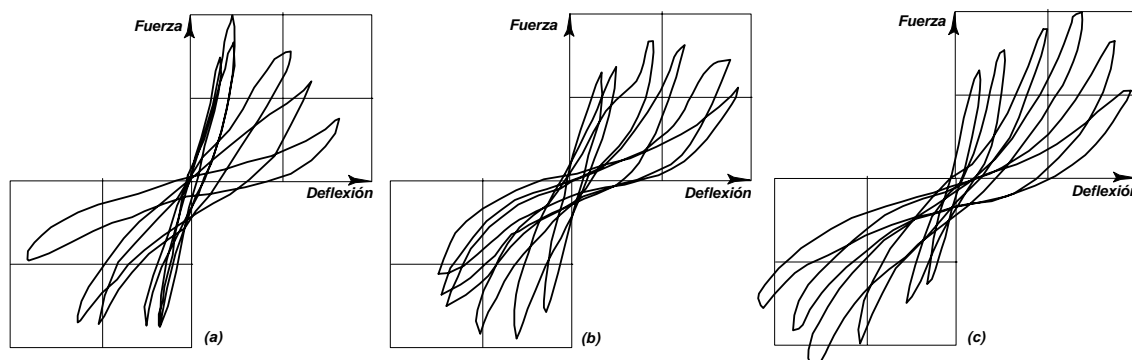


Figura 6-14 - Muros de mampostería de bloque de perforación vertical con diferentes cantidades de refuerzo horizontal

Para efectos ilustrativos, en la Figura 6-14, adaptada de [Chen et al., 1978], se muestran parte de los ciclos de histéresis de una serie de ensayos sobre muros de mampostería de bloque de perforación vertical de concreto; sometidos a cargas horizontales; sin carga vertical; con la misma cuantía (0.0017) y disposición de refuerzo vertical, pero con diferentes cantidades de refuerzo horizontal. El muro de la Figura 6-14(a), no tiene refuerzo horizontal; el muro de la Figura 6-14(b), tiene una cuantía de refuerzo horizontal de 0.008; y el muro de la Figura 6-14(c), tiene una cuantía de 0.0034. La escala relativa de las tres gráficas es la misma.

La forma de los ciclos de histéresis, es muy similar a los ciclos correspondientes a concreto reforzado, respecto a la degradación de la rigidez e inclusive a la presentación de estrangulamiento en ellos. La presencia de refuerzo horizontal permite niveles de deformación mucho más altos sin mayor degradación de la resistencia del muro, pero a niveles de deformación altos, se presenta degradación de la resistencia de todas maneras. Indicando que a la larga la falla por esfuerzos cortantes domina el comportamiento del material. La relación de esbeltez del muro afecta enormemente el modo de falla prevaleciente, llevándolo a fallas iniciales por esfuerzos cortantes para muros bajos y largos; y a fallas iniciales por flexión en muros esbeltos, altos y de longitud relativamente menor. Aquí nuevamente hay similitud con lo que ocurre en muros de concreto reforzado. Este último aspecto es de fundamental importancia, dado que cuando hay aberturas en los muros, debido a vanos de puertas o ventanas, se presentan elementos dentro del muro, con relaciones de esbeltez diferentes y con la consecuente variación en los mecanismos de falla y disipación de energía.

Dentro de los múltiples aspectos que afectan la forma de la respuesta histerética [Paulay y Priestley, 1992], se cuentan especialmente: la presencia de carga axial; las cuantías de refuerzo, tanto vertical como horizontal, las características mecánicas del acero de refuerzo; la relación de esbeltez del muro; la resistencia de la mampostería en conjunto, obtenida por medio de prismas; y la distribución del refuerzo vertical dentro de la sección del muro.

En el caso de mampostería confinada, se han ensayado numerosos muros, especialmente en latinoamérica [ACI, 1994]. los ensayos en general se han realizado por medio de marcos de prueba, como el mostrado en la Figura 6-15 [UA, 1994].

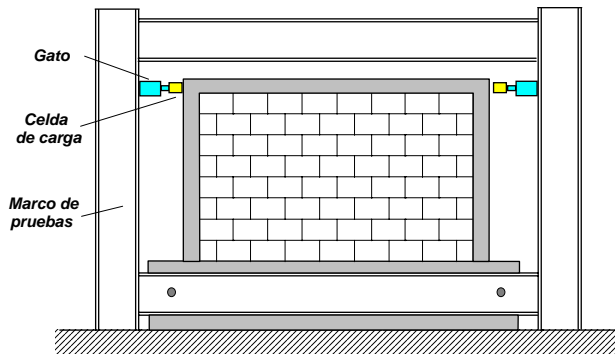


Figura 6-15 - Marco de ensayo para muros de mampostería

En la Figura 6-16 [García y Yamín, 1994] se muestran los resultados de un muro de mampostería de bloque de arcilla de perforación horizontal, confinado por elementos de concreto reforzado de sección pequeña. Allí pueden observarse los efectos de una falla por esfuerzos cortantes en un ensayo de pocos ciclos, no controlado por deformación.

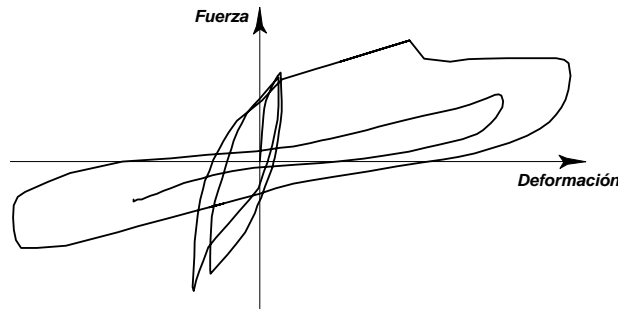


Figura 6-16 - Muro de mampostería confinada fallando a esfuerzos cortantes

La presencia y ausencia de carga axial en un ensayo con deformación controlada, para muros similares de mampostería confinada de ladrillo macizo de arcilla, se muestra en la Figura 6-17 [Yamín y García, 1993]. En el caso (a) no hay carga vertical, y el caso (b) hay una carga vertical alta, para un muro de este tipo (170 kN).

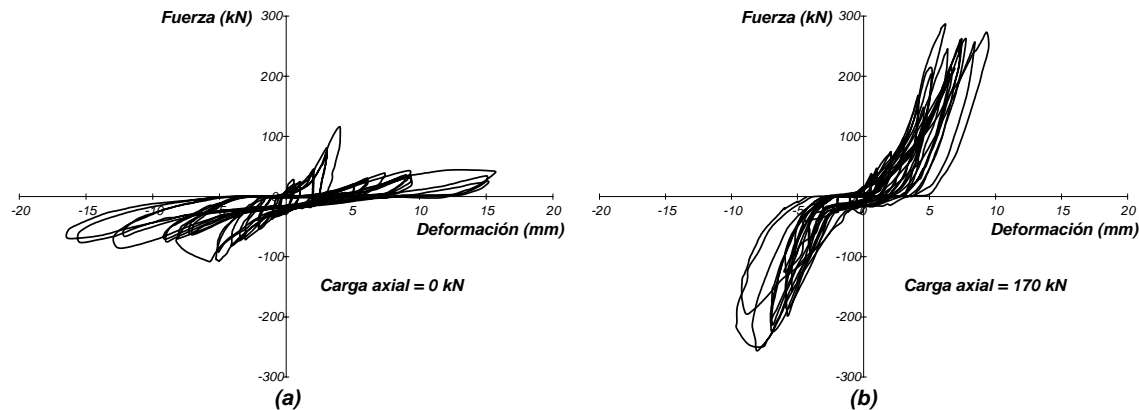


Figura 6-17 - Muro de mampostería confinada con diferentes cargas axiales

La mampostería simple o mampostería no reforzada, en la cual no se coloca acero de refuerzo, o las cuantías utilizadas son muy pequeñas; tiene un modo de falla totalmente frágil ante solicitaciones sísmicas, como lo han venido demostrando los sismos desde tiempo inmemorial: [ACI, 1994], [Coburn y Spence, 1992], [EERI, 1994], [Gere y Shah, 1984] y [Sarria, 1995a]. Este tipo de mampostería es considerado en la actualidad una de las mayores fuentes de vulnerabilidad y peligrosidad sísmica, y está prácticamente prohibida en todas las regiones sísmicas del mundo.

6.3 — Modelos matemáticos de histéresis

6.3.1 — Generalidades

La gran conclusión que se deriva de la Sección anterior, es que el comportamiento inelástico de elementos estructurales construidos con diferentes materiales es complejo y sensitivo a un gran número de variables. En general, dentro del alcance de toda investigación experimental, se formula un modelo matemático que permita describir, lo más fielmente posible, el fenómeno investigado. Por esta razón el número de modelos matemáticos de histéresis ha aumentado al ritmo de la creciente investigación en el tema. Muchos de ellos son derivaciones y refinamientos de modelos anteriores. Un aspecto que debe tenerse en cuenta es el aumento de capacidad numérica que se ha logrado en las últimas tres décadas, gracias al computador digital. Por esta razón, modelos matemáticos que fueron grandes avances hace algunas décadas; hoy se juzgan simplistas. Pero al mismo tiempo se debe ser cuidadoso de no caer en la falacia de pretender obtener mayor precisión que la que permiten los datos o suposiciones iniciales. En el resto de la presente Sección se describen detalladamente tres modelos de histéresis: el elastoplástico, el de Ramberg-Osgood, y a un modelo de rigidez degradante; los cuales se muestran en la Figura 6-18.

El modelo elastoplástico se incluyó principalmente por razones didácticas, debido a su simplicidad; la cual se presta, inclusive, para soluciones realizadas manualmente. Se conoce desde hace varias décadas, que el modelo de Ramberg-Osgood se presta para la descripción de la histéresis de muchos de los tipos de elementos de acero estructural, [Jennings, 1963] y [Sozen, 1974]. El modelo de rigidez degradante sirve para describir muchos de los casos de concreto reforzado y mampostería estructural.

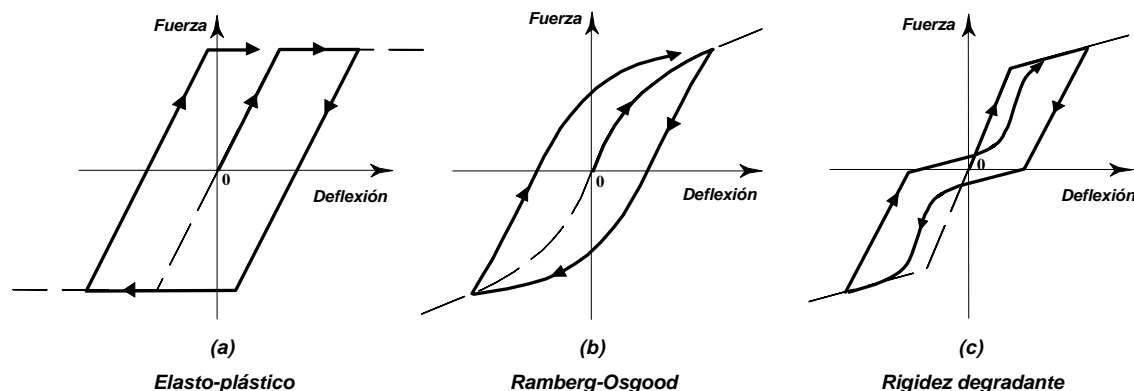


Figura 6-18 - Modelos de histéresis

Como se dijo anteriormente, no existe en la actualidad un modelo de histéresis único que describa adecuadamente para todos los materiales estructurales las peculiaridades encontradas en los resultados experimentales. Por lo tanto lo presentado aquí no pretende ser más que una introducción al tema. No obstante quien desee hacer un seguimiento histórico y estudiar en detalle los modelos de histéresis existentes en la actualidad, puede consultar las siguientes referencias: [Newmark, 1959], [Jennings, 1963], [Clough y Johnson, 1966], [Takeda, Sozen y Nielsen, 1970], [Sozen, 1974], [Riddell y Newmark, 1979], [Saiidi y Sozen, 1979, 1981], [Saatcioglu, 1991], [ACI, 1991b], entre otras.

Tema N° 10 — Conceptos de ductilidad, tenacidad y capacidad de disipación de energía

En este momento es conveniente introducir algunos términos asociados con la respuesta inelástica de elementos estructurales, los cuales se emplean posteriormente para definir y calificar diferentes patrones de comportamiento.

Iniciamos con el concepto de *ductilidad*. Si tenemos un sistema elastoplástico, en la Figura 6-39, se muestra la carga y posterior descarga del sistema. El sistema responde elásticamente al inicio de la carga, hasta que llega a la fuerza de fluencia, F_y . En este sitio hay un desplazamiento asociado, u_y , el cual se puede obtener de $u_y = F_y / k$. Si el sistema se sigue cargando, la respuesta es totalmente plástica. En el punto de desplazamiento u_m se descarga el sistema. Esta descarga en el sistema elastoplástico ocurre en una línea que tiene la misma pendiente, k , de la curva de carga original.

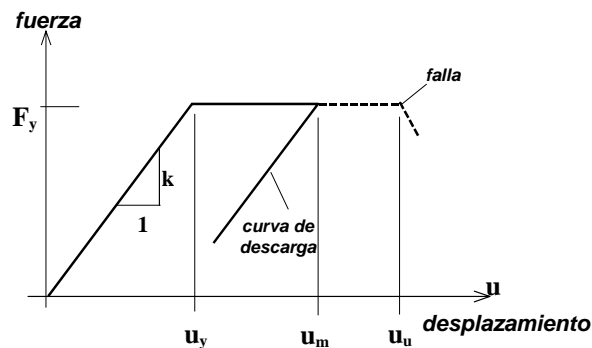


Figura 6-39 - Curva fuerza-desplazamiento material elastoplástico

La ductilidad de desplazamiento que alcanza el sistema se puede definir como:

$$\mu = \frac{u_m}{u_y} \quad (6-7)$$

Esta ductilidad se denomina *ductilidad solicitada*, o *demanda de ductilidad*; pues corresponde a la máxima ductilidad que se le solicita al sistema. La *capacidad de ductilidad*, corresponde a la máxima ductilidad que se le puede exigir al sistema, y se determina con la misma ecuación (6-7), pero empleando u_u .

Cuando se tiene una respuesta histerética elastoplástica, como la mostrada en la Figura 6-40, la ductilidad solicitada en el sentido positivo se determina utilizando:

$$\mu^+ = \frac{u_m^+}{u_y^+}, \text{ donde } u_y^+ = \frac{F_y^+}{k} \quad (6-8)$$

y el sentido negativo:

$$\mu^- = \frac{u_m^-}{u_y^-}, \text{ donde } u_y^- = \frac{F_y^-}{k} \quad (6-9)$$

Esta definición de ductilidad sólo es estrictamente exacta para un material elastoplástico. Cuando el material responde de una manera diferente al sistema elastoplástico, el concepto es extensible; pero debe manejarse con algo de cautela, pues muchas veces el desplazamiento de fluencia no está tan claramente definido. Algunas veces, cuando se trata de sistemas que responden de una manera

diferente al sistema elastoplástico, el mismo parámetro se denomina *coeficiente de daño*, y se utiliza el mismo símbolo, μ , para denominarlo.

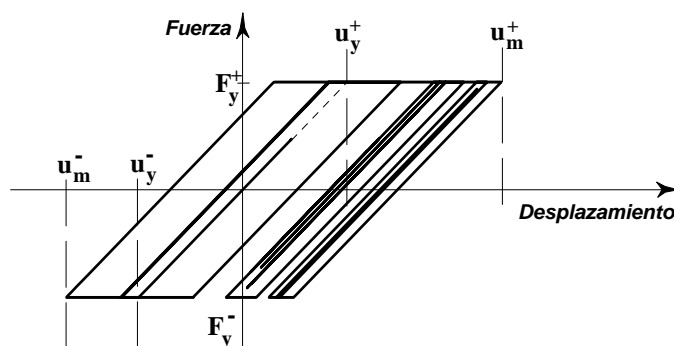


Figura 6-40 - Ductilidad dentro de los ciclos de histéresis, material elastoplástico

Siempre debe indicarse el parámetro que se utilizó para determinar la ductilidad, pues el no hacerlo puede conducir a interpretaciones erradas. Cuando la ductilidad se determina en el diagrama esfuerzo-deformación de un material, la ductilidad se denomina *ductilidad de deformación*. Cuando la ductilidad se mide utilizando curvatura, como puede ser el caso en un diagrama $M-\phi$, Figura 6-4, se denomina *ductilidad de curvatura*. Si se utiliza la rotación, θ , sobre la elástica, como es el caso de la rotación que ocurre en una articulación plástica (véanse la Tabla 6-1 y la Figura 6-5) se denomina *ductilidad de rotación*. Si se utiliza la deflexión, o desplazamiento δ , como muestra la Figura 6-5; se denomina *ductilidad de desplazamiento*. Los diferentes valores de ductilidad no son directamente comparables. En general en elementos de concreto reforzado, las ductilidades de deformación, μ_ϵ , medidas en el material en una fibra de la sección tienen valores mucho mayores que las ductilidades de curvatura, μ_ϕ ; las cuales a su vez son mayores que las ductilidades de rotación, μ_θ ; las cuales por último son, a su vez, mayores que las ductilidades de desplazamiento, μ_δ ; a pesar de que describan el mismo fenómeno. Las siguientes definiciones dadas en la norma AIS 100-97 [AIS, 1997] y en las nuevas normas sismo resistentes colombianas NSR-98 [AIS, 1998], resumen lo anterior:

Ductilidad - Capacidad que tiene un material estructural de resistir, sin fallar, deformaciones que lleven al material estructural más allá del límite elástico, o límite donde las deformaciones son linealmente proporcionales al esfuerzo o fuerza aplicada. (Véase capacidad de disipación de energía, pues muchas veces estos términos son confundidos.) Dependiendo del parámetro que describe las deformaciones, la ductilidad puede hacer referencia, entre otras, a:

- (a) **ductilidad de curvatura** - cuando la ductilidad se mide con respecto a la curvatura de la sección del elemento estructural. La curvatura se define como el cociente entre el momento flector aplicado y la rigidez de la sección,
- (b) **ductilidad de rotación** - cuando la ductilidad se mide con respecto a la rotación que tiene un sector longitudinal del elemento estructural. La rotación se define como la pendiente de la línea elástica del elemento medida con respecto a la posición original del eje longitudinal del elemento,
- (c) **ductilidad de desplazamiento** - cuando la ductilidad se mide con respecto al desplazamiento o deflexión que tiene el elemento estructural. El desplazamiento se mide con respecto a la posición original del eje longitudinal del elemento, y
- (d) **ductilidad de deformación** - cuando la ductilidad se mide con respecto a la deformación unitaria de una fibra paralela al eje neutro de la sección.

El término *tenacidad*, (*toughness* en inglés) fue definido en la Sección 6.2.1, para un material, como el área bajo la curva esfuerzo-deformación de cualquier material que se lleva hasta la falla, y es una medida de la capacidad del material para absorber energía por unidad de volumen. Este concepto ha sido extendido en la ingeniería sísmica a los elementos estructurales, donde se define como la *capacidad de resistir una serie de oscilaciones en el rango inelástico de respuesta sin que se presente una disminución crítica de su resistencia*. En muchas situaciones se prefiere al término ductilidad, dado que no se presta a equívocos.

Para efectos de ilustrar la posibilidad de que se presenten interpretaciones erradas con el término ductilidad, en la Figura 6-41 se muestra la respuesta de dos elementos estructurales, que se llevan monóticamente a la falla por flexión. Los dos sistemas tienen la misma resistencia a la fluencia, M_y , y tienen la misma capacidad de ductilidad de rotación, que se ha fijado arbitrariamente para esta presentación en $\mu_\theta = 6$. El sistema A, tiene una rigidez cuatro veces mayor que la rigidez del sistema B.

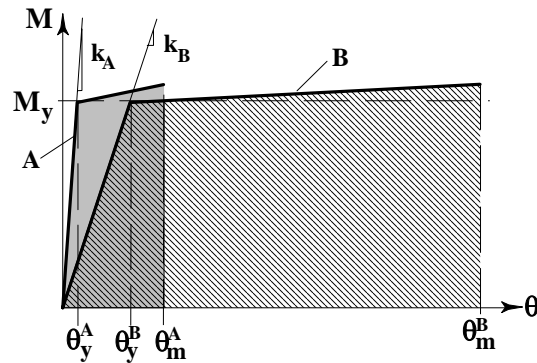


Figura 6-41 - Elementos con la misma ductilidad $\mu_\theta = 6$ y $k_A = 4k_B$

Es evidente a partir de la figura que aunque los dos sistemas tienen la misma ductilidad, su tenacidad, expresada en un sentido estricto como el área bajo la curva, es mucho mayor para el elemento B. Debe, por lo tanto, tratarse con cuidado el término ductilidad, pues muchas veces el comportamiento de dos elementos con la misma ductilidad ante cargas similares, es totalmente diferente.

Ahora se explicará qué se entiende por *capacidad de disipación de energía*. Supongamos que tenemos dos sistemas dinámicos compuestos por elementos estructurales que tienen la misma rigidez; uno de ellos es totalmente elástico, y el otro tiene posibilidad de responder inelásticamente. Al someterlos a una excitación dinámica, como puede ser el registro acelerográfico de El Centro de 1940; se obtienen respuestas en desplazamiento, cuyo desplazamiento máximo es diferente si al sistema inelástico se le exigió más allá del límite elástico. En la Figura 6-42 se muestran dentro de un diagrama de fuerza-desplazamiento, los dos sistemas. El valor de u_e corresponde al nivel máximo de desplazamiento a que llega el sistema elástico. A este nivel de desplazamiento le corresponde un nivel de fuerza en el elemento, F_e . Puede decirse que este nivel de fuerza es el nivel de resistencia mínimo que se requiere del sistema para que éste responda en el rango elástico, ante la sollicitación dada.

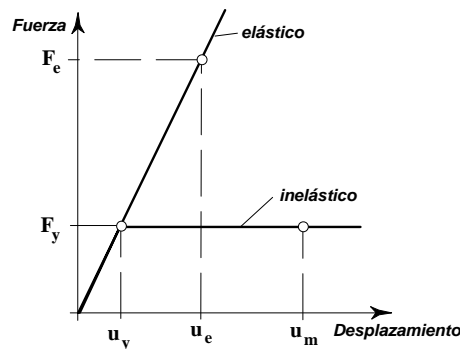


Figura 6-42 - Definición de la capacidad de disipación de energía

Ahora definimos el *coeficiente de reducción de resistencia*, R_0 , por medio de:

$$R_0 = \frac{F_e}{F_y} = \frac{u_e}{u_y} \quad (6-10)$$

De la ecuación anterior, puede verse que:

$$F_y = \frac{F_e}{R_0} \quad (6-11)$$

y

$$u_y = \frac{u_e}{R_0} = \frac{F_e}{k R_0} \quad (6-12)$$

Con base en lo anterior puede decirse que la *capacidad de disipación de energía* de un sistema inelástico de un grado de libertad, corresponde a la capacidad que tiene el sistema para reducir la fuerza solicitada de un valor que tendría el sistema si permaneciera elástico, F_e , a un valor de fluencia, F_y . Esta capacidad de disipación de energía se mide por medio del coeficiente de reducción de resistencia, R_0 . Se ha utilizado el subíndice 0 para enfatizar que se trata de un coeficiente de reducción de resistencia para sistemas de un grado de libertad. Este coeficiente está asociado con el coeficiente de reducción de resistencia R que emplean los códigos de diseño sísmico, pero para sistemas de varios grados de libertad.

Por ejemplo, para los sistemas utilizados en la presentación de los sistemas inelásticos de la Sección anterior, se emplearon sistemas con $F_y = 0.20W$ y $F_y = 0.40W$. El sistema elástico, tal como se indicó allí, tenía una rigidez $k = 39.478 \text{ N/m}$, un período $T = 1 \text{ s}$, y una masa $m = 1 \text{ kg}$. La respuesta máxima elástica que tiene un sistema con un período de un segundo al acelerograma de El Centro es de 205 mm o 0.205 m, como lo muestran las Figuras 6-24, 6-30 y 6-36. Para el caso con $F_y = 0.20W = 0.20 \cdot 9.8 = 1.96 \text{ N}$, $u_y = F_y/k = 1.96/39.478 = 0.050 \text{ m}$. Entonces, $R_0 = u_e/u_y = 0.205/0.050 = 4.1$. Para el caso con $F_y = 0.40W = 0.40 \cdot 9.8 = 3.92 \text{ N}$, $u_y = F_y/k = 3.92/39.478 = 0.099 \text{ m}$, y, $R_0 = u_e/u_y = 0.205/0.099 = 2.07$.

Las siguientes definiciones dadas en la norma AIS 100-97 [AIS, 1997] y en las nuevas normas sismo resistentes colombianas NSR-98 [AIS, 1998], resumen lo anterior y enfatizan el hecho de que R , sin subíndice, hace referencia a sistemas de varios grados de libertad:

Capacidad de disipación de energía - Es la capacidad que tiene un sistema estructural, un elemento estructural, o una sección de un elemento estructural, de trabajar dentro del rango inelástico de respuesta sin perder su resistencia. Se cuantifica por medio de la energía de deformación que el sistema, elemento o sección es capaz de disipar en ciclos histeréticos consecutivos. Cuando hace referencia al sistema de resistencia sísmica de la edificación como un todo, se define por medio del coeficiente de capacidad de disipación de energía R . El grado de capacidad de disipación de energía se clasifica como especial (DES), moderado (DMO) y mínimo (DMI).

Coeficiente de capacidad de disipación de energía, R - Coeficiente que se prescribe para cada sistema estructural de resistencia sísmica, cuyo valor depende del tipo de sistema estructural y de las características de capacidad de disipación de energía propias del material estructural que se utiliza en el sistema. Es una medida de la capacidad de disipación de energía general del sistema de resistencia sísmica cuando los movimientos sísmicos hacen que responda inelásticamente.

6.5 — Respuesta elástica equivalente a inelástica

Gulkan y Sozen, [Gulkan y Sozen, 1974] y [Shibata y Sozen, 1976], demostraron experimentalmente, que la respuesta de un sistema de concreto reforzado de un solo grado de libertad, cuando se ve sometido a excursiones en el rango inelástico puede ser aproximada por medio del análisis elástico de un *sistema sustituto*, lineal y elástico, con *rigidez reducida* y *amortiguamiento sustituto*. La rigidez a flexión del elemento del sistema de un grado de libertad en la estructura sustituto se relaciona con la rigidez del elemento real de la siguiente manera:

$$(EI)_s = \frac{(EI)_r}{\mu} \quad (6-13)$$

Donde $(EI)_s$ es la rigidez a flexión del elemento de la estructura sustituto, $(EI)_r$ es la rigidez a flexión del elemento en la estructura real y μ es un factor de daño aceptable para el elemento de concreto reforzado.

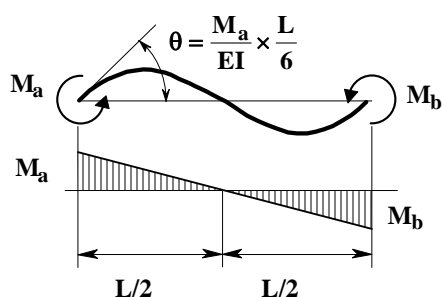


Figura 6-43 - Elemento en flexión

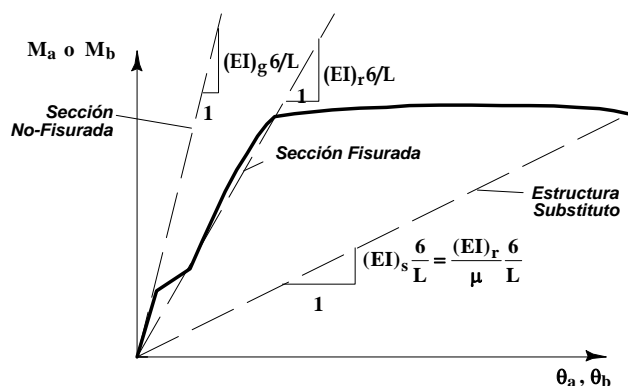


Figura 6-44 - Diagrama Momento-Rotación

De acuerdo con lo presentado en las Figuras 6-43 y 6-44, donde se ve un elemento sometido a flexión, debido a una carga horizontal aplicada sobre la estructura, el valor $(EI)_r$ corresponde aproximadamente a la pendiente de una línea en un diagrama momento-rotación, $M-\theta$, que va del origen al punto de fluencia.

La interpretación física del factor de daño μ para una situación particular como puede ser una viga moderadamente reforzada sometida a flexión, con momentos en sus extremos como muestra la Figura 6-44, se representa estudiando la relación entre los momentos en los extremos y el giro en ellos. En la Figura 6-44 la línea continua representa la relación entre los momentos aplicados M , y el giro θ , en el extremo causado por la deformación a flexión dentro de la luz de la viga. El valor de $(EI)_r$ se calcula utilizando la sección totalmente fisurada (relaciones esfuerzo-deformación lineales y sin resistencia a la tensión del concreto). La relación $M-\theta$ basada en $(EI)_r$ corresponde aproximadamente a la línea recta dibujada del origen al punto de fluencia de la sección bajo la condición de que tenga refuerzo simétrico y el acero de refuerzo disponga de una zona de fluencia definida.

El factor de daño impone una rigidez menor, a través de la ecuación (6-13), e implica que hay una rotación inelástica aproximadamente igual a $\mu\theta_y$ en el extremo de la viga, siempre y cuando la rigidez a flexión promedio de la viga dentro de la luz cambie como lo indica el diagrama $M-\theta$. Al respecto es importante anotar que el factor de daño μ es comparable, pero no es exactamente igual a la ductilidad obtenida como el cociente entre el giro máximo y el giro al nivel de fluencia. Sólo para sistemas elastoplásticos la ductilidad es exactamente igual al factor de daño. Debe hacerse énfasis sobre el hecho de que un factor de daño corresponde a una ductilidad mayor si ésta se calcula con base en curvatura, por medio de un diagrama $M-\phi$.

El amortiguamiento sustituto, ξ_s , depende del factor de daño, por medio de la siguiente relación:

$$\xi_s = 0.2 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \right\} + 0.02 \quad (6-14)$$

El coeficiente ξ_s es una aproximación a la disipación de energía que ocurre durante la respuesta histerética de un elemento de concreto reforzado sometido a un sismo. Por lo tanto la respuesta no lineal histerética de un sistema que alcanza un factor de daño μ es equivalente a la respuesta lineal calculada utilizando un coeficiente de amortiguamiento igual a ξ_s .

A modo de ejemplo del tipo de respuesta que se obtiene bajo este procedimiento del sistema sustituto equivalente, en la Figura 6-45 se muestra la respuesta en términos de desplazamiento relativo entre la masa y el terreno, para un sistema que se somete a los primeros quince segundos del acelerograma de El Centro. Allí se presentan la respuesta de un sistema elástico con período T de 1 s y amortiguamiento de 2% del crítico, y la de un sistema sustituto con un coeficiente de daño, μ , de 6.

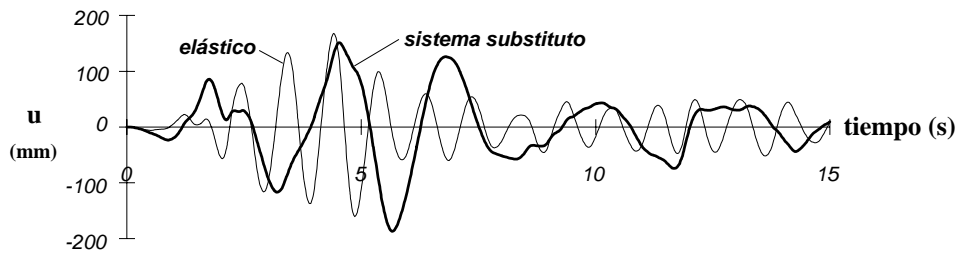


Figura 6-45 - Respuesta en desplazamiento para un sistema elástico y un sistema sustituto con $\mu = 6$, al temblor de El Centro

Puede demostrarse fácilmente que el período de vibración del sistema sustituto, T_s , se obtiene en función del período de la estructura real, T_r , así:

$$T_s = T_r \cdot \sqrt{\mu} = T_r \cdot 2.45 = 2.45 \text{ s}$$

Aplicando la ecuación (6-14), obtenemos el amortiguamiento sustituto así:

$$\xi_s = 0.2 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{6}} \right\} + 0.02 = 0.138$$

En la Figura 6-46 se muestra la fuerza que se ejerce en el elemento estructural del sistema.

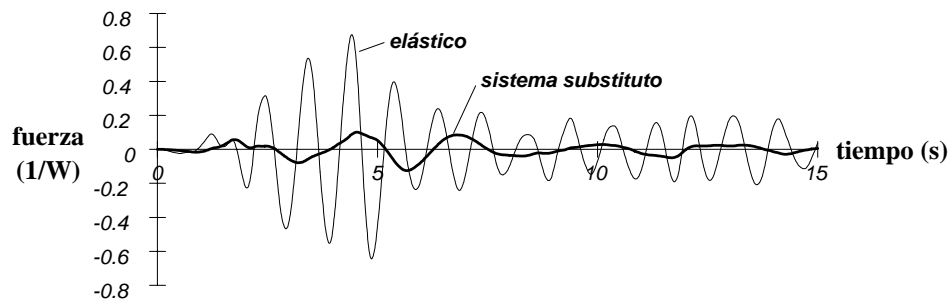


Figura 6-46 - Respuesta en términos de la fuerza ejercida en el elemento estructural para un sistema elástico y un sistema sustituto con $\mu = 6$, al temblor de El Centro

Si se desea extender este concepto de la estructura sustituto a la respuesta de diferentes sistemas estructurales a un temblor real, esto se puede llevar a cabo utilizando el espectro de respuesta del sismo. El efecto en el espectro de la respuesta inelástica, se obtiene entrando al espectro con el período correspondiente a la rigidez sustituto, ecuación (6-13), y leyendo la ordenada espectral correspondiente al amortiguamiento sustituto dado en la ecuación (6-14).

6.6 — Efecto de la respuesta inelástica en el espectro

Qué ocurre con el espectro cuando el sistema no es elástico y el elemento estructural tiene la posibilidad de cambiar de rigidez durante la respuesta es una pregunta importante dado que los sistemas estructurales utilizados en general emplean materiales que son capaces de responder en el rango inelástico. A continuación se presenta la teoría clásica para sistemas elastoplásticos, y posteriormente las diferencias cuando se trata de sistemas inelásticos con otras características diferentes al elastoplástico.

6.6.1 — Sistemas elastoplásticos

Newmark, en las referencias [Newmark y Hall, 1972], [Newmark, Blume y Kapur, 1973], y [Newmark y Hall, 1982], describe la respuesta en el rango inelástico para sistemas elastoplásticos con base en un sistema de un grado de libertad sometido a excitación en su base, como el mostrado en la Figura 6-47.

Al querer dibujar en papel tripartita el espectro obtenido, se tiene la dificultad de que al salir el sistema del rango elástico, las relaciones que permiten dibujar el espectro en este papel, ecuación (5-11), dejan de ser válidas. Debido a esto, debe decidirse si el espectro muestra las aceleraciones, o fuerzas, a que se ve sometido el sistema, caso en el cual los desplazamientos leídos en este espectro corresponden a la porción elástica de la deformación; o si el espectro muestra las deformaciones totales, y en este último caso las aceleraciones que se leen en el espectro no corresponden a las aceleraciones verdaderas a que se ve sometida la masa del sistema.

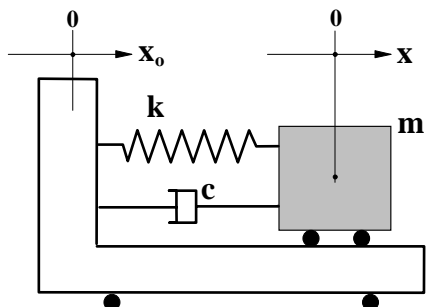


Figura 6-47 - Sistema sometido a excitación en su base

En la Figura 6-48 se muestra el espectro de aceleraciones del temblor de El Centro para diferentes valores de ductilidad alcanzada por sistemas elastoplásticos. El espectro se calculó para un coeficiente de amortiguamiento de 2% del crítico. Las deformaciones mostradas en este gráfico corresponden únicamente a la componente elástica de la deformación y no es la deformación total, la cual es la suma de la parte elástica más la porción inelástica.

Los valores de aceleración son los correctos. Los valores de velocidad leídos no corresponden a las velocidades verdaderas. La figura se dibujó para ductilidades, μ , de 1, 1.25, 1.5, 2, 3, 5 y 10. Este espectro se denomina *espectro de aceleraciones máximas*.

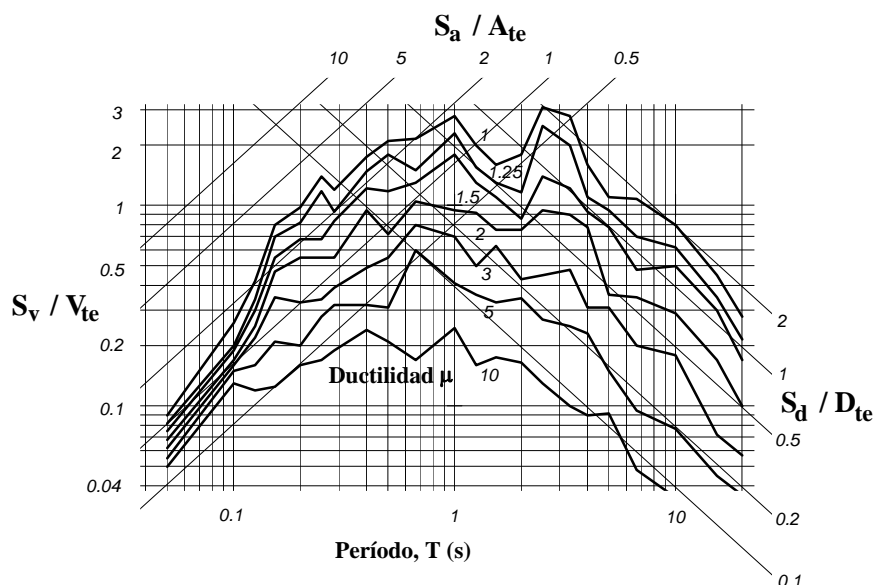


Figura 6-48 - Espectro de aceleraciones máximas para sistemas elastoplásticos, $\xi = 2\%$, Temblor de El Centro

Si se grafica el espectro colocando las deformaciones totales; conformadas por la componente elástica más la componente inelástica; se obtiene el espectro mostrado en la Figura 6-49. Este espectro se conoce con el nombre de *espectro de desplazamientos totales*.

Debe tenerse en cuenta que los desplazamientos que se leen en el espectro de la Figura 6-49, son los desplazamientos totales verdaderos, mientras que tanto las velocidades como las aceleraciones que se leen en este espectro no son las verdaderas. En los dos espectros de las Figuras 6-48 y 6-49, el correspondiente a ductilidad $\mu = 1$, es el espectro elástico y por lo tanto es igual en ambos gráficos.

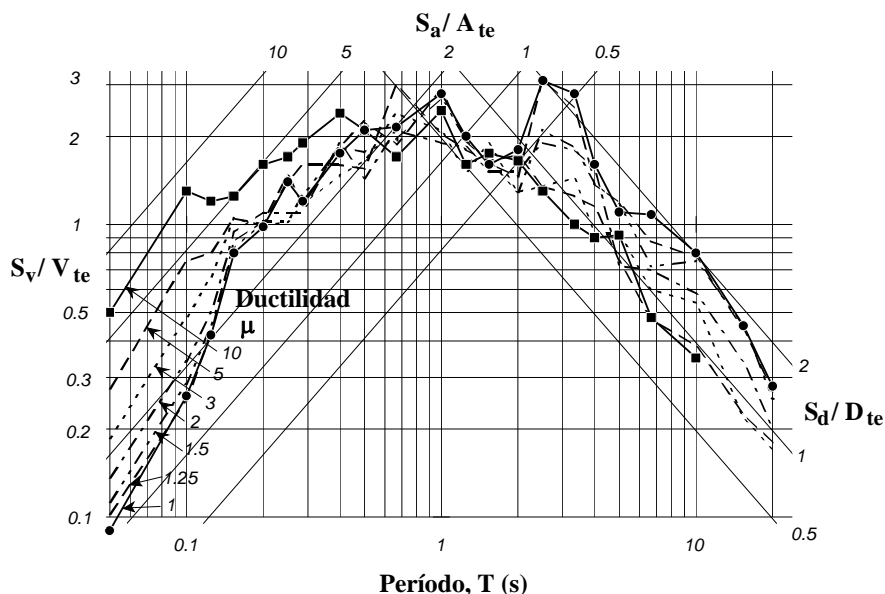


Figura 6-49 - Espectro de desplazamientos totales para sistemas elastoplásticos, $\xi = 2\%$, Temblor de El Centro

Del estudio de gráficos similares a los dos anteriores, para numerosos temblores, Newmark y Hall obtuvieron las siguientes conclusiones:

- (a) Para períodos altos los desplazamientos totales máximos para cualquier demanda de ductilidad μ son prácticamente los mismos.
- (b) Para períodos cortos la máxima aceleración es la misma para cualquier demanda de ductilidad μ , lo cual quiere decir que las fuerzas ejercidas por los resortes son las mismas.
- (c) En el rango de períodos intermedios la energía que absorbe el sistema elástico y el inelástico es la misma.

Las zonas son las mismas que se definieron en la Sección 5.5. Los valores del período de vibración que limitan estas tres zonas varían para cada acelerograma en particular. Este aspecto será discutido con mayor detalle en las Secciones 6.6.2 y 6.7.

Según Newmark, es posible encontrar la relación entre el espectro elástico y el inelástico. Partiendo de que se dispone de un espectro elástico ($\mu = 1$), el cual para cualquier período T , tiene como valores D_e , V_e y A_e , donde se ha colocado el subíndice e para enfatizar que se trata de valores del espectro elástico; y se quiere relacionar con un espectro inelástico donde para el mismo período se tienen unos valores máximos D_m , V_m y A_m en cada una de las regiones del espectro (sensitiva al desplazamiento, a la velocidad y a la aceleración respectivamente) donde se ha colocado el subíndice m para indicar que se trata de valores provenientes del espectro inelástico, la relación entre los dos se puede obtener de la siguiente manera:

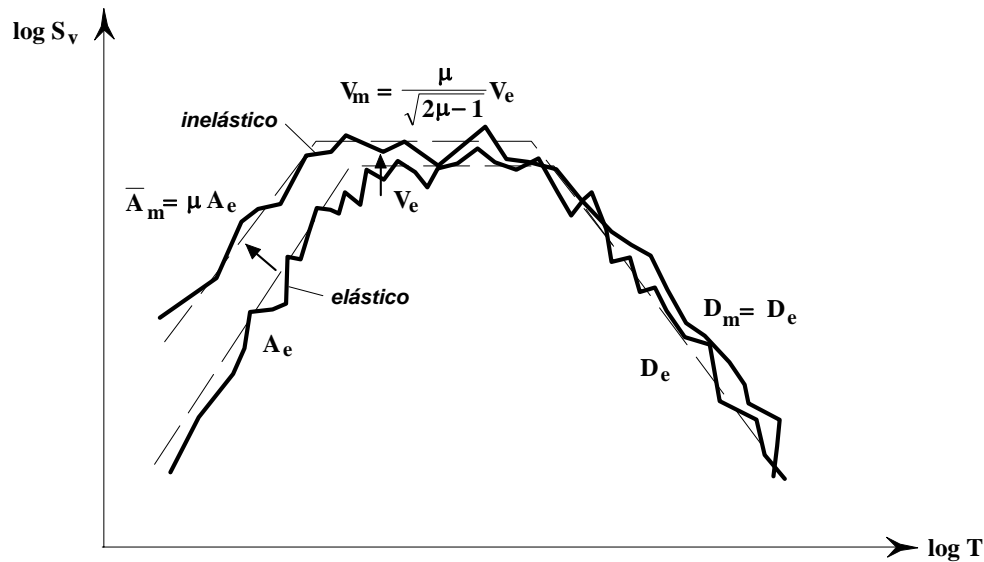


Figura 6-51 - Espectro inelástico de desplazamientos totales

Se ha utilizado el símbolo \bar{A}_m para enfatizar que esta aceleración no es la verdadera. Entonces el espectro donde es posible leer los desplazamientos totales queda de la forma mostrada en la Figura 6-51. Los desplazamientos que se leen allí corresponden a la suma del desplazamiento elástico y el inelástico. La aceleración que se lee allí no es la verdadera, ésta se obtiene dividiendo la aceleración leída del espectro por μ .

Se ha utilizado el símbolo \bar{D}_m para enfatizar que este desplazamiento no es el desplazamiento total. Simplemente corresponde a la componente elástica del desplazamiento total.

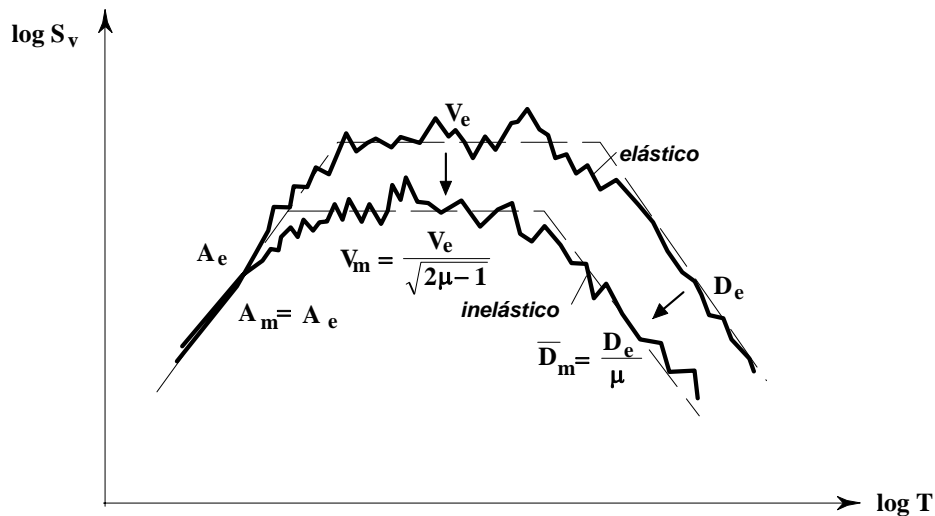


Figura 6-52 - Espectro inelástico de aceleraciones máximas

Entonces, el espectro donde es posible leer las aceleraciones máximas queda de la forma mostrada en la Figura 6-52. Las aceleraciones que se leen allí corresponden a las aceleraciones verdaderas a que se ve sometido el sistema inelástico y los desplazamientos que se leen en este espectro corresponden a la componente elástica del desplazamiento, o sea sólo hasta u_y . Por lo tanto para obtener de este espectro los desplazamientos totales hay que multiplicar el desplazamiento leído por μ .

6.6.2 — Sistemas con rigidez degradante

El trabajo realizado por Riddell y Newmark, presentado en la referencia [Riddell y Newmark, 1979], amplió lo encontrado solamente para sistemas elastoplásticos en los trabajos de Newmark y Hall, a

sistemas bilineales y a sistemas con rigidez degradante. Esta metodología, nuevamente se sustenta en que “El método está basado en la aproximación de que los efectos no lineales pueden tenerse en cuenta gracias a un análisis linealmente elástico de la estructura utilizando coeficientes de diseño determinados de un espectro inelástico para sistemas de un grado de libertad.”

En él se estudian los efectos combinados del amortiguamiento y el efecto inelástico. Las conclusiones del estudio fueron posteriormente reestudiadas en trabajos como el de Elghadamsi y Mohraz [Mohraz y Elghadamsi, 1989], que fundamentalmente las validan.

Tabla 6-2 - Registros empleados por Riddell y Newmark

Registro	Fecha	Profun. (km)	M_s	A_{te} (g)	V_{te} (m/s)	D_{te} (m)	V_{te}/A_{te} [m/s/g]	$\frac{A_{te} D_{te}}{V_{te}^2}$
El Centro EW	May 18/40	16	6.3	0.214	0.369	0.201	1.727	3.1
Olimpia N86°E	Abr 13/49	?	7.1	0.280	0.171	0.094	0.610	8.8
Golden Gate, S80°E	Mar 22/57	9	5.3	0.105	0.046	0.012	0.432	5.6
Cholame, N85°E	Jun 27/66	5-10	5.6	0.434	0.255	0.069	0.584	4.5
Castaic, N21°E	Feb 9/71	0 a 13	6.6	0.316	0.172	0.051	0.533	5.3
Pacoima, S16°E	Feb 9/71	0 a 13	6.6	1.171	1.132	0.419	0.965	3.8
Lima, Perú, N82°W	May 31/70	56	7.75	0.107	0.047	0.035	0.432	16.4
Santiago, Chile, N10°W	Jul 8/71	58	7.5	0.159	0.232	0.129	1.473	3.7
Managua, Nicaragua, EW	Dic 23/72	5	6.2	0.383	0.403	0.216	1.041	5.0
San Juan, Argentina, EW	Nov 23/77	101	7.4	0.193	0.206	0.064	1.067	2.8

Desde el punto de vista general se observaron los siguientes aspectos:

(a) La respuesta de sistemas con períodos de vibración muy largos es independiente del tipo de relación fuerza-deformación del elemento estructural.

(b) Se observan diferencias para sistemas con períodos cortos menores de 0.1 s, pero estas diferencias son despreciables para demandas de ductilidad menores de 5, e insustanciales para demandas de ductilidad mayores.

(c) Para períodos intermedios, la respuesta de sistemas bilineales con demandas de ductilidad menores e iguales a 2 son prácticamente iguales a la de sistemas elastoplásticos con demandas de ductilidad similares. Para demandas de ductilidad mayores; la respuesta máxima de sistemas bilineales es, en general, más pequeña que la de sistemas elastoplásticos.

(d) Para todos los períodos considerados, las ordenadas espectrales de sistemas elastoplásticos son, en promedio, mayores que las ordenadas espectrales de sistemas con rigidez degradante.

(e) Los espectros de sistemas con rigidez degradante no tienen los picos y variaciones abruptas que se presentan en los sistemas elastoplásticos. Se encontró que los sistemas con rigidez degradante eran los más eficientes con respecto a la capacidad de disipación de energía. Además, se pudo observar que los sistemas con rigidez degradante eran mucho más eficientes en su recuperación después de una excursión inelástica. Esto último se traduce en que las deformaciones permanentes de los sistemas con rigidez degradante fueron siempre menores que las de sistemas elastoplásticos y bilineales. Es razonable suponer que el comportamiento de sistemas degradantes está dominado por los efectos de ablandamiento producido por la degradación de rigidez, más que por el efecto de resistencia adicional causada por el endurecimiento por deformación del material.

Los sistemas con rigidez degradante empleados no incluyeron sistemas con degradación de la resistencia, ni ablandamiento de la rigidez de descarga; lo cual debe tenerse en cuenta al interpretar las conclusiones del estudio. Además, es importante tener en cuenta que existen numerosas situaciones en las cuales no es posible predecir la respuesta de un sistema en particular a un acelerograma dado. En muchos casos sistemas con el mismo tipo de relaciones fuerza-deformación, el mismo nivel de amortiguamiento, y sometidos al mismo acelerograma, se comportan en formas totalmente diferentes, dependiendo de los valores particulares de la fuerza de fluencia.

Una conclusión muy importante del estudio realizado, es la aseveración de que en la gran mayoría de los casos, los resultados obtenidos para sistemas con relaciones fuerza-deformación elastoplástica,

consistentemente conducen a valores conservadores de la máxima respuesta, lo cual valida el empleo de este tipo de modelos en un gran número de aplicaciones.

6.7 — Principio de las deformaciones iguales

De la discusión anterior sobre la respuesta de sistemas inelásticos, basada en los trabajos de Newmark, es evidente que en la zona del espectro sensitiva a los desplazamientos, o sea la zona de períodos largos, los desplazamientos totales que se obtienen en la respuesta inelástica, son aproximadamente iguales a los que tendría un sistema elástico con la misma rigidez y sometido al mismo acelerograma. En la Figura 6-56, se indica esta característica, la cual se ha denominado tradicionalmente como el *principio de las deformaciones iguales* [Park y Paulay, 1975], [Paulay y Priestley, 1992].

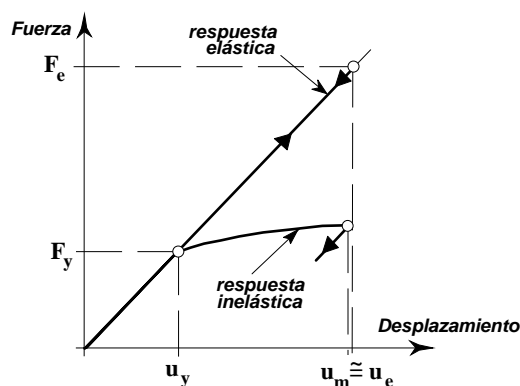


Figura 6-56 - Principio de las deformaciones iguales

Este aspecto tiene implicaciones muy importantes en diseño sísmico, dado que una de las verificaciones que deben realizarse consiste en comprobar que las deformaciones de la estructura no sean excesivas, y dado que la estructura en general se sale del rango elástico de respuesta ante la ocurrencia de los movimientos sísmicos de diseño, estas deformaciones se deben estimar en el rango inelástico de la manera más precisa posible. Por otro lado si el daño, a elementos estructurales y no estructurales, está asociado con las deformaciones inelásticas que se tengan, la rigidez inicial del sistema y su degradación son parámetros muy importantes en el buen comportamiento de la estructura [Qi y Moehle, 1991].

El problema de estimar las deformaciones en el rango inelástico se vuelve especialmente complejo cuando se tiene degradación de la rigidez, pues el período de vibración del sistema cambia durante la respuesta de la estructura a la excitación sísmica. En los trabajos de Shimazaki y Sozen [Shimazaki y Sozen, 1985], [Shimazaki, 1988] y [Shimazaki y Sozen, 1993], utilizando un enfoque diferente al de Newmark, consistente en el estudio de un gran número de casos de respuesta del sistema inelástico en términos de energía y de desplazamiento, se encontró que cuando el período de la estructura era mayor que un valor característico T_g del acelerograma, la energía que entraba al sistema era constante o disminuía, independientemente de la resistencia del sistema, F_y . Además se encontró, que cuando el período del sistema era mayor que el período característico, $T > T_g$, independientemente de la resistencia del sistema F_y ; el desplazamiento máximo inelástico u_m , tendería a ser igual al del espectro elástico de desplazamientos, confirmando el principio de desplazamientos iguales.

6.8 — Programa de computador RESDIN3 para la obtención de la respuesta dinámica elástica e inelástica

Dentro de los programas suministrados se incluye el programa de computador RESDIN3, el cual permite encontrar la respuesta en el tiempo de sistemas dinámicos de un grado de libertad, en los cuales su elemento de resistencia puede tener características elásticas e inelásticas. El modelo está formulado para sistemas consistentes en una masa, un amortiguador viscoso y un elemento de resistencia, o resorte, los cuales se pueden someter, ya sea a unas condiciones iniciales de desplazamiento, o velocidad, o ambas, a una fuerza variante en el tiempo para estudios de excitación armónica, o a un acelerograma para excitación en la base.

El programa está escrito en lenguaje QuickBasic 4.5 de Microsoft y utiliza la metodología presentada anteriormente. El programa emplea unidades de distancia en metros y de tiempo en segundos, pues utiliza como valor de la aceleración de la gravedad $g = 9.80 \text{ m/s}^2$. La unidad de masa debe ser el kg.

Propiedades del sistema dinámico de un grado de libertad

El sistema dinámico se describe por medio de sus propiedades de masa, rigidez y amortiguamiento. Esta descripción puede hacerse por medio de la definición de los parámetros de masa m , en kg dado que se emplea el sistema SI, de rigidez k en N/m, y el amortiguamiento c en N-s/m. Alternativamente el programa permite definir el sistema por medio de su período de vibración $T (=2\pi\sqrt{m/k})$ en s y el coeficiente de amortiguamiento crítico $\xi = c/(2m\omega)$ (donde $\omega = \sqrt{k/m}$). Estas definiciones son válidas tanto para el sistema elástico como para el inelástico.

Propiedades de inelasticidad

Con el fin de poder definir internamente el manejo de los ciclos de histéresis, el programa opera con tres modelos de inelasticidad: elastoplástico, de Ramberg-Osgood y de rigidez degradante. En todos los casos los modelos pueden ser simétricos o asimétricos.

Modelo Elastoplástico

En el caso del modelo elastoplástico la rigidez tanto para los ciclos de carga como de descarga es la misma del sistema elástico k . El punto en el cual se inicia la plastificación (F_y), se define en términos del peso ($W = m g$) del sistema y se indica por medio de la fracción del peso a que corresponde la fuerza de plastificación. En la literatura esta fuerza se denomina el corte basal resistente del sistema. El programa acepta valores diferentes para las direcciones positiva ($+F_y$) y negativa ($-F_y$) del movimiento. En caso simétrico los dos valores son iguales.

Modelo de Ramberg-Osgood

En el modelo de Ramberg-Osgood el programa requiere los siguientes datos:

- (a) el valor del corte basal resistente del sistema F_y , expresado como una fracción de su peso W .
- (b) la rigidez de la curva esqueleto, k_{cr} , tal como se indica la Figura 6-26. Esta rigidez se expresa como una fracción de la rigidez inicial del sistema, k , la cual corresponde a la rigidez del sistema en respuesta elástica con la cual se calculó el período de vibración T . Generalmente esta rigidez corresponde a la rigidez fisurada del sistema k_{cr} , como la indica la Figura 6-29.
- (c) la rigidez en fluencia k_s , tal como la indica la Figura 6-29. Esta rigidez se expresa, también, como una fracción de la rigidez inicial del sistema, k , y depende de la capacidad de endurecimiento por deformación del acero de refuerzo longitudinal. Si el acero tuviere una curva esfuerzo-deformación totalmente elasto-plástica, el valor de k_s sería cero.

Con los datos anteriores el programa determina los valores de los parámetros γ y r , con lo cual define el modelo de Ramberg-Osgood.

Modelo con rigidez degradante

En el modelo histerético con degradación de rigidez hay necesidad de definir los siguientes parámetros, tanto para la respuesta en el sentido positivo como para el negativo:

- (a) el valor del corte basal resistente del sistema F_y , expresado como una fracción de su peso W .
- (b) la rigidez en descarga k_u , tal como se indica la Figura 6-7. Esta rigidez se expresa como una fracción de la rigidez inicial del sistema, k , la cual corresponde a la rigidez del sistema en respuesta elástica con la cual se calculó el período de vibración T . Generalmente esta rigidez corresponde a la rigidez fisurada del sistema k_{cr} , como la indica la Figura 6-7.
- (c) la rigidez en recarga k_r , tal como se indica en la Figura 6-7. Esta rigidez se expresa como una fracción de la rigidez inicial del sistema, k . Corresponde a la fase inicial de un ciclo de nueva carga y su valor depende de la cantidad de fisuras abiertas en un ciclo anterior que haya necesidad de cerrar en el nuevo ciclo de carga. En muchos casos se calcula como la rigidez de la sección compuesta por la armadura longitudinal sola, sin tener en cuenta el concreto.

- (d) la rigidez en fluencia k_s , tal como la indica la Figura 6-7. Esta rigidez se expresa, también, como una fracción de la rigidez inicial del sistema, k , y depende de la capacidad de endurecimiento por deformación del acero de refuerzo longitudinal. Si el acero tuviere una curva esfuerzo-deformación totalmente elasto-plástica, el valor de k_s sería cero. Debe tenerse en cuenta que los aceros requeridos por los códigos de diseño sismo resistente deben tener una zona de endurecimiento por deformación, pues en general se exige que la resistencia última real sea más de 1.25 veces la resistencia a la fluencia real. (Norma ASTM A706 y NTC 2289 4ª revisión), y
- (e) el valor del parámetro λ , indicado en la Figura 6-34, el cual describe el número de excursiones en el rango de fluencia para que desaparezca la adherencia del acero de refuerzo.

Con los datos anteriores el programa formula un modelo de histéresis que incluye características de degradación de la rigidez y de la adherencia del refuerzo con el concreto.

Condiciones iniciales

El programa acepta casos de condiciones iniciales, ya sean de desplazamiento, en m, o de velocidad, en m/s; o ambos.

Vibración forzada

Es posible dar una excitación armónica con frecuencia Ω y amplitud en fuerza, dada como una fracción del peso W . Se pueden dar formas sinusoidales, triangulares o de escalones a la excitación.

Aceleración en la base

El registro de las aceleraciones que se imponen en la base del sistema, o acelerograma, puede definirse en el programa de cuatro maneras diferentes:

- por medio de una aceleración expresada en intervalos de tiempo constantes. La aceleración se expresa como una fracción de la aceleración de la gravedad g .
- por medio de una aceleración expresada en intervalos de tiempo variables. La aceleración también se expresa como fracción de la aceleración de la gravedad g .
- leyendo cualquier archivo acelerográfico que esté en ASCII, y
- por medio de registros de aceleración de temblores reales. El disquete del programa contiene los acelerogramas reales presentados en la Tabla 6-4.

Tabla 6-4 - Acelerogramas utilizados en el programa RESDIN

No.	Temblor	Fecha	Registro	Direc.	A_{te}
1	Imperial Valley, CA	May 18/40	El Centro	N-S	0.35 g
2	San Fernando, CA	Feb 9/71	Pacoima Dam	S16°E	1.17 g
3	San Fernando, CA	Feb 9/71	Castaic Old Ridge Rd	N21°E	0.32 g
4	San Fernando, CA	Feb 9/71	3710 Wilshire Blvd. 10º piso	N90°E	0.35 g
5	Parkfield, CA	Jun 27/66	Temblor	S25°W	0.35 g
6	Kern County, CA	Jul 21/52	Santa Barbara Courthouse	S48°E	0.13 g
7	Parkfield, CA	Jun 27/66	Cholame, Shandon	N85°E	0.43 g
8	Miyagi-Ken-Oki, Japón	Jun 12/78	Miyagi	N-S	0.26 g
9	Tokachi-Oki, Japón	May 16/68	Hachinohe Harbor	E-W	0.19 g
10	Ciudad de México	Sep 19/85	SCT1- Secretaría de Transp.	E-W	0.17 g
11	Chile	Mar 3/85	Viña del Mar	N-S	0.36 g
12	Loma Prieta, CA	Oct 17/89	Santa Cruz-UCSC Lick Lab.	N-S	0.44 g
13	Loma Prieta, CA	Oct 17/89	Capitola Fire Station	N-S	0.47 g
14	Loma Prieta, CA	Oct 17/89	Corralitos - Eureka Canyon	N-S	0.63 g

El programa permite utilizar parte del acelerograma indicando el tiempo máximo. El acelerograma se puede escalar dando una aceleración máxima diferente a la original, con lo cual todos los demás puntos se amplifican o reducen en la misma proporción. Además es posible variar la escala del tiempo, comprimiéndolo o extendiéndolo, lo cual se emplea algunas veces para simular condiciones de suelo blando.

Respuesta del sistema

El programa utiliza en la solución de la respuesta dinámica en el tiempo el método Beta de Newmark, descrito anteriormente. La respuesta se presenta gráficamente en la medida que se va obteniendo la solución. Se presenta el acelerograma utilizado \ddot{x}_0 , como fracción de g , la respuesta en términos de desplazamiento relativo entre la base y la masa, u , en m; la velocidad relativa entre la masa y la base \dot{u} , en m/s, y la aceleración absoluta de la masa $(\ddot{u} + \ddot{x}_0)$, como fracción de g .

Además, el programa conserva los datos de la respuesta, lo cual permite graficar posteriormente la historia de la fuerza sobre el resorte, consultar la respuesta para un tiempo específico, o sus máximos en el tiempo y grabarlos en un archivo que puede ser leído después por medio de una hoja electrónica, como Excel o Lotus.

El programa puede calcular el intercambio de energía durante la respuesta y presentar gráficos de la energía en cada instante y de la energía acumulada también en cada instante.

Tema N° 11 — Movimientos sísmicos de diseño

7.1 — Introducción

Para el diseño sísmico de una estructura se utiliza lo que se denominan *movimientos sísmicos de diseño*, los cuales se definen a través de un *espectro suavizado de diseño*, o bien mediante *familias de acelerogramas*. Los picos que ocurren en el espectro de respuesta son característicos de cada temblor en particular, por lo tanto no tiene sentido en un espectro de diseño tener grandes variaciones dentro de un rango pequeño de períodos, más bien se utilizan tendencias generales en rangos de períodos. Por esta razón su forma es suavizada y de ahí su denominación.

Dado que es imposible estimar en detalle las características de los movimientos sísmicos que se presentan en el futuro, al menos en el estado del conocimiento actual, la gran mayoría de los métodos para definir un espectro de diseño se sustentan en el estudio estadístico de espectros de respuesta de registros acelerográficos que tienen algunas características en común. El hecho de que compongan de líneas suavizadas o rectas, inclusive, se justifica debido a las dificultades que se tiene al estimar los períodos de vibración de estructuras que van, con seguridad, a responder en el rango inelástico, durante un sismo fuerte. Por otro lado hay gran influencia de los efectos de campo cercano, tales como el tipo de fuente sismogénica, la forma en que se propaga la ruptura, las características de los materiales que se encuentran en la trayectoria de las ondas sísmicas y las condiciones locales del suelo [Mohraz y Elghadamsi, 1989].

Existen diferentes métodos para estimar el espectro de diseño dado que se conocen ciertas características de los movimientos sísmicos esperados en el sitio. En general cuando se habla de un espectro de diseño éste se define en *suelo duro o roca* y por lo tanto no incluye el efecto que puede tener la estratigrafía del suelo en el lugar. En aquellos casos en que hay depósitos profundos de suelos blandos, en general se realiza un *estudio de amplificación de onda*, por medio del cual es posible incluir estos parámetros totalmente locales en el espectro de diseño.

Dado que en general los espectros de diseño se obtienen del estudio estadístico de registros que por su naturaleza propia no pueden ser iguales, esto conduce a que se tengan que normalizar de alguna manera, para lo cual existen diferentes procedimientos, dentro de los que se destacan la normalización con respecto a una intensidad espectral y la normalización con respecto a algunos de los parámetros máximos del terreno, ya sea aceleración, velocidad o desplazamiento: A_{te} , V_{te} o D_{te} .

A continuación se presentan, en el orden histórico de su desarrollo, algunos de los métodos más utilizados para definir el espectro de diseño en roca. Posteriormente se tratan las familias de acelerogramas, los efectos de amplificación de onda causados por el suelo subyacente y otros factores que influyen en la selección y utilización de los diferentes tipos de movimientos sísmicos de diseño.

7.2 — Espectros elásticos de diseño

7.2.2 — Método de Newmark-Hall

A mediados de la década de 1960, Newmark y Hall iniciaron una serie de investigaciones sobre las formas espectrales, principalmente para ser empleadas en el diseño de plantas nucleares. Con base en estos estudios, recomendaron que era posible describir el espectro por medio de líneas rectas dibujadas en un papel tripartita (véase la Sección 5.4). En las referencias [Newmark y Hall, 1969, 1972 y 1982] se presenta la metodología para construir un espectro de diseño, que se presenta a continuación. El método se basa en el supuesto de que sea posible estimar independientemente, por medio de procedimientos como los presentados en la Sección 4.9, la máxima aceleración horizontal del terreno, A_{te} , la máxima velocidad horizontal del terreno, V_{te} , y el máximo desplazamiento horizontal del terreno, D_{te} , para el temblor de diseño.

Con base en el estudio de numerosos temblores los autores encontraron que dentro de las tres zonas del espectro en las cuales la aceleración es aproximadamente constante, la velocidad es aproximadamente constante y el desplazamiento es aproximadamente constante, era posible definir

coeficientes de amplificación que permiten dibujar un espectro normalizado. En la Tabla 7-2 se presentan los coeficientes de amplificación para varios valores del coeficiente de amortiguamiento, los cuales corresponden a dos niveles diferentes de probabilidad de que las ordenadas del espectro de diseño no sean excedidas cuando se presente un evento que tenga los mismos movimientos máximos del terreno.

Tabla 7-2 - Coeficientes espectrales de amplificación para respuesta horizontal elástica

Amortig. ξ (%)	Media más una desviación estándar (84.1%)			Media (50%)		
	α_A	α_V	α_D	α_A	α_V	α_D
0.5	5.10	3.84	3.04	3.68	2.59	2.01
1	4.38	3.38	2.73	3.21	2.31	1.82
2	3.66	2.92	2.42	2.74	2.03	1.63
3	3.24	2.64	2.24	2.46	1.86	1.52
5	2.71	2.30	2.01	2.12	1.65	1.39
7	2.36	2.08	1.85	1.89	1.51	1.29
10	1.99	1.84	1.69	1.64	1.37	1.20
20	1.26	1.37	1.38	1.17	1.08	1.01

Los valores dados en la Tabla 7-2, se pueden expresar en forma de ecuación así: para un nivel de probabilidad del 84.1% (media más una desviación estándar) de que no sean excedidas las ordenadas espectrales:

$$\alpha_A = 4.38 - 1.04 \ln(\xi\%) \quad (7-2)$$

$$\alpha_V = 3.38 - 0.67 \ln(\xi\%) \quad (7-3)$$

$$\alpha_D = 2.73 - 0.45 \ln(\xi\%) \quad (7-4)$$

Para un nivel de probabilidad del 50% (media) de que no sean excedidas las ordenadas espectrales:

$$\alpha_A = 3.21 - 0.68 \ln(\xi\%) \quad (7-5)$$

$$\alpha_V = 2.31 - 0.41 \ln(\xi\%) \quad (7-6)$$

$$\alpha_D = 1.82 - 0.27 \ln(\xi\%) \quad (7-7)$$

El espectro se construye como se muestra esquemáticamente en la Figura 7-4. En papel espectral logarítmico tripartita se dibujan las líneas correspondientes a los máximos valores del terreno: máxima aceleración, A_{te} , máxima velocidad, V_{te} , y máximo desplazamiento, D_{te} , de los movimientos sísmicos de diseño. Estos valores provienen en general de un estudio de amenaza sísmica, como el presentado en la Sección 4-9 [García *et al.*, 1984 y 1996].

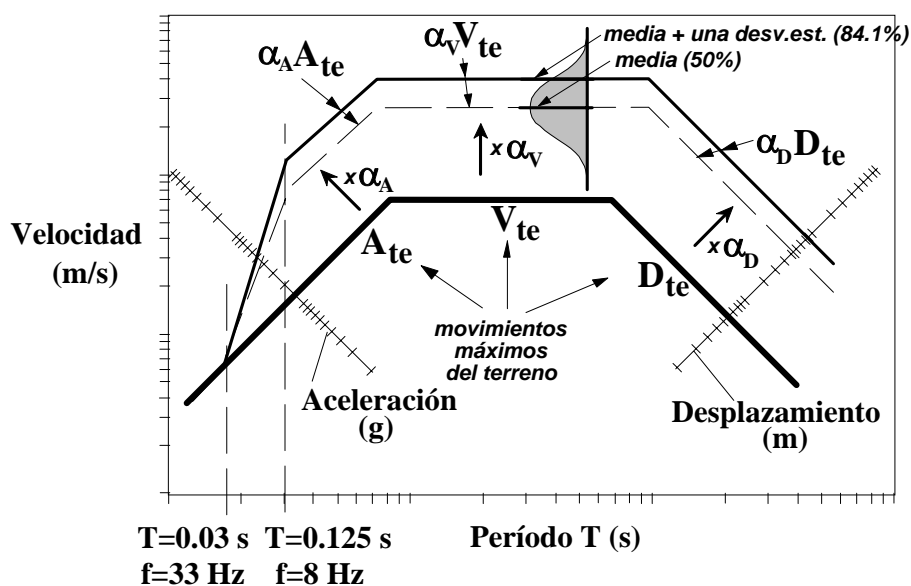


Figura 7-4 - Procedimiento esquemático para la obtención del espectro elástico de Newmark-Hall

El procedimiento de definición del espectro es el siguiente: para un valor del coeficiente de amortiguamiento, ξ , dado se buscan en la Tabla 7-2 los valores de los coeficientes de amplificación correspondientes a la zona del espectro con aceleración aproximadamente constante, α_A , con velocidad aproximadamente constante, α_V , y con desplazamiento aproximadamente constante, α_D , para el nivel de probabilidad deseado. Luego se trazan líneas paralelas a las correspondientes a los valores máximos de los movimientos del terreno con los valores amplificados, o sea multiplicando el valor de movimiento máximo del terreno por el coeficiente α apropiado. En la zona de períodos cortos, a un valor de frecuencia de aproximadamente 8 Hz (período de 0.125 s) se inicia la transición hacia la aceleración del terreno, a la cual se debe llegar a un valor de frecuencia del orden de 33 Hz (período igual a 0.03 s) y a partir de este punto hacia la izquierda la aceleración espectral es igual a la del terreno.

Para efectos de seleccionar el valor del coeficiente de amortiguamiento crítico para el cual se debe construir el espectro, Newmark y Hall recomiendan los valores que se muestran en la Tabla 7-3.

Tabla 7-3 - Coeficientes de amortiguamiento recomendados por Newmark-Hall, para diferentes materiales estructurales y estados de esfuerzos

Nivel de esfuerzo	Tipo y condición de la estructura	Amortig. ξ
1. Bajo, menor que el límite proporcional, esfuerzos menores que $0.5f_y$	a. tuberías vitales	0.5 %
	b. acero, concreto reforzado o preesforzado, madera, sin agrietamiento, sin deslizamiento en las juntas	0.5 a 1 %
2. Nivel de esfuerzos de trabajo, menores que $0.5f_y$	a. tuberías vitales	0.5 a 1 %
	b. acero soldado, concreto preesforzado, concreto reforzado con cuantías altas (fisuración muy menor)	2 %
	c. concreto reforzado con bastante fisuración	3 a 5 %
	d. acero estructural Pernado o remachado, estructuras de madera con uniones clavadas o atornilladas	5 a 7 %
3. Justo al nivel de fluencia	a. tuberías vitales	2 %
	b. acero soldado, concreto preesforzado (sin pérdida total del preesfuerzo)	5 %
	c. concreto reforzado y concreto preesforzado	7 a 10 %
	d. acero estructural Pernado o remachado, estructuras de madera con uniones atornilladas	10 a 15 %
	e. estructuras de madera con uniones clavadas	15 a 20 %
4. Más allá del nivel de fluencia; con deformación permanente, mayor que la deformación unitaria del punto de fluencia	a. tuberías	5 %
	b. acero soldado	7 a 10 %
	c. concreto reforzado y preesforzado	10 a 15 %
	d. acero Pernado o remachado y estructuras de madera	20 %
5. Para todos los rangos (v_s = velocidad de la onda de cortante)	Balanceo de toda la estructura:	
	a. sobre roca ($v_s > 1800$ m/s)	2 a 5 %
	b. suelo firme ($v_s > 600$ m/s)	5 a 7 %
	c. suelo blando ($v_s < 600$ m/s)	7 a 10 %

Cuando no se dispone sino del valor de la aceleración máxima del terreno, A_{te} , hay necesidad de estimar los valores de V_{te} y D_{te} . Para el efecto pueden emplearse las relaciones V_{te}/A_{te} , D_{te}/A_{te} y $A_{te}D_{te}/(V_{te})^2$, presentadas en la Sección 4.8.3. En [Newmark y Hall, 1982], se indica que en ausencia de una mejor información puede utilizarse $V_{te}/A_{te} = 1.22$ m/(s·g) para aluvión firme y 0.91 m/(s·g) para roca. Además para que el espectro cubra una franja adecuada de períodos, allí también se recomienda que $A_{te}D_{te}/(V_{te})^2$ se tome como 6.0.

Es importante tener en cuenta que los cocientes V_{te}/A_{te} y $A_{te}D_{te}/(V_{te})^2$ tienen relación directa con la forma del espectro [Riddell y Newmark, 1979]. El cociente V_{te}/A_{te} determina la localización del espectro en la escala de períodos de vibración. Una reducción de este cociente mueve la zona de amplificación de la velocidad hacia la izquierda.

El cociente $A_{te}D_{te}/(V_{te})^2$ es una medida de qué tan plano, o puntudo es el espectro. Valores grandes de este cociente corresponden a espectros aplanados, mientras que valores pequeños corresponden a zonas de amplificación de velocidad angostas, las cuales se manifiestan en espectros de banda angosta.

Otras recomendaciones dadas por Newmark y Hall tienen que ver con ajustes debidos a las condiciones geológicas del lugar. Aunque en este campo se han presentado enormes avances, con posterioridad a la aparición del método, como se verá en la Sección 7.6; no dejan de ser lineamientos generales que permiten interpretar la metodología para condiciones diferentes a la de la obtención de un espectro en

roca. Newmark y Hall recomiendan que el espectro se multiplique por las siguientes constantes de proporcionalidad: (a) para roca competente, 0.67, (b) roca meteorizada o blanda, o suelos sedimentarios firmes (aluvión), 1.0, (c) suelos sedimentarios blandos, 1.5.

Respecto a la construcción de un espectro de aceleraciones verticales, indican que pueden emplearse 2/3 de las ordenadas espectrales para lugares donde los movimientos de la falla son transcurrentes horizontales, e iguales a la horizontal cuando los movimientos de la falla puedan tener componentes verticales grandes.

Ejemplo 7-1

Se desea obtener el espectro de diseño, para sistemas con un coeficiente de amortiguamiento crítico, ξ , del 5%, en un lugar en el cual se ha estimado que la máxima aceleración del terreno (A_{te}) para los movimientos sísmicos de diseño es de $0.3g$, la máxima velocidad del terreno (V_{te}) es de 0.20 m/s y el máximo desplazamiento del terreno (D_{te}) es de 0.30 m . Se desea un nivel de probabilidad de no exceder las ordenadas espectrales del 84.1%.

En la Figura 7-5 se han dibujado en el papel tripartita los movimientos máximos del terreno. Para dibujar el espectro de diseño en la zona de aceleraciones constantes el valor de S_a se obtiene de multiplicar $0.3 g \times 2.71 = 0.81 g$. Para la zona de velocidades constantes el valor de S_v se obtiene de multiplicar $0.2 \text{ m/s} \times 2.30 = 0.46 \text{ m/s}$ y para la zona de desplazamientos constantes el valor de S_d se obtiene de multiplicar $0.3 \text{ m} \times 2.01 = 0.60 \text{ m}$. En la zona de períodos cortos el espectro de diseño se inicia con la aceleración del terreno hasta un período de 0.03 s (frecuencia de 33 Hz) y allí comienza la transición a la zona de aceleraciones constantes con la cual empata a un período de 0.125 s (frecuencia de 8 Hz).

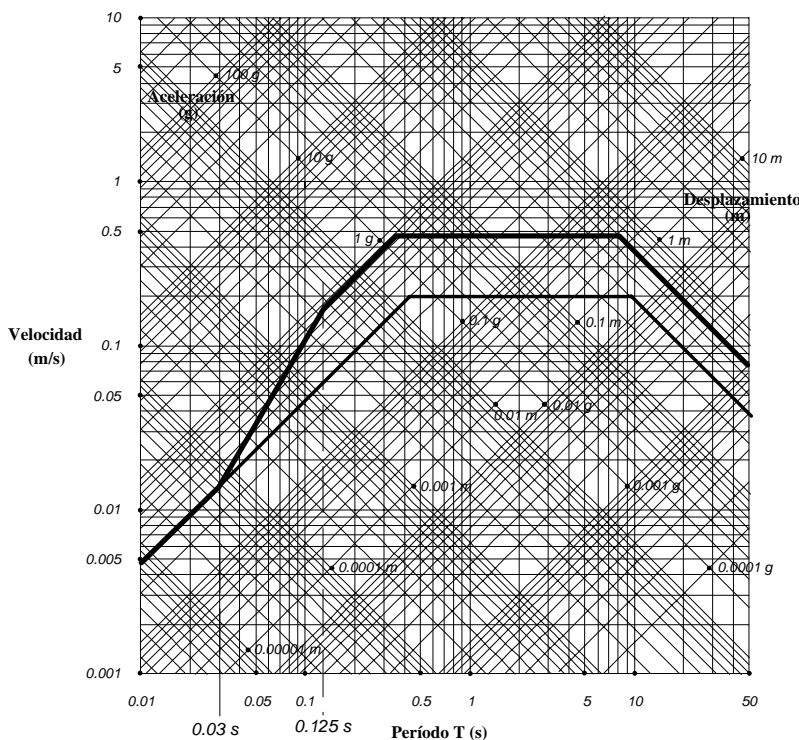


Figura 7-5 - Ejemplo 7-1 - Espectro elástico de diseño de Newmark-Hall para $A_{te} = 0.3 g$, $V_{te} = 0.2 \text{ m/s}$ y $D_{te} = 0.3 \text{ m}$ para amortiguamiento, ξ , de 5% y probabilidad de 84.1%

7.2.3 — Método de Newmark-Blume-Kapur

A comienzos de la década de 1970, la Comisión de Energía Atómica de Estados Unidos, contrató una serie de estudios para la definición de espectros de diseño sísmico de plantas nucleares. Como

resultado de estos estudios, en la referencia [Newmark, Blume y Kapur, 1973] se presentó una metodología para obtención de espectros elásticos de diseño. El estudio inicial se realizó independientemente por parte de J. A. Blume y N. M. Newmark. En esta fase se emplearon 42 y 33 acelerogramas respectivamente. La forma del espectro en ambos casos fue determinada estadísticamente utilizando distribuciones log-normales. Con base en estos estudios preliminares se desarrolló como definitiva la metodología que se presenta a continuación.

Los espectros se definieron para tres niveles de probabilidad de no excedencia en sus ordenadas: media (50%), media más una desviación estándar (84.1%) y media más dos desviaciones estándar (97.7%). El estudio definió cuatro períodos de control: el período A, que define el punto a partir de la cual se inicia la amplificación de la aceleración con respecto a la aceleración máxima del terreno, A_{te} , se fijó en $T = 0.03$ s ($f = 33$ Hz); el período B, marca el final de la transición entre la aceleración del terreno, A_{te} , y el valor amplificado de la aceleración, fue fijado en $T = 0.11$ s ($f = 9$ Hz); el período C marca el punto de transición entre la zona de amplificación de la aceleración y la de amplificación de la velocidad, fue fijado en $T = 0.4$ s ($f = 2.5$ Hz); por último, el período D define el punto de transición entre la zona de amplificación de velocidades y la zona de amplificación de desplazamientos, y fue fijado en $T = 4.0$ s ($f = 0.25$ Hz).

Para cada uno de los períodos A, B y C se fijaron coeficientes de amplificación que afectan la aceleración máxima del terreno, A_{te} , y que dependen del coeficiente de amortiguamiento crítico. Para el período de control D, se prescribe un coeficiente de amplificación de desplazamiento, también en función del amortiguamiento, el cual afecta el desplazamiento máximo del terreno, D_{te} . El desplazamiento máximo del terreno, D_{te} , se estima en función de la aceleración máxima del terreno, A_{te} , por medio de la siguiente relación:

$$D_{te} = 0.91m \cdot A_{te} \quad (7-8)$$

En la Figura 7-6 se muestran los coeficientes de amplificación para cada uno de los períodos de control, en función del coeficiente de amortiguamiento crítico, ξ , a que se desee producir el espectro. Los coeficientes de amplificación definen un espectro cuyas ordenadas espectrales tienen una probabilidad de no ser excedidas del 84.1% (media más una desviación estándar). Todos amplifican con respecto a la aceleración máxima del terreno, A_{te} , excepto el correspondiente al período de control D, que amplifica con respecto al desplazamiento máximo del terreno, D_{te} .

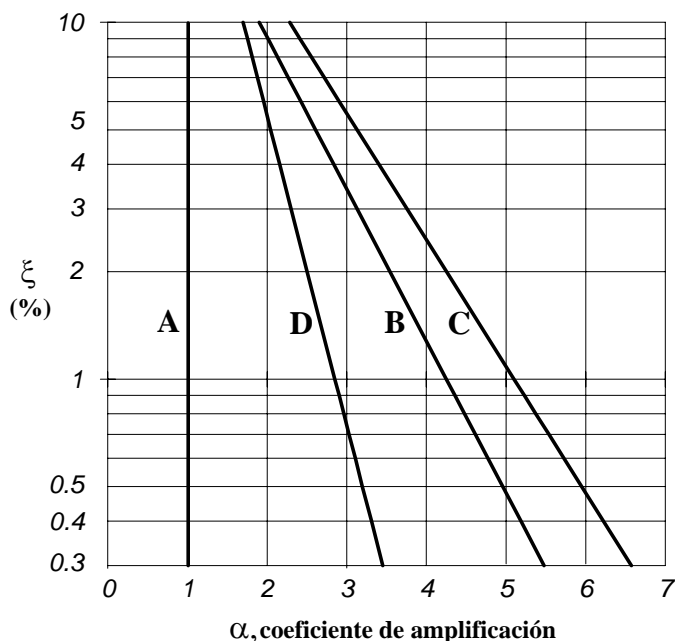


Figura 7-6 - Coeficientes de amplificación para los períodos de control A, B, C y D

Las ecuaciones que describen estos coeficientes de amplificación, para un nivel de probabilidad del 84.1% (media más una desviación estándar), son las siguientes, las cuales son válidas para valores del amortiguamiento menores o iguales al 10%:

$$\alpha_{T_A} = 1.0 \quad T_A = 0.03 \text{ s} \quad (7-9)$$

$$\alpha_{T_B} = 4.25 - 1.02 \ln(\xi\%) \quad T_B = 0.11 \text{ s} \quad (7-10)$$

$$\alpha_{T_C} = 5.1 - 1.224 \ln(\xi\%) \quad T_C = 0.4 \text{ s} \quad (7-11)$$

$$\alpha_{T_D} = 2.85 - 0.5 \ln(\xi\%) \quad T_D = 4 \text{ s} \quad (7-12)$$

El espectro se construye dibujando, primero, en papel espectral tripartita las líneas correspondientes a la aceleración máxima del terreno, A_{te} , y al desplazamiento máximo del terreno, D_{te} , de los movimientos sísmicos de diseño. Estos valores provienen en general de un estudio de amenaza sísmica, como el presentado en la Sección 4.9 [García et al., 1984 y 1996].

Luego, para un valor del coeficiente de amortiguamiento, ξ , dado se buscan en la Figura 7-6 los valores de los coeficientes de amplificación correspondientes a los períodos de control A, B, C y D. Luego en cada uno de estos períodos de control se colocan punto al valor amplificado de la aceleración, excepto para el período D, donde se amplifica el desplazamiento. A partir del período D el espectro presenta un desplazamiento constante. Luego se unen estos puntos amplificados y las líneas que se obtienen definen el espectro.

Los autores hacen la salvedad de que para lugares donde haya una gran preponderancia a amplificaciones para las componentes del terreno con períodos mayores de 0.5 s, los espectros deben ajustarse apropiadamente. Este caso se presenta generalmente con situaciones donde haya suelos blandos.

Para el espectro vertical sugieren tomar 2/3 del espectro de efectos horizontales, hasta el período de control C. En este punto el espectro vertical debe prolongarse hacia la derecha hasta que toque la línea del espectro de efectos horizontales que une los períodos de control C y D, y a partir de este punto los dos espectros son iguales.

Ejemplo 7-2

Se desea obtener el espectro de diseño para las mismas condiciones del ejemplo 7-1, pero ahora por el método de Newmark. Blume y Kapur. Los parámetros relevantes son: $\xi = 5\%$, y $A_{te} = 0.3g$.

El valor de los desplazamientos máximos del terreno, $D_{te} = 0.91 \cdot 0.3 = 0.273 \text{ m}$. Para un amortiguamiento del 5%, los valores de los coeficientes de amplificación, leídos de la Figura 7-6 son:

$$\alpha_{T_A} = 1.0, \alpha_{T_B} = 2.6, \alpha_{T_C} = 3.1, \text{ y } \alpha_{T_D} = 2.0.$$

Por lo tanto las ordenadas espectrales en cada uno de los períodos de control son:

$$\text{Período A} - S_a = 1.0 \cdot 0.3g = 0.3g$$

$$\text{Período B} - S_a = 2.6 \cdot 0.3g = 0.78g$$

$$\text{Período C} - S_a = 3.1 \cdot 0.3g = 0.93g$$

$$\text{Período D} - S_d = 2.0 \cdot 0.273 \text{ m} = 0.55 \text{ m}$$

En la Figura 7-7 se han dibujado en el papel tripartita los movimientos máximos del terreno. A_{te} y D_{te} . Luego se localizaron los puntos correspondientes a cada uno de los períodos de control, y por último se unieron estos puntos para obtener el espectro,

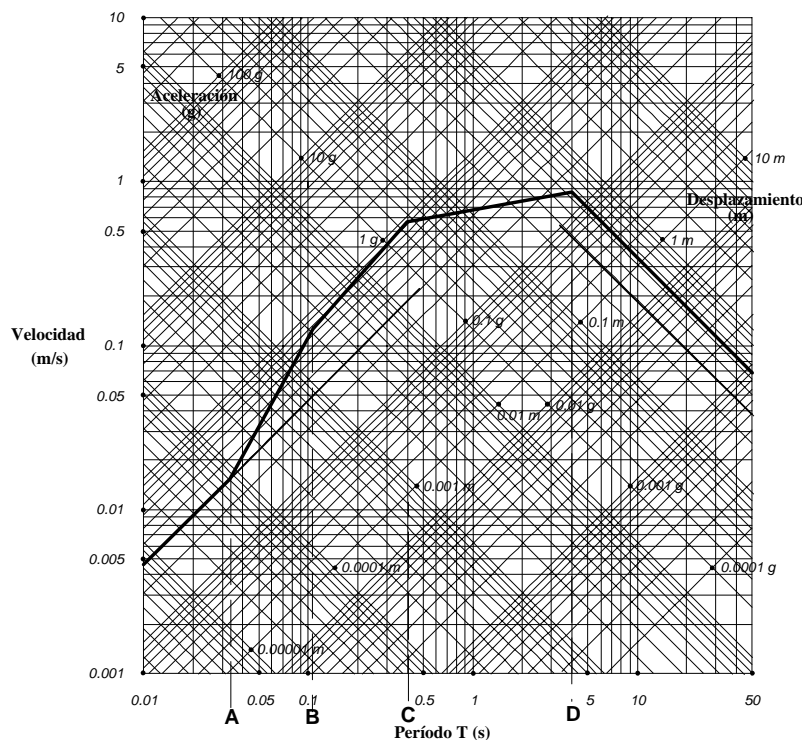


Figura 7-7 - Ejemplo 7-2 - Espectro elástico de diseño de Newmark-Blume-Kapur para $A_{te} = 0.3 \text{ g}$ de amortiguamiento, ξ , de 5% y probabilidad de no excedencia de 84.1%

7.2.4 — Método de Shibata-Sozen

En la referencia Shibata y Sozen [Shibata y Sozen, 1976] presentan una metodología para el diseño de estructuras de concreto reforzado ante acciones sísmicas. A pesar de que los autores indican que el propósito de la metodología no es presentar un espectro de diseño, dentro de la investigación que condujo a la validación del método se utilizaron tres tipos de espectro que fueron calculados de los siguientes temblores normalizados para una aceleración máxima del terreno A_{te} de 0.5 g:

Tabla 7-4 - Acelerogramas utilizados para plantear el espectro de Shibata-Sozen

No.	Acelerograma	$A_{te} \text{ (g)}$
1	El Centro, CA, 1940, Componente NS	0.31
2	El Centro, CA, 1940, Componente EW	0.22
3	Taft, CA, 1952, Componente N21°E	0.18
4	Taft, CA, 1952, Componente S69°E	0.16
5	Managua, Nicaragua, 1972, Comp. EW	0.38
6	Managua, Nicaragua, 1972, Comp. NS	0.38
7	San Fernando, CA, 1971, 8344 Orion, Comp. NS	0.26
8	San Fernando, CA, 1971, Castaic, Comp. N21°E	0.32

Los autores encontraron que los seis primeros registros se pueden describir por medio de un mismo espectro, mientras que los otros dos requieren descripciones diferentes.

Además se supone que la aceleración de diseño, leída del espectro de aceleraciones, para cualquier coeficiente de amortiguamiento crítico ξ , puede relacionarse con el valor del espectro de respuesta para un coeficiente de amortiguamiento crítico de 2% ($\xi = 0.02$), utilizando:

$$S_a(T, \xi) = S_a(T, \xi = 0.02) \times \frac{8}{6 + 100\xi} \quad (7-13)$$

La compatibilidad del espectro suavizado de diseño con los espectros que le sirvieron de base es mejor para coeficientes de amortiguamiento crítico ξ de 10% que para ξ de 2% debido a que valores dentro del rango cercano a 10% son típicos para estructuras de concreto reforzado para las cuales se dispuso la metodología. En la Figura 7-8 se muestra el espectro suavizado de diseño para ξ de 2%. Este espectro es compatible con movimientos sísmicos del tipo de los seis primeros de la tabla anterior. El espectro consta de tres zonas: para períodos cortos el espectro es directamente proporcional a la aceleración máxima del terreno, luego viene una zona de amplificación constante, y por último hay una zona en que la amplificación es proporcional al inverso del período. Al igualar los valores de amplificación de las zonas contiguas, se determina que la zona de amplificación constante está entre períodos de 0.15 y 0.4 s.

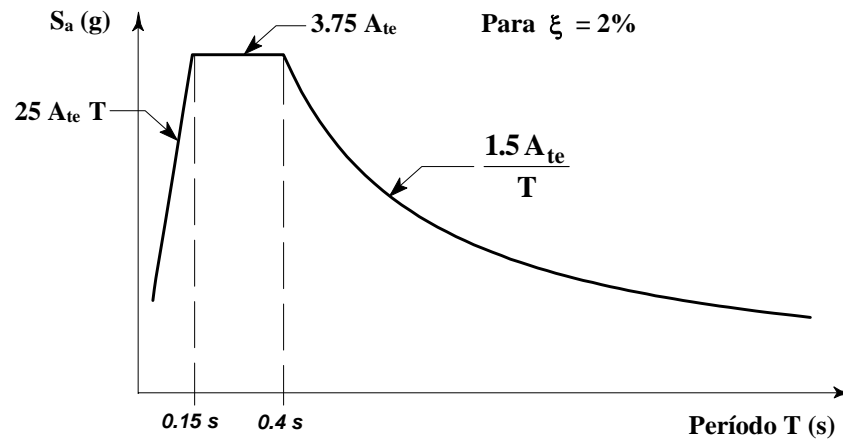


Figura 7-8 - Espectro elástico suavizado de diseño de Shibata-Sozen para amortiguamiento, ξ , de 2%

Ejemplo 7-3

Se desea obtener el espectro de diseño para las mismas condiciones de los ejemplos 7-1 y 7-2, pero ahora por el método de Shibata-Sozen. Los parámetros relevantes son: $\xi_s = 5\%$, y $A_{te} = 0.3g$.

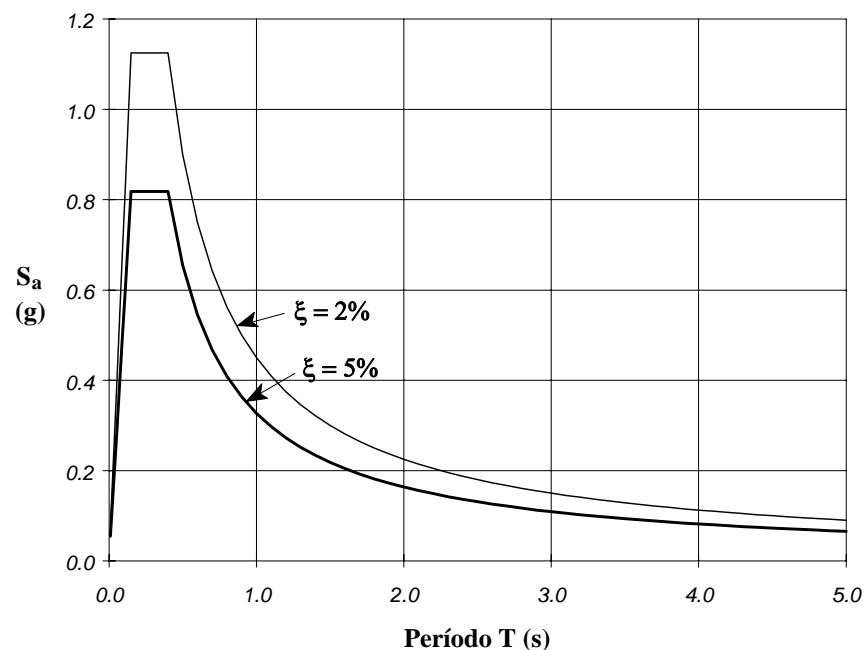


Figura 7-9 - Ejemplo 7-3 - Espectro elástico suavizado de diseño de Shibata-Sozen para $A_{te} = 0.3g$, $\xi = 2\%$ y $\xi = 5\%$

Primero se obtienen la constante de proporcionalidad para un amortiguamiento $\xi_s = 5\%$:

$$S_a(T, \xi = 0.05) = S_a(T, \xi = 0.02) \cdot \frac{8}{6 + 100 \cdot 0.05} = S_a(T, \xi = 0.02) \cdot 0.727$$

Por lo tanto las ordenadas del espectro para un amortiguamiento $\xi = 5\%$ son equivalentes al 72.7% de las del espectro con $\xi = 2\%$.

En la Figura 7-9 se ha dibujado el espectro para unos movimientos del terreno con $A_{te} = 0.3g$ y para $\xi = 2\%$, y $\xi = 5\%$.

■

7.3 — Espectros inelásticos de diseño

7.3.1 — Introducción

En la Sección 6.6 se discutió el efecto de la respuesta inelástica en las formas espectrales de sismos registrados en roca o suelo duro, y se explicó por qué, dependiendo del parámetro que se desee, se pueden encontrar espectros en donde se describen las aceleraciones máximas del sistema inelástico y se puede leer la componente elástica del desplazamiento, y espectros donde se pueden leer los desplazamientos totales del sistema, incluyendo la parte elástica e inelástica. Además se describió el tipo de disminución (deamplificación) de la respuesta en términos de aceleración y el aumento en la respuesta en términos de desplazamiento, dependiendo de la zona del espectro donde se encuentre el sistema. Además se profundizó en la diferencia en la respuesta para sistemas cuya rigidez permanece constante durante la respuesta inelástica, como la que se obtiene en sistemas elastoplásticos, y la de sistemas con rigidez degradante. Con base en las observaciones descritas allí, es posible, entonces, afectar un espectro elástico de diseño, para obtener un *espectro inelástico de diseño*.

Dado que hay diferencia para sistemas con rigidez inelástica constante y sistemas con rigidez inelástica degradante, la presentación sigue los mismos lineamientos, aunque se mantiene el orden histórico y se denominan con el nombre de los autores que desarrollaron la metodología. No obstante, existen otras maneras diferentes, pero en alguna medida soportadas sobre los mismos principios, para plantear y obtener un espectro inelástico que se deriva de un espectro elástico de diseño. Las personas interesadas en el tema, pueden consultar los trabajos de [MacGuire, 1974], [Mohraz, 1976], [Mohraz y Elghadamsi, 1989], [Lai y Biggs, 1980], y otros. Muy seguramente en la medida que se disponga de mejores metodologías numéricas e información experimental, es presumible que harán aparición métodos de evaluación de la respuesta inelástica de elementos estructurales, y estructuras en su totalidad.

7.3.2 — Método de Newmark-Hall

Si se dispone de un espectro elástico de diseño, de acuerdo con lo presentado en la Sección 6.6.1, se puede obtener el espectro elastoplástico de diseño aplicando los coeficientes de reducción y de amplificación presentados allí. En esto se basa la metodología de Newmark-Hall [Newmark y Hall, 1972] [Newmark y Hall, 1982], para obtener un espectro de diseño elastoplástico. El procedimiento consiste en afectar el espectro elástico de diseño, obtenido como se explicó en la Sección 7.2.2 y dibujado en papel tripartita, por medio de una demanda la ductilidad prefijada, μ , como se muestra en la Figura 7-16. Allí se ha marcado por medio de las líneas A_oAVD , el espectro elástico de diseño para un coeficiente de amortiguamiento dado. Los puntos donde se intersectan las líneas rectas del espectro elástico permanecen constantes al trazar los espectros inelásticos.

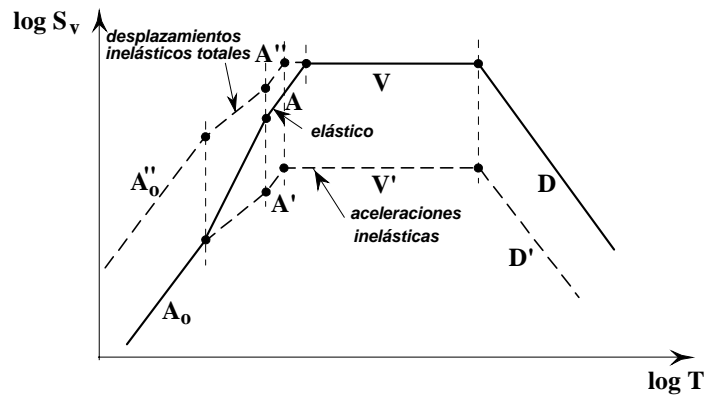


Figura 7-16 - Espectro inelástico

La línea punteada $A_0A''V''D''$ muestra el espectro inelástico de aceleraciones máximas, y la línea punteada $A_0A''VD$ el de desplazamientos totales. Los dos espectros inelásticos difieren en un valor constante igual a μ , pero A y A' difieren en $\sqrt{2\mu - 1}$. Los coeficientes a aplicar se resumen en la Tabla 7-5

Tabla 7-5 - Relaciones del espectro de diseño elastoplástico al espectro de diseño elástico, para diferentes regiones del espectro

Zona del espectro	Elastoplástico ÷ Elástico	
	Desplazamientos Totales	Aceleraciones
Fuerza o aceleración	$\frac{A''_0}{A_0} = \mu$	$\frac{A'_0}{A_0} = 1$
Energía o velocidad	$\frac{A''}{A} = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu - 1}}$	$\frac{A'}{A} = \frac{1}{\sqrt{2\mu - 1}}$
Desplazamiento	$\frac{D''}{D} = \frac{V''}{V} = 1$	$\frac{D'}{D} = \frac{V'}{V} = \frac{1}{\mu}$

Ejemplo 7-4

Se desea obtener el espectro inelástico de diseño para una demanda de ductilidad $\mu = 6$, para las mismas condiciones que se emplearon en el ejemplo 7-1 para sistemas con un coeficiente de amortiguamiento crítico, ξ_s del 5%, en un lugar en el cual se ha estimado que la máxima aceleración del terreno (A_{te}) para los movimientos sísmicos de diseño es de $0.3g$, la máxima velocidad del terreno (V_{te}) es de 0.20 m/s y el máximo desplazamiento del terreno (D_{te}) es de 0.30 m . Se desea un nivel de probabilidad de 84.1% de que no se excedan las ordenadas espectrales.

Primero se debe obtener el espectro elástico de diseño, lo cual se hizo en el ejemplo 7-1. Allí se encontró que:

$$\alpha_A A_{te} = 2.71 A_{te} = 0.81g$$

$$\alpha_V V_{te} = 2.30 V_{te} = 0.46 \text{ m/s}$$

$$\alpha_D D_{te} = 2.01 D_{te} = 0.60 \text{ m}$$

Ahora se calcula la afectación por el efecto inelástico:

$$\mu = 6 \Rightarrow \frac{A''_0}{A_0} = 6 \Rightarrow A''_0 = 0.3g \cdot 6 = 1.8g$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{6} = 0.167 \Rightarrow \frac{D'}{D} = \frac{V'}{V} = 0.167 \Rightarrow D' = 0.60 \cdot 0.167 = 0.10 \text{ m}$$

$$y \quad V' = 0.46 \cdot 0.167 = 0.077 \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu-1}} = \frac{1}{3.317} = 0.302 \Rightarrow \frac{A'}{A} = 0.302 \Rightarrow A' = 0.302 \cdot 0.81g = 0.245g$$

$$\frac{\mu}{\sqrt{2\mu-1}} = \frac{6}{3.317} = 1.81 \quad \frac{A''}{A} = 1.81 \Rightarrow A'' = 0.81g \cdot 1.81 = 1.47g$$

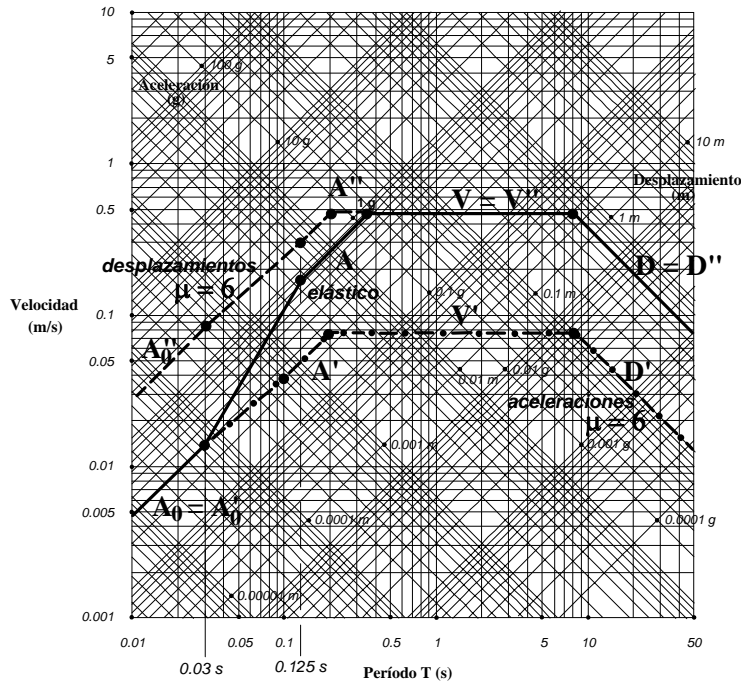


Figura 7-17 - Ejemplo 7-4 - Espectro inelástico de diseño para $\mu = 6$, sistemas elastoplásticos, método de Newmark-Hall, $\xi=5\%$

7.3.3 — Procedimiento de Riddell y Newmark

Con base en los resultados de la investigación sobre respuesta de sistemas elastoplásticos y de rigidez degradante presentado en la Sección 6.6.2, Riddell y Newmark [Riddell y Newmark, 1979] proponen una metodología para definir un espectro inelástico; para una demanda de ductilidad dada, μ . Por lo tanto, en el estudio se definieron coeficiente de deamplificación inelástica, $\phi\mu$, para sistemas inelásticos elastoplásticos, bilineales y de rigidez degradante. Debe recordarse (Sección 6.6.2), que estos coeficientes de deamplificación corresponden al inverso de los coeficientes de reducción de resistencia R_a , R_v y R_d , correspondientes a las zonas del espectro donde respectivamente la aceleración, o la velocidad, o el desplazamiento son aproximadamente constantes. Se encontró que estos coeficientes eran prácticamente independientes del nivel de probabilidad de excedencia de las ordenadas espectrales del espectro elástico, por lo tanto son aplicables, en teoría, a cualquier espectro elástico.

Para sistemas elastoplásticos se desarrollaron las siguientes expresiones para los coeficientes de reducción de resistencia, para valores de ξ entre 2% y 10%, y valores de μ entre 1.5 y 10:

para la región de desplazamiento aproximadamente constante,

$$R_d = \frac{0.87 (\xi\%)^{0.055}}{\mu^{1.07}} \quad (7-14)$$

para la región de velocidad aproximadamente constante,

$$R_v = (p_v\mu - q_v)^{r_v} \quad (7-15)$$

donde:

$$p_v = q_v + 1 \quad (7-16)$$

$$q_v = 2.7 (\xi \%)^{-0.4} \quad (7-17)$$

$$r_v = 0.66 (\xi \%)^{-0.04} \quad (7-18)$$

y para la región de aceleración aproximadamente constante,

$$R_a = (p_a \mu - q_a)^{r_a} \quad (7-19)$$

donde:

$$p_a = q_a + 1 \quad (7-20)$$

$$q_a = 3.0 (\xi \%)^{-0.3} \quad (7-21)$$

$$r_a = 0.48 (\xi \%)^{-0.08} \quad (7-22)$$

Para sistemas con rigidez degradante no se desarrollaron expresiones como las anteriores, pero en la Tabla 7-6 se presentan los valores obtenidos, para diferentes valores de demanda de ductilidad, μ , y para un coeficiente de amortiguamiento crítico $\xi = 5\%$. No obstante Riddell y Newmark demostraron que para los casos estudiados, la respuesta elastoplástica era conservadora al compararla con la respuesta para rigidez degradante, por lo tanto se pueden utilizar los valores para sistemas elastoplásticos en la gran mayoría de los casos prácticos.

Tabla 7-6 - Valores de R_a , R_v , y R_d para sistemas con rigidez degradante y $\xi = 5\%$

Ductilidad	Región espectral		
	Aceleración R_a	Velocidad R_v	Desplazamiento R_d
1.0	1.00	1.00	1.00
1.5	1.49	1.65	1.68
2.0	1.85	2.32	2.38
3.0	2.28	3.44	3.73
5.0	2.86	5.08	6.62
10.0	3.75	8.33	14.3

El procedimiento sugerido por Riddell y Newmark es el siguiente. Partiendo de un espectro elástico, como puede ser el de Newmark-Hall, en la zona de períodos cortos, menores de 0.03 s se sugiere tomarla igual a A_{pe} . En caso de que se deseen hacer ajustes en esta zona, puede consultarse lo indicado al respecto en la Sección 6.6.2. En la zona central del espectro, entre períodos del orden de 0.125 s y 10 s se tiene amplificación de la aceleración, luego de la velocidad y por último del desplazamiento. En la zona cercana a períodos del orden de 0.125 s, se tiene amplificación de la aceleración. Allí se toma la aceleración del espectro elástico y se divide por el R_a correspondiente a la demanda de ductilidad μ , deseada. En la zona central se reduce la velocidad del espectro elástico, dividiéndola por R_v ; y en la zona anterior al período de 10 s se tiene amplificación del desplazamiento, allí se divide el desplazamiento del espectro elástico por R_d . Las intersecciones entre estas líneas definen el espectro en la zona central. En la zona de períodos largos, más de 33 s, se obtiene dividiendo la ordenada de desplazamiento del espectro elástico por el valor de la demanda de ductilidad μ . Una vez se tiene dibujada esta zona se procede a dibujar las zonas de transición. La de períodos cortos se dibuja entre los períodos de 0.03 s y 0.125 s, y la de períodos largos, entre 10 s y 33 s.

Ejemplo 7-5

Se desea obtener el espectro inelástico de diseño utilizando el procedimiento de Riddell y Newmark para sistemas con rigidez degradante, para una demanda de ductilidad $\mu = 5$, y para las mismas condiciones que se emplearon en el ejemplo 7-1 para sistemas con un coeficiente de amortiguamiento

crítico, ξ , del 5%, en un lugar en el cual se ha estimado que la máxima aceleración del terreno (A_{te}) para los movimientos sísmicos de diseño es de 0.3g, la máxima velocidad del terreno (V_{te}) es de 0.20 m/s y el máximo desplazamiento del terreno (D_{te}) es de 0.30 m. Se desea un nivel de probabilidad del 84.1% de que no se excedan las ordenadas espectrales.

En el ejemplo 7-1 se obtuvieron los siguientes valores para las ordenadas del espectro elástico en las zonas de amplificación de aceleración, velocidad y desplazamiento, respectivamente:

$$A = 2.71 A_{te} = 0.81g, V = 2.30 V_{te} = 0.46 \text{ m/s, y } D = 2.01 D_{te} = 0.60 \text{ m}$$

Los valores de los coeficientes de reducción de resistencia, compatibles con la demanda de ductilidad $\mu = 5$, se obtienen de la Tabla 7-6, como: $R_a = 2.86$, $R_v = 5.08$ y $R_d = 6.62$. Aplicando estos coeficientes se obtienen:

$$A_m = A / R_a = 0.81 / 2.86 = 0.283 g$$

$$V_m = V / R_v = 0.46 / 5.08 = 0.091 \text{ m/s}$$

$$D_m = D / R_d = 0.60 / 6.62 = 0.091 \text{ m}$$

Para períodos mayores de 33 s, $D_m = D/\mu = 0.60 / 5 = 0.12 \text{ m}$

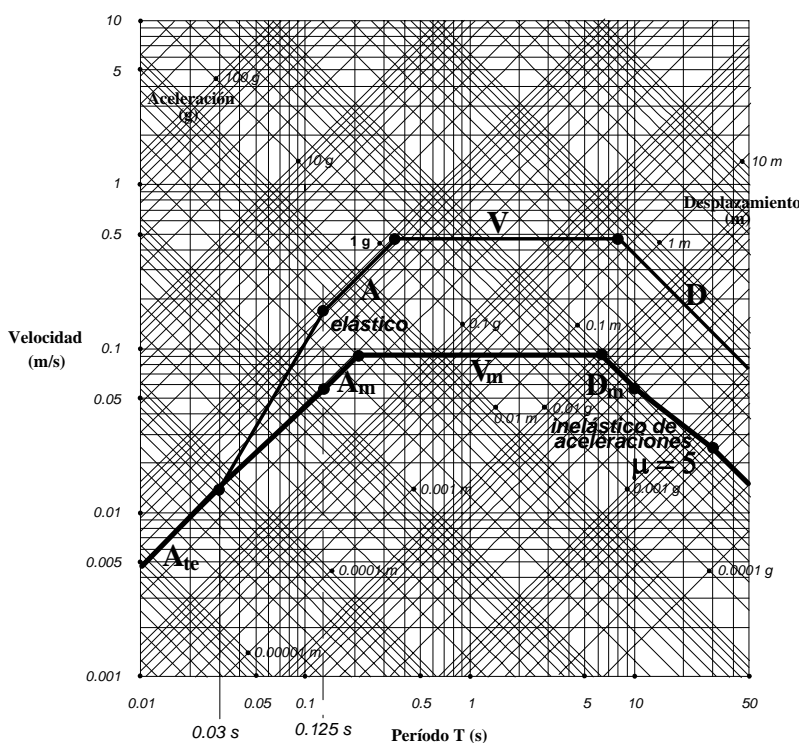


Figura 7-18 - Ejemplo 7-5 - Espectro inelástico de diseño para $\mu = 5$, sistemas elastoplásticos, método de Riddell y Newmark, $\xi=5\%$

7.3.4 — Procedimiento de Shibata-Sozen

Con base en las investigaciones de Shibata y Sozen [Shibata y Sozen, 1976] como se indicó en la Sección 6.5, es posible dibujar un espectro inelástico de aceleraciones. Se toma como base un espectro elástico como se indicó en la Sección 7.2.4. Luego se dibuja un espectro de aceleraciones no lineal que tome en cuenta el comportamiento histerético del sistema de concreto reforzado utilizando un amortiguamiento sustituto utilizando la ecuación (6-14). El procedimiento es el siguiente: se define un nivel de amortiguamiento sustituto correspondiente al coeficiente de daño seleccionado, μ , por medio de la ecuación (6-14), la cual se reproduce aquí por comodidad como la ecuación (7-23).

$$\xi_s = 0.2 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \right\} + 0.02 \quad (7-23)$$

La reducción en el espectro, con respecto al espectro elástico dibujado para un amortiguamiento de 2% del crítico, debida a este amortiguamiento sustituto se puede calcular utilizando la ecuación (7-13), la cual se reproduce aquí por comodidad como la ecuación (7-24):

$$S_a(T, \xi) = S_a(T, \xi = 0.02) \cdot \frac{8}{6 + 100\xi} \quad (7-24)$$

El espectro que describe corresponde al espectro inelástico deseado. Debe tenerse en cuenta que para entrar al espectro se debe emplear la rigidez sustituto definida por la ecuación (6-13), que se reproduce aquí como (7-25):

$$(EI)_s = \frac{(EI)_r}{\mu} \quad (7-25)$$

Ejemplo 7-6

Se desea obtener el espectro inelástico de diseño utilizando el procedimiento inelástico de Shibata-Sozen para una aceleración máxima del terreno, $A_{te} = 0.4g$ y un coeficiente de daño, $\mu = 4$ y un coeficiente de amortiguamiento crítico, $\xi = 2\%$.

Primero se dibuja el espectro elástico de Shibata-Sozen para $\xi = 2\%$. En la zona de períodos cortos, menores de 0.15 s este espectro está regido por (véase la Sección 7.2.4):

$$S_a(\xi = 2\%) = 25 A_{te} T = 10 T \quad g$$

Para períodos entre 0.15 s y 0.4 s, está regido por:

$$S_a(\xi = 2\%) = 3.75 A_{te} = 1.5 \quad g$$

y para períodos mayores de 0.4 s:

$$S_a(\xi = 2\%) = \frac{1.5 A_{te}}{T} = \frac{0.6}{T} \quad g$$

El espectro inelástico se obtiene aplicando el amortiguamiento sustituto al espectro elástico. El amortiguamiento sustituto para $\mu = 4$ es:

$$\xi_s = 0.2 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \right\} + 0.02 = 0.2 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} \right\} + 0.02 = 0.12$$

y este amortiguamiento sustituto implica una reducción en el espectro elástico con $\xi = 2\%$ de:

$$S_a(T, \xi = 12\%) = S_a(T, \xi = 0.02) \cdot \frac{8}{6 + 100 \cdot 0.12} = S_a(T, \xi = 0.02) \cdot 0.444$$

En la Figura 7-19 se muestran tanto el espectro elástico como el inelástico. No sobra insistir que para entrar a este espectro debe utilizarse el período de vibración correspondiente a la rigidez sustituto. En este caso una rigidez reducida al 25% ($1/\mu = 1/4 = 0.25$) de la rigidez original elástica. Dado que el período está definido por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

el período sustituto, con el que se entra al espectro inelástico es:

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_s}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{0.25k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{0.25}} = T \cdot 2$$

por lo tanto en el espectro inelástico de Shibata- Sozen se debe emplear el período de vibración de la estructura sustituto, que para un factor de daño, $\mu = 4$, corresponde al doble del período de vibración de la estructura elástica original.

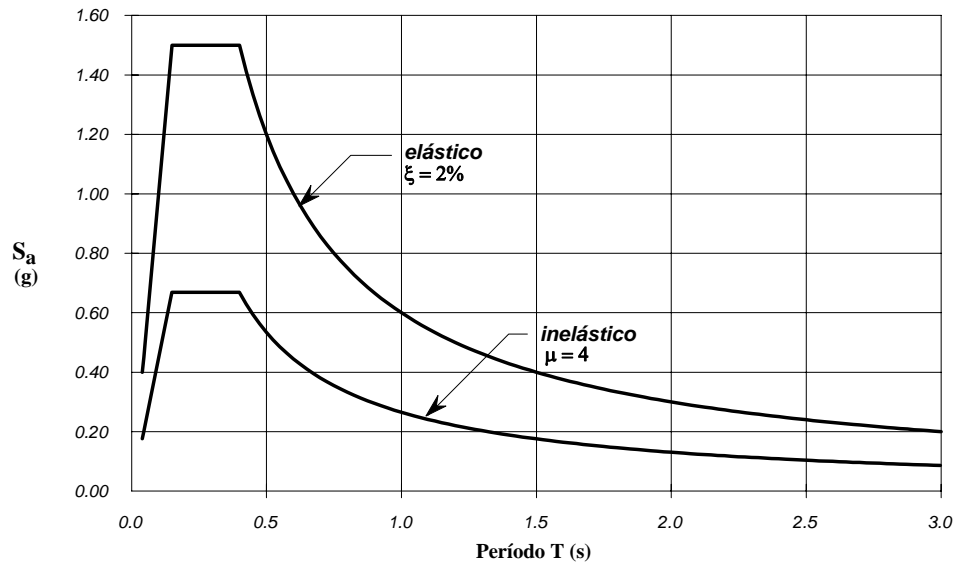


Figura 7-19 - Ejemplo 7-6 - Espectro inelástico de diseño de Shibata-Sozen para A_{te} de 0.4g y para un factor de daño $\mu = 4$.

7.4 — Efecto en la forma del espectro de la magnitud, distancia, duración y tipo de suelo en el sitio

Como se ha visto en la presentación anterior, la forma espectral de diseño se ha derivado del estudio de acelerogramas reales obtenidos durante sismos fuertes. No obstante, en el momento que el espectro hace tránsito de un espectro de respuesta a un espectro de diseño, obviamente surgen las dudas de cómo manejar, en el de diseño, variables que por el hecho de tratarse de acelerogramas van incluidas dentro de ellos, e inhiben su estudio como una variable independiente. Dentro de estas variables se cuentan, entre otras, la magnitud del sismo, la distancia a la falla que lo causa, su duración, y tal vez, la que puede llevar a diferencias mayores entre lo que se estima y la realidad: el efecto de las condiciones locales del suelo en el sitio de interés. A continuación se tratan, de una manera resumida, los efectos de estas variables.

7.4.1 — Efecto de la magnitud y la distancia a la falla

La magnitud es una medida de la energía que libera súbitamente la corteza terrestre en el momento en que se presenta el sismo, como se indicó en la Sección 4.5.2. La forma como se libera esta energía es compleja y lo poco que se conoce en la actualidad se agrupa dentro de los que se llama *efectos de campo cercano*. En la medida que han ocurrido sismos fuertes en zonas urbanas con densidad importante de instrumentación, como han sido los sismos de Northridge en enero de 1994 y de Kobe en enero de 1995, se ha incrementado el conocimiento sobre estos efectos de campo cercano, de una manera notoria. La influencia, entonces, de la cantidad de energía que se libera, y la distancia de un

observador a este punto de liberación, juegan un papel muy importante dentro de los aspectos que se deben tener en cuenta al plantear un espectro de diseño.

Indudablemente, en la misma metodología de formulación del espectro de diseño se toman en cuenta estos efectos dado que los movimientos máximos del terreno, A_{te} , V_{te} y D_{te} , se estiman para un sitio en particular, teniendo en cuenta la distancia y la magnitud, a través de los efectos de atenuación que se describen por medio de las ecuaciones de atenuación presentadas en la Sección 4.8.5. Desafortunadamente, estas ecuaciones no describen la variación en el contenido frecuencial de las ondas del sismo, ni el efecto que ésta tiene en la forma del espectro, sino de una manera indirecta por medio del efecto de cada uno de los parámetros máximos del terreno en su correspondiente zona de influencia en el espectro.

Desde el punto de vista cualitativo, la magnitud, que es una medida de la energía que se libera en la fuente, afecta directamente la amplitud de las ondas sísmicas, por lo tanto a mayor magnitud en la fuente se presentan proporcionalmente mayores aceleraciones. En la medida que las ondas sísmicas viajan, los registros que se obtienen van a presentar en sus espectros un decrecimiento en la región de períodos cortos, lo cual se manifiesta en un corrimiento del pico del espectro hacia la derecha, o sea hacia la zona de períodos largos. Mirado desde el punto de vista de las tres regiones del espectro, puede decirse que, en la medida que el registro se obtenga a mayor distancia, la zona de mayores valores dentro del espectro pasa de la zona con aceleraciones aproximadamente constantes, a la región con velocidades aproximadamente constantes y posteriormente a la zona con desplazamientos aproximadamente constantes.

7.4.2 — Efecto de la duración del sismo

Desde hace tiempo se sabe que dos movimientos sísmicos con espectros similares pero duraciones diferentes, causan diferentes niveles de daño a las edificaciones, siendo menor el daño para los movimientos sísmicos de menor duración. Especialmente, hay muchos casos en los cuales movimientos sísmicos de corta duración, aún con aceleraciones muy altas, causan muy poco daño. Esto indica que el espectro no necesariamente describe todos los parámetros relevantes del movimiento sísmico. Entre mayor sea el período de vibración de la estructura, se necesita una mayor duración para llegar a la máxima respuesta. Esto se manifiesta en el hecho de que entre más grande sea la duración del acelerograma, mayor es la probabilidad de que contenga ondas de períodos intermedios y largos. En la actualidad no existe una manera establecida para definir el efecto de la duración del sismo dentro del espectro de diseño, más allá de correcciones totalmente cualitativas que se deben manejar con el mayor criterio. En general lo anterior indica que en caso de duda al respecto, debe en alguna medida incrementarse el grado de conservatismo en la zona de períodos largos del espectro. En la referencia [Peng et al., 1989] se discuten los efectos de la duración del sismo en los espectros de diseño, y su relación con los otros parámetros de construcción del espectro.

7.4.3 — Efecto de las condiciones geotécnicas locales

A pesar de que desde tiempos de los romanos se sabía que el daño producido por los sismos se incrementaba en las zonas de suelos blandos y pantanosos, sólo hasta tiempos relativamente recientes la importancia de los efectos locales ha adquirido la trascendencia que amerita. La primera gran evidencia interpretada científicamente de que las características locales habían jugado un papel muy importante en la concentración de daño observada, se tuvo con el temblor de Caracas en 1967. Posteriormente, puede afirmarse, que prácticamente no ha habido un sismo fuerte en el cual deje de presentarse algún tipo de manifestación al respecto. Tal vez la mayor evidencia de la importancia, y gravedad, de este fenómeno se presentó con el sismo de Ciudad de México de 1985, en el cual se evidenció una correlación directa entre el daño observado y las características del suelo en el lugar. La Figura 7-22 muestra esquemáticamente la problemática asociada con el fenómeno. En el sitio A, cercano a la falla que causa el sismo, se obtienen un registro en roca que tiene un alto contenido de períodos cortos, y altas aceleraciones en esa franja del espectro. Las ondas viajan por la corteza terrestre, donde sufren reflexiones y refracciones. A alguna distancia, sitio B, la amplitud de las ondas se ha atenuado, lo cual se manifiesta en una reducción de las aceleraciones, y el contenido frecuencial del sismo ha variado, pues se ha perdido parte de las ondas, especialmente en la zona de períodos cortos del espectro. Al viajar las ondas a través de suelos blandos y profundos, desde el sitio B hasta la superficie, C, las ondas se amplifican, especialmente en la zona de períodos largos.

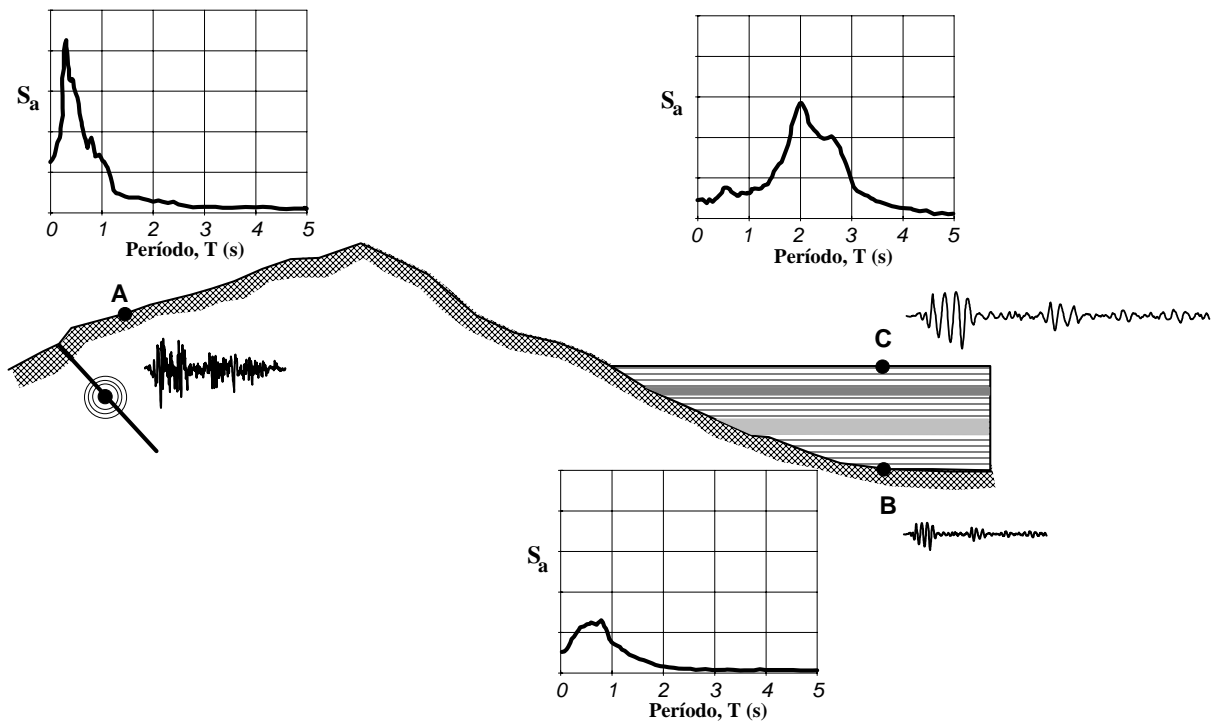


Figura 7-22 - Efecto de las condiciones geotécnicas locales

Los avances que han ocurrido, y están ocurriendo permanentemente, acerca de los criterios que deben emplearse para tener en cuenta estos efectos dentro de un espectro de diseño, indican que con un tratamiento cuidadoso de las diferentes variables que intervienen es posible, hoy en día, definir las regiones del espectro que se ven afectadas y el orden de magnitud de estas afectaciones. Con base en los estudios elaborados bajo la dirección de H. B. Seed, presentados en las referencias [Seed, Ugas y Lysmer, 1976] y [Seed y Idriss, 1982], de los cuales hace parte la Figura 7-23 fue posible identificar la influencia que tiene en el espectro el tipo de suelo subyacente. En este caso se muestra el efecto en la forma espectral de diferentes tipos de suelo.

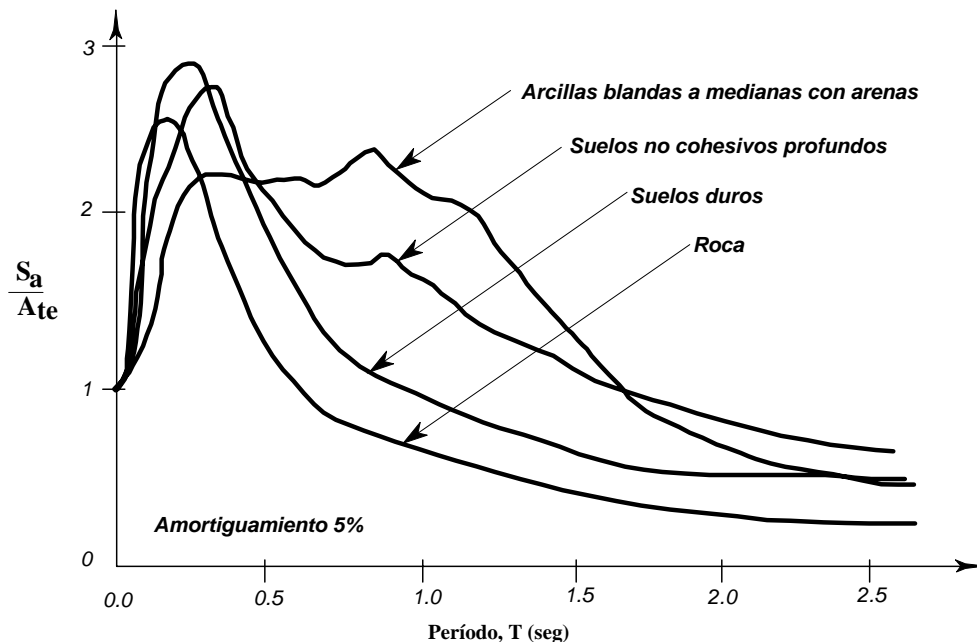


Figura 7-23 - Espectro promedio de aceleraciones para diferentes condiciones de suelo

La Figura 7-23 muestra que para períodos mayores que aproximadamente 0.4-0.5 s, las ordenadas espectrales para los registros obtenidos en roca son substancialmente menores que aquellas registradas en suelos con estratificaciones que contienen arcillas blandas y de dureza media, o depósitos aluviales profundos de suelos no cohesivos. Las curvas mostradas corresponden a espectros normalizados a la aceleración máxima del terreno y promediados estadísticamente en cada ordenada espectral. En el caso de suelos compuestos por arcillas de dureza mediana a blanda se utilizaron 15 registros, de los suelos no cohesivos en estratos profundos se utilizaron 30 registros, de suelos duros 31 registros y en roca 28 registros.

Procedimiento del NEHRP-94 y del UBC-97

Gracias a los numerosos registros que se obtuvieron durante el sismo de Loma Prieta de Octubre de 1989, fue posible reevaluar los efectos de sitio a la luz de información acelerográfica real. Esta información sumada a la de otros sismos, inclusive evaluaciones más profundas sobre el sismo de México de 1985, llevaron, alrededor del año 1992, a que se propusiera una clasificación mucho más detallada, y a su vez basada en información más fidedigna [Borcherdt, 1994], [Whitman, 1992]. Esta clasificación fue plasmada en la versión de 1994 de las recomendaciones de NEHRP [FEMA, 1994b] y fue adoptada por el UBC-97 [ICBO, 1997] y por las nuevas normas sísmicas colombianas, NSR-98 [AIS, 1998], como procedimiento alterno. A gran diferencia de todas las anteriores, estas nuevas recomendaciones dan coeficientes de amplificación para la zona de períodos cortos del espectro, además de las recomendaciones para períodos largos. El espectro en roca está definido en función de dos parámetros, A_a y A_v , los cuales provienen del ATC 3, como se explica más adelante, en la Sección 7.7.2.

El procedimiento prescribe dos factores de amplificación del espectro por efectos de sitio, F_a y F_v , los cuales afectan la zona del espectro definida por A_a y A_v , respectivamente. En principio la metodología es aplicable a períodos de vibración que estén dentro del rango de 0.2 a 3.0 s. Explícitamente se indica que no debe utilizarse para períodos en entre 0 y 0.2 s. El método define los cinco tipos de perfil de suelo presentados en la Tabla 7-7. Los parámetros utilizados en la clasificación son los correspondientes a los 30 m superiores del perfil. Aquellos perfiles que tengan estratos claramente diferenciados deben subdividirse, asignándoles un subíndice i que va desde 1 en la superficie, hasta n en la parte inferior de los 30 m superiores del perfil. Los parámetros se definen así:

Para la velocidad de la onda de cortante en el perfil:

$$\bar{v}_s = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{v_{si}}} \quad (7-26)$$

donde:

v_{si} = velocidad de la onda de cortante del suelo del estrato i , en m/s

d_i = espesor del estrato i , localizado dentro de los 30 m superiores del perfil

$\sum_{i=1}^n d_i$ = 30 m siempre

Para el número medio de golpes del ensayo de penetración estándar:

$$\bar{N} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{N_i}} \quad (7-27)$$

donde:

N_i = número de golpes por pie obtenidos en el ensayo de penetración estándar, realizado in situ de acuerdo con la norma ASTM D1586-84, sin hacerle corrección alguna. El valor de N_i a emplear para obtener el valor medio, no debe exceder 100.

En los estratos de suelos no cohesivos localizados en los 30 m superiores del perfil debe emplearse, la siguiente relación, la cual se aplica únicamente a los **m** estratos de suelos no cohesivos:

$$\bar{N}_{ch} = \frac{d_s}{\sum_{i=1}^m \frac{d_i}{N_i}} \quad (7-28)$$

donde:

d_s = es la suma de los espesores de los **m** estratos de suelos no cohesivos localizados dentro de los 30 m superiores del perfil.

Para la resistencia al corte obtenida del ensayo no drenado en los estratos de suelos cohesivos localizados en los 30 m superiores del perfil debe emplearse, la siguiente relación, la cual se aplica únicamente a los **k** estratos de suelos cohesivos:

$$\bar{s}_u = \frac{d_c}{\sum_{i=1}^k \frac{d_i}{s_{ui}}} \quad (7-29)$$

donde:

d_c = es la suma de los espesores de los **k** estratos de suelos cohesivos localizados dentro de los 30 m superiores del perfil.

s_{ui} = es la resistencia al corte no drenado en kPa del estrato **i**, la cual no debe exceder 250 kPa (2.5 kgf/cm²) para realizar el promedio ponderado. Esta resistencia se mide cumpliendo la norma ASTM D 2166-91 o la norma ASTM D2850-87.

Además se emplea el Índice de Plasticidad (**IP**), el cual se obtienen cumpliendo la norma ASTM D4318-93, y el contenido de humedad en porcentaje, **w**, el cual se determina por medio de la norma ASTM D2216-92. El procedimiento para definir el perfil es el siguiente:

1. Deben primero verificarse las categorías de suelo tipo **F**. Si el suelo cae dentro de la clasificación de suelo tipo **F**, debe realizarse una clasificación en el sitio, por parte de un ingeniero geotecnista.
2. Debe verificarse la existencia de un espesor total de estratos de arcilla blanda. La arcilla blanda se define como aquella que tiene una resistencia al corte no drenado menor de 25 kPa (0.25 kgf/cm²), un contenido de humedad, **w**, mayor del 40%, y un índice de plasticidad, **IP**, mayor de 20. Si hay un espesor total de 3 m o más de estratos de arcilla que cumplan estas condiciones el perfil se clasifica como tipo **E**.
3. Utilizando uno de los tres criterios: \bar{v}_s , \bar{N} , o \bar{s}_u , se clasifica el perfil. En caso de que se utilice el criterio basado en \bar{s}_u y el criterio \bar{N}_{ch} indica otro perfil, en ese caso se debe utilizar el perfil de suelos más blandos, por ejemplo asignando un perfil tipo **E** en vez de tipo **D**. En la Tabla 7-8 se resumen los tres criterios para clasificar suelos tipo C, D o E. Los tres criterios se aplican así:

(a) \bar{v}_s en los 30 m superiores del perfil,

(b) \bar{N} en los 30 m superiores del perfil, o

(c) \bar{N}_{ch} para los estratos de suelos existentes en los 30 m superiores que se clasifican como no cohesivos cuando **IP** < 20, o el promedio ponderado \bar{s}_u en los estratos de suelos cohesivos existentes en los 30 m superiores del perfil, que tienen **IP** > 20.

Tabla 7-7 Clasificación de los perfiles de suelo (NEHRP-94, UBC-97 y procedimiento alternativo de NSR-98)

Tipo de perfil	Descripción	Definición
A	Perfil de roca competente	$\bar{v}_s > 1500 \text{ m/s}$
B	Perfil de roca de cualquier espesor	$1500 \text{ m/s} > \bar{v}_s > 760 \text{ m/s}$
C	Perfiles de suelos muy densos o roca blanda, de cualquier espesor que cumpla con el criterio de velocidad de la onda de cortante	$760 \text{ m/s} > \bar{v}_s > 360 \text{ m/s}$
	Perfiles de suelos muy densos o roca blanda, de cualquier espesor que cumpla con cualquiera de los dos criterios	$\bar{N} > 50$, o $\bar{s}_u > 100 \text{ kPa} (\approx 1 \text{ kgf/cm}^2)$
D	Perfiles de suelos rígidos de cualquier espesor que cumpla con el criterio de velocidad de la onda de cortante, o	$360 \text{ m/s} > \bar{v}_s > 180 \text{ m/s}$
	perfiles de suelos rígidos de cualquier espesor que cumpla cualquiera de las dos condiciones	$50 > \bar{N} > 15$, o $100 \text{ kPa} (\approx 1 \text{ kgf/cm}^2) > \bar{s}_u > 50 \text{ kPa} (\approx 0.5 \text{ kgf/cm}^2)$
E	Perfil de cualquier espesor que cumpla el criterio de velocidad de la onda de cortante, o	$180 \text{ m/s} > \bar{v}_s$
	perfil que contiene un espesor total H mayor de 3m de arcillas blandas	$IP > 20$ $w \geq 40\%$ $25 \text{ kPa} (\approx 0.25 \text{ kgf/cm}^2) > \bar{s}_u$
F	<p>Los suelos tipo F requieren una evaluación realizada explícitamente en el sitio por un ingeniero geotecnista. Se contemplan las siguientes subclases.</p> <p>F₁ - Suelos vulnerables a la falla o colapso causado por la excitación sísmica, tales como: suelos licuables, arcillas sensitivas, suelos dispersivos o débilmente cementados, etc.</p> <p>F₂ - Turba y arcillas orgánicas y muy orgánicas (H > 3 m para turba o arcillas orgánicas y muy orgánicas).</p> <p>F₃ - Arcillas de muy alta plasticidad (H > 7.5 m con Índice de Plasticidad IP > 75)</p> <p>F₄ - Perfiles de gran espesor de arcillas de rigidez mediana a blanda (H > 36 m)</p>	

Tabla 7-8 - Criterios para clasificar suelos dentro de los tipos C, D o E (NEHRP-94, UBC-97 y procedimiento alternativo de las NSR-98)

Tipo de perfil	\bar{v}_s	\bar{N} o \bar{N}_{ch}	\bar{s}_u
C	entre 360 y 760 m/s	mayor que 50	mayor que 100 kPa ($\approx 1 \text{ kgf/cm}^2$)
D	entre 180 y 360 m/s	entre 15 y 50	entre 100 y 50 kPa (0.5 a 1 kgf/cm ²)
E	menor de 180 m/s	menor de 15	menor de 50 kPa ($\approx 0.5 \text{ kgf/cm}^2$)

En la Tabla 7-9 se dan los valores de del coeficiente **F_a** que amplifica las ordenadas del espectro en roca para tener en cuenta los efectos de sitio en el rango de períodos cortos del orden de 0.3 s, como muestra la Figura 7-24.

Tabla 7-9 - Valores del coeficiente F_a , para la zona de periodos cortos del espectro (NEHRP-94)

Tipo de perfil	Intensidad de los movimientos sísmicos				
	$A_a \leq 0.1$	$A_a = 0.2$	$A_a = 0.3$	$A_a = 0.4$	$A_a \geq 0.5$
A	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
B	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
C	1.2	1.2	1.1	1.0	1.0
D	1.6	1.4	1.2	1.1	1.1
E	2.5	1.7	1.2	0.9	nota
F	nota	nota	nota	nota	nota

nota: debe realizarse una investigación geotécnica para el lugar específico y debe llevarse a cabo un análisis de amplificación de onda.

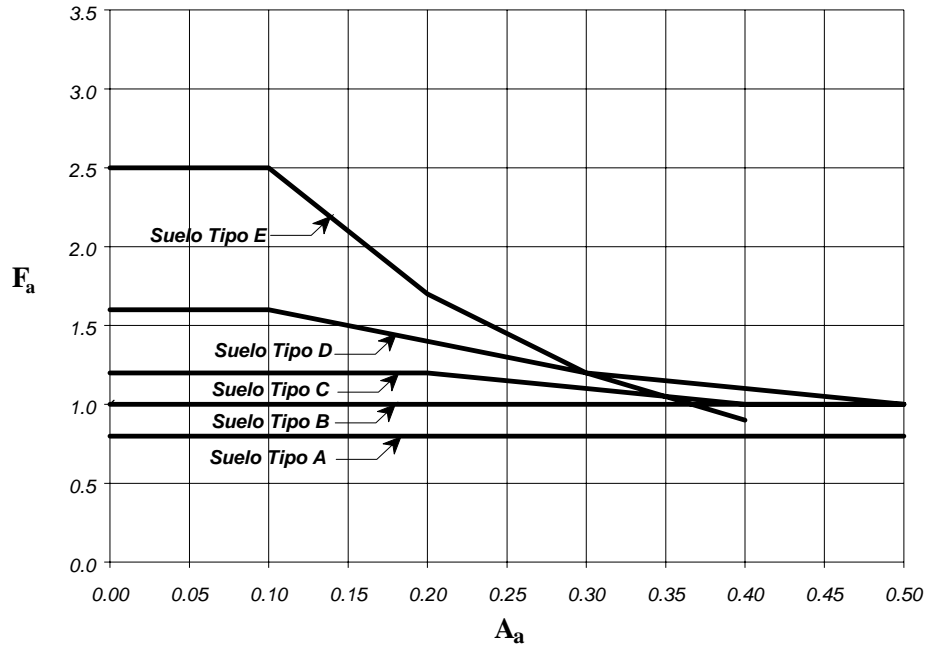


Figura 7-24 - Coeficiente de amplificación F_a del suelo para la zona de periodos cortos del espectro (NEHRP-94)

En la Tabla 7-10 se dan los valores de del coeficiente F_v que amplifica las ordenadas del espectro en roca para tener en cuenta los efectos de sitio en el rango de periodos intermedios del orden de 1 s. Estos coeficientes se presentan también en la Figura 7-25.

Tabla 7-10 - Valores del coeficiente F_v , para la zona de periodos largos del espectro (NEHRP-94)

Tipo de perfil	Intensidad de los movimientos sísmicos				
	$A_v \leq 0.1$	$A_v = 0.2$	$A_v = 0.3$	$A_v = 0.4$	$A_v \geq 0.5$
A	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
B	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
C	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3
D	2.4	2.0	1.8	1.6	1.5
E	3.5	3.2	2.8	2.4	nota
F	nota	nota	nota	nota	nota

nota: debe realizarse una investigación geotécnica para el lugar específico y debe llevarse a cabo un análisis de amplificación de onda.

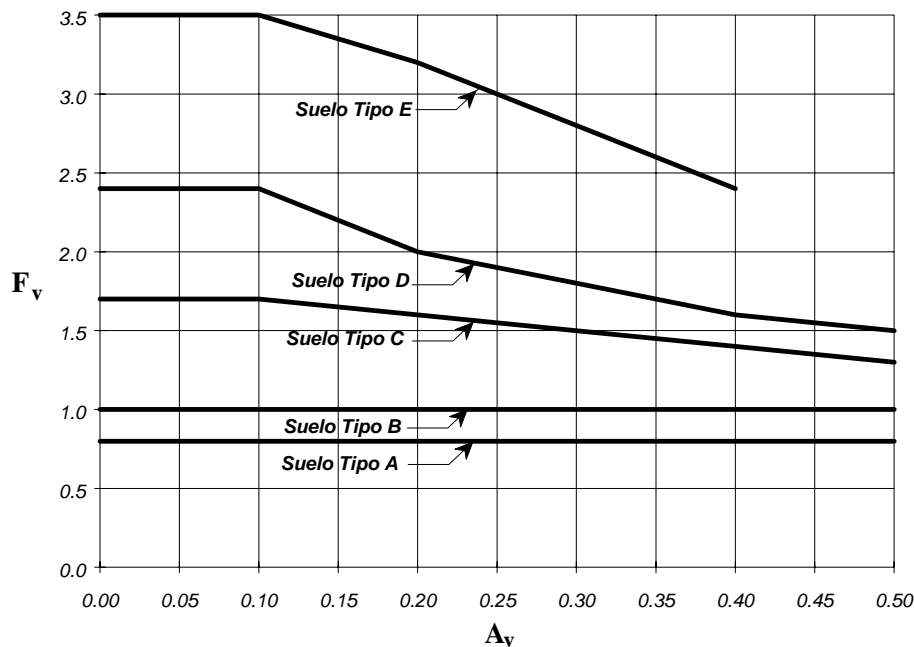


Figura 7-25 - Coeficiente de amplificación F_v del suelo para la zona de períodos intermedios del espectro (NEHRP-94)

Estos valores son mayores que los que se han tenido tradicionalmente en los códigos sísmicos. Es evidente, al hacer un seguimiento histórico de los valores contenidos en los códigos, que éstos han venido en aumento en la medida que han ocurrido sismos que han resaltado condiciones locales no sospechadas, o amplificaciones de onda que excedieron las expectativas más conservadoras que se tenían. Indudablemente este refinamiento de las recomendaciones para tomar en cuenta los efectos de sitio ha sido, también, consecuencia de un avance importante en las metodologías analíticas y experimentales empleadas.

7.5 — Estudios de amplificación de onda

En muchos casos, para obras importantes de infraestructura, edificios altos, y otros casos, se desea tener una idea muy detallada de los posibles efectos de amplificación que puedan presentarse en el sitio para el sismo de diseño. En estos casos se realiza un estudio de amplificación de onda. Este tipo de estudios hace parte, también, de los estudios de microzonificación, donde se agrupan en microzonas sectores de una población donde los efectos de amplificación estimados son similares.

El proceso de propagación del tren ondulatorio generado por el sismo, a través de los estratos de suelo, es complejo y para efectos de la presentación solo se mencionarán los aspectos más importantes. Quien desee profundizar en el tema debe dirigirse a publicaciones especializadas sobre el tema tales como [Seed, Ugas y Lysmer, 1976], [Seed y Iddris, 1982], [Zeevaert, 1983], [Dobry y Vucetic, 1987], [Whitman, 1992], [Sarria, 1995b] entre otras.

El tren ondulatorio se propaga en dirección vertical con una velocidad igual a la velocidad de la onda de cortante, v_s [ASCE, 1985]. La velocidad de la onda de cortante se obtiene de la relación:

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (7-30)$$

donde G es el módulo dinámico de cortante y ρ es la densidad de masa del suelo. Dado el rango relativamente pequeño de variación de la densidad de masa de los suelos conduce a que la variable que más afecta el valor de la velocidad de la onda de cortante sea el módulo dinámico de cortante G . Sin embargo, el valor de G depende del nivel de deformación, pues la relación entre esfuerzos cortantes, τ , y deformación angular, γ , del suelo no es lineal, como muestra la Figura 7-26(b). Además cuando el suelo se somete a esfuerzos de cortante cíclicos, se presenta un fenómeno histerético muy similar a los

presentados en el Capítulo 6. Además haciendo referencia a lo presentado allí, puede observarse que un modelo de Ramberg-Osgood describe bastante bien el proceso histerético.

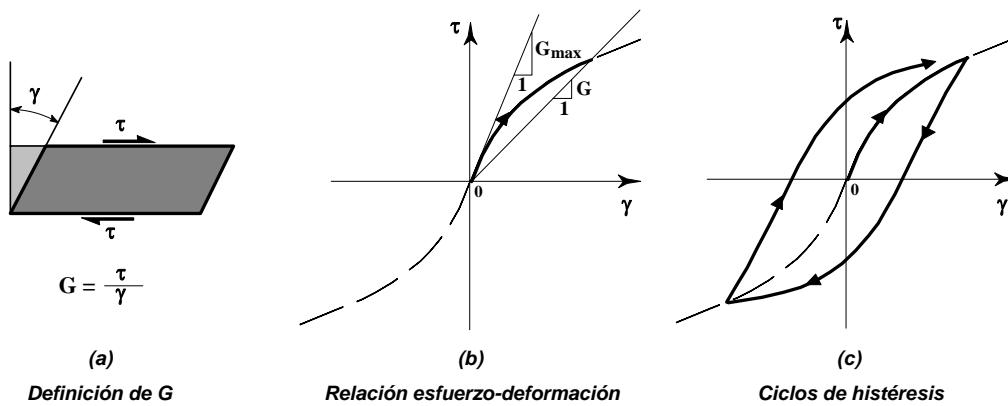


Figura 7-26 - Deformación del suelo ante esfuerzos cortantes

El amortiguamiento que se produce durante la respuesta dinámica del suelo, está asociado, lo mismo que para otros materiales, con el área dentro de los ciclos de histéresis.

El módulo secante a valores bajos de deformación, G_{\max} , corresponde al valor del módulo de cortante que define la velocidad de la onda de cortante v_s , dado que las mediciones que se hacen de esta velocidad en el sitio por métodos geofísicos, siempre corresponden al rango de deformaciones pequeñas.

Cuando el suelo se deforma en cortante más allá de este rango de deformaciones pequeñas, se presenta el fenómeno de histéresis, entrando en juego el módulo de cortante G para este nivel de deformación, γ . La energía que se disipa por ciclo ΔE , por unidad de volumen, puede relacionarse con un coeficiente de amortiguamiento viscoso λ , por medio de la relación:

$$\lambda = \frac{\Delta E}{2\pi G \gamma^2} \quad (7-31)$$

Por medio de ensayos de laboratorio es posible establecer relaciones entre G/G_{\max} y el nivel de deformación, γ , y entre el coeficiente de amortiguamiento, λ , y el nivel de deformación, γ , como se muestra esquemáticamente en las Figuras 7-27 y 7-28.

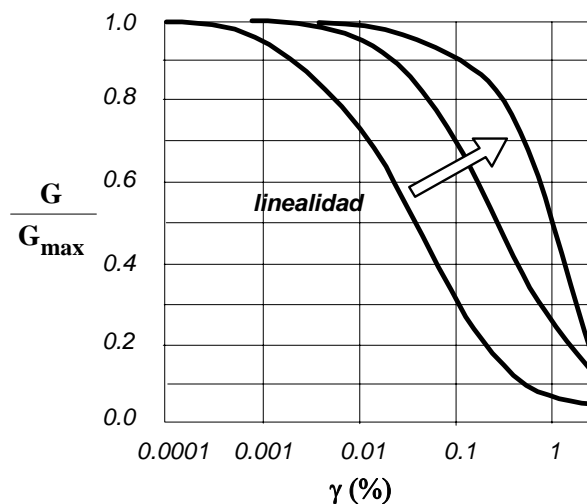


Figura 7-27 - Relación entre módulos

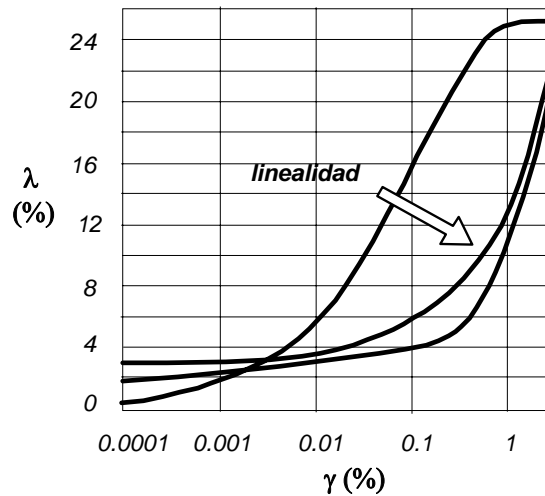


Figura 7-28 - Amortiguamiento

En las figuras anteriores, los suelos que manifiestan más linealidad están a la derecha y los localizados hacia la izquierda corresponden a los suelos que manifiestan mayor no-linealidad. En el caso de las relaciones entre los módulos, Figura 7-27, entre más lineal, más largo es el rango de deformaciones en el cual el módulo de cortante es igual al módulo inicial. En el caso del amortiguamiento, entre más lineal sea el suelo, presenta menos amortiguamiento, y el rango en el cual éste es bajo se extiende hacia deformaciones mayores.

Si se supone que el suelo no tiene amortiguamiento, y que el módulo de cortante G , no se desvía mucho del módulo secante inicial, G_{\max} , es posible resolver el problema ondulatorio, y determinar el valor del período de vibración fundamental y todos sus armónicos, por medio de la siguiente ecuación:

$$T_i = \frac{4H}{(2i-1)v_s} \quad (7-32)$$

Donde H es el espesor de suelo en el estrato. Por lo tanto, para el período fundamental del perfil, con $i=1$, $T_s = 4H/v_s$. Ahora, en el caso de que se tengan varios estratos con diferentes espesores y valores de la velocidad de la onda de cortante, es posible determinar el período de vibración fundamental del estrato, por medio de:

$$T_s = 4 \sum_{i=1}^n \frac{H_i}{v_{si}} \quad (7-33)$$

A pesar de que estas fórmulas tienen la limitación de que son aplicables sólo cuando las deformaciones impuestas por el sismo no inducen deformaciones grandes, permiten realizar aproximaciones útiles a falta de una mejor información. Debe tenerse en cuenta que los períodos estimados por medio de estas ecuaciones son consistentemente menores que los que habría con deformaciones grandes.

La siguiente pregunta es la cantidad de amplificación que se presentaría. Al respecto existen relaciones aproximadas como las propuestas por Dobry [Dobry y Vucetic, 1987], otras provienen de valores empíricos provenientes del temblor de Loma Prieta [Borcherdt, 1994], y han sido aplicadas por algunos autores, por ejemplo al caso de Bogotá [Espinosa, 1995]. Pero en general en los estudios de amplificación de onda se prefiere la utilización de modelos matemáticos implementados en el computador. De estos modelos existen tridimensionales, de gran complejidad en su aplicación [Sarria, 1995b] y unidimensionales, como el que emplea el programa de computador SHAKE [Schnabel, Lysmer y Seed, 1972]. El programa permite, dado un acelerograma en roca, determinar el acelerograma modificado que se obtendría en superficie. Utilizando los espectros de respuesta de los dos acelerogramas, es posible definir coeficientes de amplificación para cada período dentro del espectro. No sobra insistir, como es normal en el uso de cualquier programa de computador, en el cuidado y

criterio en la definición de los valores a emplear, especialmente en aquellos datos sobre la relación de módulos de cortante y el amortiguamiento apropiado para cada nivel de deformación.

Tabla 7-11 - Valores típicos de la velocidad de la onda de cortante en m/s adaptada de [Dowrick, 1987]

Material	Profundidad del depósito		
	3-20 m	21-50 m	> 50 m
Arena suelta, saturada	60-120	-	-
Arena de origen aluvial	60-120	100-160	125-180
Arcilla	60-120	200-250	300-350
Limo	60-120	-	-
Limo arcilloso	60-120	240-280	-
Suelo de pantano	80-100	-	-
Zonas recientemente recuperadas por desecación	50-80	100-130	-
Arcilla arenosa	100-150	250-280	-
Gravilla suelta	100-150	300-350	600-650
Arena fina, saturada	110-150	-	-
Arena media, uniformemente gradada	100-150	140-180	-
Arcillolita del terciario húmeda	130-200	-	-
Arcilla y arena	140-180	-	-
Tierra vegetal	90-150	200-220	-
Arena densa	160-220	-	-
Arena media saturada	160-220	-	-
Arena aciliosa	170-220	-	-
Grava con cantos rodados	180-220	-	-
Arcilla saturada	190-220	-	-
Arena fina limo arcilloso	190-220	-	-
Arena arcillosa con gravas	200-220	-	-
Arena media in situ	220-260	220-280	-
Marga	220-260	-	-
Arcilla desecada	220-260	-	-
Terraplén de arcilla compactada	240-260	-	-
Loess secos	260-280	-	-
Arcilla amasada, severamente compactada	-	320-380	-
Grava gruesa compacta	420-480	-	-
Grava media	-	330-400	-
Arenisca cuarzosa	-	-	780
Sieno atlántico, fango	-	-	1000-1500
Areniscas duras (Mesozoico)	-	-	1200
Hielo, glaciares	-	-	1600
Arena tobácea	-	-	2000
Concreto	-	-	2200
Lutitas (Mesozoico)	-	-	2350
Granito (intacto)	-	-	2700
Caliza compacta	-	-	3350
Pizarra arcillosa (Paleozóico)	-	-	3600

7.7 — Espectros de diseño de las normas de diseño sísmico

En la presente Sección se hace referencia al desarrollo histórico del espectro de diseño que se incluye en las normas de diseño sismo resistente. Además se presentan las formas del espectro de diseño de algunas normas modernas y se discuten sus fundamentos a la luz de lo presentado anteriormente.

7.7.1 — Desarrollo histórico del espectro en las normas sísmicas

Los primeros requisitos de diseño sísmico obligaban a tratar el sismo como una fuerza horizontal análoga al viento. La ciudad de San Francisco fue reconstruida después del terremoto de 1906 utilizando como fuerzas de diseño para el sismo una presión de viento igual a 1.5 kPa (146 kgf/m², ó 30 libras por pie cuadrado). A finales de la década de 1920 se iniciaron los primeros códigos sísmicos propiamente dichos. En ellos se introdujo el concepto de *coeficiente sísmico*, el cual corresponde a la fracción del peso de la estructura que debe utilizarse como fuerza horizontal sísmica de diseño.

En la versión de 1927 del Uniform Building Code (UBC), el cual todavía es el código más utilizado en la costa oeste de los Estados Unidos, se prescribía un coeficiente sísmico, *C*, que variaba entre el 7.5 y el

10%. El Código de la ciudad de Los Angeles exigía en 1933 un C de 8%. En 1943 el Código de esta misma ciudad introdujo el primer coeficiente sísmico que involucraba de alguna manera un espectro de diseño. La fórmula para evaluación del coeficiente en ese Código era la siguiente:

$$C = \frac{0.60}{N + 4.5} \quad (7-34)$$

Donde N era el número de pisos de la estructura. Este número estaba restringido a un máximo de 13 pisos. Restricción que existió en otras ciudades importantes localizadas en zonas sísmicas como es la ciudad de Tokio, en la cual la restricción de altura se mantuvo hasta la década de 1960.

Este desarrollo de los códigos sísmicos en norteamérica fue tomado a mediados de la década de 1950 por la Asociación de Ingenieros Estructurales de California (SEAOC), la cual publicó en 1959 unas disposiciones para diseño sísmico que involucraban el concepto de período de vibración del edificio. La ecuación para el cálculo del coeficiente sísmico dada por este código, la cual corresponde realmente un espectro simplificado de diseño:

$$C = \frac{0.05}{\sqrt[3]{T}} \quad (7-35)$$

Donde T correspondía al período fundamental del edificio y se indicaba que para edificios aporticados el período fundamental, en segundos, era un décimo del número de pisos. La fuerza horizontal de diseño en la base de la estructura, V , debida al sismo se determinaba como:

$$V = K C W \quad (7-36)$$

Allí K dependía del tipo de estructura y los requisitos de detallado y despiece, en el caso de concreto reforzado, que se siguieran y W correspondía al peso de carga muerta de la estructura y su contenido. Estas fuerzas sísmicas de diseño estaban prescritas al nivel de esfuerzos de trabajo, por lo tanto para ser utilizadas con procedimientos de diseño por el método de la resistencia, o rotura, debía usarse un factor de carga que en esa época se fijó en 1.4 para concreto reforzado.

La ecuación para el cálculo del coeficiente sísmico, ecuación (7-36), se mantuvo en las versiones de SEAOC y UBC hasta finales de la década de 1980. No obstante la ecuación para el cálculo del corte basal fue modificada en la versión de 1974 de SEAOC y de 1976 de UBC a la siguiente forma:

$$V = Z I K C S W \quad (7-37)$$

donde se incluyeron los siguientes términos nuevos: Z es un coeficiente de zona sísmica que toma en cuenta el nivel de amenaza sísmica del sitio, I es un coeficiente de importancia que obliga a fuerzas de diseño sísmico mayores para estructuras indispensables para la recuperación de la ciudad con posterioridad a la ocurrencia de un temblor y S es un coeficiente de sitio que toma en cuenta la posibilidad de amplificación de los efectos sísmicos debido a la presencia de suelos blandos en los estratos subyacentes en el sitio.

En 1978 se publicó [ATC, 1978] por parte del Applied Technology Council (ATC) un código sísmico modelo al que denominó ATC-3, el cual puede decirse que corresponde a la primera normativa sismo resistente verdaderamente moderna, pues involucró los grandes avances en ingeniería sísmica que han ocurrido con posterioridad a la Segunda Guerra Mundial. El ATC-3 es la base de los requisitos sísmicos de las normas sismo resistentes colombianas, y lo fue especialmente de su primera versión, Código Colombiano de Construcciones Sismo Resistentes CCCSR-84, [MOPT, 1984]. En 1985 la SEAOC involucró gran parte del ATC-3, con algunas modificaciones en su versión [SEAOC, 1985] de ese año y el UBC en su versión de 1988 [ICBO, 1988] hizo lo mismo. Dentro del medio norteamericano el ATC-3 fue adoptado por el programa NEHRP (National Earthquake Hazards Reduction Program) del Building Safety Council como los requisitos recomendados [FEMA, 1986] para diseño sísmico en Estados Unidos, programa dentro del cual se han realizado revisiones periódicas al documento [FEMA, 1991, 1994b].

Recientemente, todas las entidades que desarrollan los códigos modelos dentro de los Estados Unidos se unieron en una sola institución denominada International Code Council para producir un código modelo único el cual se denominará International Building Code - IBC, cuya primera versión aparecerá en el año 2000, para la cual ya existe un borrador [ICC, 1997]. El borrador existente es un compromiso entre los requisitos que contiene el NEHRP-94 [FEMA, 1994b] y el UBC-97 [ICBO, 1997].

7.7.6 — Forma del espectro del NEHRP-94

Los requisitos contenidos en las recomendaciones del National Earthquake Hazard Reduction Program - NEHRP, son en general actualizaciones del ATC-3. Su primera versión, aparecida en 1986 [FEMA, 1986] recogía el texto del ATC-3 casi en su totalidad y sin mayores variaciones. Luego fueron actualizados en 1991 [FEMA, 1991] y posteriormente en 1994. La versión de 1994 [FEMA, 1994b] trae variaciones importantes con respecto a las versiones anteriores, especialmente en el espectro y particularmente en la forma como se toman en cuenta los efectos de sitio. En la Sección 7.4.3 se explicó en detalle la manera como se toman en cuenta, dentro del NEHRP-94, los efectos de sitio y los coeficientes de amplificación que se deben emplear para los diferentes tipos de perfil. En la forma del espectro se mantiene la del ATC-3, pero la manera como se llega a él es algo diferente. El espectro está definido de la siguiente manera:

$$S_a = \frac{1.2 C_v}{T^{2/3}} \leq 2.5 C_a \quad (7-57)$$

Los valores de C_a y C_v se obtienen al realizar los siguientes productos:

$$C_a = F_a A_a \quad (7-58)$$

y

$$C_v = F_v A_v \quad (7-59)$$

donde los valores de F_a y F_v son los que se presentaron en las Tablas 7-9 y 7-10 respectivamente, aunque la norma no los usa directamente, pues sólo emplea los coeficientes C_a y C_v , e incluye F_a y F_v simplemente como una guía. La norma trae tablas para los valores de los parámetros C_a y C_v , así:

Tabla 7-17 - Valores del coeficiente C_a

Perfil de Suelo	$A_a < 0.05$	$A_a = 0.05$	$A_a = 0.10$	$A_a = 0.20$	$A_a = 0.30$	$A_a = 0.40$
A	A_a	0.04	0.08	0.16	0.24	0.32
B	A_a	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40
C	A_a	0.06	0.12	0.24	0.33	0.40
D	A_a	0.08	0.16	0.28	0.36	0.44
E	A_a	0.13	0.25	0.34	0.36	0.36

Tabla 7-18 - Valores del coeficiente C_v

Perfil de Suelo	$A_v < 0.05$	$A_v = 0.05$	$A_v = 0.10$	$A_v = 0.20$	$A_v = 0.30$	$A_v = 0.40$
A	A_v	0.04	0.08	0.16	0.24	0.32
B	A_v	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40
C	A_v	0.09	0.17	0.32	0.45	0.56
D	A_v	0.12	0.24	0.40	0.54	0.64
E	A_v	0.18	0.35	0.64	0.84	0.96

A continuación se presentan los espectros que se obtienen para valores de $A_a = A_v = 0.10, 0.20$ y 0.30 .

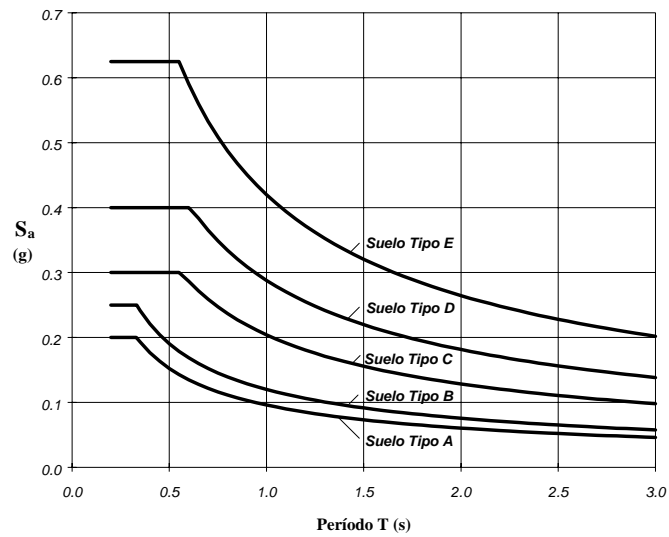


Figura 7-37 - Espectro de aceleraciones $A_a = A_v = 0.10$, NEHRP-94

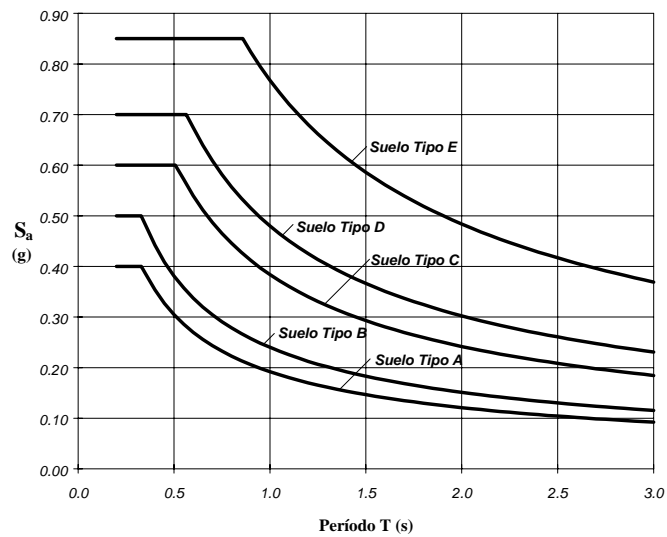


Figura 7-38 - Espectro de aceleraciones $A_a = A_v = 0.20$, NEHRP-94

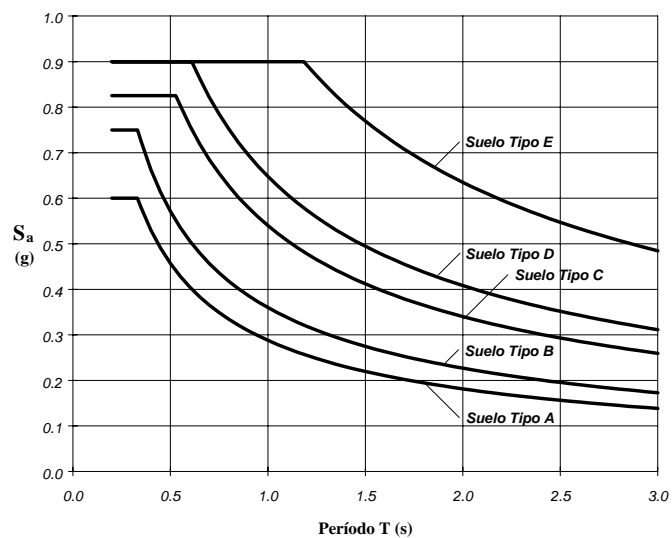


Figura 7-39 - Espectro de aceleraciones $A_a = A_v = 0.30$, NEHRP-94

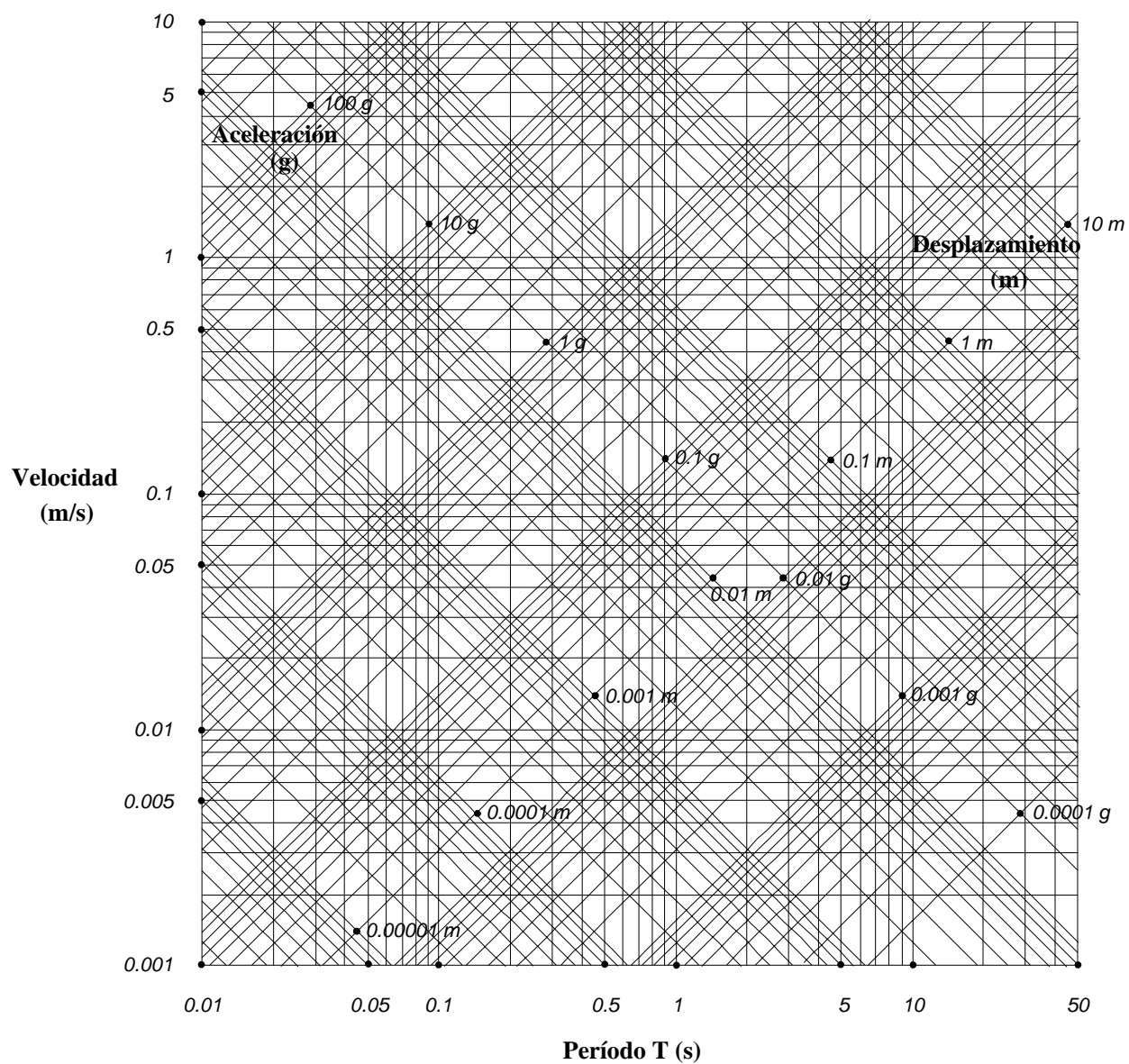


Figura 7-41 - Papel tripartita espectral

Tema N° 12 — Introducción al análisis matricial de estructuras

8.1 — Introducción

Con el fin de plantear un lenguaje propio para manejar sistemas dinámicos de varios grados de libertad se ha incluido el presente capítulo introductorio al análisis matricial de estructuras. Este tema está cubierto en excelentes textos de análisis estructural a los cuales se remite al lector que quiera profundizar sobre él. Dentro de los textos que pueden consultarse, se recomiendan los siguientes: [Cook, Malkus y Plesha, 1989], [Gerstle, 1974], [Ghali y Neville, 1989], [Harrison, 1973], [Holzer, 1985], [Laursen, 1978], [Livesley, 1964], [McGuire y Gallagher, 1979], [Norris, Wilbur y Otku, 1976], [Prezemiennicki, 1968], [Sack, 1984 y 1989], [Schoidek, 1980], [Schueller, 1990], [Sttaford-Smith, 1991], [Taranath, 1988], [Timoshenko y Young, 1965], [Uribe, 1991], [Vanderbilt, 1974], y [Weaver y Gere, 1990].

El análisis matricial de estructuras no es nuevo a la ingeniería estructural, sus primeros desarrollos tuvieron lugar durante el siglo pasado pero realmente su aplicación práctica ocurrió con la aparición del computador digital, a partir de finales de la década de 1950. Hace algunos años se consideró novedoso, pero dado la popularidad que adquirieron algunos programas de computador que utilizaban esta metodología, tales como STRESS [Fenves et al., 1964] y STRUDL [Logcher, et al., 1968]; su utilización se convirtió en rutinaria, y puede afirmarse que hoy en día prácticamente no se realiza un análisis estructural sin emplearla, no con estos programas, pero sí con sus descendientes directos. Este aspecto refuerza el énfasis de que el ingeniero debe conocer sus fundamentos del análisis matricial, y especialmente sus limitaciones. Se ha resistido aquí la tentación de denominar el presente capítulo "Análisis por el Método de Elementos Finitos", del cual el análisis matricial es un subconjunto. El desarrollo del método de los elementos finitos se inició en la década de 1960 y cada día ocurren mayores avances en él, no obstante en su aplicación en casos prácticos del día a día en ingeniería estructural, muy pocas veces se puede ejercer el criterio que deben aplicar los ingenieros en todas las labores que adelanten, pues se confunde muchas veces el comportamiento de la estructura propiamente dicha con el comportamiento que describe el modelo matemático de ella, llevando al ingeniero a tomar decisiones erradas que muchas veces se habrían podido evitar utilizando sentido común. En el Capítulo siguiente se presentan los fundamentos del método de los elementos finitos y sus aplicaciones prácticas en el análisis de estructuras de edificaciones.

Para facilitar el uso del análisis matricial en casos de ejemplos y ejercicios que exceden lo que es posible realizar manualmente, se recomienda el uso del programa de computador CAL91 [Wilson, 1991] el cual fue desarrollado por el profesor E. L. Wilson de la Universidad de California en Berkeley, para la enseñanza del análisis matricial y la dinámica estructural.

8.2 — Sistemas de coordenadas y su transformación

Para efectos del análisis matricial, se definen dos sistemas de dirección positiva de las fuerzas y de los desplazamientos de la estructura. Estos sistemas los denominaremos *sistema de coordenadas local* cuando se trata de fuerzas y deformaciones referidas con respecto a los ejes propios del elemento y *sistema de coordenadas global* cuando están referidas a ejes de la estructura como un conjunto. En las presentes notas se utilizarán letras minúsculas para referirse a propiedades expresadas en el sistema local y letras MAYUSCULAS para referirse a propiedades expresadas en el sistema GLOBAL.

Para entender mejor estos conceptos supongamos el pórtico mostrado en la Figura 8-1. Este pórtico esta sometido a unas fuerzas externas. Si realizamos un análisis de la estructura, por cualquier método convencional, encontraremos los desplazamientos de los nudos de la estructura y las fuerzas internas en los elementos. Si hacemos cuerpo libre de los elementos, encontramos que cada uno de ellos tiene en sus extremos unas fuerzas axiales, unas fuerzas cortantes y unos momentos flectores. Estas fuerzas deben estar, y están, en equilibrio con las fuerzas externas que obran sobre el elemento. De igual manera si hacemos cuerpo libre de los nudos de la estructura encontraremos que también están en

equilibrio y que las fuerzas que les llegan son iguales, pero se signo opuesto a las de los extremos de los elementos.

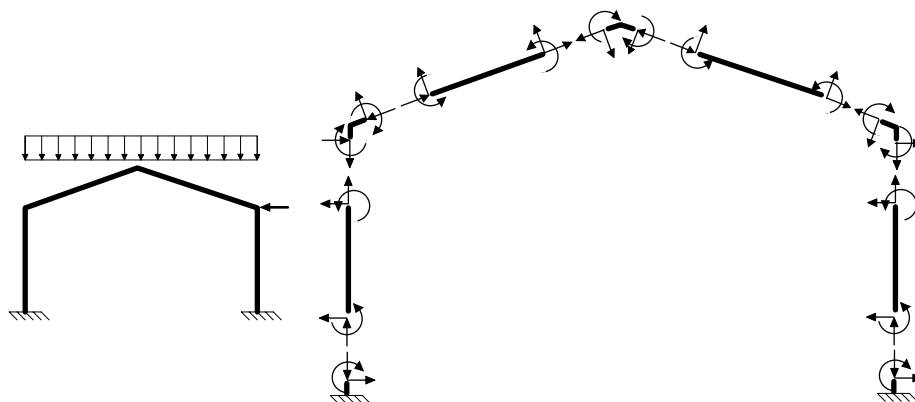


Figura 8-1 - Fuerzas externas y fuerzas internas en una estructura

Es evidente que para poder comprobar el equilibrio de los nudos debemos transformar las fuerzas que les llegan de los elementos en sus componentes horizontales y verticales (con los momentos no se presenta este problema pues están referidos al mismo eje perpendicular al plano del pórtico tanto en los elementos como en los nudos) para poderlas sumar. En este caso las fuerzas, tal como se expresan en los extremos de los elementos, están en cada uno de ellos en un sistema de coordenadas propio, que es el sistema local. En los nudos hemos utilizado un sistema de coordenadas que es el mismo en todos los nudos y este sistema corresponde al sistema global de coordenadas.

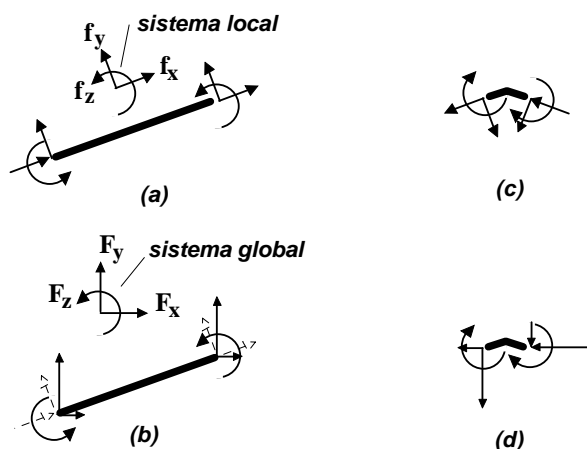


Figura 8-2 - Sistemas de coordenadas local y global

En la Figura 8-2(a) se muestra uno de los elementos de la estructura con su sistema local de coordenadas y sus fuerzas en los extremos expresadas en este sistema. En la Figura 8-2(b) se muestra el mismo elemento con el sistema global de coordenadas y sus fuerzas en los extremos expresadas en el sistema global. En la Figura 8-2(c) se muestra el nudo del centro de la estructura cuando le llegan las fuerzas en el sistema local de cada elemento y en la Figura 8-2(d) el mismo nudo con las fuerzas llegando en el sistema global. Es evidente que el equilibrio del nudo se puede comprobar de una manera sistemática cuando las fuerzas están expresadas en el sistema global. Por otro lado el diseñador en general requiere que las fuerzas en los elementos estén expresadas en términos de fuerzas axiales, fuerzas cortantes, momentos torsores y momentos flectores, y todas ellas están definidas en el sistema local. Debe quedar claro además que no se trata de sistemas de coordenadas en un sentido estricto, pues realmente lo que nos indican es la dirección positiva de las fuerzas y deformaciones dentro de los elementos o en toda la estructura. Aunque en la discusión anterior se utilizó un pórtico plano como ejemplo, lo presentado es válido también para estructuras tridimensionales. La presentación inicial se realizará para pórticos planos y posteriormente se introducirán los otros tipos de estructuras no planares. En resumen es evidente que es necesario disponer de una manera de transformar de un sistema de coordenadas al otro de una forma sistemática. En la Figura 8-3 se muestra un elemento de pórtico plano con los dos sistemas de coordenadas y su relación entre ellos.

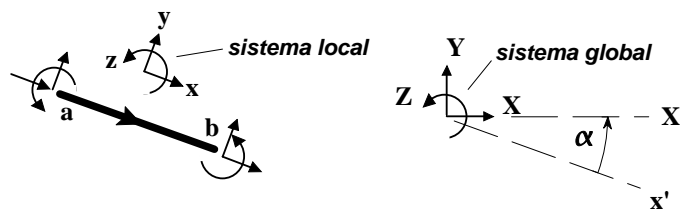


Figura 8-3 - Elemento de pórtico plano en coordenadas locales

Los dos sistemas de coordenadas, local y global, son sistemas de mano derecha. El sistema local siempre se define con el eje x a lo largo del eje longitudinal del elemento. En el elemento se han denominado sus extremos como a y b (véase la Figura 8-3). El sentido positivo del eje x local es el sentido que se tiene al ir del nudo a al nudo b , por esta razón se ha marcado una flecha en el centro del elemento que apunta en esa dirección. Posteriormente se verá que esta es la única definición que se necesita para describir el sistema local en estructuras planares. El eje y local siempre tiene su sentido positivo hacia la izquierda al ir en la dirección positiva de x . El eje z local se obtiene con la regla de la mano derecha y es perpendicular al plano que conforman x y y . El eje z es positivo saliendo del plano del papel hacia el observador. En el sistema global el eje X puede tener cualquier orientación en el plano del papel, pero lo usual es que sea horizontal. Los ejes Y y Z globales se definen a partir del eje X de la misma manera que sus homólogos locales. El ángulo α (véase la Figura 8-3) se define como el ángulo que se describe al ir del eje x local al eje X global, y es positivo en esa dirección.

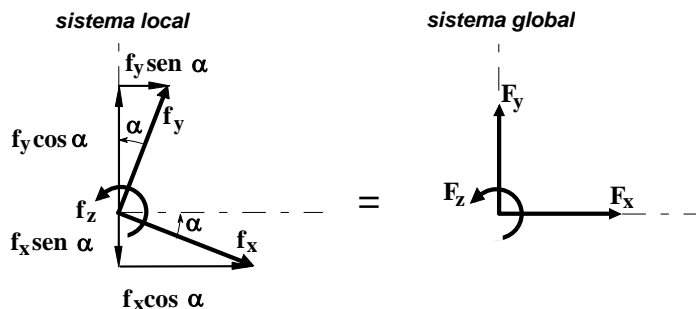


Figura 8-4 - Transformación de local a global

Tenemos las fuerzas f_x , f_y y f_z en el sistema local mostrado en la Figura 8-4. Utilizando el ángulo α podemos encontrar las componentes de las tres fuerzas sobre los ejes del sistema global, las cuales también se muestran en la figura. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} F_x &= f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha \\ F_y &= -f_x \sin \alpha + f_y \cos \alpha \\ F_z &= f_z \end{aligned} \quad (8-36)$$

si definimos:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \quad y \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (8-37)$$

y buscamos una matriz $[\lambda]$ tal que:

$$\{F\} = [\lambda] \{f\} \quad (8-38)$$

de las expresiones en (8-36) podemos ver que:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F_x} \\ \overline{F_y} \\ \overline{F_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \quad (8-39)$$

por lo tanto

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-40)$$

Además podemos probar que la matriz $[\lambda]$ tiene la propiedad de que es ortogonal, o sea que su transpuesta es su inversa:

$$[\lambda][\lambda]^T = [\lambda]^T[\lambda] = [I] \quad (8-41)$$

Esto quiere decir que si premultiplicamos ambos lados de la ecuación (8-38) por $[\lambda]^T$ obtenemos:

$$[\lambda]^T \{F\} = [\lambda]^T [\lambda] \{f\} \quad (8-42)$$

entonces:

$$\{f\} = [\lambda]^T \{F\} \quad (8-43)$$

O sea que por medio de la matriz $[\lambda]$ podemos transformar las fuerzas que se encuentran en el sistema local a fuerzas en el sistema global, ecuación (8-38), e igualmente por medio de la matriz $[\lambda]^T$ podemos transformar las fuerzas del sistema global al sistema local, ecuación (8-43).

Ejemplo 8-1

Tenemos el elemento de un pórtico plano mostrado en la Figura 8-5, con las fuerzas dadas en sus extremos **a** y **b**, y queremos transformar las fuerzas en sus extremos del sistema local mostrado a un sistema global que tiene su eje **X** horizontal

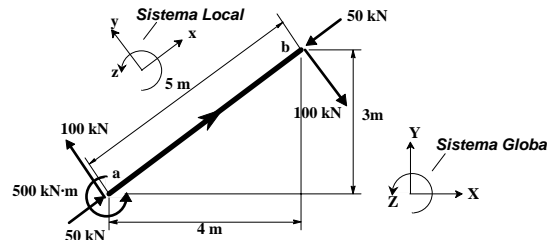


Figura 8-5 - Ejemplo 8-1 - Elemento con sus fuerzas en coordenadas locales

Los vectores de fuerzas locales en los extremos **a** y **b** son:

$$\{f_a\} = \begin{Bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 100 \\ 500 \end{Bmatrix} \quad \{f_b\} = \begin{Bmatrix} f_{bx} \\ f_{by} \\ f_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -50 \\ -100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El ángulo α se obtiene del arcoseno de $3/5$ y es 36.87° . El ángulo es negativo pues por definición α va de local a global. Por lo tanto: $\cos \alpha = 4/5 = 0.8$ y $\text{sen } \alpha = -3/5 = -0.6$ y la matriz $[\lambda]$ es:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas en coordenadas globales del extremo **a** del elemento son:

$$\{F_a\} = [\lambda] \{f_a\} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 50 \\ 100 \\ 500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20 \\ 110 \\ 500 \end{Bmatrix}$$

y las fuerzas en coordenadas globales del extremo **b** del elemento son:

$$\{F_b\} = [\lambda] \{f_b\} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -50 \\ -100 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ -110 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

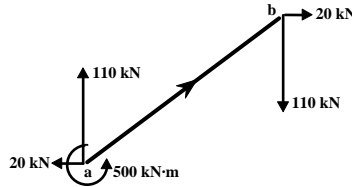


Figura 8-6 - Ejemplo 8-1 - Fuerzas del elemento en coordenadas globales

8.3 — Matriz de rigidez de un elemento de pórtico plano

Primero determinaremos la matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales y posteriormente la transformaremos del sistema de coordenadas local a global. Para establecer las relaciones entre las fuerzas en los extremos del elemento y los desplazamientos también en sus extremos utilizaremos la *ecuación de pendiente-deformación*, la cual indica que para un elemento en estado de deformación, los momentos en los extremos que mantienen esta deformación están dados por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{2EI}{L} (2\theta_a + \theta_b - 3\phi) + M_a^E \\ M_b &= \frac{2EI}{L} (\theta_a + 2\theta_b - 3\phi) + M_b^E \end{aligned} \quad (8-44)$$

Donde:

M_a = momento en el extremo **a** del elemento. Positivo en el sentido contra horario.

M_b = momento en el extremo **b** del elemento. Positivo en el sentido contra horario.

E = módulo de elasticidad del material del elemento.

I = momento de inercia de la sección del elemento.

L = luz del elemento.

θ_a = giro del extremo **a** del elemento. Positivo en el sentido contra horario.

θ_b = giro del extremo **b** del elemento. Positivo en el sentido contra horario.

ϕ = pendiente de la línea que une los extremos **a** y **b** del elemento, medida con respecto a su situación original indeformada. Positiva en el sentido contra horario.

M_a^E y M_b^E son los momentos de empotramiento de las cargas externas dentro del elemento en los extremos **a** y **b** respectivamente.

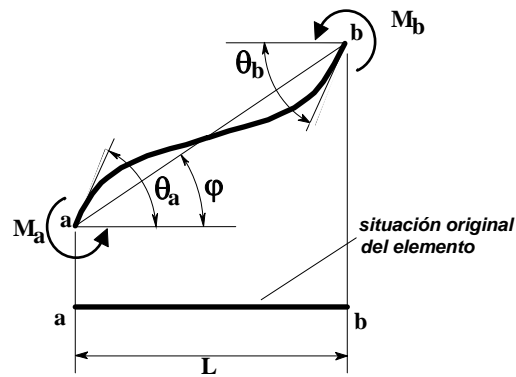


Figura 8-7 - Parámetros de la ecuación de pendiente deformación

Cuando a un elemento, que está en un estado inicial sin esfuerzos, se le aplican unas fuerzas en sus extremos, estas fuerzas producen una situación de deformación interna del elemento y desplazamientos en sus extremos con respecto a su situación inicial. Esta situación de deformación del elemento se mantiene mientras permanezcan las fuerzas que se aplicaron en sus extremos. Si estas se retiran el elemento vuelve a su situación original.

El elemento de pórtico plano tiene la posibilidad de recibir en cada uno de sus extremos una fuerza axial colineal con el eje del elemento, una fuerza cortante transversal al elemento y un momento flector. Esto nos conduce a un total de seis fuerzas externas que se pueden aplicar. Si estas seis fuerzas se conocen, es posible determinar las fuerzas internas del elemento en cualquier punto con ellas, pues al disponer de ellas es como tener un elemento isostático.

Por otro lado la situación de deformación interna del elemento se puede describir por medio de tres tipos de desplazamiento en cada uno de sus extremos, a saber: una deformación colineal con el eje longitudinal del elemento, una deformación transversal a este eje y un giro con respecto a la posición original del eje. Esto nos lleva a un total de seis posibles desplazamientos en los extremos del elemento. Todos los desplazamientos y deformaciones internas del elemento se pueden describir con base en estos seis desplazamientos.

En la Figura 8-8 se muestra un elemento de pórtico plano en su posición original indeformada y en la posición deformada. Además se muestran las fuerzas que producen y mantienen este estado deformado. Tanto las fuerzas como los desplazamientos tienen la misma nomenclatura, donde la primera letra del subíndice hace referencia al extremo del elemento (a o b) y la segunda letra a la dirección en el sistema local de coordenadas (x, y o z).

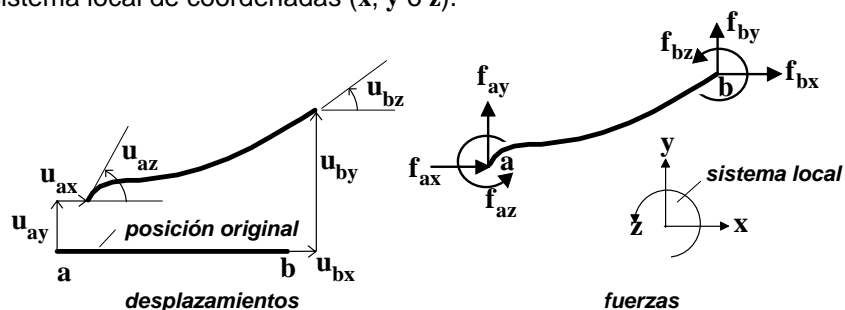


Figura 8-8 - Fuerzas y desplazamientos en los extremos de un elemento de pórtico plano

Estamos interesados en buscar la relación que exista entre las seis fuerzas y los seis desplazamientos.

Esta tiene la siguiente forma:

$$\{f\}_{6,1} = [k]_{6,6} \{u\}_{6,1} \quad (8-45)$$

donde $[k]$ es la matriz de rigidez del elemento. Uno de los procedimientos de obtención de la matriz de rigidez consiste en imponer una deformación unitaria a uno de sus grados de libertad, manteniendo restringidos los desplazamientos de los otros grados de libertad. Las fuerzas que se generan en los grados de libertad restringidos son los términos correspondientes de la matriz de rigidez. Los desplazamientos se miden a partir de la situación sin esfuerzos del elemento. La ecuación (8-45) queda entonces así:

$$\begin{Bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \\ f_{bx} \\ f_{by} \\ f_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{axax} & k_{axay} & k_{axaz} & k_{axbx} & k_{axby} & k_{axbz} \\ k_{ayax} & k_{ayay} & k_{ayaz} & k_{aybx} & k_{ayby} & k_{aybz} \\ k_{azax} & k_{azay} & k_{azaz} & k_{azbx} & k_{azby} & k_{azbz} \\ k_{bxax} & k_{bxay} & k_{bxaz} & k_{bxbx} & k_{bxby} & k_{bxbz} \\ k_{byax} & k_{byay} & k_{byaz} & k_{bybx} & k_{byby} & k_{bybz} \\ k_{bzax} & k_{bzay} & k_{bzaz} & k_{bzbx} & k_{bzby} & k_{bzbz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ax} \\ u_{ay} \\ u_{az} \\ u_{bx} \\ u_{by} \\ u_{bz} \end{Bmatrix} \quad (8-46)$$

donde los subíndices de cada término de la matriz de rigidez se refieren el primero al término de fuerza y el segundo al desplazamiento que lo genera. Así por ejemplo el término k_{bxay} indica que está relacionando la fuerza en el nudo b dirección x , f_{bx} , generada por un desplazamiento del nudo a en la dirección y , u_{ay} . Por lo tanto:

(a) Definimos así las fuerzas cuando $u_{ax} = 1$, teniendo en cuenta que todos los demás desplazamientos son cero.

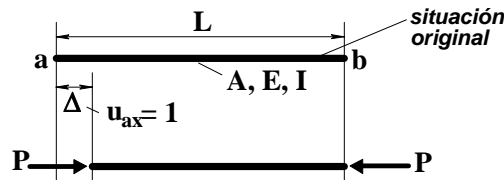


Figura 8-9 - Desplazamiento unitario en el grado de libertad u_{ax}

Si se induce un desplazamiento Δ en el grado de libertad u_{ax} hay necesidad de imponer las fuerzas P mostradas en la Figura 8-9 para poder mantener esta deformación. El esfuerzo en el elemento es:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (8-47)$$

y la deformación unitaria que induce este esfuerzo es:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (8-48)$$

por lo tanto la deformación axial total del elemento se calcula así:

$$\Delta = \int_0^L \varepsilon dx = \varepsilon L = \frac{\sigma}{E} L = \frac{PL}{AE} \quad (8-49)$$

y

$$P = \frac{AE}{L} \Delta \quad (8-50)$$

dado que Δ es una deformación unitaria, tenemos:

$$k_{axax} = P = \frac{AE}{L} \quad \text{y} \quad k_{bxax} = -P = -\frac{AE}{L} \quad (8-51)$$

Como la deformación axial no induce reacciones en los otros grados de libertad, todos los demás términos de la primera columna de $[k]$ son cero.

La matriz mostrada en (8-46) hasta este momento va así:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & k_{axay} & k_{axaz} & k_{axbx} & k_{axby} & k_{axbz} \\ 0 & k_{ayay} & k_{ayaz} & k_{aybx} & k_{ayby} & k_{aybz} \\ 0 & k_{azay} & k_{azaz} & k_{azbx} & k_{azby} & k_{azbz} \\ -\frac{AE}{L} & k_{bxay} & k_{bxaz} & k_{bxbx} & k_{bxby} & k_{bxbz} \\ 0 & k_{byay} & k_{byaz} & k_{bybx} & k_{byby} & k_{bybz} \\ 0 & k_{bzay} & k_{bzaz} & k_{bzbx} & k_{bzby} & k_{bzbz} \end{bmatrix} \quad (8-52)$$

(b) Ahora hacemos $u_{ay} = 1$ y todos los demás desplazamientos son cero.

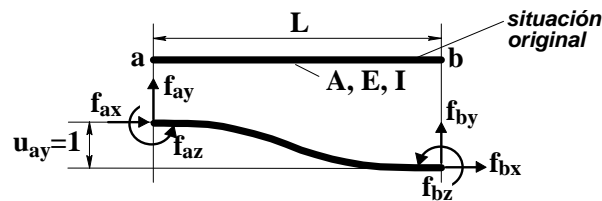


Figura 8-10 - Desplazamiento unitario en el grado de libertad u_{ay}

Tenemos, entonces, la siguiente situación expresada en términos de las variables de la ecuación de pendiente deformación:

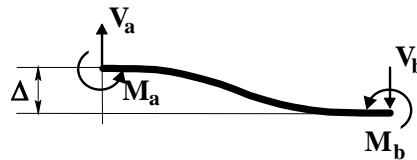


Figura 8-11 - Fuerza en los extremos

De acuerdo con la anterior:

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - 3\varphi) = -\frac{6EI}{L}\varphi \\ M_b &= \frac{2EI}{L}(2\theta_b + \theta_a - 3\varphi) = -\frac{6EI}{L}\varphi \end{aligned} \quad (8-53)$$

Pero $\varphi = -\Delta/L$ y $\Delta=1$ por lo tanto $\varphi = -1/L$ y entonces:

$$M_a = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{y} \quad M_b = \frac{6EI}{L^2} \quad (8-54)$$

Tomando momentos en a obtenemos:

$$\sum M_a = \frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2} - V_b L = 0 \Rightarrow V_b = \frac{12EI}{L^3} \quad (8-55)$$

Sumando fuerzas verticales:

$$\sum F_v = V_b - V_a = 0 \Rightarrow V_a = V_b = \frac{12EI}{L^3} \quad (8-56)$$

Entonces los coeficientes de la segunda columna de la matriz de rigidez son:

$$k_{axay} = 0$$

$$k_{bxa} = 0$$

$$k_{ayay} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{byay} = -\frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{azay} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{bzay} = \frac{6EI}{L^2}$$

La matriz mostrada en (8-46) hasta este momento va así:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & k_{axaz} & k_{axbx} & k_{axby} & k_{axbz} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & k_{ayaz} & k_{aybx} & k_{ayby} & k_{aybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & k_{azaz} & k_{azbx} & k_{azby} & k_{azbz} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & k_{bxaz} & k_{bxbx} & k_{bxby} & k_{bxbz} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & k_{byaz} & k_{bybx} & k_{byby} & k_{bybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & k_{bzaz} & k_{bzbz} & k_{bzby} & k_{bzbz} \end{bmatrix} \quad (8-57)$$

(c) Ahora hacemos $u_{az} = 1$ y todos los demás desplazamientos son cero.

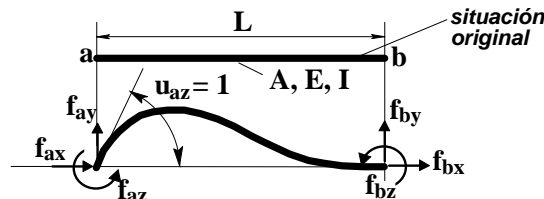


Figura 8-12 - Desplazamiento unitario en el grado de libertad u_{az}

Tenemos la siguiente situación expresada en términos de la nomenclatura de la ecuación de pendiente deformación:

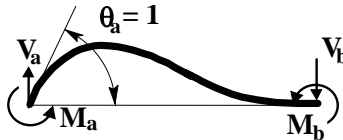


Figura 8-13 - Fuerza en los extremos

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - 3\phi) = \frac{4EI}{L} \\ M_b &= \frac{2EI}{L}(2\theta_b + \theta_a - 3\phi) = \frac{2EI}{L} \end{aligned} \quad (8-58)$$

Tomando momentos en a obtenemos:

$$\sum M_a = \frac{4EI}{L} + \frac{2EI}{L} - V_b L = 0 \Rightarrow V_b = \frac{6EI}{L^2} \quad (8-59)$$

Sumando fuerzas verticales:

$$\sum F_v = V_b - V_a = 0 \Rightarrow V_a = V_b = \frac{6EI}{L^2} \quad (8-60)$$

Entonces los coeficientes de la tercera columna de la matriz de rigidez son:

$$\begin{aligned} k_{axaz} &= 0 & k_{bxaz} &= 0 \\ k_{ayaz} &= \frac{6EI}{L^2} & k_{byaz} &= -\frac{6EI}{L^2} \\ k_{azaz} &= \frac{4EI}{L} & k_{bzaz} &= \frac{2EI}{L} \end{aligned}$$

La matriz mostrada en (8-46) hasta este momento va así:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & k_{axbx} & k_{axby} & k_{axbz} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & k_{aybx} & k_{ayby} & k_{aybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & k_{azbx} & k_{azby} & k_{azbz} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & k_{bxbx} & k_{bxby} & k_{bxbz} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & k_{bybx} & k_{byby} & k_{bybz} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & k_{bzbx} & k_{bzby} & k_{bzbz} \end{bmatrix} \quad (8-61)$$

Si hacemos el mismo ejercicio presentado en (a), (b) y (c) para desplazamientos unitarios en u_{bx} , u_{by} y u_{bz} obtenemos la matriz de rigidez, en coordenadas locales, de un elemento de pórtico plano:

$$\begin{Bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \\ f_{bx} \\ f_{by} \\ f_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ax} \\ u_{ay} \\ u_{az} \\ u_{bx} \\ u_{by} \\ u_{bz} \end{Bmatrix} \quad (8-62)$$

que utilizando la partición mostrada, se puede expresar como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab} \\ \mathbf{k}_{ba} & \mathbf{k}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} \quad (8-63)$$

donde $\{\mathbf{f}_a\}$, $\{\mathbf{f}_b\}$, $\{\mathbf{u}_a\}$ y $\{\mathbf{u}_b\}$ son vectores de 3 filas y 1 columna y $[\mathbf{k}_{aa}]$, $[\mathbf{k}_{ab}]$, $[\mathbf{k}_{ba}]$ y $[\mathbf{k}_{bb}]$ son matrices de 3 filas y 3 columnas. Al expandir la ecuación (8-63) obtenemos:

$$\{\mathbf{f}_a\} = [\mathbf{k}_{aa}]\{\mathbf{u}_a\} + [\mathbf{k}_{ab}]\{\mathbf{u}_b\} = \{\mathbf{f}_{aa}\} + \{\mathbf{f}_{ab}\} \quad (8-64)$$

y

$$\{\mathbf{f}_b\} = [\mathbf{k}_{ba}]\{\mathbf{u}_a\} + [\mathbf{k}_{bb}]\{\mathbf{u}_b\} = \{\mathbf{f}_{ba}\} + \{\mathbf{f}_{bb}\} \quad (8-65)$$

Estas ecuaciones indican que las fuerzas en un extremo del elemento están compuestas por dos partes, una proveniente de los desplazamientos en el propio extremo, y la otra de los desplazamientos en el otro extremo. Por esta razón:

$$\{\mathbf{f}_a\} = \{\mathbf{f}_{aa}\} + \{\mathbf{f}_{ab}\} \quad (8-66)$$

y

$$\{\mathbf{f}_b\} = \{\mathbf{f}_{ba}\} + \{\mathbf{f}_{bb}\} \quad (8-67)$$

donde $\{\mathbf{f}_{aa}\}$ son las fuerzas en el nudo **a** causadas por los desplazamientos del nudo **a**, y análogamente $\{\mathbf{f}_{ab}\}$ son las fuerzas en el mismo nudo **a** causadas por los desplazamientos del nudo **b**. Entonces como regla general $\{\mathbf{f}_{ij}\}$ son las fuerzas en el nudo **i** causadas por desplazamientos en el nudo **j** y se obtienen por medio de la submatriz $[\mathbf{k}_{ij}]$, así:

$$\{\mathbf{f}_{ij}\} = [\mathbf{k}_{ij}]\{\mathbf{u}_j\} \quad (8-68)$$

Ejemplo 8-2

Determinar la matriz de rigidez de una viga con las siguientes propiedades: $\mathbf{L} = 3 \text{ m}$ y $\mathbf{E} = 25 \text{ GPa}$ (25 gigapascals = 25 000 MPa $\approx 250\,000 \text{ kgf/cm}^2 \approx 2\,500\,000 \text{ ton/m}^2$). Su sección tiene 0.4 m de ancho y 0.3 m de alto. Se debe determinar su matriz de rigidez en coordenadas locales.

Los términos de la matriz se calculan así:

$$\mathbf{A} = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12 \text{ m}^2$$

$$\mathbf{I} = 0.4 \cdot 0.3^3 / 12 = 0.0009 \text{ m}^4$$

$$\frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{L}} = \frac{0.12 \text{ m}^2 \cdot 25 \text{ GPa}}{3 \text{ m}} = 1 \text{ (GN / m)} = 1\,000\,000 \text{ kN / m}$$

$$\frac{12\mathbf{EI}}{\mathbf{L}^3} = \frac{12 \cdot 25 \text{ GPa} \cdot 0.0009 \text{ m}^4}{27 \text{ m}^3} = 0.01 \text{ (GN / m)} = 10\,000 \text{ kN / m}$$

$$\frac{6\mathbf{EI}}{\mathbf{L}^2} = \frac{6 \cdot 25 \text{ GPa} \cdot 0.0009 \text{ m}^4}{9 \text{ m}^3} = 0.015 \text{ (GN / m)} = 15\,000 \text{ kN / m}$$

$$\frac{4\mathbf{EI}}{\mathbf{L}} = \frac{4 \cdot 25 \text{ GPa} \cdot 0.0009 \text{ m}^4}{3 \text{ m}} = 0.03 \text{ (GN} \cdot \text{m / rad)} = 30\,000 \text{ kN} \cdot \text{m / rad}$$

$$\frac{2\mathbf{EI}}{\mathbf{L}} = \frac{2 \cdot 25 \text{ GPa} \cdot 0.0009 \text{ m}^4}{3 \text{ m}} = 0.015 \text{ (GN} \cdot \text{m / rad)} = 15\,000 \text{ kN} \cdot \text{m / rad}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez es:

$$[k] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 0 & -10 & 15 \\ 0 & 15 & 30 & 0 & -15 & 15 \\ -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -15 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 0 & -15 & 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{kN/m} \\ \text{kN/m} \\ \text{kN} \cdot \text{m/rad} \\ \text{kN/m} \\ \text{kN/m} \\ \text{kN} \cdot \text{m/rad} \end{matrix}$$

Ejemplo 8-3

El elemento del Ejemplo 8-2 se lleva a la posición deformada mostrada en la Figura 8-14. Determinar las fuerzas necesarias para mantener la posición deformada.

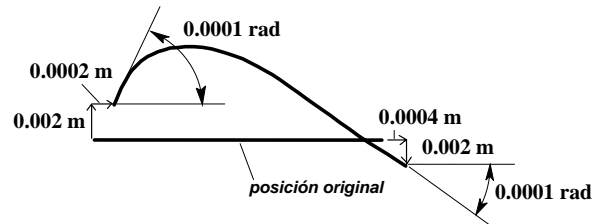


Figura 8-14 - Ejemplo 8-3 - Deformaciones en los extremos del elemento

Tenemos entonces que:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0002 \\ 0.002 \\ 0.0001 \\ 0.0004 \\ -0.002 \\ -0.0001 \end{Bmatrix}$$

Al hacer el producto $\{f\}_{6,1} = [k]_{6,6} \{u\}_{6,1}$ obtenemos los siguientes resultados cuyas unidades son kN y kN·m:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -200 \\ 40 \\ 61.5 \\ 200 \\ -40 \\ 58.5 \end{Bmatrix}$$

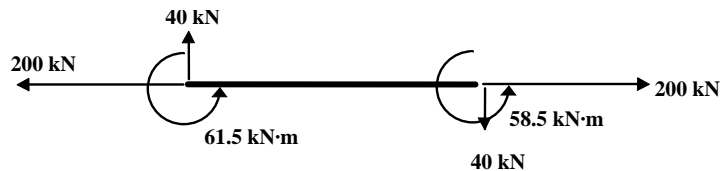


Figura 8-15 - Ejemplo 8-3 - Fuerzas del elemento

8.4 — Principio de contragradiente

Supongamos que tenemos unas fuerzas aplicadas a un elemento en sus extremos, estas fuerzas están descritas por medio de un vector que está expresado en un sistema de coordenadas local. A este vector

lo llamamos $\{f\}$. Ahora expresamos estas mismas fuerzas en un sistema de coordenadas global y a este vector lo llamamos $\{F\}$. Además conocemos una matriz que nos permite transformar las fuerzas de un sistema al otro. A esta matriz la llamamos $[T]$, y la siguiente operación es válida:

$$\{F\} = [T]\{f\} \quad (8-69)$$

Por otro lado existe un estado de deformaciones del elemento asociado con las fuerzas que se aplicaron en sus extremos dadas en el vector $\{f\}$. Este estado de deformaciones lo podemos describir por medio de los desplazamientos en los nudos del elemento por medio del vector $\{u\}$, donde las componentes de los desplazamientos están expresadas en el sistema local. Análogamente existe un vector de desplazamientos, expresado en el sistema global, $\{U\}$ asociado con $\{F\}$. Las fuerzas y desplazamientos están asociados a través de unas relaciones de rigidez, las cuales se pueden expresar para el sistema local así:

$$\{f\} = [k]\{u\} \quad (8-70)$$

y para el sistema global de la siguiente manera:

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (8-71)$$

Hasta ahora disponemos de relaciones entre $\{f\}$ y $\{F\}$, entre $\{f\}$ y $\{u\}$ y entre $\{F\}$ y $\{U\}$. Pero no disponemos de una manera de relacionar $\{U\}$ con $\{u\}$. Esta última relación la podemos buscar de la siguiente manera: sabemos que el trabajo que han realizado las fuerzas a través del desplazamiento realizado puede expresarse como (véase la Sección 1.6):

$$W = \frac{1}{2} \{U\}^T \{F\} \quad (8-72)$$

y análogamente como:

$$w = \frac{1}{2} \{u\}^T \{f\} \quad (8-73)$$

Estas ecuaciones de trabajo son válidas siempre que los sistemas de coordenadas tengan componentes ortogonales, de tal manera que cada componente de fuerza sólo puede hacer trabajo con un desplazamiento colineal, o sea en la dirección de su propio eje de coordenadas. Además el trabajo es invariante con respecto a los sistemas de coordenadas, pues observar el elemento estructural con un sistema o con el otro no varía el trabajo total que se realiza al deformarlo. Por lo tanto $W = w$ y:

$$\frac{1}{2} \{U\}^T \{F\} = \frac{1}{2} \{u\}^T \{f\} \quad (8-74)$$

Ahora substituyendo la ecuación (8-69) en la ecuación anterior y eliminando los términos iguales a ambos lados obtenemos:

$$\{U\}^T [T] \{f\} = \{u\}^T \{f\} \quad (8-75)$$

o

$$\{U\}^T [T] = \{u\}^T \quad (8-76)$$

que al aplicar $([A] [B])^T = [B]^T [A]^T$ conduce a:

$$\{u\} = [T]^T \{U\} \quad (8-77)$$

O sea que hemos probado que la misma matriz de transformación $[T]$ que se utiliza para cambiar el sistema de coordenadas de las fuerzas, opera para transformar desplazamientos, pero a través de $[T]^T$. Esta propiedad se conoce con el nombre de *principio de contragradiente*.

8.5 — Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales

En la Sección 8.3 se dedujo la relación entre fuerzas y deformaciones para el sistema de coordenadas local del elemento, como:

$$\{f\} = [k]\{u\} \quad (8-78)$$

ahora queremos obtener la relación análoga en coordenadas globales:

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (8-79)$$

Por medio de la ecuación (8-38) podemos convertir los vectores de fuerzas de un sistema de coordenadas al otro,

$$\{F\} = [\lambda]\{f\} \quad (8-80)$$

y gracias al principio de contragradiente sabemos que:

$$\{u\} = [\lambda]^T \{U\} \quad (8-81)$$

Reemplazando (8-81) en (8-78) obtenemos:

$$\{f\} = [k][\lambda]^T \{U\} \quad (8-82)$$

y (8-82) en (8-80):

$$\{F\} = [\lambda][k][\lambda]^T \{U\} \quad (8-83)$$

que es igual a la ecuación (8-79) y por lo tanto:

$$[K] = [\lambda][k][\lambda]^T \quad (8-84)$$

Aplicando la anterior a la ecuación (8-68) y haciendo las transformaciones apropiadas obtenemos:

$$\{F_{ij}\} = [K_{ij}]\{U_j\} = [\lambda][k_{ij}][\lambda]^T \{U_j\} \quad (8-85)$$

Esto quiere decir que la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales es:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\lambda][k_{aa}][\lambda]^T & [\lambda][k_{ab}][\lambda]^T \\ [\lambda][k_{ba}][\lambda]^T & [\lambda][k_{bb}][\lambda]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8-86)$$

Haciendo las operaciones apropiadas obtenemos la siguiente forma de la matriz de rigidez para un elemento de pórtico plano en coordenadas globales:

$$[K] = \rho \begin{bmatrix} \beta c^2 + 12s^2 & sc(12 - \beta) & 6Ls & -\beta c^2 - 12s^2 & sc(\beta - 12) & 6Ls \\ sc(12 - \beta) & \beta s^2 + 12c^2 & 6Lc & sc(\beta - 12) & -\beta s^2 - 12c^2 & 6Lc \\ 6Ls & 6Lc & 4L^2 & -6Ls & -6Lc & 2L^2 \\ -\beta c^2 - 12s^2 & sc(\beta - 12) & -6Ls & \beta c^2 + 12s^2 & sc(12 - \beta) & -6Ls \\ sc(\beta - 12) & -\beta s^2 - 12c^2 & -6Lc & sc(12 - \beta) & \beta s^2 + 12c^2 & -6Lc \\ 6Ls & 6Lc & 2L^2 & -6Ls & -6Lc & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (8-87)$$

donde

$$\rho = \frac{EI}{L^3} \quad \beta = \frac{AL^2}{I} \quad s = \sin \alpha \quad c = \cos \alpha$$

α = ángulo entre el eje x local y el eje X global

Ejemplo 8-4

Determinar la matriz de rigidez en coordenadas globales del elemento mostrado en la Figura 8-16, el cual tiene las siguientes propiedades: $L = 4 \text{ m}$, $E = 20 \text{ GPa}$, área $A = 0.01 \text{ m}^2$ e inercia $I = 0.1 \text{ m}^4$.

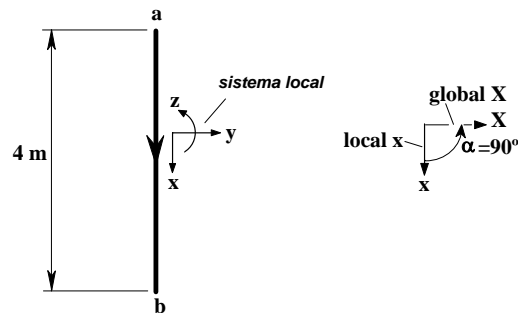


Figura 8-16 - Elemento del Ejemplo 8-4

Se calculan las constantes así:

$$\rho = 20 \text{ GPa} \cdot 0.01 \text{ m} / (4 \text{ m})^3 = 0.03125 \text{ GPa/m}^4 = 31\,250 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\beta = 0.01 \text{ m}^2 \cdot 4^2 \text{ m}^2 / 0.1 \text{ m}^4 = 1.6$$

$$\sin \alpha = \sin (90^\circ) = 1.0$$

$$\cos \alpha = \cos (90^\circ) = 0.0$$

y la matriz de rigidez en coordenadas globales es:

$$[k] = 31250 \begin{bmatrix} 12 & 0 & 24 & -12 & 0 & 24 \\ 0 & 1.6 & 0 & 0 & -1.6 & 0 \\ 24 & 0 & 64 & -24 & 0 & 32 \\ -12 & 0 & -24 & 12 & 0 & -24 \\ 0 & -1.6 & 0 & 0 & 1.6 & 0 \\ 24 & 0 & 32 & -24 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

■

8.6 — Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura

Tenemos una estructura compuesta por elementos del tipo mostrado en la Figura 8-17.

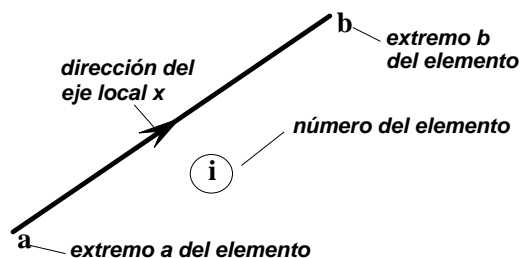


Figura 8-17 - Elemento de la estructura

El elemento i tiene la siguiente relación entre las fuerzas en sus extremos y los desplazamientos allí:

$$\begin{Bmatrix} F_a^i \\ F_b^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa}^i & K_{ab}^i \\ K_{ba}^i & K_{bb}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} \quad (8-88)$$

Supongamos una estructura de la siguiente forma:

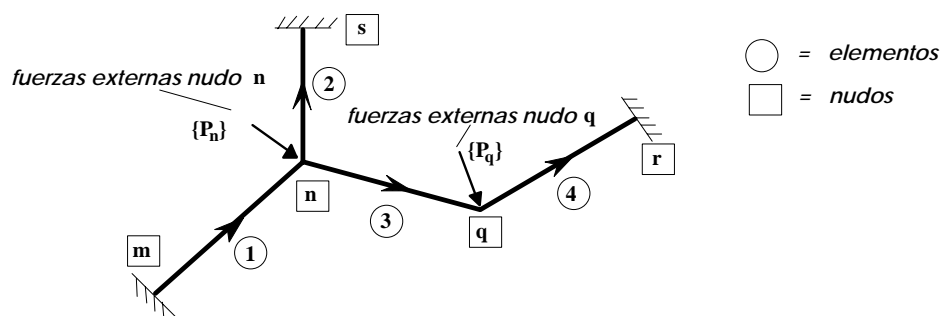


Figura 8-18 - Estructura

Ahora planteamos el equilibrio de nudo n :

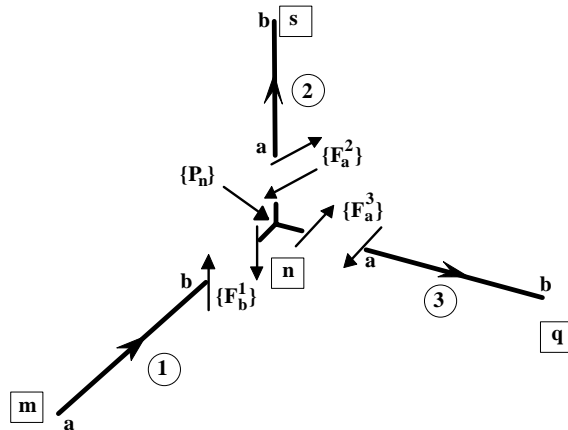


Figura 8-19 - Equilibrio nudo n

De la Figura 8-19:

$$\{P_n\} = \{F_b^1\} + \{F_a^2\} + \{F_a^3\} \quad (8-89)$$

pero a su vez

$$\begin{aligned}
\{F_b^1\} &= [K_{ba}^1] \{U_m\} + [K_{bb}^1] \{U_n\} \\
\{F_a^2\} &= [K_{aa}^2] \{U_n\} + [K_{ab}^2] \{U_s\} \\
\{F_a^3\} &= [K_{aa}^3] \{U_n\} + [K_{ab}^3] \{U_q\}
\end{aligned} \tag{8-90}$$

reemplazando (8-90) en (8-89) y tomando en cuenta que $\{U_m\} = \{U_s\} = \mathbf{0}$ obtenemos:

$$\{P_n\} = \left[[K_{bb}^1] + [K_{aa}^2] + [K_{aa}^3] \right] \{U_n\} + [K_{ab}^3] \{U_q\} \tag{8-91}$$

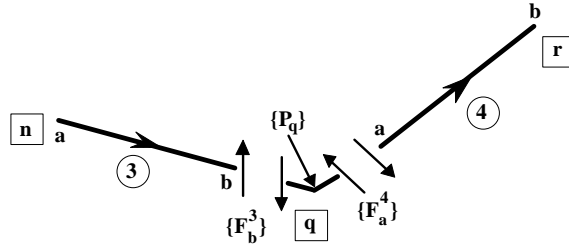


Figura 8-20 - Equilibrio nudo q

De la Figura 8-20:

$$\{P_q\} = \{F_b^3\} + \{F_a^4\} \tag{8-92}$$

pero a su vez

$$\begin{aligned}
\{F_b^3\} &= [K_{ba}^3] \{U_n\} + [K_{bb}^3] \{U_q\} \\
\{F_a^4\} &= [K_{aa}^4] \{U_q\} + [K_{ab}^4] \{U_r\}
\end{aligned} \tag{8-93}$$

reemplazando (8-93) en (8-92) y tomando en cuenta que $\{U_r\} = \mathbf{0}$ obtenemos:

$$\{P_q\} = [K_{ba}^3] \{U_n\} + \left[[K_{bb}^3] + [K_{aa}^4] \right] \{U_q\} \tag{8-94}$$

reordenando (8-91) y (8-94) en una sola expresión:

$$\begin{Bmatrix} \{P_n\} \\ \{P_q\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{bb}^1] + [K_{aa}^2] + [K_{aa}^3] & [K_{ab}^3] \\ [K_{ba}^3] & [K_{bb}^3] + [K_{aa}^4] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_n\} \\ \{U_q\} \end{Bmatrix} \tag{8-95}$$

y este es el planteamiento del equilibrio de la estructura en su totalidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera general:

$$\{P\} = [K_E] \{U\} \tag{8-96}$$

donde $\{P\}$ son las fuerzas externas a la estructura aplicadas en los nudos libres de desplazarse, o sea aquellos diferentes de los apoyos, $[K_E]$ es la matriz de rigidez asociada con los nudos libres de la estructura y $\{U\}$ son los desplazamientos de estos nudos libres.

Si en la matriz de rigidez de toda la estructura, tal como se presenta en la ecuación (8-95), a cada submatriz de rigidez de los elementos le reemplazamos la nomenclatura de **a** y **b** por la de los nombres

de los nudos donde incide el elemento, por ejemplo al elemento 3 se le reemplaza **a** por **n** y **b** por **q**, podemos ver que cada submatriz está localizada en la fila o columna correspondiente a cada nudo **n** o **q**. Lo mismo es válido para los otros elementos. Por lo tanto, el proceso sistemático de obtener la matriz de rigidez de la estructura $[K_E]$ es el siguiente:

Primero debemos obtener las matrices de rigidez de todos los elementos de la estructura en coordenadas globales. Para el caso de pórtico plano, si la estructura tiene **n** nudos, la matriz de rigidez total, incluyendo los grados de libertad de los apoyos, tiene dimensiones de $3n \times 3n$. Sobre esta matriz de toda la estructura se coloca la contribución de rigidez de cada uno de los elementos. Para el efecto podemos trabajar con submatrices de 3×3 en cada uno de los nudos.

El elemento **i** como el mostrado en la Figura 8-17 va del extremo **a** al extremo **b**. Supongamos que el extremo **a** llega al nudo **m** de la estructura y el extremo **b** al nudo **q** de la estructura. Entonces la ecuación (8-88) se convierte en:

$$\begin{Bmatrix} F_m^i \\ F_q^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{mm}^i & K_{mq}^i \\ K_{qm}^i & K_{qq}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ U_q \end{Bmatrix} \quad (8-97)$$

Entonces cada una de las submatrices de (8-97) aporta su rigidez sumando a la rigidez existente en el nudo correspondiente, por ejemplo $[K_{qm}^i]$ se suma a lo que exista en la submatriz localizada en la fila **q** con la columna **m** como muestra la ecuación (8-98).

$$[K_E] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & m & \dots & q & \dots & n \end{matrix} & \downarrow \leftarrow \text{nudos} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ q \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & [K_{mm}^i] & & [K_{mq}^i] & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & [K_{qm}^i] & & [K_{qq}^i] & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & n \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8-98)$$

Ejemplo 8-5

Debemos encontrar la forma de ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura mostrada en la Figura 8-21.

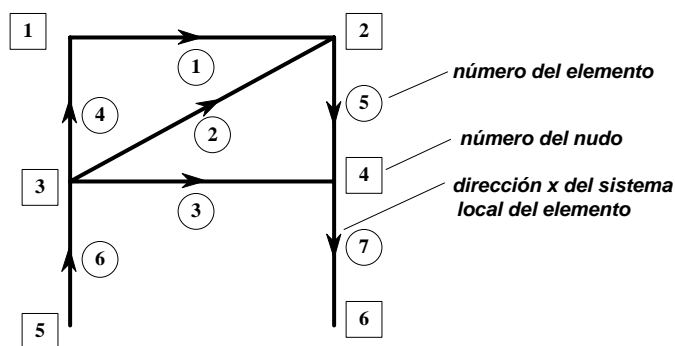


Figura 8-21 - Estructura del Ejemplo 8-5

Dado que en pórtico plano hay tres grados de libertad por nudo, la estructura tiene en total $6 \times 3 = 18$ grados de libertad. Trabajando con submatrices de tres por tres, podemos describir la matriz de

rigidez como una matriz de 6 filas por 6 columnas, donde cada fila y cada columna representa tres grados de libertad.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa}^1 + K_{bb}^4 & K_{ab}^1 & K_{ba}^4 & 0 & 0 & 0 \\ K_{ba}^1 & K_{bb}^1 + K_{bb}^2 + K_{aa}^5 & K_{ba}^2 & K_{ab}^5 & 0 & 0 \\ K_{ab}^4 & K_{ab}^2 & K_{aa}^2 + K_{aa}^3 + K_{aa}^4 + K_{bb}^6 & K_{ab}^3 & K_{ba}^6 & 0 \\ 0 & K_{ba}^5 & K_{ba}^3 & K_{bb}^3 + K_{bb}^5 + K_{aa}^7 & 0 & K_{ab}^7 \\ 0 & 0 & K_{ab}^6 & 0 & K_{aa}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{ba}^7 & 0 & K_{bb}^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

■

8.7 — Apoyos de la estructura

La solución de un problema estático consiste en resolver el sistema:

$$\{F\} = [K]\{X\} \quad (8-99)$$

en donde se conocen las fuerzas externas aplicadas a la estructura, $\{F\}$, la matriz de rigidez de toda la estructura $[K]$ y se desconocen los desplazamientos de los nudos de la estructura $\{X\}$.

Si se intenta resolver el sistema de ecuaciones simultáneas presentado por la ecuación (8-99) se encontraría que la matriz $[K]$ es singular (no tiene inverso) debido a que la estructura no está apoyada y por lo tanto hay necesidad de introducir las restricciones de los apoyos, los cuales deben conducir a que la estructura sea estable, pues en caso contrario la inestabilidad de la estructura por apoyos inadecuados conduce a singularidad de la matriz de rigidez nuevamente. Los apoyos se introducen al sistema simplemente tachando, en el sistema de ecuaciones, las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad que están restringidos, con lo cual el sistema de la ecuación (8-99) se convierte en:

$$\{P\} = [K_E]\{U\} \quad (8-100)$$

Ejemplo 8-6

En la estructura del ejemplo 8-5, suponer que los nudos 5 y 6 están empotrados. Encontrar la matriz de rigidez de la estructura teniendo en cuenta estos apoyos.

Simplemente se quitan del sistema las filas correspondientes a los nudos 5 y 6, y de la matriz de rigidez las dos últimas columnas. Por lo tanto el sistema de ecuaciones queda así:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa}^1 + K_{bb}^4 & K_{ab}^1 & K_{ba}^4 & 0 \\ K_{ba}^1 & K_{bb}^1 + K_{bb}^2 + K_{aa}^5 & K_{ba}^2 & K_{ab}^5 \\ K_{ab}^4 & K_{ab}^2 & K_{aa}^2 + K_{aa}^3 + K_{aa}^4 + K_{bb}^6 & K_{ab}^3 \\ 0 & K_{ba}^5 & K_{ba}^3 & K_{bb}^3 + K_{bb}^5 + K_{aa}^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

■

Si observamos en detalle el sistema de ecuaciones que representa la ecuación matricial (8-99), veremos que en el vector $\{X\}$ todos los términos que correspondan a apoyos tienen un valor de cero, por lo tanto en la matriz de rigidez las columnas correspondientes a estos apoyos siempre van a ser multiplicadas por cero y por lo tanto no tiene ningún sentido mantenerlas en la matriz de rigidez de la estructura. Igualmente no se justificaría mantener los ceros de los apoyos dentro del vector de desplazamientos, por lo tanto las filas correspondientes a los apoyos en el vector $\{X\}$ pueden quitarse del vector, convirtiéndolo en el vector $\{U\}$. Estas mismas filas en el vector de fuerzas $\{F\}$ corresponden a las reacciones de los apoyos $\{R\}$, las cuales son importantes para quien realiza el análisis de la estructura y

además permiten verificar el equilibrio de la estructura y obtener las fuerzas en la cimentación. Por lo tanto podemos replantear el sistema mostrado en la ecuación (8-99) así:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E & \mathbf{K}_{E0} \\ \mathbf{K}_R & \mathbf{K}_{R0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (8-101)$$

Las matrices $[\mathbf{K}_{E0}]$ y $[\mathbf{K}_{R0}]$ no son de interés pues van a ser multiplicadas por $\mathbf{0}$, igualmente en el vector de desplazamientos podemos eliminar las filas que son cero. Haciendo estas dos operaciones obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E \\ \mathbf{K}_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \end{Bmatrix} \quad (8-102)$$

que al expandirlo nos conduce a:

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{K}_E]\{\mathbf{U}\} \quad (8-103)$$

y

$$\{\mathbf{R}\} = [\mathbf{K}_R]\{\mathbf{U}\} \quad (8-104)$$

Con respecto a la ecuación (8-103) se debe hacer énfasis en que el vector $\{\mathbf{P}\}$ corresponde a las fuerzas externas aplicadas en los nudos libres de la estructura, $[\mathbf{K}_E]$ es la matriz de rigidez de los grados de libertad libres de desplazarse de la estructura, y $\{\mathbf{U}\}$ corresponde a los desplazamientos de los grados de libertad libres. Es importante insistir que este es el sistema de ecuaciones simultáneas que se resuelve para determinar los desplazamientos de la estructura ante las fuerzas externas. Una vez obtenidos los desplazamientos $\{\mathbf{U}\}$ utilizando la ecuación (8-103); por medio de la ecuación (8-104) es posible obtener las reacciones de la estructura en sus apoyos $\{\mathbf{R}\}$.

8.8 — Solución para fuerzas estáticas por el método de rigidez

El análisis de una estructura utilizando análisis matricial por el método de la rigidez consiste en resolver el sistema de ecuaciones simultáneas representado en la ecuación (8-103). En este sistema las incógnitas son los desplazamientos de los grados de libertad no apoyados de la estructura $\{\mathbf{U}\}$. Una vez se conocen estos desplazamientos, es posible encontrar las reacciones de la estructura por medio de la ecuación (8-104) y las fuerzas en los elementos, multiplicando estos desplazamientos por las matrices de rigidez de los elementos. En el disquete que se suministra se ha incluido el programa MATRIQB que realiza este análisis para estructuras de pórtico plano con fuerzas en sus nudos.

Ejemplo 8-7

Se quiere analizar por el método de rigidez una viga de diez metros de luz, empotrada en sus dos extremos y con una fuerza concentrada de 100 kN en el centro de la luz, la cual se muestra en la Figura 8-22(a). Las propiedades de la sección de la viga son las siguientes: Inercia $\mathbf{I} = 0.005 \text{ m}^4$, Area $\mathbf{A} = 0.25 \text{ m}^2$ y $\mathbf{E} = 25 \text{ GPa}$.

Para efectos del análisis se definen tres nudos, como muestra la Figura 8-22(b), lo cual genera dos elementos de 5 m de longitud cada uno. Para el análisis se utiliza la nomenclatura mostrada en la misma figura.

Primero se calculan las matrices de rigidez de los elementos, las cuales son iguales dado que los elementos tienen las mismas propiedades y orientación. El sistema de coordenadas locales de los elementos coincide con el sistema global, por lo tanto α es cero.

Entonces:

$$\rho = EI/L^3 = 1000 \text{ kN/m}$$

$$\beta = AL^2/I = 1250$$

$$c = \cos \alpha = 1.0$$

$$s = \sin \alpha = 0.0$$

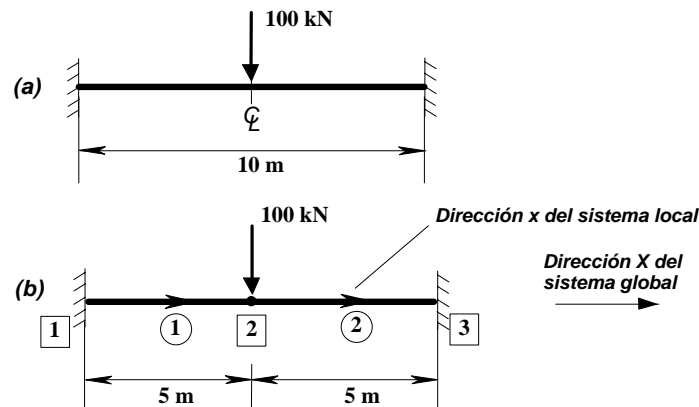


Figura 8-22 - Estructura del Ejemplo 8-7

y la matriz de rigidez de los elementos es (coordenadas locales = coordenadas globales):

$$[K_{\text{ele}}] = 1000 \times \begin{bmatrix} 1250 & 0 & 0 & -1250 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -1250 & 0 & 0 & 1250 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix}$$

Ahora buscamos la forma del ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura:

$$[K] = \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \downarrow \leftarrow \text{nudos} \\ \hline K_{aa}^1 & K_{ab}^1 & 0 & 1 \\ K_{ba}^1 & K_{bb}^1 + K_{aa}^2 & K_{ab}^2 & 2 \\ 0 & K_{ba}^2 & K_{bb}^2 & 3 \end{array}$$

La matriz de rigidez de los grados de libertad libres $[K_E]$ se obtiene tachando las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad restringidos por los apoyos.

$$[K_E] = [K_{bb}^1 + K_{aa}^2] = 1000 \times \begin{bmatrix} 2500 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

El inverso $[K_E]^{-1}$ de esta matriz es igual al inverso de sus elementos, dado que es diagonal:

$$[K_E]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 \times 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 4.167 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

La matriz $[K_R]$ para obtener las reacciones en los apoyos se obtiene tachando las columnas de $[K]$ correspondientes a los grados de libertad apoyados y las filas correspondientes a los grados de libertad libres:

$$[K_R] = \begin{bmatrix} K_{ab}^1 \\ K_{ba}^2 \end{bmatrix} = 1000 \times \begin{bmatrix} -1250 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & -30 & 50 \\ -1250 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 \end{bmatrix}$$

El vector de fuerzas en el nudo libre $\{P\}$ es:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema para obtener los desplazamientos $\{U\}$ del nudo libre:

$$\{P\} = [K_E]\{U\} \Rightarrow \{U\} = [K_E]^{-1}\{P\}$$

y

$$\{U\} = \{U_2\} = \begin{Bmatrix} U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \end{Bmatrix} = [K_E]^{-1}\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4.167 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto la viga se deflecta en el centro de la luz 4.167 mm hacia abajo. Las reacciones en los apoyos se obtienen de la siguiente operación:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{1z} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{3z} \end{Bmatrix} = [K_R]\{U\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 125 \\ 0 \\ 50 \\ -125 \end{Bmatrix}$$

En la Figura 8-23 se muestran las reacciones obtenidas:

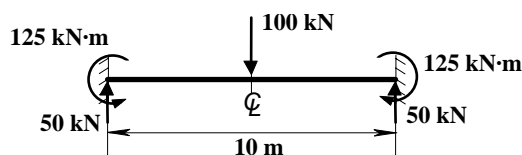


Figura 8-23 - Reacciones obtenidas, Ejemplo 8-7

Las fuerzas en los elementos se obtienen multiplicando la matriz de rigidez de cada elemento por el vector de desplazamientos de los nudos a que llega el elemento. En este caso dado que el sistema local coincide con el global, podemos utilizar las matrices de los elementos obtenidas para ensamblar la estructura en la obtención de las fuerzas en coordenadas locales. Para el elemento 1, tenemos:

$$\begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \\ f_{bx} \\ f_{by} \\ f_{bz} \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4.167 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 125 \\ 0 \\ -50 \\ 125 \end{Bmatrix}$$

En la Figura 8-24 se muestran las fuerzas obtenidas:

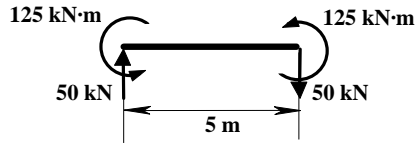


Figura 8-24 - Fuerzas en los extremos del elemento 1, Ejemplo 8-7

Para el elemento 2, tenemos:

$$\begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \\ f_{bx} \\ f_{by} \\ f_{bz} \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} 0 \\ -4.167 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -50 \\ -125 \\ 0 \\ 50 \\ -125 \end{Bmatrix}$$

En la Figura 8-25 se muestran las fuerzas obtenidas:

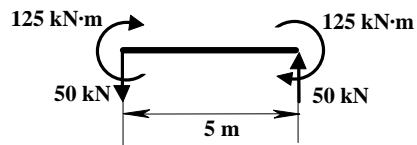


Figura 8-25 - Fuerzas en los extremos del elemento 2, Ejemplo 8-7

Es evidente que los resultados concuerdan perfectamente con los resultados clásicos de la resistencia de materiales, que indican que el momento en el apoyo para una viga empotrada en sus extremos, con una fuerza concentrada en el centro de la luz es $PL/8 = 100 \times 10 / 8 = 125$ y las reacciones en los apoyos son $P/2 = 50$.

■

Un aspecto que se deduce del ejemplo anterior es la necesidad de disponer de una manera de obtener las fuerzas en los extremos del elemento en coordenadas locales a partir de los desplazamientos de los nudos en coordenadas globales. Si miramos la deducción de la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales, Sección 8.5, vemos que la ecuación (8-82) precisamente nos produce ese resultado:

$$\{f\} = [k][\lambda]^T \{U\} \quad (8-105)$$

Por lo tanto el primer paso de la transformación nos da ese resultado. Si denominamos

$$[KT] = [k][\lambda]^T \quad (8-106)$$

y utilizando la misma nomenclatura de la ecuación (8-87), para elementos de pórtico plano tenemos la siguiente matriz:

$$[KT] = \rho \begin{bmatrix} \beta c & -\beta s & 0 & -\beta c & \beta s & 0 \\ 12s & 12c & 6L & -12s & -12c & 6L \\ 6Ls & 6Lc & 4L^2 & -6Ls & -6Lc & 2L^2 \\ -\beta c & \beta s & 0 & \beta c & -\beta s & 0 \\ -12s & -12c & -6L & 12s & 12c & -6L \\ 6Ls & 6Lc & 2L^2 & -6Ls & -6Lc & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (8-107)$$

donde

$$\rho = \frac{EI}{L^3} \quad \beta = \frac{AL^2}{I} \quad s = \sin \alpha \quad c = \cos \alpha$$

α = ángulo entre el eje x local y el eje X global

Otro aspecto importante que no se ha resuelto es el tratamiento de las fuerzas externas localizadas dentro del elemento. El procedimiento para tratarlas es el siguiente. Primero se calculan las fuerzas de empotramiento en cada uno de los elementos independientemente. Este sistema de fuerzas lo denominamos *Sistema E* pues se obtiene al fijar o empotrar todos los nudos. Luego tomamos todas las fuerzas externas aplicadas en los nudos que actúen sobre la estructura y a estas fuerzas le restamos en cada nudo la suma algebraica de las fuerzas producidas por el *sistema E* en ese nudo. A este sistema de fuerzas lo denominamos *Sistema L*, porque en él los nudos están libres para desplazarse al aplicar las fuerzas. La estructura se analiza por el método de la rigidez para las fuerzas del *sistema L*. La Figura 8-26, adaptada de [McGuire y Gallagher, 1979], aclara estos conceptos.

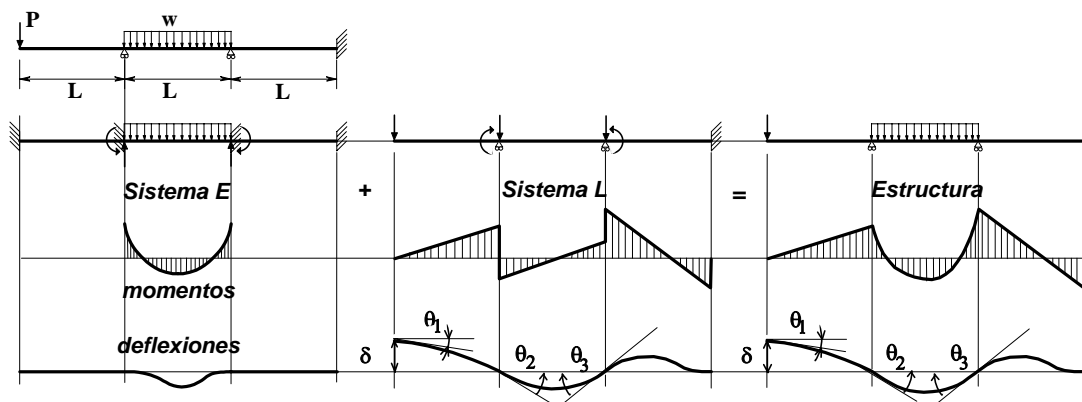


Figura 8-26 - Sistemas de fuerza para análisis estático por el método de rigidez

Por último luego que se hayan determinado las fuerzas en los elementos con base en las deformaciones que tuvo la estructura analizada con las fuerzas del *sistema L* se les adicionan las fuerzas correspondientes del *sistema E*. Por lo tanto las fuerzas realmente aplicadas sobre la estructura son la suma del *sistema E* más el *sistema L*. Las deformaciones en los nudos obtenidas del análisis del *sistema L* son las deformaciones de la estructura, pero sólo en los nudos. Para obtener las deformaciones dentro del elemento hay necesidad de sumar las producidas por los dos *sistemas de fuerza E y L*.

En resumen las etapas necesarias para llevar a cabo el análisis de una estructura por el método de la rigidez son las siguientes:

(a) Se dividen las fuerzas aplicadas a la estructura en dos sistemas de fuerzas, cuya suma es igual a las fuerzas aplicadas. Estos sistemas son:

- *Sistema E* - Son las reacciones que se obtienen en los extremos de los elementos al suponerlos empotrados
- *Sistema L* - Son las fuerzas en los nudos que se obtienen al restarle a las fuerzas externas aplicadas en los nudos, las resultantes en los nudos de las fuerzas del *sistema E*.

Una vez definidos los sistemas, para cada elemento i se calcula $\{f_i^E\}$ del sistema E .

(b) Se evalúan las matrices de transformación de coordenadas $[\lambda_i]$ para cada miembro de la estructura y con ellas se convierten las reacciones de empotramiento en los nudos, sistema E , de coordenadas locales a coordenadas globales:

$$\{F_i^E\} = [\lambda_i] \{f_i^E\} \quad (8-108)$$

(c) Se suman algebraicamente en cada nudo j los $\{F_i^E\}$ de cada elemento i que llegue a ese nudo, para obtener las fuerzas sobre el nudo del sistema E , $\{P_j^E\}$.

(d) Se encuentra en cada nudo j el vector de fuerzas del sistema L , así:

$$\{P_j^L\} = \{P_j^A\} - \{P_j^E\} \quad (8-109)$$

donde $\{P_j^A\}$ corresponde a las fuerzas concentradas externas aplicadas en el nudo j .

(e) Se encuentran para cada elemento i la matriz de rigidez $[K_i]$ en coordenadas globales y la matriz $[KT_i]$, ecuación (8-107).

(f) Se ensambla la matriz de rigidez $[K]$ de toda la estructura utilizando los $[K_i]$ correspondientes, obtenidos en el paso anterior.

(g) Se fracciona $[K]$ en las matrices $[K_E]$ de grados de libertad libres y la matriz $[K_R]$ para obtener las reacciones en los apoyos.

(h) Se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas para las fuerzas del sistema L , siendo $\{U\}$ las incógnitas,

$$[K_E] \{U\} = \{P\} \quad (8-110)$$

(i) Se encuentran las fuerzas en cada elemento i en coordenadas locales con base en los desplazamientos obtenidos en el paso anterior.

$$\{f_i^L\} = [KT_i] \{U\} \quad (8-111)$$

(j) Se encuentran las fuerzas reales en cada elemento i en coordenadas locales utilizando $\{f_i^E\}$ del paso (a) y $\{f_i^L\}$ del paso anterior.

$$\{f_i\} = \{f_i^E\} + \{f_i^L\} \quad (8-112)$$

(k) Se calculan las reacciones en los apoyos utilizando:

$$\{R\} = [K_R] \{U\} \quad (8-113)$$

a estas reacciones hay necesidad de sumarle las fuerzas en los nudos de apoyo provenientes del sistema E , para obtener las reacciones totales $\{R_T\}$, así:

$$\{R_T\} = \{R\} + \{F^E\} \quad (8-114)$$

Tema N° 13 — Igualación y condensación de grados de libertad

9.1 — Introducción

El Capítulo anterior se dedicó a una introducción al análisis matricial de estructuras, más con el fin de familiarizar al lector en el tema, en aquellos casos en que lo desconozca, o generar una nomenclatura que se utiliza en todo el tratamiento de los sistemas dinámicos de varios grados de libertad, para aquellos que lo conocen. El objetivo del presente Capítulo es familiarizar al lector con algunas metodologías que permiten modificar, según se requiera, el modelo matemático contenido dentro del análisis matricial. Estas modificaciones obedecen a una serie de razones, que se harán evidentes en lo presentado aquí y en el empleo de las metodologías expuestas en el planteamiento y solución de problemas de varios grados de libertad en los capítulos siguientes.

9.2 — Igualación de grados de libertad

Algunas veces conocemos algunas propiedades de la estructura que no se reflejan en la manera como se plantean las ecuaciones de equilibrio en el análisis matricial convencional. En general estas propiedades especiales de la estructura se pueden describir en función de relaciones lineales entre sus diferentes grados de libertad.

Supongamos que tenemos una estructura con p grados de libertad, la cual tiene k ecuaciones de ligadura que relacionan linealmente los p grados de libertad entre ellos, así:

$$\begin{aligned} a_{11}U_1 + a_{12}U_2 + \cdots + a_{1p}U_p &= 0 \\ a_{21}U_1 + a_{22}U_2 + \cdots + a_{2p}U_p &= 0 \\ \vdots & \\ a_{k1}U_1 + a_{k2}U_2 + \cdots + a_{kp}U_p &= 0 \end{aligned} \quad (9-1)$$

donde los coeficientes a_{ij} son números reales. Este sistema de ecuaciones puede expresarse matricialmente como:

$$[A]_{k,p} \{U\}_{p,1} = \{0\}_{k,1} \quad (9-2)$$

Por cada ecuación de ligadura generamos una dependencia entre un grado de libertad y otro, por lo tanto el sistema de ecuaciones anterior nos indica que existen k grados de libertad que dependen de los $n = p - k$ grados de libertad independientes. Particionando $\{U\}_{p,1}$ en $\{U_D\}_{k,1}$ con los grados de libertad dependientes y $\{U_I\}_{n,1}$ con los grados de libertad independientes, y análogamente particionando $[A]_{k,p}$ en $[A_D]_{k,k}$ y $[A_I]_{k,n}$, obtenemos:

$$[A]_{k,p} \{U\}_{p,1} = [A_I \mid A_D] \begin{Bmatrix} U_I \\ U_D \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (9-3)$$

y

$$[A_I \mid A_D] \begin{Bmatrix} U_I \\ U_D \end{Bmatrix} = [A_I]_{k,n} \{U_I\}_{n,1} + [A_D]_{k,k} \{U_D\}_{k,1} = \{0\} \quad (9-4)$$

Despejando $\{U_D\}$ de la ecuación anterior se obtiene:

$$\{U_D\} = -[A_D]^{-1}[A_I] \{U_I\} = [R_o] \{U_I\} \quad (9-5)$$

Reemplazando:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_I \\ U_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] \\ [R_o] \end{bmatrix} \{U_I\} = [R] \{U_I\} \quad (9-6)$$

y

$$\{U\}_{p,1} = [R]_{p,n} \{U_I\}_{n,1} \quad (9-7)$$

Lo anterior quiere decir que podemos expresar todos los p los grados de libertad de la estructura, $\{U\}$, sólo en función de los n grados de libertad independientes, $\{U_I\}$.

Por otro lado sabemos, ecuación (8-96), que:

$$\{P\} = [K_E] \{U\} \quad (9-8)$$

y al aplicar el principio de contragradiante a la ecuación (9-7) tenemos:

$$\{P_I\} = [R]^T \{P\} \quad (9-9)$$

Ahora, reemplazando la ecuación (9-8) en (9-9), obtenemos:

$$\{P_I\} = [R]^T [K_E] \{U\} \quad (9-10)$$

y al reemplazar (9-7) en (9-10):

$$\{P_I\} = [R]^T [K_E] [R] \{U_I\} \quad (9-11)$$

y

$$[K_I] = [R]^T [K_E] [R] \quad (9-12)$$

Hemos expresado la matriz de rigidez de la estructura en función únicamente de los n grados de libertad independientes. Cuando se resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas planteado en la ecuación (9-11) y se obtienen los desplazamientos de los grados de libertad independientes $\{U_I\}$; es posible determinar los desplazamientos de todos los grados de libertad faltantes, dependientes, utilizando la ecuación (9-7).

Este procedimiento tiene un sin número de aplicaciones. A continuación se presenta un ejemplo en el cual se utiliza para modificar la matriz de rigidez de una estructura, de tal manera que no haya deformaciones axiales en los elementos, o sea que éstos sean infinitamente rígidos axialmente. Este procedimiento, en general, se denomina *igualación de grados de libertad*.

Ejemplo 9-1

La estructura mostrada en la Figura 9-1 tiene las siguientes propiedades: $L = 1$, $I = 1$, $E = 1$ y $A = \psi$. Además la tangente del ángulo θ es $3/4$.

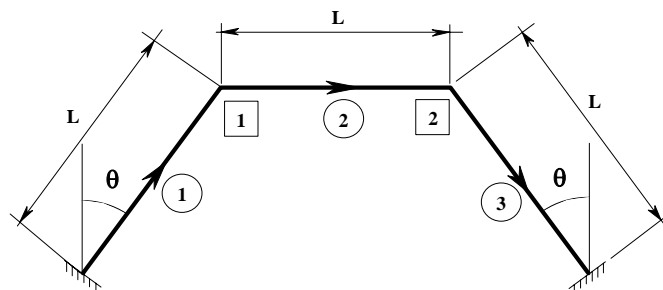


Figura 9-1 - Estructura del ejemplo 9-1

Dado que la estructura está empotrada en sus apoyos, no se dió nomenclatura a estos nudos y sólo se numeraron los nudos libres. La forma de ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura es la siguiente:

$$[\mathbf{K}_E] = \begin{array}{cc|c} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & \downarrow \leftarrow \text{nudos} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb}^1 + \mathbf{K}_{aa}^2 & \mathbf{K}_{ab}^2 \\ \mathbf{K}_{ba}^2 & \mathbf{K}_{bb}^2 + \mathbf{K}_{aa}^3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}$$

Ahora formamos las matrices de rigidez de los elementos. Sólo se presentan las submatrices que se necesitan para el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura.

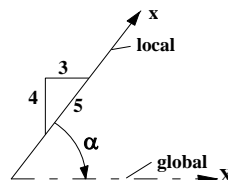
Elemento 1

$$\rho = EI/L^3 = 1.0$$

$$\beta = AL^2/I = \psi$$

$$c = \cos \alpha = 3/5$$

$$s = \sin \alpha = -4/5$$



$$[\mathbf{K}_{bb}^1] = \begin{bmatrix} \frac{9}{25}\psi + \frac{192}{25} & -\frac{12}{25}(12 - \psi) & \frac{24}{5} \\ -\frac{12}{25}(12 - \psi) & \frac{16}{25}\psi + \frac{108}{25} & -\frac{18}{5} \\ \frac{24}{5} & -\frac{18}{5} & 4 \end{bmatrix}$$

Elemento 2

$$\rho = EI/L^3 = 1.0, \quad \beta = AL^2/I = \psi, \quad c = \cos \alpha = 1.0 \text{ y } s = \sin \alpha = 0.0$$

$$[\mathbf{K}^2] = \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 & -\psi & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ -\psi & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

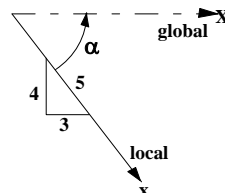
Elemento 3

$$\rho = EI/L^3 = 1.0$$

$$\beta = AL^2/I = \psi$$

$$c = \cos \alpha = 3/5$$

$$s = \sin \alpha = 4/5$$



$$[\mathbf{K}_{aa}^3] = \begin{bmatrix} \frac{9}{25}\psi + \frac{192}{25} & \frac{12}{25}(12 - \psi) & \frac{24}{5} \\ \frac{12}{25}(12 - \psi) & \frac{16}{25}\psi + \frac{108}{25} & \frac{18}{5} \\ \frac{24}{5} & \frac{18}{5} & 4 \end{bmatrix}$$

Ensamblando las matrices de los elementos se obtiene la matriz de rigidez de toda la estructura:

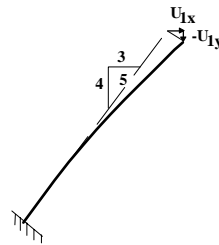
$$[K_E] = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 34\psi + 192 & 12\psi - 144 & 120 & -25\psi & 0 & 0 \\ 12\psi - 144 & 16\psi + 408 & 60 & 0 & -300 & 150 \\ \hline 120 & 60 & 200 & 0 & -150 & 50 \\ -25\psi & 0 & 0 & 34\psi + 192 & -12\psi + 144 & 120 \\ \hline 0 & -300 & -150 & -12\psi + 144 & 16\psi + 408 & -60 \\ 0 & 150 & 50 & 120 & -60 & 200 \end{bmatrix}$$

Para poder suprimir las deformaciones axiales de los elementos hay necesidad de establecer las ecuaciones de ligadura correspondientes. Esto se hace para cada uno de los elementos.

Elemento 1

$$\frac{U_{1x}}{4} = \frac{-U_{1y}}{3}$$

$$3U_{1x} + 4U_{1y} = 0$$



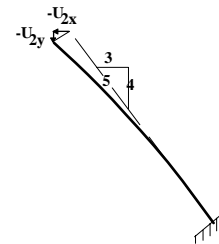
Elemento 2

$$U_{1x} = U_{2x} \Rightarrow U_{1x} - U_{2x} = 0$$

Elemento 3

$$\frac{-U_{2x}}{4} = \frac{-U_{2y}}{3}$$

$$3U_{2x} - 4U_{2y} = 0$$



La ecuación:

$$[A]\{U\} = \{0\}$$

queda entonces:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{1z} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tomando como variables independientes U_{1x} , U_{1z} y U_{2z} reorganizamos $\{U\}$ cambiando el orden de las filas, y $[A]$ cambiando el orden de las columnas; para reflejar los cambios en $\{U\}$:

$$\begin{Bmatrix} U_I \\ U_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1z} \\ U_{2z} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \end{Bmatrix} \quad [A_I] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [A_D] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$[A_D]^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1/4 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & -3/4 & -1/4 & \end{array} \right] \quad [R_o] = -[A_D]^{-1}[A_I] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3/4 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 3/4 & 0 & 0 & \end{array} \right]$$

$$[R] = \left[\begin{array}{c} [I] \\ [R_o] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & U_{1x} \\ 0 & 1 & 0 & U_{1z} \\ 0 & 0 & 1 & U_{2z} \\ -3/4 & 0 & 0 & U_{1y} \\ 1 & 0 & 0 & U_{2x} \\ 3/4 & 0 & 0 & U_{2y} \end{array} \right] \quad [R] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & U_{1x} \\ -3/4 & 0 & 0 & U_{1y} \\ 0 & 1 & 0 & U_{1z} \\ 1 & 0 & 0 & U_{2x} \\ 3/4 & 0 & 0 & U_{2y} \\ 0 & 0 & 1 & U_{2z} \end{array} \right]$$

Se calculó $[R]$ y luego se reorganizaron sus filas para reflejar el orden de $\{U\}$ original. Ahora podemos calcular $[K_I]$ como:

$$[K_I] = [R]^T [K_E] \quad [R] = \frac{1}{25} \left[\begin{array}{ccc|c} 1612.5 & -37.5 & -37.5 & \\ -37.5 & 200 & 50 & \\ -37.5 & 50 & 200 & \end{array} \right]$$

Hay dos aspectos importantes que resaltar del último resultado, el primero es que efectivamente desapareció el término Ψ , lo cual indica que desapareció el término de área de la matriz de rigidez de la estructura, y el segundo es que al hacer esta aproximación pudimos reducir el sistema de seis ecuaciones simultáneas a tres, lo cual puede ahorrar tiempo y trabajo durante la solución numérica del problema.

■

9.3 — Condensación de grados de libertad

Supongamos que tenemos una estructura sobre la cual podemos plantear la siguiente relación de rigidez:

$$\{P\} = [K_E] \{U\} \quad (9-13)$$

Si algunas de las fuerzas externas aplicadas sobre la estructura, representadas en el vector $\{P\}$ son nulas, podemos particionar el vector $\{P\}$ de la siguiente manera:

$$\{P\} = \left\{ \begin{array}{c} P_c \\ 0 \end{array} \right\} \quad (9-14)$$

donde $\{P_c\}$ corresponde a las fuerzas externas aplicadas en los nudos que no son cero. Análogamente podemos particionar el vector $\{U\}$ de la siguiente manera:

$$\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} U_c \\ U_o \end{array} \right\} \quad (9-15)$$

donde $\{U_c\}$ son los desplazamientos de los grados de libertad donde hay fuerzas externas aplicadas, y $\{U_o\}$ son los desplazamientos de los grados de libertad donde las fuerzas son cero, estos últimos desplazamientos no son nulos. La matriz $[K_E]$ puede particionarse de la siguiente manera para reflejar la partición de los vectores:

$$\left\{ \begin{array}{c} P_c \\ 0 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} K_o & K_1 & & \\ K_2 & K_3 & & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_c \\ U_o \end{array} \right\} \quad (9-16)$$

Expandiendo la última ecuación obtenemos:

$$\{P_c\} = [K_o] \{U_c\} + [K_1] \{U_o\} \quad (9-17)$$

y

$$\{0\} = [K_2] \{U_c\} + [K_3] \{U_o\} \quad (9-18)$$

De la ecuación (9-18) obtenemos:

$$\{U_o\} = -[K_3]^{-1}[K_2] \{U_c\} \quad (9-19)$$

que al reemplazar en la ecuación (9-17) conduce a:

$$\{P_c\} = \left[[K_o] - [K_1][K_3]^{-1}[K_2] \right] \{U_c\} \quad (9-20)$$

Por lo tanto hemos reducido el sistema únicamente a los grados de libertad donde hay fuerzas externas aplicadas, y la matriz de rigidez de la estructura se ha reducido a:

$$[K_c] = \left[[K_o] - [K_1][K_3]^{-1}[K_2] \right] \quad (9-21)$$

Una vez se resuelve el sistema determinando $\{U_c\}$, es posible obtener los valores de $\{U_o\}$ utilizando la ecuación (9-19). El procedimiento anterior se denomina *condensación*.

Ejemplo 9-2

La estructura del ejemplo 9-1, después de que se han suprimido las deformaciones axiales de los elementos, tiene tres grados de libertad donde hay posibilidad de aplicar fuerzas externas, tal como lo muestra la Figura 9-2.

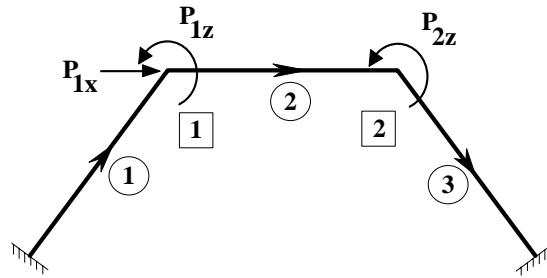


Figura 9-2 - Estructura del ejemplo 9-1

A la estructura sólo se le van a aplicar fuerzas horizontales, y no hay momentos externos aplicados en los nudos 1 y 2. El vector de fuerzas $\{P\}$ tiene entonces la siguiente forma:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1z} \\ P_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura, sin posibilidad de deformaciones axiales en sus elementos es la siguiente, del ejemplo 9-1:

$$[K_I] = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1612.5 & -37.5 & -37.5 \\ -37.5 & 200 & 50 \\ -37.5 & 50 & 200 \end{bmatrix}$$

Si la particionamos de acuerdo con la partición de $\{P\}$, obtenemos:

$$[K_I] = \begin{bmatrix} K_o & K_1 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1612.5 & -37.5 & -37.5 \\ -37.5 & 200 & 50 \\ -37.5 & 50 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.5 & -1.5 & -1.5 \\ -1.5 & 8 & 2 \\ -1.5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Ahora:

$$[K_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1333 & -0.0333 \\ -0.0333 & 0.1333 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto:

$$[K_c] = [K_o] - [K_I][K_3]^{-1}[K_2] = [64.50 - 0.45] = [64.05]_{1 \times 1}$$

La aplicación sucesiva del procedimiento de igualación de grados de libertad, más el de condensación, nos ha llevado desde un sistema con seis grados de libertad a un sistema de un grado de libertad. El modelo matemático resultante, no tiene posibilidad de deformaciones axiales en sus elementos, y además está limitado al empleo de fuerzas horizontales.

■

La condensación puede utilizarse aún en aquellos casos en que las fuerzas aplicadas en algunos grados de libertad no sea cero. La forma general de la condensación es la siguiente:

Supongamos que tenemos una estructura sobre la cual podemos plantear la siguiente relación de rigidez:

$$\{P\} = [K_E]\{U\} \quad (9-22)$$

Ahora particionamos el vector $\{P\}$ de la siguiente manera:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_c \\ P_o \end{Bmatrix} \quad (9-23)$$

donde $\{P_c\}$ corresponde a las fuerzas aplicadas en los grados de libertad que permanecen después de la condensación y $\{P_o\}$ las fuerzas externas aplicadas en los grados de libertad que desaparecen debido a la condensación. Análogamente podemos particionar el vector $\{U\}$ de la siguiente manera:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_c \\ U_o \end{Bmatrix} \quad (9-24)$$

donde $\{U_c\}$ son los desplazamientos de los grados de libertad que permanecen y $\{U_o\}$ son los desplazamientos de los grados de libertad que desaparecen debido a la condensación. La matriz $[K_E]$ puede particionarse de la siguiente manera para reflejar la partición de los vectores:

$$\begin{Bmatrix} P_c \\ P_o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_o & K_1 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c \\ U_o \end{Bmatrix} \quad (9-25)$$

Expandiendo la última ecuación obtenemos:

$$\{P_c\} = [K_o] \{U_c\} + [K_1] \{U_o\} \quad (9-26)$$

y

$$\{P_o\} = [K_2] \{U_c\} + [K_3] \{U_o\} \quad (9-27)$$

De la ecuación (9-27) obtenemos:

$$\{U_o\} = [K_3]^{-1} (\{P_o\} - [K_2] \{U_c\}) \quad (9-28)$$

que al reemplazar en la ecuación (9-26) conduce a:

$$\{P_c\} = [K_o] \{U_c\} + [K_1] [K_3]^{-1} (\{P_o\} - [K_2] \{U_c\}) \quad (9-29)$$

Factorizando:

$$\{P_c\} = \left[[K_o] - [K_1] [K_3]^{-1} [K_2] \right] \{U_c\} + [K_1] [K_3]^{-1} \{P_o\} \quad (9-30)$$

y el análisis se realiza para:

$$\{P_c\} - [K_1] [K_3]^{-1} \{P_o\} = \left[[K_o] - [K_1] [K_3]^{-1} [K_2] \right] \{U_c\} \quad (9-31)$$

Por lo tanto hemos reducido el sistema a los grados de libertad que se desee. La matriz de rigidez del sistema reducido es:

$$[K_c] = \left[[K_o] - [K_1] [K_3]^{-1} [K_2] \right] \quad (9-32)$$

Al resolver el sistema debe tenerse en cuenta que el vector de fuerzas tiene una componente de las fuerzas aplicadas en los grados de libertad que se condensaron. Una vez se resuelve el sistema determinando $\{U_c\}$, es posible obtener los valores de $\{U_o\}$ utilizando la ecuación (9-28).

9.5 — Casos especiales

A continuación se presentan dos aspectos especiales del análisis matricial, los cuales son de utilidad en muchos problemas de la vida real.

9.5.2 — Nudos rígidos

En las estructuras de concreto reforzado y mampostería estructural, los nudos de interconexión de los elementos tienen dimensiones que pueden influir en el análisis debido a que el elemento es más rígido en la zona dentro del nudo que dentro de la luz. Es práctica común suponer que el elemento es infinitamente rígido dentro del nudo. En la Figura 9-5 se muestra esta situación para una viga que llega a columnas de dimensión apreciable.

Para determinar la matriz de rigidez de un elemento con zonas infinitamente rígidas en sus extremos, partimos de la matriz de rigidez de la porción flexible del elemento en coordenadas locales. Esta está dada en la ecuación (8-62), con la única diferencia de que la longitud del elemento es D en el presente caso.

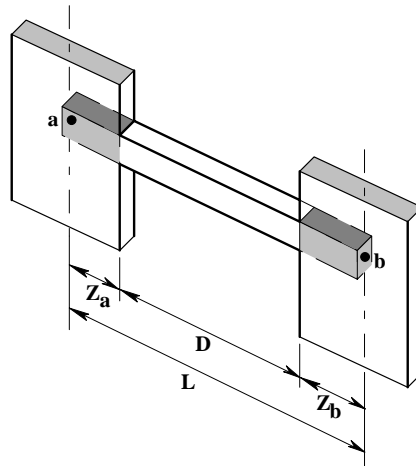


Figura 9-5 - Viga con zonas rígidas

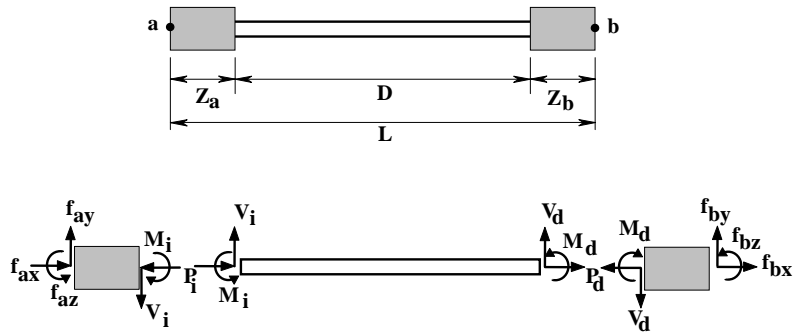


Figura 9-6 - Elemento con zonas rígidas en coordenadas locales

Las fuerzas de los extremos de la porción libre del elemento las denominamos haciendo referencia a su extremo izquierdo con el subíndice *i* y al derecho con el subíndice *d*. Debemos encontrar las fuerzas en los extremos *a* y *b* del elemento, los cuales corresponden a los nudos reales de interconexión. Para el efecto, de acuerdo con la Figura 9-6 encontramos las fuerzas en los extremos *a* y *b* en función de las fuerzas en los extremos de la porción libre. Esto nos permitirá definir una matriz de transformación de fuerzas, a la cual denominaremos $[T]$, y

$$\{f\} = [T] \{P_L\} \quad (9-40)$$

Entonces de acuerdo con la Figura 9-6 obtenemos:

$$\begin{aligned} f_{ax} &= P_i & f_{bx} &= P_d \\ f_{ay} &= V_i & f_{by} &= V_d \\ f_{az} &= M_i + Z_a V_i & f_{bz} &= M_d - Z_b V_d \end{aligned} \quad (9-41)$$

Lo cual nos permite definir la matriz de transformación de fuerzas $[T]$:

$$\begin{Bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \\ f_{bx} \\ f_{by} \\ f_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_b & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ V_i \\ M_i \\ P_d \\ V_d \\ M_d \end{Bmatrix} \quad (9-42)$$

Si la porción libre tiene la siguiente relación entre fuerzas y deformaciones en sus extremos:

$$\{P_L\} = [k_L] \{U_L\} \quad (9-43)$$

Que al ser reemplazada en la ecuación (9-40) produce:

$$\{f\} = [T][k_L]\{U_L\} \quad (9-44)$$

y al aplicar el principio de contragradiente, que en este caso tiene la siguiente relación:

$$\{U_L\} = [T]^T \{u\} \quad (9-45)$$

y reemplazarla en la ecuación (9-44), se obtiene la expresión para la matriz de rigidez del elemento con las zonas rígidas en sus extremos:

$$\{f\} = [T][k_L][T]^T \{u\} = [k] \{u\} \quad (9-46)$$

Después de realizar las operaciones apropiadas se obtiene la siguiente matriz de rigidez en coordenadas locales:

$$\begin{Bmatrix} \frac{f_{ax}}{D} \\ \frac{f_{ay}}{D} \\ \frac{f_{az}}{D} \\ \frac{f_{bx}}{D} \\ \frac{f_{by}}{D} \\ \frac{f_{bz}}{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{D} & 0 & 0 & -\frac{AE}{D} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{D^3} & \frac{6EI}{D^2} \left(1 + \frac{2Z_a}{D}\right) & 0 & -\frac{12EI}{D^3} & \frac{6EI}{D^2} \left(1 + \frac{2Z_b}{D}\right) \\ 0 & \frac{6EI}{D^2} \left(1 + \frac{2Z_a}{D}\right) & \frac{4EI}{D} \left(1 + \frac{3Z_a}{D} + \frac{3Z_a^2}{D^2}\right) & 0 & -\frac{6EI}{D^2} \left(1 + \frac{2Z_a}{D}\right) & \frac{2EI}{D} \left(1 + \frac{3Z_a}{D} + \frac{3Z_b}{D} + \frac{6Z_a Z_b}{D^2}\right) \\ \hline -\frac{AE}{D} & 0 & 0 & \frac{AE}{D} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{D^3} & -\frac{6EI}{D^2} \left(1 + \frac{2Z_a}{D}\right) & 0 & \frac{12EI}{D^3} & -\frac{6EI}{D^2} \left(1 + \frac{2Z_b}{D}\right) \\ 0 & \frac{6EI}{D^2} \left(1 + \frac{2Z_b}{D}\right) & \frac{2EI}{D} \left(1 + \frac{3Z_a}{D} + \frac{3Z_b}{D} + \frac{6Z_a Z_b}{D^2}\right) & 0 & -\frac{6EI}{D^2} \left(1 + \frac{2Z_b}{D}\right) & \frac{4EI}{D} \left(1 + \frac{3Z_b}{D} + \frac{3Z_b^2}{D^2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ax} \\ u_{ay} \\ u_{az} \\ u_{bx} \\ u_{by} \\ u_{bz} \end{Bmatrix} \quad (9-47)$$

En general los códigos de diseño de concreto reforzado permiten diseñar el elemento utilizando las fuerzas en la cara del nudo, por esto la siguiente relación permite determinar estas fuerzas con base en los desplazamientos en los nudos de interconexión:

$$\{P_L\} = [k_L][T]^T \{u\} \quad (9-48)$$

La conversión de la matriz de rigidez del elemento de coordenadas locales a coordenadas globales se realiza por el mismo procedimiento presentado anteriormente en la Sección 8.5.

Cuando haya cargas sobre el elemento debe tenerse cuidado en el hecho de que en general existe carga también sobre la zona rígida, como lo muestra la Figura 9-7. En este caso hay necesidad de corregir las fuerzas de empotramiento del sector libre, trasladándolas a los nudos de interconexión y agregando el efecto de las cargas que actúan sobre la zona rígida.

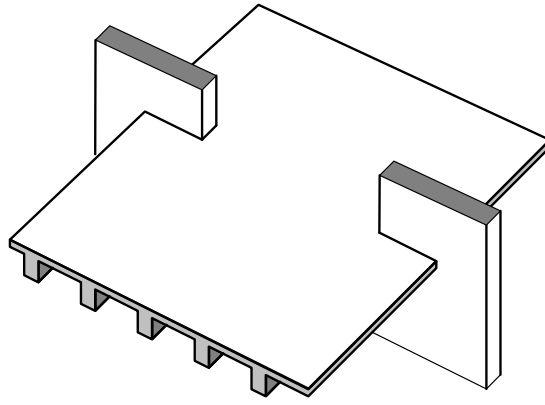


Figura 9-7 - Carga vertical sobre una viga con zonas rígidas

Para el caso de carga vertical uniforme sobre la viga de acuerdo con la Figura 9-8 obtenemos:

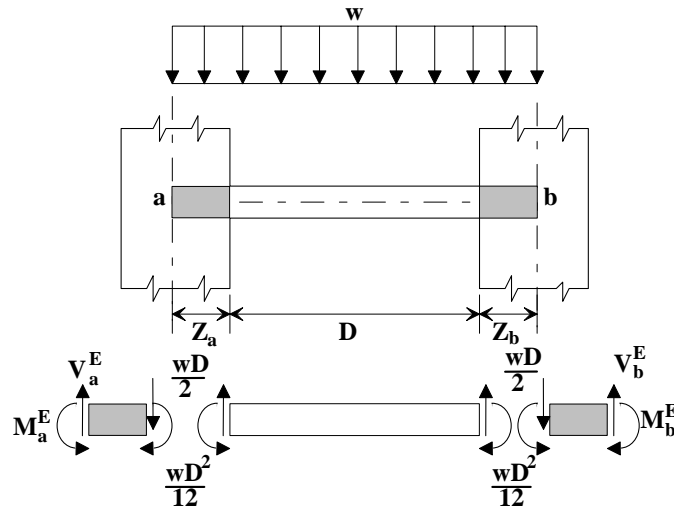


Figura 9-8 - Carga vertical uniforme sobre la viga con zonas rígidas

Entonces, para el extremo izquierdo, nudo a, obtenemos:

$$M_a^E = \frac{wD^2}{12} + \frac{wDZ_a}{2} + \frac{wZ_a^2}{2} \quad (9-49)$$

$$V_a^E = \frac{wD}{2} + wZ_a \quad (9-50)$$

y para el extremo derecho, nudo b:

$$M_b^E = \frac{wD^2}{12} + \frac{wDZ_b}{2} + \frac{wZ_b^2}{2} \quad (9-51)$$

$$V_b^E = \frac{wD}{2} + wZ_b \quad (9-52)$$

Para otros tipos de carga se deben hacer correcciones similares.

Tema N° 14 — Ecuaciones de equilibrio dinámico

10.1 — Introducción

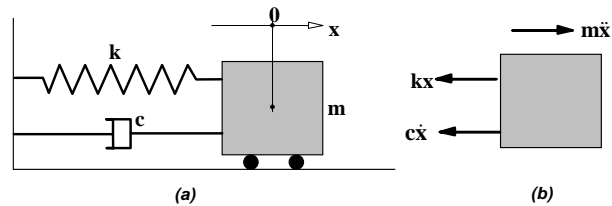


Figura 10-1 - Sistema lineal amortiguado de un grado de libertad

En el Capítulo 2 vimos como un sistema amortiguado de un grado de libertad, como el mostrado en la Figura 10-1, estaba regido por la ecuación (10-1) de equilibrio dinámico.

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0 \quad (10-1)$$

Ahora debemos extender esto mismo a sistemas de varios grados de libertad, para lo cual seguiremos el mismo tipo de planteamiento utilizando masas concentradas y resortes, para luego entrar dentro del problema de la idealización dinámica de sistemas estructurales complejos, como puede ser un edificio de varios pisos, en los capítulos siguientes.

Vale la pena aclarar que el manejo del amortiguamiento en sistemas de varios grados de libertad es mucho más complejo que las simplificaciones introducidas en los sistemas de un grado de libertad y por esta razón la presentación que sigue se hará para sistemas no amortiguados y la introducción del amortiguamiento se realizará posteriormente, una vez se haya definido la solución de la respuesta de los sistemas de varios grados de libertad.

10.2 — Vibración libre

Supongamos que tenemos un sistema de tres grados de libertad como el mostrado en la Figura 10-2. Allí podemos ver el cuerpo libre de cada una de las tres masas y las fuerzas que actúan sobre ellas. Al plantear ecuaciones de equilibrio, y utilizando el principio de D'Alembert, para cada una de las masas obtenemos:

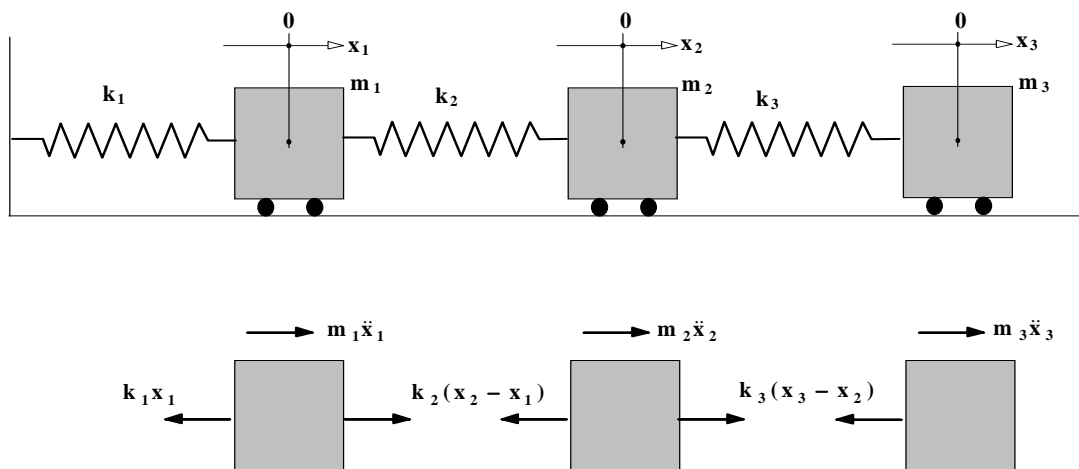


Figura 10-2 - Sistema lineal no amortiguado de tres grados de libertad

Masa m_1 :

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (10-2)$$

Masa m_2 :

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) - k_3 (x_3 - x_2) = 0 \quad (10-3)$$

Masa m_3 :

$$m_3 \ddot{x}_3 + k_3 (x_3 - x_2) = 0 \quad (10-4)$$

Reorganizando y factorizando los términos en las tres ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (10-5)$$

Las ecuaciones simultáneas presentadas en (10-5) pueden expresarse matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10-6)$$

que es, a su vez:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad (10-7)$$

Hemos planteado el equilibrio dinámico del conjunto de masas y resortes por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas. Este planteamiento es válido para sistemas de cualquier número de grados de libertad. Debe tenerse en cuenta que cada línea de este sistema de ecuaciones simultáneas corresponde a una ecuación de equilibrio para un grado de libertad de la estructura.

10.3 — Ecuaciones de equilibrio para excitación arbitraria

Ahora supongamos que en el sistema presentado en la Figura 10-2 se aplica una fuerza que varía en el tiempo, $P_i(t)$, a cada una de las masas i de la estructura, o sea en cada uno de los grados de libertad de la estructura hay una fuerza dinámica aplicada, como lo muestra la Figura 10-3.

Al plantear ecuaciones de equilibrio, y utilizando el principio de D'Alembert, para cada una de las masas obtenemos:

Masa m_1 :

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) - P_1(t) = 0 \quad (10-8)$$

Masa m_2 :

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) - k_3 (x_3 - x_2) - P_2(t) = 0 \quad (10-9)$$

Masa m_3 :

$$m_3 \ddot{x}_3 + k_3 (x_3 - x_2) - P_3(t) = 0 \quad (10-10)$$

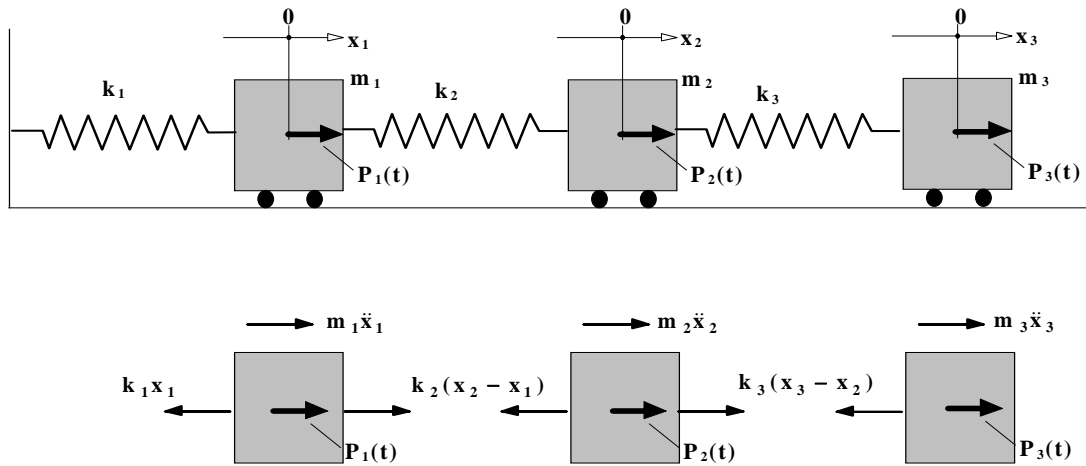


Figura 10-3 - Sistema lineal no amortiguado de tres grados de libertad sometido a unas fuerzas dinámicas en sus masas

Reorganizando y factorizando los términos en las tres ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= P_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 &= P_2(t) \\ m_3 \ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 &= P_3(t) \end{aligned} \quad (10-11)$$

Las ecuaciones simultáneas presentadas en (10-11) pueden expresarse matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix} \quad (10-12)$$

que es, a su vez:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\} \quad (10-13)$$

Este planteamiento es válido para sistemas de cualquier número de grados de libertad. Al igual que para vibración libre, debe tenerse en cuenta que cada línea de este sistema de ecuaciones simultáneas corresponde a una ecuación de equilibrio para un grado de libertad de la estructura, por lo tanto la fuerza aplicada al sistema debe ser colineal con el grado de libertad.

10.4 — Ecuaciones de equilibrio para excitación en la base

Ahora supongamos que al sistema presentado en la Figura 10-2 se le somete a una excitación en su base, como lo muestra la Figura 10-4:

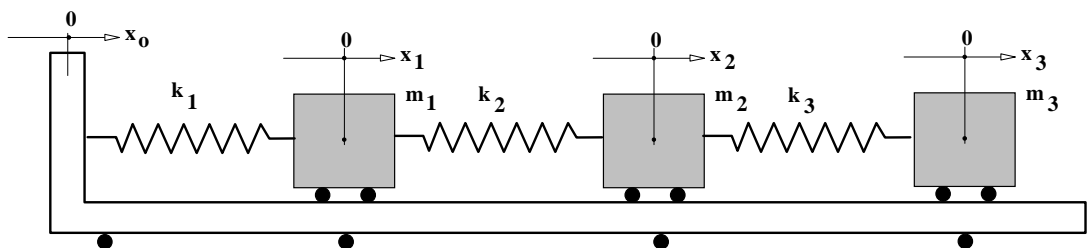


Figura 10-4 - Sistema lineal no amortiguado de tres grados de libertad sometido a excitación en su base

Si definimos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (10-14)$$

o matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \{\mathbf{x}_0\} \quad (10-15)$$

que es equivalente a:

$$\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}_0\} = \{\mathbf{x}\} - [\gamma] \{\mathbf{x}_0\} \quad (10-16)$$

La matriz $[\gamma]$, que en este caso es un vector con elementos unitarios, indica que el grado de libertad expresado en la línea del sistema de ecuaciones simultáneas es colineal con la aceleración del terreno. La utilización de la matriz $[\gamma]$ en sistemas que emplean más de una componente de la aceleración del terreno se aclara en el capítulo siguiente y además, posteriormente, en la Sección 14.8.

Al despejar $\{\mathbf{x}\}$, se obtiene:

$$\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{u}\} + [\gamma] \{\mathbf{x}_0\} \quad (10-17)$$

Si derivamos la ecuación (10-17) contra el tiempo obtenemos:

$$\{\dot{\mathbf{x}}\} = \{\dot{\mathbf{u}}\} + [\gamma] \{\dot{\mathbf{x}}_0\} \quad (10-18)$$

y si la derivamos nuevamente contra el tiempo se obtiene:

$$\{\ddot{\mathbf{x}}\} = \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\gamma] \{\ddot{\mathbf{x}}_0\} \quad (10-19)$$

Los cuerpos libres de las masas son ahora los siguientes:

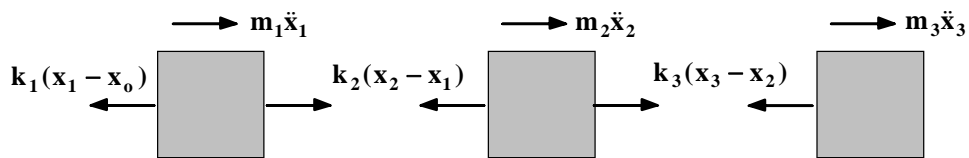


Figura 10-5 - Cuerpos libres de las masas del sistema excitado en su base

Es evidente que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 &= \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 &= \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (10-20)$$

Entonces las ecuaciones de equilibrio quedan como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_1 \\ \ddot{\mathbf{x}}_2 \\ \ddot{\mathbf{x}}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 & -\mathbf{k}_3 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}_3 & \mathbf{k}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (10-21)$$

que es, a su vez:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (10-22)$$

Al reemplazar la ecuación (10-19) en la anterior, se obtiene:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = -[\mathbf{M}][\gamma] \{\ddot{\mathbf{x}}_o\} \quad (10-23)$$

Esta última ecuación corresponde a las ecuaciones diferenciales simultáneas de equilibrio dinámico de un sistema de varios grados de libertad sometidos a una excitación en su base.

Un aspecto muy importante que se deriva de la presentación para vibración libre, excitación arbitraria y excitación en la base, consiste en que las matrices de masa $[\mathbf{M}]$, y de rigidez $[\mathbf{K}]$, son las mismas en los tres casos, y sólo varía el lado derecho de la ecuación matricial de equilibrio, dependiendo del tipo de excitación. El capítulo siguiente se dedica a ampliar este tema y a definir como se encuentran las matrices $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{K}]$ y $[\gamma]$, para diferentes casos e idealizaciones dinámicas de la estructura.

Tema N° 15 — Idealización dinámica de la estructura

11.1 — Introducción

Al realizar un análisis estructural, implícitamente se está describiendo por medio de un modelo matemático el comportamiento de la estructura ante unas solicitaciones preestablecidas. La selección del modelo a emplear en el análisis, es un aspecto fundamental en la bondad de los resultados obtenidos; si el modelo no describe el comportamiento adecuadamente, todo el esfuerzo realizado en el análisis puede ser inútil. Este aspecto que de por sí es importante en el caso de solicitaciones estáticas, se vuelve crítico en el caso de solicitaciones dinámicas. El presente capítulo describe algunas de las alternativas más utilizadas en el modelaje matemático de la estructura ante las solicitaciones dinámicas, empleando los recursos descriptivos, o herramientas, presentados en los tres capítulos anteriores.

No sobra insistir acerca de que el objetivo último del análisis estructural es pronosticar el comportamiento de la estructura, antes de su construcción, con el fin de garantizar que ésta sea capaz de cumplir durante su vida útil, una serie de criterios de desempeño preestablecidos. Estos criterios de desempeño incluyen: resistencia, rigidez para evitar deflexiones excesivas, durabilidad y funcionamiento, entre otros. A pesar de que suena simple, la complejidad inherente al cumplimiento de los objetivos contenidos en los criterios de desempeño puede ser enorme, aún para una estructura simple. Para que esta tarea sea factible, deben realizarse numerosas simplificaciones, tanto en lo que se requiere de la estructura, expresado en términos de cargas y deflexiones aceptables, como en la descripción del comportamiento de la estructura a través del análisis. Por lo tanto, es obligación del ingeniero entender cabalmente las metodologías tanto de análisis como de diseño; sus fundamentos y especialmente sus limitaciones. Por las razones anteriores, la insistencia en el presente capítulo se centra en los objetivos que se deben tener en mente respecto a tipo de modelo a emplear, más que en el aspecto numérico de la solución; muy importante de por sí, pero secundario desde el punto de vista de la calidad de los resultados que se obtienen.

11.2 — Masa distribuida y masa concentrada

En la Sección 1.3 se discutieron someramente las implicaciones de tener la masa concentrada en unos pocos grados de libertad, o distribuida en un infinito número de grados de libertad. Dentro de las estructuras típicas de ingeniería civil, tales como edificios y puentes, en general se presentan ambos casos, o sea estructuras donde la masa es la proveniente de los mismos elementos estructurales y otros casos en los cuales la masa se puede tratar como masa concentrada, dado que la masa de la estructura, en sí, es muy pequeña en comparación con la del contenido de la edificación.

Veamos, pues, primero el tratamiento de aquellos casos en que la masa proviene del mismo elemento estructural y luego algunos casos comunes de masa concentrada.

11.2.1 — Masa distribuida

Los sistemas donde tanto la masa como la rigidez se consideran como propiedades asignables a un infinito número de grados de libertad se denominan *sistemas con propiedades distribuidas* y no van a ser tratados. En muchos de los textos de dinámica estructural mencionados en la Sección 1.1, se trata el tema en detalle. Las aplicaciones de esta metodología están limitadas por la posibilidad de trabajar el problema dinámico por medio de funciones trascendentales y su utilidad en casos prácticos de ingeniería civil es limitada. No obstante existe una alternativa para definir un procedimiento que permita disponer de las propiedades de masa distribuida, pero concentrar los efectos en los extremos de los elementos, como se hizo con las propiedades de rigidez en el análisis matricial. La matriz de masa del elemento, denominada *matriz consistente de masa*, se ensambla y opera de una manera totalmente análoga a la de la matriz de rigidez del elemento. A continuación se realiza la deducción de la forma y términos de la mencionada matriz.

Supongamos que tenemos un elemento de pórtico plano el cual es sometido a unas aceleraciones en sus extremos representadas en el vector $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$. Estas aceleraciones inducen dentro del elemento aceleraciones transversales, $\ddot{y}(\mathbf{x})$, y longitudinales, $\ddot{x}(\mathbf{x})$, en todos sus puntos intermedios entre los

extremos. En cualquier diferencial de longitud del elemento, dx , con su correspondiente masa diferencial, dm , se presentan unas fuerzas inerciales diferenciales que según la 2ª ley de Newton son iguales a:

$$df_y = \ddot{y}(x) dm \quad (11-1)$$

para aceleraciones transversales y a:

$$df_x = \ddot{x}(x) dm \quad (11-2)$$

para aceleraciones longitudinales. Estas aceleraciones corresponden a la segunda derivada contra el tiempo de las deformaciones de la elástica del elemento y son totalmente proporcionales a estas deformaciones. Si determinamos el efecto que tienen todas estas fuerzas inerciales diferenciales en los apoyos del elemento, podríamos plantear la siguiente ecuación matricial de equilibrio dinámico:

$$\begin{Bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \\ f_{bx} \\ f_{by} \\ f_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{axax} & m_{axay} & m_{axaz} & m_{axbx} & m_{axby} & m_{axbz} \\ m_{ayax} & m_{ayay} & m_{ayaz} & m_{aybx} & m_{ayby} & m_{aybz} \\ m_{azax} & m_{azay} & m_{azaz} & m_{azbx} & m_{azby} & m_{azbz} \\ m_{bmax} & m_{bmay} & m_{bmax} & m_{bmbx} & m_{bmby} & m_{bmbz} \\ m_{byax} & m_{byay} & m_{byaz} & m_{bybx} & m_{byby} & m_{bybz} \\ m_{bzax} & m_{bzay} & m_{bzaz} & m_{bzbx} & m_{bzby} & m_{bzbz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{ax} \\ \ddot{u}_{ay} \\ \ddot{u}_{az} \\ \ddot{u}_{bx} \\ \ddot{u}_{by} \\ \ddot{u}_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11-3)$$

Donde los términos están definidos en la Figura 11-5. El procedimiento para encontrar los términos de la matriz de la ecuación (11-3) es el siguiente: se fijan todos los grados de libertad de los extremos del elemento, excepto uno de ellos, y a este grado de libertad se le impone una aceleración unitaria. La forma de la elástica del elemento es consistente con las deformaciones cuando están restringidos los grados de libertad de los extremos, excepto uno de ellos que es precisamente el que se libera. Las aceleraciones internas del elemento son proporcionales a esta forma de la elástica. Por lo tanto en cada diferencial de masa las fuerzas inerciales diferenciales que se generan son las dadas por las ecuaciones (11-1) y (11-2).

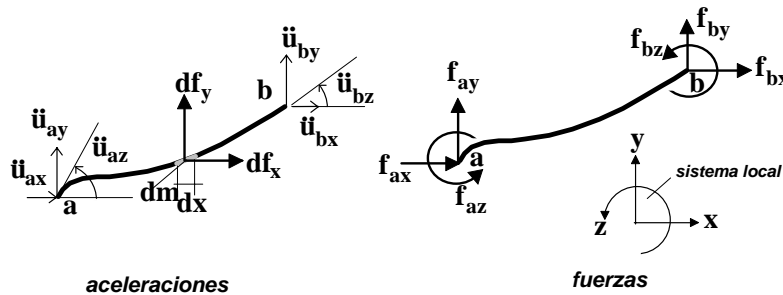


Figura 11-5 - Aceleraciones y fuerzas en los extremos de un elemento de pórtico plano

Para encontrar el efecto de estas fuerzas diferenciales inerciales en los extremos utilizamos el principio de Müller-Breslau que dice:

"Las ordenadas de la línea de influencia de cualquier elemento de fuerza (axial, cortante, momento o reacción) de cualquier estructura son proporcionales a la curva de la elástica que se obtiene al remover la restricción correspondiente al elemento de fuerza y reemplazarla por una deformación correspondiente en la estructura que se obtiene al remover la restricción".

Entonces la contribución de cualquiera de los dos df en la fuerza f_{ij} en el extremo para una deformación de la elástica del elemento $y_j(x)$ es:

$$df_{ij} = y_i(x) df = y_i(x) \ddot{y}_j(x) dm \quad (11-4)$$

Dado que la viga tiene sección uniforme, su masa por unidad de longitud es m/L donde m es la masa total y L la longitud del elemento. Además la aceleración $\ddot{y}_j(x)$ es totalmente proporcional a $y_j(x)$. Entonces la ecuación (11-4) se convierte en:

$$df_{ij} = y_i(x) df = y_i(x) y_j(x) \left(\frac{m}{L} \right) dx \quad (11-5)$$

El término de fuerza f_{ij} es:

$$f_{ij} = \left(\frac{m}{L} \right) \int_0^L y_i(x) y_j(x) dx \quad (11-6)$$

Las formas de la elástica para una carga axial en cada uno de sus extremos cuando el otro está fijo, dado que la deformación se supone lineal, son:

$$x_{ax}(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (11-7)$$

$$x_{bx}(x) = \frac{x}{L} \quad (11-8)$$

y

$$x_{ay}(x) = x_{az}(x) = x_{by}(x) = x_{bz}(x) = 0 \quad (11-9)$$

Para las otras formas de la elástica se utiliza su ecuación diferencial,

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -p(x) \quad (11-10)$$

Con $p(x) = 0$ se obtienen las siguientes ecuaciones para la elástica del elemento:

$$y_{ay}(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (11-11)$$

$$y_{az}(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (11-12)$$

$$y_{by}(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (11-13)$$

$$y_{bz}(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (11-14)$$

y

$$y_{ax}(x) = y_{bx}(x) = 0 \quad (11-15)$$

Calculando las integrales de acuerdo con la ecuación (11-5), por ejemplo, obtenemos:

$$m_{axax} = \left(\frac{m}{L} \right) \int_0^L x_{ax}(x) x_{ax}(x) dx = \left(\frac{m}{L} \right) \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx = \frac{m}{3} \quad (11-16)$$

Los otros términos se evalúan de una manera análoga y así se obtiene la siguiente matriz consistente de masa, la cual está definida en coordenadas locales del elemento y es posible transformarla a coordenadas globales por el mismo procedimiento empleado para la matriz de rigidez del elemento en la Sección 8.5. La manera de ensamblar la matriz de masa de la estructura es la misma que se utiliza para ensamblar la matriz de rigidez de la estructura.

$$[m] = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{aa} & m_{ab} \\ m_{ba} & m_{bb} \end{bmatrix} \quad (11-17)$$

Ejemplo 11-1

Determinar la matriz de masa de una viga con las siguientes propiedades: $L = 7 \text{ m}$ y su sección tiene $b = 0.25 \text{ m}$ de ancho y $h = 0.4 \text{ m}$ de alto con un material que tiene una densidad (masa por unidad de volumen) $\gamma = 2\,400 \text{ kg/m}^3$. Determinar su matriz de masa en coordenadas locales.

$$m = b h L \gamma = 0.25 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} \cdot 7 \text{ m} \cdot 2\,400 \text{ kg/m}^3 = 1\,680 \text{ kg}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} 560 & 0 & 0 & 280 & 0 & 0 \\ 0 & 624 & 616 & 0 & 216 & -364 \\ 0 & 616 & 784 & 0 & 364 & -588 \\ 280 & 0 & 0 & 560 & 0 & 0 \\ 0 & 216 & 364 & 0 & 624 & -616 \\ 0 & -364 & -588 & 0 & -616 & 784 \end{bmatrix}$$

■

Para transformar a coordenadas globales la matriz de masa consistente se emplea la siguiente ecuación:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\lambda][m_{aa}][\lambda]^T & [\lambda][m_{ab}][\lambda]^T \\ [\lambda][m_{ba}][\lambda]^T & [\lambda][m_{bb}][\lambda]^T \end{bmatrix} \quad (11-18)$$

Que al realizar las operaciones apropiadas se convierte en:

$$[M] = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 140c^2 + 156s^2 & 16sc & 22Ls & 70c^2 + 54s^2 & -16sc & -13Ls \\ 16sc & 140s^2 + 156c^2 & 22Lc & -16sc & 70s^2 + 54c^2 & -13Lc \\ 22Ls & 22Lc & 4L^2 & 13Ls & 13Lc & -3L^2 \\ 70c^2 + 54s^2 & -16sc & 13Ls & 140c^2 + 156s^2 & 16sc & -22Ls \\ -16sc & 70s^2 + 54c^2 & 13Lc & 16sc & 140s^2 + 156c^2 & -22Lc \\ -13Ls & -13Lc & -3L^2 & -22Ls & -22Lc & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (11-19)$$

donde:

$$s = \sin \alpha \quad c = \cos \alpha$$

m = masa total del elemento

α = ángulo entre el eje x local y el eje X global

Ejemplo 11-2

Encontrar las ecuaciones dinámicas de equilibrio de una viga empotrada en sus dos extremos. La viga (véase el ejemplo 8-7) tiene las siguientes propiedades: Inercia $I = 0.005 \text{ m}^4$, área $A = 0.25 \text{ m}^2$, $E = 25 \text{ GPa}$ y densidad $\gamma = 2\,400 \text{ kg/m}^3$.

Para efectos de resolver el problema se definen tres nudos, como muestra la Figura 11-6, lo cual genera dos elementos de 5 m de longitud cada uno. Se utiliza la nomenclatura mostrada en la mencionada figura.

En el ejemplo 8-7 se calcularon las matrices de rigidez de los elementos, las cuales son iguales dado que los elementos tienen las mismas propiedades y orientación. El sistema de coordenadas locales de los elementos coincide con el sistema global, por lo tanto α es cero. La matriz de rigidez de los elementos (coordenadas locales = coordenadas globales) en unidades de kN y kN · m, es la mostrada después de la Figura 11-6.

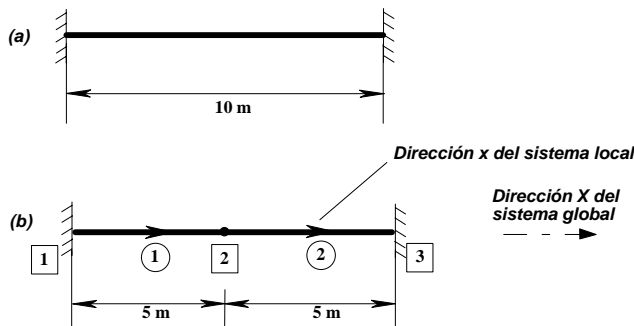


Figura 11-6 - Estructura del ejemplo 11-2

$$[K] = 1000 \times \begin{bmatrix} 1250 & 0 & 0 & -1250 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -1250 & 0 & 0 & 1250 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix}$$

La forma del ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura es:

$$[K_E] = \begin{array}{c|c|c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \downarrow \leftarrow \text{nudos} & \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{aa}^1 & K_{ab}^1 & 0 \\ K_{ba}^1 & K_{bb}^1 + K_{aa}^2 & K_{ab}^2 \\ 0 & K_{ba}^2 & K_{bb}^2 \end{bmatrix} & & \end{array}$$

La matriz de rigidez de los grados de libertad libres $[K_L]$ se obtiene tachando las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad restringidos por los apoyos.

$$[K_L] = [K_{bb}^1 + K_{aa}^2] = 1000 \times \begin{bmatrix} 2500 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

Dada la idealización en dos elementos de 5 m de luz, sus matrices de masa son iguales. La masa total de cada elemento de viga es:

$$m = A L \gamma = 0.25 \text{ m}^2 \cdot 5.00 \text{ m} \cdot 2400 \text{ kg/m}^3 = 3000 \text{ kg} = 3 \text{ Mg}$$

Dado que el ángulo $\alpha = 0^\circ$, $c = 1.0$ y $s = 0.0$, y la matriz de masa consistente de cada segmento de viga es (en Mg):

$$[M] = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 0 & 0.500 & 0 & 0 \\ 0 & 1.114 & 0.786 & 0 & 0.386 & -0.464 \\ 0 & 0.786 & 0.714 & 0 & 0.464 & -0.536 \\ 0.500 & 0 & 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.386 & 0.464 & 0 & 1.114 & -0.786 \\ 0 & -0.464 & -0.536 & 0 & -0.786 & 0.714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix}$$

Utilizando la misma forma de ensamblaje utilizada de la matriz de rigidez, obtenemos:

$$[M_L] = [M_{bb}^1 + M_{aa}^2] = \begin{bmatrix} 2.000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.228 & 0 \\ 0 & 0 & 1.428 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto las ecuaciones de equilibrio dinámico de la estructura son las siguientes:

$$[M_L] \{\ddot{U}_L\} + [K_L] \{U_L\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 2.000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.228 & 0 \\ 0 & 0 & 1.428 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{2x} \\ \ddot{U}_{2y} \\ \ddot{U}_{2z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2500000 & 0 & 0 \\ 0 & 24000 & 0 \\ 0 & 0 & 200000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Es importante anotar que el resultado obtenido implica que en realidad se tienen tres sistemas independientes de un grado de libertad, dado que las dos matrices son diagonales.

■

11.2.2 — Masa concentrada

Dentro de un estricto rigor las masas concentradas sólo pueden ser utilizadas en el análisis dinámico de cuerpos rígidos, no obstante cuando la rigidez de algunos elementos es grande en comparación con la de otros, se realiza la aproximación de considerarlos infinitamente rígidos. Esta aproximación muchas veces puede simplificar la solución del problema dinámico enormemente. En un cuerpo rígido no existe posibilidad de deformación interna alguna, lo cual implica que las propiedades inerciales se pueden expresar en el centro de masa del cuerpo. Para poder explicar este hecho supongamos que tenemos un cuerpo rígido de espesor despreciable, como el que muestra la Figura 11-7.

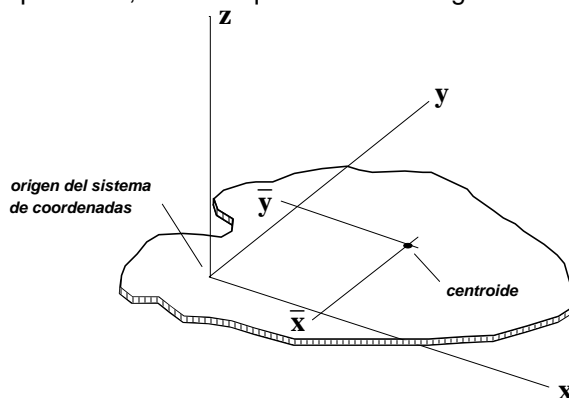


Figura 11-7 - Cuerpo rígido de espesor despreciable

Ahora queremos determinar las fuerzas inerciales que se producirían en el cuerpo rígido si lo sometemos a unas aceleraciones en la dirección de cada uno de los ejes en planta, en el plano del cuerpo, y a una aceleración rotacional con respecto al eje vertical perpendicular al mismo plano. Integrando los efectos que estas aceleraciones producen en cada uno de los elementos diferenciales de

masa que componen el cuerpo y tomando en cuenta que por ser un cuerpo rígido estas fuerzas inerciales no producen deformaciones internas del cuerpo; es posible encontrar las siguientes ecuaciones de equilibrio donde se presentan las fuerzas resultantes en el origen del sistema de coordenadas.

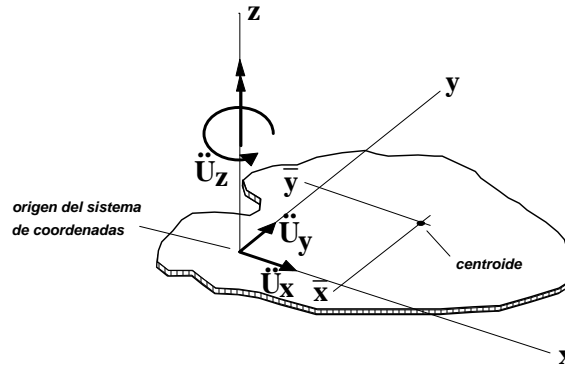


Figura 11-8 - Aceleraciones impuestas al cuerpo rígido

Las resultantes de las fuerzas inerciales que generan las aceleraciones se evalúan en el origen del sistema de coordenadas y tiene los siguientes valores:

$$F_x = m\ddot{U}_x - m\bar{y}\ddot{U}_z \quad (11-20)$$

$$F_y = m\ddot{U}_y + m\bar{x}\ddot{U}_z \quad (11-21)$$

$$F_z = -m\bar{y}\ddot{U}_x + m\bar{x}\ddot{U}_y + \left[\frac{m}{A} J_o + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \right] \ddot{U}_z \quad (11-22)$$

Donde m es la masa total del cuerpo, A su área, \bar{x} y \bar{y} son las distancias al centroide o centro de masa del cuerpo, medidas desde el origen del sistema de coordenadas, y J_o es el momento polar de inercia del cuerpo, con respecto a su centro de masa o centroide, el cual a su vez es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a dos ejes, paralelos a x y y que pasan por el centroide del cuerpo. Este mismo sistema de ecuaciones, expresado en forma matricial, es el siguiente:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & -\bar{y}m \\ 0 & m & \bar{x}m \\ -\bar{y}m & \bar{x}m & \left[\frac{m}{A} J_o + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_x \\ \ddot{U}_y \\ \ddot{U}_z \end{Bmatrix} \quad (11-23)$$

Lo cual es equivalente a:

$$\{F\} = [M]\{\ddot{U}\} \quad (11-24)$$

Además es evidente que cuando el origen del sistema de coordenadas se coloca en el centroide del cuerpo, la matriz de masa toma la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{A} J_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_x \\ \ddot{U}_y \\ \ddot{U}_z \end{Bmatrix} \quad (11-25)$$

En esta última matriz de masa, cuando el origen del sistema de coordenadas coincide con el centroide del cuerpo rígido, es importante resaltar que las aceleraciones sólo inducen fuerzas inerciales en la dirección y sentido de la misma aceleración. El hecho de que la matriz sea diagonal indica esto, lo cual no ocurre cuando se selecciona un origen en un lugar diferente del centroide. Cuando se tiene un

conjunto de cuerpos rígidos unidos entre si por medio de conexiones totalmente rígidas, es posible sumar los efectos de cada uno de ellos, y la forma de la matriz de masa del conjunto es la siguiente:

$$[M] = \begin{bmatrix} \sum_i m_i & 0 & -\sum_i (\bar{y}_i m_i) \\ 0 & \sum_i m_i & \sum_i (\bar{x}_i m_i) \\ -\sum_i (\bar{y}_i m_i) & \sum_i (\bar{x}_i m_i) & \sum_i \left[\frac{m_i}{A_i} J_{oi} + m_i (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) \right] \end{bmatrix} \quad (11-26)$$

Ejemplo 11-3

Determinar la matriz de masa de una losa infinitamente rígida en su propio plano, de dimensiones 30 m por 20 m y su masa es 1 000 kg por metro cuadrado (= 1 Mg/m²). El origen del sistema de coordenadas está en el centroide de la losa.

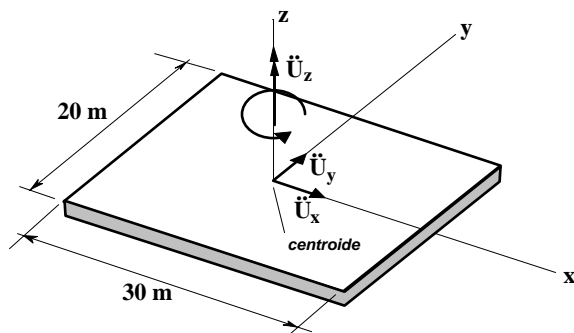


Figura 11-9 - Losa del ejemplo 11-3

$$m = 30 \text{ m} \cdot 20 \text{ m} \cdot 1 \text{ Mg/m}^2 = 600 \text{ Mg}$$

$$A = 30 \text{ m} \cdot 20 \text{ m} = 600 \text{ m}^2$$

$$J_o = I_{xx} + I_{yy} = 20^3 \cdot 30/12 + 20 \cdot 30^3/12 = 20000 + 45000 = 65000 \text{ m}^4$$

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 \\ 0 & 0 & 65000 \end{bmatrix}$$

■

Ejemplo 11-4

Una losa rectangular infinitamente rígida, de dimensiones $a \times b$ y masa m_1 , tiene en su esquina superior izquierda una masa concentrada m_2 . Determinar la matriz de masa del conjunto, tal como se muestra en la Figura 11-10.

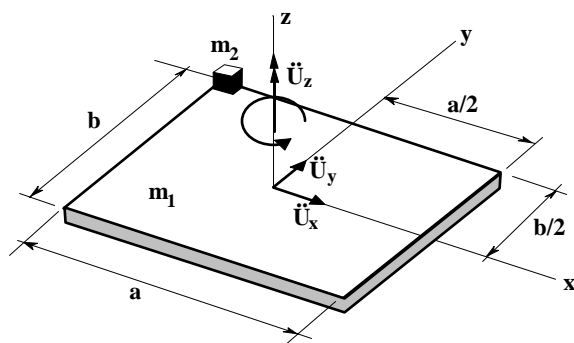


Figura 11-10 - Conjunto del ejemplo 11-4

Para la masa m_1 :

$$m = m_1$$

$$A = ab$$

$$J_o = I_{xx} + I_{yy} = b^3 a / 12 + b a^3 / 12 = (ab/12)(b^2 + a^2)$$

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

Para la masa m_2 :

$$m = m_2$$

$$A = 0$$

$$J_o = 0$$

$$\bar{x} = -a/2 \text{ y } \bar{y} = b/2$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 & -\frac{b}{2} m_2 \\ 0 & m_1 + m_2 & -\frac{a}{2} m_2 \\ -\frac{b}{2} m_2 & -\frac{a}{2} m_2 & \frac{m_1}{12}(a^2 + b^2) + \frac{m_2}{4}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

■

Ejemplo 11-5

Debe encontrarse la matriz de masa del mismo conjunto de cuerpos rígidos del ejemplo 11-4. Ahora debe colocarse el origen del sistema de coordenadas en el centroide del conjunto, como lo muestra la Figura 11-11.

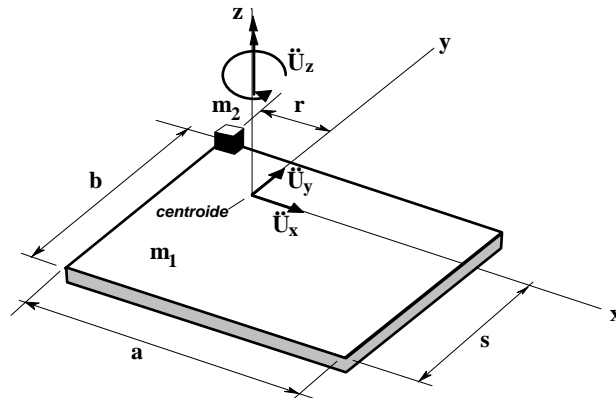


Figura 11-11 - Conjunto del ejemplo 11-5

Primero se calcula la localización del centroide tomando momentos en la esquina inferior izquierda:

$$r = \frac{m_1 a}{2(m_1 + m_2)}$$

$$s = \frac{m_1 b + 2m_2 b}{2(m_1 + m_2)}$$

Para la masa m_1 :

$$m_i = m_1$$

$$A_i = ab$$

$$J_o = I_{xx} + I_{yy} = \frac{ba^3}{12} + \frac{b^3 a}{12} = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2)$$

$$\frac{m_i}{A_i} = \frac{m_1}{ab}$$

Para la masa m_2 :

$$m_i = m_2$$

$$A_i = 0$$

$$J_o = 0$$

$$\frac{m_i}{A_i} J_o = \frac{m_1}{12} (a^2 + b^2)$$

$$\bar{x}_i = \frac{a}{2} - r = \frac{m_2 a}{2(m_1 + m_2)}$$

$$\bar{y}_i = \frac{b}{2} - s = -\frac{m_2 b}{2(m_1 + m_2)}$$

$$m_i (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) = \frac{m_1 m_2^2 (a^2 + b^2)}{4(m_1 + m_2)^2}$$

$$\frac{m_i}{A_i} J_o = 0$$

$$\bar{x}_i = -r = \frac{-m_1 a}{2(m_1 + m_2)}$$

$$\bar{y}_i = b - s = \frac{m_1 b}{2(m_1 + m_2)}$$

$$m_i (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) = \frac{m_2 m_1^2 (a^2 + b^2)}{4(m_1 + m_2)^2}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{m_1}{12} + \frac{m_1 m_2}{4(m_1 + m_2)} \right) (a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

■

De los dos ejemplos anteriores es evidente que al haber colocado el origen del sistema de coordenadas en un lugar que no corresponde con el centroide del conjunto de masas conduce a que la matriz de masa tiene términos fuera de la diagonal, mientras que sí se coloca en el centroide la matriz de masa resultante es diagonal.

Tema N° 16 — Idealización de la rigidez y acople estático y dinámico

11.3 — Idealización de la rigidez

En la Sección anterior se mostró cómo la idealización de la masa, en el caso de cuerpos infinitamente rígidos, se puede referenciar con respecto a diferentes localizaciones del sistema de coordenadas y que un cambio en esta localización influye en la forma de las ecuaciones de equilibrio dinámico. En el caso de la rigidez se presenta una situación similar pues la escogencia de la localización de los grados de libertad influye enormemente en la forma de las ecuaciones de equilibrio estático. El aspecto fundamental que se debe tener muy claro es el hecho de que los grados de libertad que se utilicen en el análisis dinámico de la estructura deben ser comunes a las componentes estáticas, reflejadas a través de la matriz de rigidez, y a las componentes dinámicas reflejadas a través de la matriz de masas, e inclusive el amortiguamiento.

En principio, en este momento de la presentación, disponemos de todas las herramientas necesarias para lograr describir dinámicamente la estructura a través de unos grados de libertad adecuados. Existen diferentes enfoques acerca de como definir los grados de libertad de la estructura para realizar el análisis dinámico; a continuación se describen en detalle algunos de ellos.

11.3.1 — Diafragma Rígido

Una losa de entrepiso de la estructura de una edificación, como es por ejemplo una losa maciza de espesor adecuado para las luces que salva, es mucho más rígida en su propio plano que transversalmente, como se muestra en la Figura 11-12.

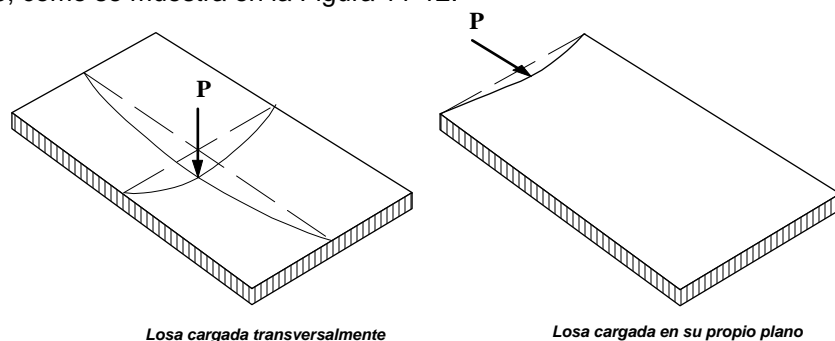


Figura 11-12 - Deformaciones internas de una losa ante diferentes tipos de carga

Exagerando podemos pensar que se trata de un cuerpo infinitamente rígido para desplazamientos en su propio plano. Si esta aproximación se considera válida, siempre es posible describir la posición horizontal de cualquier punto dentro de la losa, o diafragma, a partir de dos desplazamientos horizontales ortogonales, x y y , y un giro alrededor de un eje perpendicular al plano del diafragma, z .

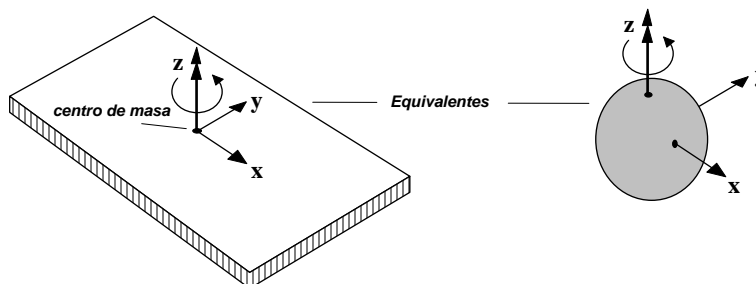


Figura 11-13 - Diafragma como cuerpo infinitamente rígido en su propio plano

Es usual tomar el origen del eje vertical rotacional en el centro de masa del diafragma, como se discutió en la Sección anterior, pero es válido localizarlo en cualquier punto arbitrario, siempre y cuando se

tomen en cuenta las implicaciones que esto trae en la formulación de las ecuaciones de equilibrio dinámico. En la Figura 11-13 se hace la equivalencia entre los grados de libertad de un diafragma infinitamente rígido en su propio plano y un cuerpo rígido propiamente dicho que tiene translaciones y giros en un plano horizontal.

Si el diafragma tiene un desplazamiento que incluya componentes de translación horizontal y rotación alrededor de un eje vertical, estos desplazamientos siempre pueden ser expresados en función de las tres variables x , y y z .

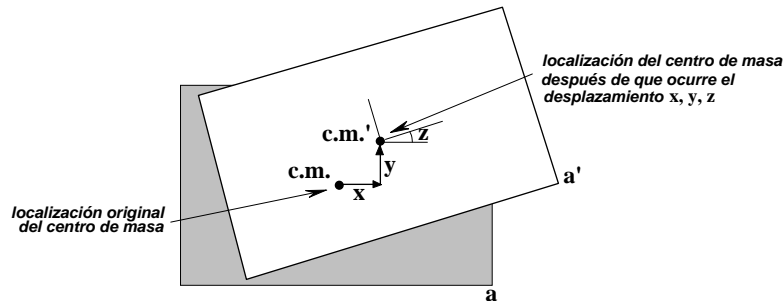


Figura 11-14 - Cualquier desplazamiento se expresa en función de x , y y z

La idealización de diafragma infinitamente rígido en su propio plano sólo hace referencia a los tres grados de libertad mencionados, por lo tanto los desplazamientos verticales, dirección en la cual el diafragma, o losa, es definitivamente flexible, son posibles. Igualmente las rotaciones alrededor de los ejes horizontales no hacen parte de la consideración de diafragma infinitamente rígido.

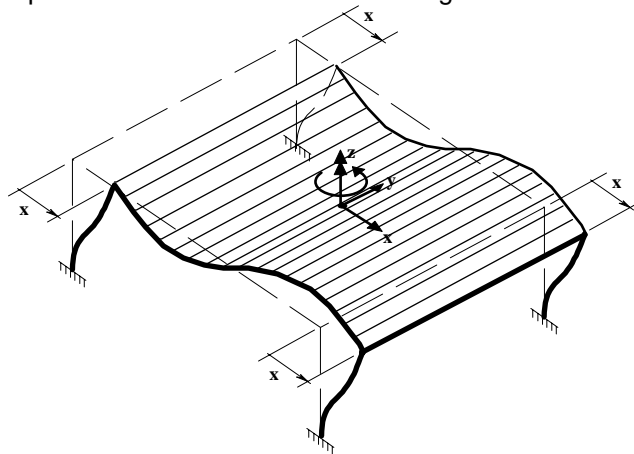


Figura 11-15 - Deformaciones en los elementos de una estructura de un piso, con diafragma rígido en su propio plano, ante un desplazamiento en la dirección x

Para ilustrar este punto en la Figura 11-15 se presenta una estructura de un piso compuesta por cuatro pórticos localizados en cada uno de los cuatro bordes de la losa. Si realizamos una translación en el sentido x , en la figura pueden verse las deformaciones de los diferentes elementos. Es evidente que hay desplazamientos verticales dentro de las vigas y la losa, y giros alrededor de los ejes horizontales dentro de los elementos y en los nudos de interconexión entre ellos.

Así mismo en la figura se ve claramente que la parte superior de las cuatro columnas, en el punto en que tocan la losa, tienen el mismo desplazamiento horizontal, lo cual es totalmente compatible con la hipótesis de diafragma rígido. Pero al mismo tiempo, todas ellas han tenido un giro en este mismo nudo, giro que ocurre alrededor de un eje paralelo al eje y . Además estos nudos tienen unos pequeños desplazamientos verticales, los cuales no son notorios en la gráfica, pero los nudos superiores de las columnas del lado izquierdo tienen un desplazamiento vertical hacia arriba, y los de las columnas del lado derecho hacia abajo. Así mismo, la flexión que ocurre en la losa alrededor de ejes horizontales que están en su propio plano, no es incompatible con la hipótesis de diafragma rígido. En resumen: dos puntos cualesquiera, que hagan parte de la losa de entrepiso que se supuso como diafragma rígido, están inhabilitados para tener desplazamientos relativos que se puedan contener dentro del plano

horizontal, no obstante, pueden tener desplazamientos relativos en la dirección vertical y giros con respecto a cualquier eje horizontal.

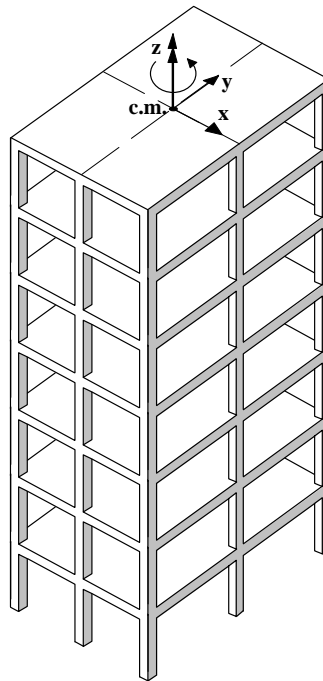


Figura 11-16 - Edificio en altura con un diafragma rígido con tres grados de libertad por piso

Esta idealización es extensible a edificios en altura, donde cada entrepiso es un diafragma independiente que tiene tres grados de libertad, dos posibilidades de desplazamientos horizontales ortogonales y giros con respecto a un eje vertical. Véase la Figura 11-16. Desde el punto de vista dinámico la idealización de rigidez infinita del diafragma en su plano, permite expresar las propiedades inerciales de su masa de una manera sencilla como se presentó en la Sección 11.2.2. Debe anotarse que al expresar las propiedades de masa de la edificación en su entrepiso de fondo se está afirmando que no hay masa en lugares diferentes de la losa y las masas adheridas a ella. Esta afirmación no es muy lejana de la realidad en estructuras aporticadas, donde la masa de las columnas es muy menor en comparación con la del entrepiso, incluyendo lo que soporta. No obstante en edificios donde los muros estructurales sean un porcentaje apreciable de la masa de la estructura, puede en algunos casos introducir errores importantes que deben ser evaluados y corregidos utilizando otro tipo de idealizaciones.

La inquietud de fondo con respecto a la acción de diafragma rígido consiste en definir si es válida con todo tipo de entrepisos. Cuando no hay suficiente rigidez dentro del diafragma la compatibilidad de las deformaciones horizontales de los elementos verticales de la estructura deja de ser válida y por lo tanto al utilizarla se estaría cometiendo en el análisis un error grave de idealización.

La respuesta a esta pregunta no es sencilla pues intervienen varios factores entre los que se cuentan principalmente:

- *La relación entre la rigidez del diafragma y la rigidez de los elementos del sistema de resistencia ante cargas horizontales.* El mismo diafragma puede ser rígido si está soportado sobre pórticos, y flexible si está soportados sobre muros.
- *La rigidez misma de los elementos que conforman el diafragma.* Este puede ser el caso de entrepisos de madera; o cuando los elementos verticales de soporte tienen rigideces comparables con las del diafragma, como puede presentarse en edificios alargados sobre muros estructurales muy rígidos colocados en la dirección del sentido corto del diafragma; o bien, en cubiertas de teja liviana sobre estructura metálica.
- *Tipo de unión entre los elementos que conforman el diafragma.* Puede ser el caso de entrepisos contruidos con base en elementos prefabricados donde las conexiones entre ellos sean incapaces de proveer un vínculo suficientemente rígido, aunque tengan resistencia adecuada.

- *Forma del diafragma.* Cuando el diafragma tiene zonas menos rígidas. Este caso es común cuando hay grandes vacíos dentro de la losa o diafragmas demasiado alargados.
- *Magnitud de las fuerzas que debe transferir el diafragma.* Las fuerzas que se inducen dentro del diafragma propiamente dicho deben estudiarse, pero existen casos en los cuales deben resistir fuerzas mayores que éstas. Los diafragmas de transferencia en edificaciones en altura con plataforma y torre en general deben transferir fuerzas mayores que los otros diafragmas de la edificación especialmente cuando aparecen elementos muy rígidos como muros de contención en el piso del diafragma de transferencia (Véase la Figura 11-17).

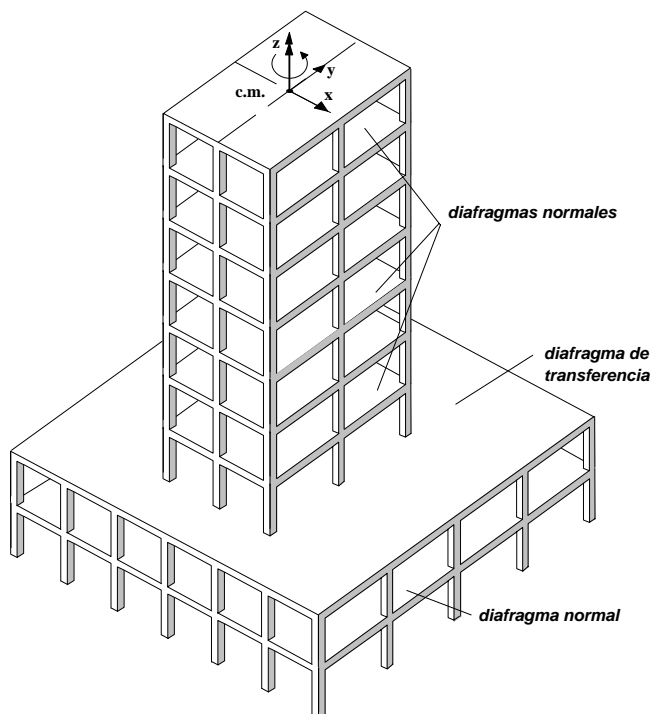


Figura 11-17 - Edificio con diafragma de transferencia

Ahora procedemos a formular las relaciones de rigidez de una estructura teniendo en cuenta la idealización de diafragma rígido. En la presentación del procedimiento general para idealización del diafragma rígido que se hace a continuación se emplean pórticos planos que en conjunto producen estructuras tridimensionales. Se ha escogido esta forma de presentación debido a que es la más sencilla de comprender en primera instancia. El procedimiento es general y por lo tanto su formulación con base en pórticos tridimensionales es una simple extensión del procedimiento con pórticos planos.

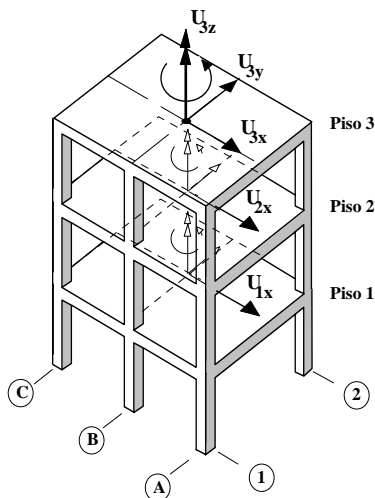


Figura 11-18 - Edificio al cual se le va a aplicar la idealización de diafragma rígido

Supongamos, para efectos de la presentación, que debemos encontrar la matriz de rigidez de toda la estructura para la idealización de diafragma rígido de un edificio de tres pisos como el mostrado en la Figura 11-18. Allí se tiene dos tipos de pórticos, los que van en la dirección x , los cuales tienen dos vanos y los que van en la dirección y , los cuales tienen un solo vano. Los grados de libertad del diafragma se localizan en su centro de masa, o centroide de la losa. En cada piso i hay tres grados de libertad, dos traslaciones horizontales ortogonales, U_{ix} y U_{iy} , y una rotación con respecto a un eje vertical que pasa por el centro de masa, U_{iz} , para un total de nueve grados de libertad para toda la estructura. Existen dos tipos de pórtico, el *Tipo-1*, que está orientado en la dirección x y del cual hay dos iguales y el *Tipo-A*, que está orientado en la dirección y y del cual hay tres iguales.

A continuación se describen los pasos a seguir para poder generar la matriz de rigidez de todo el edificio, expresada en los grados de libertad de los diafragmas.

11.3.1(a) — Se genera la matriz de rigidez de cada pórtico

En cada uno de sus nudos, los pórticos tienen tres grados de libertad: un desplazamiento horizontal, un desplazamiento vertical y un giro con respecto a un eje perpendicular al plano del pórtico. En la Figura 11-19 se muestran los dos tipos de pórtico con los grados de libertad que tienen en sus nudos. Por los procedimientos presentados en el Capítulo 8 podemos determinar la matriz de rigidez de cada uno de los tipos de pórtico. Dado que están empotrados en su base no se designaron grados de libertad allí.

Para el pórtico *Tipo-1* la matriz de rigidez, $[k_p^1]$, tiene dimensiones de 27×27 .

Para el pórtico *Tipo-A*, $[k_p^A]$, tiene dimensiones de 18×18 .

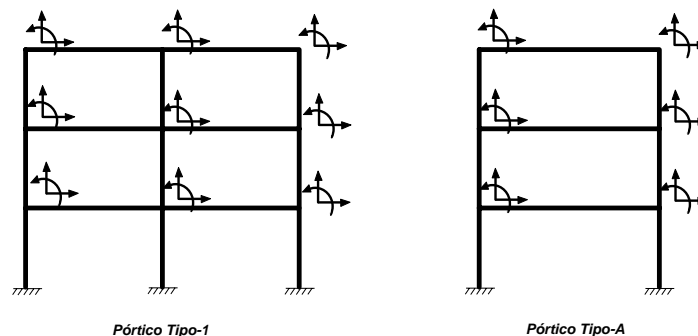


Figura 11-19 - Tipos de pórtico con sus grados de libertad modelados como pórticos planos

11.3.1(b) — Se hacen las vigas inextensibles debido al efecto de diafragma rígido

Debido a que el diafragma es infinitamente rígido, las vigas no pueden tener deformaciones axiales. Esto quiere decir que para cada pórtico, en cada piso basta con un grado de libertad horizontal. Por lo tanto se define un grado de libertad horizontal independiente por piso (por ejemplo el del eje izquierdo en cada piso), y los restantes grados de libertad horizontales del piso se convierten en grados de libertad dependientes.

Esto permite formular unas ecuaciones de ligadura dentro del procedimiento presentado en la Sección 9.2. Los grados de libertad de la estructura quedan como lo muestra la Figura 11-20.

Con las ecuaciones de ligadura se generan las matrices $[R_1]$ y $[R_A]$, y aplicando la ecuación (9-12) que aquí llamamos (11-27):

$$[k_I] = [R]^T [k_p] [R] \quad (11-27)$$

Llegamos a las siguientes matrices para cada tipo de pórtico:

Para el pórtico *Tipo-1* la matriz de rigidez, $[k_I^1]$, tiene dimensiones de 21 x 21.

Para el pórtico *Tipo-A*, $[k_I^A]$, tiene dimensiones de 15 x 15.

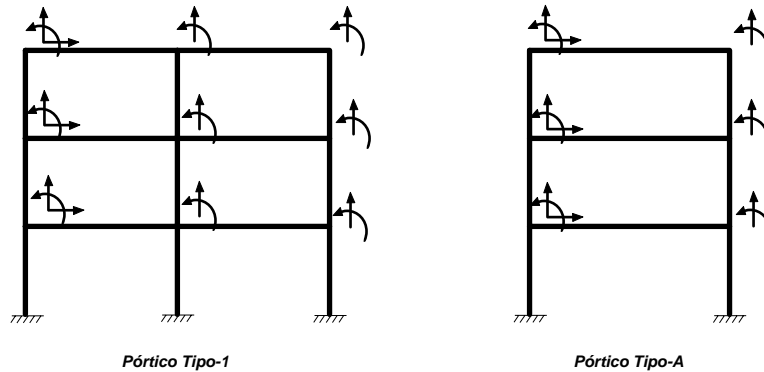


Figura 11-20 - Grados de libertad después de eliminar las deformaciones axiales de las vigas

Queda además para cada tipo de pórtico planteada la ecuación (11-28), la cual permitirá determinar la totalidad de los grados de libertad $\{u\}$ a partir de los grados de libertad $\{u_I\}$:

$$\{u\} = [R] \{u_I\} \quad (11-28)$$

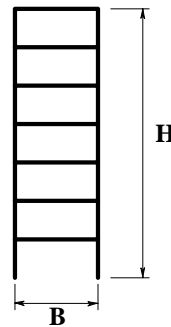
11.3.1(c) — Se ajustan los grados de libertad verticales

Desde el punto de vista del análisis dinámico ha sido tradicional, para solicitaciones sísmicas, sólo tener en cuenta las excitaciones horizontales del sismo. El tratamiento dinámico de los efectos verticales del sismo en las estructuras es complejo y poco entendido aún en la actualidad, y de todas formas demandaría una idealización de la estructura diferente a la que se está planteando. No obstante la influencia de las deformaciones axiales de las columnas es importante en la respuesta de la estructura ante cargas horizontales. Esta influencia depende de la esbeltez de la estructura. Cuando se trata de pórticos poco esbeltos, bajos y largos, pueden eliminarse con un procedimiento similar al utilizado para las vigas, o simplemente tachando las filas y columnas de la matriz de rigidez del pórtico correspondientes a los grados de libertad verticales. Si el pórtico es esbelto es más adecuado condensar estos grados de libertad verticales. Ha sido tradicional seguir la siguiente recomendación respecto a los grados de libertad verticales:

Si:

(i) $H/B > 5$ deben condensarse

(ii) $H/B \leq 5$ pueden eliminarse



Para el caso (i) se aplica el procedimiento presentado en la Sección 9.3:

Se reordena la matriz $[k_I]$ de tal manera que en las primeras filas y columnas queden los grados de libertad horizontales y rotacionales, y en las filas inferiores y columnas a la derecha queden los grados de libertad verticales. Esta nueva matriz así particionada tiene la siguiente forma:

$$[k_I] = \begin{bmatrix} k_I^0 & k_I^1 \\ k_I^2 & k_I^3 \end{bmatrix} \quad (11-29)$$

La matriz del pórtico con sus efectos verticales condensados se obtiene por medio de la siguiente ecuación:

$$[k_{SV}] = \left[[k_I^0] - [k_I^1] [k_I^3]^{-1} [k_I^2] \right] \quad (11-30)$$

Los valores de los grados de libertad verticales condensados se pueden obtener posteriormente por medio de la siguiente ecuación:

$$\{u_V\} = -[k_I^3]^{-1} [k_I^2] \{u_{SV}\} \quad (11-31)$$

Para el caso (ii) se tachan las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad verticales de la matriz $[k_I]$, y esta nueva matriz se denomina $[k_{SV}]$. De esta manera los grados de libertad verticales se hacen iguales a cero:

$$\{u_V\} = \{0\} \quad (11-32)$$

Por cualquiera de los dos procedimientos que se siga, los grados de libertad de los pórticos quedan como lo muestra la Figura 11-21. Así llegamos a las siguientes matrices para cada tipo de pórtico:

Para el pórtico *Tipo-1* la matriz de rigidez, $[k_{SV}^1]$, tiene dimensiones de 12 x 12.

Para el pórtico *Tipo-A*, $[k_{SV}^A]$, tiene dimensiones de 9 x 9.

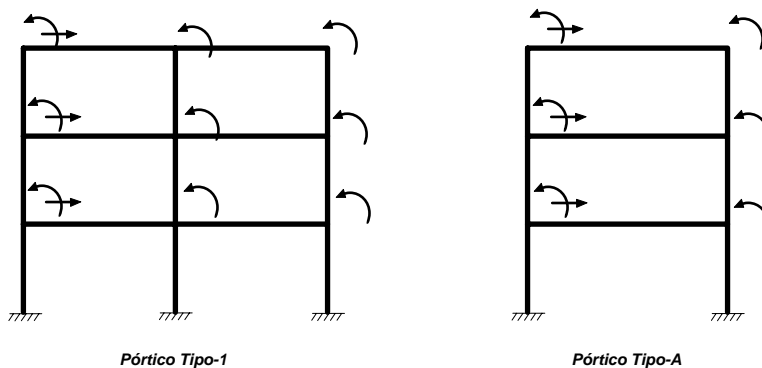


Figura 11-21 - Grados de libertad después de eliminar o condensar las deformaciones verticales

11.3.1(d) — Se condensan los grados de libertad rotacionales de los nudos

Tal como se vio anteriormente en la explicación de la idealización de diafragma rígido, los grados de libertad correspondientes a giros alrededor de ejes que estén contenidos en el plano del diafragma no están restringidos por la idealización, pero al mismo tiempo solamente hay un efecto inercial muy menor asociado con estas rotaciones, por lo tanto es lícito condensarlas. La matriz de rigidez $[k_{SV}]$ se reordena de tal manera que en las primeras filas y columnas queden los grados de libertad horizontales del pórtico y en las filas inferiores y en las columnas del lado derecho de la matriz los grados de libertad rotacionales. Se reorganiza y particiona la matriz así:

$$[k_{SV}] = \begin{bmatrix} k_{SV}^0 & k_{SV}^1 \\ k_{SV}^2 & k_{SV}^3 \end{bmatrix} \quad (11-33)$$

luego se condensa:

$$[k_C] = \left[[k_{SV}^0] - [k_{SV}^1] [k_{SV}^3]^{-1} [k_{SV}^2] \right] \quad (11-34)$$

Los valores de los grados de libertad rotacionales condensados se pueden obtener posteriormente por medio de la siguiente ecuación:

$$\{u_{rot}\} = -[k_{SV}^3]^{-1} [k_{SV}^2] \{u_p\} \quad (11-35)$$

Así llegamos a las siguientes matrices para cada tipo de pórtico:

Para el pórtico *Tipo-1* la matriz de rigidez, $[k_C^1]$, tiene dimensiones de 3 x 3.

Para el pórtico *Tipo-A*, $[k_C^A]$, tiene dimensiones de 3 x 3.

La matriz que se obtiene para cada pórtico al final de este paso corresponde a la matriz de efectos horizontales pues sólo contiene la rigidez de cada uno de ellos para desplazamientos horizontales, uno por piso. Vale la pena resaltar la reducción que se ha realizado del número de grados de libertad de cada pórtico, por ejemplo en el pórtico Tipo-1 se ha reducido de 27 grados de libertad a 3, y para el pórtico Tipo-A de 18 a 3.

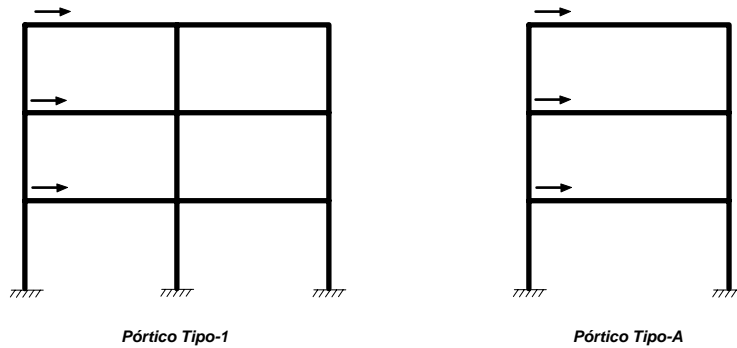


Figura 11-22 - Grados de libertad después de condensar las rotaciones. Sólo se tienen grados de libertad horizontales, uno por piso en cada pórtico

En este punto si se quisiera realizar un análisis planar de la estructura en su totalidad, independiente para la dirección x y para la dirección y, sólo bastaría sumar las matrices de los pórticos que actúan en cada una de las direcciones. Estas matrices tienen un grado de libertad por piso y se estaría tomando en cuenta el efecto de diafragma pues sus desplazamientos en la dirección del pórtico serían compatibles para todos ellos.

11.3.1(e) — Transformación de los grados de libertad del pórtico de un desplazamiento por piso a los tres grados de libertad por piso de cada diafragma

En la Figura 11-23 se muestra en planta uno de los entrepisos de la estructura. Allí se indican los grados de libertad del diafragma y los de cada uno de los pórticos. Además se ha indicado un sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen está en el cruce de los ejes 1 y C. Este sistema de coordenadas nos permitirá encontrar las relaciones de transformación entre los diferentes grados de libertad.

En este caso se colocaron los grados de libertad del diafragma en el centro de masa, pero esta localización puede ser en cualquier punto arbitrario, siempre y cuando al generar la matriz de masa del

diafragma se tomen en cuenta todos los efectos de la masa cuando no están los grados de libertad en el centro de masa.

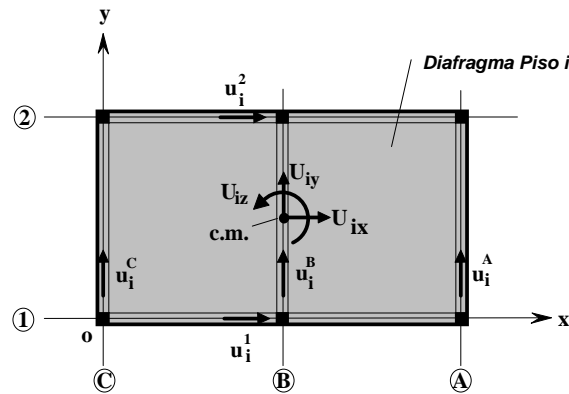


Figura 11-23 - Grados de libertad del diafragma y de los pórticos en el piso i

Ahora planteamos el equilibrio entre la fuerza que actúa en el pórtico en el piso y las resultantes en el centro de masa del diafragma. Para el efecto vamos a tratar la fuerza que actúa en el piso del pórtico como una fuerza local y las del centroide del diafragma como globales, de ahí la nomenclatura de mayúsculas y minúsculas que se ha venido utilizando. En la Figura 11-24 se presentan los diferentes datos para establecer el equilibrio. El pórtico se ha orientado arbitrariamente para hacer más general la deducción.

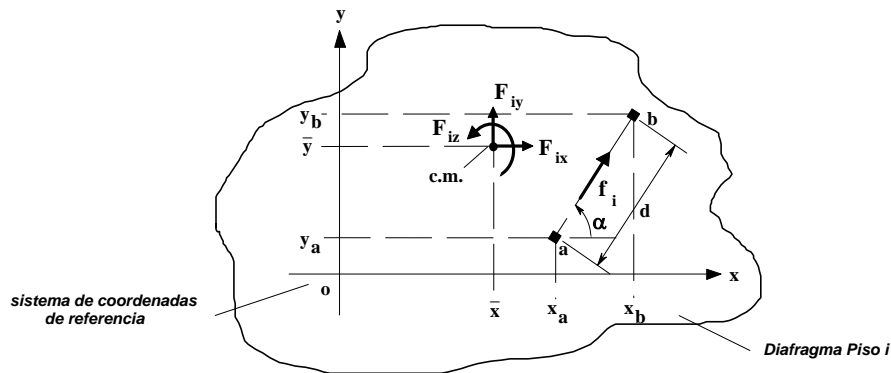


Figura 11-24 - Equilibrio entre la fuerza del pórtico en el piso y las resultantes en el diafragma, para el piso i

Los puntos a y b definen la dirección positiva de la fuerza, al ir de a a b. La única restricción en la localización de estos dos punto es que deben estar en la línea de acción del pórtico. De la figura podemos establecer que:

$$d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \quad (11-36)$$

$$y \quad \text{sen } \alpha = \frac{(y_b - y_a)}{d} \quad (11-37)$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{(x_b - x_a)}{d} \quad (11-38)$$

Mientras la fuerza f_i se mantenga en su línea de acción no importa la localización que tenga a lo largo de esta línea, por lo tanto arbitrariamente se coloca en el punto a.

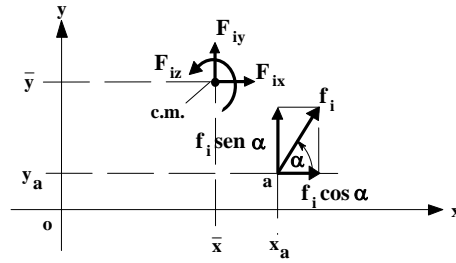


Figura 11-25 - Fuerza del pórtico localizada en a y resuelta en componentes

De equilibrio, en la Figura 11-25, obtenemos la siguiente relación:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{ix} \\ \overline{F}_{iy} \\ \overline{F}_{iz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ (\bar{y}_i - y_a) \cos \alpha - (\bar{x}_i - x_a) \sin \alpha \end{bmatrix} \{f_i\} \quad (11-39)$$

de donde:

$$\{F_i\} = [t_i] \{f_i\} \quad (11-40)$$

Debido a que el centro de masa puede tener una localización diferente en cada piso, definimos para cada piso i:

$$r_i = (\bar{y}_i - y_a) \cos \alpha - (\bar{x}_i - x_a) \sin \alpha \quad (11-41)$$

y entonces:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{3x} \\ \overline{F}_{3y} \\ \overline{F}_{3z} \\ \overline{F}_{2x} \\ \overline{F}_{2y} \\ \overline{F}_{2z} \\ \overline{F}_{1x} \\ \overline{F}_{1y} \\ \overline{F}_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 0 \\ r_3 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & r_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{Bmatrix} \quad (11-42)$$

o sea:

$$\{F\} = [T_p] \{f\} \quad (11-43)$$

La matriz $[T_p]$ está compuesta por las siguientes submatrices de tres por uno:

$$[T_p] = \begin{bmatrix} t_3 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 \end{bmatrix} \quad (11-44)$$

el tamaño de la matriz $[T_p]$ para cada pórtico tiene dimensiones $3n$ filas por n columnas, donde n es el número de pisos.

Para cada uno de los pórticos tenemos:

$$\{f_p\} = [k_c] \{u_p\} \quad (11-45)$$

y

$$\{F_p\} = [T_p] \{f_p\} \quad (11-46)$$

Aplicando el principio de contragradiante:

$$\{u_p\} = [T_p]^T \{U\} \quad (11-47)$$

Reemplazando (11-47) en (11-45):

$$\{f_p\} = [k_c] [T_p]^T \{U\} \quad (11-48)$$

y ahora (11-48) en (11-46):

$$\{F_p\} = [T_p] [k_c] [T_p]^T \{U\} = [K_p] \{U\} \quad (11-49)$$

donde $[K_p]$ corresponde a la matriz de rigidez del pórtico expresada en función de los grados de libertad de toda la estructura. En nuestro caso estas matrices para cualquiera de los pórticos tienen dimensiones de 9 por 9.

11.3.1(f) — Ensamblaje de la matriz de rigidez de toda la estructura

La matriz de rigidez de toda la estructura, $[K_E]$, es simplemente la suma de todas las matrices $[K_p]$ de todos los pórticos. Para un total de q pórticos:

$$[K_E] = \sum_{i=1}^q [K_p^i] \quad (11-50)$$

11.3.1(g) — Se determina la matriz de masa de toda la estructura

La matriz de masa, $[m_i]$, del diafragma del piso i se obtiene por medio de los procedimientos presentados en la Sección 11.2.2. Esta matriz tiene dimensiones de 3 filas por 3 columnas. La matriz de masa de toda la estructura se obtiene de la siguiente consideración de equilibrio de las fuerzas inerciales, expresada por medio de submatrices de dimensiones 3 filas por 3 columnas:

$$\begin{Bmatrix} \{F_3\}_{3 \times 1} \\ \{F_2\}_{3 \times 1} \\ \{F_1\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [m_3]_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & [m_2]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & [m_1]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}_3\}_{3 \times 1} \\ \{\ddot{U}_2\}_{3 \times 1} \\ \{\ddot{U}_1\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (11-51)$$

Entonces:

$$[M_E]_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} [m_3]_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & [m_2]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & [m_1]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (11-52)$$

11.3.1(h) — Ecuaciones de equilibrio dinámico de toda la estructura

Podemos entonces plantear las ecuaciones de equilibrio dinámico de toda la estructura, las cuales tienen la siguiente forma para vibración libre:

$$[\mathbf{M}_E]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}_E]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (11-53)$$

El número de filas del sistema es $3n$, donde n es el número de pisos de la estructura. Para el ejemplo que se utilizó en la deducción, y expresadas por medio de submatrices de 3 por 3, también para vibración libre, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_3 \\ \ddot{\mathbf{U}}_2 \\ \ddot{\mathbf{U}}_1 \end{Bmatrix} + [\mathbf{K}_E] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (11-54)$$

Para el caso de excitación en la base, se utiliza la ecuación (10-23), la cual en este caso tiene la forma:

$$[\mathbf{M}_E]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}_E]\{\mathbf{U}\} = -[\mathbf{M}_E][\boldsymbol{\gamma}]\{\ddot{\mathbf{x}}_o\} \quad (11-55)$$

Donde $[\boldsymbol{\gamma}]\{\ddot{\mathbf{x}}_o\}$ corresponde a $\{\ddot{\mathbf{v}}_o\}$ el cual describe las aceleraciones en los grados de libertad de la estructura, causadas por las aceleraciones del terreno.

En el caso presentado en la Sección 10.4, el sistema vibra en un plano y la matriz $[\boldsymbol{\gamma}]$ era un vector columnar con un número de filas igual al número de grados de libertad de la estructura y con todos sus términos iguales a la unidad. Las aceleraciones del terreno provienen de registros acelerográficos los cuales contienen tres componentes, dos horizontales ortogonales y una vertical. No existen registros de las componentes rotacionales de la aceleración. Por lo tanto en nuestro caso no hay manera de dar una excitación a los grados de libertad de rotación del diafragma. En el caso que nos atañe, de idealización de diafragma rígido, ya se mencionó en la Sección 11.3.1(c) que no incluye los efectos verticales de la aceleración sísmica.

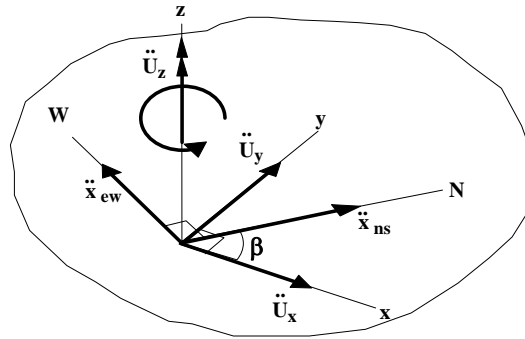


Figura 11-26 - Dirección de las aceleraciones de los grados de libertad de los diafragmas y de las excitaciones del terreno

Entonces, el vector de aceleraciones del terreno tiene dos componentes horizontales ortogonales, las cuales no necesariamente son colineales con los grados de libertad x y y de los desplazamientos de los diafragmas, como muestra la Figura 11-26. De la mencionada figura podemos obtener las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{ox} &= \ddot{x}_{ns} \cos \beta - \ddot{x}_{ew} \sin \beta \\ \ddot{x}_{oy} &= \ddot{x}_{ns} \sin \beta + \ddot{x}_{ew} \cos \beta \end{aligned} \quad (11-56)$$

No sobra advertir que muchas veces los acelerógrafos no se orientan con el norte exactamente, por lo tanto se han utilizado las direcciones NS y EW simplemente para ilustrar el manejo de las componentes del acelerograma. Otra alternativa utilizada con frecuencia es el uso de una sola componente del acelerograma colocada con un ángulo β con respecto al eje principal x de la estructura. En este caso las componentes colineales se obtienen por medio de:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{ox} &= \ddot{x}_o \cos \beta \\ \ddot{x}_{oy} &= \ddot{x}_o \sin \beta\end{aligned}\quad (11-57)$$

Una vez se obtienen las aceleraciones del terreno colineales con las direcciones principales en la estructura podemos generar la matriz $[\gamma]$ donde:

$$\{\ddot{v}_o\} = [\gamma] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{ox} \\ \ddot{x}_{oy} \end{Bmatrix} \quad (11-58)$$

Para nuestro caso de tres pisos $[\gamma]$ se obtiene de la siguiente manera, la cual es extensible a cualquier número de pisos.

$$\{\ddot{v}_o\} = \begin{Bmatrix} \ddot{v}_{3x} \\ \ddot{v}_{3y} \\ \ddot{v}_{3z} \\ \ddot{v}_{2x} \\ \ddot{v}_{2y} \\ \ddot{v}_{2z} \\ \ddot{v}_{1x} \\ \ddot{v}_{1y} \\ \ddot{v}_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{ox} \\ \ddot{x}_{oy} \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \{\ddot{v}_o\} = \begin{Bmatrix} \ddot{v}_{3x} \\ \ddot{v}_{3y} \\ \ddot{v}_{3z} \\ \ddot{v}_{2x} \\ \ddot{v}_{2y} \\ \ddot{v}_{2z} \\ \ddot{v}_{1x} \\ \ddot{v}_{1y} \\ \ddot{v}_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_o \cos \beta \\ \ddot{x}_o \sin \beta \end{Bmatrix} \quad (11-59)$$

o sea se coloca un 1 si la aceleración del terreno es colineal con la aceleración del grado de libertad que representa la matriz. Si no es colineal se coloca un cero, o la componente correspondiente. En la Sección 11.5 se explica como generar $[\gamma]$ para el caso general, inclusive cuando la excitación en un apoyo es diferente de la de otro.

11.3.1(i) — Obtención de las fuerzas en los elementos una vez se conocen los desplazamientos de los grados de libertad de los diafragmas

La solución de la respuesta dinámica de la estructura se presenta en el Capítulo siguiente, para las ecuaciones de equilibrio dinámico (11-53) o (11-55), y la misma matriz de rigidez utilizada en estas ecuaciones puede ser empleada para analizar la estructura ante fuerzas horizontales estáticas como las que prescriben para diseño sísmico los códigos en el método de la fuerza horizontal equivalente. En este caso se resuelve el sistema estático de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$\{P\} = [K_E] \{U\} \quad (11-60)$$

Donde $\{P\}$ corresponde a las cargas horizontales estáticas, ya sea de viento o de sismo, que se aplican a la estructura. El vector de desplazamientos de los grados de libertad del diafragma $\{U\}$ se obtiene solucionando el sistema planteado en (11-60).

Una vez se dispone del vector de desplazamientos $\{U\}$ ya sea proveniente de un análisis dinámico o estático, obtenemos los desplazamientos del pórtico en cada uno de los pisos utilizando la ecuación (11-47), la cual se reproduce aquí por conveniencia:

$$\{u_p\} = [T_p]^T \{U\} \quad (11-61)$$

Este vector $\{u_p\}$ corresponde a los desplazamientos que tienen cada piso del pórtico, compatibles con los desplazamientos del diafragma en el piso. Estas deflexiones horizontales del pórtico son las mismas que se utilizan para verificar las derivas (deflexiones horizontales relativas) tal como exigen los códigos sísmicos.

Una vez se dispone de las deflexiones horizontales, coplanares del pórtico, se procede a determinar los valores de las rotaciones de los nudos, las cuales se habían condensado en la Sección 11.3.1(d) utilizando la ecuación (11-35), la cual también se reproduce aquí por conveniencia:

$$\{\mathbf{u}_{\text{rot}}\} = -[\mathbf{k}_{\text{SV}}^3]^{-1}[\mathbf{k}_{\text{SV}}^2]\{\mathbf{u}_{\text{p}}\} \quad (11-62)$$

Es evidente que al particionar la matriz de rigidez $[\mathbf{k}_{\text{SV}}]$ en la Sección 11.3.1(d) la misma operación se realizó con el vector de desplazamientos $\{\mathbf{u}_{\text{SV}}\}$ y por lo tanto:

$$\{\mathbf{u}_{\text{SV}}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{\text{p}} \\ \mathbf{u}_{\text{rot}} \end{Bmatrix} \quad (11-63)$$

Ahora obtenemos los desplazamientos de los grados de libertad verticales, dependiendo del tipo de procedimiento utilizado en la Sección 11.3.1(c). Si se utilizó el procedimiento (i) de la Sección 11.3.1(c), se utiliza la ecuación (11-31), reproducida a continuación:

$$\{\mathbf{u}_{\text{V}}\} = -[\mathbf{k}_{\text{I}}^3]^{-1}[\mathbf{k}_{\text{I}}^2]\{\mathbf{u}_{\text{SV}}\} \quad (11-64)$$

Si se utilizó el procedimiento (ii) de la Sección 11.3.1(c), simplemente se usa (11-32):

$$\{\mathbf{u}_{\text{V}}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (11-65)$$

Entonces:

$$\{\mathbf{u}_{\text{I}}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{\text{SV}} \\ \mathbf{u}_{\text{V}} \end{Bmatrix} \quad (11-66)$$

Por último obtenemos los desplazamientos de la totalidad de los grados de libertad del pórtico, $\{\mathbf{u}\}$, por medio de la ecuación (11-28):

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{u}_{\text{I}}\} \quad (11-67)$$

El vector de desplazamientos $\{\mathbf{u}\}$ está en coordenadas globales del pórtico. Se ha utilizado la nomenclatura de minúsculas para insistir de que hay unas grandes coordenadas globales que son las de toda la estructura, por medio de los grados de libertad en los diafragmas y que para efectos de ellas, las coordenadas de los grados de libertad del pórtico son unas coordenadas locales.

Con el vector de desplazamientos del pórtico $\{\mathbf{u}\}$ se determinan las fuerzas en los elementos de la estructura y si se desea, las reacciones en los apoyos. Este procedimiento se realiza para cada uno de los pórticos independientemente.

11.3.1(j) — Algunas observaciones acerca de la idealización de diafragma rígido

La idealización de diafragma rígido tiene las siguientes ventajas respecto a otras idealizaciones para el análisis de estructuras de edificios ante cargas horizontales y sollicitaciones dinámicas. Dentro de estas ventajas no sobra resaltar las siguientes:

- Permite realizar el análisis de la estructura como un todo, tal como es el enfoque moderno de análisis estructural. Esto permite tener resultados mucho más confiables que cuando se realiza el análisis utilizando pórticos independientes.
- La matriz de la estructura $[\mathbf{K}_{\text{E}}]$ tiene un número de filas y columnas igual al número de pisos multiplicado por tres, sensiblemente menor que el de la gran mayoría de los pórticos que la componen, o que el de la matriz de rigidez tridimensional de la estructura con seis grados de libertad

por nudo. Esto redundante en menores tiempos de proceso y menores demandas de memoria en los programas de computador que utilizan esta idealización.

- Distribuye automáticamente las fuerzas horizontales a los diferentes elementos verticales de resistencia en proporción a sus rigideces.
- Toma en cuenta el efecto de torsión de toda la estructura, lo cual es especialmente importante en estructuras con resistencia vertical irregular o con plantas irregulares. La formulación matemática describe adecuadamente el hecho de que las fuerzas horizontales se aplican en el centro de masa del diafragma y que la estructura tiene a girar con respecto a su *centro de rigidez*, el cual se define como el punto en el diafragma en el cual al aplicar una fuerza horizontal no se presenta rotación del diafragma. Por lo tanto en estructuras donde los dos centros, el de masa y el de rigidez no coinciden, el procedimiento toma en cuenta automáticamente la torsión que genera la aplicación de fuerzas horizontales en lugares diferentes del centro de rigidez.
- Es posible realizar simultáneamente el análisis para las cargas verticales que contenga la estructura. Utilizando el procedimiento de condensación general, presentado en la Sección 9.3 y especialmente en la ecuación (9-21) puede verse que el proceso de las cargas verticales es un subproducto de las condensaciones que se lleven a cabo para obtener la matriz de efectos horizontales del pórtico, evitándose de esta manera tener que realizar un análisis para estas cargas. Esta metodología es la utilizada por programas de computador tales como TABS [Wilson y Dovey, 1972], ETABS [Wilson, Hollings y Dovey, 1975] y COMBAT [Computech, 1983] en los cuales se utilizan además técnicas de *subestructuración y solución frontal* de las ecuaciones simultáneas.
- El análisis de efectos de segundo orden (*efecto P-Delta*) de toda la estructura se puede llevar a cabo fácilmente pues las fuerzas horizontales de la estructura pueden ser corregidas y tan solo hay necesidad de volver a solucionar el sistema de ecuaciones (11-60).

A continuación se presenta un ejemplo de idealización de diafragma rígido en una estructura aporticada de dos pisos, similar a la utilizada para hacer el planteamiento de la teoría.

Antes de emprender la solución del ejemplo es importante hacer algunas observaciones acerca de algunas de las operaciones numéricas que hay que realizar, las cuales en muchos casos ahorran algún tiempo en la realización del trabajo numérico, especialmente cuando éste se realiza manualmente.

Cuando se utiliza la técnica de igualación de grados de libertad y se está aplicando la operación de la ecuación (9-12), o (11-27):

$$[k_I] = [R]^T [k_p] [R] \quad (11-68)$$

realmente lo que se está haciendo con el primero producto de la operación, $[R]^T [k_p]$ es multiplicar toda una fila por una constante y luego otra por otra constante y así sucesivamente, para luego sumarlas. La segunda parte de la operación es totalmente análoga, pero con columnas de la matriz. Cuando se trata de estructuras ortogonales, como son los pórticos, estas operaciones de igualación de grados de libertad tiene coeficiente igual a la unidad en las ecuaciones de ligadura. Por esta razón cuando se trata de una estructura ortogonal y se están igualando grados de libertad, basta sumar las filas y luego las columnas correspondientes a los grados de libertad que se igualan. Más aún, esta operación se puede evitar si desde un comienzo el ensamblaje de todos los grados de libertad se realiza sobre un solo grado de libertad, y de esta forma la matriz ensamblada de una vez tiene las ecuaciones de ligadura implantadas. Esta última metodología implica que no se puede utilizar la técnica de ensamblaje por medio de submatrices de 3 por 3 que se explicó en el Capítulo 9, pero la diferencia es sutil, pues no se ensamblan submatrices de tres por tres sino términos independientes, pero la técnica sigue siendo la misma. Una ventaja adicional de esta última metodología es que la matriz de rigidez se puede generar de una vez con los grados de libertad ordenados de una manera que permita realizar las operaciones de condensación posteriores sin tener que reordenar la matriz.

Otro aspecto tiene que ver con la condensación, tal como la muestra la ecuación (9-20), o (11-30), allí aparentemente hay necesidad de invertir una matriz cuyo tamaño muchas veces es grande. No obstante

está operación se puede realizar condensando solo un grado de libertad a la vez, y este caso sólo hay que invertir un término, pues la matriz $[k_3]$ tiene dimensiones de 1 por 1. O sea que su inversa es el inverso del término, o $1/k_3$. Otra manera de ahorrar trabajo numérico en estas operaciones es aprovechar la simetría de la estructura. Cuando dos grados de libertad producen resultados totalmente iguales, porque son simétricos, se pueden tratar como un solo grado de libertad, ensamblándolos como uno solo, o bien sumando las filas y las columnas correspondientes en la matriz de rigidez. En el ejemplo que se presenta a continuación se utilizan algunas de estas técnicas, con el fin de ahorrar trabajo numérico.

Ejemplo 11-6

Deben encontrarse las ecuaciones de movimiento de la estructura de concreto reforzado mostrada en la Figura 11-27. Debe utilizarse la idealización de diafragma rígido, por lo tanto no hay deformaciones axiales en las vigas. Dado que se trata de una estructura baja los grados de libertad verticales se van a eliminar igualándolos a cero. Los giros en los nudos de los pórticos se deben condensar.

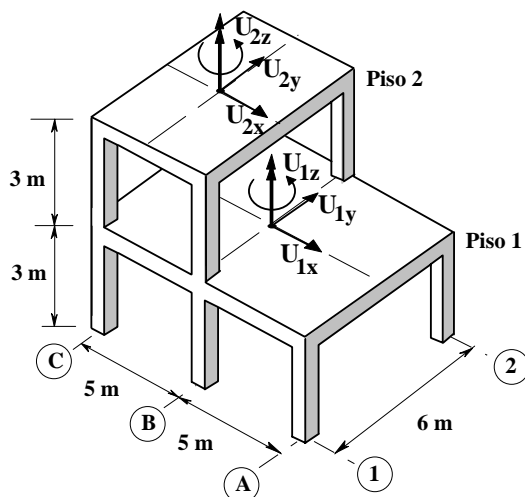


Figura 11-27 - Edificio del ejemplo 11-6

Los elementos tienen las siguientes propiedades: todas las vigas tienen sección con $h = 0.50 \text{ m}$ de alto y $b = 0.30 \text{ m}$ de ancho, la resistencia del concreto es de 30 MPa . Todas las columnas tienen sección de $h = 0.30 \text{ m}$ por $b = 0.30 \text{ m}$ y resistencia del concreto de 30 MPa . Las losas tienen una masa por unidad de área de $0.8 \text{ Mg/m}^2 = 800 \text{ kg/m}^2$, masa correspondiente a la carga muerta incluyendo el peso propio de la estructura más los acabados ($w = 7.84 \text{ kN/m}^2$). Los grados de libertad de los diafragmas están localizados en sus centros de masa como muestra la Figura 11-27.

Primero calculamos las matrices de rigidez de los elementos. Las columnas son iguales en todos los pórticos, igualmente las vigas todas tienen la misma sección, sólo cambia su luz, por eso se genera una matriz de rigidez para viga de 5 m de luz y otra para viga de 6 m de luz.

Columnas

$$h = 0.3 \text{ m}$$

$$b = 0.3 \text{ m}$$

$$I = bh^3/12 = 0.3 \text{ m} \cdot 0.3^3 \text{ m}^3 / 12 = 0.000675 \text{ m}^4$$

$$A = bh = 0.3 \text{ m} \cdot 0.3 \text{ m} = 0.09 \text{ m}^2$$

$$E = 4000 \sqrt{f'_c} \text{ (MPa)} = 4000 \sqrt{30 \text{ MPa}} = 22\,000 \text{ MPa} = 22 \text{ GPa}$$

$$L = 3 \text{ m}$$

El sistema de coordenadas local está orientado con su eje x en dirección hacia abajo, por lo tanto el ángulo α es 90° .

$$c = \cos \alpha = 0.0$$

$$s = \sin \alpha = 1.0$$

$$\rho = EI/L^3 = 22 \text{ GPa} \cdot 0.000675 \text{ m}^4 / 3^3 \text{ m}^3 = 550 \text{ kN/m}$$

$$\beta = AL^2/I = 0.09 \text{ m}^2 \cdot 3^2 \text{ m}^2 / 0.000675 \text{ m}^4 = 1200$$

y la matriz de rigidez del elemento de columna, en kN/m y kN · m/rad, es la siguiente:

$$[k_{\text{col}}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 6.6 & 0 & 9.9 & -6.6 & 0 & 9.9 \\ 0 & 660 & 0 & 0 & -660 & 0 \\ 9.9 & 0 & 19.8 & -9.9 & 0 & 9.9 \\ -6.6 & 0 & -9.9 & 6.6 & 0 & -9.9 \\ 0 & -660 & 0 & 0 & 660 & 0 \\ 9.9 & 0 & 9.9 & -9.9 & 0 & 19.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa}^{\text{col}} & k_{ab}^{\text{col}} \\ k_{ba}^{\text{col}} & k_{bb}^{\text{col}} \end{bmatrix}$$

Vigas de 5 m de luz

$$h = 0.5 \text{ m}$$

$$b = 0.3 \text{ m}$$

$$I = bh^3/12 = 0.3 \text{ m} \cdot 0.5^3 \text{ m}^3 / 12 = 0.003125 \text{ m}^4$$

$$A = bh = 0.3 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m} = 0.15 \text{ m}^2$$

$$E = 4000 \sqrt{f'_c} \text{ (MPa)} = 4000 \sqrt{30} \text{ MPa} = 22\,000 \text{ MPa} = 22 \text{ GPa}$$

$$L = 5 \text{ m}$$

El sistema de coordenadas local coincide con el global por lo tanto α es 0°.

$$c = \cos \alpha = 1.0$$

$$s = \sin \alpha = 0.0$$

$$\rho = EI/L^3 = 22 \text{ GPa} \cdot 0.003125 \text{ m}^4 / 5^3 \text{ m}^3 = 550 \text{ kN/m}$$

$$\beta = AL^2/I = 0.15 \text{ m}^2 \cdot 5^2 \text{ m}^2 / 0.003125 \text{ m}^4 = 1200$$

y la matriz de rigidez del elemento de viga de 5 m de luz, en kN/m y kN · m/rad, es la siguiente:

$$[k_{\text{vi5}}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 660 & 0 & 0 & -660 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6 & 16.5 & 0 & -6.6 & 16.5 \\ 0 & 16.5 & 55.0 & 0 & -16.5 & 27.5 \\ -660 & 0 & 0 & 660 & 0 & 0 \\ 0 & -6.6 & -16.5 & 0 & 6.6 & -16.5 \\ 0 & 16.5 & 27.5 & 0 & -16.5 & 55.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa}^{\text{vi5}} & k_{ab}^{\text{vi5}} \\ k_{ba}^{\text{vi5}} & k_{bb}^{\text{vi5}} \end{bmatrix}$$

Vigas de 6 m de luz

$$h = 0.5 \text{ m}$$

$$b = 0.3 \text{ m}$$

$$I = bh^3/12 = 0.3 \text{ m} \cdot 0.5^3 \text{ m}^3 / 12 = 0.003125 \text{ m}^4$$

$$A = bh = 0.3 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m} = 0.15 \text{ m}^2$$

$$E = 4000 \sqrt{f'_c} \text{ (MPa)} = 4000 \sqrt{30} \text{ MPa} = 22\,000 \text{ MPa} = 22 \text{ GPa}$$

$$L = 6 \text{ m}$$

El sistema de coordenadas local coincide con el global por lo tanto α es 0°.

$$c = \cos \alpha = 1.0$$

$$s = \sin \alpha = 0.0$$

$$\rho = EI/L^3 = 22 \text{ GPa} \cdot 0.003125 \text{ m}^4 / 6^3 \text{ m}^3 = 318.3 \text{ kN/m}$$

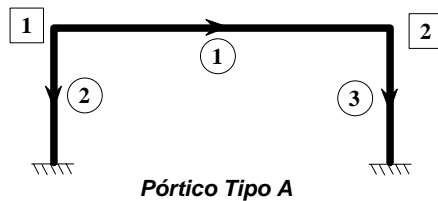
$$\beta = AL^2/I = 0.15 \text{ m}^2 \cdot 6^2 \text{ m}^2 / 0.003125 \text{ m}^4 = 1728$$

y la matriz de rigidez del elemento de viga de 6 m de luz, en kN/m y kN · m/rad, es la siguiente:

$$[k_{vi6}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 550 & 0 & 0 & -550 & 0 & 0 \\ 0 & 3.82 & 11.46 & 0 & -3.82 & 11.46 \\ 0 & 11.46 & 45.83 & 0 & -11.46 & 22.92 \\ -550 & 0 & 0 & 550 & 0 & 0 \\ 0 & -3.82 & -11.46 & 0 & 3.82 & -11.46 \\ 0 & 11.46 & 22.92 & 0 & -11.46 & 45.83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa}^{vi6} & k_{ab}^{vi6} \\ k_{ba}^{vi6} & k_{bb}^{vi6} \end{bmatrix}$$

Ahora debemos encontrar la matriz de efectos horizontales para cada tipo de pórtico. Iniciamos con el pórtico del eje A. La nomenclatura de nudos y elementos es la siguiente:

Pórtico Tipo - A



La forma de ensamblaje es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} k_{aa}^1 + k_{aa}^2 & k_{ab}^1 \\ k_{ba}^1 & k_{bb}^1 + k_{bb}^3 \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez del pórtico:

$$[k_P^A] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 556.6 & 0 & 9.9 & -550.0 & 0 & 0 \\ 0 & 663.82 & 11.46 & 0 & -3.82 & 11.46 \\ 9.9 & 11.46 & 65.64 & 0 & -11.46 & 22.92 \\ -550.0 & 0 & 0 & 556.6 & 0 & 9.9 \\ 0 & -3.82 & -11.46 & 0 & 663.82 & -11.46 \\ 0 & 11.46 & 22.92 & 9.9 & -11.46 & 65.64 \end{bmatrix}$$

$\downarrow \text{gdl}$

u_{1x}
 u_{1y}
 u_{1z}
 u_{2x}
 u_{2y}
 u_{2z}

Ahora eliminamos las deformaciones axiales de la viga, lo cual se realiza con la ecuación de ligadura $u_{1x} = u_{2x}$. Esto lo podemos hacer utilizando el procedimiento presentado en la Sección 11.3.1(b). Otra manera de llevarlo a cabo, es sumar las filas y las columnas de los dos grados de libertad. Cualquiera de los dos procedimientos conduce a la siguiente matriz de rigidez:

$$[k_I^A] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 13.2 & 0 & 9.9 & 0 & 9.9 \\ 0 & 663.82 & 11.46 & -3.82 & 11.46 \\ 9.9 & 11.46 & 65.64 & -11.46 & 22.92 \\ 0 & -3.82 & -11.46 & 663.82 & -11.46 \\ 9.9 & 11.46 & 22.92 & -11.46 & 65.64 \end{bmatrix}$$

$\downarrow \text{gdl}$

u_{1x}
 u_{1y}
 u_{1z}
 u_{2y}
 u_{2z}

Ahora eliminamos los desplazamientos axiales de los nudos. Dado que el pórtico es bajo esto no conduce a un error apreciable. Para pórticos esbeltos estos grados de libertad deben condensarse. Es importante entender que al eliminar los grados de libertad a través de ecuaciones de ligadura se está impidiendo cualquier tipo de deformación relativa entre los grados de libertad que la ecuación enlaza, o sea que el modelo matemático de la estructura se hace más rígido. No ocurre lo mismo cuando se utiliza la condensación, pues la rigidez de los grados de libertad que se condensan se incorpora a la de los que permanecen y por lo tanto la rigidez del modelo matemático no cambia. Las deformaciones que se obtienen con la matriz de rigidez condensada son exactamente iguales a los que se obtienen con la matriz original, simplemente se hace más fácil el manejo numérico pues hay menos términos en la matriz. En este caso es lícito eliminarlos.

Esto se realiza simplemente tachando las filas y columnas de los grados de libertad verticales, como se explicó en la Sección 11.3.1(c)ii:

$$[\mathbf{k}_{SV}^A] = \begin{bmatrix} 13200 & 9900 & 9900 \\ 9900 & 65640 & 22920 \\ 9900 & 22920 & 65640 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ \mathbf{u}_{1x} \\ \mathbf{u}_{1z} \\ \mathbf{u}_{2z} \end{matrix}$$

Ahora debemos condensar los grados de libertad de rotación en los nudos. La matriz anterior se particiona de la siguiente manera para lograr esto:

$$[\mathbf{k}_{SV}^A] = \begin{bmatrix} 13200 & 9900 & 9900 \\ 9900 & 65640 & 22920 \\ 9900 & 22920 & 65640 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{SV}^0 & \mathbf{k}_{SV}^1 \\ \mathbf{k}_{SV}^2 & \mathbf{k}_{SV}^3 \end{bmatrix}$$

la inversa de $[\mathbf{k}_{SV}^3]$ es:

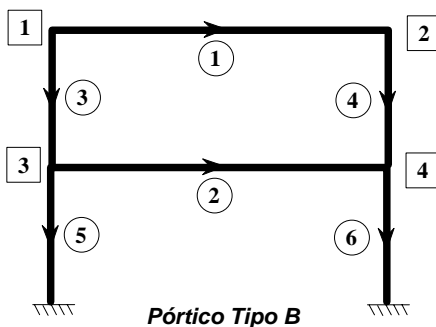
$$[\mathbf{k}_{SV}^3]^{-1} = \begin{bmatrix} .17350 \times 10^{-4} & -.60582 \times 10^{-5} \\ -.60582 \times 10^{-5} & .17350 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{k}_C^A] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{SV}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{SV}^1 \end{bmatrix} [\mathbf{k}_{SV}^3]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{SV}^2 \end{bmatrix} = [13200] - [2214] = [10986]$$

$$[\mathbf{k}_C^A] = [10986] \quad \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ \mathbf{u}_{1x} \end{matrix}$$

y esta última matriz, la cual en este caso tiene dimensiones de 1 por 1, corresponde a la matriz de efectos horizontales del pórtico Tipo A. El mismo procedimiento se realiza para el pórtico Tipo B, correspondiente al eje B de la estructura.

Pórtico Tipo - B



La forma de ensamblaje es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^1 + \mathbf{k}_{aa}^3 & \mathbf{k}_{ab}^1 & \mathbf{k}_{ab}^3 & 0 \\ \mathbf{k}_{ba}^1 & \mathbf{k}_{bb}^1 + \mathbf{k}_{aa}^4 & 0 & \mathbf{k}_{ab}^4 \\ \mathbf{k}_{ba}^3 & 0 & \mathbf{k}_{aa}^2 + \mathbf{k}_{bb}^3 + \mathbf{k}_{aa}^5 & \mathbf{k}_{ab}^2 \\ 0 & \mathbf{k}_{ba}^4 & \mathbf{k}_{ba}^2 & \mathbf{k}_{bb}^2 + \mathbf{k}_{bb}^4 + \mathbf{k}_{aa}^6 \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez del pórtico:

$$[k_p^B] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 556.6 & 0 & 9.9 & -550.0 & 0 & 0 & -6.6 & 0 & 9.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 663.82 & 11.46 & 0 & -3.82 & 11.46 & 0 & -660.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.9 & 11.46 & 65.64 & 0 & -11.46 & 22.92 & -9.9 & 0 & 9.9 & 0 & 0 & 0 \\ -550.0 & 0 & 0 & 556.6 & 0 & 9.9 & 0 & 0 & 0 & -6.6 & 0 & 9.9 \\ 0 & -3.82 & -11.46 & 0 & 663.82 & -11.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -660.0 & 0 \\ 0 & 11.46 & 22.92 & 9.9 & -11.46 & 65.64 & 0 & 0 & 0 & -9.9 & 0 & 9.9 \\ -6.6 & 0 & -9.9 & 0 & 0 & 0 & 563.2 & 0 & 0 & -550.0 & 0 & 0 \\ 0 & -660.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1323.82 & 11.46 & 0 & -3.82 & 11.46 \\ 9.9 & 0 & 9.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.46 & 85.44 & 0 & -11.46 & 22.92 \\ 0 & 0 & 0 & -6.6 & 0 & -9.9 & -550.0 & 0 & 0 & 563.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -660.0 & 0 & 0 & -3.82 & -11.46 & 0 & 1323.82 & -11.46 \\ 0 & 0 & 0 & 9.9 & 0 & 9.9 & 0 & 11.46 & 22.92 & 0 & -11.46 & 85.44 \end{bmatrix}$$

↓ gdl
 u_{1x}
 u_{1y}
 u_{1z}
 u_{2x}
 u_{2y}
 u_{2z}
 u_{3x}
 u_{3y}
 u_{3z}
 u_{4x}
 u_{4y}
 u_{4z}

Por comodidad en este caso primero eliminamos los grados de libertad verticales tachando las filas y columnas correspondientes a u_{1y} , u_{2y} , u_{3y} y u_{4y} . Luego para eliminar las deformaciones axiales de las vigas, sumamos la fila y luego la columna u_{2x} sobre u_{1x} y después realizamos la misma operación sumando la fila y la columna correspondiente a u_{4x} sobre u_{3x} . Por último, reordenamos la matriz de tal manera que los grados de libertad laterales queden en las primeras filas y columnas y los rotacionales en las últimas filas y columnas, para poder condensar con facilidad después. El resultado de todas estas operaciones es la siguiente matriz, en la cual se muestra la partición para condensar los grados de libertad rotacionales de los nudos.

$$[k_{Sv}^B] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 13.2 & -13.2 & 9.9 & 9.9 & 9.9 & 9.9 \\ -13.28 & 26.4 & -9.9 & -9.9 & 0 & 0 \\ 9.9 & -9.9 & 65.64 & 22.92 & 9.9 & 0 \\ 9.9 & -9.9 & 22.92 & 65.64 & 0 & 9.9 \\ 9.9 & 0 & 9.9 & 0 & 85.44 & 22.92 \\ 9.9 & 0 & 0 & 9.9 & 22.92 & 85.44 \end{bmatrix}$$

↓ gdl
 u_{1x}
 u_{3x}
 u_{1z}
 u_{2z}
 u_{3z}
 u_{4z}

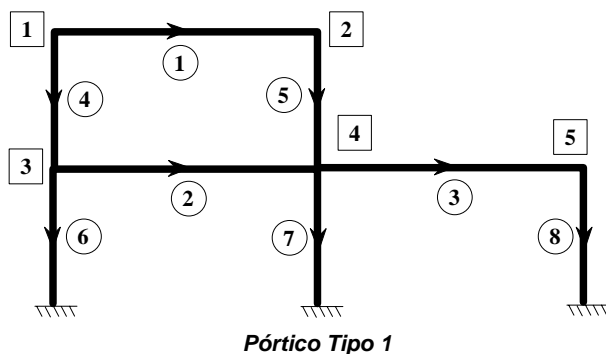
Condensando los grados de libertad rotacionales, encontramos la siguiente matriz de efectos horizontales para ese tipo de pórtico:

$$[k_C^B] = \begin{bmatrix} 9544.4 & -11168.0 \\ -11168.0 & 24163.0 \end{bmatrix}$$

↓ gdl
 u_{1x}
 u_{3x}

Pórtico Tipo - 1

El pórtico Tipo 1, correspondiente al eje 1 de la estructura. Después de llevar a cabo las operaciones apropiadas encontramos la siguiente matriz de efectos horizontales para ese tipo de pórtico:



$$[k_c^1] = \left[\begin{array}{c|c} 10124 & -11233 \\ \hline -11233 & 29696 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \downarrow \text{gdl} \\ u_{1x} \\ u_{3x} \end{array}$$

Ahora procedemos a transformar las matrices de los pórticos a los grados de libertad de la estructura en los diafragmas. Para cada uno de los pórticos debemos encontrar la matriz que nos permita realizar la transformación.

Transformación de coordenadas de pórtico a coordenadas de toda la estructura

Para cada pórtico se definen dos puntos **a** y **b** los cuales en este caso se escogieron en los extremos del pórtico. Con las coordenadas de los dos puntos se calcula **d** de acuerdo con la ecuación (11-36); y con este valor se calcula el valor del **sen α** y **cos α** y con las coordenadas de los centros de masa en cada piso el valor de **r**. Las coordenadas del centro de masa son:

Para el piso 1

$$\bar{x}_1 = 5 \text{ m} \quad \bar{y}_1 = 3 \text{ m}$$

Para el piso 2

$$\bar{x}_2 = 2.5 \text{ m} \quad \bar{y}_1 = 3 \text{ m}$$

Por lo tanto, los siguientes son los datos para encontrar cada una de las matrices de transformación del pórtico de un grado de libertad por piso, a tres grados de libertad por piso, de acuerdo con los grados de libertad de los diafragmas.

EJE	Tipo	x_a	y_a	x_b	y_b	d	α	$\cos\alpha$	$\text{sen}\alpha$	r_2	r_1
1	1	0	0	10	0	10	0	1	0	3.0	3.0
2	1	0	6	10	6	10	0	1	0	-3.0	-3.0
A	A	10	0	10	6	6	90°	0	1	-	5.0
B	B	5	0	5	6	6	90°	0	1	2.5	0.0
C	B	0	0	0	6	6	90°	0	1	-2.5	-5.0

Y las matrices de transformación son las siguientes:

$$[T_1] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \right] \quad [T_2] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline -3 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 \end{array} \right] \quad [T_A] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{array} \right] \quad [T_B] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 2.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad [T_C] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline -2.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & -5 \end{array} \right]$$

Ahora para cada uno de los pórticos aplicamos la siguiente transformación:

$$[K_P] = [T_P] [k_c] [T_P]^T$$

La cual, por ejemplo, para el pórtico del eje 1 nos conduce a la siguiente matriz de rigidez del pórtico para efectos horizontales, expresada en términos de los grados de libertad de los diafragmas de la estructura:

$$[K_P^1] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 10124 & 0 & 30371 & -11233 & 0 & -33698 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 30371 & 0 & 91112 & -33698 & 0 & -101090 \\ \hline -11233 & 0 & -33698 & 29696 & 0 & 89087 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -33698 & 0 & -101090 & 89087 & 0 & 267260 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \downarrow \text{gdl} \\ U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{1z} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \end{array}$$

Matriz de rigidez de toda la estructura

Sumando las cinco matrices que se obtienen de los pórticos, encontramos la matriz de rigidez de la estructura.

$$[K_E] = \begin{bmatrix} 20247 & 0 & 0 & -22465 & 0 & 0 \\ 0 & 19089 & 0 & 0 & -22336 & 55839 \\ 0 & 0 & 301530 & 0 & 0 & -341790 \\ -22465 & 0 & 0 & 59391 & 0 & 0 \\ 0 & -22336 & 0 & 0 & 59313 & -65886 \\ 0 & 55839 & -341790 & 0 & -65886 & 1413300 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{1z} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \end{matrix}$$

Matriz de masa

Ahora debemos encontrar la matriz de masa. Dado que los grados de libertad de los diafragmas se colocaron en los centros de masa, la matriz de masa es diagonal. Los datos necesarios son los siguientes:

Piso 1

$$\text{Area } A_1 = 10 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 60 \text{ m}^2$$

$$\text{Masa } m_1 = 60 \text{ m}^2 \cdot 0.800 \text{ Mg/m}^2 = 48 \text{ Mg}$$

$$\text{Masa Rotacional} = (m_1/A_1)J_o = (48 \text{ Mg} / 60 \text{ m}^2) \cdot (6^3 \cdot 10 / 12 + 10^3 \cdot 6 / 12) \cdot \text{m}^4 = 554 \text{ Mg} \cdot \text{m}^2$$

Piso 2

$$\text{Area } A_2 = 5 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 30 \text{ m}^2$$

$$\text{Masa } m_2 = 30 \text{ m}^2 \cdot 0.800 \text{ Mg/m}^2 = 24 \text{ Mg}$$

$$\text{Masa Rotacional} = (m_1/A_1)J_o = (24 \text{ Mg} / 30 \text{ m}^2) \cdot (6^3 \cdot 5 / 12 + 5^3 \cdot 6 / 12) \cdot \text{m}^4 = 122 \text{ Mg} \cdot \text{m}^2$$

y la matriz de masa tiene la siguiente forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 122 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 554 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{1z} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \end{matrix}$$

Ecuaciones de movimiento para vibración libre

Las ecuaciones de movimiento para vibración libre son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 122 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 554 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{1x} \\ \ddot{U}_{1y} \\ \ddot{U}_{1z} \\ \ddot{U}_{2x} \\ \ddot{U}_{2y} \\ \ddot{U}_{2z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 20247 & 0 & 0 & -22465 & 0 & 0 \\ 0 & 19089 & 0 & 0 & -22336 & 55839 \\ 0 & 0 & 301530 & 0 & 0 & -341790 \\ -22465 & 0 & 0 & 59391 & 0 & 0 \\ 0 & -22336 & 0 & 0 & 59313 & -65886 \\ 0 & 55839 & -341790 & 0 & -65886 & 1413300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{1z} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ecuaciones de movimiento para excitación en la base

Para excitación en la base debemos definir la matriz $[\gamma]$ primero:

$$-[M][\gamma]\{\ddot{x}_o\} = -\begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 122 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 555 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{ox} \\ \ddot{x}_{oy} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 24 \\ 0 & 0 \\ 48 & 0 \\ 0 & 48 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{ox} \\ \ddot{x}_{oy} \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciones de movimiento para excitación en la base son:

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 122 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 555 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{1x} \\ \ddot{U}_{1y} \\ \ddot{U}_{1z} \\ \ddot{U}_{2x} \\ \ddot{U}_{2y} \\ \ddot{U}_{2z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 20247 & 0 & 0 & -22465 & 0 & 0 \\ 0 & 19089 & 0 & 0 & -22336 & 55839 \\ 0 & 0 & 301530 & 0 & 0 & -341790 \\ -22465 & 0 & 0 & 59391 & 0 & 0 \\ 0 & -22336 & 0 & 0 & 59313 & -65886 \\ 0 & 55839 & -341790 & 0 & -65886 & 1413300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{1z} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -24\ddot{x}_{ox} \\ -24\ddot{x}_{oy} \\ 0 \\ -48\ddot{x}_{ox} \\ -48\ddot{x}_{oy} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

■

11.3.2 — Diafragma Flexible

En la Sección anterior se discutieron los factores que intervienen en la decisión de si un diafragma es rígido o no. Además se elaboró ampliamente sobre el procedimiento para formular las ecuaciones de equilibrio dinámico en el caso de diafragma rígido. Desafortunadamente para el caso en el cual el diafragma se considera flexible no existe un procedimiento general para implantar la idealización de diafragma flexible, como sí ocurre con el de diafragma rígido. Esto conlleva mayor criterio del ingeniero que utiliza estas técnicas con el fin de lograr idealizaciones adecuadas.

En general [García, 1985] existen diferentes enfoques para clasificar los diafragmas flexibles. Los tres más conocidos son: diafragmas flexibles uniformes, diafragmas con huecos e irregularidades y por último diafragmas rígidos unidos por elementos flexibles.

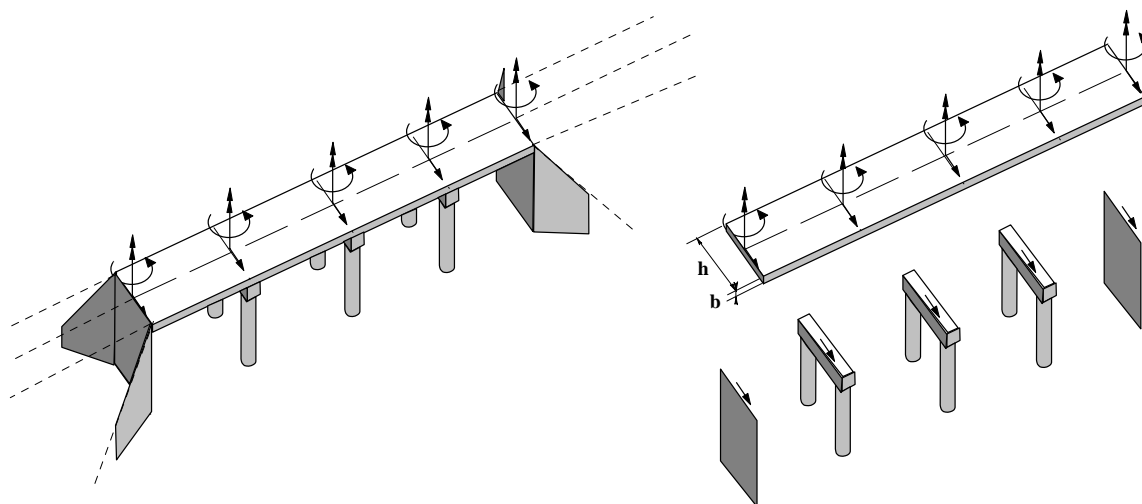


Figura 11-28 - Diafragma flexible de un puente continuo

Dentro de lo que se puede clasificar como diafragmas flexibles uniformes hay un caso muy común que es un puente continuo, como el mostrado en la Figura 11-28. En general un puente recto como el mostrado, en el sentido longitudinal de la vía se puede considerar como una estructura de diafragma

rígido. La losa del tablero del puente es alargada, a un punto que cuando se le solicita por parte de una carga horizontal en el sentido transversal del puente, la hipótesis de diafragma rígido no es válida, por lo tanto esta flexibilidad del diafragma debe tenerse en cuenta.

Una manera de enfocar la solución del planteamiento de las ecuaciones de movimiento de una estructura de diafragma flexible, tal como el puente mostrado en la Figura 11-28, puede ser el siguiente procedimiento:

A cada uno de los elementos de soporte del puente, pórticos y estribos, se les calcula su rigidez ante cargas horizontales en el sentido mostrado en la Figura 11-28. Los grados de libertad generales de la estructura se plantean tal como se muestra en la figura, como un desplazamiento transversal y una posibilidad de giro, en todos los puntos de interconexión entre el diafragma y los elementos de soporte. Para tener en cuenta la rigidez del diafragma, este se supone compuesto por vigas colocadas de tal manera que el alto, h , de su sección esté colocado horizontalmente y el ancho, b , verticalmente, como muestra la figura. La masa puede concentrarse en los grados de libertad traslacionales tomando la masa aferente, o bien generarla por medio de la matriz consistente de masa de la Sección 11.2.1. El siguiente ejemplo presenta estos conceptos.

Ejemplo 11-7

Queremos plantear las ecuaciones de movimiento, en sentido transversal, de un puente continuo. Se trata de un puente de cuatro luces de 12 m, con una calzada de 6 m de ancho y 0.5 m de espesor macizo.

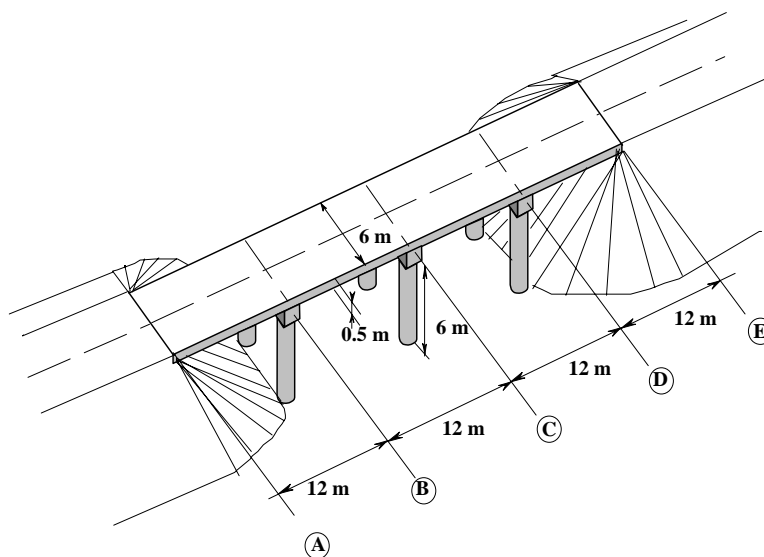


Figura 11-29 - Estructura del ejemplo 11-7

En sus extremos hay unos estribos que dan soporte a las cargas verticales por medio de un apoyo elastomérico el cual permite desplazamientos longitudinales y rotaciones con respecto a un eje vertical, pero restringen cualquier tipo de desplazamiento transversal. Los pórticos de apoyo, de los cuales hay tres espaciados cada 12 m, tienen 6 m de luz con pilas circulares de 1 m de diámetro y 6 m de altura. Las vigas del pórtico tiene una sección de 1 m de alto y 0.70 m de ancho. Todos los elementos están contruidos con concreto de resistencia 30 MPa. En la Figura 11-29 se muestra el puente.

Primero debemos encontrar la rigidez ante cargas horizontales de los pórticos de apoyo del puente. Se determinan las matrices de rigidez de los elementos en coordenadas globales del pórtico.

Columnas

$$\phi = 1.0 \text{ m}$$

$$I = \pi \phi^4 / 32 = 0.0982 \text{ m}^4$$

$$A = \pi \phi^2 / 4 = 0.7854 \text{ m}^2$$

$$L = 6 \text{ m}$$

$$E = 4000 \sqrt{f'_c} = 22\,000 \text{ MPa} = 22 \text{ GPa}$$

El sistema de coordenadas local está orientado con su eje x en dirección hacia abajo, por lo tanto el ángulo α es 90° .

$$c = \cos \alpha = 0.0$$

$$s = \sin \alpha = 1.0$$

$$\rho = EI/L^3 = 22 \text{ GPa} \cdot 0.0982 \text{ m}^4 / 6^3 \text{ m}^3 = 0.01 \text{ GPa} \cdot \text{m} = 10 \text{ MPa} \cdot \text{m} = 10\,000 \text{ kN/m}$$

$$\beta = AL^2/I = 0.7854 \text{ m}^2 \cdot 6^2 \text{ m}^2 / 0.0982 \text{ m}^4 = 288$$

y la matriz de rigidez del elemento de columna, en kN/m y $\text{kN} \cdot \text{m/rad}$, es la siguiente:

$$[k_{\text{col}}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 120 & 0 & 360 & -120 & 0 & 360 \\ 0 & 2880 & 0 & 0 & -2880 & 0 \\ 360 & 0 & 1440 & -360 & 0 & 720 \\ -120 & 0 & -360 & 120 & 0 & -360 \\ 0 & -2880 & 0 & 0 & 2880 & 0 \\ 360 & 0 & 720 & -360 & 0 & 1440 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa}^{\text{col}} & k_{ab}^{\text{col}} \\ k_{ba}^{\text{col}} & k_{bb}^{\text{col}} \end{bmatrix}$$

Viga

$$h = 1.0 \text{ m}$$

$$b = 0.70 \text{ m}$$

$$I = bh^3/12 = 0.0583 \text{ m}^4$$

$$A = bh = 0.7 \text{ m}^2$$

$$L = 6 \text{ m}$$

$$E = 4\,000 \sqrt{f'_c} = 22\,000 \text{ MPa} = 22 \text{ GPa}$$

El sistema de coordenadas local coincide con el global por lo tanto α es 0° .

$$c = \cos \alpha = 1.0$$

$$s = \sin \alpha = 0.0$$

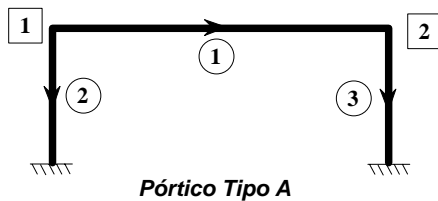
$$\rho = EI/L^3 = 22 \text{ GPa} \cdot 0.0583 \text{ m}^4 / 6^3 \text{ m}^3 = 5.94 \text{ MPa} \cdot \text{m} = 5\,940 \text{ kN/m}$$

$$\beta = AL^2/I = 0.7 \text{ m}^2 \cdot 6^2 \text{ m}^2 / 0.0583 \text{ m}^4 = 432$$

y la matriz de rigidez del elemento de viga de 6 m de luz es la siguiente:

$$[k_{\text{vig}}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 2566.7 & 0 & 0 & -2566.7 & 0 & 0 \\ 0 & 71.3 & 213.8 & 0 & -71.3 & 213.8 \\ 0 & 213.8 & 855.1 & 0 & -213.8 & 427.5 \\ -2566.7 & 0 & 0 & 2566.7 & 0 & 0 \\ 0 & -71.3 & -213.8 & 0 & 71.3 & -213.8 \\ 0 & 213.8 & 427.5 & 0 & -213.8 & 855.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa}^{\text{vig}} & k_{ab}^{\text{vig}} \\ k_{ba}^{\text{vig}} & k_{bb}^{\text{vig}} \end{bmatrix}$$

Ahora debemos encontrar la matriz de efectos horizontales para cada tipo de pórtico. Iniciamos con el pórtico del eje A. La nomenclatura de nudos y elementos es la siguiente:



La forma de ensamblaje es la siguiente:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}_{aa}^1 + \mathbf{k}_{aa}^2 & \mathbf{k}_{ab}^1 \\ \hline \mathbf{k}_{ba}^1 & \mathbf{k}_{bb}^1 + \mathbf{k}_{aa}^3 \end{array} \right]$$

y la matriz de rigidez del pórtico después de haber eliminado las deformaciones axiales de los elementos es:

$$[\mathbf{k}_{SV}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 240.0 & 360.0 & 360.0 \\ 360.0 & 2295.3 & 427.5 \\ 360.0 & 427.5 & 2295.3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \downarrow \text{gdl} \\ \mathbf{u}_{1x} \\ \mathbf{u}_{1z} \\ \mathbf{u}_{2z} \end{array}$$

Ahora debemos condensar los grados de libertad de rotación en los nudos. La matriz anterior se particiona de la siguiente manera para lograr esto:

$$[\mathbf{k}_{SV}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 240.0 & 360.0 & 360.0 \\ 360.0 & 2295.3 & 427.5 \\ 360.0 & 427.5 & 2295.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{SV}^0 & \mathbf{k}_{SV}^1 \\ \mathbf{k}_{SV}^2 & \mathbf{k}_{SV}^3 \end{bmatrix}$$

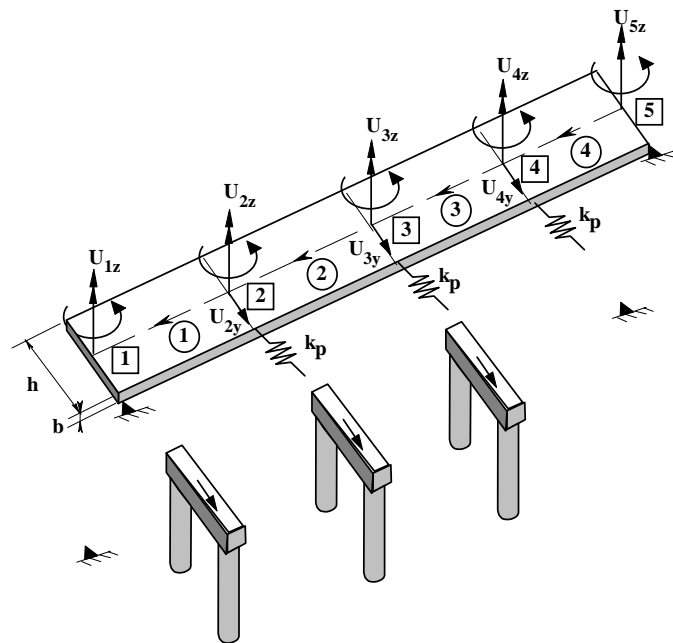


Figura 11-30 - Grados de libertad del diafragma, Ejemplo 11-7

la inversa de $[\mathbf{k}_{SV}^3]$ es:

$$[\mathbf{k}_{SV}^3]^{-1} = \begin{bmatrix} .45132 \times 10^{-6} & -.84065 \times 10^{-7} \\ -.84065 \times 10^{-7} & .45132 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{k}_C] = \left[[\mathbf{k}_{SV}^0] - [\mathbf{k}_{SV}^1][\mathbf{k}_{SV}^3]^{-1}[\mathbf{k}_{SV}^2] \right] = [240000] - [95213] = [144820]$$

$$\downarrow \text{gdl}$$

$$[k_C^A] = [144820] \quad u_{1x}$$

y esta última matriz, la cual en este caso tiene dimensiones de 1 por 1, corresponde a la matriz de efectos horizontales de los pórticos del puente, en el sentido del plano del pórtico.

Los grados de libertad del diafragma se disponen como muestra la Figura 11-30. Primero determinamos la matriz de rigidez de las vigas del diafragma:

Vigas del diafragma

$$h = 6.0 \text{ m}$$

$$b = 0.50 \text{ m}$$

$$I = bh^3/12 = 9.0 \text{ m}^4$$

$$A = bh = 3.0 \text{ m}^2$$

$$L = 12.0 \text{ m}$$

$$E = 4\,000 \sqrt{f'c} = 22\,000 \text{ MPa} = 22 \text{ GPa}$$

El sistema de coordenadas local coincide con el global por lo tanto α es 0° .

$$c = \cos \alpha = 1.0$$

$$s = \sin \alpha = 0.0$$

$$\rho = EI/L^3 = 22 \text{ GPa} \cdot 9 \text{ m}^4 / 12^3 \text{ m}^4 = 0.115 \text{ GN/m} = 114\,583 \text{ kN/m}$$

$$\beta = AL^2/I = 3 \text{ m}^2 \cdot 12^2 \text{ m}^2 / 9 \text{ m}^4 = 48$$

y la matriz de rigidez del elemento de viga de 12 m de luz es la siguiente:

$$[k_{\text{vid}}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 5500 & 0 & 0 & -5500 & 0 & 0 \\ 0 & 1375 & 8250 & 0 & -1375 & 8250 \\ 0 & 8250 & 66000 & 0 & -8250 & 33000 \\ -5500 & 0 & 0 & 5500 & 0 & 0 \\ 0 & -1375 & -8250 & 0 & 1375 & -8250 \\ 0 & 8250 & 33000 & 0 & -8250 & 66000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa}^{\text{vid}} & k_{ab}^{\text{vid}} \\ k_{ba}^{\text{vid}} & k_{bb}^{\text{vid}} \end{bmatrix}$$

El esquema de ensamblaje es el siguiente:

$$\downarrow \text{nudos}$$

k_{bb}^1	k_{ba}^1	0	0	0	1
k_{ab}^1	$k_{aa}^1 + k_{bb}^2$	k_{ba}^2	0	0	2
0	k_{ab}^1	$k_{aa}^2 + k_{bb}^3$	k_{ba}^3	0	3
0	0	k_{ab}^3	$k_{aa}^3 + k_{bb}^4$	k_{ba}^4	4
0	0	0	k_{ab}^4	k_{aa}^4	5

Después de eliminar las deformaciones axiales de los elementos del diafragma y los grados de libertad de los apoyos de los nudos 1 y 5, se obtiene la siguiente matriz de rigidez de las vigas de diafragma:

$$[k_{dia}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 2750 & -1375 & 0 & -8250 & 0 & 8250 & 0 & 0 \\ -1375 & 2750 & -1375 & 0 & -8250 & 0 & 8250 & 0 \\ 0 & -1375 & 2750 & 0 & 0 & -8250 & 0 & 8250 \\ -8250 & 0 & 0 & 66000 & 33000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8250 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 & 0 & 0 \\ 8250 & 0 & -8250 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 & 0 \\ 0 & 8250 & 0 & 0 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 \\ 0 & 0 & 8250 & 0 & 0 & 0 & 33000 & 66000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_{2y} \\ U_{3y} \\ U_{4y} \\ U_{1z} \\ U_{2z} \\ U_{3z} \\ U_{4z} \\ U_{5z} \end{matrix}$$

Ahora hay que incluir el efecto de los pórticos. Esto se logra sumando la rigidez de cargas laterales de cada pórtico en los grados de libertad U_{2y} , U_{3y} y U_{4y} . Entonces la matriz de rigidez de la estructura en su totalidad es:

$$[K_E] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 2894.8 & -1375 & 0 & -8250 & 0 & 8250 & 0 & 0 \\ -1375 & 2894.8 & -1375 & 0 & -8250 & 0 & 8250 & 0 \\ 0 & -1375 & 2894.8 & 0 & 0 & -8250 & 0 & 8250 \\ -8250 & 0 & 0 & 66000 & 33000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8250 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 & 0 & 0 \\ 8250 & 0 & -8250 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 & 0 \\ 0 & 8250 & 0 & 0 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 \\ 0 & 0 & 8250 & 0 & 0 & 0 & 33000 & 66000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_{2y} \\ U_{3y} \\ U_{4y} \\ U_{1z} \\ U_{2z} \\ U_{3z} \\ U_{4z} \\ U_{5z} \end{matrix}$$

Para generar la matriz de masa de la estructura se utiliza la matriz consistente de masa para cada elemento del diafragma. La masa total del elemento es:

$$m = L \cdot h \cdot b \cdot \gamma = 12 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m} \cdot 2.4 \text{ Mg/m}^3 = 86.4 \text{ Mg}$$

$$m/420 = 0.206 \text{ Mg}$$

y la matriz de masa consistente del elemento es:

$$[m] = \begin{bmatrix} 28.84 & 0 & 0 & 14.42 & 0 & 0 \\ 0 & 32.14 & 54.38 & 0 & 11.12 & -32.14 \\ 0 & 54.38 & 118.66 & 0 & 32.14 & -88.99 \\ \hline 14.42 & 0 & 0 & 28.84 & 0 & 0 \\ 0 & 11.12 & 32.14 & 0 & 32.14 & -54.38 \\ 0 & -32.14 & -88.99 & 0 & -54.38 & 118.66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{aa} & m_{ab} \\ m_{ba} & m_{bb} \end{bmatrix}$$

Se utiliza el mismo esquema de ensamblaje que para la matriz de rigidez y se tachan las filas y columnas correspondientes a los apoyos y a las masas correspondientes a los grados de libertad axiales de los elementos, lo cual nos conduce a la siguiente matriz de masas de la estructura:

$$[M_E] = \begin{bmatrix} 64.28 & 11.12 & 0 & 32.14 & 0 & -32.14 & 0 & 0 \\ 11.12 & 64.28 & 11.12 & 0 & 32.14 & 0 & -32.14 & 0 \\ 0 & 11.12 & 64.28 & 0 & 0 & 32.14 & 0 & -32.14 \\ 32.14 & 0 & 0 & 118.66 & -88.99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32.14 & 0 & -88.99 & 237.32 & -88.99 & 0 & 0 \\ -32.14 & 0 & 32.14 & 0 & -88.99 & 237.32 & -88.99 & 0 \\ 0 & -32.14 & 0 & 0 & 0 & -88.99 & 237.32 & -88.99 \\ 0 & 0 & -32.14 & 0 & 0 & 0 & -88.99 & 118.66 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_{2y} \\ U_{3y} \\ U_{4y} \\ U_{1z} \\ U_{2z} \\ U_{3z} \\ U_{4z} \\ U_{5z} \end{matrix}$$

La matriz $[\gamma]$ es la siguiente:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad -[M_E][\gamma] = \begin{bmatrix} -75.40 \\ -86.52 \\ -75.40 \\ -32.14 \\ -32.14 \\ 0 \\ 32.14 \\ 32.14 \end{bmatrix}$$

y las ecuaciones de movimiento transversal del puente son:

$$\begin{bmatrix} 64.28 & 11.12 & 0 & 32.14 & 0 & -32.14 & 0 & 0 \\ 11.12 & 64.28 & 11.12 & 0 & 32.14 & 0 & -32.14 & 0 \\ 0 & 11.12 & 64.28 & 0 & 0 & 32.14 & 0 & -32.14 \\ 32.14 & 0 & 0 & 118.66 & -88.99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32.14 & 0 & -88.99 & 237.32 & -88.99 & 0 & 0 \\ -32.14 & 0 & 32.14 & 0 & -88.99 & 237.32 & -88.99 & 0 \\ 0 & -32.14 & 0 & 0 & 0 & -88.99 & 237.32 & -88.99 \\ 0 & 0 & -32.14 & 0 & 0 & 0 & -88.99 & 118.66 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{2y} \\ \ddot{U}_{3y} \\ \ddot{U}_{4y} \\ \ddot{U}_{1z} \\ \ddot{U}_{2z} \\ \ddot{U}_{3z} \\ \ddot{U}_{4z} \\ \ddot{U}_{5z} \end{Bmatrix} + 10^3 \times \begin{bmatrix} 2894.8 & -1375 & 0 & -8250 & 0 & 8250 & 0 & 0 \\ -1375 & 2894.8 & -1375 & 0 & -8250 & 0 & 8250 & 0 \\ 0 & -1375 & 2894.8 & 0 & 0 & -8250 & 0 & 8250 \\ -8250 & 0 & 0 & 66000 & 33000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8250 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 & 0 & 0 \\ 8250 & 0 & -8250 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 & 0 \\ 0 & 8250 & 0 & 0 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 \\ 0 & 0 & 8250 & 0 & 0 & 0 & 33000 & 66000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2y} \\ U_{3y} \\ U_{4y} \\ U_{1z} \\ U_{2z} \\ U_{3z} \\ U_{4z} \\ U_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -75.40 \\ -86.52 \\ -75.40 \\ -32.14 \\ -32.14 \\ 0 \\ 32.14 \\ 32.14 \end{Bmatrix} \{\ddot{x}_o\}$$

En caso de que queramos utilizar un modelo de masa concentrada para excitaciones transversales al eje del puente, tendríamos que hacer los siguientes ajustes. Se condensan los grados de libertad rotacionales de la matriz de rigidez de la estructura. Para el efecto, se particiona la matriz de la siguiente manera:

$$[K_E] = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2894.8 & -1375 & 0 & -8250 & 0 & 8250 & 0 & 0 \\ -1375 & 2894.8 & -1375 & 0 & -8250 & 0 & 8250 & 0 \\ 0 & -1375 & 2894.8 & 0 & 0 & -8250 & 0 & 8250 \\ -8250 & 0 & 0 & 66000 & 33000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8250 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 & 0 & 0 \\ 8250 & 0 & -8250 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 & 0 \\ 0 & 8250 & 0 & 0 & 0 & 33000 & 132000 & 33000 \\ 0 & 0 & 8250 & 0 & 0 & 0 & 33000 & 66000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_{2y} \\ U_{3y} \\ U_{4y} \\ U_{1z} \\ U_{2z} \\ U_{3z} \\ U_{4z} \\ U_{5z} \end{matrix}$$

y se hace la siguiente operación de condensación, obteniendo los siguientes resultados:

$$[K_C] = [K_0] - [K_1][K_3]^{-1}[K_2]$$

$$[K_C] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1274.3 & -1080.4 & 442.0 \\ -1080.4 & 1716.2 & -1080.4 \\ 442.0 & -1080.4 & 1274.3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_{2y} \\ U_{3y} \\ U_{4y} \end{matrix}$$

Como masa concentrada se utiliza la masa aferente a cada grado de libertad traslacional. Esta masa aferente es

$$m = L h b \gamma = 12 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m} \cdot 2.4 \text{ Mg/m}^3 = 86.4 \text{ Mg}$$

y las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{bmatrix} 86.4 & 0 & 0 \\ 0 & 86.4 & 0 \\ 0 & 0 & 86.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{2y} \\ \ddot{U}_{3y} \\ \ddot{U}_{4y} \end{Bmatrix} + 10^3 \times \begin{bmatrix} 1274.3 & -1080.4 & 442.0 \\ -1080.4 & 1716.2 & -1080.4 \\ 442.0 & -1080.4 & 1274.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2y} \\ U_{3y} \\ U_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -86.4 \\ -86.4 \\ -86.4 \end{Bmatrix} \{\ddot{x}_o\}$$

La solución del caso presentado en el ejemplo anterior se facilita por el hecho de que el diafragma tienen forma alargada y se puede idealizar como una viga acostada. Desafortunadamente este no es el caso en muchas estructuras. En la Figura 11-31 se muestran dos casos de diafragmas flexibles, los cuales no son idealizables por medio de vigas.

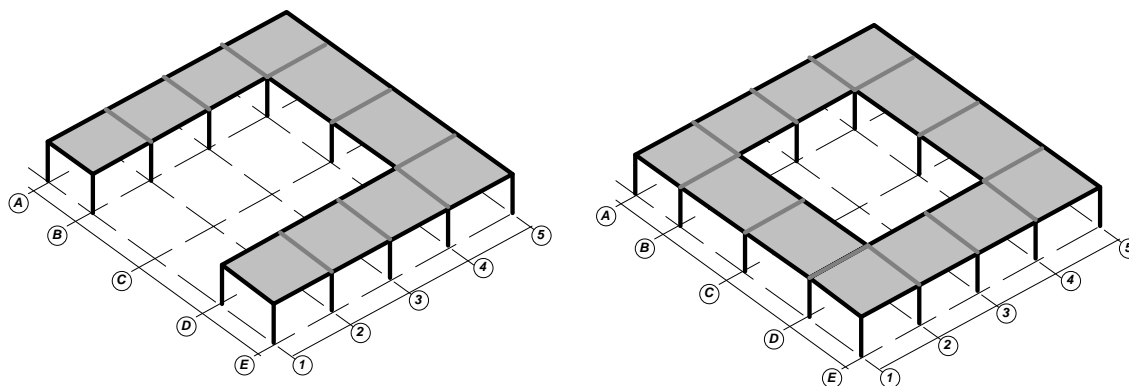


Figura 11-31 - Diafragmas flexibles irregulares y con huecos

En estos casos, probablemente, lo más conveniente es simular la rigidez de la losa por medio de elementos finitos, de tal manera que se dispone un pórtico tridimensional que modela las vigas y columnas de la estructura. La losa en si se simula por medio de los elementos finitos. Debe tenerse especial cuidado con los grados de libertad de los elementos finitos, pues la interacción con los elementos de pórtico solo se realiza en los nudos de interconexión y es probable que haya necesidad de generar nudos intermedios dentro de las vigas, con el fin de que haya transferencias de cortante en el plano del diafragma entre los distintos elementos en puntos diferentes a los nudos de interconexión del pórtico. Además, el ingeniero debe estudiar cuidadosamente el flujo de fuerzas dentro de la estructura con el fin de definir que fuerzas internas del diafragma deben ser resistidas por los elementos de pórtico y cuales por la losa. La masa del diafragma debe asignarse a cada nudo de acuerdo con su aferencia. Nuevamente se hace un llamado de atención al criterio que debe emplear el ingeniero al realizar modelajes de diafragmas flexibles por medio del método de los elementos finitos.

11.3.3 — Diafragmas rígidos unidos por elementos flexibles

En muchos casos partes del diafragma de una edificación se pueden considerarse como diafragmas rígidos parciales, que están unidos con otros diafragmas rígidos contenidos en el mismo entrepiso. En la Figura 11-32 se muestra un ejemplo de este tipo de edificaciones.

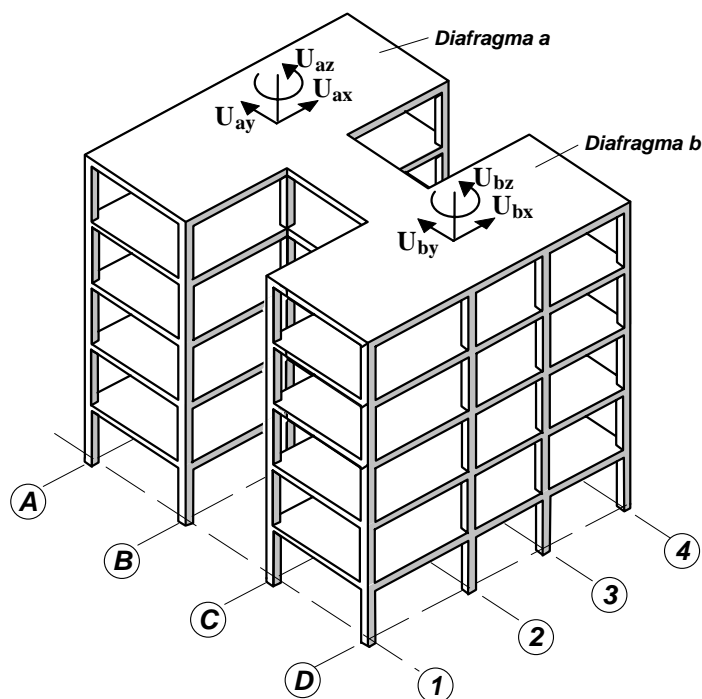


Figura 11-32 - Diafragmas rígidos unidos por elementos flexibles

En este caso el procedimiento para generar las matrices de rigidez y de masa es similar al presentado en la Sección 11.3.1, con las siguientes diferencias: lo indicado en la Sección 11.3.1(a) se realiza de una manera similar. En la Sección 11.3.1(b) para los pórticos de los ejes 2 y 3, entre ejes B y C, la viga no debe hacerse inextensible, pues los dos diafragmas no pueden estar unidos a través de una viga infinitamente rígida para deformaciones axiales. En todos los otros pórticos las vigas son inextensibles. Esto quiere decir que para los pórticos 2 y 3 hay dos grados de libertad horizontales por piso. Uno de ellos se ensamblará en los grados de libertad del diafragma a y el otro en los del diafragma b. Lo indicado en las Secciones 11.3.1(c) y (d) se lleva a cabo de una manera similar a lo presentado allí. En este punto se tienen los tipos de pórtico mostrados en la Figura 11-33, con sus correspondientes grados de libertad horizontales indicados.

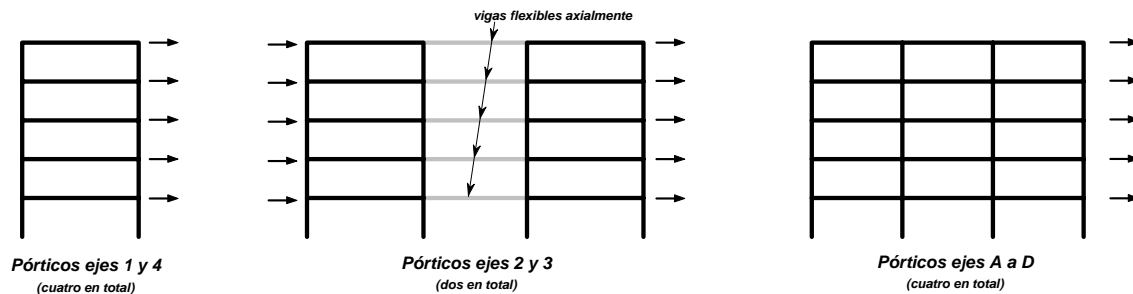


Figura 11-33 - Grados de libertad horizontales de los pórticos de la edificación de la Figura 11-32

La estructura tiene en total diez diafragmas (dos por piso), donde cada uno de ellos tiene tres grados de libertad (dos traslacionales horizontales y uno de giro con respecto a un eje vertical). Esto conduce a un total de treinta grados de libertad para toda la estructura. Para efectos de lo indicado en la Sección 11.3.1(e), deben determinarse unas matrices de transformación de coordenadas $[T_p]$ que relacionen los cinco, o diez grados de libertad traslacionales horizontales de los pórticos, con los de la estructura. Los coeficientes que contienen estas matrices se calculan de la misma manera que se indicó en 11.3.1(e), teniendo cuidado que en todos los pórticos, excepto los de los ejes 2 y 3, solo hay conexión a uno de los diafragmas del piso. Para los pórticos de los ejes 2 y 3 los grados de libertad del lado de los ejes A y B se conectan a los diafragmas tipo **a** y los del lado de los ejes C y D a los del diafragma tipo **b**. El ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura se realiza de la misma manera que se indica en la Sección 11.3.1(f).

Para determinar la matriz de masa, se trabaja de una manera similar a lo indicado en la Sección 11.3.1(g). La masa correspondiente a la zona entre los dos diafragmas debe asignarse por área aferente a cada uno de los diafragmas, teniendo en cuenta que esto produce una pequeña excentricidad de masa, la cual se puede ajustar colocando las coordenadas del centro de masa desplazadas hacia el centro de la edificación la distancia apropiada para la masa del ala de la edificación más la masa aferente de la zona central.

El resto del proceso para obtener las ecuaciones de equilibrio dinámico de la edificación, es el mismo indicado en la Sección 11.3.1.

11.4 —Sistemas sin diafragma

En muchos casos la edificación no tiene un diafragma claramente definido. Este caso se presenta con frecuencia cuando se emplean cubiertas livianas. Es común en estos casos dejar un entramado de vigas que sostienen los elementos de cubierta, pero que no conforman un diafragma. En este caso la masa aferente a cada nudo de interconexión entre vigas se coloca allí, dándole posibilidad de tener desplazamientos en las dos direcciones horizontales ortogonales.

Debe tenerse en cuenta que en estos casos las ecuaciones de equilibrio dinámico tienen un número mucho mayor de grados de libertad que las correspondientes cuando hay un solo diafragma, pues cada grado de libertad de cada una de las masas corresponde a una ecuación de equilibrio. Este hecho hace mucho más dispendiosa la solución del sistema.

11.6 — Acople estático y acople dinámico

En los ejemplos que se han presentado en el presente Capítulo hemos visto que algunas veces una de las matrices, de rigidez o de masa, o ambas, son diagonales. Vale la pena hacer algunas observaciones sobre esta situación.

Para el efecto supongamos una estructura, como la mostrada en la Figura 11-36. Se trata de una estructura de un piso con un diafragma rígido rectangular sostenido sobre cuatro pórticos que hemos denominado A, B, C y D. Además la losa tiene una zona con una densidad de masa y otra con otra densidad. Ahora se generan las matrices de rigidez y de masa de toda la estructura, con respecto al centro geométrico del diafragma.

Iniciemos primero con la matriz de rigidez, para el efecto conocemos las matrices de rigidez de efectos horizontales de cada uno de los pórticos, las cuales se determinan por los procedimientos presentados en este Capítulo.

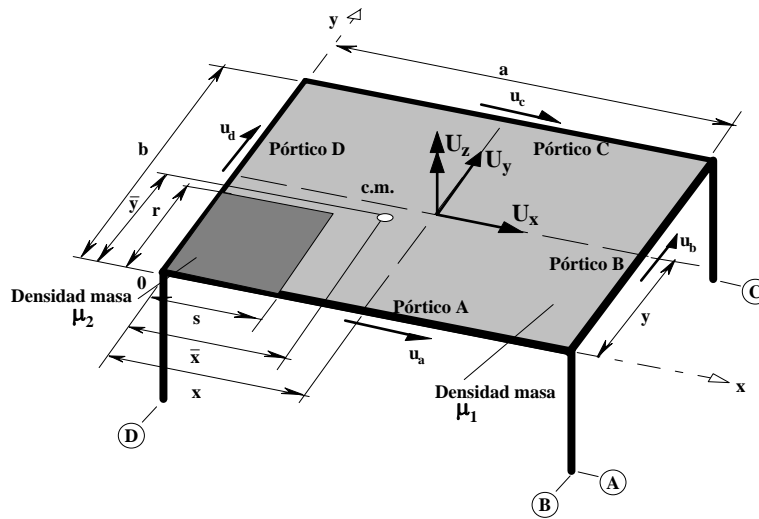


Figura 11-36 - Estructura de un piso

Las siguientes relaciones de rigidez son válidas para cada uno de los pórticos:

$$\{f_a\} = [k_a] \{u_a\} \quad (11-84)$$

$$\{f_b\} = [k_b] \{u_b\} \quad (11-85)$$

$$\{f_c\} = [k_c] \{u_c\} \quad (11-86)$$

$$\{f_d\} = [k_d] \{u_d\} \quad (11-87)$$

Estas relaciones pueden ser expresadas como:

$$\begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \\ f_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \end{Bmatrix} \quad (11-88)$$

o

$$\{f\} = [k] \{u\} \quad (11-89)$$

Ahora se plantea el equilibrio entre las fuerzas en los pórticos y las fuerzas en el centro del diafragma:

Suma de fuerzas en el sentido x:

$$F_x = f_a + f_c \quad (11-90)$$

Suma de fuerzas en el sentido y:

$$F_y = f_b + f_d \quad (11-91)$$

Suma de momentos con respecto a un punto de coordenadas x y y:

$$F_z = f_a(y) + f_b(a-x) - f_c(b-y) - f_d(x) \quad (11-92)$$

Que expresada matricialmente es:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ y & (a-x) & (y-b) & -x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{f_a}{f_b} \\ \frac{f_c}{f_d} \end{Bmatrix} \quad (11-93)$$

o

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{T}] \{\mathbf{f}\} \quad (11-94)$$

y debido al principio de contragradiente sabemos que:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{T}]^T \{\mathbf{U}\} \quad (11-95)$$

Reemplazando (11-95) en (11-89)

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{k}] [\mathbf{T}]^T \{\mathbf{U}\} \quad (11-96)$$

y (11-96) en (11-94):

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{T}] [\mathbf{k}] [\mathbf{T}]^T \{\mathbf{U}\} = [\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\} \quad (11-97)$$

Utilizando las matrices $[\mathbf{k}]$ y $[\mathbf{T}]$, obtenemos:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_a + \mathbf{k}_c & 0 & y\mathbf{k}_a + (y-b)\mathbf{k}_c \\ 0 & \mathbf{k}_b + \mathbf{k}_d & (a-x)\mathbf{k}_b - x\mathbf{k}_d \\ y\mathbf{k}_a + (y-b)\mathbf{k}_c & (a-x)\mathbf{k}_b - x\mathbf{k}_d & y^2\mathbf{k}_a + (a-x)^2\mathbf{k}_b + (y-b)^2\mathbf{k}_c + x^2\mathbf{k}_d \end{bmatrix} \quad (11-98)$$

Ahora generemos la matriz de masa también con respecto a un punto de coordenadas x y y :

Centroide de todas las masas:

$$\bar{x}_{\text{tot}} = \frac{\mu_1 ab \frac{a}{2} - \mu_1 sr \frac{s}{2} + \mu_2 sr \frac{s}{2}}{\mu_1 (ab - sr) + \mu_2 sr} = \frac{\mu_1 a^2 b - (\mu_2 s - \mu_1 a) sr}{2[\mu_1 ab + (\mu_1 - \mu_2) sr]}$$

$$\bar{y}_{\text{tot}} = \frac{\mu_1 ab \frac{b}{2} - \mu_1 sr \frac{r}{2} + \mu_2 sr \frac{r}{2}}{\mu_1 (ab - sr) + \mu_2 sr} = \frac{\mu_1 ab^2 + (\mu_2 r - \mu_1 b) sr}{2[\mu_1 ab + (\mu_1 - \mu_2) sr]}$$

Centroide de cada masa:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mu_1 ab \frac{a}{2} - \mu_1 sr \frac{s}{2}}{\mu_1 (ab - sr)} = \frac{a^2 b - s^2 r}{2(ab - sr)} & x_2 &= \frac{s}{2} \\ y_1 &= \frac{\mu_1 ab \frac{b}{2} - \mu_1 sr \frac{r}{2}}{\mu_1 (ab - sr)} = \frac{ab^2 - sr^2}{2(ab - sr)} & y_2 &= \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Distancia desde x hasta
el centroide del área 1

$$\bar{x}_1 = x - \frac{a^2b - sr^2}{2(ab - rs)} = \frac{2abx - 2srx - a^2b + s^2r}{2(ab - rs)}$$

Distancia desde y hasta
el centroide del área 1

$$\bar{y}_1 = y - \frac{ab\frac{b}{2} - sr\frac{r}{2}}{(ab - sr)} = \frac{2aby - 2sry - ab^2 + sr^2}{2(ab - sr)}$$

Inercias rotacionales:

$$J_{o1} = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2)$$

$$\frac{m_1}{A_1} J_{o1} = \frac{\mu_1}{12}(ab - sr)(a^2 + b^2)$$

$$m_1(\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2) = \mu_1(ab - sr)(\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2)$$

Distancia desde x hasta
el centroide del área 2

$$\bar{x}_2 = x - \frac{s}{2}$$

Distancia desde y hasta
el centroide del área 2

$$\bar{y}_2 = y - \frac{r}{2}$$

$$J_{o2} = \frac{sr}{12}(s^2 + r^2)$$

$$\frac{m_2}{A_2} J_{o2} = \frac{\mu_2}{12}sr(s^2 + r^2)$$

$$m_2(\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2) = \mu_2sr(\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2)$$

Términos de la matriz de masas:

$$\Sigma m_i = (ab - sr) \mu_1 + sr \mu_2$$

$$\sum_i m_i \bar{x}_i = x[\mu_1 ab + (\mu_2 - \mu_1)sr] - \mu_1 \frac{a^2b}{2} - (\mu_2 - \mu_1) \frac{s^2r}{2}$$

$$\sum_i m_i \bar{y}_i = y[\mu_1 ab + (\mu_2 - \mu_1)sr] - \mu_1 \frac{ab^2}{2} - (\mu_2 - \mu_1) \frac{sr^2}{2}$$

$$\sum_i \left[\frac{m_i}{A_i} J_{oi} + m_i (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) \right] = \frac{\mu_1}{12}(ab - sr)(a^2 + b^2) + \frac{\mu_2}{12}sr(s^2 + r^2) + \mu_1(ab - sr)(\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2) + \mu_2sr(\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2)$$

Por lo tanto la matriz de masa es la siguiente:

$$[M] = \begin{bmatrix} \mu_1(ab - sr) + \mu_2sr & 0 & -\sum(m_i \bar{y}_i) \\ 0 & \mu_1(ab - sr) + \mu_2sr & \sum(m_i \bar{x}_i) \\ -\sum(m_i \bar{y}_i) & \sum(m_i \bar{x}_i) & \sum \left[\frac{m_i}{A_i} J_{oi} + m_i (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) \right] \end{bmatrix} \quad (11-99)$$

Es evidente de la deducción de las anteriores matrices que para un origen arbitrario del sistema de coordenadas (x y y) las dos matrices, **[K]** y **[M]**, no son diagonales. Ahora veamos la forma de las matrices cuando se escogen diferentes lugares para definir el lugar donde se coloca el origen del sistema de coordenadas que define los grados de libertad generales de la estructura.

(a) Para orientarnos veamos que sucede si los pórticos tienen la misma rigidez y las densidades de masa son iguales en los dos sectores. El origen del sistema de coordenadas que define los grados de libertad generales de la estructura se coloca en $x = a/2$ y $y = b/2$. Tenemos para vibración libre el

siguiente sistema de ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del sistema, siendo k la rigidez para cargas laterales del pórtico:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 ab & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 ab & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_1 ab}{12}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_x \\ \ddot{U}_y \\ \ddot{U}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{2}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Las dos matrices son diagonales, lo cual quiere decir que las tres ecuaciones que definen el sistema son independientes y en realidad tenemos tres sistemas de un grado de libertad totalmente separados, o sea:

$$\mu_1 ab \ddot{U}_x + 2k U_x = 0$$

$$\mu_1 ab \ddot{U}_y + 2k U_y = 0$$

$$\frac{\mu_1}{12}(a^2 + b^2) \ddot{U}_z + \frac{k}{2}(a^2 + b^2) U_z = 0$$

(b) Ahora dejemos los pórticos iguales, pero tengamos en cuenta las dos densidades de masa. El origen del sistema de coordenadas que define los grados de libertad generales de la estructura también se coloca en $x = a/2$ y $y = b/2$. Tenemos para vibración libre el siguiente sistema de ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del sistema, siendo k la rigidez para cargas laterales del pórtico:

$$\begin{bmatrix} \mu_1(ab - sr) + \mu_2 sr & 0 & -\frac{sr}{2}(\mu_2 - \mu_1)(b - r) \\ 0 & \mu_1(ab - sr) + \mu_2 sr & \frac{sr}{2}(\mu_2 - \mu_1)(a - s) \\ -\frac{sr}{2}(\mu_2 - \mu_1)(b - r) & \frac{sr}{2}(\mu_2 - \mu_1)(a - s) & m_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_x \\ \ddot{U}_y \\ \ddot{U}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{2}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Donde:

$$m_r = \frac{\mu_1}{12}(ab - sr)(a^2 + b^2) + \frac{\mu_2}{12}sr(s^2 + r^2) + \frac{sr}{4} \left[\frac{\mu_2 ab - (\mu_2 - \mu_1)sr}{ab - sr} \right] [(a - s)^2 + (b - r)^2]$$

Solo la matriz de rigidez es diagonal. En este caso se dice que el sistema tiene *acople dinámico*, dado que los grados de libertad están relacionados a través de la matriz de masas.

(c) Ahora hagamos iguales las dos densidades de masa y dejemos todos los pórticos diferentes. El origen del sistema de coordenadas que define los grados de libertad generales de la estructura se coloca en el centroide de masas $x = a/2$ y $y = b/2$. Tenemos para vibración libre el siguiente sistema de ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del sistema:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 ab & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 ab & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_1 ab}{12}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_x \\ \ddot{U}_y \\ \ddot{U}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_a + k_c & 0 & \frac{b}{2}(k_a + k_c) \\ 0 & k_b + k_d & \frac{a}{2}(k_b + k_d) \\ \frac{b}{2}(k_a + k_c) & \frac{a}{2}(k_b + k_d) & \frac{1}{4}(b^2 k_a + a^2 k_b + b^2 k_c + a^2 k_d) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solo la matriz de masa es diagonal. En este caso se dice que el sistema tiene *acople estático*, dado que los grados de libertad están relacionados a través de la matriz de rigidez.

La conclusión más importante del ejercicio anterior es que el sistema se puede plantear definiendo sus grados de libertad arbitrariamente en cualquier punto, pero el hecho de que los grados de libertad se seleccionen adecuadamente facilita la solución del sistema pues en algunos casos puede llegar a desacoplar totalmente las ecuaciones de tal manera que no haya ni acople dinámico ni acople estático, y en ese caso el sistema de n ecuaciones diferenciales simultáneas se convierte en n ecuaciones diferenciales independientes.

Otra manera de enfocar los conceptos que se han presentado en esta Sección es a través de los centros de masa y de rigidez. El *centro de masa* es, como se ha indicado anteriormente, es el lugar en el cual actúan las fuerzas inerciales dentro de un cuerpo rígido. El *centro de rigidez*, para una estructura que contiene diafragmas rígidos, puede definirse como el lugar dentro del diafragma en el cual al aplicar cualquier fuerza horizontal, no se presenta rotación del diafragma. Utilizando estos dos conceptos, puede decirse que el acople dinámico se presenta cuando los grados de libertad del diafragma no se colocan en el centro de masa, y análogamente, el acople estático se presenta cuando los grados de libertad del diafragma no se colocan en el centro de rigidez.

Tema N° 17 — Análisis modal y desacoplaje de las ecuaciones de equilibrio

12.1 — Introducción

En el Capítulo 10 se plantearon las ecuaciones de equilibrio dinámico de sistemas con varios grados de libertad y en el Capítulo 11 se presentaron diferentes metodologías para poder determinar estas ecuaciones de equilibrio dinámico en casos prácticos. La siguiente etapa es la solución de estas ecuaciones de equilibrio, con el fin de obtener las deformaciones de los sistemas descritos, ante sollicitaciones dinámicas. Ese es el tema del presente capítulo. La solución se puede enfocar de dos maneras diferentes: la solución modal, o la solución por medio de la integración de las ecuaciones de equilibrio. El primer método consiste en convertir el sistema de ecuaciones simultáneas diferenciales, que describe la condición de equilibrio de cada uno de los grados de libertad, en un conjunto de ecuaciones de equilibrio independientes. El segundo procedimiento de integración de las ecuaciones de equilibrio dinámico es análogo al empleado para sistemas de un grado de libertad. Este procedimiento tiene su aplicación principalmente en sistemas con características no lineales, por lo cual su presentación formal se limita a la breve introducción de la Sección 12.7.

No sobra hacer la advertencia de que la primera metodología, o sea la solución modal, es aplicable, en general, sólo a sistemas que permanecen en el rango lineal de respuesta.

12.2 — Solución modal para el caso no amortiguado

Tenemos, para vibración libre, el siguiente sistema de n ecuaciones simultáneas diferenciales, de equilibrio:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (12-1)$$

donde las matrices $[\mathbf{M}]$ y $[\mathbf{K}]$ son las matrices de masa y de rigidez respectivamente, y además ambas son positivamente definidas, lo cual quiere decir que para la posición de equilibrio, la energía potencial del sistema es cero.

Se postula que la solución del sistema anterior de ecuaciones diferenciales simultáneas es del tipo:

$$\{\mathbf{U}_i(t)\} = \{\phi^{(i)}\} f_i(t) \quad (12-2)$$

lo cual corresponde a una solución separable en un vector de amplitudes, $\{\phi^{(i)}\}$, y una función del tiempo, $f_i(t)$. Al derivar dos veces contra el tiempo la ecuación (12-2) se obtiene la siguiente ecuación de aceleraciones:

$$\{\ddot{\mathbf{U}}_i(t)\} = \{\phi^{(i)}\} \ddot{f}_i(t) \quad (12-3)$$

Reemplazando las dos últimas ecuaciones en (12-1), obtenemos:

$$[\mathbf{M}]\{\phi^{(i)}\} \ddot{f}_i(t) + [\mathbf{K}]\{\phi^{(i)}\} f_i(t) = \{\mathbf{0}\} \quad (12-4)$$

O sea que tenemos n ecuaciones del tipo:

$$\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \phi_j^{(i)} \right) \ddot{f}_i(t) + \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} \phi_j^{(i)} \right) f_i(t) = 0 \quad (12-5)$$

que es equivalente, para cualquier ecuación i , a la solución clásica de ecuaciones diferenciales por el método de separación de variables:

$$-\frac{\ddot{f}_i(t)}{f_i(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} \phi_j^{(i)}}{\sum_{j=1}^n m_{ij} \phi_j^{(i)}} \quad (12-6)$$

En esta última ecuación podemos ver que el lado derecho no depende del tiempo, mientras que el izquierdo sí. Esto quiere decir que ambos lados son iguales a una constante, que denominamos arbitrariamente como ω_i^2 . Por lo tanto la ecuación (12-6) se convierte en dos ecuaciones, una para la parte que depende del tiempo, y otra para la parte que no:

$$\ddot{f}_i(t) + \omega_i^2 f_i(t) = 0 \quad (12-7)$$

y

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega_i^2 m_{ij}) \phi_j^{(i)} = 0 \quad (12-8)$$

La solución de la ecuación (12-7) es del tipo:

$$f_i(t) = A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t \quad (12-9)$$

como se vió para sistemas de un grado de libertad en la ecuación (2-6) de la Sección 2.1; donde A_i y B_i son constantes que dependen de las condiciones iniciales y representan la amplitud del movimiento oscilatorio, y ω_i es la frecuencia natural en radianes por segundo. Los valores que puede tomar ω_i se pueden determinar por medio de la ecuación (12-8), que expresada en forma matricial es:

$$[[K] - \omega_i^2 [M]] \{\phi^{(i)}\} = \{0\} \quad (12-10)$$

Esta última ecuación corresponde a un sistema de ecuaciones simultáneas homogéneo, el cual por definición sólo tiene solución no trivial si el determinante de la matriz de coeficientes es cero:

$$\Delta = |[K] - \omega_i^2 [M]| = 0 \quad (12-11)$$

Δ se denomina, entonces, el *determinante característico* del sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas. Al expandir este determinante encontramos un polinomio de orden $2n$, con potencias pares únicamente, y con ω^2 como variable. Esta ecuación se llama *ecuación característica* o ecuación de frecuencias. Las n raíces de esta ecuación son las frecuencias naturales del sistema que se denominan *valores característicos* o valores propios, o "*eigenvalues*". Debido a que las matrices $[M]$ y $[K]$ son positivamente definidas, se puede probar que las raíces de la ecuación característica son siempre reales y positivas. Estas raíces se ordenan de menor a mayor así:

$$\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \leq \dots \leq \omega_n^2 \quad (12-12)$$

y las raíces cuadradas de estos términos son las llamadas frecuencias naturales del sistema, en radianes por segundo. A la frecuencia más pequeña, ω_1 , se le denomina *frecuencia fundamental*.

Ahora debemos determinar los valores de las amplitudes de este movimiento armónico $\{\phi^{(i)}\}$, reemplazando los valores de ω_i^2 en la ecuación (12-10), para obtener así n sistemas de ecuaciones del tipo:

$$[[K] - \omega_r^2 [M]] \{\phi^{(r)}\} = \{0\} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (12-13)$$

Donde para cada valor ω_r existe un vector $\{\phi^{(r)}\}$ que es una solución no trivial del sistema de ecuaciones simultáneas implícito en (12-13). $\{\phi^{(r)}\}$ es un *vector característico* o *modo de vibración* o "*eigenvector*". Este vector está compuesto por elementos $\phi_i^{(r)}$, los cuales son números reales y no tienen un valor determinado en el sentido estricto, pues para cualquier escalar real α_r , $\alpha_r\{\phi^{(r)}\}$ también es una solución del sistema de ecuaciones simultáneas homogéneo de la ecuación (12-13). Lo anterior quiere decir que la relación entre los diferentes términos del vector es fija y determinada. Por lo tanto para cada frecuencia ω_r tenemos un vector $\{\phi^{(r)}\}$ que tiene una forma definida pero una amplitud arbitraria. Como hay la posibilidad de que dos o más frecuencias sean iguales, en ese caso cualquier combinación lineal de los modos correspondientes, también es un modo.

Si a uno de los elementos del vector se le asigna un valor definido cualquiera, como por ejemplo la unidad, los restantes $n-1$ términos quedan determinados de una forma única. Este proceso se denomina normalización y los vectores resultantes se denominan *modos normales*. Una normalización muy utilizada es la siguiente:

$$\{\phi^{(r)}\}^T \{\phi^{(r)}\} = 1 \quad (12-14)$$

Otras veces es conveniente normalizar los modos con respecto a la matriz de masa, $[M]$, así:

$$\{\phi^{(r)}\}^T [M] \{\phi^{(r)}\} = 1 \quad (12-15)$$

Esta última normalización, denominada *ortonormal*, se hace por comodidad y no tiene ninguna importancia especial desde el punto de vista de su sentido físico, aunque trae ventajas que se harán evidentes más adelante.

También es costumbre organizar todos los modos en una sola *matriz modal* $[\Phi]$ de dimensiones n por n , en la cual cada columna corresponde a un modo:

$$[\Phi] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \{\phi^{(1)}\} & \{\phi^{(2)}\} & \dots & \{\phi^{(n)}\} \end{array} \right] \quad (12-16)$$

Los modos de vibración del sistema son propiedades del mismo tal como lo son las frecuencias naturales, y dependen de las propiedades de rigidez y de masa del sistema. Cada uno de los modos puede ser excitado independientemente de los otros. Si las condiciones iniciales, o las excitaciones del sistema, se disponen de tal manera que se excite exclusivamente el modo $\{\phi^{(r)}\}$, el movimiento del conjunto de masas se asemejará totalmente a la forma del modo y el sistema se moverá con una oscilación armónica sincrónoma con una frecuencia de ω_r , en radianes/segundo, la cual es la frecuencia natural asociada con ese modo en particular.

Con base en lo anterior, el movimiento general de un sistema de n grados de libertad puede representarse por medio de la superposición de los modos del sistema multiplicados cada uno de ellos por unas constantes que dependen de las condiciones iniciales del movimiento, o de las excitaciones si se trata de movimiento forzado. Estas constantes indican el grado de participación de cada modo en el movimiento total. El movimiento total para el caso de vibración libre se describe, entonces, por medio de unos nuevos grados de libertad η_i , de tal manera que:

$$\{U(t)\} = [\Phi] \{\eta(t)\} \quad (12-17)$$

y los términos del vector $\{\eta(t)\}$ tienen la siguiente forma:

$$\eta_i(t) = A_i \text{sen}(\omega_i t) + B_i \text{cos}(\omega_i t) \quad (12-18)$$

La ecuación (12-17) se puede transformar en:

$$\begin{aligned}\{U(t)\} &= [\Phi]\{\eta(t)\} \\ &= [\Phi]\{A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} A_i \sin(\omega_i t) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} B_i \cos(\omega_i t) \right)\end{aligned}\quad (12-19)$$

Derivando contra el tiempo la ecuación anterior, obtenemos las velocidades de los grados de libertad:

$$\{\dot{U}(t)\} = \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} A_i \omega_i \cos(\omega_i t) \right) - \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} B_i \omega_i \sin(\omega_i t) \right) \quad (12-20)$$

Definiendo unas condiciones iniciales de desplazamiento $\{U_o\}$ y velocidad $\{\dot{U}_o\}$ obtenemos:

$$\{U_o\} = \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} B_i \right) \quad \text{y} \quad \{\dot{U}_o\} = \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} A_i \omega_i \right) \quad (12-21)$$

es posible, entonces, definir dos sistemas de ecuaciones simultáneas que tienen como incógnitas los valores de B_i y $A_i \omega_i$ con lo cual se obtiene la solución del problema de vibración libre. Más adelante se verá que no hay necesidad de resolver formalmente estas ecuaciones simultáneas.

Ejemplo 12-1

Supongamos que tenemos un edificio como el mostrado en la Figura 12-1. Estamos interesados en la respuesta del edificio en la dirección x únicamente. La rigidez de cada uno de los pisos es igual y se denomina k . La masa de los dos pisos inferiores es el doble, para cada uno, que la de la cubierta, la cual se denomina m .

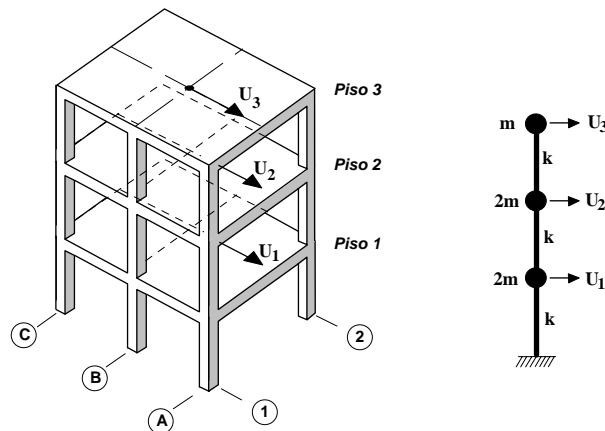


Figura 12-1 - Edificio del ejemplo 12-1

La matriz de masas de la estructura es la siguiente:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{matrix}$$

y la matriz de rigidez, obtenida por medio de la ecuación de Lagrange (Sección 10.5) es:

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix} \quad \downarrow \text{gdl} \quad \begin{matrix} U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{matrix}$$

Por lo tanto las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_3 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ahora procedemos a encontrar la solución de la respuesta del sistema para diferentes condiciones iniciales. De la ecuación (12-11) tenemos:

$$\Delta = |[K] - \omega_i^2 [M]| = 0$$

que al reemplazar las matrices $[K]$ y $[M]$, conduce a un determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 2m & -k \\ 0 & -k & 2k - \omega^2 2m \end{vmatrix} = 0$$

y la ecuación característica, obtenida de la expansión del determinante es:

$$\Delta = 4m^3 \omega^6 - 12km^2 \omega^4 + 9k^2 m \omega^2 - k^3 = 0$$

Al dividir la ecuación anterior por $4m^3$ obtenemos:

$$\omega^6 - 3 \frac{k}{m} \omega^4 + \frac{9}{4} \frac{k^2}{m^2} \omega^2 - \frac{1}{4} \frac{k^3}{m^3} = 0$$

Una simple inspección de la ecuación anterior nos indica que $\omega^2 = k/m$ es una raíz de la ecuación, y que aplicando división sintética se obtiene:

$$\left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) (4m^3 \omega^4 - 8km^2 \omega^2 + k^2 m) = 0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado del segundo término:

$$\omega^2 = \frac{8km^2 \pm \sqrt{64k^2 m^4 - 16k^2 m^4}}{8m^3} = \frac{k}{m} \left[1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \left\langle \begin{matrix} 1.866 \frac{k}{m} \\ 0.134 \frac{k}{m} \end{matrix} \right.$$

Entonces las frecuencias naturales del sistema, debidamente ordenadas, son:

$$\omega_1^2 = 0.134 \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_3^2 = 1.866 \frac{k}{m}$$

Ahora utilizando la ecuación (12-13) podemos calcular los modos de vibración.

$$[[\mathbf{K}] - \omega_r^2 [\mathbf{M}]] \{\phi^{(r)}\} = \{0\} \quad r = 1, 2 \text{ y } 3$$

Reemplazando las matrices de masa y rigidez, se tiene:

$$\begin{bmatrix} k - \omega_r^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega_r^2 2m & -k \\ 0 & -k & 2k - \omega_r^2 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_3^{(r)} \\ \phi_2^{(r)} \\ \phi_1^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Expandiendo la operación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} (k - \omega_r^2 m)\phi_3^{(r)} - k\phi_2^{(r)} &= 0 \\ -k\phi_3^{(r)} + (2k - \omega_r^2 2m)\phi_2^{(r)} - k\phi_1^{(r)} &= 0 \\ -k\phi_2^{(r)} + (2k - \omega_r^2 2m)\phi_1^{(r)} &= 0 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación encontramos la relación entre el segundo término del modo y el término inferior:

$$\frac{\phi_2^{(r)}}{\phi_1^{(r)}} = \frac{2k - \omega_r^2 2m}{k}$$

y reemplazando la tercera ecuación en la segunda, obtenemos la siguiente relación entre el término superior y el primer término:

$$\frac{\phi_3^{(r)}}{\phi_1^{(r)}} = \frac{(2k - \omega_r^2 2m)^2}{k^2} - 1$$

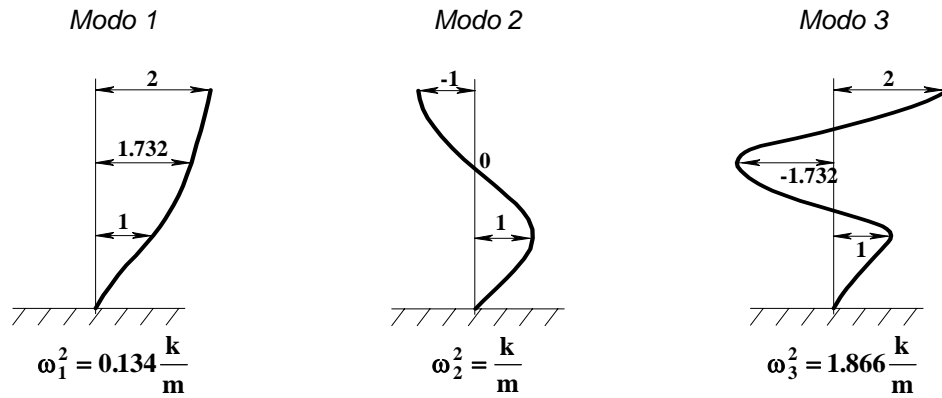
Ahora reemplazando los valores de ω_i^2 , uno a la vez, obtenemos los siguientes valores:

	ω_1^2	ω_2^2	ω_3^2
$\frac{\phi_2}{\phi_1}$	1.732	0	-1.732
$\frac{\phi_3}{\phi_1}$	2	-1	2

Dando un valor de la unidad al término inferior del modo, entonces los modos de vibración son:

$$\{\phi^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{\phi^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{\phi^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1.732 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

que gráficamente se pueden presentar como:



Ahora normalizando los modos de vibración de tal manera que se cumpla la ecuación (12-15):

$$\{\phi^{(r)}\}^T [M] \{\phi^{(r)}\} = 1$$

así obtenemos los siguientes modos ortonormales:

Modo 1

$$\left\{ 2 \mid \sqrt{3} \mid 1 \right\} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} = 12m \Rightarrow \{\phi^{(1)}\} = \frac{1}{2\sqrt{3m}} \begin{Bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5774/\sqrt{m} \\ 0.5000/\sqrt{m} \\ 0.2887/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

Modo 2

$$\left\{ -1 \mid 0 \mid 1 \right\} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = 3m \Rightarrow \{\phi^{(2)}\} = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.5774/\sqrt{m} \\ 0 \\ 0.5774/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

Modo 3

$$\left\{ 2 \mid -\sqrt{3} \mid 1 \right\} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} = 12m \Rightarrow \{\phi^{(3)}\} = \frac{1}{2\sqrt{3m}} \begin{Bmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5774/\sqrt{m} \\ -0.5000/\sqrt{m} \\ 0.2887/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

y la matriz modal:

$$[\Phi] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.5774 & 0.5774 \\ 0.5000 & 0 & -0.5000 \\ 0.2887 & 0.5774 & 0.2887 \end{bmatrix}$$

■

12.3 — Ortogonalidad de los modos naturales

Cada modo independientemente se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones simultáneas dado en la ecuación (12-13)

$$[[\mathbf{K}] - \omega_r^2 [\mathbf{M}]] \{\phi^{(r)}\} = \{0\} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (12-13)$$

la cual es equivalente, para cualquier modo, por ejemplo el número r , a :

$$[\mathbf{K}] \{\phi^{(r)}\} = \omega_r^2 [\mathbf{M}] \{\phi^{(r)}\} \quad (12-22)$$

Ahora si premultiplicamos por otro modo transpuesto, por ejemplo el número s , obtenemos:

$$\{\phi^{(s)}\}^T [\mathbf{K}] \{\phi^{(r)}\} = \omega_r^2 \{\phi^{(s)}\}^T [\mathbf{M}] \{\phi^{(r)}\} \quad (12-23)$$

Ahora, si hubiéramos iniciado el proceso anterior con el modo s y luego hubiéramos premultiplicando por el modo r , tendríamos:

$$\{\phi^{(r)}\}^T [\mathbf{K}] \{\phi^{(s)}\} = \omega_s^2 \{\phi^{(r)}\}^T [\mathbf{M}] \{\phi^{(s)}\} \quad (12-24)$$

Aplicando en la última ecuación el principio de $([\mathbf{A}][\mathbf{B}][\mathbf{C}])^T = [\mathbf{C}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{A}]^T$ y sabiendo que $[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}]^T$ y $[\mathbf{M}] = [\mathbf{M}]^T$ debido a que son simétricas, obtenemos:

$$\{\phi^{(s)}\}^T [\mathbf{K}] \{\phi^{(r)}\} = \omega_s^2 \{\phi^{(s)}\}^T [\mathbf{M}] \{\phi^{(r)}\} \quad (12-25)$$

Restando la ecuación (12-25) de la ecuación (12-23), llegamos a:

$$0 = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \{\phi^{(s)}\}^T [\mathbf{M}] \{\phi^{(r)}\} \quad (12-26)$$

Pero sabemos que en la gran mayoría de los casos las frecuencias son diferentes y por lo tanto:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \neq 0 \quad (12-27)$$

entonces, lo siguiente es válido:

$$\{\phi^{(s)}\}^T [\mathbf{M}] \{\phi^{(r)}\} = 0 \quad (12-28)$$

La misma prueba puede iniciarse con la ecuación (12-22) expresada como:

$$\frac{1}{\omega_r^2} [\mathbf{K}] \{\phi^{(r)}\} = [\mathbf{M}] \{\phi^{(r)}\} \quad (12-29)$$

y llegar a:

$$\{\phi^{(s)}\}^T [\mathbf{K}] \{\phi^{(r)}\} = 0 \quad (12-30)$$

Entonces, en resumen, el *principio de ortogonalidad* dice que si los modos se normalizaron utilizando la ecuación (12-15), o sea son ortonormales, entonces:

$$\{\phi^{(s)}\}^T [\mathbf{M}] \{\phi^{(r)}\} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = r \\ 0 & \text{si } s \neq r \end{cases} \quad (12-31)$$

y

$$\left\{\phi^{(s)}\right\}^T [\mathbf{K}] \left\{\phi^{(r)}\right\} = \begin{cases} \omega_s^2 & \text{si } s = r \\ 0 & \text{si } s \neq r \end{cases} \quad (12-32)$$

Con respecto a su sentido físico, éste se basa en el hecho de que al existir la propiedad de ortogonalidad a través de las matrices de masa $[\mathbf{M}]$ y de rigidez $[\mathbf{K}]$, esto indica que los vectores modales componen un conjunto de vectores linealmente independientes. Esto quiere decir que un vector con cualquier configuración siempre puede expresarse como una combinación lineal de los modos; y por ende éstos pueden emplearse para describir cualquier movimiento posible del sistema.

12.4 — Desacoplaje de las ecuaciones de movimiento

Si después de normalizar los modos de acuerdo con la ecuación (12-15), construimos la matriz $[\Phi]$ de acuerdo con la ecuación (12-16), y utilizamos esta última matriz para una transformación de coordenadas así:

$$\{\mathbf{U}\} = [\Phi] \{\eta\} \quad (12-33)$$

Al derivar esta transformación dos veces contra el tiempo obtenemos:

$$\{\ddot{\mathbf{U}}\} = [\Phi] \{\ddot{\eta}\} \quad (12-34)$$

La ecuación (12-13) que define el problema de valores propios se convierte en:

$$[\mathbf{K}][\Phi] = [\mathbf{M}][\Phi][\omega^2] \quad (12-35)$$

donde $[\omega^2]$ es una matriz diagonal. Si premultiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por $[\Phi]^T$ tenemos:

$$[\Phi]^T [\mathbf{K}][\Phi] = [\Phi]^T [\mathbf{M}][\Phi][\omega^2] \quad (12-36)$$

Pero por definición de la normalización: y de aplicar el principio de ortogonalidad:

$$[\Phi]^T [\mathbf{M}][\Phi] = [\mathbf{I}] \quad (12-37)$$

y de aplicar el principio de ortogonalidad:

$$[\Phi]^T [\mathbf{K}][\Phi] = [\omega^2] \quad (12-38)$$

Ahora si reemplazamos las ecuaciones (12-33) y (12-34) en (12-1):

$$[\mathbf{M}][\Phi] \{\ddot{\eta}\} + [\mathbf{K}][\Phi] \{\eta\} = \{0\} \quad (12-39)$$

Premultiplicando por $[\Phi]^T$ obtenemos:

$$\underbrace{[\Phi]^T [\mathbf{M}][\Phi]}_{[\mathbf{I}]} \{\ddot{\eta}\} + \underbrace{[\Phi]^T [\mathbf{K}][\Phi]}_{[\omega^2]} \{\eta\} = \{0\} \quad (12-40)$$

y entonces:

$$[\mathbf{I}] \{\ddot{\eta}\} + [\omega^2] \{\eta\} = \{0\} \quad (12-41)$$

Dado que tanto $[I]$ como $[\omega^2]$ son matrices diagonales, se ha logrado desacoplar totalmente el sistema y se ha pasado de un sistema de n ecuaciones diferenciales simultáneas a n ecuaciones diferenciales independientes de un grado de libertad del tipo:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = 0 \quad (12-42)$$

en cuya solución se aplican todas las metodologías presentadas en el Capítulo 2 para sistemas de un grado de libertad.

Una vez se obtiene la respuesta en el tiempo de cada uno de los grados de *libertad generalizados* η_i , puede verse que la respuesta es la superposición de la contribución de cada uno de los modos:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\} = \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} \eta_i(t) \right) = \{\phi^{(1)}\} \eta_1(t) + \{\phi^{(2)}\} \eta_2(t) + \dots + \{\phi^{(n)}\} \eta_n(t) \quad (12-43)$$

Por lo tanto se ha obtenido una transformación de coordenadas del sistema de coordenadas empleado para plantear el equilibrio, $\{U\}$, a un sistema de *coordenadas generalizadas* $\{\eta\}$, donde cada una de ellas obra independientemente como si fuera un grado de libertad único que a su vez afecta todos los grados de libertad originales de una forma tal que todos ellos se mueven armónicamente en la forma descrita por su modo correspondiente.

Ejemplo 12-2

Utilizando la matriz $[\Phi]$ desacoplar el sistema del ejemplo 12-1.

La matriz de modos es:

$$[\Phi] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.5774 & 0.5774 \\ 0.5000 & 0 & -0.5000 \\ 0.2887 & 0.5774 & 0.2887 \end{bmatrix}$$

cuya matriz de masa es, del Ejemplo 12-1:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{matrix}$$

y la matriz de rigidez es, también del Ejemplo 12-1:

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{matrix}$$

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_3 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se realizan las siguientes operaciones:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.5000 & 0.2887 \\ -0.5774 & 0 & 0.5774 \\ 0.5774 & -0.5000 & 0.2887 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.5774 & 0.5774 \\ 0.5000 & 0 & -0.5000 \\ 0.2887 & 0.5774 & 0.2887 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.5000 & 0.2887 \\ -0.5774 & 0 & 0.5774 \\ 0.5774 & -0.5000 & 0.2887 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.5774 & 0.5774 \\ 0.5000 & 0 & -0.5000 \\ 0.2887 & 0.5774 & 0.2887 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 0.134 & 0 & 0 \\ 0 & 1.000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.866 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones desacopladas son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \end{Bmatrix} + \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 0.134 & 0 & 0 \\ 0 & 1.000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.866 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

o vistas como tres ecuaciones diferenciales independientes:

$$\ddot{\eta}_1 + 0.134 \frac{k}{m} \eta_1 = 0$$

$$\ddot{\eta}_2 + 1.000 \frac{k}{m} \eta_2 = 0$$

$$\ddot{\eta}_3 + 1.866 \frac{k}{m} \eta_3 = 0$$

■

12.5 — Vibración libre con condiciones iniciales

Al obtener la solución general para vibración libre de sistemas de varios grados de libertad en la Sección 12.2, se vió que el movimiento total era posible describirlo por medio de unos nuevos grados de libertad η_i , obtenidos de las ecuaciones dinámicas desacopladas, de tal manera que la transformación de coordenadas necesaria para pasar de los grados de libertad empleados para plantear el equilibrio de la estructura, a los grados de libertad generalizados correspondientes en la estructura desacoplada era:

$$\{U(t)\} = [\Phi] \{\eta(t)\} \quad (12-44)$$

Los términos del vector $\{\eta(t)\}$ tienen la siguiente forma cuando no hay amortiguamiento,

$$\eta_i(t) = A_i \operatorname{sen} \omega_i t + B_i \cos \omega_i t \quad (12-45)$$

por lo cual la ecuación (12-44) se convierte en:

$$\{U(t)\} = [\Phi] \{\eta(t)\} = [\Phi] \{A \operatorname{sen} \omega t\} + [\Phi] \{B \cos \omega t\} \quad (12-46)$$

Derivando contra el tiempo la ecuación (12-45), obtenemos:

$$\dot{\eta}_i(t) = \omega_i A_i \cos \omega_i t + (-\omega_i B_i) \text{sen} \omega_i t \quad (12-47)$$

y

$$\{\dot{U}(t)\} = [\Phi] \{\dot{\eta}(t)\} = [\Phi] \{\omega A \cos \omega t\} + [\Phi] \{-\omega B \text{sen} \omega t\} \quad (12-48)$$

Si tenemos unas condiciones iniciales de desplazamiento $\{U_o\}$, y velocidad $\{\dot{U}_o\}$, entonces:

$$\{U_o\} = [\Phi] \{\eta(0)\} = [\Phi] \{B\} \quad (12-49)$$

y

$$\{\dot{U}_o\} = [\Phi] \{\dot{\eta}(0)\} = [\Phi] \{\omega A\} \quad (12-50)$$

Premultiplicando las ecuaciones anteriores por $[\Phi]^T [M]$, obtenemos:

$$[\Phi]^T [M] \{U_o\} = [\Phi]^T [M] [\Phi] \{B\} = \{B\} \quad (12-51)$$

y

$$[\Phi]^T [M] \{\dot{U}_o\} = [\Phi]^T [M] [\Phi] \{\omega A\} = \{\omega A\} \quad (12-52)$$

entonces la solución de la respuesta en el tiempo de los desplazamientos de un sistema no amortiguado en vibración libre con condiciones iniciales es:

$$\{U(t)\} = [\Phi] \{\eta(t)\} = [\Phi] [\Phi]^T [M] \left\{ \frac{1}{\omega} \text{sen} \omega t \right\} + [\Phi] [\Phi]^T [M] \{U_o\} \{\cos \omega t\} \quad (12-53)$$

Otra manera de ver la respuesta del sistema, en la cual es evidente que ésta es la superposición de la respuesta de los modos individuales, es la siguiente:

$$\{U(t)\} = \sum_{i=1}^n \left(\left\{ \phi^{(i)} \right\} \frac{a_i}{\omega_i} \text{sen} \omega_i t \right) + \sum_{i=1}^n \left(\left\{ \phi^{(i)} \right\} b_i \cos \omega_i t \right) \quad (12-54)$$

Donde:

$$a_i = \left\{ \phi^{(i)} \right\}^T [M] \{\dot{U}_o\} \quad (12-55a)$$

y

$$b_i = \left\{ \phi^{(i)} \right\}^T [M] \{U_o\} \quad (12-55b)$$

La misma deducción anterior puede realizarse para sistemas amortiguados, simplemente hay que tomar en cuenta el amortiguamiento como se indicó en la Sección 2.2.3.

Ejemplo 12-3

Para la estructura del ejemplo 12-1 debe encontrarse la respuesta de vibración libre para diferentes casos de condiciones iniciales de deformación de la estructura.

Caso (a) - Supongamos un desplazamiento unitario en cada uno de los pisos como condición inicial de desplazamiento, sin que haya condición inicial de velocidad.

El vector de desplazamientos iniciales es:

$$\{U_o\} = \begin{Bmatrix} \frac{U_3(0)}{U_2(0)} \\ \frac{U_2(0)}{U_1(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Las constantes b_i se obtienen de:

$$\{B\} = [\Phi]^T [M] \{U_o\}$$

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.5000 & 0.2887 \\ -0.5774 & 0 & 0.5774 \\ 0.5774 & -0.5000 & 0.2887 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \sqrt{m} \begin{Bmatrix} 2.1547 \\ 0.5774 \\ 0.1548 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto la respuesta del sistema está descrita por la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5774 \\ 0.5000 \\ 0.2887 \end{Bmatrix} 2.1547 \cos \omega_1 t + \begin{Bmatrix} -0.5774 \\ 0 \\ 0.5774 \end{Bmatrix} 0.5774 \cos \omega_2 t + \begin{Bmatrix} 0.5774 \\ -0.5000 \\ 0.2887 \end{Bmatrix} 0.1547 \cos \omega_3 t$$

que al multiplicar cada modo por su constante b_i conduce a:

$$\begin{Bmatrix} U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2441 \\ 1.0774 \\ 0.6221 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t + \begin{Bmatrix} -0.3333 \\ 0 \\ 0.3333 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t + \begin{Bmatrix} 0.0893 \\ -0.0774 \\ 0.0447 \end{Bmatrix} \cos \omega_3 t$$

Es evidente que la respuesta es la suma o superposición de las respuestas de cada modo independientemente. En la Figura 12-2 se muestra la respuesta en el tiempo para cada uno de los modos y la respuesta total.

Suponiendo que todas las respuestas se superpongan en algún momento en el tiempo, el 62.2% sería contribuida por el primer modo, el 33.3% por el segundo y el 4.5% por el tercero.

Caso (b) - Supongamos un desplazamiento con la forma del primer modo, sin que haya condición inicial de velocidad.

El vector de desplazamientos iniciales es:

$$\{U_o\} = \begin{Bmatrix} \frac{U_3(0)}{U_2(0)} \\ \frac{U_2(0)}{U_1(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Las constantes b_i se obtienen de:

$$\{B\} = [\Phi]^T [M] \{U_o\}$$

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.5000 & 0.2887 \\ -0.5774 & 0 & 0.5774 \\ 0.5774 & -0.5000 & 0.2887 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} = \sqrt{m} \begin{Bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

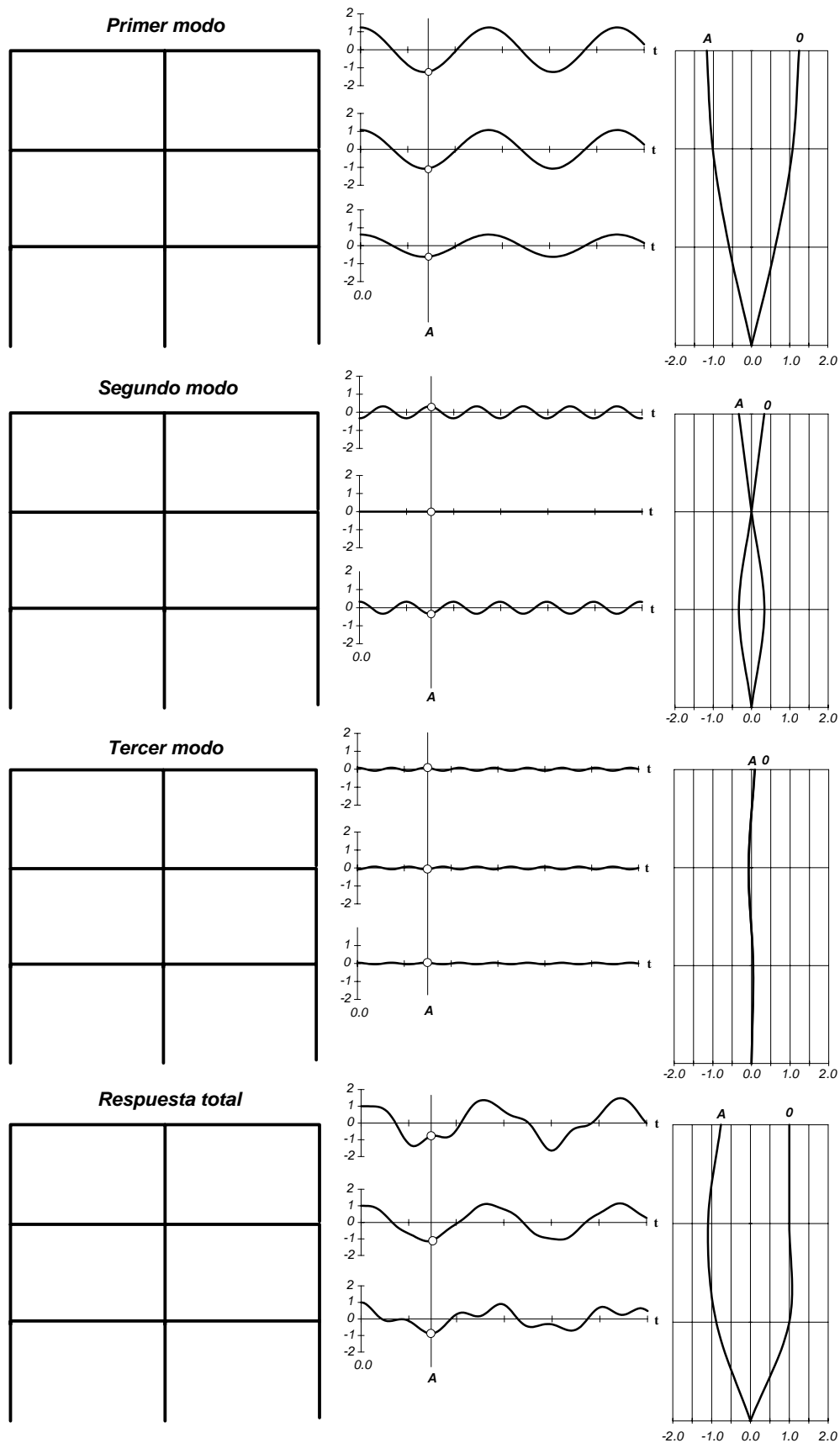


Figura 12-2 - Respuesta para condiciones iniciales de desplazamiento. Caso (a)

Por lo tanto la respuesta del sistema está descrita por la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} \frac{U_3}{U_2} \\ \frac{U_1}{U_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{0.5774}{0.5000} \\ \frac{0.2887}{0.2887} \end{Bmatrix} 2\sqrt{3} \cos \omega_1 t = \begin{Bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t$$

Sólo el primer modo contribuye a la respuesta con el 100% y los otros no aportan nada.

Caso (c) - Supongamos un desplazamiento con la forma del segundo modo, sin que haya condición inicial de velocidad.

El vector de desplazamientos iniciales es:

$$\{U_o\} = \begin{Bmatrix} \frac{U_3(0)}{U_2(0)} \\ \frac{U_1(0)}{U_1(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Las constantes b_i se obtienen de:

$$\{B\} = [\Phi]^T [M] \{U_o\}$$

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \frac{0.5774}{-0.5774} & \frac{0.5000}{0} & \frac{0.2887}{0.2887} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \sqrt{m} \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto la respuesta del sistema está descrita por la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} \frac{U_3}{U_2} \\ \frac{U_1}{U_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-0.5774}{0} \\ \frac{0.5774}{0.5774} \end{Bmatrix} \sqrt{3} \cos \omega_2 t = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t$$

Sólo el segundo modo contribuye a la respuesta con el 100% y los otros no aportan nada.

Caso (d) - Supongamos un desplazamiento con la forma del tercer modo, sin que haya condición inicial de velocidad.

El vector de desplazamientos iniciales es:

$$\{U_o\} = \begin{Bmatrix} \frac{U_3(0)}{U_2(0)} \\ \frac{U_1(0)}{U_1(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{-\sqrt{3}} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Las constantes b_i se obtienen de:

$$\{B\} = [\Phi]^T [M] \{U_o\}$$

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \frac{0.5774}{-0.5774} & \frac{0.5000}{0} & \frac{0.2887}{0.2887} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{2}{-\sqrt{3}} \\ 1 \end{Bmatrix} = \sqrt{m} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{2\sqrt{3}} \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto la respuesta del sistema está descrita por la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5774 \\ -0.5000 \\ 0.2887 \end{Bmatrix} 2\sqrt{3} \cos \omega_3 t = \begin{Bmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_3 t$$

Sólo el tercer modo contribuye a la respuesta con el 100% y los otros no aportan nada. ■

12.6 — Análisis modal con amortiguamiento

Cuando se trataron los sistemas de un grado de libertad se discutieron los diferentes tipos de amortiguamiento y su tratamiento matemático. Desde este punto de vista hay razones poderosas para adoptar la idealización de amortiguamiento viscoso dado que la solución de la ecuación diferencial de equilibrio dinámico es la más sencilla de tratar. Cuando intentamos extender estos conceptos a sistemas de varios grados de libertad nos encontramos que en aras de obtener una solución matemática expedita, la relación entre el modelo matemático y el fenómeno físico es más imperfecta.

Un sistema de varios grados de libertad donde hay amortiguamiento viscoso tendría el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio en vibración libre:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (12-56)$$

El procedimiento para obtener las matrices de masa $[M]$ y de rigidez $[K]$ ha sido tratado en los capítulos anteriores. El procedimiento para definir los coeficientes de la matriz de amortiguamiento $[C]$ consiste, desde un punto de vista análogo al empleado para determinar las matrices de masa y rigidez, en imponer una velocidad unitaria a uno de los grados de libertad, mientras que la velocidad de los otros grados de libertad se mantiene como cero. De esta forma se obtienen unas fuerzas internas de amortiguamiento en todos los grados de libertad, las cuales provienen de la velocidad del grado de libertad seleccionado. Esas fuerzas corresponden a las constantes de la columna de la matriz de amortiguamiento del grado de libertad seleccionado. Realizando esta operación sistemáticamente para cada uno de los grados de libertad, se obtiene la matriz de amortiguamiento $[C]$ del sistema estructural:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{bmatrix} \quad (12-57)$$

En general lo que se conoce acerca del amortiguamiento de los materiales estructurales, o de los elementos estructurales contruidos con estos materiales, hace que el procedimiento descrito sea difícil de aplicar en los casos prácticos, dado el gran número de incógnitas que existen alrededor del tema. Usualmente se emplean procedimientos por medio de los cuales se realizan aproximaciones basadas en casos de estructuras similares en las cuales se conoce el amortiguamiento debido a mediciones o ensayos experimentales. Estos procedimientos, en general, utilizan el concepto de *amortiguamiento modal* que se presenta a continuación.

Si la matriz $[C]$ es desacoplada por los modos de vibración, tendríamos entonces que:

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = [2\xi_i \omega_i] \quad (12-58)$$

donde la matriz $[2\xi_i \omega_i]$ es una matriz diagonal y ξ_{ii} es el amortiguamiento viscoso asociado con el modo i . Este tipo de amortiguamiento en el cual la matriz de amortiguamiento $[C]$ es desacoplable por los modos de vibración obtenidos de las matrices de masa $[M]$ y rigidez $[K]$, únicamente; se conoce con el nombre de *amortiguamiento clásico*. En este momento se estaría planteando una matriz de amortiguamiento

cuya única virtud es que es posible desacoplarla, pero que tiene poca relación con el fenómeno físico que trata de describir. Dadas las imprecisiones en que se incurriría en esta situación, no tiene mucho sentido tratar de obtener la matriz $[C]$ de la manera descrita y no se comete un error grave, dados los órdenes de magnitud de los errores, si este amortiguamiento se introduce en la ecuación desacoplada del sistema. Por lo tanto el procedimiento comúnmente empleado consiste en definir un *amortiguamiento modal*, el cual es propio del modo en su ecuación diferencial desacoplada, por lo tanto la ecuación (12-42) se convierte en:

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = 0 \quad (12-59)$$

la cual puede ser resuelta aplicando las metodologías descritas para sistemas amortiguados de un grado de libertad. En cada ecuación desacoplada el coeficiente de amortiguamiento crítico ξ_i sería el propio del modo i . El problema radica en definir los valores de los coeficientes de amortiguamiento aplicables a cada modo. Al respecto pueden emplearse los valores recomendados por Newmark y Hall, presentados en la Tabla 7-3 de la Sección 7.2.2.

Si suponemos, ahora, que la matriz de amortiguamiento tiene una forma tal que sea una combinación lineal de las matrices de masa $[M]$ y de rigidez $[K]$, de la siguiente manera:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (12-60)$$

donde α y β son constantes. Es posible probar que esta matriz es desacoplable por medio de los modos de vibración de la estructura como se indico en la Sección 12.4:

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = \alpha[\Phi]^T[M][\Phi] + \beta[\Phi]^T[K][\Phi] = \alpha[I] + \beta[\omega^2] = [\alpha + \beta\omega_i^2] \quad (12-60)$$

donde la matriz $[\alpha + \beta\omega_i^2]$ es una matriz diagonal. Dado que cada uno de los términos de la diagonal de esta matriz corresponde a $2\xi_i\omega_i$, entonces el amortiguamiento ξ_i en cada una de las ecuaciones desacopladas es:

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (12-61)$$

Este tipo de amortiguamiento se conoce con el nombre de *amortiguamiento de Rayleigh*, quien fue el primero en plantearlo, y es uno de los casos de *amortiguamiento clásico*. Es importante notar que en este caso el amortiguamiento es función de la frecuencia del modo, y por lo tanto es diferente para cada modo, lo cual en alguna medida contradice la evidencia experimental que indica que no hay grandes variaciones en el amortiguamiento de los diferentes modos [Chopra, 1995]. En el caso de que se disponga del valor del amortiguamiento de dos modos, por ejemplo r y s , es posible plantear el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas, de las cuales se puede despejar α y β :

$$\begin{Bmatrix} \xi_r \\ \xi_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_r & \omega_r \\ 1/\omega_s & \omega_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (12-62)$$

En el caso de que los dos amortiguamientos tengan el mismo valor ($\xi = \xi_r = \xi_s$), la solución del sistema de ecuaciones simultáneas conduce a:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_r + \omega_s} \begin{Bmatrix} \omega_r \omega_s \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (12-63)$$

La Figura 12-3 muestra la relación entre el amortiguamiento y la frecuencia y la forma que tiene este amortiguamiento cuando es proporcional a la rigidez únicamente, o a la masa únicamente, o cuando se combinan.

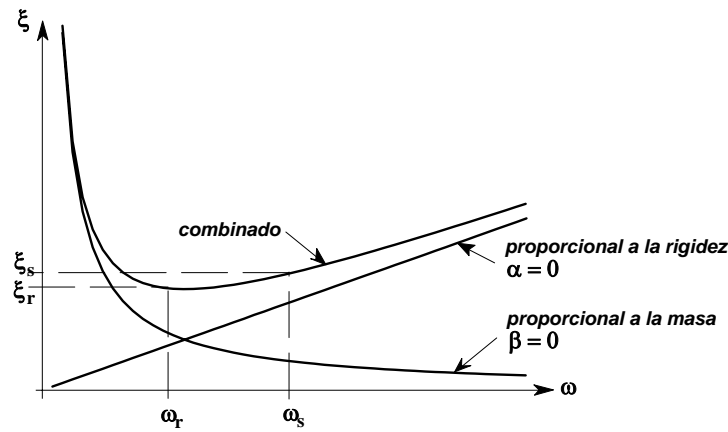


Figura 12-3 - Relación entre amortiguamiento y frecuencia, para amortiguamiento de Rayleigh

Es conveniente tomar ω_r como el valor de la frecuencia fundamental, y ω_s como el valor de la frecuencia correspondiente al último de los modos que contribuye significativamente a la respuesta. De esta manera el primer modo y el modo s tendrán exactamente los valores de amortiguamiento asignado y los modos entre estos dos tendrán valores similares algo menores, y los modos superiores al modo s , tendrán valores mayores del amortiguamiento, disminuyendo su contribución a la respuesta.

Existen otras metodologías para formular la matriz de amortiguamiento $[C]$, dentro del contexto del amortiguamiento clásico. Al respecto pueden consultarse [Clough y Penzien, 1993], [Chopra, 1995], [Hurty y Rubinstein, 1964], entre otros. No obstante, la necesidad de disponer de una matriz de amortiguamiento clásico cuando se emplean técnicas de solución modales no es muy evidente, pues es posible asignar el amortiguamiento a la ecuación desacoplada, como se indica en la ecuación (12-59), lo que hace pensar que la determinación de la matriz $[C]$ es inoficiosa. No obstante, cuando se desea obtener la respuesta dinámica de la estructura utilizando técnicas de integración de las ecuaciones de movimiento, la única manera de poder introducir amortiguamiento a la respuesta es a través del empleo de la matriz $[C]$.

En aquellos casos en los cuales el amortiguamiento clásico no es aplicable debido a que existen diferencias apreciables en los valores de los coeficientes de amortiguamiento de diferentes zonas de la estructura, o del sistema estructural. Este es el caso de la interacción suelo-estructura, donde los coeficientes de amortiguamiento son mucho más altos para el suelo que para la estructura, o cuando se combinan materiales estructurales con coeficientes de amortiguamiento muy diferentes. En estos casos es común determinar las matrices de amortiguamiento clásico para cada subsistema independientemente, y luego combinarlas, [Chopra, 1995] y [Clough y Penzien, 1993]. Es posible que el sistema así obtenido no cumpla la condición de que el amortiguamiento del conjunto sea desacoplable por los modos de vibración y, entonces, hay necesidad de recurrir a técnicas de integración de las ecuaciones de movimiento como las presentadas en la siguiente sección.

12.7 — Solución integrando las ecuaciones de movimiento

La solución por medio de procedimientos modales no es posible en el caso de amortiguamiento no clásico, o cuando la estructura responde en el rango inelástico. En estos casos se debe recurrir a soluciones por medio de la integración de las ecuaciones de movimiento, o equilibrio dinámico. No obstante, esta alternativa puede emplearse también en los casos en los cuales la solución modal es factible. Por esta razón se presenta esta somera introducción. En general debe encontrarse la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{0\} \quad (12-64)$$

el cual tiene unas condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad: $\{U_0\}$ y $\{\dot{U}_0\}$, y deben encontrarse los valores de $\{\ddot{U}(t)\}$, $\{\dot{U}(t)\}$, y $\{U(t)\}$, para cualquier tiempo t .

Los procedimientos que se emplean son totalmente análogos a los presentados en el Capítulo 3, con la diferencia de que las operaciones son ahora matriciales. En general todos los procedimientos empleados dividen la escala del tiempo en una serie de intervalos Δt , generalmente de duración constante. Con base en los valores conocidos de las aceleraciones, las velocidades y los desplazamientos al comienzo, se estiman sus valores al final del intervalo Δt . Estos valores estimados se verifican y ajustan hasta que se cumpla el equilibrio, expresado por medio de la ecuación (12-64), con un error aceptable. Con estos nuevos valores en el tiempo $t = 1 \cdot \Delta t$, se repite el proceso para el final del intervalo que lleva a $t = 2 \cdot \Delta t$, y así sucesivamente. Dentro de los métodos empleados están el de la aceleración lineal, el método Beta de Newmark y el método Teta de Wilson, entre otros.

Tema N° 18 — Métodos numéricos para la obtención de los modos

13.1 — Introducción

En los Capítulos 10 y 11 se vio como se plantean las ecuaciones de movimiento para diferentes sistemas de varios grados de libertad y en el Capítulo 12 se presentó la solución del sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas que describen el movimiento. El método presentado, en el capítulo anterior, en la deducción de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas cumple la función de que es diáfano desde el punto de vista matemático, pero no necesariamente es el más eficiente desde el punto de vista numérico o algorítmico. Existen numerosos métodos para determinar los modos y frecuencias de un sistema dinámico, referencias [Akivis y Goldberg, 1972], [Bathe y Wilson, 1976], [Bathe, 1982, 1996], [Bradley, 1975], [Carnahan, Luther, y Wilkes, 1969], [Crandall, 1956], [Deif, 1982], [Faddeeva, 1959], [Fröberg, 1965], [Hammiong, 1962], [Hildebrand, 1974], [James, Smith, y Wolford, 1985], [Jennings y McKeown, 1992], [Jensen y Rowland, 1975], [Kreyszig, 1993], [Marcus y Minc, 1965], [Mostrow y Sampson, 1969], [Nicholson, 1986], [Shilov, 1977], y [Strang, 1988] entre otras. A continuación se hace una descripción de los métodos más utilizados y se discuten sus ventajas y desventajas.

13.2 — Método directo

Corresponde al método presentado en la Sección 12.2. En resumen el procedimiento consiste en resolver el problema de valores propios dado por la ecuación (12-10), la cual se repite aquí por comodidad:

$$[[\mathbf{K}] - \omega_i^2 [\mathbf{M}]] \{\phi^{(i)}\} = \{0\} \quad (13-1)$$

Este sistema de ecuaciones simultáneas tiene una solución no trivial cuando el determinante de los coeficientes del sistema es igual a cero, tal como lo indicó en la ecuación (12-11):

$$\Delta = |[\mathbf{K}] - \omega_i^2 [\mathbf{M}]| = 0 \quad (13-2)$$

Expandiendo este determinante obtenemos la ecuación característica del sistema o ecuación de frecuencias. Esta ecuación es un polinomio de grado $2n$, con potencias pares únicamente, donde n es el número de grados de libertad del sistema. Las raíces del polinomio son las frecuencias naturales del sistema, elevadas al cuadrado. Por lo tanto la ecuación característica tiene la forma:

$$\omega^{2n} + a_1 \omega^{2(n-1)} + a_2 \omega^{2(n-2)} + \dots + a_{n-1} \omega^2 + a_n = 0 \quad (13-3)$$

Esta ecuación tiene n raíces. Un método clásico para determinar las raíces es el método de Newton-Rampson (Véanse las referencias [Carnahan, Luther y Wilkes, 1969], [Crandall, 1956], [Faddeeva, 1959] y [Jennings y McKeown, 1992], entre otras). La determinación del polinomio en si no es una tarea fácil pues implica expandir un determinante de grado n . Existen varios métodos para realizar esta labor como el método de Hessenberg, [Crandall, 1956], o el de los coeficientes de Newton, [Fröberg, 1965].

Una vez se determinan las frecuencias, debe resolverse el sistema de ecuaciones simultáneas, implícito en la ecuación (13-2). Dando un valor a cualquiera de los términos del modo, se reduce a un sistema de $n-1$ ecuaciones. En el ejemplo 12-1 se aplicó esta metodología para resolver el problema de valores propios.

13.4 — Método de Jacobi

El método de Jacobi se debe al matemático alemán Carlos Gustavo Jacobi (1804-1851). El método de solución del problema de valores propios consiste en realizar rotaciones sucesivas hasta lograr

diagonalizar la matriz $[A]$ cuyos valores y vectores propios se desea obtener. En este caso el problema de valores propios se formula de la siguiente manera:

$$[A][\Phi] = [\Phi][\omega^2] \quad (13-31)$$

Donde la matriz $[A]$ es una matriz simétrica y $[\omega^2]$ es una matriz diagonal. Si premultiplicamos por $[\Phi]^T$ la ecuación anterior obtenemos:

$$[\Phi]^T[A][\Phi] = [\omega^2] \quad (13-32)$$

dado que hemos normalizado los modos de tal manera que:

$$[\Phi]^T[\Phi] = [I] \quad (13-33)$$

El método de Jacobi consiste en determinar la matriz $[\Phi]$ que diagonaliza la matriz $[A]$. Para lograr esto se debe seleccionar una secuencia de productos de matrices $[T_i]$ que operan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [A] &= [A_0] \\ [T_1]^T[A_0][T_1] &= [A_1] \\ [T_2]^T[A_1][T_2] &= [A_2] \\ &\vdots \\ [T_r]^T[A_{r-1}][T_r] &= [A_r] \end{aligned} \quad (13-34)$$

Por lo tanto la secuencia:

$$[T_r]^T \cdots [T_2]^T [T_1]^T [A] [T_1] [T_2] \cdots [T_r] = [A_r] \quad (13-35)$$

y si las matrices de transformación se seleccionan adecuadamente:

$$[T_1][T_2] \cdots [T_r] = [\Phi] \quad (13-36)$$

y

$$[A_r] = [\omega^2] \quad (13-37)$$

La matriz $[T_i]$ debe tener la siguiente forma:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\mathbf{i} & \mathbf{j} \\
\downarrow & \downarrow
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\left[\mathbf{T}_i \right] = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & \ddots & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & c & 0 & \dots & 0 & -s & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & s & 0 & \dots & 0 & c & 0 & 0 \\
& & & & & & & & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\leftarrow \mathbf{i} \\
\leftarrow \mathbf{j}
\end{array}
\end{array}
\quad (13-38)$$

Esta transformación convierte en ceros los dos términos a_{ij} y a_{ji} cuando se utilizan los siguientes valores:

$$t = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj} - \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}} \quad (13-39)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad (13-40)$$

y

$$s = tc \quad (13-41)$$

En realidad $c = \cos \theta$ y $s = \sin \theta$. Entonces $[\mathbf{T}_i]$ puede considerarse como una rotación con un ángulo θ de los ejes del sistema de coordenadas en el plano \mathbf{i} - \mathbf{j} . Esta rotación es ortogonal, pues la transpuesta de $[\mathbf{T}_i]$ es su inversa. La transformación se realiza con todos los elementos de $[\mathbf{A}]$ que no sean cero ni pertenezcan a la diagonal.

Existen dos procedimientos para realizar estas operaciones, el primero consiste en escoger el elemento más grande de los términos que no pertenecen a la diagonal e irlos convirtiendo en cero uno a uno, el otro procedimiento consiste en barrer sistemáticamente todas las filas del triángulo superior de la matriz. Debe tenerse en cuenta que al realizar una transformación que convierte en cero los dos términos simétricos de fuera de la diagonal, se afectan todos los términos de la matriz que pertenezcan a las filas \mathbf{i} y \mathbf{j} , por lo tanto no es suficiente el transformar todos los términos una sola vez, pues cada rotación afecta términos que ya se habían convertido en ceros. No obstante cada vez estos términos son menores y por lo tanto hay necesidad de transformar varias veces el mismo término hasta hacerlo muy pequeño.

El método tiene la limitación de que sólo se puede emplear en matrices simétricas, por lo tanto en nuestro caso en que debemos resolver el siguiente problema de valores propios:

$$[\mathbf{K}][\Phi] = [\mathbf{M}][\Phi][\omega^2] \quad (13-42)$$

si premultiplicamos por $[\mathbf{M}]^{-1}$ obtenemos:

$$[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}][\Phi] = [\Phi][\omega^2] \quad (13-43)$$

pero la matriz $[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]$ no es simétrica, por esta razón debe utilizarse el procedimiento que se presenta a continuación. Primero debemos resolver el siguiente problema de valores propios:

$$[\mathbf{M}][\mathbf{Y}] = [\boldsymbol{\mu}][\mathbf{Y}] \quad (13-44)$$

el cual diagonaliza la matriz $[\mathbf{M}]$. En este caso podemos aplicar el método de Jacobi dado que $[\mathbf{M}]$ es simétrica. La matriz $[\boldsymbol{\mu}]$ es diagonal y corresponde a los valores propios del sistema de la ecuación (13-44). Los vectores propios están normalizados de tal manera que:

$$[\mathbf{Y}]^T [\mathbf{Y}] = [\mathbf{I}] \quad (13-45)$$

Ahora si definimos la raíz cuadrada de una matriz como:

$$[\mathbf{M}]^{1/2} [\mathbf{M}]^{1/2} = [\mathbf{M}] \quad (13-46)$$

Dado que se conozcan los vectores y valores propios de una matriz, la siguiente operación es válida:

$$[\mathbf{M}]^{1/2} = [\mathbf{Y}][\boldsymbol{\mu}]^{1/2} [\mathbf{Y}]^T \quad (13-47)$$

y dado que $[\boldsymbol{\mu}]$ es diagonal, entonces:

$$[\boldsymbol{\mu}]^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\mu_i} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \sqrt{\mu_n} \end{bmatrix} = [\sqrt{\boldsymbol{\mu}}] \quad (13-48)$$

Además, las siguientes operaciones son igualmente válidas:

$$[\mathbf{M}]^{-1/2} = [\mathbf{Y}] \left[\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\mu}}} \right] [\mathbf{Y}]^T \quad (13-49)$$

$$[\mathbf{M}]^2 = [\mathbf{Y}][\boldsymbol{\mu}^2][\mathbf{Y}]^T \quad (13-50)$$

$$[\mathbf{M}]^{-1} = [\mathbf{Y}] \left[\frac{1}{\boldsymbol{\mu}} \right] [\mathbf{Y}]^T \quad (13-51)$$

Ahora reemplazando $[\mathbf{M}]$ por $[\mathbf{M}]^{1/2}[\mathbf{M}]^{1/2}$ en la ecuación (13-42), obtenemos:

$$[\mathbf{K}][\boldsymbol{\Phi}] = [\mathbf{M}]^{1/2} [\mathbf{M}]^{1/2} [\boldsymbol{\Phi}][\omega^2] \quad (13-52)$$

y además podemos modificarla a:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{M}]^{-1/2} [\mathbf{M}]^{1/2} [\boldsymbol{\Phi}] = [\mathbf{M}]^{1/2} [\mathbf{M}]^{1/2} [\boldsymbol{\Phi}][\omega^2] \quad (13-53)$$

premultiplicando por $[\mathbf{M}]^{-1/2}$ y utilizando la siguiente definición:

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{M}]^{1/2} [\boldsymbol{\Phi}] \quad (13-54)$$

la ecuación (13-53) se convierte en:

$$[\mathbf{M}]^{-1/2} [\mathbf{K}] [\mathbf{M}]^{-1/2} [\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}] [\omega^2] \quad (13-55)$$

y la matriz $[\mathbf{M}]^{-1/2} [\mathbf{K}] [\mathbf{M}]^{-1/2}$ si es simétrica y por lo tanto podemos aplicar el método de Jacobi. Después de resolver el sistema los modos se obtienen de:

$$[\Phi] = [\mathbf{M}]^{-1/2} [\mathbf{Z}] \quad (13-56)$$

Ejemplo 13-3

Deben calcularse los modos y frecuencias del sistema del ejemplo 12-1 utilizando el método de Jacobi. Fijando $\mathbf{k} = \mathbf{m} = 1$, obtenemos:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora:

$$[\mathbf{M}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

y podemos ver que $[\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{K}]$ no es simétrica

$$[\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto no se puede resolver directamente por el método de Jacobi y debemos recurrir a la transformación presentada en la ecuación (13-55).

Primero resolvemos el problema de valores propios de la matriz de masa sola, tal como lo plantea la ecuación (13-44). Es evidente que dado que la matriz $[\mathbf{M}]$ es diagonal, entonces:

$$[\mu] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

y

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$[\mathbf{M}]^{-1/2} = [\mathbf{Y}] [\mu^{-1/2}] [\mathbf{Y}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

y

$$[A_0] = [M]^{-1/2} [K] [M]^{-1/2} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -0.7071 & 0 \\ \hline -0.7071 & 1 & -0.5 \\ \hline 0 & -0.5 & 1 \end{array} \right]$$

la cual podemos ver que si es una matriz simétrica.

Ahora debemos resolver el problema de valores propios planteado por medio de la ecuación (13-55). Esto lo hacemos aplicando sucesivamente el método de Jacobi a los términos de fuera de la diagonal. Para el término de la primera fila, segunda columna de $[A_0]$ tenemos:

$$t = \frac{2(-0.7071)}{1 - 1 - \sqrt{(1-1)^2 + 4(-0.7071)^2}} = 1$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + (1)^2}} = 0.7071$$

$$s = 1(0.7071) = 0.7071$$

y por lo tanto la matriz $[T_1]$ es:

$$[T_1] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ \hline 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

y

$$[A_1] = [T_1]^T [A_0] [T_1] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0.2929 & 0 & -0.35355 \\ \hline 0 & 1.7071 & -0.35355 \\ \hline -0.35355 & -0.35355 & 1 \end{array} \right]$$

Ahora para el término de la primera fila, tercera columna de $[A_1]$ obtenemos:

$$t = \frac{2(-0.35355)}{0.2929 - 1 - \sqrt{(0.2929 - 1)^2 + 4(-0.35355)^2}} = 0.414214$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + (0.414214)^2}} = 0.9238795$$

$$s = 0.414214(0.9238795) = 0.38268384$$

y por lo tanto la matriz $[T_2]$ es:

$$[T_2] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0.9238795 & 0 & -0.38268384 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0.38268384 & 0 & 0.9238795 \end{array} \right]$$

y

$$[A_2] = [T_2]^T [A_1] [T_2] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0.14646 & -0.13530 & 0 \\ \hline -0.13530 & 1.7071 & -0.32665 \\ \hline 0 & -0.32665 & 1.14646 \end{array} \right]$$

y ahora para el término de la segunda fila, tercera columna de $[A_2]$ obtenemos:

$$t = \frac{2(-0.32665)}{1.7071 - 1.14646 - \sqrt{(1.7071 - 1.14646)^2 + 4(-0.32665)^2}} = 2.1758091$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + (2.1758091)^2}} = 0.417605$$

$$s = 0.417605(2.1758091) = 0.9086287$$

y por lo tanto la matriz $[T_3]$ es:

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.417605 & -0.9086287 \\ 0 & 0.9086287 & 0.417605 \end{bmatrix}$$

y

$$[A_3] = [T_3]^T [A_2] [T_3] = \begin{bmatrix} 0.14646 & -0.056498 & 0.12294 \\ -0.056498 & 0.99632 & 0 \\ 0.12294 & 0 & 1.8571 \end{bmatrix}$$

con lo cual hemos realizado el primer ciclo de rotaciones. Como puede verse la matriz tiene términos fuera de la diagonal menores que los iniciales, pero se hace necesario realizar rotaciones adicionales hasta obtener números fuera de la diagonal suficientemente pequeños. Después de realizar varios ciclos de rotaciones adicionales, la matriz $[A]$ se ha convertido en:

$$[A_n] = [\omega^2] = \begin{bmatrix} 0.13398 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8657 \end{bmatrix}$$

y el producto acumulado de las matrices $[T_i]$ es:

$$[Z] = [T_1][T_2] \cdots [T_n] = \begin{bmatrix} 0.57735 & -0.57735 & 0.57735 \\ 0.70711 & 0 & -0.70711 \\ 0.40825 & 0.81650 & 0.40825 \end{bmatrix}$$

y los modos se obtienen de:

$$[\Phi] = [M]^{-1/2} [Z] = \begin{bmatrix} 0.57735 & -0.57735 & 0.57735 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0.28868 & 0.57735 & 0.28868 \end{bmatrix}$$

lo cual corresponde a los modos del sistema, normalizados como $[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$.

■

En el material que se suministra se ha incluido el programa **JACOBI** que realiza el cálculo de los modos y frecuencias utilizando el método de Jacobi para sistemas con matriz de masa diagonal. El mismo programa se puede utilizar para matrices de masa no diagonales, usándolo primero para la matriz de masas y luego para la matriz dinámica calculada de acuerdo con la ecuación (13-55).

13.5 — Método de iteración en un subespacio

Este procedimiento, también conocido como método de Wilson [Bathe y Wilson, 1976], pues fue planteado por el Profesor E. L. Wilson, permite calcular los primeros modos de un sistema, sin necesidad de calcular la totalidad de ellos. Su aplicación por lo tanto es de gran utilidad cuando debemos encontrar

los modos de un sistema muy grande en el cual la influencia de los modos altos en la respuesta no es muy grande. En esencia el método consiste en lo siguiente. Para un problema de valores propios del tipo:

$$[\mathbf{K}][\Phi] = [\mathbf{M}][\Phi][\omega^2] \quad (13-57)$$

de dimensiones \mathbf{n} por \mathbf{n} y del cual tan solo queremos obtener los \mathbf{p} primeros modos, donde $\mathbf{p} < \mathbf{n}$. Para obtener una convergencia más rápida, tomamos \mathbf{q} modos, donde $\mathbf{q} < \mathbf{p}$. Primero suponemos una matriz $[\mathbf{V}_0]$ que tiene dimensiones \mathbf{n} por \mathbf{q} . Ahora buscamos una matriz $[\mathbf{V}_1]$ donde:

$$[\mathbf{V}_1] = [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{M}][\mathbf{V}_0] \quad (13-58)$$

Luego calculamos:

$$[\kappa_1] = [\mathbf{V}_1]^T [\mathbf{K}][\mathbf{V}_1] \quad (13-59)$$

y

$$[\mu_1] = [\mathbf{V}_1]^T [\mathbf{M}][\mathbf{V}_1] \quad (13-60)$$

donde tanto $[\kappa_1]$ y $[\mu_1]$ tienen dimensiones \mathbf{q} por \mathbf{q} . Ahora resolvemos el problema de valores propios:

$$[\kappa_1][\rho_1] = [\mu_1][\rho_1][\Omega_1^2] \quad (13-61)$$

para lo cual utilizamos el método de Jacobi y así obtenemos la matriz de vectores propios $[\rho_1]$ de dimensiones \mathbf{q} por \mathbf{q} . Ahora calculamos la matriz $[\mathbf{V}_2]$ por medio de:

$$[\mathbf{V}_2] = [\mathbf{V}_1][\rho_1] \quad (13-62)$$

Este proceso se repite hasta que no haya variación en la matriz de transformación $[\mathbf{V}_k]$ entre una iteración y la siguiente. En este momento

$$[\mathbf{V}_k] = [\Phi] \text{ y } [\Omega^2] = [\omega^2] \quad (13-63)$$

La convergencia del método es sensitiva a la selección de la primera matriz de transformación $[\mathbf{V}_0]$. En la referencia [Bathe, 1982] se presenta el método detalladamente e inclusive se encuentra un programa de computador que realiza las operaciones necesarias.

13.6 — Cociente de Rayleigh

Supongamos que tenemos un problema de valores propios del tipo:

$$[\mathbf{K}]\{\phi^{(i)}\} = \omega_i^2 [\mathbf{M}]\{\phi^{(i)}\} \quad (13-64)$$

Al premultiplicar por $\{\phi^{(i)}\}^T$ obtenemos:

$$\{\phi^{(i)}\}^T [\mathbf{K}]\{\phi^{(i)}\} = \omega_i^2 \{\phi^{(i)}\}^T [\mathbf{M}]\{\phi^{(i)}\} \quad (13-65)$$

y

$$\omega_i^2 = \frac{\{\phi^{(i)}\}^T [\mathbf{K}]\{\phi^{(i)}\}}{\{\phi^{(i)}\}^T [\mathbf{M}]\{\phi^{(i)}\}} = \mathbf{R} \quad (13-66)$$

Esta última ecuación es lo que conoce como el cociente de Rayleigh. Ahora si suponemos un vector $\{q\}$ que sea una combinación lineal de todos los modos:

$$\{q\} = \sum_{i=1}^n a_i \{\phi^{(i)}\} \quad (13-67)$$

Al reemplazar este último vector en la ecuación (13-66) obtenemos:

$$R = \omega^2 = \frac{\omega_1^2 a_1^2 + \omega_2^2 a_2^2 + \dots + \omega_n^2 a_n^2}{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \quad (13-68)$$

Ahora al hacer todos los a_i iguales a cero excepto uno, obtenemos:

$$R = \frac{\omega_j^2 a_j^2}{a_j^2} = \omega_j^2 \quad (13-69)$$

Si la ecuación (13-68) la factorizamos de la siguiente manera:

$$R = \frac{\omega_1^2 (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} + \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2) a_2^2 + (\omega_3^2 - \omega_1^2) a_3^2 + \dots + (\omega_n^2 - \omega_1^2) a_n^2}{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \quad (13-70)$$

dado que los valores de ω_i^2 se ordenan de menor a mayor, tenemos:

$$R = \omega_1^2 + \Delta \quad (13-71)$$

y Δ siempre será positiva. Por lo tanto siempre el cociente Rayleigh calculado para cualquier vector:

$$R \geq \omega_1^2 \quad (13-72)$$

Si realizamos la misma factorización de la ecuación (13-70), pero para ω_n^2 , podemos probar que:

$$R \leq \omega_n^2 \quad (13-73)$$

y además que:

$$\omega_1^2 \leq R \leq \omega_n^2 \quad (13-74)$$

Esto quiere decir que no importa que vector se introduce como modo en el cociente de Rayleigh, la frecuencia que se obtiene está dentro del rango de frecuencias posibles del sistema. En la medida que el vector que se introduzca al cociente de Rayleigh se acerque a un vector modal real, la frecuencia será cercana al valor de la frecuencia asociada con el modo.

Este procedimiento es utilizado por los códigos de diseño sismo resistente para obtener el período fundamental de vibración de una estructura. Está basado en que se dispone de una buena aproximación a las fuerzas horizontales inerciales que tendría la estructura al vibrar en el modo de vibración fundamental, o primer modo. En general el método de la fuerza horizontal equivalente, prescrito por la mayoría de los códigos de diseño sismo resistente, permite determinar el vector de fuerzas inerciales correspondientes al primer modo $\{f\}$, cuyos términos f_i , corresponden a cada uno de los pisos i en los cuales se genera la fuerza inercial correspondiente al modo fundamental en la dirección bajo estudio. Estas fuerzas se determinan en función de la masa traslacional que tiene cada piso de la edificación, m_i . En general se utiliza el peso $w_i (=m_i \times g)$ correspondiente al piso. Realizando un análisis de la estructura para las fuerzas $\{f\}$, es posible determinar las deflexiones horizontales $\{\delta\}$ de la edificación en la

dirección bajo estudio correspondientes a cada uno de los pisos, como la deflexión horizontal δ_i del piso i . Por lo tanto, se está realizando la siguiente aproximación:

$$\{\phi^{(1)}\} \cong \{\delta\} \quad (13-75)$$

Además es evidente que:

$$[K]\{\phi^{(1)}\} \cong [K]\{\delta\} = \{f\} \quad (13-76)$$

y

$$[M] = \frac{1}{g}[W] \quad (13-77)$$

donde $[W]$ es una matriz diagonal, donde sus términos corresponden al peso w_i de cada piso, y g es la aceleración de la gravedad.

Introduciendo lo indicado en las ecuaciones (13-75) a (13-77) en la ecuación (13-66), aplicada al primer modo o modo fundamental, obtenemos:

$$\omega_1^2 = \frac{\{\phi^{(1)}\}^T [K] \{\phi^{(1)}\}}{\{\phi^{(1)}\}^T [M] \{\phi^{(1)}\}} \cong \frac{\{\delta\}^T [K] \{\delta\}}{\{\delta\}^T [M] \{\delta\}} = \frac{\{\delta\}^T \{f\}}{\{\delta\}^T \frac{1}{g} [W] \{\delta\}} = \frac{g \sum_i (f_i \delta_i)}{\sum_i (w_i \delta_i^2)} \quad (13-78)$$

y convirtiendo ω_1 en $2\pi/T_1$, se obtiene la ecuación para el período fundamental que presentan los códigos de diseño sismo resistente:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (w_i \delta_i^2)}{g \sum_{i=1}^n (f_i \delta_i)}} \quad (13-79)$$

Tema N° 19 — Análisis modal contra el tiempo

14.1 — Introducción

En el Capítulo 12 se determinó la solución de la respuesta dinámica por medio del desacoplaje de las ecuaciones de movimiento. Allí se demostró que el procedimiento para obtener la respuesta en el caso de vibración libre con condiciones iniciales consistía en la superposición de la respuesta de los diferentes modos de vibración. El caso de vibración libre corresponde a la solución homogénea del sistema de ecuaciones de equilibrio dinámico. Ahora nos interesa la solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas, o sea el caso de una estructura de varios grados de libertad que está sometida a unas fuerzas que varían en el tiempo. Estamos hablando de una estructura cuyas ecuaciones de equilibrio pueden ser descritas matricialmente de la siguiente manera:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{P}(t)\} \quad (14-1)$$

Dado que podemos obtener los modos y frecuencias de la estructura para el caso de vibración libre, podemos aplicar la siguiente transformación de coordenadas:

$$\{\mathbf{x}\} = [\Phi]\{\eta\} \quad (14-2)$$

y derivando dos veces contra el tiempo:

$$\{\ddot{\mathbf{x}}\} = [\Phi]\{\ddot{\eta}\} \quad (14-3)$$

Reemplazando (14-2) y (14-3) en (14-1), y premultiplicando por $[\Phi]^T$ obtenemos:

$$\underbrace{[\Phi]^T[\mathbf{M}][\Phi]}_{[\mathbf{I}]} \{\ddot{\eta}\} + \underbrace{[\Phi]^T[\mathbf{K}][\Phi]}_{[\omega^2]} \{\eta\} = [\Phi]^T \{\mathbf{P}(t)\} \quad (14-4)$$

Donde $[\mathbf{I}]$ y $[\omega^2]$ son matrices diagonales. Lo mostrado en la ecuación (14-4) implica que se tienen n ecuaciones independientes de un grado de libertad del tipo:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \sum_{j=1}^n \left(\phi_j^{(i)} p_j(t) \right) \quad (14-5)$$

y si se aplica amortiguamiento modal:

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \sum_{j=1}^n \left(\phi_j^{(i)} p_j(t) \right) \quad (14-6)$$

Ahora estudiaremos la respuesta ante diferentes tipos de excitación, de una manera análoga, y muy ligada con lo que se presentó para sistemas de un grado de libertad en el Capítulo 2.

14.2 — Vibración forzada armónica

En este caso tenemos una excitación representada por medio de unas fuerzas que varían en el tiempo con una periodicidad constante. Se trata de una extensión a sistemas de varios grados de libertad, de lo presentado para sistemas de un grado de libertad en la Sección 2.3. A modo de ilustración, supongamos una estructura industrial que tiene equipos mecánicos que trabajan a diferentes frecuencias en sus diferentes pisos, como la mostrada en la Figura 14-1.

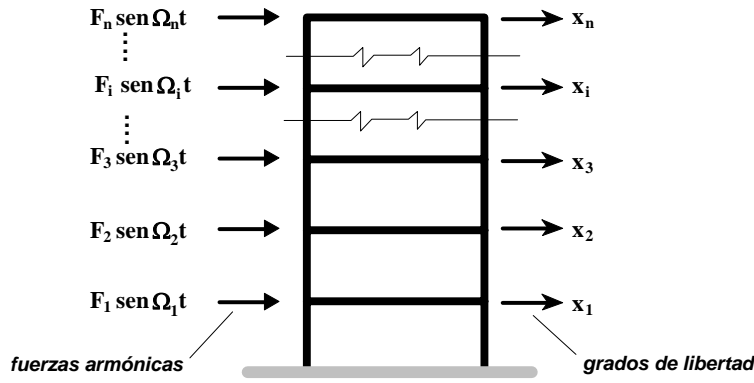


Figura 14-1 - Estructura sometida a varias fuerzas armónicas

El vector de fuerzas en el tiempo tiene la forma:

$$\{P(t)\} = \{F_i \text{ sen} \Omega_i t\} = \begin{Bmatrix} F_n \text{ sen} \Omega_n t \\ \vdots \\ F_2 \text{ sen} \Omega_2 t \\ F_1 \text{ sen} \Omega_1 t \end{Bmatrix} \quad (14-7)$$

donde F_i corresponde a la amplitud de la fuerza armónica que se impone en el grado de libertad i , y Ω_i es la frecuencia, en radianes por segundo de esta fuerza armónica. Al desacoplar el sistema, como se indica en la ecuación (14-4); se llega a n ecuaciones desacopladas de acuerdo con lo planteado en la ecuación (14-6):

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \sum_{j=1}^n \left(\phi_j^{(i)} F_j \text{ sen} \Omega_j t \right) \quad (14-8)$$

La solución para el tipo de ecuación de un grado de libertad, como

$$\ddot{x} + 2\xi \omega \dot{x} + \omega^2 x = F_0 \text{ sen} \Omega t \quad (14-9)$$

según se indicó en la Sección 2.3, la solución es del tipo:

$$x(t) = \Psi \text{ sen}(\Omega t - \varphi) \quad (14-10)$$

donde:

$$\Psi = \frac{F_0 / \omega^2}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega)^2]^2 + [2\xi(\Omega/\omega)]^2}} \quad (14-11)$$

y

$$\tan \varphi = \frac{2\xi(\Omega/\omega)}{1 - (\Omega/\omega)^2} \quad (14-12)$$

La única diferencia de la ecuación (14-8) con respecto a la (14-9), es que en la primera el lado derecho es la suma de las diferentes fuerzas armónicas aplicadas a la estructura, afectada, término a término, por los valores apropiados de los modos de vibración. Como el sistema es elástico, el principio de superposición es válido, y la respuesta puede considerarse como la superposición de las diferentes respuestas. Entonces, la respuesta en el tiempo para el grado de libertad desacoplado η_i , es:

$$\eta_i(t) = \sum_{j=1}^n \left(\phi_j^{(i)} \Psi_j \text{ sen}(\Omega_j t - \varphi_j) \right) \quad (14-13)$$

donde:

$$\Psi_j = \frac{F_j/\omega_i^2}{\sqrt{[1 - (\Omega_j/\omega_i)^2]^2 + [2\xi_i(\Omega_j/\omega_i)]^2}} \quad (14-14)$$

y

$$\tan \varphi_j = \frac{2\xi_i(\Omega_j/\omega_i)}{1 - (\Omega_j/\omega_i)^2} \quad (14-15)$$

en estas ecuaciones i corresponde al índice de la ecuación desacoplada, y j al índice del grado de libertad donde se aplica la fuerza armónica. Una vez se determina η_i , los valores de los desplazamientos de los grados de libertad utilizados para plantear el equilibrio son:

$$\{x\} = [\Phi]\{\eta\} \quad (14-16)$$

Debe tenerse en cuenta el hecho de que la respuesta obtenida según el procedimiento anterior corresponde a la solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales, por lo tanto la parte correspondiente a las condiciones iniciales tanto de desplazamiento como de velocidad, deben evaluarse independientemente y superponerse a la respuesta obtenida según lo indicado anteriormente. Puede decirse que la solución particular dada es aplicable para lo que se denomina *estado invariante* (*steady state* en inglés), en el cual no existe influencia de la solución homogénea correspondiente a las condiciones iniciales. Dado lo anterior, realmente no tiene mucha importancia la definición del tiempo de inicio de la excitación en los diferentes grados de libertad, pues dado un tiempo de estudio suficientemente amplio, llegará un momento en el cual la respuesta se combina de la manera más desfavorable, por lo tanto es lícito sumar el máximo de las diferentes funciones de respuesta, para definir de esta manera un máximo posible de la respuesta total. Lo anterior conduce a que la máxima respuesta para cada uno de los grados de libertad generalizados es la suma de los valores absolutos de las amplitudes:

$$(\eta_i)_{\max} = \sum_{j=1}^n |\phi_j^{(i)} \Psi_j| \quad (14-17)$$

14.3 — Vibraciones transitorias

En el caso de que se tenga una excitación arbitraria, la solución planteada en la Sección 14.1 es la misma hasta el punto en el cual se obtienen las ecuaciones desacopladas como se indica en las ecuaciones (14-5) y (14-6). La solución de la respuesta para cada una de las ecuaciones desacopladas se realiza por medio del procedimiento descrito en la Sección 2.4 para sistemas de un grado de libertad por medio de la integral de convolución, o de Duhamel:

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}} \int_0^t \bar{P}_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \operatorname{sen} \left\{ \sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i(t - \tau) \right\} d\tau \quad (14-18)$$

donde:

$$\bar{P}_i(t) = \sum_{j=1}^n \left(\phi_j^{(i)} p_j(t) \right) \quad (14-19)$$

en estas dos ecuaciones el subíndice i hace referencia a la ecuación desacoplada correspondiente al modo i y el subíndice j al grado de libertad número j de los grados de libertad empleados para plantear el equilibrio dinámico de la estructura. En aquellos casos en que la solución de la integral de convolución sea muy elaborada matemáticamente, o las fuerzas transitorias aplicadas a la estructura no se presten para ser tratadas por medio de funciones matemáticas trascendentales, puede emplearse en la solución cualquiera de los métodos numéricos presentados en el Capítulo 3.

Ejemplo 14-2

El edificio de cuatro pisos mostrado en la Figura 14-5(a), sufre los efectos de una explosión. La onda de presión en el aire varía de la forma mostrada en la Figura 14-5(b). Tenemos interés en la respuesta de la estructura en su sentido corto en planta, como muestra la figura. El amortiguamiento para este tipo de vibraciones se estima en $\xi = 2\%$ del crítico. Todas las vigas de la estructura tienen un ancho $b = 0.40 \text{ m}$ y un alto $h = 0.50 \text{ m}$. Las columnas tienen sección cuadrada con $h = 0.40 \text{ m}$. El material de la estructura tiene un módulo de elasticidad $E = 25 \text{ GPa}$. La edificación tiene una masa de 1000 kg/m^2 .

Se supone que la onda explosiva no tiene variación en la altura y se aplica sobre el área de fachada del edificio. Por lo tanto el área aferente sobre la cual se aplica la presión en el cuarto piso es de $10 \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m} = 15 \text{ m}^2$ y para los otros pisos es de $10 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} = 30 \text{ m}^2$.

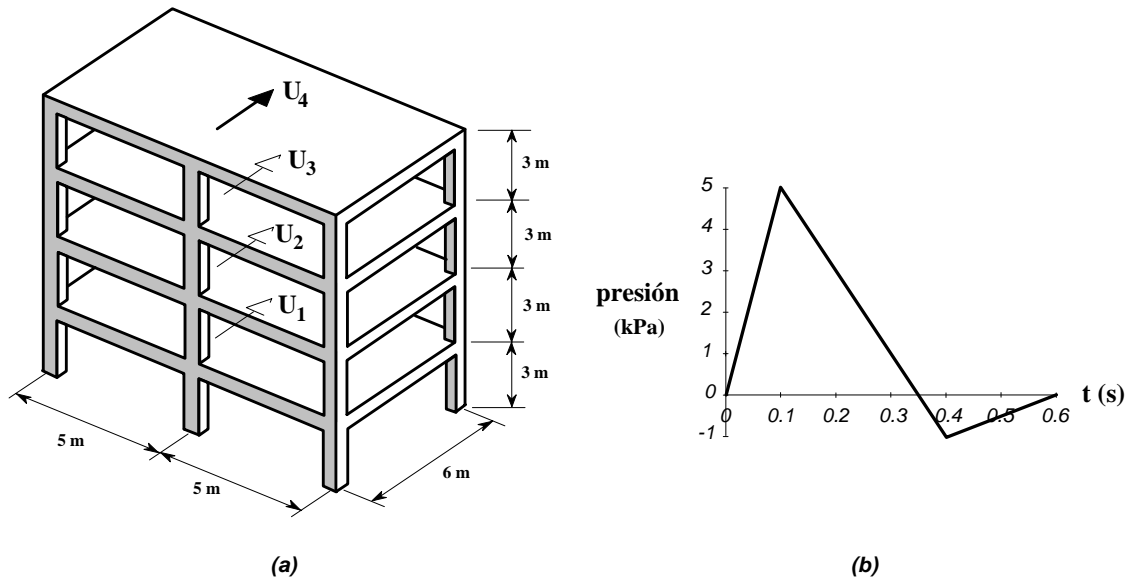


Figura 14-5 - Ejemplo 14-2

Primero determinamos las características de rigidez de la estructura en el sentido corto. Dado que los tres pórticos son iguales, se encuentra primero la matriz de rigidez para efectos laterales de uno de los pórticos y dado que el diafragma del edificio se supone infinitamente rígido en su propio plano, luego simplemente se multiplican sus términos por tres para tomar en cuenta la rigidez de los tres pórticos.

Elemento de viga:

$$L = 6 \text{ m}$$

$$E = 25 \text{ GPa} = 25000000 \text{ kPa}$$

$$A = 0.4 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m} = 0.20 \text{ m}^2$$

$$I = 0.4 \cdot 0.5^3 / 12 = 0.004167 \text{ m}^4$$

$$[K_v] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 833.33 & 0 & 0 & -833.33 & 0 & 0 \\ 0 & 5.7875 & 17.363 & 0 & -5.7875 & 17.363 \\ 0 & 17.363 & 69.450 & 0 & -17.363 & 34.725 \\ -833.33 & 0 & 0 & 833.33 & 0 & 0 \\ 0 & -5.7875 & -17.363 & 0 & 5.7875 & -17.363 \\ 0 & 17.363 & 34.725 & 0 & -17.363 & 69.450 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{ax} \\ U_{bx} \\ U_{by} \\ U_{bz} \end{matrix}$$

Elemento de columna:

$$L = 3 \text{ m}$$

$$E = 25 \text{ GPa} = 25\,000\,000 \text{ kPa}$$

$$A = 0.4 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} = 0.16 \text{ m}^2$$

$$I = 0.4^4 / 12 = 0.002133 \text{ m}^4$$

$$[K_c] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 23.700 & 0 & 35.550 & -23.700 & 0 & 35.550 \\ 0 & 1333.3 & 0 & 0 & -1333.3 & 0 \\ 35.550 & 0 & 71.100 & -35.550 & 0 & 35.550 \\ -23.700 & 0 & -35.550 & 23.700 & 0 & -35.550 \\ 0 & -1333.3 & 0 & 0 & 1333.3 & 0 \\ 35.550 & 0 & 35.550 & -35.550 & 0 & 71.100 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \\ U_{bx} \\ U_{by} \\ U_{bz} \end{matrix}$$

Después de ensamblar las rigideces de los elementos, eliminar las deformaciones axiales de las vigas, y condensar los grados de libertad verticales y rotacionales, se obtienen la siguiente matriz de rigidez de efectos horizontales del pórtico:

$$[K_{por}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 25.623 & -33.230 & 8.5278 & -1.1582 \\ -33.230 & 69.713 & -45.338 & 10.369 \\ 8.5278 & -45.338 & 73.919 & -47.371 \\ -1.1582 & 10.369 & -47.371 & 84.035 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar por tres todos los términos de la matriz anterior se obtiene la matriz de rigidez de toda la estructura en el sentido corto, la cual es, en kN/m:

$$[K_E] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 76.869 & -99.691 & 25.583 & -3.4747 \\ -99.691 & 209.14 & -136.02 & 31.108 \\ 25.583 & -136.02 & 221.76 & -142.11 \\ -3.4747 & 31.108 & -142.11 & 252.10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_4 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{matrix}$$

El área de cada una de las losas es $10 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 60 \text{ m}^2$. Por lo tanto la masa por piso es $m = 60 \text{ m}^2 \cdot 1000 \text{ kg/m}^2 = 60 \text{ Mg}$. Por lo tanto la matriz de masas es la siguiente:

$$[M] = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_4 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{matrix}$$

Las ecuaciones de equilibrio dinámico son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_4 \\ \ddot{U}_3 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_1 \end{Bmatrix} + 10^3 \times \begin{bmatrix} 76.869 & -99.691 & 25.583 & -3.4747 \\ -99.691 & 209.14 & -136.02 & 31.108 \\ 25.583 & -136.02 & 221.76 & -142.11 \\ -3.4747 & 31.108 & -142.11 & 252.10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{Bmatrix} q(t)$$

donde los términos del lado derecho corresponden al vector de áreas aferentes asignables a la presión en cada uno de los pisos, en metros cuadrados, y $\mathbf{q}(t)$ es la presión, tal como está descrita en la Figura 14-5(b). El área en metros cuadrados, multiplicada por una presión en kPa, conduce a fuerzas en kN, lo cual es consistente con las unidades que se obtienen la multiplicar masas en Mg por aceleraciones en m/s^2 , lo cual conduce a kN y rigideces en kN/m, por m, lo cual también conduce a kN.

Al resolver el problema de valores propios planteado por la anterior ecuación de equilibrio, se obtienen las siguientes frecuencias y períodos:

Modo	ω^2 (rad/s) ²	ω (rad/s)	f (Hertz)	T (s)
1	115.22	10.734	1.70838	0.58535
2	1176.5	34.300	5.45881	0.18319
3	3820.2	61.808	9.83671	0.10166
4	7552.6	86.906	13.83145	0.07229

Los modos de vibración correspondientes son:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.089374 & -0.074828 & 0.050226 & -0.023604 \\ 0.075047 & 0.014665 & -0.081059 & 0.065184 \\ 0.050937 & 0.083904 & -0.004977 & -0.083710 \\ 0.021268 & 0.061745 & 0.086883 & 0.069665 \end{bmatrix}$$

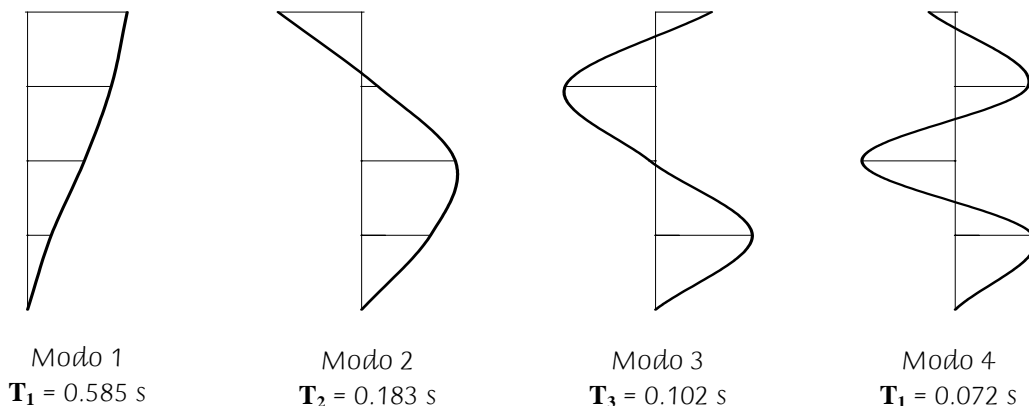


Figura 14-6 - Ejemplo 14-2 - Modos y períodos de vibración de la estructura

Utilizando en las ecuaciones de equilibrio las transformaciones de coordenadas:

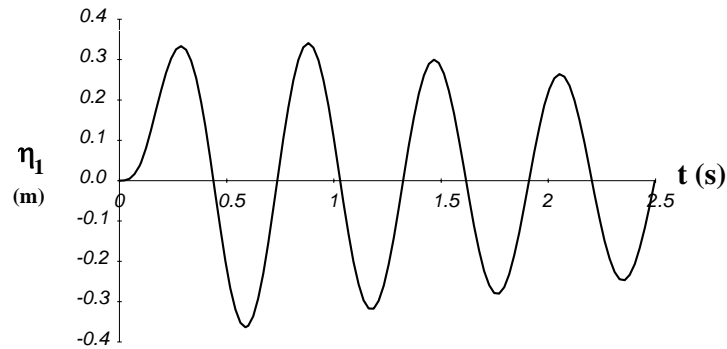
$$\{\mathbf{U}\} = [\Phi]\{\eta\} \quad \text{y} \quad \{\ddot{\mathbf{U}}\} = [\Phi]\{\ddot{\eta}\}$$

y premultiplicando ambos lados por $[\Phi]^T$, obtenemos las siguientes ecuaciones desacopladas:

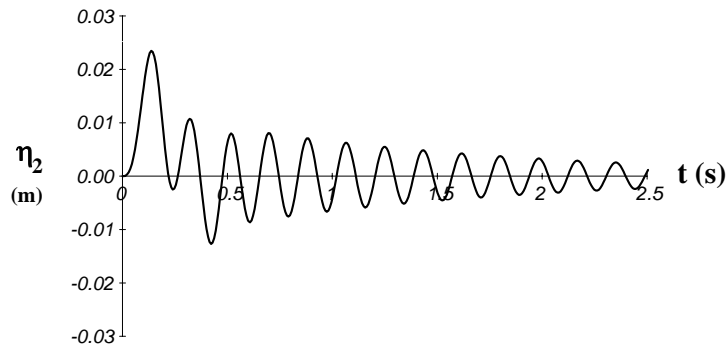
$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{\eta}_1 + \omega_1^2\eta_1 &= 5.7582q(t) \\ \ddot{\eta}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{\eta}_2 + \omega_2^2\eta_2 &= 3.6870q(t) \\ \ddot{\eta}_3 + 2\xi_3\omega_3\dot{\eta}_3 + \omega_3^2\eta_3 &= 0.77879q(t) \\ \ddot{\eta}_4 + 2\xi_4\omega_4\dot{\eta}_4 + \omega_4^2\eta_4 &= 1.1801q(t) \end{aligned}$$

En las cuatro ecuaciones $\xi_i = 0.02$. La respuesta para cada una de estas ecuaciones desacopladas, se obtiene utilizando el método Beta de Newmark. Los primeros 2.5 s de respuesta para cada una de ellas se muestra en la Figura 14-7:

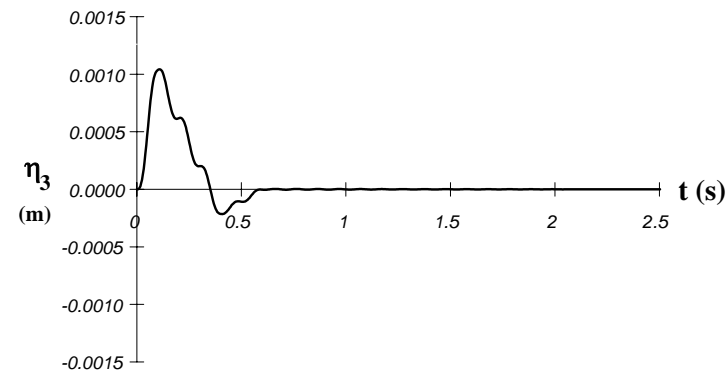
$\eta_1(t) - (T_1 = 0.585 \text{ s})$



$\eta_2(t) - (T_2 = 0.183 \text{ s})$



$\eta_3(t) - (T_3 = 0.102 \text{ s})$:



$\eta_4(t) - (T_4 = 0.072 \text{ s})$

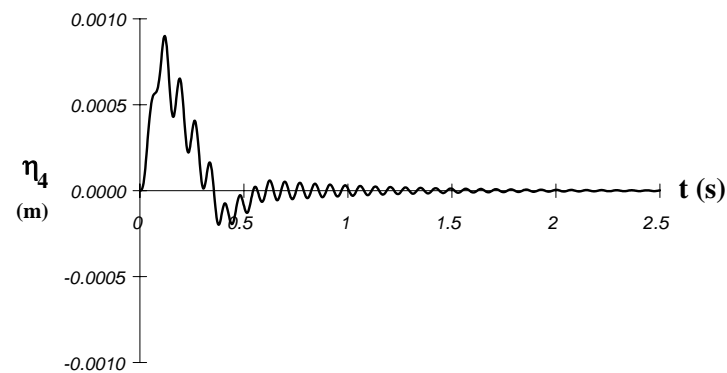


Figura 14-7 - Ejemplo 14-2 - Respuesta en el tiempo para las coordenadas desacopladas

A continuación se presenta la respuesta en algunos instantes:

t (s)	η_1 (m)	η_2 (m)	η_3 (m)	η_4 (m)
0.0000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.0234	0.000607	0.000392	0.000074	0.000097
0.0468	0.004810	0.002748	0.000425	0.000419
0.0702	0.015963	0.007780	0.000846	0.000563
0.0937	0.036972	0.014603	0.001025	0.000656
0.1000	0.044673	0.016511	0.001037	0.000724
0.1234	0.080485	0.022223	0.001025	0.000891
0.1468	0.125033	0.022946	0.000840	0.000548
0.1702	0.174003	0.017556	0.000657	0.000481
0.1937	0.222849	0.008559	0.000613	0.000648
0.2171	0.267077	0.000513	0.000612	0.000357
0.2405	0.302516	-0.002488	0.000491	0.000249
0.2639	0.325557	0.000139	0.000300	0.000406
0.2873	0.333435	0.005794	0.000206	0.000170
0.3107	0.324369	0.010167	0.000200	0.000022
0.4000	0.135337	-0.009842	-0.000213	-0.000097

Los desplazamientos de la estructura se obtienen por medio de:

$$\{\mathbf{U}\} = [\Phi]\{\eta\}$$

Por ejemplo, para el instante **t=0.2873 s**, los desplazamientos, en metros, con la contribución de cada modo, son:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.089374 & -0.074828 & 0.050226 & -0.023604 \\ 0.075047 & 0.014665 & -0.081059 & 0.065184 \\ 0.050937 & 0.083904 & -0.004977 & -0.083710 \\ 0.021268 & 0.061745 & 0.086883 & 0.069665 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.333435 \\ 0.005794 \\ 0.000206 \\ 0.000170 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} 0.089374 \\ 0.075047 \\ 0.050937 \\ 0.021268 \end{Bmatrix} \times 0.333435 + \begin{Bmatrix} -0.074828 \\ 0.014665 \\ 0.083904 \\ 0.061745 \end{Bmatrix} \times 0.005794 + \begin{Bmatrix} 0.050226 \\ -0.081059 \\ -0.004977 \\ 0.086883 \end{Bmatrix} \times 0.000206 + \begin{Bmatrix} -0.023604 \\ 0.065184 \\ -0.083710 \\ 0.069665 \end{Bmatrix} \times 0.000170 \\
 &= \begin{Bmatrix} 0.029800 \\ 0.025023 \\ 0.016984 \\ 0.007992 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.000434 \\ 0.000085 \\ 0.000486 \\ 0.000358 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0000103 \\ -0.0000167 \\ -0.0000010 \\ 0.0000179 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.0000040 \\ 0.0000111 \\ -0.0000142 \\ 0.0000118 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} 0.029373 \\ 0.025103 \\ 0.017455 \\ 0.007479 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para determinar las fuerzas que la explosión aplica a la estructura en el mismo instante se multiplica la matriz de rigidez de toda la estructura por estos desplazamientos:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}_E]\{\mathbf{U}\}$$

Esta operación puede realizarse para los desplazamientos que impone cada modo y de esa manera obtener las fuerzas provenientes de cada uno de ellos:

$$\{\mathbf{F}^{\text{mod}}\} = [\mathbf{K}_E] [\mathbf{U}^{(1)} \mid \mathbf{U}^{(2)} \mid \mathbf{U}^{(3)} \mid \mathbf{U}^{(4)}] = [\mathbf{F}^{(1)} \mid \mathbf{F}^{(2)} \mid \mathbf{F}^{(3)} \mid \mathbf{F}^{(4)}]$$

Para los siguientes desplazamientos modales, correspondientes al instante $t=0.2873$ s:

$$\{\mathbf{U}^{\text{mod}}\} = \{\mathbf{U}^{(1)} \mid \mathbf{U}^{(2)} \mid \mathbf{U}^{(3)} \mid \mathbf{U}^{(4)}\} = \begin{bmatrix} 0.029800 & -0.000434 & 0.0000103 & -0.0000040 \\ 0.025023 & 0.000085 & -0.0000167 & 0.0000111 \\ 0.016984 & 0.000486 & -0.0000010 & -0.0000142 \\ 0.007992 & 0.000358 & 0.0000179 & 0.0000118 \end{bmatrix}$$

La contribución en fuerza de cada modo, en kN, para el instante $t=0.2873$ s, es:

$$\{\mathbf{F}^{\text{mod}}\} = [\mathbf{K}_E] \{\mathbf{U}^{\text{mod}}\} = [\mathbf{F}^{(1)} \mid \mathbf{F}^{(2)} \mid \mathbf{F}^{(3)} \mid \mathbf{F}^{(4)}] = \begin{bmatrix} 206.02 & -39.60 & 2.37 & -1.82 \\ 172.99 & 6.00 & -3.83 & 5.02 \\ 117.41 & 34.32 & -0.24 & -6.45 \\ 49.03 & 25.25 & 4.10 & 5.37 \end{bmatrix}$$

y las fuerzas totales, también en kN, para el instante $t=0.2873$ s, son:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}_E] \{\mathbf{U}\} = \begin{bmatrix} 175.97 \\ 180.18 \\ 145.05 \\ 83.75 \end{bmatrix}$$

■

14.4 — Excitación en la base

Nos interesa ahora la solución de sistemas de varios grados de libertad cuando se les somete a una excitación en su base, el cual corresponde a la respuesta de una estructura que se ve sometida a un sismo. De acuerdo con lo presentado en la Sección 10.4, las ecuaciones de movimiento para un sistema sometido a una excitación en su base tienen la forma dada en la ecuación (10-23), la cual se reproduce a continuación:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = -[\mathbf{M}][\gamma]\{\ddot{\mathbf{x}}_0\} \quad (14-20)$$

Las matrices de masa $[\mathbf{M}]$ y rigidez $[\mathbf{K}]$ de la estructura se obtienen de acuerdo con lo presentado en el Capítulo 11. La obtención de la matriz $[\gamma]$ se realiza de acuerdo con lo presentado en la Sección 11.3.1(h) y su forma depende de si la estructura se ve afectada por una, dos o tres componentes del acelerograma, dependiendo de si el vector $\{\ddot{\mathbf{x}}_0\}$ tiene dimensiones 1×1 , 2×1 ó 3×1 . Casos en los cuales $[\gamma]$ tiene dimensiones $n \times 1$, $n \times 2$ ó $n \times 3$ respectivamente, siendo n el número de grados de libertad de la estructura. En la Sección 14.8 se amplían los conceptos de la obtención de la matriz $[\gamma]$.

Dado que podemos obtener los modos y frecuencias de la estructura, podemos aplicar la siguiente transformación de coordenadas:

$$\{\mathbf{U}\} = [\Phi]\{\eta\} \quad (14-21)$$

y derivando dos veces contra el tiempo:

$$\{\ddot{\mathbf{U}}\} = [\Phi]\{\ddot{\eta}\} \quad (14-22)$$

Reemplazando (14-21) y (14-22) en (14-20), y premultiplicando por $[\Phi]^T$ obtenemos:

$$\underbrace{[\Phi]^T [M] [\Phi]}_{[I]} \{\ddot{\eta}\} + \underbrace{[\Phi]^T [K] [\Phi]}_{[\omega^2]} \{\eta\} = -[\Phi]^T [M] [\gamma] \{\ddot{x}_o\} \quad (14-23)$$

Lo cual implica que se tienen n ecuaciones independientes de un grado de libertad del tipo:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = -\{\alpha_i\} \{\ddot{x}_o\} \quad (14-24)$$

y si se aplica amortiguamiento modal:

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = -\{\alpha_i\} \{\ddot{x}_o\} \quad (14-25)$$

donde $\{\alpha_i\}$ se denomina *coeficiente de participación* y corresponde a la fila i de la matriz $[\alpha]$ obtenida por medio de:

$$[\alpha] = [\Phi]^T [M] [\gamma] \quad (14-26)$$

La solución para las ecuaciones (14-24) o (14-25) se puede llevar a cabo por medio de la integral de convolución (véase la Sección 2.4.2) o por medio de algún método numérico como el método Beta de Newmark. Una vez se obtienen los valores de $\{\eta(t)\}$, para cualquier tiempo t , por medio de la ecuación (14-21) se pueden obtener los desplazamientos de la estructura para ese instante. Debe notarse que la ecuación (14-21) realiza la superposición de las respuestas individuales de cada uno de los modos:

$$\begin{aligned} \{U\} &= [\Phi] \{\eta\} = \sum_{i=1}^n \{\phi^{(i)}\} \eta_i(t) \\ &= \{\phi^{(1)}\} \eta_1(t) + \{\phi^{(2)}\} \eta_2(t) + \dots + \{\phi^{(n)}\} \eta_n(t) \\ &= \{U^{(1)}\} + \{U^{(2)}\} + \dots + \{U^{(n)}\} \end{aligned} \quad (14-27)$$

Las fuerzas dinámicas inerciales que se presentan en la estructura, correspondientes a cada modo, pueden obtenerse multiplicando los desplazamientos de cada modo por la matriz de rigidez de la estructura:

$$\{F^{(i)}\} = [K] \{U^{(i)}\} \quad (14-28)$$

Definiendo:

$$\{1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (14-29)$$

y

$$\{h\} = \begin{Bmatrix} h_n \\ h_i \\ \vdots \\ h_1 \end{Bmatrix} \quad (14-30)$$

donde h_i es la altura sobre la base de la estructura del piso i .

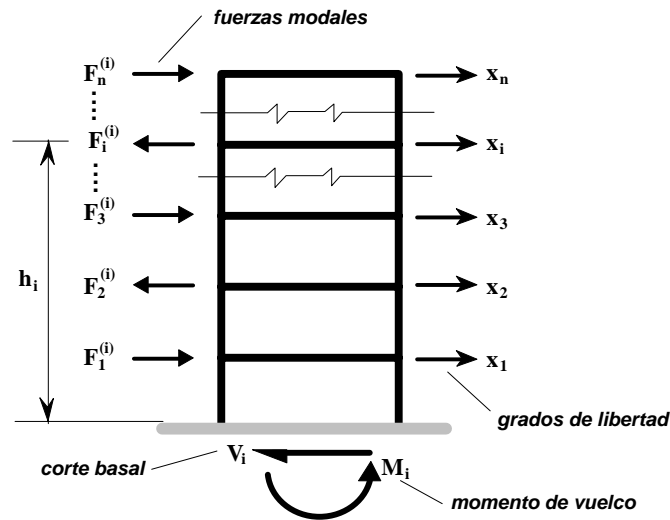


Figura 14-8 - Fuerzas modales (Modo i)

Ahora podemos definir el *corte basal* del modo i en el instante t, como:

$$\mathbf{V}_i = \{\mathbf{1}\}^T \{\mathbf{F}^{(i)}\} \quad (14-31)$$

y el *momento de vuelco* del modo i en el instante t, como:

$$\mathbf{M}_i = \{\mathbf{h}\}^T \{\mathbf{F}^{(i)}\} \quad (14-32)$$

Ahora si tomamos la definición de la matriz $[\alpha]$, dada en la ecuación (14-26) y la premultiplicamos por $[\Phi]^T$, obtenemos:

$$[\Phi]^T [\alpha] = [\Phi]^T [\Phi]^T [\mathbf{M}] [\gamma] \quad (14-33)$$

aplicando el principio de $([\mathbf{A}][\mathbf{B}])^T = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{A}]^T$ a $[\Phi]^T [\mathbf{M}]$, obtenemos $[\mathbf{M}]^T [\Phi] = [\mathbf{M}] [\Phi]$, dado que $[\mathbf{M}]$ es simétrica. Con lo cual la ecuación (14-33) se convierte en:

$$[\Phi]^T [\alpha] = [\Phi]^T [\mathbf{M}] [\Phi] [\gamma] = [\gamma] \quad (14-34)$$

La masa total de la estructura en cualquier dirección principal de los grados de libertad, corresponde a la suma de las masas aplicables en la dirección principal. La influencia de cada masa individual se expresa a través de la matriz $[\gamma]$, por lo tanto:

$$[\mathbf{M}_{\text{tot}}] = [\gamma]^T [\mathbf{M}] [\gamma] \quad (14-35)$$

y utilizando la ecuación (14-34) para reemplazar $[\gamma]$ en la ecuación anterior, obtenemos:

$$[\mathbf{M}_{\text{tot}}] = ([\Phi]^T [\alpha])^T [\mathbf{M}] [\Phi]^T [\alpha] = [\alpha]^T [\Phi] [\mathbf{M}] [\Phi]^T [\alpha] \quad (14-36)$$

y

$$[\mathbf{M}_{\text{tot}}] = [\alpha]^T [\mathbf{I}] [\alpha] = [\sum \alpha_i^2] \quad (14-37)$$

Esto quiere decir que la masa total en cada dirección principal corresponde a la suma de los cuadrados de los coeficientes de participación modal, α_i , en esa dirección. El valor de α_i^2 de cada modo se conoce con el nombre de *masa efectiva modal* y puede interpretarse como la fracción de la masa total que se

activa en ese modo al vibrar debido a la excitación en la base. Este concepto se emplea para definir el número mínimo de modos necesarios para describir la respuesta, cuando en sistemas con muchos grados de libertad la contribución de los modos superiores se hace muy pequeña.

En aquellos casos en los cuales los modos de vibración no son ortonormales, o sea que no cumplen la normalización $[\Phi]^T[M][\Phi] = [I]$, la determinación de los coeficientes de participación se logra por medio de la siguiente ecuación:

$$\alpha_i = \frac{\{\phi^{(i)}\}^T [M] \{\gamma\}}{\{\phi^{(i)}\}^T [M] \{\phi^{(i)}\}} = \frac{\sum_{j=1}^n (\phi_j^{(i)} m_j)}{\sum_{j=1}^n m_j (\phi_j^{(i)})^2} \quad (14-38)$$

y la masa efectiva modal en este caso se obtiene, para cada modo, por medio de:

$$m_{ef}^{(i)} = \frac{\left(\{\phi^{(i)}\}^T [M] \{\gamma\} \right)^2}{\{\phi^{(i)}\}^T [M] \{\phi^{(i)}\}} = \frac{\left[\sum_{j=1}^n (\phi_j^{(i)} m_j) \right]^2}{\sum_{j=1}^n m_j (\phi_j^{(i)})^2} \quad (14-39)$$

En las Secciones siguientes se presentan ejemplos de la obtención de la respuesta cronológica de la excitación en la base para sistemas con diferentes características.

14.5 — Análisis modal planar para excitación en la base

En este caso ocurre una simplificación de lo presentado en la Sección anterior, pues la matriz $[\gamma]$ corresponde a un vector $\{1\}$ dado que todos los grados de libertad de la estructura actúan colinealmente con la aceleración en la base \ddot{x}_0 .

Ejemplo 14-3

El edificio de seis pisos mostrado en la Figura 14-9 perteneciente a una instalación industrial, es sometido a los efectos de la componente N-S del temblor de El Centro, California, de Mayo 18 de 1940. Tenemos interés en la respuesta de la estructura en el sentido mostrado en la figura. El amortiguamiento para este tipo de vibraciones se estimó en $\xi = 5\%$ del crítico. Todas las vigas de la estructura tiene un ancho $b = 0.40 \text{ m}$ y un alto $h = 0.50 \text{ m}$. Las columnas tienen sección cuadrada con $h = 0.50 \text{ m}$. El material de la estructura tiene un módulo de elasticidad $E = 25 \text{ GPa}$. La estructura tiene una masa de 780 kg/m^2 , y los equipos industriales tienen una masa de 1000 kg/m^2 , para un total de 1780 kg/m^2 .

Primero determinamos las características de rigidez de la estructura en el sentido de la aceleración del terreno. Dado que se supone que las losas de entrepiso conforman un diafragma rígido en el sentido bajo estudio, y los tres pórticos en esa dirección son iguales, se encuentra primero la matriz de rigidez para efectos laterales de uno de los pórticos y dado que el diafragma del edificio se supone infinitamente rígido en su propio plano, luego simplemente se multiplican sus términos por tres para tomar en cuenta la rigidez de los tres pórticos.

Elemento de viga:

$$L = 6 \text{ m}$$

$$E = 25 \text{ GPa} = 25000000 \text{ kPa}$$

$$A = 0.4 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m} = 0.20 \text{ m}^2$$

$$I = 0.4 \cdot 0.5^3 / 12 = 0.004167 \text{ m}^4$$

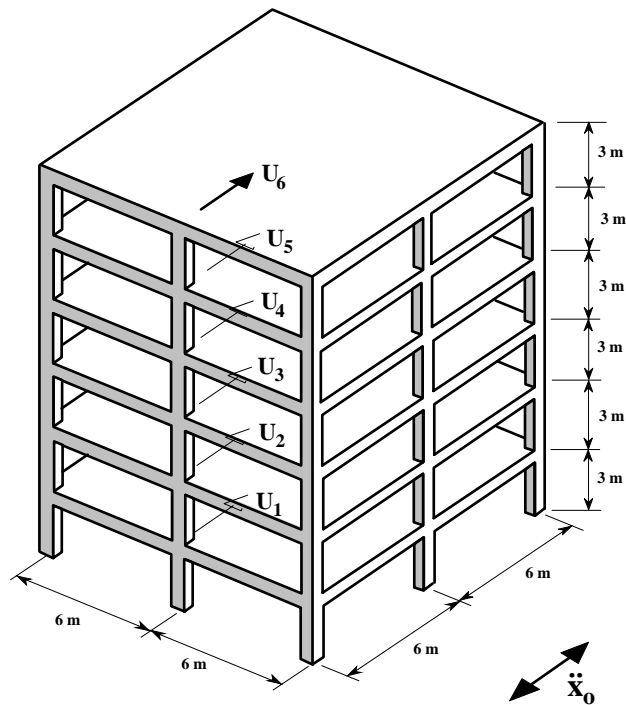


Figura 14-9 - Ejemplo 14-3

$$[K_v] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 833.33 & 0 & 0 & -833.33 & 0 & 0 \\ 0 & 5.7875 & 17.363 & 0 & -5.7875 & 17.363 \\ 0 & 17.363 & 69.450 & 0 & -17.363 & 34.725 \\ -833.33 & 0 & 0 & 833.33 & 0 & 0 \\ 0 & -5.7875 & -17.363 & 0 & 5.7875 & -17.363 \\ 0 & 17.363 & 34.725 & 0 & -17.363 & 69.450 \end{bmatrix}$$

↓gdl
 U_{ax}
 U_{ay}
 U_{ax}
 U_{bx}
 U_{by}
 U_{bz}

Elemento de columna:

$$L = 3 \text{ m}$$

$$E = 25 \text{ GPa} = 25\,000\,000 \text{ kPa}$$

$$A = 0.5 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m} = 0.25 \text{ m}^2$$

$$I = 0.5^4 / 12 = 0.005208 \text{ m}^4$$

$$[K_c] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 57.867 & 0 & 86.800 & -57.867 & 0 & 86.800 \\ 0 & 2083.3 & 0 & 0 & -2083.3 & 0 \\ 86.800 & 0 & 173.600 & -86.800 & 0 & 86.800 \\ -57.867 & 0 & -86.800 & 57.867 & 0 & -86.800 \\ 0 & -2083.3 & 0 & 0 & 2083.3 & 0 \\ 86.800 & 0 & 86.800 & -86.800 & 0 & 173.600 \end{bmatrix}$$

↓gdl
 U_{ax}
 U_{ay}
 U_{az}
 U_{bx}
 U_{by}
 U_{bz}

Después de ensamblar las rigideces de los elementos, eliminar las deformaciones axiales de las vigas, y condensar los grados de libertad verticales y rotacionales, se obtienen la siguiente matriz de rigidez de efectos horizontales del pórtico:

$$[K_{\text{por}}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 72.253 & -102.26 & 35.165 & -6.5202 & 1.4274 & -0.17029 \\ -102.26 & 222.75 & -158.38 & 45.980 & -9.7917 & 1.7952 \\ 35.165 & -158.38 & 243.79 & -164.41 & 53.199 & -9.7755 \\ -6.5202 & 45.980 & -164.41 & 249.67 & -164.82 & 48.570 \\ 1.4274 & -9.7917 & 53.199 & -164.82 & 246.04 & -171.97 \\ -0.17029 & 1.7952 & -9.7755 & 48.570 & -171.97 & 296.65 \end{bmatrix}$$

que al ser multiplicados por tres todos sus términos produce la matriz de rigidez de todos la estructura en el sentido corto, en kN/m:

$$[K_E] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 216.76 & -306.77 & 105.49 & -19.561 & 4.2822 & -0.51088 \\ -306.77 & 668.24 & -475.14 & 137.94 & -29.375 & 5.3857 \\ 105.49 & -475.14 & 731.37 & -493.23 & 159.60 & -29.327 \\ -19.561 & 137.94 & -493.23 & 749.02 & -494.47 & 145.71 \\ 4.2822 & -29.375 & 159.60 & -494.47 & 738.11 & -515.90 \\ -0.51088 & 5.3857 & -29.327 & 145.71 & -515.90 & 889.94 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_6 \\ U_5 \\ U_4 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{matrix}$$

El área de cada una de las losas es $12 \text{ m} \cdot 12 \text{ m} = 144 \text{ m}^2$. Por lo tanto la masa por piso es $m = 144 \text{ m}^2 \cdot 1780 \text{ kg/m}^2 = 256 \text{ Mg}$. Por lo tanto la matriz de masas es la siguiente:

$$[M] = \begin{bmatrix} 256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 256 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_6 \\ U_5 \\ U_4 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{matrix}$$

La matriz $[y]$ corresponde a un vector de una columna y seis filas cuyos términos son todos iguales a 1. Las ecuaciones de equilibrio dinámico de la estructura son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} 256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 256 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_6 \\ \ddot{U}_5 \\ \ddot{U}_4 \\ \ddot{U}_3 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_1 \end{Bmatrix} + 10^3 \times \begin{bmatrix} 216.76 & -306.77 & 105.49 & -19.561 & 4.2822 & -0.51088 \\ -306.77 & 668.24 & -475.14 & 137.94 & -29.375 & 5.3857 \\ 105.49 & -475.14 & 731.37 & -493.23 & 159.60 & -29.327 \\ -19.561 & 137.94 & -493.23 & 749.02 & -494.47 & 145.71 \\ 4.2822 & -29.375 & 159.60 & -494.47 & 738.11 & -515.90 \\ -0.51088 & 5.3857 & -29.327 & 145.71 & -515.90 & 889.94 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_6 \\ U_5 \\ U_4 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{Bmatrix} = -[M] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{x}_0$$

Al resolver el problema de valores propios planteado por la anterior ecuación de equilibrio, se obtienen las siguientes frecuencias y períodos:

Modo	ω^2 (rad/s) ²	ω (rad/s)	f (Hertz)	T (s)
1	29.108	5.3952	0.85866	1.1646
2	301.81	17.373	2.76495	0.3616
3	973.78	31.205	4.96647	0.2013
4	2494.3	49.943	7.94849	0.1258
5	4686.5	68.458	10.89550	0.0918
6	7113.8	84.344	13.42372	0.0745

Los modos de vibración correspondientes son:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.036721 & -0.032775 & 0.029168 & -0.020667 & 0.013049 & -0.005955 \\ 0.033690 & -0.011592 & -0.014245 & 0.032483 & -0.032188 & 0.018512 \\ 0.028524 & 0.014524 & -0.034529 & 0.005317 & 0.028533 & -0.029103 \\ 0.020961 & 0.033322 & -0.005049 & -0.034504 & -0.003317 & 0.033609 \\ 0.012243 & 0.033525 & 0.031633 & 0.006893 & -0.024392 & -0.031454 \\ 0.004460 & 0.015888 & 0.025184 & 0.034025 & 0.035774 & 0.023711 \end{bmatrix}$$

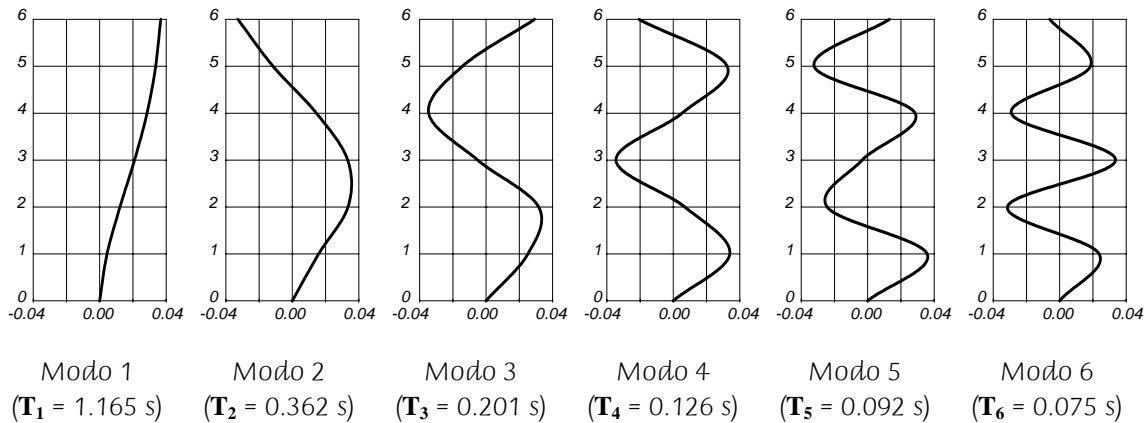


Figura 14-10 - Ejemplo 14-3 - Modos y períodos de vibración de la estructura

Utilizando en las ecuaciones de equilibrio las transformaciones de coordenadas:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\} \quad \text{y} \quad \{\ddot{U}\} = [\Phi]\{\ddot{\eta}\}$$

y premultiplicando ambos lados por $[\Phi]^T$, obtenemos las siguientes ecuaciones desacopladas, en las cuales los coeficientes de participación se calcularon como:

$$\{\alpha\} = [\Phi]^T [M] [\gamma] = \begin{bmatrix} 34.970 \\ 13.540 \\ 8.2331 \\ 6.0279 \\ 4.4695 \\ 2.3861 \end{bmatrix}$$

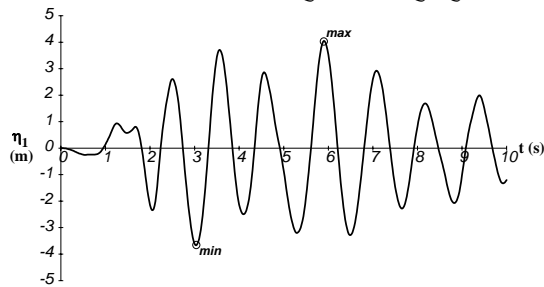
La masa modal efectiva se calcula como α_i^2

Modo	α_i	α_i^2	%M _{tot}	%M _{tot Acum.}
1	34.970	1222.901	79.62%	79.62%
2	13.540	183.332	11.93%	91.55%
3	8.2331	67.784	4.41%	95.96%
4	6.0279	36.336	2.37%	98.33%
5	4.4695	19.976	1.30%	99.63%
6	2.3861	5.693	0.37%	100.00%

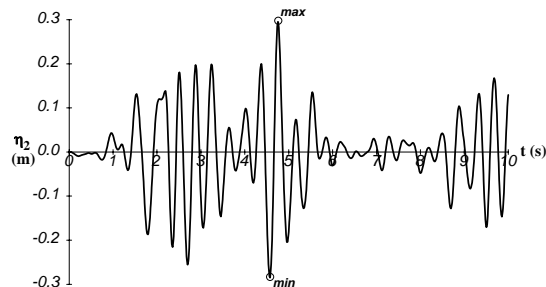
Las ecuaciones desacopladas son:

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{\eta}_1 + \omega_1^2\eta_1 &= -34.970\ddot{x}_0 \\ \ddot{\eta}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{\eta}_2 + \omega_2^2\eta_2 &= -13.540\ddot{x}_0 \\ \ddot{\eta}_3 + 2\xi_3\omega_3\dot{\eta}_3 + \omega_3^2\eta_3 &= -8.2331\ddot{x}_0 \\ \ddot{\eta}_4 + 2\xi_4\omega_4\dot{\eta}_4 + \omega_4^2\eta_4 &= -6.0279\ddot{x}_0 \\ \ddot{\eta}_5 + 2\xi_5\omega_5\dot{\eta}_5 + \omega_5^2\eta_5 &= -4.4695\ddot{x}_0 \\ \ddot{\eta}_6 + 2\xi_6\omega_6\dot{\eta}_6 + \omega_6^2\eta_6 &= -2.3861\ddot{x}_0\end{aligned}$$

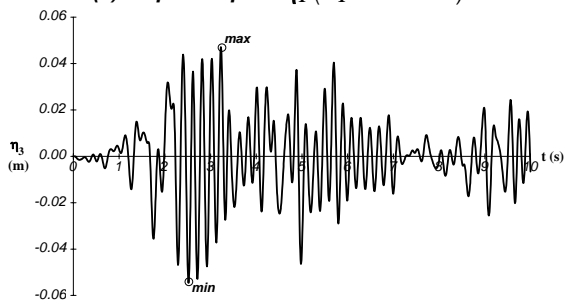
En las seis ecuaciones $\xi_i = 0.05$. La respuesta para cada una de estas ecuaciones desacopladas, se obtiene utilizando el método Beta de Newmark. Los primeros 10 s de respuesta para cada una de ellas se muestra en los siguientes gráficos:



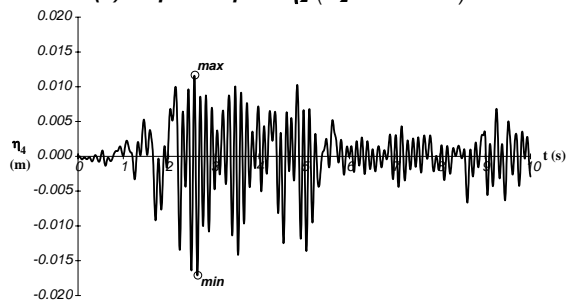
(a) respuesta para η_1 ($T_1 = 1.165$ s)



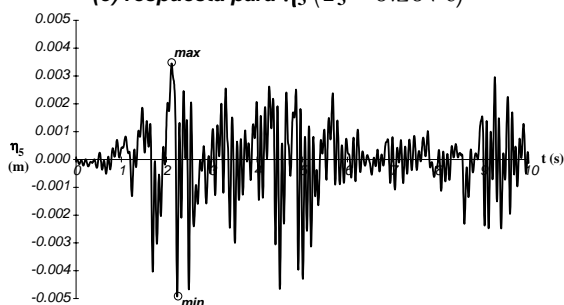
(b) respuesta para η_2 ($T_2 = 0.362$ s)



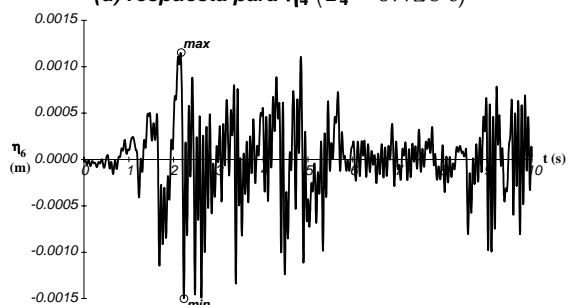
(c) respuesta para η_3 ($T_3 = 0.201$ s)



(d) respuesta para η_4 ($T_4 = 0.126$ s)



(e) respuesta para η_5 ($T_5 = 0.092$ s)



(f) respuesta para η_6 ($T_6 = 0.075$ s)

Figura 14-11 - Ejemplo 14-3 - Respuesta de las coordenadas desacopladas

A continuación se presenta la respuesta en algunos instantes, donde ocurren los máximos de las respuestas individuales en los primeros 10 s:

t (s)	η₁ (m)	η₂ (m)	η₃ (m)	η₄ (m)	η₅ (m)	η₆ (m)
2.12	-2.005521	0.120653	0.022884	0.007405	0.003448	0.001047
2.16	-1.454167	0.131596	0.020979	0.009887	0.002831	0.001150
2.22	-0.313056	0.115723	0.009855	-0.005804	-0.002937	-0.001495
2.24	0.044580	0.071039	-0.010748	-0.012843	-0.004919	-0.001187
2.52	2.597408	0.177460	-0.054570	-0.012759	-0.000935	0.000215
2.58	2.305620	0.044364	0.008234	0.010581	-0.001491	0.000439
2.64	1.678734	-0.155214	0.022238	-0.017115	-0.001112	-0.000662
3.04	-3.664644	-0.169206	0.038901	-0.001547	0.000665	0.000280
3.08	-3.545856	-0.153292	-0.001900	0.003579	-0.001228	-0.000357
3.22	-1.871672	0.183567	0.047073	0.005055	0.001766	0.000137
4.58	2.840147	-0.284971	-0.010291	-0.001032	-0.001448	-0.000172
4.76	1.448789	0.295191	-0.005745	-0.002603	0.000228	0.000605
5.90	4.049463	0.020068	0.022552	-0.001531	-0.000257	-0.000036
max	4.049463	0.295191	0.047073	0.010581	0.003448	0.001150
min	-3.664644	-0.284971	-0.054570	-0.017115	-0.004919	-0.001495

Los desplazamientos causados por cada modo, para cualquier tiempo **t**, se obtienen de:

$$\{U^{(i)}\} = \{\phi^{(i)}\} \eta_i(t)$$

y los desplazamientos de la estructura para el mismo instante **t**, se obtienen como la suma de las contribuciones de todos los modos, por medio de:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta(t)\}$$

Por ejemplo, para el instante **t = 3.08 s**, los desplazamientos, en metros, con la contribución de cada modo, son:

$$\begin{aligned}
 \{U\} = [\Phi]\{\eta\} &= \begin{bmatrix} 0.036721 & -0.032775 & 0.029168 & -0.020667 & 0.013049 & -0.005955 \\ 0.033690 & -0.011592 & -0.014245 & 0.032483 & -0.032188 & 0.018512 \\ 0.028524 & 0.014524 & -0.034529 & 0.005317 & 0.028533 & -0.029103 \\ 0.020961 & 0.033322 & -0.005049 & -0.034504 & -0.003317 & 0.033609 \\ 0.012243 & 0.033525 & 0.031633 & 0.006893 & -0.024392 & -0.031454 \\ 0.004460 & 0.015888 & 0.025184 & 0.034025 & 0.035774 & 0.023711 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3.5459 \\ -0.15329 \\ -0.001903 \\ 0.0035796 \\ -0.0012279 \\ -0.00035675 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} -0.130210 \\ -0.119460 \\ -0.101140 \\ -0.074326 \\ -0.043414 \\ -0.015815 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0050242 \\ 0.0017770 \\ -0.0022265 \\ -0.0051079 \\ -0.0051391 \\ -0.0024355 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.000055427 \\ 0.000027070 \\ 0.000065614 \\ 0.000009595 \\ -0.000060111 \\ -0.000047856 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.000073981 \\ 0.000116280 \\ 0.000019033 \\ -0.000123510 \\ 0.000024673 \\ 0.000121800 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.000016023 \\ 0.000039525 \\ -0.000035037 \\ 0.000004073 \\ 0.000029951 \\ -0.000043928 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.000002124 \\ -0.000006604 \\ 0.000010383 \\ -0.000011990 \\ 0.000011221 \\ -0.000008459 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} -0.12533 \\ -0.11751 \\ -0.10331 \\ -0.07956 \\ -0.04855 \\ -0.01823 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para determinar las fuerzas inerciales que impone el sismo sobre la estructura en el mismo instante, $t = 3.08$ s, se multiplica la matriz de rigidez de toda la estructura por estos desplazamientos:

$$\{F\} = [K_E]\{U\}$$

Esta operación puede realizarse para los desplazamientos que impone cada modo y de esa manera obtener las fuerzas provenientes de cada uno de ellos:

$$\{F^{mod}\} = [K_E][U^{(1)} \mid U^{(2)} \mid \dots \mid U^{(6)}] = [F^{(1)} \mid F^{(2)} \mid \dots \mid F^{(6)}]$$

La contribución en fuerza de cada modo, en kN, para el instante $t = 3.08$ s, es:

$$\{F^{mod}\} = [K_E]\{U^{mod}\} = \begin{bmatrix} -970.27 & 388.19 & -13.82 & -47.24 & -19.22 & 3.87 \\ -890.19 & 137.30 & 6.75 & 74.25 & 47.42 & -12.03 \\ -753.69 & -172.02 & 16.36 & 12.15 & -42.04 & 18.91 \\ -553.86 & -394.65 & 2.39 & -78.87 & 4.89 & -21.84 \\ -323.51 & -397.07 & -14.99 & 15.76 & 35.93 & 20.44 \\ -117.85 & -188.18 & -11.93 & 77.77 & -52.70 & -15.41 \end{bmatrix}$$

y las fuerzas totales, también en kN, para el instante $t = 3.08$ s, son:

$$\{F\} = [K_E]\{U\} = \begin{bmatrix} -658.49 \\ -636.50 \\ -920.33 \\ -1041.90 \\ -663.43 \\ -308.29 \end{bmatrix}$$

El corte basal contribuido por cada modo, también en kN, para el instante $t = 3.08$ s, se obtiene por medio de:

$$\begin{aligned} \{V\} &= \{1\}^T \{F^{mod}\} \\ &= \{1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1\} \begin{bmatrix} -970.27 & 388.19 & -13.82 & -47.24 & -19.22 & 3.87 \\ -890.19 & 137.30 & 6.75 & 74.25 & 47.42 & -12.03 \\ -753.69 & -172.02 & 16.36 & 12.15 & -42.04 & 18.91 \\ -553.86 & -394.65 & 2.39 & -78.87 & 4.89 & -21.84 \\ -323.51 & -397.07 & -14.99 & 15.76 & 35.93 & 20.44 \\ -117.85 & -188.18 & -11.93 & 77.77 & -52.70 & -15.41 \end{bmatrix} \\ &= \{-3609.37 \mid -626.43 \mid -15.24 \mid 53.82 \mid -25.72 \mid -6.06\} \end{aligned}$$

El corte basal total, en kN, para el instante $t = 3.08$ s, se obtiene por medio de:

$$V = \{1\}^T \{F\} = \{1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1\} \begin{bmatrix} -658.49 \\ -636.50 \\ -920.33 \\ -1041.90 \\ -663.43 \\ -308.29 \end{bmatrix} = -4229.0$$

Desplazamientos del último piso

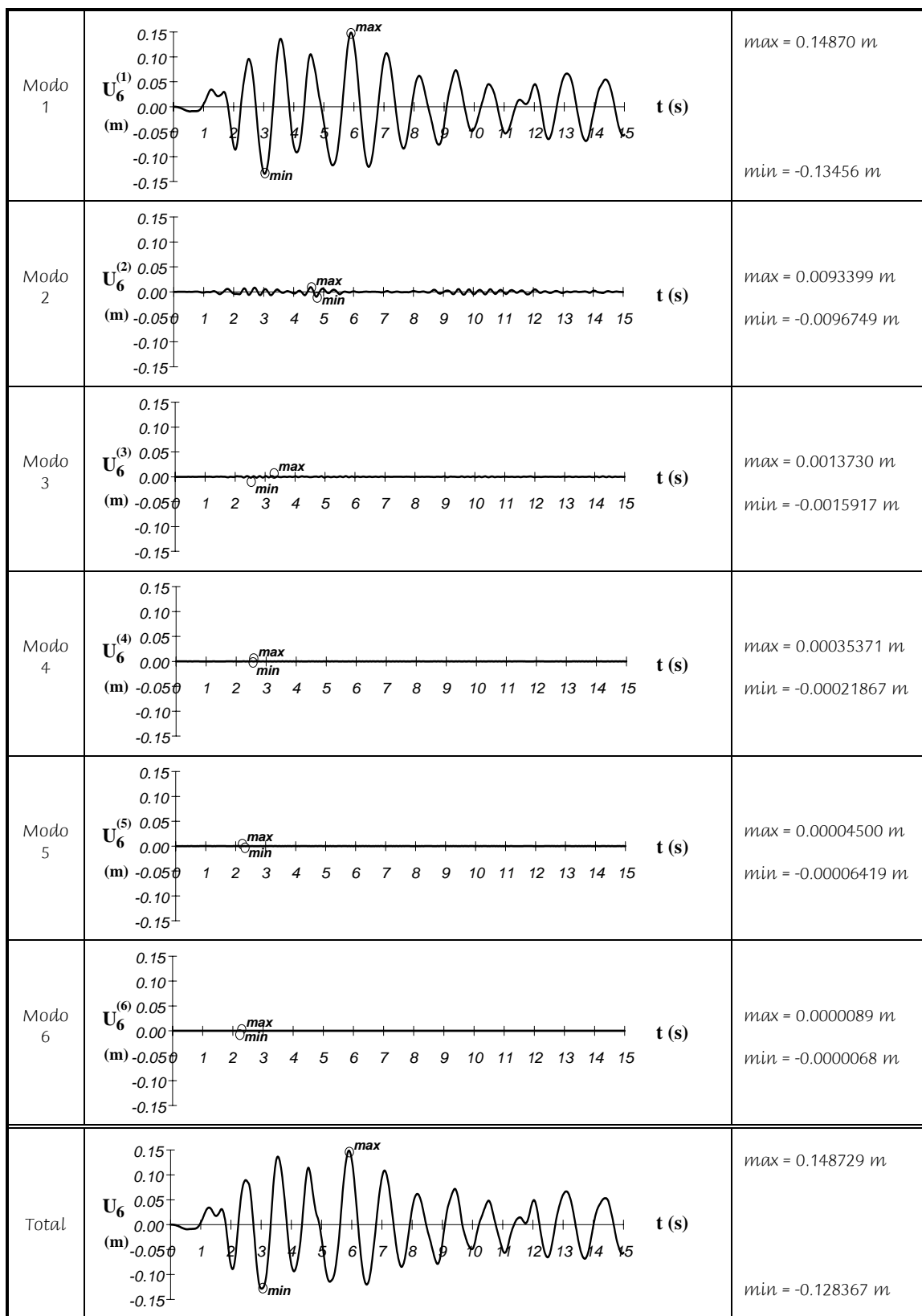


Figura 14-12 - Ejemplo 14-3 - Desplazamientos de la cubierta para cada modo y respuesta total

El momento de vuelco contribuido por cada modo, en $\text{kN} \cdot \text{m}$, para el instante $t = 3.08 \text{ s}$, se obtiene por medio de:

$$\begin{aligned} \{M\} &= \{h\}^T \{F^{\text{mod}}\} \\ &= \{18 \mid 15 \mid 12 \mid 9 \mid 6 \mid 3\} \begin{bmatrix} -970.27 & 388.19 & -13.82 & -47.24 & -19.22 & 3.87 \\ -890.19 & 137.30 & 6.75 & 74.25 & 47.42 & -12.03 \\ -753.69 & -172.02 & 16.36 & 12.15 & -42.04 & 18.91 \\ -553.86 & -394.65 & 2.39 & -78.87 & 4.89 & -21.84 \\ -323.51 & -397.07 & -14.99 & 15.76 & 35.93 & 20.44 \\ -117.85 & -188.18 & -11.93 & 77.77 & -52.70 & -15.41 \end{bmatrix} \\ &= \{-47141 \mid 483.7 \mid -55.4 \mid 27.3 \mid -37.7 \mid -4.0\} \end{aligned}$$

El momento de vuelco total, en $\text{kN} \cdot \text{m}$, para el instante $t = 3.08 \text{ s}$, se obtiene por medio de:

$$M = \{h\}^T \{F\} = \{18 \mid 15 \mid 12 \mid 9 \mid 6 \mid 3\} \begin{Bmatrix} -658.49 \\ -636.50 \\ -920.33 \\ -1041.90 \\ -663.43 \\ -308.29 \end{Bmatrix} = -46727$$

Utilizando el procedimiento indicado es posible obtener la respuesta en cualquier instante. En la Figura 14-12 se muestra la respuesta de desplazamiento del ultimo piso del edificio. Se presenta la respuesta individual producida por cada modo y la respuesta total. Es evidente allí que la contribución importante a la respuesta total proviene casi exclusivamente de los dos primeros modos.

En la Figura 14-13 se muestra la variación del corte basal de la edificación para los primeros 15 s de respuesta:

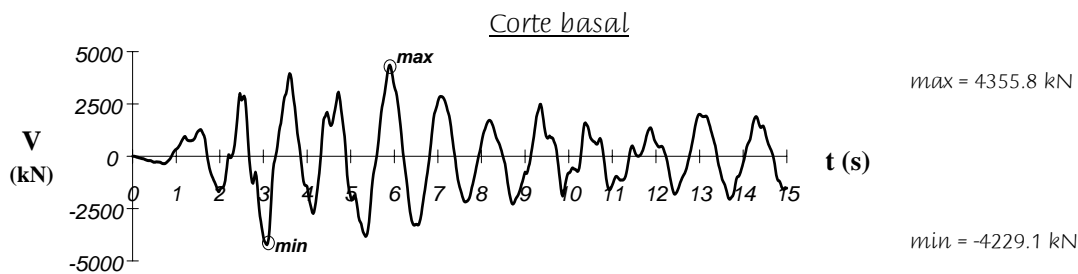


Figura 14-13 - Ejemplo 14-3 - Corte basal de la estructura

En la Figura 14-14 se muestra la variación del momento de vuelco de la edificación para los primeros 15 s de respuesta:

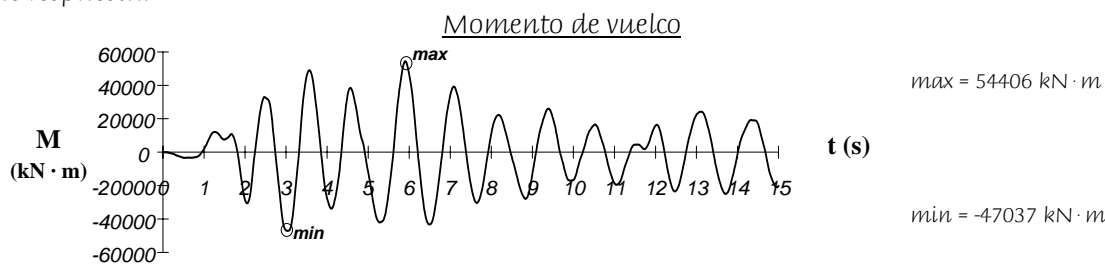


Figura 14-14 - Ejemplo 14-3 - Momento de vuelco de la estructura

14.6 — Análisis modal tridimensional para excitación en la base de sistemas con diafragma rígido

En la Sección 11.3.1 se discutió ampliamente la formulación de las ecuaciones de equilibrio dinámico de sistemas idealizables a través del empleo de diafragmas rígidos en las losas de entrepiso. En general, el uso de la idealización de diafragma rígido conduce a una reducción sustantiva del número de grados de libertad la cual corresponde directamente con el empleo de criterios asociados con el orden de magnitud de las deformaciones que ocurren dentro de la estructura, conduciendo a un ahorro importante en trabajo numérico. Dado que la idealización de diafragma rígido parte de la premisa de que algunas de las deformaciones son tan pequeñas que no es justificable su manejo como variables independientes y que por ende pueden ser agrupadas como algo de un orden de magnitud tan menor que es despreciable, no sobra insistir aquí que esta premisa debe ser revisada rutinariamente con el fin de justificar su validez, a riesgo de que se esté empleando una idealización inconsistente con el comportamiento real de la estructura.

Al igual que en la Sección 14.5 el empleo de la idealización de diafragma rígido para el caso de excitación en la base solo afecta la formulación de la matriz $[\gamma]$ dentro de lo expuesto en la Sección 14.4. Este aspecto fue tratado, en detalle, en la Sección 11.3.1(h) donde se explicó la necesidad de cumplir el principio de equilibrio a través de las fuerzas inerciales colineales con las aceleraciones del terreno, y las diferentes maneras de adaptar las ecuaciones de equilibrio a las diferentes componentes del acelerograma que se desea emplear. Estos conceptos se presentan para en caso general en la Sección 11.5. El siguiente ejemplo aclara la forma de uso de la matriz $[\gamma]$ y las peculiaridades de la respuesta dinámica de los diafragmas rígidos ante movimiento sísmico en la base.

Ejemplo 14-4

El edificio de tres pisos mostrado en la Figura 14-15, es sometido a los efectos de un sismo en su base. El amortiguamiento para este tipo de vibraciones se estima en $\xi = 5\%$ del crítico. Todas las vigas de la estructura tiene un ancho $b = 0.30$ m y un alto $h = 0.50$ m. Las columnas tienen sección cuadrada con $h = 0.30$ m. El material de la estructura tiene un módulo de elasticidad $E = 22$ GPa. La estructura tiene una masa de 700 kg/m².

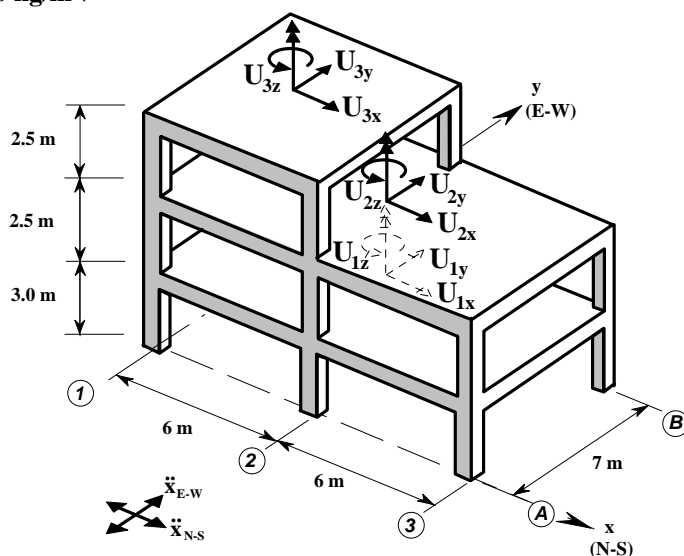


Figura 14-15 - Ejemplo 14-4

La idealización matemática de la estructura está regida por los siguientes parámetros:

1. Los diafragmas (losas) de la estructura se pueden considerar infinitamente rígidos en su propio plano.
2. Se consideran tres grados de libertad por piso (diafragma) consistentes en dos grados de libertad horizontales ortogonales y una rotación alrededor de un eje vertical

3. Los pórticos se consideran planos, El modelo matemático de la estructura se considera tridimensional a través de la acción del diafragma de la losa.
4. Las vigas se consideran como infinitamente rígidas para efectos de deformaciones axiales, dado que hacen parte de los diafragmas.
5. Las columnas pueden deformarse axialmente y por lo tanto los grados de libertad verticales de los nudos deben condensarse.
6. Dado que no hay masa asociada, para efectos del modelo matemático, a los grados de libertad rotacionales de los nudos, estas deformaciones deben condensarse.

Existen tres tipos de pórticos planos: el Tipo - A, para los ejes A y B; el Tipo - B, para los ejes 1 y 2; y el Tipo - C para el eje 3. Primero se debe calcular la matriz de rigidez de efectos horizontales de cada tipo de pórtico. Esto se logra fijando unas coordenadas globales para el pórtico, las cuales a su vez posteriormente serán tratadas como unas coordenadas locales para la estructura en general. En la Figura 14-16 se muestran los grados de libertad de cada uno de los pórticos antes de realizar ninguna operación dictada por la idealización de la estructura en general. Dado que hay dos tipos de viga, una de 6 m de luz y otras de 7 m de luz, y las columnas tienen 3 m de longitud en el primer piso y 2.5 m en el segundo y tercer piso; se calculan, en coordenadas globales del pórtico, las matrices de rigidez de estos cuatro tipos de elementos, para después realizar el ensamblaje de la matriz de rigidez de toda la estructura, y afectarlas debido a la idealización de toda la estructura.

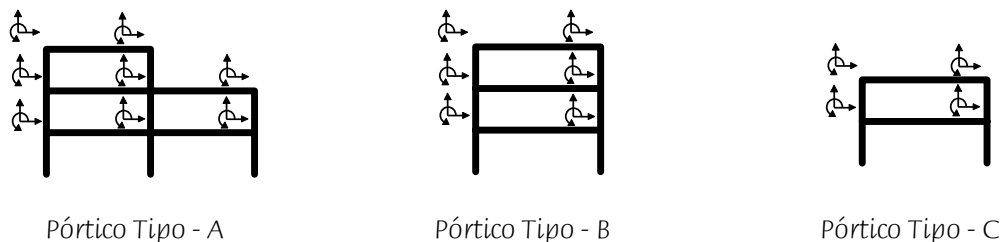


Figura 14-16 - Ejemplo 14-4 - Grados de libertad de los pórticos individuales

El efecto de diafragma en cada pórtico individual se refleja a través de que no hay posibilidad de deformaciones axiales en las vigas. Esto se logra aplicando el procedimiento que se explica detalladamente en la Sección 11.3.1(b). Los grados de libertad que permanecen son los mostrados en la Figura 14-17.

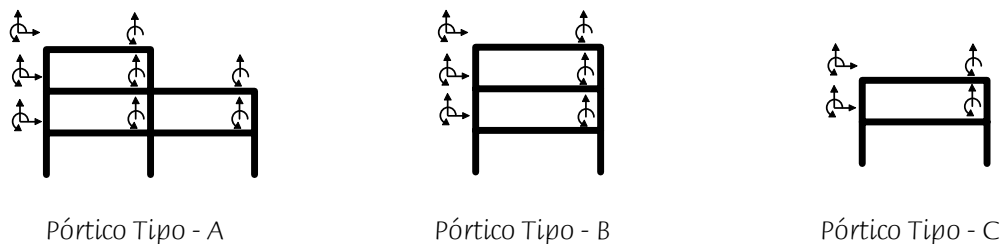


Figura 14-17 - Ejemplo 14-4 - Grados de libertad que permanecen después de hacer las vigas inextensibles

Luego hay necesidad de condensar los grados de libertad verticales. Esto se logra aplicando el procedimiento que se explica detalladamente en la Sección 11.3.1(c). Los grados de libertad que permanecen son los mostrados en la Figura 14-18.

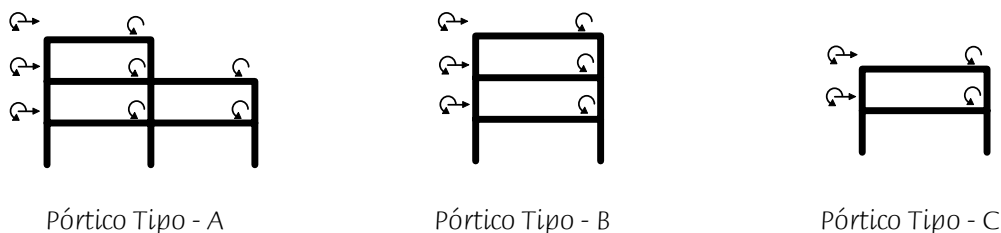
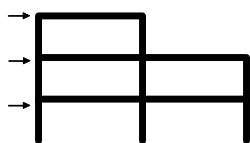
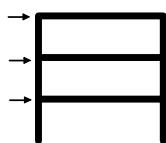


Figura 14-18 - Ejemplo 14-4 - Grados de libertad que permanecen después de condensar los grados de libertad verticales

Ahora hay necesidad de condensar los grados de libertad rotacionales de cada nudo. Esto se logra aplicando el procedimiento que se explica detalladamente en la Sección 11.3.1(d). Los grados de libertad que permanecen son los mostrados en la Figura 14-19, los cuales son los correspondientes a los efectos horizontales de los pórticos.



Pórtico Tipo - A



Pórtico Tipo - B



Pórtico Tipo - C

Figura 14-19 - Ejemplo 14-4 - Grados de libertad que permanecen después de condensar los grados de libertad rotacionales

Después de realizar las operaciones apropiadas, se obtienen las siguientes matrices de rigidez de los pórticos para efectos horizontales, en kN/m:

Pórtico Tipo - A

$$[K_A] = \begin{bmatrix} 15842 & -18068 & 2359 \\ -18068 & 45140 & -30276 \\ 2359 & -30276 & 48363 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ u_3^A \\ u_2^A \\ u_1^A \end{matrix}$$

Pórtico Tipo - B

$$[K_B] = \begin{bmatrix} 14883 & -17929 & 3299 \\ -17929 & 36692 & -21507 \\ 3299 & -21507 & 31954 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ u_3^B \\ u_2^B \\ u_1^B \end{matrix}$$

Pórtico Tipo - C

$$[K_C] = \begin{bmatrix} 14854 & -17271 \\ -17271 & 30936 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ u_2^C \\ u_1^C \end{matrix}$$

Ahora debemos transformar los grados de libertad para desplazamientos horizontales de cada uno de los pórticos a los grados de libertad globales de la estructura total, los cuales se muestran en la Figura 14-15. El procedimiento para realizar esta operación se presenta en detalle en la Sección 11.3.1(e). Los datos geométricos de cada uno de los pórticos se presentan en las siguientes tablas. Los parámetros x_a , y_a , x_b , y_b , d , α , r_1 , r_2 y r_3 están definidos en la Sección 11.3.1(e).

Pisos 1 y 2

El centroide la losa de diafragma está en las coordenadas $\bar{x} = 6.00 \text{ m}$ y $\bar{y} = 3.50 \text{ m}$

Eje	Tipo	x_a	y_a	x_b	y_b	d	α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	r_1	r_2
A	A	0.00	0.00	12.00	0.00	12.00	0°	1.00	0.00	3.50	3.50
B	A	0.00	7.00	12.00	7.00	12.00	0°	1.00	0.00	-3.50	-3.50
1	B	0.00	0.00	0.00	7.00	7.00	90°	0.00	1.00	-6.00	-6.00
2	B	6.00	0.00	6.00	7.00	7.00	90°	0.00	1.00	0.00	0.00
3	C	12.00	0.00	12.00	7.00	7.00	90°	0.00	1.00	6.00	6.00

Piso 3

El centroide de la losa de diafragma está en las coordenadas $\bar{x} = 3.00 \text{ m}$ y $\bar{y} = 3.50 \text{ m}$

Eje	Tipo	x_a	y_a	x_b	y_b	d	α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	r_3
A	A	0.00	0.00	6.00	0.00	6.00	0°	1.00	0.00	3.50
B	A	0.00	7.00	6.00	7.00	6.00	0°	1.00	0.00	-3.50
1	B	0.00	0.00	0.00	7.00	7.00	90°	0.00	1.00	-3.00
2	B	6.00	0.00	6.00	7.00	7.00	90°	0.00	1.00	3.00
3	C	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Utilizando los datos anteriores, se pueden determinar las matrices de transformación $[T_p]$ de cada uno de los pórticos, como se muestran a continuación:

1	0	0
0	0	0
3.5	0	0
0	1	0
0	0	0
0	3.5	0
0	0	1
0	0	0
0	0	3.5

Pórtico eje A

1	0	0
0	0	0
-3.5	0	0
0	1	0
0	0	0
0	-3.5	0
0	0	1
0	0	0
0	0	-3.5

Pórtico eje B

0	0	0
1	0	0
-3.0	0	0
0	0	0
0	1	0
0	-6.0	0
0	0	0
0	0	1
0	0	-6.0

Pórtico eje 1

0	0	0
1	0	0
3.0	0	0
0	0	0
0	1	0
0	0	0
0	0	0
0	0	1
0	0	0

Pórtico eje 2

0	0
0	0
0	0
0	0
1	0
6.0	0
0	0
0	1
0	6.0

Pórtico eje 3

Después de realizar las operaciones indicadas en las Secciones 11.1.3(e) a (f) se obtiene la siguiente matriz de rigidez de toda la estructura, en unidades de kN/m y $\text{kN} \cdot \text{m/rad}$:

$$[K_E] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 31.685 & 0 & 0 & -36.135 & 0 & 0 & 4.718 & 0 & 0 \\ 0 & 29.767 & 0 & 0 & -35.858 & 107.57 & 0 & 6.598 & -19.794 \\ 0 & 0 & 656.04 & 0 & 0 & -765.38 & 0 & 0 & 117.18 \\ -36.135 & 0 & 0 & 90.279 & 0 & 0 & -60.553 & 0 & 0 \\ 0 & -35.858 & 0 & 0 & 88.239 & -131.03 & 0 & -60.286 & 25.418 \\ 0 & 107.57 & -765.38 & 0 & -131.03 & 2961.6 & 0 & 25.418 & -2137.8 \\ 4.718 & 0 & 0 & -60.553 & 0 & 0 & 96.725 & 0 & 0 \\ 0 & 6.598 & 0 & 0 & -60.286 & 25.418 & 0 & 94.845 & -6.107 \\ 0 & -19.794 & 117.18 & 0 & 25.418 & -2137.8 & 0 & -6.107 & 3449.0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow \text{gdl}$

U_{3x}
 U_{3y}
 U_{3z}
 U_{2x}
 U_{2y}
 U_{2z}
 U_{1x}
 U_{1y}
 U_{1z}

En la matriz de rigidez de toda la estructura puede notarse que no existe acople estático (véanse la Sección 11.5) entre los grados de libertad en la dirección x y los de las direcciones y y z , mientras que si lo existe entre los desplazamientos de las direcciones y y z . Esto quiere decir que si se aplican fuerzas a la estructura únicamente en la dirección x , la estructura no tiene ningún desplazamiento en la dirección y , ni ninguna rotación de sus diafragmas. En contraposición, si se colocan fuerzas en la dirección y únicamente, los diafragma tienen una rotación.

El área de la losa del tercer piso es $6 \text{ m} \cdot 7 \text{ m} = 42 \text{ m}^2$. Por lo tanto la masa traslacional de este piso es $m = 42 \text{ m}^2 \cdot 700 \text{ kg/m}^2 = 29.4 \text{ Mg}$. La masa rotacional se obtienen, para grados de libertad rotacionales colocados en el centroide del diafragma (véase la Sección 11.2.2) por medio de mJ_0/A , donde m es la masa traslacional, J_0 es el momento polar de inercia del diafragma y A el área del diafragma. Por lo tanto, la masa rotacional del tercer piso es:

$$m_r = \frac{m}{A} J_0 = \frac{m}{ab} (I_{xx} + I_{yy}) = \frac{m}{ab} \left(\frac{a^3 b}{12} + \frac{ab^3}{12} \right) = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) = \frac{29.4}{12} (6^2 + 7^2) = 208.25 \text{ Mg} \cdot \text{m}^2$$

El área de las losas del primero y segundo piso es $12 \text{ m} \cdot 7 \text{ m} = 84 \text{ m}^2$. Por lo tanto la masa traslacional de estos pisos es $m = 84 \text{ m}^2 \cdot 700 \text{ kg/m}^2 = 58.8 \text{ Mg}$. La masa rotacional es:

$$m_r = \frac{m}{A} J_0 = \frac{m}{ab} (I_{xx} + I_{yy}) = \frac{m}{ab} \left(\frac{a^3 b}{12} + \frac{ab^3}{12} \right) = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) = \frac{58.8}{12} (12^2 + 7^2) = 945.7 \text{ Mg} \cdot \text{m}^2$$

la matriz de masas es la siguiente:

$$[M_E] = \begin{bmatrix} 29.40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29.40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 208.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 58.80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 58.80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 945.70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 58.80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 58.80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 945.70 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{3z} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \\ U_{1x} \\ U_{1x} \\ U_{1x} \end{matrix}$$

Las ecuaciones de equilibrio dinámico de la estructura son las siguientes:

$$[M_E] \{\ddot{U}\} + [K_E] \{U\} = -[M_E] \{\ddot{x}_0\}$$

o

$$\begin{bmatrix} 29.40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29.40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 208.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 58.80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 58.80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 945.70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 58.80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 58.80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 945.70 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{3x} \\ \ddot{U}_{3y} \\ \ddot{U}_{3z} \\ \ddot{U}_{2x} \\ \ddot{U}_{2y} \\ \ddot{U}_{2z} \\ \ddot{U}_{1x} \\ \ddot{U}_{1x} \\ \ddot{U}_{1x} \end{Bmatrix} + 10^3 \times \begin{bmatrix} 31.685 & 0 & 0 & -36.135 & 0 & 0 & 4.718 & 0 & 0 \\ 0 & 29.767 & 0 & 0 & -35.858 & 107.57 & 0 & 6.598 & -19.794 \\ 0 & 0 & 656.04 & 0 & 0 & -765.38 & 0 & 0 & 117.18 \\ -36.135 & 0 & 0 & 90.279 & 0 & 0 & -60.553 & 0 & 0 \\ 0 & -35.858 & 0 & 0 & 88.239 & -131.03 & 0 & -60.286 & 25.418 \\ 0 & 107.57 & -765.38 & 0 & -131.03 & 2961.6 & 0 & 25.418 & -2137.8 \\ 4.718 & 0 & 0 & -60.553 & 0 & 0 & 96.725 & 0 & 0 \\ 0 & 6.598 & 0 & 0 & -60.286 & 25.418 & 0 & 94.845 & -6.107 \\ 0 & -19.794 & 117.18 & 0 & 25.418 & -2137.8 & 0 & -6.107 & 3449.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{3z} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \\ U_{1x} \\ U_{1x} \\ U_{1x} \end{Bmatrix}$$

$$= -[M_E] \{\ddot{x}_0\}$$

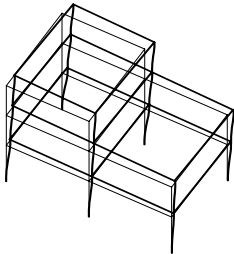
Los modos y períodos de vibración son independientes de la parte derecha de las ecuaciones de equilibrio, pues corresponden a las características de la estructura en vibración libre. Al resolver el

problema de valores propios planteado por la anterior ecuación de equilibrio, se obtienen las frecuencias y períodos mostrados en la tabla siguiente:

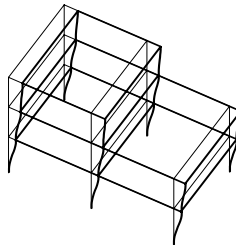
Modo	ω^2 (rad/s) ²	ω (rad/s)	f (Hertz)	T (s)
1	128.4	11.33	1.803	0.5545
2	147.8	12.16	1.935	0.5168
3	339.9	18.44	2.934	0.3408
4	1214.5	34.85	5.547	0.1803
5	1234.1	35.13	5.591	0.1789
6	2862.6	53.50	8.515	0.1174
7	2895.7	53.81	8.565	0.1168
8	3085.9	55.55	8.841	0.1131
9	6404.1	80.03	12.736	0.0785

Los modos de vibración correspondientes son:

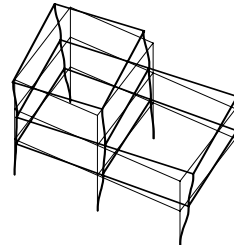
$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0 & 0.10863 & 0 & -0.13227 & 0 & 0 & -0.06870 & 0 & 0 \\ 0.11752 & 0 & -0.04630 & 0 & -0.11453 & -0.06572 & 0 & -0.01350 & -0.02100 \\ -0.00397 & 0 & 0.02647 & 0 & -0.01316 & -0.00026 & 0 & -0.05594 & 0.02799 \\ 0 & 0.08946 & 0 & 0.02609 & 0 & 0 & 0.09123 & 0 & 0 \\ 0.08491 & 0 & 0.03929 & 0 & 0.01692 & 0.08644 & 0 & 0.01596 & 0.01553 \\ -0.00357 & 0 & 0.02234 & 0 & -0.00806 & -0.00149 & 0 & 0.00182 & -0.02180 \\ 0 & 0.05571 & 0 & 0.08706 & 0 & 0 & -0.07952 & 0 & 0 \\ 0.05065 & 0 & 0.02926 & 0 & 0.08673 & -0.07654 & 0 & -0.01289 & -0.00620 \\ -0.00201 & 0 & 0.01372 & 0 & -0.00782 & -0.00960 & 0 & 0.01825 & 0.01946 \end{bmatrix}$$



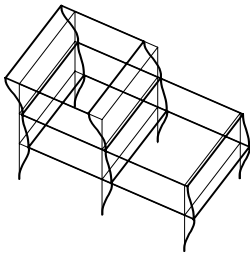
Modo 1 ($T_1 = 0.555$ s)



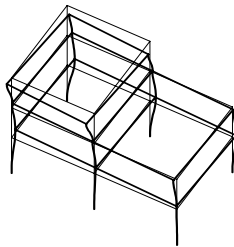
Modo 2 ($T_2 = 0.517$ s)



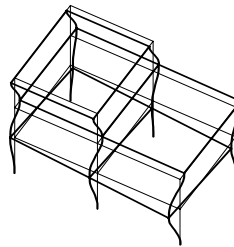
Modo 3 ($T_3 = 0.341$ s)



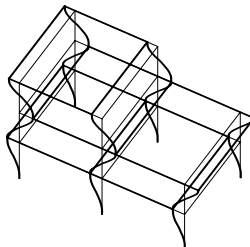
Modo 4 ($T_4 = 0.180$ s)



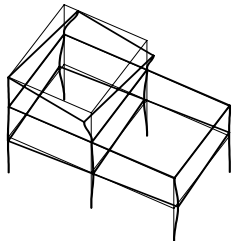
Modo 5 ($T_5 = 0.179$ s)



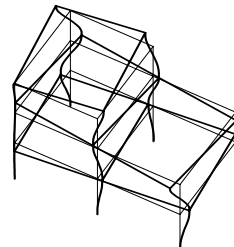
Modo 6 ($T_6 = 0.117$ s)



Modo 7 ($T_7 = 0.117$ s)



Modo 8 ($T_8 = 0.113$ s)



Modo 9 ($T_9 = 0.079$ s)

Figura 14-20 - Ejemplo 14-4 - Modos y períodos de vibración de la estructura

Para poder identificar la preponderancia de cada modo hacia cada una de las direcciones principales, puede utilizarse la masa activa en cada modo, en cada dirección. Para el efecto se supone que hay aceleraciones del terreno en cada una de las direcciones. Aunque no se dispone de aceleraciones rotacionales del terreno; no obstante, de esta manera puede verse la influencia torsional de cada modo utilizando una matriz $[\gamma_0]$ cuya forma es:

$$[\gamma_0] = \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{3z} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \\ U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{1z} \end{matrix} \end{matrix}$$

Por medio de producto siguiente, obtenemos los valores de $[\alpha_0]$, que al ser elevados al cuadrado corresponden a la masa activa de cada modo en esa dirección:

$$[\alpha_0] = [\Phi]^T [M_E] [\gamma_0] = \begin{bmatrix} 0 & 11.426 & -6.1031 \\ 11.730 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6698 & 39.614 \\ 2.7644 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7244 & -17.754 \\ 0 & -1.3502 & -10.541 \\ -1.3312 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2167 & 7.3305 \\ 0 & -0.0689 & 3.6123 \end{bmatrix}$$

Modo	Dirección x			Dirección y			Dirección z (rotacional)		
	masa activa	% masa total	% acum.	masa activa	% masa total	% acum.	masa activa	% masa total	% acum.
1	0			130.56	88.82%	88.82%	37.247	1.77%	1.77%
2	137.59	93.60%	93.60%	0			0		
3	0			7.1278	4.85%	93.67%	1569.3	74.74%	76.51%
4	7.6419	5.20%	98.80%	0			0		
5	0			7.4386	5.06%	98.73%	315.21	15.01%	91.52%
6	0			1.8230	1.24%	99.97%	111.11	5.29%	96.82%
7	1.7721	1.21%	100.0%	0			0		
8	0			0.0470	0.03%	99.99%	53.736	2.56%	99.37%
9	0			0.0047	0.003%	100.00%	13.049	0.63%	100.00%

De esta manera hemos confirmado, lo que es evidente de la Figura 14-20, donde se muestran los modos; que la estructura está desacoplada en el sentido **x** y que los tres modos en esta dirección corresponden al 2°, 4° y 7°. En los otros modos hay interacción entre los desplazamientos en la dirección **y** y las rotaciones de los diafragmas, aunque los modos 1°, 5° y 6° tienen preponderancia hacia los desplazamientos en la dirección **y**, mientras que los modos 3°, 8° y 9° son esencialmente torsionales.

Ahora supongamos que la estructura es sometida a las dos componentes (NS y EW) del registro de Corralitos, del temblor de Loma Prieta, California del 17 de Octubre de 1989 (véase la Figura 5-13). Primero debemos calcular los coeficientes de participación modal para dos componentes acelerográficas. Suponemos que la componente NS del registro es colineal con la dirección \mathbf{x} en planta de la estructura, y la componente EW con la dirección \mathbf{y} en planta de la estructura.

Los coeficientes de participación se obtienen de:

$$[\alpha] = [\Phi]^T [M] [\gamma]$$

y el vector de aceleraciones del terreno tiene la siguiente forma:

$$\{\ddot{\mathbf{x}}_0\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{0x} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{0y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{NS} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{EW} \end{Bmatrix}$$

donde $\ddot{\mathbf{x}}_{NS}$ corresponde a las aceleraciones en la dirección NS del registro del temblor de Loma Prieta en el sitio de Corralitos, y análogamente $\ddot{\mathbf{x}}_{EW}$ corresponde a las aceleraciones en la dirección EW del mismo registro. Ahora la matriz $[\gamma]$ se formula de acuerdo con lo presentado en la Sección 11.3.1(h) para este caso, colocando un uno (1) si la ecuación de equilibrio es colineal con la aceleración, y un cero (0) si no lo es. Por lo tanto, $[\gamma]$ y $[\alpha]$ son:

$$[\gamma]\{\ddot{\mathbf{x}}_0\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{NS} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{EW} \end{Bmatrix}, \quad [\alpha] = [\Phi]^T [M] [\gamma] = \begin{Bmatrix} 0 & 11.426 \\ 11.730 & 0 \\ 0 & 2.6698 \\ 2.7644 & 0 \\ 0 & 2.7274 \\ 0 & -1.3502 \\ -1.3312 & 0 \\ 0 & -0.21669 \\ 0 & -0.068858 \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciones desacopladas del sistema se obtienen por medio de:

$$[\Phi]^T [M_E] [\Phi] \{\ddot{\eta}\} + [\Phi]^T [K_E] [\Phi] \{\eta\} = -[\alpha] \{\ddot{\mathbf{x}}_0\}$$

lo cual conduce a las siguientes nueve ecuaciones con su amortiguamiento modal ($\xi_i = 0.05$):

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{\eta}_1 + \omega_1^2\eta_1 &= -11.426\ddot{\mathbf{x}}_{EW} \\ \ddot{\eta}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{\eta}_2 + \omega_2^2\eta_2 &= -11.730\ddot{\mathbf{x}}_{NS} \\ \ddot{\eta}_3 + 2\xi_3\omega_3\dot{\eta}_3 + \omega_3^2\eta_3 &= -2.6698\ddot{\mathbf{x}}_{EW} \\ \ddot{\eta}_4 + 2\xi_4\omega_4\dot{\eta}_4 + \omega_4^2\eta_4 &= -2.7644\ddot{\mathbf{x}}_{NS} \\ \ddot{\eta}_5 + 2\xi_5\omega_5\dot{\eta}_5 + \omega_5^2\eta_5 &= -2.7274\ddot{\mathbf{x}}_{EW} \\ \ddot{\eta}_6 + 2\xi_6\omega_6\dot{\eta}_6 + \omega_6^2\eta_6 &= 1.3502\ddot{\mathbf{x}}_{EW} \\ \ddot{\eta}_7 + 2\xi_7\omega_7\dot{\eta}_7 + \omega_7^2\eta_7 &= 1.3312\ddot{\mathbf{x}}_{NS} \\ \ddot{\eta}_8 + 2\xi_8\omega_8\dot{\eta}_8 + \omega_8^2\eta_8 &= 0.21669\ddot{\mathbf{x}}_{EW} \\ \ddot{\eta}_9 + 2\xi_9\omega_9\dot{\eta}_9 + \omega_9^2\eta_9 &= 0.068858\ddot{\mathbf{x}}_{EW} \end{aligned}$$

Respuesta de las coordenadas desacopladas:

La respuesta para cada una de estas ecuaciones desacopladas, se obtiene utilizando el método Beta de Newmark, con un amortiguamiento de $\xi = 0.05$.

En los gráficos siguientes se muestran los primeros 10 s de respuesta, dentro de los cuales se presentan los máximos del proceso para toda la extensión del acelerograma. En los gráficos se muestran el valor máximo y el valor mínimo.

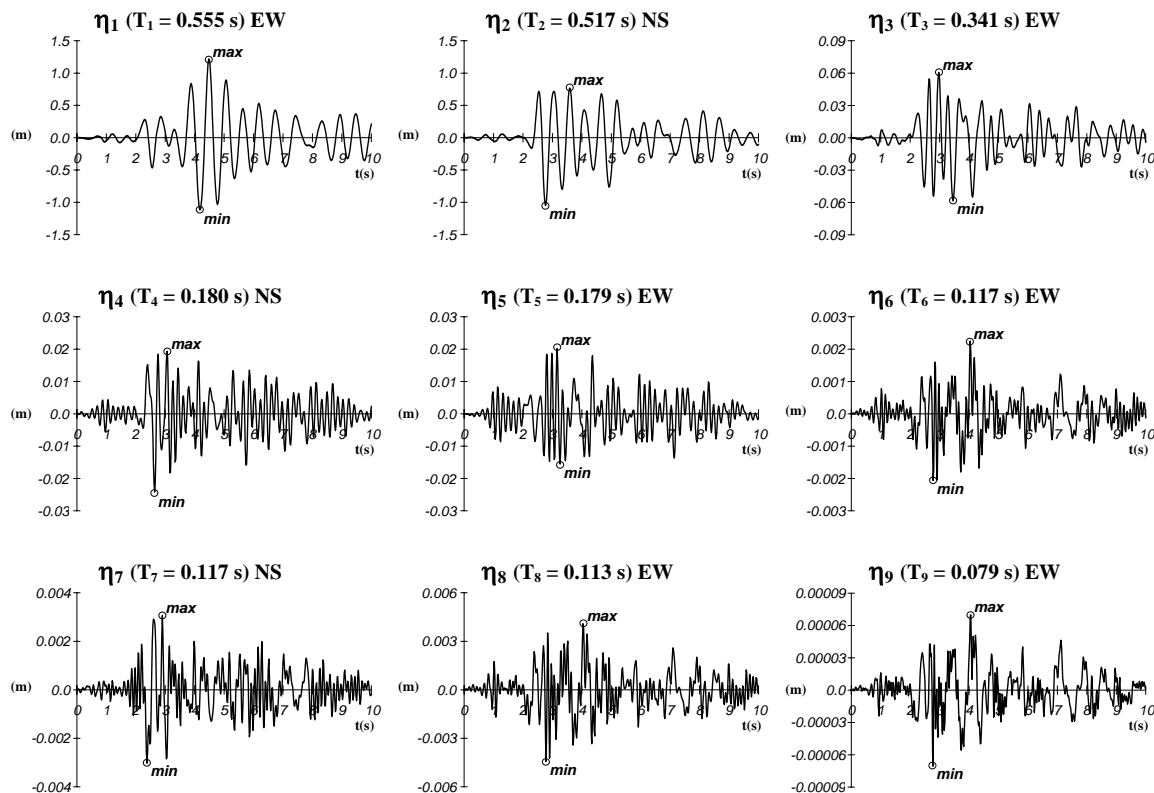


Figura 14-21 - Ejemplo 14-4 - Respuesta de las coordenadas desacopladas

En la tabla siguiente se dan los valores de η_1 a η_9 en m cuando ocurren los máximos en valor absoluto de cada una de ellas:

t (s)	$\eta_1(t)$ (m)	$\eta_2(t)$ (m)	$\eta_3(t)$ (m)	$\eta_4(t)$ (m)	$\eta_5(t)$ (m)	$\eta_6(t)$ (m)	$\eta_7(t)$ (m)	$\eta_8(t)$ (m)	$\eta_9(t)$ (m)
2.640	-0.2285578	0.0729153	0.0546183	-0.0241760	0.0016393	0.0004254	0.0027737	0.0005412	0.0000150
2.760	0.1852514	-1.0475100	-0.0429996	0.0184281	-0.0005117	-0.0009770	-0.0015222	-0.0024423	-0.0000589
2.773	0.2158750	-1.0413480	-0.0511719	0.0157783	0.0075103	-0.0018455	-0.0009713	-0.0040662	-0.0000778
2.785	0.2434763	-1.0183550	-0.0533956	0.0112332	0.0140843	-0.0021428	-0.0005370	-0.0044754	-0.0000549
2.900	0.2855131	0.0266987	0.0215214	-0.0096880	-0.0147099	-0.0019276	0.0030587	-0.0042290	0.0000008
2.974	0.1480720	0.5666564	0.0611317	-0.0013865	0.0180907	0.0009771	-0.0006867	0.0013859	0.0000105
3.160	-0.1043359	0.2773499	-0.0315602	-0.0182827	0.0201412	-0.0008871	0.0011468	-0.0006383	-0.0000373
4.040	-0.1575692	0.3952467	-0.0253885	-0.0101300	-0.0070698	0.0022470	-0.0004550	0.0040880	0.0000684
4.480	1.2171360	-0.2556215	0.0270618	0.0046347	-0.0026897	0.0001521	-0.0005726	0.0009453	0.0000013

Desplazamientos:

Los desplazamientos de la estructura para cualquier instante t , se obtienen por medio de:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta(t)\}$$

En la Figura 14-22 se muestran los primeros 10 s de respuesta, dentro de los cuales se presentan los máximos del proceso para toda la extensión del acelerograma.

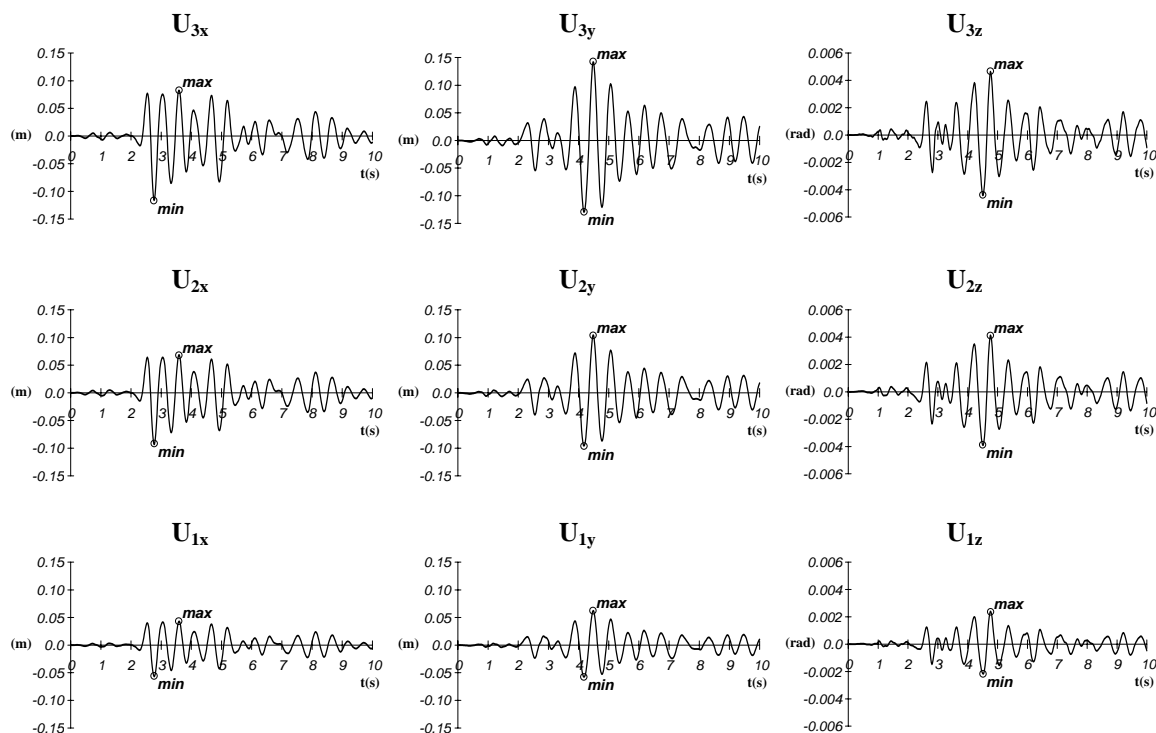


Figura 14-22 - Ejemplo 14-4 - Respuesta para cada uno de los grados de libertad de la estructura

En la tabla siguiente se dan los valores de los desplazamientos, en m o en radianes. Se dan para los valores de t en s, en los cuales ocurren máximos de las coordenadas generalizadas. Se ha colocado además los valores máximo positivo y máximo negativo para cada grado de libertad.

t (s)	U_{3x} (m)	U_{3y} (m)	U_{3z} (rad)	U_{2x} (m)	U_{2y} (m)	U_{2z} (rad)	U_{1x} (m)	U_{1y} (m)	U_{1z} (rad)
2.640	0.010928	-0.029612	0.002301	0.006145	-0.017187	0.002023	0.001737	-0.009877	0.001202
2.760	-0.116124	0.023918	-0.001731	-0.093367	0.013907	-0.001619	-0.056632	0.008188	-0.000995
2.773	-0.115142	0.027056	-0.002084	-0.092835	0.016220	-0.001977	-0.056564	0.010283	-0.001253
2.785	-0.112073	0.029675	-0.002315	-0.090857	0.018556	-0.002179	-0.055713	0.012214	-0.001394
2.900	0.003972	0.034426	-0.000133	0.002415	0.024605	-0.000425	0.000401	0.014018	-0.000222
2.974	0.061786	0.012416	0.000715	0.050594	0.015388	0.000692	0.031503	0.010765	0.000416
3.160	0.032468	-0.013040	-0.000651	0.024439	-0.009846	-0.000494	0.013769	-0.004385	-0.000385
4.040	0.044307	-0.016737	-0.000181	0.035053	-0.014236	0.000055	0.021174	-0.009562	0.000078
4.480	-0.028342	0.142070	-0.004130	-0.022799	0.104392	-0.003717	-0.013792	0.062186	-0.002038
max	0.082518	0.142070	0.004646	0.068594	0.104392	0.004144	0.043003	0.062186	0.002393
min	-0.116124	-0.129924	-0.004409	-0.093367	-0.095976	-0.003905	-0.056632	-0.057696	-0.002185

Fuerzas inerciales:

Para determinar las fuerzas inerciales que impone el sismo sobre la estructura en cualquier instante se multiplica la matriz de rigidez de toda la estructura por los desplazamientos:

$$\{F\} = [K_E]\{U\}$$

En la Figura 14-23 se muestran los primeros 10 s de respuesta, dentro de los cuales se presentan los valores de las fuerzas inerciales.

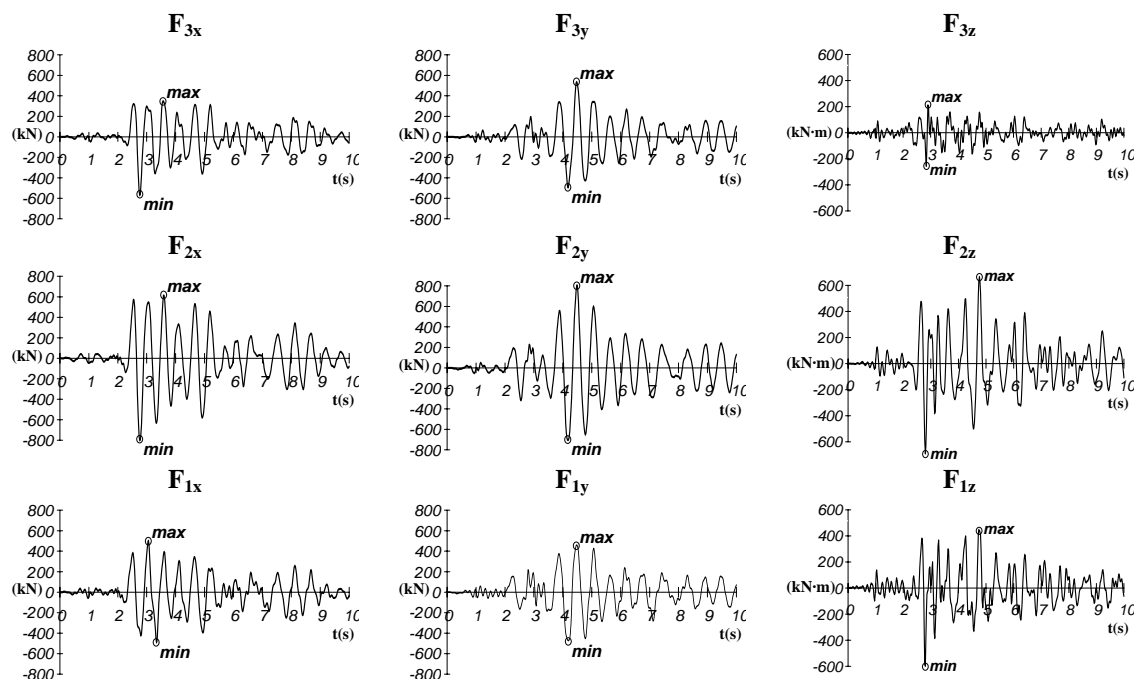


Figura 14-23 - Ejemplo 14-4 - Fuerzas inerciales

En la tabla siguiente se dan los valores de las fuerzas inerciales, en kN o en kN·m. Se presentan para los valores de t en s, en los cuales ocurren máximos de las coordenadas generalizadas, como los valores máximos para la respuesta obtenida.

t (s)	F _{3x} (kN)	F _{3y} (kN)	F _{3z} (kN·m)	F _{2x} (kN)	F _{2y} (kN)	F _{2z} (kN·m)	F _{1x} (kN)	F _{1y} (kN)	F _{1z} (kN·m)
2.640	132.4	-136.5	102.1	54.7	-93.8	475.2	-152.6	-51.9	301.3
2.760	-572.7	112.8	-12.7	-803.7	62.8	-385.7	-372.0	60.9	-341.9
2.773	-560.5	103.7	-0.6	-795.3	68.4	-535.7	-392.9	133.3	-524.8
2.785	-530.8	91.7	-14.3	-779.1	87.0	-629.4	-415.9	188.7	-612.7
2.900	40.5	193.6	212.1	50.2	141.6	154.0	-88.7	63.9	-15.6
2.974	278.1	-44.9	-11.9	427.3	183.5	206.5	275.0	190.4	118.0
3.160	210.6	-109.5	-94.5	199.4	-81.9	-365.5	5.1	81.4	-312.9
4.040	237.1	-46.5	-151.7	281.3	-84.7	-43.8	134.5	-158.2	158.5
4.480	-139.2	536.5	-103.3	-199.0	803.4	-305.2	-87.2	460.0	-106.6
max	348.7	536.5	212.1	613.6	806.3	666.4	503.0	460.0	447.2
min	-572.7	-496.7	-256.2	-803.7	-706.9	-690.9	-492.7	-472.9	-612.7

Corte basal en cada dirección principal y momento torsional en la base:

Para determinar las reacciones en la base que inducen las fuerzas inerciales que impone el sismo sobre la estructura en cualquier instante se suman las fuerzas en el sentido **x**, en el sentido **y**, y los momentos torsionales de toda la estructura. Los resultados, para los primeros 10 s del sismo se muestran en la Figura 14-24.

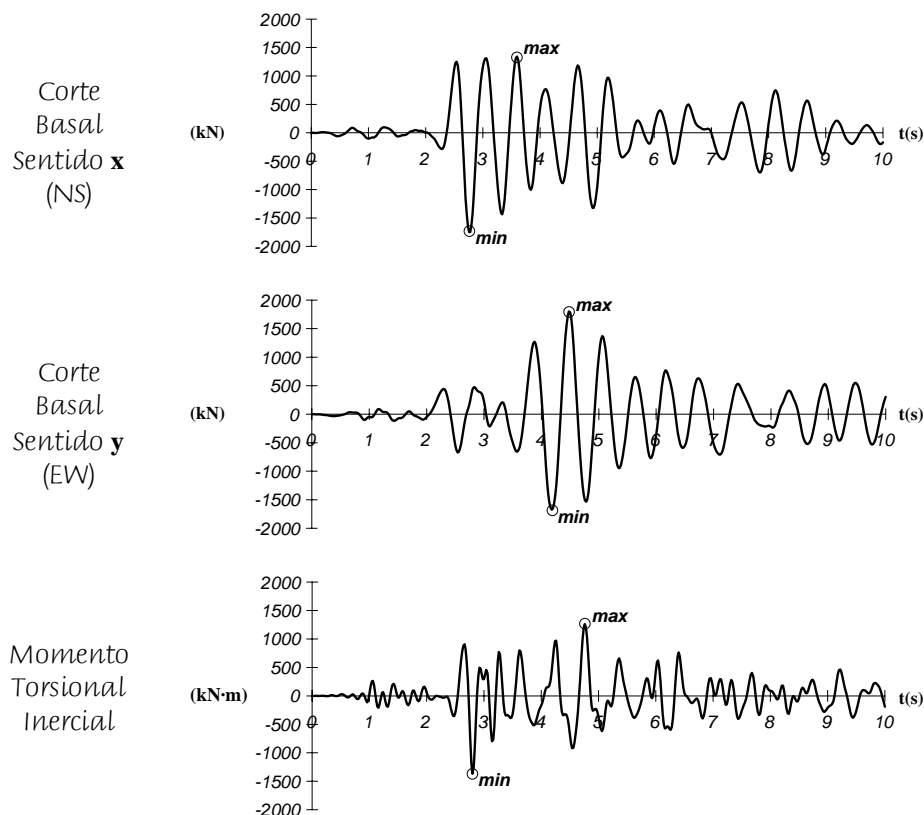


Figura 14-24 - Ejemplo 14-4 - Fuerzas en la base de la estructura

En la siguiente tabla se muestran los valores obtenidos cuando las coordenadas generalizadas tienen un valor máximo, y los máximos obtenidos, durante toda la respuesta:

t (s)	V_x (kN)	V_y (kN)	T_z (kN·m)
2.640	34.6	-282.3	878.6
2.760	-1748.4	236.5	-740.3
2.773	-1748.8	305.4	-1061.1
2.785	-1725.8	367.5	-1256.4
2.900	2.0	399.2	350.5
2.974	980.5	328.9	312.6
3.160	415.1	-110.0	-772.9
4.040	653.0	-289.4	-37.0
4.480	-425.4	1799.9	-515.1
max	1340.8 t=3.60 s	1799.9 t=4.48 s	1262.1 t=4.70 s
min	-1750.0 t=2.78 s	-1676.3 t=4.18 s	-1368.2 t=2.80 s

Desplazamientos horizontales de los pórticos

Los desplazamientos de cada uno de los pórticos se obtienen a partir de los desplazamientos de toda la estructura, por medio de:

$$\{u_p\} = [T_p]^T \{U_E\}$$

Por ejemplo, para el pórtico del eje A, se obtienen los desplazamientos horizontales en cada uno de los pisos, para los primeros 10 s de respuesta, mostrados en la Figura 14-25.

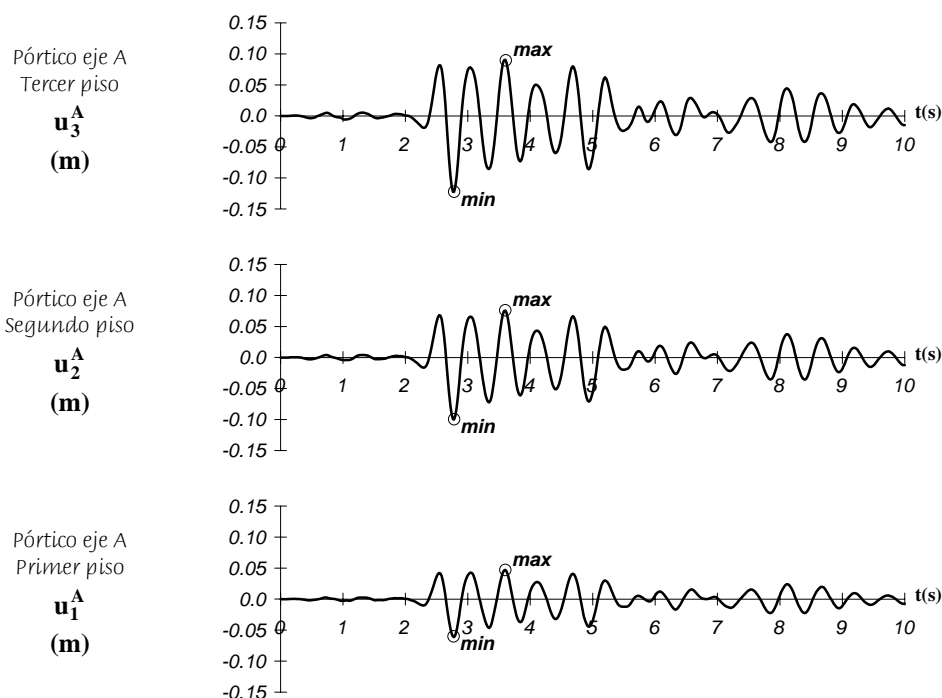


Figura 14-25 - Ejemplo 14-4 - Desplazamientos horizontales del pórtico del eje A

Los valores máximos de los desplazamientos horizontales obtenidos son los siguientes:

	u_3^A (m)	u_2^A (m)	u_1^A (m)
max	0.090526 en t = 3.60 s	0.075675 en t = 3.60 s	0.047086 en t = 3.60 s
min	-0.122361 en t = 2.77 s	-0.099950 en t = 2.77 s	-0.061263 en t = 2.77 s

Derivas de los pisos

Con base en los desplazamientos horizontales de los pisos del pórtico es posible calcular las derivas de cada uno de los pisos del pórtico, como el desplazamiento relativo entre un piso y el que está inmediatamente debajo, dividido por la altura del piso. Así se obtienen los siguientes valores máximos, y la variación en el tiempo mostrada en la Figura 14-26.

	Δ_3 (%h)	Δ_2 (%h)	Δ_1 (%h)
max	0.61% en t = 3.60 s	1.14% en t = 3.60 s	1.57% en t = 3.60 s
min	-0.93% en t = 2.77 s	-1.56% en t = 2.77 s	-2.04% en t = 2.77 s

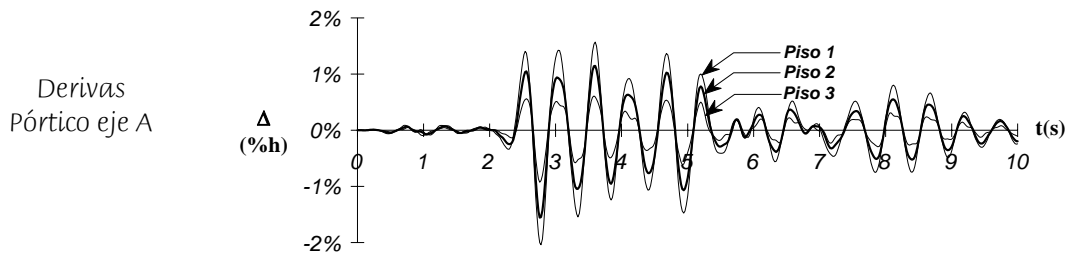


Figura 14-26 - Ejemplo 14-4 - Derivas del pórtico del eje A

Fuerzas en los elementos

Conociendo los desplazamientos horizontales del pórtico es posible determinar los valores de los desplazamientos de todos los grados de libertad que se habían condensado. Esto se logra por medio de la siguiente operación:

$$\{u_A^c\} = -[k_A^3]^{-1}[k_A^2]\{u_p^A\}$$

Una vez se tienen los desplazamientos de todos los grados de libertad del pórtico, es posible determinar las fuerzas en los elementos, multiplicando los desplazamientos apropiados por la matriz de rigidez del elemento, o utilizando el procedimiento explicado en la Sección 8.8, en el cual se emplea la matriz **[KT]**, la cual permite encontrar las fuerzas en los elementos en coordenadas locales utilizando los desplazamientos en coordenadas globales del pórtico.

Utilizando este último procedimiento para las fuerzas de la viga del primer piso del pórtico del eje A, localizada entre los ejes 1 y 2, se encuentran los siguientes valores para las fuerzas en el elemento en coordenadas locales.

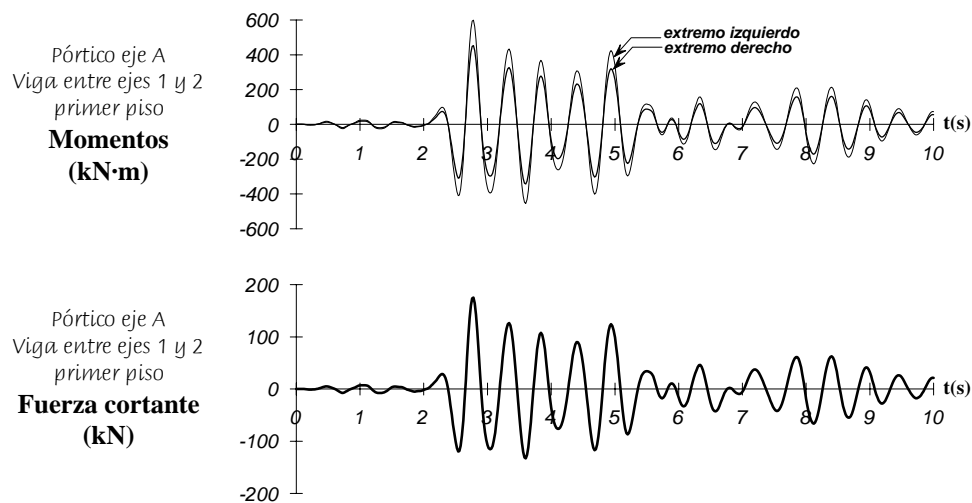


Figura 14-27 - Ejemplo 14-4 - Fuerzas en la viga del primer piso entre ejes 1 y 2 del pórtico del eje A

No tiene fuerza axial dado que hace parte del diafragma. Los valores máximos para las fuerzas de la viga entre ejes 1 y 2 del primer piso del pórtico del eje A son los siguientes:

	Momento izquierda (kN·m)	Momento derecha (kN·m)	Fuerza axial (kN)	Fuerza cortante (kN)
max	599.5, t = 2.78 s	452.7, t = 2.78 s	0.0	175.4, t = 2.78 s
min	-454.6, t = 3.60 s	-343.1, t = 3.60 s	0.0	-133.0, t = 3.60 s

Utilizando el mismo procedimiento para las fuerzas de la columna del eje 1 del primer piso del pórtico del eje A, se encuentran los siguientes valores para las fuerzas en el elemento en coordenadas locales.

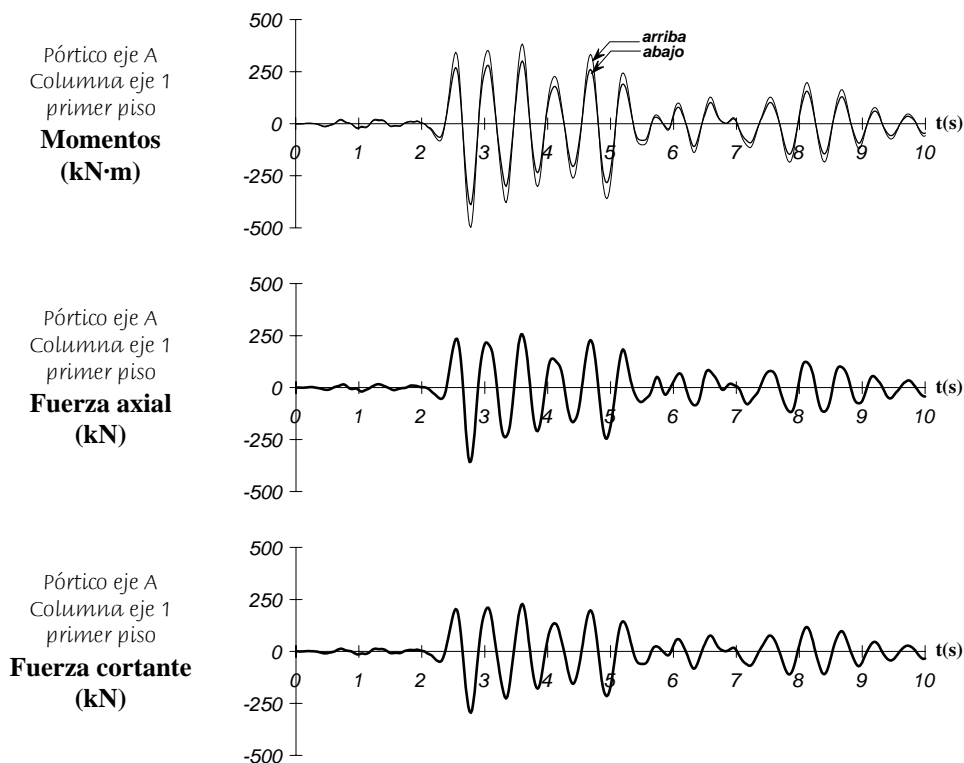


Figura 14-28 - Ejemplo 14-4 - Fuerzas en la columna del primer piso del eje 1 del pórtico del eje A

Los valores máximos para las fuerzas de la columna del eje 1 del primer piso del pórtico del eje A son los siguientes:

	Momento arriba (kN·m)	Momento abajo (kN·m)	Fuerza axial (kN)	Fuerza cortante (kN)
<i>max</i>	301.6, $t=3.60$ s	383.9, $t=3.60$ s	256.6, $t=3.60$ s	228.5, $t=3.60$ s
<i>min</i>	-389.4, $t=2.78$ s	-497.9, $t=2.78$ s	-358.3, $t=2.78$ s	-295.8, $t=2.78$ s

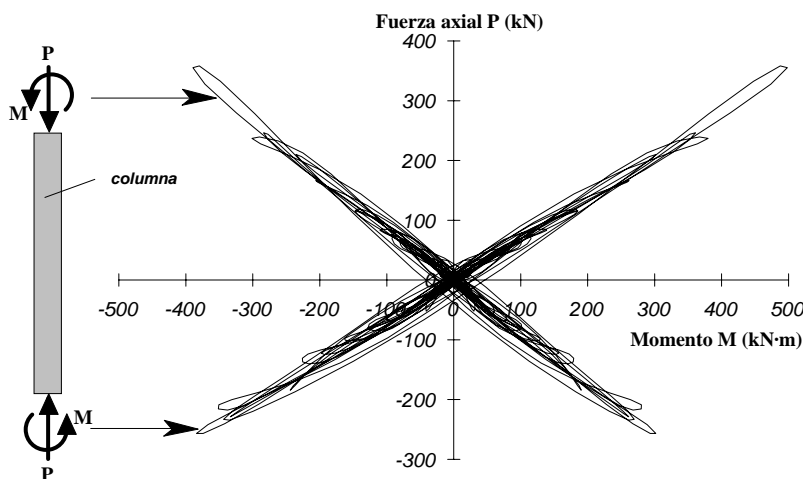


Figura 14-29 - Ejemplo 14-4 - M vs. P en la columna del primer piso del eje 1 del pórtico del eje A

La fuerza y el momento se pueden graficar de la misma manera como se utiliza para el diseño de columnas de concreto reforzado por medio de un diagrama de interacción. En la Figura 14-29 se

muestran los valores de momento y su correspondiente fuerza axial para la columna del primer piso, eje 1, del pórtico del eje A. Se dibujaron tanto para el momento arriba como para el momento abajo.

A las fuerzas que se presentan en la Figura 14-29 se le deben adicionar las fuerzas que estén actuando sobre la estructura en el momento que se inicia la respuesta al sismo. En este caso, se calcula una fuerza axial debida a la masa de la estructura, utilizando el área aferente a la columna. Esta fuerza axial es $0.700 \text{ kg/m}^2 \cdot 6/2 \text{ m} \cdot 7/2 \text{ m} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 = 72 \text{ kN/piso}$, lo cual nos conduce a una fuerza axial de $P = 216 \text{ kN}$ en el primer piso. El momento se estima utilizando los procedimientos indicados en [García, 1991], lo cual conduce a un valor de $M = 8.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$. En la Figura 14-30 se ha dibujado el diagrama de interacción de resistencia nominal (sin ϕ), M_n vs. P_n , para la columna de 0.3 m por 0.3 m de sección, con una cuantía de refuerzo longitudinal $\rho_t = 0.023$ y con una resistencia del concreto de $f'_c = 28.6 \text{ MPa}$ y un acero con resistencia a la fluencia $f_y = 430 \text{ MPa}$.

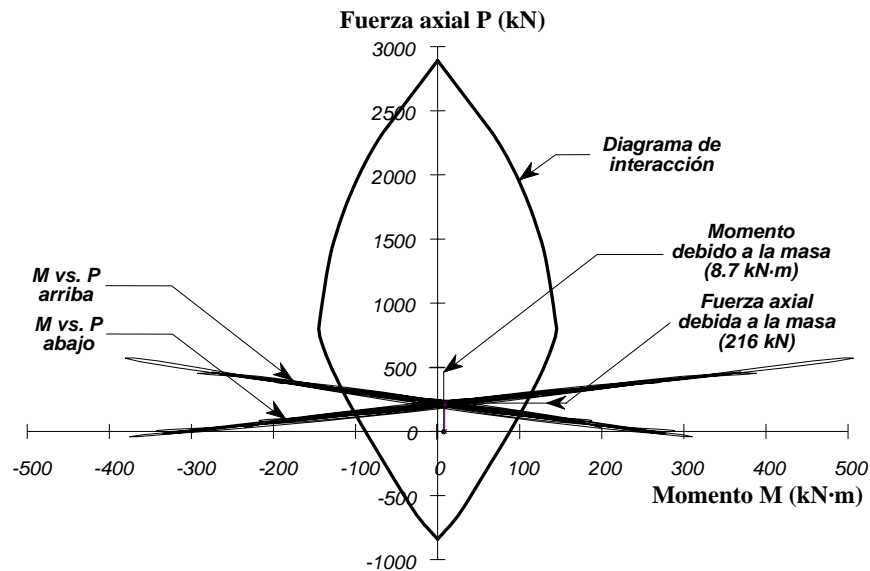


Figura 14-30 - Ejemplo 14-4 - M vs. P en la columna del primer piso del eje 1 del pórtico del eje A

El modelo matemático empleado en este ejemplo tiene la desventaja de que no hay compatibilidad de las deformaciones verticales de los nudos de los pórticos que llegan ortogonalmente al mismo nudo. Por ejemplo, la columna estudiada anteriormente hace parte del pórtico del eje A, pero a su vez también hace parte del pórtico del eje 1. Las fuerzas internas que se obtienen provienen de los resultados en cada instante para cada uno de los pórticos independientemente, como muestra la Figura 14-31.

De las seis componentes de fuerza internas que puede tener un elemento tridimensional, la única que falta es la torsión con respecto al eje longitudinal del elemento. Los dos momentos flectores están definidos con respecto a ejes mutuamente perpendiculares, por lo tanto son independientes, y corresponden a los dos momentos que deben emplearse en el diseño biaxial de la columna. Las dos fuerzas axiales son concordantes y tienen valores diferentes debido a la ausencia de compatibilidad de deformaciones verticales en el nudo. La fuerza axial a emplear en el diseño de la columna debe obtenerse como la suma de las dos fuerzas axiales provenientes de cada pórtico independiente, o sea tomando $P = P_1 + P_A$.

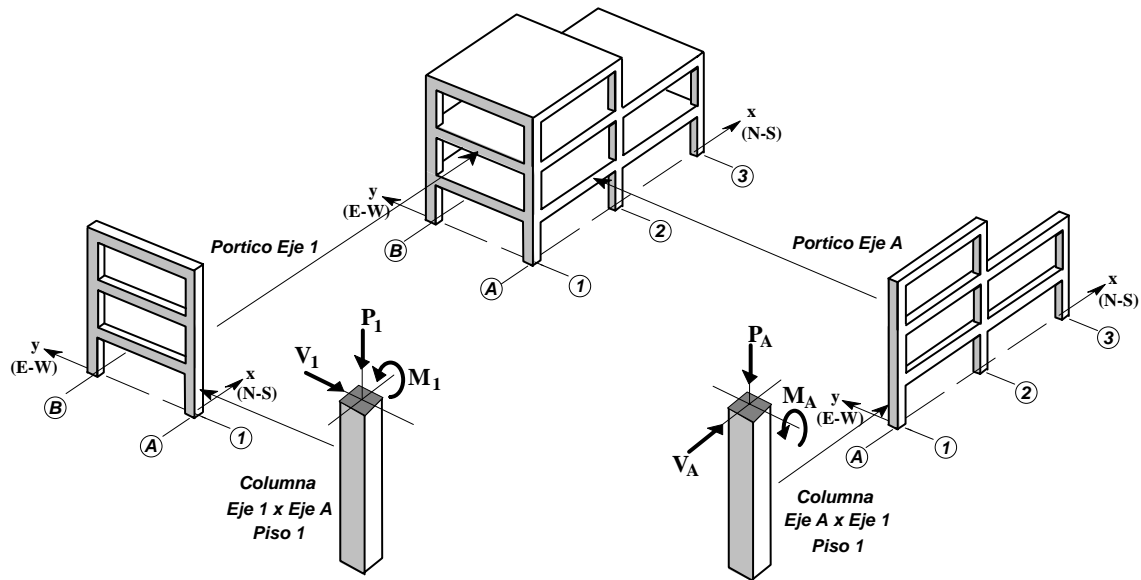


Figura 14-31 - Ejemplo 14-4 - Fuerzas en columnas comunes a dos pórticos

La deficiencia anotada del modelo matemático puede corregirse empleando un modelo de pórtico espacial, en el cual si existe esta compatibilidad y además se obtiene la torsión ausente en el modelo empleado.

Del Ejemplo 14-4 pueden derivarse algunas conclusiones que son importantes para entender los resultados de este tipo de análisis cronológicos y que serán de mucha utilidad en la interpretación del análisis modal espectral que se presenta en el Capítulo 15.

Los acelerogramas empleados en el ejemplo se muestran en la Figura 5-13. En la Figura 5-14 se presentan las aceleraciones que produce el registro en el plano horizontal. Es evidente allí la gran irregularidad de los movimientos. Indudablemente esta irregularidad se manifiesta en la respuesta que se obtienen para la estructura empleada.

Un aspecto importante de notar, en la Figura 14-21 del Ejemplo 14-4, es que los máximos de la respuesta para las coordenadas desacopladas $\{\eta\}$, ocurren en los primeros 5 s del acelerograma. Para estructuras con períodos más largos, es muy probable que la respuesta máxima se presente más tarde. En la tabla que acompaña la Figura 14-21 puede verse que las respuestas máximas para cada coordenada desacoplada, y por ende para cada modo de vibración se presentan a los 2.64 s y a los 4.48 s de iniciada la respuesta. En esta tabla solo se han colocado los tiempos para los valores máximos de la respuesta en valor absoluto, aunque se ha conservado su signo. Sólo se presentan los máximos en valor absoluto dado que estos valores corresponden a los valores que se leerían de un espectro de desplazamientos, como lo indica la definición de espectro de respuesta dada en la ecuación (5-2).

Cuando se realiza la transformación de las coordenadas desacopladas $\{\eta\}$, a los grados de libertad de la estructura $\{U\}$, es evidente en la Figura 14-22, que los valores máximos para los desplazamientos en la dirección x y en la dirección y siguen presentándose en el mismo instante en que ocurrió el máximo para el primero y el segundo modo respectivamente ($t = 4.48$ s y $t = 2.76$ s). Para los grados de libertad rotacionales, los máximos no coinciden con ninguno de los tiempos a que se presentó un máximo de las coordenadas desacopladas.

Cuando se obtienen las fuerzas inerciales $\{F\}$, Figura 14-23, puede verse en la tabla que acompaña la figura, que algunos valores de las fuerzas inerciales tienen su valor máximo en el momento en que ocurre un máximo en las coordenadas desacopladas $\{\eta\}$, pero no para todas ellas. No obstante, al calcular el corte basal en cada dirección y el momento torsional de toda la estructura, el valor máximo del corte basal en la dirección y coincide ($t = 4.48$ s) con la ocurrencia del máximo valor para la coordenada desacoplada del primer modo, y en la dirección x está muy cerca del instante ($t = 2.76$ s) en que ocurre el máximo de la coordenada desacoplada del segundo modo.

Cuando se calculan los desplazamientos del pórtico del eje A, puede verse en la Figura 14-25 que el valor máximo corresponde a los valores negativos, y que estos ocurren para $t = 2.78$ s, un instante después de que ocurre el máximo de la coordenada generalizada correspondiente al segundo modo, el cual es un modo con tendencia a desplazamiento en el sentido x . Los valores máximos positivos ocurren a un tiempo $t = 3.60$ s, el cual coincide con el máximo corte basal positivo en el sentido x . Los máximos valores de deriva para este pórtico, ocurren simultáneamente con los máximos desplazamientos, como muestra la Figura 14-26 y la tabla que la acompaña. Lo mismo se presenta con los valores de las fuerzas en la viga del primer piso, entre ejes 1 y 2, del pórtico del eje A, como muestra la Figura 14-27 y su tabla acompañante. La misma situación ocurre con los valores de las fuerzas en la columna del primer piso, en el eje 1, del pórtico del eje A, como muestra la Figura 14-28 y su tabla acompañante.

En resumen, los valores máximos de los diferentes parámetros estudiados tienden a ocurrir simultáneamente, o un pequeño tiempo después, de que ocurre un máximo de la coordenada generalizada cuyo modo domina la respuesta del parámetro bajo estudio. No sobra hacer un último comentario, el registro de Corralitos es un registro muy fuerte, con aceleraciones máximas del terreno del orden de 0.63g en el sentido NS y 0.48g en el sentido EW, lo cual explica los valores tan altos para las derivas y las fuerzas en los elementos, aun para una estructura respondiendo elásticamente al sismo.

El modelo matemático de la estructura que se empleó en el ejemplo se seleccionó en aras de una mayor claridad en la presentación. Este modelo es análogo al que emplea el programa de computador TABS [Wilson y Dovey, 1972]. Este programa fue uno de los primeros programas de análisis estructural con modelación de diafragma rígido de aplicación práctica, e introdujo un aspecto muy importante en la ingeniería estructural moderna, consistente en poder analizar la estructura como un todo y no como una serie de elementos independientes que solo se estudiaban en conjunto de una manera muy simplista. Además introdujo unas técnicas de solución algorítmica muy eficientes en computadores con poca memoria principal, las cuales aún hoy en día son empleadas por gran número de programas.

Desde esa época había conciencia acerca de la deficiencia del modelo matemático empleado debida a la falta de compatibilidad de las deformaciones verticales entre diferentes pórticos. El programa ETABS [Wilson, Hollings y Dovey, 1975], aparecido poco tiempo después, corregía esta deficiencia empleando pórticos tridimensionales, lo cual se ha mantenido en las versiones subsiguientes del mismo programa, [Maison y Neuss, 1983] y [Habibullah, 1994]. De igual manera, otros programas tales como COMBAT [Computech, 1983] y SAP90 [Wilson y Habibullah, 1992], emplean también pórticos tridimensionales para tomar en cuenta la compatibilidad de deformaciones verticales en las columnas. Todos los programas mencionados permiten realizar un análisis cronológico de la estructura, simplemente varía de uno a otro la forma como se presentan los resultados del análisis.

Tema N° 20 — Análisis modal espectral

15.1 — Introducción

Aunque la capacidad de los computadores, tanto en tamaño de la memoria como en velocidad, ha venido en aumento en los últimos años, a niveles nunca sospechados; la obtención de la respuesta dinámica por medio de técnicas de análisis cronológico, como las presentadas en el Capítulo anterior, sigue siendo dispendiosa y de difícil interpretación para efectos de diseño.

Dado que los valores que se leen de un espectro, ya sea de respuesta o de diseño, corresponden al valor máximo que puede tener la respuesta de un sistema dinámico de un grado de libertad -- en términos de desplazamiento, velocidad o aceleración -- es evidente que conociendo el espectro se puede determinar el valor máximo de la respuesta que puede tener un grado de libertad desacoplado, y por ende se podría utilizar estos valores para determinar la máxima respuesta que tendría un sistema de varios grados de libertad.

El presente Capítulo se dedica a la formulación del análisis dinámico de sistemas de varios grados de libertad utilizando espectros, ya sean de respuesta ante sismos registrados, o de diseño para movimientos sísmicos futuros. Las metodologías presentadas en el presente Capítulo, al igual que en el anterior, solo pueden emplearse en sistema que permanecen dentro del rango elástico y donde es aplicable el principio de superposición.

15.2 — Formulación del análisis modal espectral

De acuerdo con lo presentado en las Secciones 10.4 y 14.4, las ecuaciones de movimiento para un sistema sometido a una excitación en su base tienen la forma dada en la siguiente ecuación:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = -[\mathbf{M}][\gamma]\{\ddot{\mathbf{x}}_o\} \quad (15-1)$$

Las matrices de masa $[\mathbf{M}]$ y rigidez $[\mathbf{K}]$ de la estructura se obtienen de acuerdo con lo presentado en el Capítulo 11. La obtención de la matriz $[\gamma]$ se realiza de acuerdo con lo presentado en las Secciones 11.3.1(h), 11.5 y 14.8, y su forma depende de si la estructura se ve afectada por una, dos o tres componentes del acelerograma, representadas en un vector $\{\ddot{\mathbf{x}}_o\}$ columnar con 1, 2 o 3 términos, casos en los cuales $[\gamma]$ tiene dimensiones $\mathbf{n} \times \mathbf{1}$, $\mathbf{n} \times \mathbf{2}$ ó $\mathbf{n} \times \mathbf{3}$ respectivamente, siendo \mathbf{n} el número de grados de libertad de la estructura. Dado que podemos obtener los modos y frecuencias, $[\Phi]$ y $[\omega^2]$, de la estructura con base en sus propiedades para vibración libre representadas en el lado derecho igual a cero en la ecuación (15-1); la solución del sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas se obtiene desacoplando el sistema por medio de la aplicación de la siguiente transformación de coordenadas:

$$\{\mathbf{U}\} = [\Phi]\{\eta\} \quad (15-2)$$

y derivando dos veces contra el tiempo:

$$\{\ddot{\mathbf{U}}\} = [\Phi]\{\ddot{\eta}\} \quad (15-3)$$

Reemplazando (15-2) y (15-3) en (15-1), y premultiplicando por $[\Phi]^T$ obtenemos:

$$\underbrace{[\Phi]^T[\mathbf{M}][\Phi]}_{[\mathbf{I}]} \{\ddot{\eta}\} + \underbrace{[\Phi]^T[\mathbf{K}][\Phi]}_{[\omega^2]} \{\eta\} = -\underbrace{[\Phi]^T[\mathbf{M}][\gamma]}_{[\alpha]} \{\ddot{\mathbf{x}}_o\} \quad (15-4)$$

Tanto $[\mathbf{I}]$ como $[\omega^2]$, son matrices diagonales, y por esto el sistema se desacopla, lo cual implica que se tienen \mathbf{n} ecuaciones independientes de un grado de libertad del tipo:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = -\alpha_i \ddot{x}_o \quad (15-5)$$

y si se aplica amortiguamiento modal:

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = -\alpha_i \ddot{x}_o \quad (15-6)$$

La solución para las ecuaciones (15-5) o (15-6) se puede llevar a cabo por medio de cualquiera de las metodologías presentadas en los Capítulos 2 y 3 para sistemas de un grado de libertad. Una vez se obtienen los valores de $\{\eta(t)\}$, para cualquier tiempo t , por medio de la ecuación (15-2) se pueden obtener los desplazamientos de la estructura para ese instante.

La diferencia fundamental entre el análisis modal cronológico y el análisis modal espectral se presenta aquí, pues de acuerdo con la definición de *espectro de respuesta de desplazamiento* (Sección 5.2): el máximo valor que puede tener el desplazamiento relativo u , entre la base y la masa de un sistema de un grado de libertad sometido a un acelerograma en su base $\ddot{x}_o(t)$, es precisamente el valor que se lee del espectro de desplazamiento $S_d(T, \xi)$, calculado para el mismo acelerograma, utilizando los valores del período T , y el amortiguamiento ξ , del mismo sistema de un grado de libertad.

Por lo tanto el máximo valor que puede tener η_i en las Ecuaciones (15-5) o (15-6) corresponde al valor leído del espectro de desplazamientos de la excitación amplificado por el coeficiente de participación α_i . Entonces:

$$(\eta_i)_{\max} = |\alpha_i \cdot S_d(T_i, \xi_i)| \quad (15-7)$$

Donde $T_i = 2\pi/\omega_i$ y ξ_i corresponde al valor del amortiguamiento modal con las limitaciones expresadas al respecto en la Sección 12.6. Cuando se dispone de el *espectro de aceleraciones*, puede utilizarse la transformación indicada en la ecuación (5-11), también tomando en cuenta las limitaciones impuestas por las premisas empleadas en su deducción, entonces el valor máximo de η_i se puede determinar, alternativamente, por medio de:

$$(\eta_i)_{\max} = \left| \alpha_i \cdot \frac{1}{\omega_i^2} \cdot S_a(T_i, \xi_i) \right| = \left| \alpha_i \cdot \frac{T_i^2}{4\pi^2} \cdot S_a(T_i, \xi_i) \right| \quad (15-8)$$

Dado que, por medio de cualquiera de los dos procedimientos alternos, se dispone de unos valores máximos de los grados de libertad desacoplados η_i ; en principio, bastaría con aplicar la transformación de coordenadas implícita en la ecuación (15-2) para obtener los valores máximos de los desplazamientos de los grados de libertad de la estructura $\{U\}$. Desafortunadamente, *este procedimiento es erróneo* debido a que los valores máximos de los desplazamientos, o aceleraciones, que se coleccionan en el espectro de respuesta no ocurren en el mismo instante en el tiempo. En la Figura 15-1, tomada de la Figura 5-3 se muestra cómo en el cálculo del espectro de desplazamientos las respuestas para los diferentes períodos de vibración ocurren en instantes diferentes.

Además, debe notarse que el signo, positivo o negativo, de la respuesta también se pierde, debido a que al espectro se lleva el valor absoluto de ella.

Dado que la ecuación (15-2), implícitamente, realiza la superposición de las respuestas individuales de cada uno de los modos:

$$\begin{aligned} \{U\} &= [\Phi] \{\eta\} = \sum_{i=1}^n \{\phi^{(i)}\} \eta_i(t) \\ &= \{\phi^{(1)}\} \eta_1(t) + \{\phi^{(2)}\} \eta_2(t) + \dots + \{\phi^{(n)}\} \eta_n(t) \\ &= \{U^{(1)}\} + \{U^{(2)}\} + \dots + \{U^{(n)}\} \end{aligned} \quad (15-9)$$

su utilización directa, tal como se presenta en la ecuación (15-9) es errada pues suma valores de desplazamientos modales que no ocurren en el mismo instante y además no toma en cuenta su signo al sumar algebraicamente.

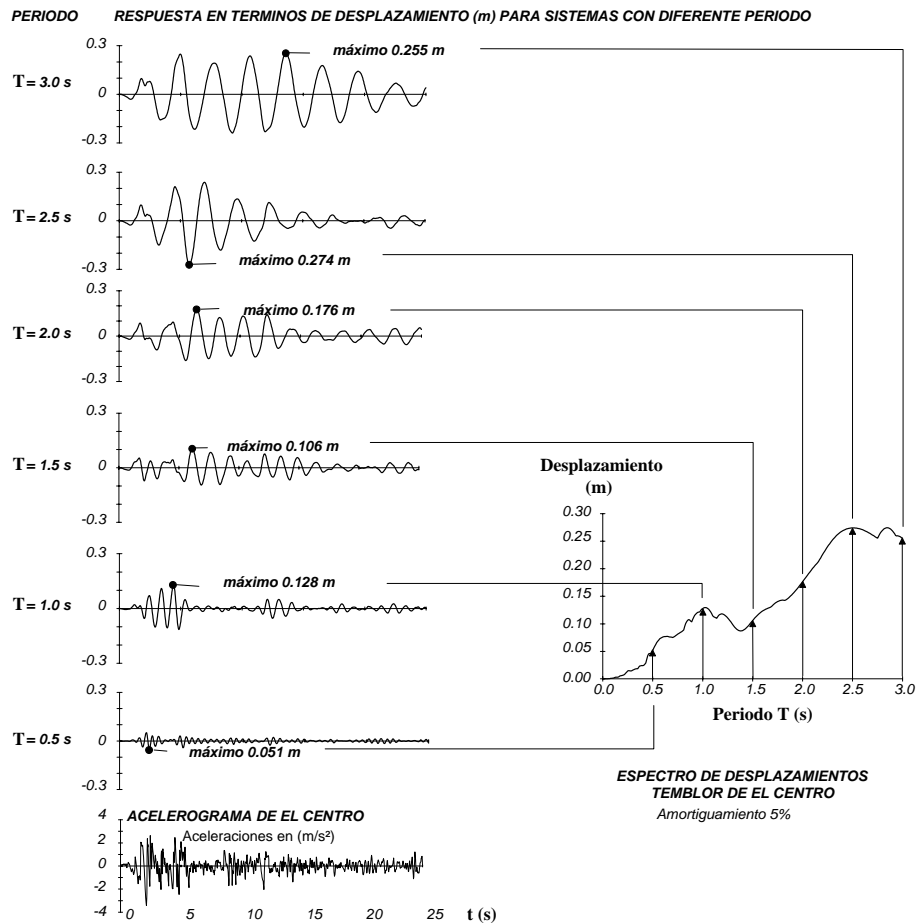


Figura 15-1 - Cálculo del espectro de respuesta de desplazamientos del Temblor de El Centro. Debe observarse que los valores que se coleccionan en el espectro no ocurren en el mismo instante

En principio, las respuestas modales individuales son correctas y corresponden a los máximos valores que tendrían cada una de ellas, simplemente hay que tener en cuenta que pueden ser tanto positivas como negativas. La dificultad radica en determinar una manera de combinarlas para obtener una respuesta apropiada. Esto se logra por medio de lo que se conoce con el nombre de *métodos de combinación modal espectral*. La presentación de estos métodos se hace más adelante en la Sección 15.3, la cual se dedica a discutir sus fundamentos y la forma como deben emplearse; no obstante, es importante dejar establecidas las diferentes formas que pueden tener las respuestas modales individuales, pero sin llegar a combinarlas.

Los desplazamientos dinámicos modales máximos que se presentan en la estructura, correspondientes a cada modo individual, por ejemplo el modo (i), pueden obtenerse por medio de:

$$\{U_{\text{mod}}^{(i)}\} = \{\phi^{(i)}\} \cdot (n_i)_{\text{max}} = \{\phi^{(i)}\} \cdot |\alpha_i \cdot S_d(T_i, \xi_i)| \quad (15-10)$$

En la ecuación anterior debe tenerse en cuenta que el resultado multiplicado por (-1) también es factible, dado que se trata de un movimiento alternante derivado de un fenómeno ondulatorio. Esta posibilidad de un cambio de signo se manifiesta en todas las diferentes formas de la respuesta modal.

Para cada modo individual (i), las fuerzas dinámicas inerciales modales máximas que se presentan en la estructura pueden obtenerse multiplicando los desplazamientos modales máximos por la matriz de rigidez de la estructura:

$$\{F_{\text{mod}}^{(i)}\} = [K]\{U_{\text{mod}}^{(i)}\} = [K]\{\phi^{(i)}\} \cdot (\eta_i)_{\text{max}} = [K]\{\phi^{(i)}\} \cdot |\alpha_i \cdot S_d(T_i, \xi_i)| \quad (15-11)$$

Cada una de estas fuerzas modales máximas pueden utilizarse como un conjunto de fuerzas estáticas y con ellas, independientemente, por medio de un análisis estático convencional, llegar a encontrar las fuerzas internas causadas por el modo (i) en cada uno de los elementos de la estructura. Estas fuerzas internas modales máximas pueden obtenerse, también, utilizando los desplazamientos modales máximos obtenidos por medio de la ecuación (15-10). Las dos alternativas conducen a resultados idénticos.

En este punto se tendría la respuesta máxima, individual por modo, de los diferentes parámetros relevantes causados por unas fuerzas inerciales aplicadas a la estructura como si fueran fuerzas estáticas externas. Estos parámetros comprenden las fuerzas internas en los elementos de la estructura, las derivas de piso, el corte basal y el momento de vuelco, entre otros. Habrá tantos conjuntos independientes de parámetros como modos tenga la estructura. Tan solo bastaría combinarlos.

Ejemplo 15-1

Se desea encontrar los valores de la respuesta del edificio empleado en el Ejemplo 14-3 de la Sección 14.5, al ser sometido a la componente N-S del temblor de El Centro, California, de Mayo 18 de 1940, empleando técnicas espectrales. Las propiedades de masa y de rigidez están descritas en el Ejemplo 14-3. El edificio se muestra nuevamente en la Figura 15-2. Hay interés en la respuesta de la estructura en la dirección mostrada en la figura.

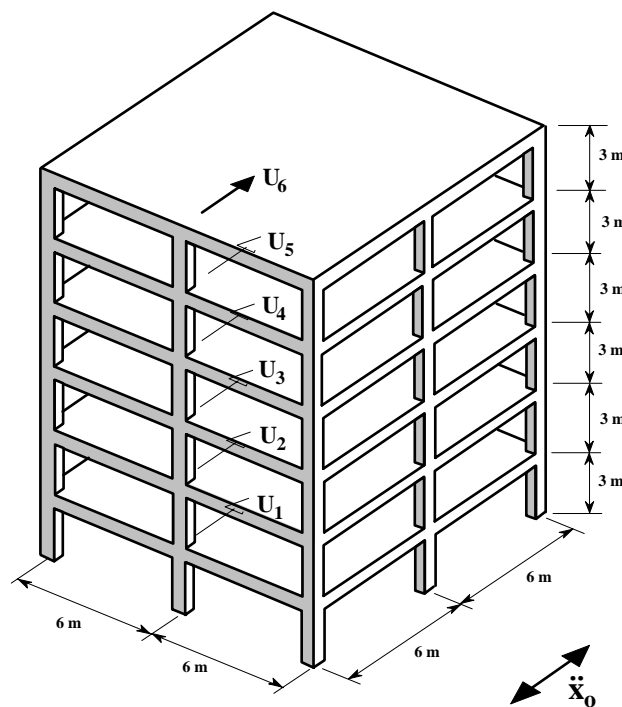


Figura 15-2 - Ejemplo 15-1

Las ecuaciones de movimiento, del Ejemplo 14-3, son las siguientes:

$$[M_E]\{\ddot{U}\} + [K_E]\{U\} = -[M_E][\gamma]\ddot{x}_0$$

$$\begin{bmatrix} 256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 256 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_6 \\ \ddot{U}_5 \\ \ddot{U}_4 \\ \ddot{U}_3 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_1 \end{Bmatrix} + 10^3 \times \begin{bmatrix} 216.76 & -306.77 & 105.49 & -19.561 & 4.2822 & -0.51088 \\ -306.77 & 668.24 & -475.14 & 137.94 & -29.375 & 5.3857 \\ 105.49 & -475.14 & 731.37 & -493.23 & 159.60 & -29.327 \\ -19.561 & 137.94 & -493.23 & 749.02 & -494.47 & 145.71 \\ 4.2822 & -29.375 & 159.60 & -494.47 & 738.11 & -515.90 \\ -0.51088 & 5.3857 & -29.327 & 145.71 & -515.90 & 889.94 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_6 \\ U_5 \\ U_4 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{Bmatrix} = -[M] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{x}_0$$

Al resolver el problema de valores propios planteado por la anterior ecuación de equilibrio, se obtienen las siguientes frecuencias y períodos:

Modo	ω^2 (rad/s) ²	ω (rad/s)	f (Hertz)	T (s)
1	29.108	5.3952	0.85866	1.1646
2	301.81	17.373	2.76495	0.3616
3	973.78	31.205	4.96647	0.2013
4	2494.3	49.943	7.94849	0.1258
5	4686.5	68.458	10.89550	0.0918
6	7113.8	84.344	13.42372	0.0745

Los modos de vibración correspondientes son:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.036721 & -0.032775 & 0.029168 & -0.020667 & 0.013049 & -0.005955 \\ 0.033690 & -0.011592 & -0.014245 & 0.032483 & -0.032188 & 0.018512 \\ 0.028524 & 0.014524 & -0.034529 & 0.005317 & 0.028533 & -0.029103 \\ 0.020961 & 0.033322 & -0.005049 & -0.034504 & -0.003317 & 0.033609 \\ 0.012243 & 0.033525 & 0.031633 & 0.006893 & -0.024392 & -0.031454 \\ 0.004460 & 0.015888 & 0.025184 & 0.034025 & 0.035774 & 0.023711 \end{bmatrix}$$

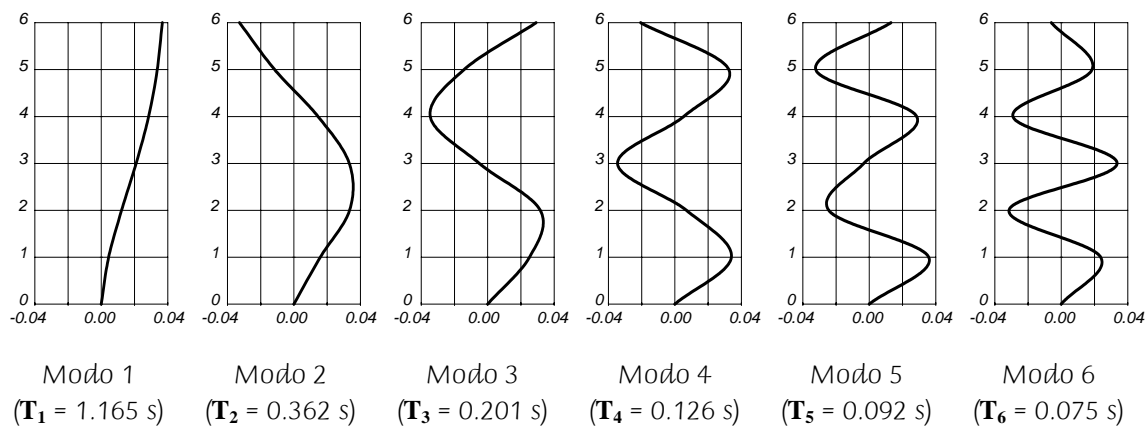


Figura 15-3 - Ejemplo 15-1 - Modos y períodos de vibración de la estructura

Los coeficientes de participación son:

$$\{\alpha\} = [\Phi]^T [M] [\gamma] = \begin{Bmatrix} 34.970 \\ 13.540 \\ 8.2331 \\ 6.0279 \\ 4.4695 \\ 2.3861 \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciones desacopladas son:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{\eta}_1 + \omega_1^2\eta_1 &= -34.970\ddot{x}_0 \\ \ddot{\eta}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{\eta}_2 + \omega_2^2\eta_2 &= -13.540\ddot{x}_0 \\ \ddot{\eta}_3 + 2\xi_3\omega_3\dot{\eta}_3 + \omega_3^2\eta_3 &= -8.2331\ddot{x}_0 \\ \ddot{\eta}_4 + 2\xi_4\omega_4\dot{\eta}_4 + \omega_4^2\eta_4 &= -6.0279\ddot{x}_0 \\ \ddot{\eta}_5 + 2\xi_5\omega_5\dot{\eta}_5 + \omega_5^2\eta_5 &= -4.4695\ddot{x}_0 \\ \ddot{\eta}_6 + 2\xi_6\omega_6\dot{\eta}_6 + \omega_6^2\eta_6 &= -2.3861\ddot{x}_0 \end{aligned}$$

En las seis ecuaciones, de acuerdo con el enunciado del problema, $\xi_i = 0.05$.

La respuesta para cada una de estas ecuaciones desacopladas, se obtiene utilizando el espectro de desplazamientos de la componente N-S del temblor de El Centro. En la Figura 15-4 se muestra el espectro y la manera de obtener los valores correspondientes en función de los diferentes periodos de vibración correspondientes a cada uno de los modos de vibración.

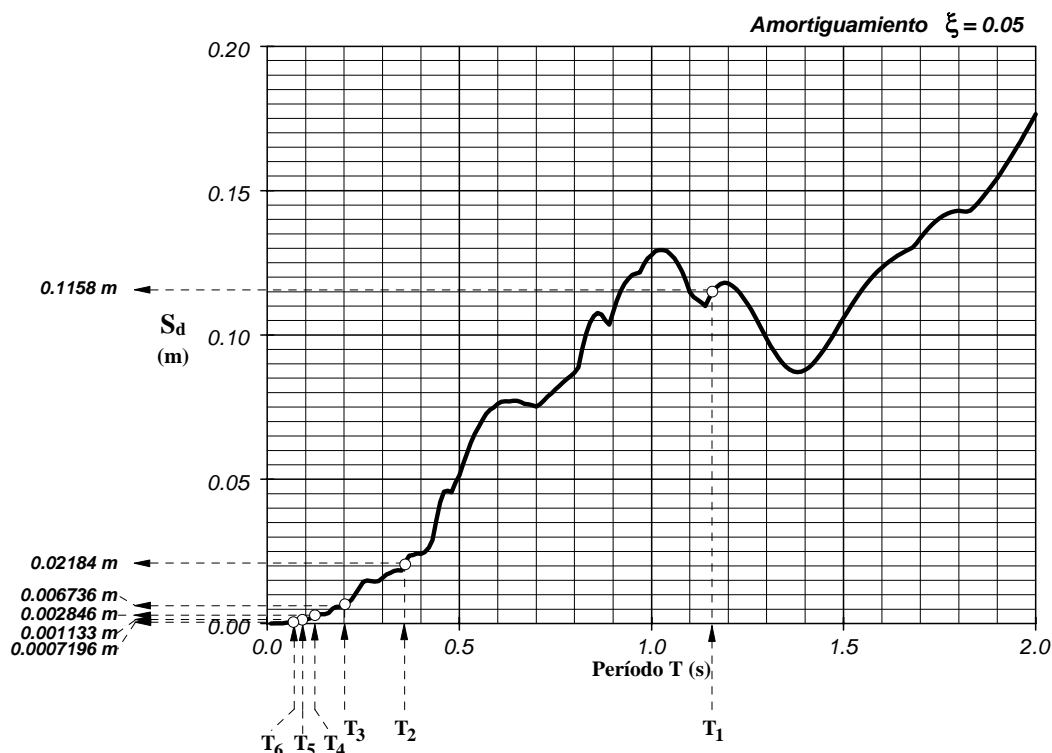


Tabla 15-1 - Ejemplo 15-1 - Valores leídos del espectro de desplazamiento

Modo	T_i (s)	$S_d(T_i, \xi_i)$ (m)
1	1.1646	0.1158
2	0.3616	0.02184
3	0.2013	0.006736
4	0.1258	0.002846
5	0.0918	0.001133
6	0.0745	0.0007196

Con la información anterior podemos obtener los valores máximos que pueden tener los grados de libertad desacoplados:

Tabla 15-2 - Ejemplo 15-1 - Valores máximos para los grados de libertad desacoplados

Modo	α_i	$S_d(T_i, \xi_i)$ (m)	$(\eta_i)_{\max} = \alpha_i \times S_d(T_i, \xi_i)$ (m)
1	34.9700	0.1158	4.0495
2	13.5400	0.02184	0.29571
3	8.2331	0.006736	0.055458
4	6.0279	0.002846	0.017155
5	4.4695	0.001133	0.0050639
6	2.3861	0.0007196	0.0017170

Desplazamientos máximos modales (m)

Los desplazamientos máximos en cada modo, se obtienen de:

$$\{U_{\text{mod}}^{(i)}\} = \{\Phi^{(i)}\} (\eta_i)_{\max}$$

Esto mismo se puede lograr matricialmente, colocando los valores de $(\eta_i)_{\max}$ en la diagonal de una matriz cuadrada $[\Gamma_{\text{mod}}]$ y realizando la operación:

$$[U_{\text{mod}}] = [\Phi][\Gamma_{\text{mod}}] = \left[\{U_{\text{mod}}^{(1)}\} \mid \{U_{\text{mod}}^{(2)}\} \mid \dots \mid \{U_{\text{mod}}^{(n)}\} \right]$$

En el presente caso, la matriz $[\Gamma_{\text{mod}}]$ tiene la forma siguiente:

$$[\Gamma_{\text{mod}}] = \begin{bmatrix} (\eta_1)_{\max} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\eta_2)_{\max} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\eta_3)_{\max} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\eta_4)_{\max} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\eta_5)_{\max} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\eta_6)_{\max} \end{bmatrix}$$

y al reemplazar los valores apropiados:

$$[\Gamma_{\text{mod}}] = \begin{bmatrix} 4.0495 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.29571 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0055458 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.015155 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0050639 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001717 \end{bmatrix}$$

Ahora obtenemos $[U_{\text{mod}}]$ así:

$$[U_{\text{mod}}] = [\Phi][\Gamma_{\text{mod}}] = \begin{bmatrix} \{U_{\text{mod}}^{(1)}\} & \{U_{\text{mod}}^{(2)}\} & \{U_{\text{mod}}^{(3)}\} & \{U_{\text{mod}}^{(4)}\} & \{U_{\text{mod}}^{(5)}\} & \{U_{\text{mod}}^{(6)}\} & \downarrow \text{gdl} \\ 0.148703 & -0.009692 & 0.001618 & -0.000355 & 0.000066 & -0.000010 & U_6 \\ 0.136429 & -0.003428 & -0.000790 & 0.000557 & -0.000163 & 0.000032 & U_5 \\ 0.115519 & 0.004295 & -0.001915 & 0.000091 & 0.000144 & -0.000050 & U_4 \\ 0.084882 & 0.009854 & -0.000280 & -0.000592 & -0.000017 & 0.000058 & U_3 \\ 0.049588 & 0.009914 & 0.001754 & 0.000118 & -0.000124 & -0.000054 & U_2 \\ 0.018061 & 0.004698 & 0.001397 & 0.000584 & 0.000181 & 0.000041 & U_1 \end{bmatrix}$$

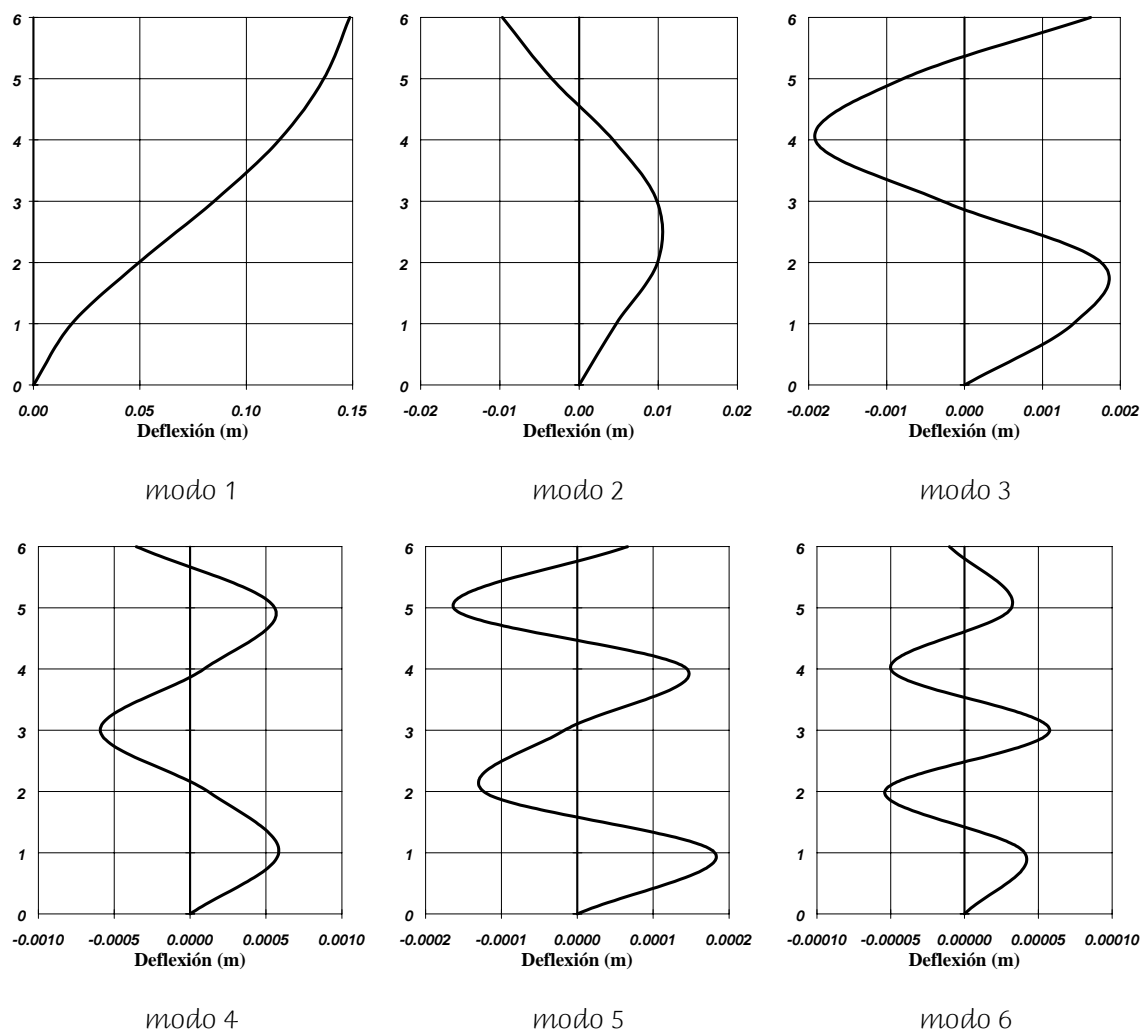


Figura 15-5 - Ejemplo 15-1 - Desplazamientos máximos horizontales de cada modo

Deriva de piso máxima (%h)

Utilizando los desplazamientos anteriores es posible calcular para cada modo la deriva máxima que puede tener cada piso de la estructura como el desplazamiento relativo entre piso y piso. Es costumbre expresar esta deriva como porcentaje de la altura de cada piso:

Tabla 15-3 - Ejemplo 15-1 - Valores máximos para la deriva de piso como porcentaje de su altura

piso	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5	modo 6
6	0.409%	-0.209%	0.080%	-0.030%	0.008%	-0.001%
5	0.697%	-0.257%	0.037%	0.016%	-0.010%	0.003%
4	1.021%	-0.185%	-0.054%	0.023%	0.005%	-0.004%
3	1.177%	-0.002%	-0.068%	-0.024%	0.004%	0.004%
2	1.051%	0.174%	0.012%	-0.016%	-0.010%	-0.003%
1	0.602%	0.157%	0.047%	0.019%	0.006%	0.001%

En la figura siguiente se muestran las derivas máximas de piso para cada uno de los modos:

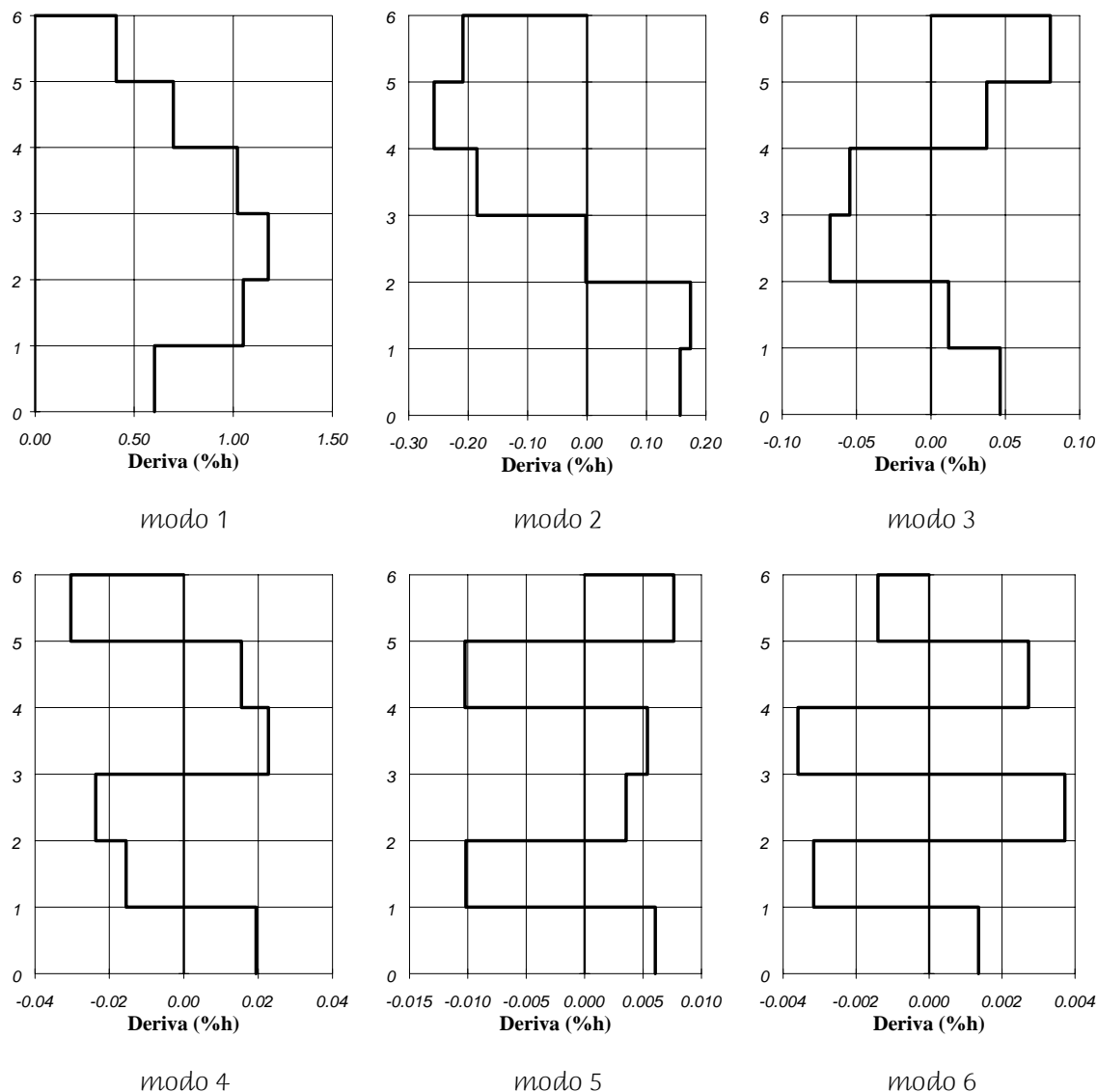


Figura 15-6 - Ejemplo 15-1 - Deriva de piso (%h) máxima de cada modo

Fuerzas inerciales máximas (kN)

Para determinar las fuerzas inerciales máximas por modo que impone el sismo sobre la estructura, se multiplica la matriz de rigidez de toda la estructura por los desplazamientos máximos correspondientes a cada modo, el resultado está en kN:

$$[F_{\text{mod}}] = [K_E][U_{\text{mod}}^{(1)} \mid U_{\text{mod}}^{(2)} \mid \dots \mid U_{\text{mod}}^{(6)}] = [F_{\text{mod}}^{(1)} \mid F_{\text{mod}}^{(2)} \mid \dots \mid F_{\text{mod}}^{(6)}]$$

$$[F_{\text{mod}}] = [K_E][U_{\text{mod}}] = \begin{matrix} \begin{matrix} \{F_{\text{mod}}^{(1)}\} & \{F_{\text{mod}}^{(2)}\} & \{F_{\text{mod}}^{(3)}\} & \{F_{\text{mod}}^{(4)}\} & \{F_{\text{mod}}^{(5)}\} & \{F_{\text{mod}}^{(6)}\} \end{matrix} & \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ F_6 \\ F_5 \\ F_4 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1108.3 & -748.9 & 403.3 & -226.4 & 79.3 & -18.6 \\ 1016.2 & -264.8 & -196.9 & 355.8 & -195.6 & 57.9 \\ 860.2 & 331.8 & -477.4 & 58.2 & 173.4 & -91.0 \\ 632.9 & 761.5 & -69.8 & -378.0 & -20.2 & 105.1 \\ 369.4 & 765.9 & 437.3 & 75.5 & -148.2 & -98.4 \\ 135.1 & 363.0 & 348.2 & 372.7 & 217.3 & 74.1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

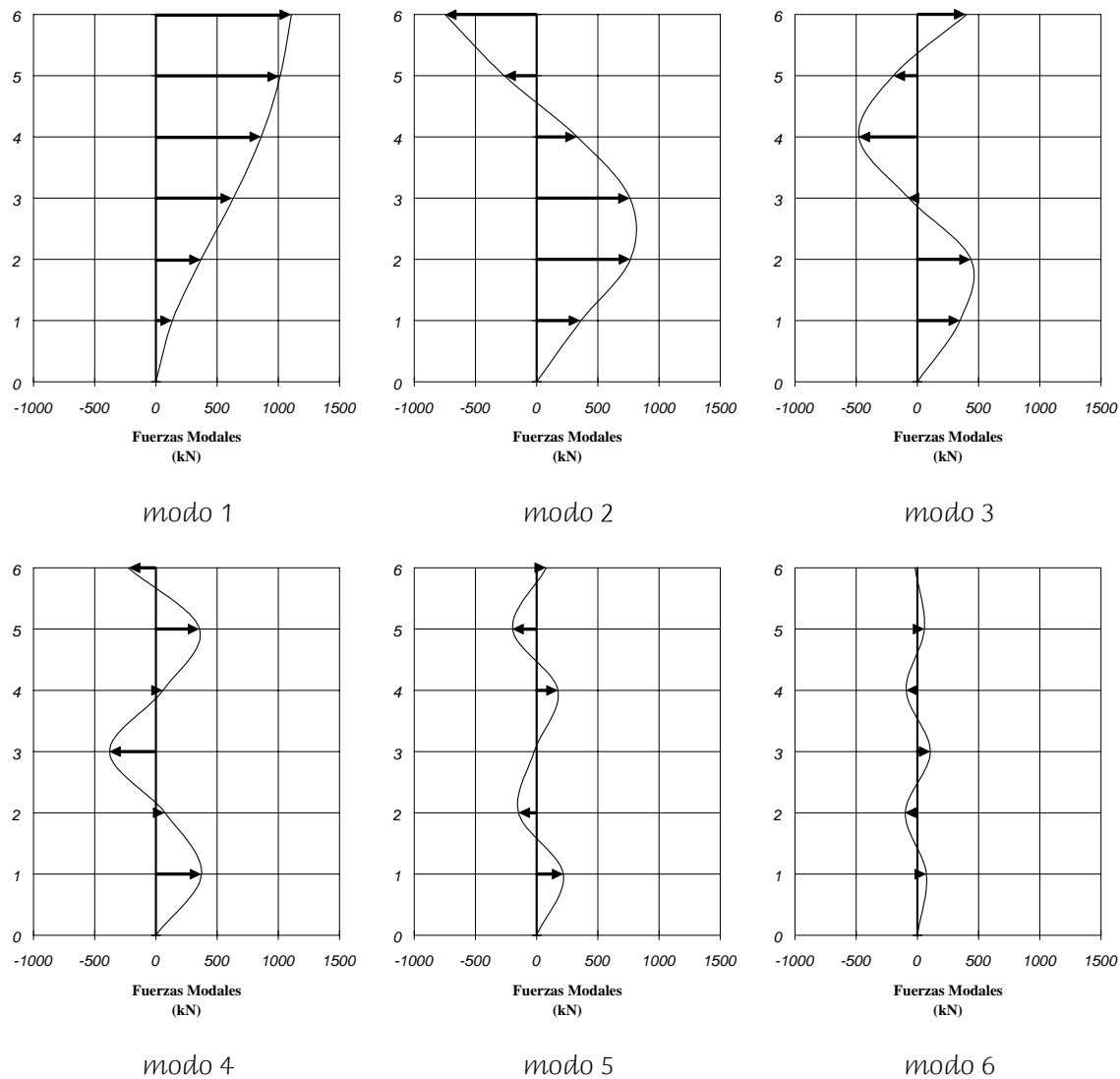


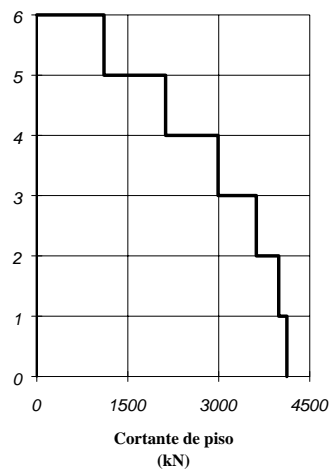
Figura 15-7 - Ejemplo 15-1 - Fuerzas inerciales máximas de cada modo

Cortante máximo modal de piso (kN)

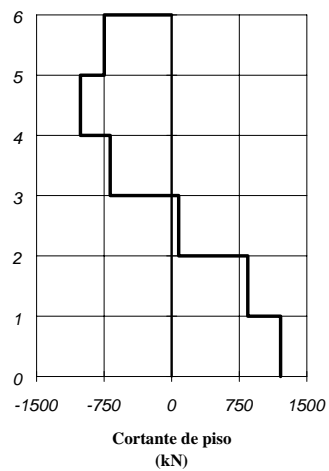
El cortante máximo modal de piso se define como $V_j^{(i)} = \sum_{k=j}^n F_k^{(i)}$

Tabla 15-4 - Ejemplo 15-1 - Valores máximos para el cortante de piso

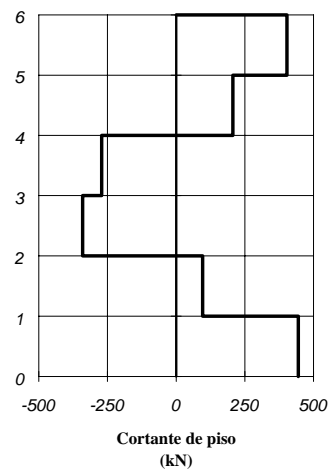
piso	$V_{\text{mod}}^{(1)}$ (kN)	$V_{\text{mod}}^{(2)}$ (kN)	$V_{\text{mod}}^{(3)}$ (kN)	$V_{\text{mod}}^{(4)}$ (kN)	$V_{\text{mod}}^{(5)}$ (kN)	$V_{\text{mod}}^{(6)}$ (kN)
6	1108.3	-748.9	403.3	-226.4	79.3	-18.6
5	2124.6	-1013.7	206.3	129.4	-116.3	39.3
4	2984.8	-681.9	-271.0	187.7	57.1	-51.7
3	3617.6	79.6	-340.9	-190.3	36.9	53.4
2	3987.0	845.5	96.5	-114.8	-111.3	-45.0
1	4122.1	1208.5	444.6	257.9	106.1	29.1
0	4122.1	1208.5	444.6	257.9	106.1	29.1



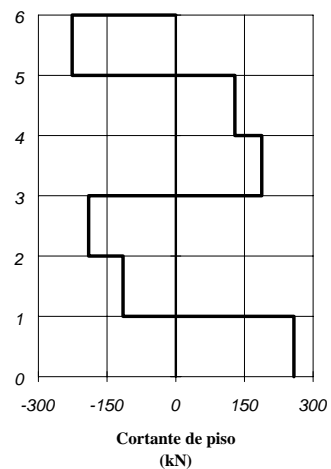
modo 1



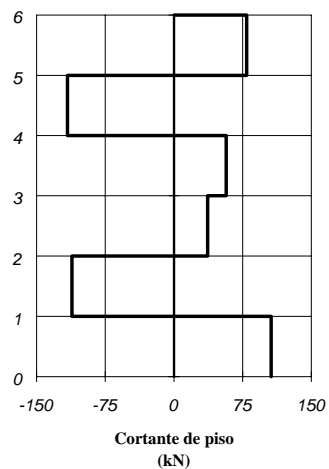
modo 2



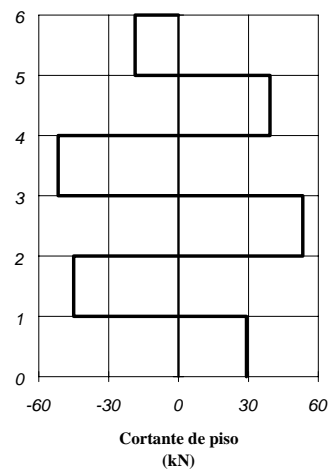
modo 3



modo 4



modo 5



modo 6

Figura 15-8 - Ejemplo 15-1 - Cortante máximo de piso para cada modo

Corte basal (kN)

El cortante en la base del edificio, en kN, de cada modo se puede obtener por medio de:

$$\{V_{\text{mod}}\} = \{1\}^T [F_{\text{mod}}] = \{1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1\}$$

1108.3	-748.9	403.3	-226.4	79.3	-18.6
1016.2	-264.8	-196.9	355.8	-195.6	57.9
860.2	331.8	-477.4	58.2	173.4	-91.0
632.9	761.5	-69.8	-378.0	-20.2	105.1
369.4	765.9	437.3	75.5	-148.2	-98.4
135.1	363.0	348.2	372.7	217.3	74.1

$$= \{4122.1 \mid 1208.5 \mid 444.6 \mid 257.9 \mid 106.1 \mid 29.1\}$$

$V_{\text{mod}}^{(1)}$
 $V_{\text{mod}}^{(2)}$
 $V_{\text{mod}}^{(3)}$
 $V_{\text{mod}}^{(4)}$
 $V_{\text{mod}}^{(5)}$
 $V_{\text{mod}}^{(6)}$

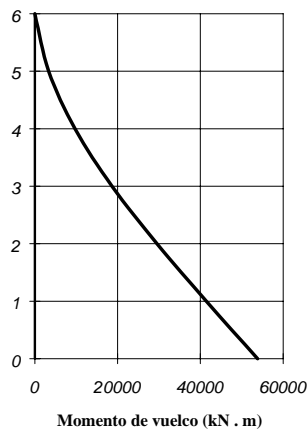
Puede verse que este valor corresponde al cortante obtenido para el primer piso en cada uno de los modos, en el paso anterior.

Momento de vuelco (kN · m)

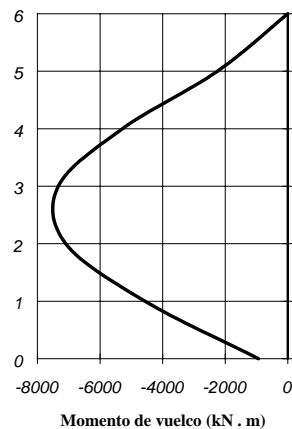
El momento de vuelco en cada piso se obtiene por medio de $M_j^{(i)} = \sum_{k=j+1}^n (h_k - h_j) \cdot F_j^{(i)}$

Tabla 15-5 - Ejemplo 15-1 - Valores máximos para el momento de vuelco de piso

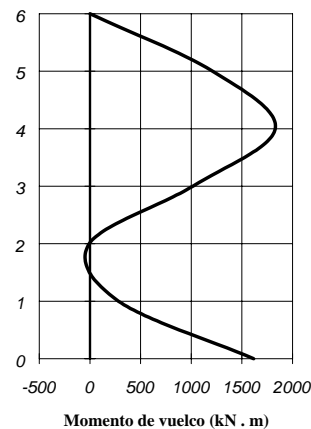
piso	$M_{\text{mod}}^{(1)}$ (kN · m)	$M_{\text{mod}}^{(2)}$ (kN · m)	$M_{\text{mod}}^{(3)}$ (kN · m)	$M_{\text{mod}}^{(4)}$ (kN · m)	$M_{\text{mod}}^{(5)}$ (kN · m)	$M_{\text{mod}}^{(6)}$ (kN · m)
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	3324.9	-2246.7	1209.8	-679.2	237.8	-55.9
4	9698.6	-5287.8	1828.7	-290.9	-111.0	61.9
3	18652.9	-7333.6	1015.6	272.2	60.2	-93.3
2	29505.8	-7094.7	-6.9	-298.7	170.9	66.8
1	41466.8	-4558.2	282.4	-643.1	-162.9	-68.2
0	53833.1	-932.7	1616.3	130.7	155.3	19.2



modo 1



modo 2



modo 3

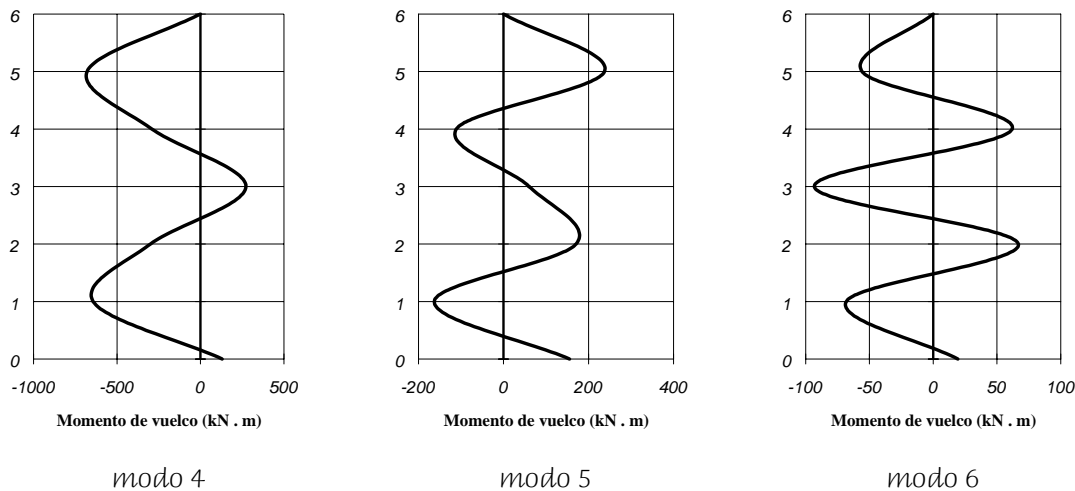


Figura 15-9 - Ejemplo 15-1 - Momento de vuelco para cada modo

El momento de vuelco en la base, en $\text{kN} \cdot \text{m}$, contribuido por cada modo, se puede obtener por medio de:

$$\{M_{\text{mod}}\} = \{h\}^T [F_{\text{mod}}] = \{18 \mid 15 \mid 12 \mid 9 \mid 6 \mid 3\} \begin{bmatrix} 1108.3 & -748.9 & 403.3 & -226.4 & 79.3 & -18.6 \\ 1016.2 & -264.8 & -196.9 & 355.8 & -195.6 & 57.9 \\ 860.2 & 331.8 & -477.4 & 58.2 & 173.4 & -91.0 \\ 632.9 & 761.5 & -69.8 & -378.0 & -20.2 & 105.1 \\ 369.4 & 765.9 & 437.3 & 75.5 & -148.2 & -98.4 \\ 135.1 & 363.0 & 348.2 & 372.7 & 217.3 & 74.1 \end{bmatrix}$$

$$= \{53833 \mid -933 \mid 1616 \mid 131 \mid 155 \mid 19\}$$

$$M_{\text{mod}}^{(1)} \quad M_{\text{mod}}^{(2)} \quad M_{\text{mod}}^{(3)} \quad M_{\text{mod}}^{(4)} \quad M_{\text{mod}}^{(5)} \quad M_{\text{mod}}^{(6)}$$

Dado que en ejemplo 14-3 se encontró la respuesta cronológica de la misma estructura ante el mismo acelerograma de El Centro, cuyo espectro se empleó en el presente ejemplo, pueden hacerse algunas comparaciones acerca de los valores máximos obtenidos en el ejemplo 14-3 y los valores modales máximos obtenidos en el presente ejemplo. En la tabla 15-6 se comparan los valores obtenidos para los grados de libertad desacoplados en el ejemplo 14-3, con los valores de estos mismos grados de libertad empleados en el presente ejemplo:

Tabla 15-6 - Ejemplo 15-1 - Comparación de los valores obtenidos en los ejemplos 14-3 y 15-1

Grado de libertad desacoplado	Ejemplo 14-3			Ejemplo 15-1
		η_i (m)	t (s)	$(\eta_i)_{\text{max}} = \alpha_i \times S_d(T_i, \xi_i)$ (m)
η_1	máximo	4.049463	5.90	4.0495
	mínimo	-3.664644	3.04	
η_2	máximo	0.295191	4.76	0.29571
	mínimo	-0.284971	4.58	
η_3	máximo	0.047073	3.22	0.055458
	mínimo	-0.054570	2.52	
η_4	máximo	0.010581	2.58	0.017155
	mínimo	-0.017115	2.64	
η_5	máximo	0.003448	2.12	0.0050639
	mínimo	-0.004919	2.24	
η_6	máximo	0.001150	2.16	0.0017170
	mínimo	-0.001495	2.22	

Como puede verse los valores son esencialmente iguales, y las diferencias obedecen a errores de precisión y redondeo dado que el algoritmo empleado para encontrar la respuesta en el ejemplo 14-3

es diferente del utilizado para calcular el espectro empleado en el presente ejemplo. Debe notarse, también, el hecho de que ninguno de los valores máximo o mínimo ocurre en el mismo instante.

El máximo desplazamiento horizontal de la cubierta del edificio, tal como se obtuvo en el ejemplo 14-3, fue de 0.148729 m. La suma algebraica de los valores de los desplazamientos modales máximos en el piso 6 obtenidos en el presente ejemplo, es 0.140330 m, y la suma de sus valores absolutos es 0.160443 m. Como puede verse la suma algebraica subestima el valor obtenido en la respuesta cronológica, y la suma de los valores absolutos la sobrestima.

El máximo valor del cortante en la base del edificio, tal como se obtuvo en el ejemplo 14-3, fue de 4355.8 kN. La suma de los valores de los cortantes modales máximos en la base obtenidos en el presente ejemplo es 6168.4 kN. Como puede verse la suma sobrestima el valor obtenido en la respuesta cronológica. Esto se debe a que en la respuesta cronológica el valor del cortante en la base está controlado por la respuesta del primer modo y los otros modos prácticamente no contribuyen a su valor cuando ocurre el máximo. El máximo valor del momento en la base del edificio, tal como se obtuvo en el ejemplo 14-3, fue de 54406 kN · m. La suma algebraica de los valores de los momentos modales máximos en la base obtenidos en el presente ejemplo es 54822 kN · m, y la suma de los valores absolutos es 56687 kN · m. Como puede verse las sumas sobrestiman el valor obtenido en la respuesta cronológica. El valor máximo del momento en la base para los modos diferentes del fundamental es pequeño comparativamente al del fundamental en el presente ejemplo, y en la respuesta cronológica ocurre algo similar.



15.3 — Métodos de combinación de la respuesta modal

15.3.1 — Generalidades

En la Sección anterior, con su ejemplo, se presentó la forma como se puede llegar a encontrar la respuesta máxima para cada uno de los modos para diferentes parámetros de la respuesta estructural ante un sismo. Así mismo en el ejemplo 15-1 se realizó al final una corta discusión acerca de las diferencias que se obtendrían para algunos de estos parámetros al comparar la respuesta cronológica con los resultados espectrales. Es evidente de la presentación que la suma de los valores absolutos de la respuesta espectral siempre conduce a valores mayores que los obtenidos por medio de la respuesta cronológica debido a la no simultaneidad de los valores máximos de las respuestas modales. En general cuando un modo llega a su máximo; las otras respuestas modales, en ese instante, son menores que sus máximos individuales. Es obvio, entonces, que el límite superior de la respuesta combinada \bar{r} , de los diferentes valores modales r_i , es la suma de los m valores absolutos, siendo m el número de modos:

$$\bar{r} \leq \sum_{i=1}^m |r_i| \quad (15-12)$$

El grado de conservatismo que se introduce por medio de la suma de los máximos valores absolutos varía de un parámetro a otro. Por esta razón se recurre a técnicas de combinación de la respuesta modal basadas en análisis estadístico y conceptos de vibraciones aleatorias, las cuales permiten determinar un valor máximo factible de la respuesta. En [Gupta, 1990] se deducen y discuten diferentes métodos de combinación de la respuesta modal. A continuación se presentan las metodologías más empleadas en la actualidad.

15.3.2 — Método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (RCSC)

El método más conocido de combinación modal espectral es el *método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (RCSC)*. Este método fue desarrollado por E. Rosenblueth en su tesis doctoral [Rosenblueth, 1951] y postula que para cualquier parámetro modal respuesta r , el valor máximo factible del parámetro \bar{r} , al tomar en cuenta las diferentes componentes modales máximas r_i , se obtiene a través de:

$$\bar{r} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^m r_i^2} \quad (15-13)$$

A la luz de la teoría moderna de confiabilidad [Ang y Tang, 1984], la respuesta de un grado de libertad desacoplado $\eta_i(t)$, ante una excitación sísmica puede considerarse una variable aleatoria con una media μ_i , y una desviación estándar σ_i . La transformación de estos grados de libertad desacoplados en los grados de libertad de la estructura se realiza por medio de la ecuación (15-2). Dado que esta transformación es lineal y suponiendo que los diferentes grados de libertad desacoplados son *estadísticamente independientes*, utilizando la teoría de probabilidad, es posible demostrar que el resultado de la transformación también es una variable aleatoria, cuya media es igual a emplear la transformación utilizando los valores medios

$$\{\bar{U}\} = [\Phi]\{\mu\} = \sum_{i=1}^m \{\phi^{(i)}\} \mu_i \quad (15-14)$$

y su desviación estándar [Ang y Tang, 1984], es:

$$\sigma_U = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \quad (15-15)$$

Si el sismo es suficientemente largo puede decirse que la respuesta lineal a él está la mitad del tiempo del lado positivo y la otra mitad del lado negativo, por lo tanto en este caso, la media del valor de $\eta_i(t)$ es cero ($\mu_i = 0$); y cualquier parámetro de respuesta r , que se transforme linealmente, desde el punto de vista estadístico, tendrá un valor \bar{r} , igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores modales individuales máximos del parámetro r_i , que es precisamente lo que indica el método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados a través de la ecuación (15-13). No sobra insistir que se partió de la premisa de que las respuestas modales son independientes estadísticamente entre si. Cuando se viola esta premisa el método conduce a resultados no conservadores. Si existen modos de vibración con períodos de vibración con valores cercanos, en alguna medida hay correlación entre sus respuestas y el método no es aplicable.

El método RCSC, raíz cuadrada de la suma de los cuadrados debe emplearse sobre los resultados máximos modales del parámetro bajo estudio r_i . Debe tenerse en cuenta que para cualquier parámetro obtenido aplicando el método RCSC de combinación modal, el resultado siempre será positivo, pero en realidad puede ser positivo o negativo pues es una representación de un movimiento oscilatorio. Este aspecto debe tenerse en cuenta en la combinación de estas fuerzas de origen sísmico con otras fuerzas de origen gravitacional, como pueden ser las cargas vivas o muertas.

La manera de aplicar el método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (RCSC) a los diferentes parámetros de respuesta es la siguiente, donde la estructura bajo estudio tiene p pisos y m modos:

- (a) **Desplazamientos horizontales máximos de la estructura** - Por medio de la ecuación (15-10) se obtienen los desplazamientos de máximos de cada piso, por ejemplo el piso j , para el modo i : $U_j^{(i)}$. Luego, por medio de la aplicación del método RCSC,

$$U_j^{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(U_j^{(i)}\right)^2} = \sqrt{\left(U_j^{(1)}\right)^2 + \left(U_j^{(2)}\right)^2 + \dots + \left(U_j^{(m)}\right)^2} \quad (15-16)$$

se determina el valor máximo factible del desplazamiento del piso j .

- (b) **Derivas máximas de piso** - Utilizando los valores de los desplazamientos de máximos de cada piso obtenidos al comienzo del paso anterior, por ejemplo para el piso j , en el modo i : $U_j^{(i)}$. Se determina primero la máxima deriva inducida por el modo i en el piso j , así:

$$\Delta_j^{(i)} = U_{j+1}^{(i)} - U_j^{(i)} \quad (15-17)$$

Luego, aplicando el método RCSC,

$$\Delta_j^{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\Delta_j^{(i)}\right)^2} = \sqrt{\left(\Delta_j^{(1)}\right)^2 + \left(\Delta_j^{(2)}\right)^2 + \dots + \left(\Delta_j^{(m)}\right)^2} \quad (15-18)$$

se determina el valor máximo factible de la deriva del piso j . Es importante tener en cuenta que es *errado calcular la deriva de piso utilizando valores de los desplazamientos ya combinados*, por lo tanto no es lícito, dentro de la metodología, emplear los desplazamientos máximos obtenidos por medio de la ecuación (15-16) para obtener las derivas máximas factibles.

- (c) **Cortantes máximos de piso** - Por medio de la ecuación (15-11) se obtienen las fuerzas modales máximas de cada piso, por ejemplo el piso k , para el modo i : $F_k^{(i)}$. Luego se determina el máximo cortante inducido por el modo i en el piso j , así:

$$V_j^{(i)} = \sum_{k=j}^p F_k^{(i)} \quad (15-19)$$

y aplicando el método RCSC,

$$V_j^{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(V_j^{(i)}\right)^2} = \sqrt{\left(V_j^{(1)}\right)^2 + \left(V_j^{(2)}\right)^2 + \dots + \left(V_j^{(m)}\right)^2} \quad (15-20)$$

se determina el valor máximo factible del cortante del piso j . Debe hacerse la misma advertencia que en el caso de la deriva, pues es *errado calcular el cortante de piso utilizando valores de las fuerzas ya combinadas*.

- (d) **Cortante basal máximo** - Primero se obtiene la fuerza cortante máxima para cada uno de los modos sumando algebraicamente todas las fuerzas modales máximas del modo en los diferentes pisos, $F_k^{(i)}$:

$$V^{(i)} = \sum_{k=1}^p F_k^{(i)} \quad (15-21)$$

y aplicando,

$$V^{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(V^{(i)}\right)^2} = \sqrt{\left(V^{(1)}\right)^2 + \left(V^{(2)}\right)^2 + \dots + \left(V^{(m)}\right)^2} \quad (15-22)$$

se determina el valor máximo factible del cortante en la base. Igual que en los otros casos, es *errado calcular el cortante basal utilizando valores de las fuerzas horizontales ya combinadas*.

- (c) **Momentos de vuelco máximos de piso** - Con las fuerzas modales de piso para el modo i : $F_k^{(i)}$, se determina el máximo momento de vuelco inducido por el modo i en el piso j , así:

$$M_j^{(i)} = \sum_{k=j+1}^p \left[(h_k - h_j) \cdot F_k^{(i)} \right] \quad (15-23)$$

donde h_k y h_j son las alturas, medidas desde la base, de los pisos k y j , respectivamente. Aplicando el método RCSC,

$$M_j^{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (M_j^{(i)})^2} = \sqrt{(M_j^{(1)})^2 + (M_j^{(2)})^2 + \dots + (M_j^{(m)})^2} \quad (15-24)$$

se determina el valor máximo factible del momento de vuelco del piso j . Debe hacerse la misma advertencia, pues es *errado calcular el momento de vuelco de piso utilizando valores de las fuerzas ya combinadas*.

- (e) **Momento de vuelco máximo en la base** - Con las fuerzas modales de piso para el modo i : $F_k^{(i)}$, se determina el máximo momento de vuelco inducido por el modo i en la base así:

$$M^{(i)} = \sum_{k=1}^p (h_k \cdot F_k^{(i)}) \quad (15-25)$$

y aplicando,

$$M^{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (M_{\text{mod}}^{(i)})^2} = \sqrt{(M_{\text{mod}}^{(1)})^2 + (M_{\text{mod}}^{(2)})^2 + \dots + (M_{\text{mod}}^{(m)})^2} \quad (15-26)$$

se determina el valor máximo factible del cortante en la base. Igual que en los otros casos, es *errado calcular el cortante basal utilizando valores de las fuerzas horizontales ya combinadas*.

- (f) **Fuerzas horizontales estáticas correspondientes a las fuerzas máximas modales** - Con el fin de obtener las fuerzas internas en los elementos de la estructura es conveniente disponer de un conjunto de fuerzas horizontales estáticas que representen las fuerzas máximas factibles que puede desarrollar el sismo. De esta manera las fuerzas estáticas correspondientes se pueden emplear en un análisis estático convencional y así determinar las fuerzas internas de los elementos utilizando la misma metodología que se emplee para las demás fuerzas estáticas.

Las fuerzas estáticas correspondientes se determinan a partir de las fuerzas cortantes máximas factibles de piso obtenidas en el paso (c). La fuerza correspondiente de cualquier piso se obtiene como la diferencia entre la fuerza cortante del piso y la del piso inmediatamente por encima. En el piso superior es igual al cortante de ese piso. Entonces, para cualquier piso j , la fuerza estática correspondiente es:

$$F_j^E = \begin{cases} V_j^{\max} & \text{para } j = p \\ V_j^{\max} - V_{j+1}^{\max} & \text{para } j \neq p \end{cases} \quad (15-27)$$

Lo anterior se presentó teniendo en mente un análisis modal planar. Al aplicar el método RCSC a sistemas tridimensionales hay que tener en cuenta algunos aspectos adicionales que serán discutidos más adelante en el presente Capítulo.

Ejemplo 15-2

Se desea emplear el método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (RCSC) a los resultados del ejemplo 15-1. El empleo de procedimiento conduce a los siguientes resultados:

Desplazamientos horizontales máximos (m)

Los desplazamientos máximos en cada modo, se obtuvieron de:

$$\{U_{\text{mod}}^{(i)}\} = \{\phi^{(i)}\}(\eta_i)_{\text{max}}$$

así:

$$[U_{\text{mod}}] = [\Phi][\Gamma_{\text{mod}}] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \{U_{\text{mod}}^{(1)}\} \\ \{U_{\text{mod}}^{(2)}\} \\ \{U_{\text{mod}}^{(3)}\} \\ \{U_{\text{mod}}^{(4)}\} \\ \{U_{\text{mod}}^{(5)}\} \\ \{U_{\text{mod}}^{(6)}\} \end{array} \quad \downarrow \text{gdl} \\ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \hline \mathbf{0.148703} & \mathbf{-0.009692} & \mathbf{0.001618} & \mathbf{-0.000355} & \mathbf{0.000066} & \mathbf{-0.000010} \\ \hline \mathbf{0.136429} & \mathbf{-0.003428} & \mathbf{-0.000790} & \mathbf{0.000557} & \mathbf{-0.000163} & \mathbf{0.000032} \\ \hline \mathbf{0.115519} & \mathbf{0.004295} & \mathbf{-0.001915} & \mathbf{0.000091} & \mathbf{0.000144} & \mathbf{-0.000050} \\ \hline \mathbf{0.084882} & \mathbf{0.009854} & \mathbf{-0.000280} & \mathbf{-0.000592} & \mathbf{-0.000017} & \mathbf{0.000058} \\ \hline \mathbf{0.049588} & \mathbf{0.009914} & \mathbf{0.001754} & \mathbf{0.000118} & \mathbf{-0.000124} & \mathbf{-0.000054} \\ \hline \mathbf{0.018061} & \mathbf{0.004698} & \mathbf{0.001397} & \mathbf{0.000584} & \mathbf{0.000181} & \mathbf{0.000041} \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{c} U_6 \\ U_5 \\ U_4 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{array}$$

Ahora aplicamos el procedimiento de RCSC a cada una de las filas de la matriz anterior. Así, a modo ilustrativo, para el sexto piso:

$$U_6^{\text{max}} = \sqrt{(0.148703)^2 + (-0.009692)^2 + (0.001618)^2 + (-0.000355)^2 + (0.000066)^2 + (-0.000010)^2} \\ = 0.14903 \text{ m}$$

Este valor se compara bastante bien con el valor de 0.14873 m obtenido por medio de la respuesta cronológica realizada en el ejemplo 14-3. El resultado, en m, para todos los pisos es:

$$\{U^{\text{max}}\} = \pm \begin{array}{c} \downarrow \text{gdl} \\ \begin{array}{c} \mathbf{0.14903} \\ \mathbf{0.13648} \\ \mathbf{0.11560} \\ \mathbf{0.08545} \\ \mathbf{0.05059} \\ \mathbf{0.01872} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} U_6 \\ U_5 \\ U_4 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{array}$$

Se ha colocado el símbolo \pm para insistir que los resultados máximos obtenidos por medio de RCSC pueden ser positivos o negativos.

Derivas máximas de piso

El valor de la deriva para cada modo en cada piso se calcula utilizando los valores mostrados en $[U_{\text{mod}}]$. Empleando la ecuación (15-17) se obtienen los siguientes resultados:

$$[\Delta_{\text{mod}}] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \{\Delta_{\text{mod}}^{(1)}\} \\ \{\Delta_{\text{mod}}^{(2)}\} \\ \{\Delta_{\text{mod}}^{(3)}\} \\ \{\Delta_{\text{mod}}^{(4)}\} \\ \{\Delta_{\text{mod}}^{(5)}\} \\ \{\Delta_{\text{mod}}^{(6)}\} \end{array} \quad \downarrow \text{piso} \\ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \hline \mathbf{0.012274} & \mathbf{-0.006264} & \mathbf{0.002408} & \mathbf{-0.000912} & \mathbf{0.000229} & \mathbf{-0.000042} \\ \hline \mathbf{0.020920} & \mathbf{-0.007723} & \mathbf{0.001125} & \mathbf{0.000466} & \mathbf{-0.000307} & \mathbf{0.000082} \\ \hline \mathbf{0.030627} & \mathbf{-0.005559} & \mathbf{-0.001635} & \mathbf{0.000683} & \mathbf{0.000161} & \mathbf{-0.000108} \\ \hline \mathbf{0.035304} & \mathbf{-0.000060} & \mathbf{-0.002034} & \mathbf{-0.000710} & \mathbf{0.000107} & \mathbf{0.000112} \\ \hline \mathbf{0.031517} & \mathbf{0.005216} & \mathbf{0.000358} & \mathbf{-0.000465} & \mathbf{-0.000305} & \mathbf{-0.000095} \\ \hline \mathbf{0.018061} & \mathbf{0.004698} & \mathbf{0.001397} & \mathbf{0.000584} & \mathbf{0.000181} & \mathbf{0.000041} \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

Ahora aplicamos el procedimiento RCSC, por ejemplo, al tercer piso:

$$\Delta_3^{\text{max}} = \sqrt{(0.035304)^2 + (-0.000060)^2 + (-0.002034)^2 + (-0.000710)^2 + (0.000107)^2 + (0.000112)^2} \\ = 0.03537 \text{ m}$$

y para todos los pisos:

$$\{\Delta^{\max}\} = \begin{Bmatrix} 0.01402 \\ 0.02234 \\ 0.03118 \\ 0.03537 \\ 0.03195 \\ 0.01872 \end{Bmatrix} m = \begin{Bmatrix} 0.467\%h \\ 0.744\%h \\ 1.039\%h \\ 1.179\%h \\ 1.065\%h \\ 0.624\%h \end{Bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{piso} \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Ahora, si las derivas se hubiesen calculado, erradamente, a partir de los valores de $\{U^{\max}\}$, los resultados serían los siguientes, como porcentaje de la altura de piso (%h):

$$\{\Delta^{\max}\} = \begin{Bmatrix} 0.418\%h \\ 0.696\%h \\ 1.005\%h \\ 1.162\%h \\ 1.062\%h \\ 0.624\%h \end{Bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{piso} \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{resultado errado} \\ \text{resultado errado} \\ \text{resultado errado} \\ \text{resultado errado} \end{matrix}$$

Fuerzas inerciales modales (kN)

Las fuerzas inerciales máximas por modo que impone el sismo sobre la estructura, se obtuvieron en el ejemplo 15-1 multiplicando la matriz de rigidez de toda la estructura por los desplazamientos máximos correspondientes a cada modo, el resultado está en kN:

$$[F_{\text{mod}}] = [K_E] [U_{\text{mod}}^{(1)} \mid U_{\text{mod}}^{(2)} \mid \dots \mid U_{\text{mod}}^{(6)}] = [F_{\text{mod}}^{(1)} \mid F_{\text{mod}}^{(2)} \mid \dots \mid F_{\text{mod}}^{(6)}]$$

$$[F_{\text{mod}}] = [K_E] [U_{\text{mod}}] = \begin{Bmatrix} \{F_{\text{mod}}^{(1)}\} & \{F_{\text{mod}}^{(2)}\} & \{F_{\text{mod}}^{(3)}\} & \{F_{\text{mod}}^{(4)}\} & \{F_{\text{mod}}^{(5)}\} & \{F_{\text{mod}}^{(6)}\} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{gdl} \\ F_6 \\ F_5 \\ F_4 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{matrix}$$

1108.3	-748.9	403.3	-226.4	79.3	-18.6	F ₆
1016.2	-264.8	-196.9	355.8	-195.6	57.9	F ₅
860.2	331.8	-477.4	58.2	173.4	-91.0	F ₄
632.9	761.5	-69.8	-378.0	-20.2	105.1	F ₃
369.4	765.9	437.3	75.5	-148.2	-98.4	F ₂
135.1	363.0	348.2	372.7	217.3	74.1	F ₁

Debe evitarse combinar estas fuerzas modales a través de RCSC, pues conduciría a resultados errados posteriormente en el cálculo de los cortantes de piso y momentos de vuelco.

Cortante máximo modal de piso (kN)

El cortante máximo de piso para cada modo se obtiene por medio de la ecuación (15-19):

$$V_j^{(i)} = \sum_{k=j}^p F_k^{(i)}$$

Tabla 15-7 - Ejemplo 15-2 - Valores máximos del cortante modal de piso

piso	$V_{\text{mod}}^{(1)}$ (kN)	$V_{\text{mod}}^{(2)}$ (kN)	$V_{\text{mod}}^{(3)}$ (kN)	$V_{\text{mod}}^{(4)}$ (kN)	$V_{\text{mod}}^{(5)}$ (kN)	$V_{\text{mod}}^{(6)}$ (kN)
6	1108.3	-748.9	403.3	-226.4	79.3	-18.6
5	2124.6	-1013.7	206.3	129.4	-116.3	39.3
4	2984.8	-681.9	-271.0	187.7	57.1	-51.7
3	3617.6	79.6	-340.9	-190.3	36.9	53.4
2	3987.0	845.5	96.5	-114.8	-111.3	-45.0
1	4122.1	1208.5	444.6	257.9	106.1	29.1

Ahora aplicamos el procedimiento RCSC, por ejemplo, al segundo piso:

$$V_2^{\max} = \sqrt{(3987.0)^2 + (845.5)^2 + (96.5)^2 + (-114.8)^2 + (-111.3)^2 + (-45.0)^2}$$

$$= 4080.2 \text{ kN}$$

El resultado, en kN, para todos los pisos es:

$$\{V^{\max}\} = \pm \begin{Bmatrix} 1417.6 \\ 2369.8 \\ 3080.3 \\ 3640.1 \\ 4080.2 \\ 4327.6 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{piso} \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Corte basal máximo

El cortante en la base del edificio, en kN, se obtuvo en el ejemplo 15-1 para cada modo así:

$$\{V_{\text{mod}}\} = \{1\}^T [F_{\text{mod}}] = \{1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1\} \begin{bmatrix} 1108.3 & -748.9 & 403.3 & -226.4 & 79.3 & -18.6 \\ 1016.2 & -264.8 & -196.9 & 355.8 & -195.6 & 57.9 \\ 860.2 & 331.8 & -477.4 & 58.2 & 173.4 & -91.0 \\ 632.9 & 761.5 & -69.8 & -378.0 & -20.2 & 105.1 \\ 369.4 & 765.9 & 437.3 & 75.5 & -148.2 & -98.4 \\ 135.1 & 363.0 & 348.2 & 372.7 & 217.3 & 74.1 \end{bmatrix}$$

$$= \{4122.1 \mid 1208.5 \mid 444.6 \mid 257.9 \mid 106.1 \mid 29.1\}$$

$$\begin{matrix} V_{\text{mod}}^{(1)} & V_{\text{mod}}^{(2)} & V_{\text{mod}}^{(3)} & V_{\text{mod}}^{(4)} & V_{\text{mod}}^{(5)} & V_{\text{mod}}^{(6)} \end{matrix}$$

Ahora aplicamos el procedimiento RCSC:

$$V^{\max} = \sqrt{(4122.1)^2 + (1208.5)^2 + (444.6)^2 + (257.9)^2 + (106.1)^2 + (29.1)^2}$$

$$= 4327.6 \text{ kN}$$

Momento de vuelco

El momento de vuelco en cada piso se obtiene por medio de la ecuación (15-23):

$$M_j^{(i)} = \sum_{k=j+1}^n [(h_k - h_j) \cdot F_j^{(i)}]$$

Tabla 15-8 - Ejemplo 15-2 - Valores máximos del momento de vuelco modal de piso

piso	$M_{\text{mod}}^{(1)}$ (kN · m)	$M_{\text{mod}}^{(2)}$ (kN · m)	$M_{\text{mod}}^{(3)}$ (kN · m)	$M_{\text{mod}}^{(4)}$ (kN · m)	$M_{\text{mod}}^{(5)}$ (kN · m)	$M_{\text{mod}}^{(6)}$ (kN · m)
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	3324.9	-2246.7	1209.8	-679.2	237.8	-55.9
4	9698.6	-5287.8	1828.7	-290.9	-111.0	61.9
3	18652.9	-7333.6	1015.6	272.2	60.2	-93.3
2	29505.8	-7094.7	-6.9	-298.7	170.9	66.8
1	41466.8	-4558.2	282.4	-643.1	-162.9	-68.2
0	53833.1	-932.7	1616.3	130.7	155.3	19.2

Ahora aplicamos el procedimiento RCSC, por ejemplo, al cuarto piso:

$$M_4^{\max} = \sqrt{(9698.6)^2 + (-5287.7)^2 + (1828.7)^2 + (-290.9)^2 + (-111.0)^2 + (61.9)^2}$$

$$= 4080.2 \text{ kN}$$

El resultado, en $\text{kN} \cdot \text{m}$, para todos los pisos es:

$$\{M^{\max}\} = \begin{matrix} \downarrow \text{ piso} \\ \begin{matrix} \boxed{0.0} \\ \boxed{4252.9} \\ \boxed{11201.3} \\ \boxed{20070.6} \\ \boxed{30348.8} \\ \boxed{41722.9} \\ \boxed{53865.8} \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Momento de vuelco en la base

El momento de vuelco en la base, en $\text{kN} \cdot \text{m}$, contribuido por cada modo, se puede obtener por medio de:

$$\{M_{\text{mod}}\} = \{h\}^T [F_{\text{mod}}] = \{18 \mid 15 \mid 12 \mid 9 \mid 6 \mid 3\} \begin{bmatrix} 1108.3 & -748.9 & 403.3 & -226.4 & 79.3 & -18.6 \\ 1016.2 & -264.8 & -196.9 & 355.8 & -195.6 & 57.9 \\ 860.2 & 331.8 & -477.4 & 58.2 & 173.4 & -91.0 \\ 632.9 & 761.5 & -69.8 & -378.0 & -20.2 & 105.1 \\ 369.4 & 765.9 & 437.3 & 75.5 & -148.2 & -98.4 \\ 135.1 & 363.0 & 348.2 & 372.7 & 217.3 & 74.1 \end{bmatrix}$$

$$= \{53833 \mid -933 \mid 1616 \mid 131 \mid 155 \mid 19\}$$

$$M_{\text{mod}}^{(1)} \quad M_{\text{mod}}^{(2)} \quad M_{\text{mod}}^{(3)} \quad M_{\text{mod}}^{(4)} \quad M_{\text{mod}}^{(5)} \quad M_{\text{mod}}^{(6)}$$

U

$$M^{\max} = \sqrt{(53833.1)^2 + (-932.7)^2 + (1616.3)^2 + (130.7)^2 + (155.3)^2 + (19.2)^2}$$

$$= 53865.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Fuerzas horizontales estáticas correspondientes

Estas fuerzas, en kN , se calculan por medio de la ecuación (15-27), con base en los cortantes modales de piso máximos:

$$\{F^E\} = \begin{matrix} \downarrow \text{ piso} \\ \begin{matrix} \boxed{1417.6} \\ \boxed{2369.8 - 1417.6} \\ \boxed{3080.3 - 2369.8} \\ \boxed{3640.1 - 3080.3} \\ \boxed{4080.2 - 3640.1} \\ \boxed{4327.6 - 4080.2} \end{matrix} \end{matrix} = \pm \begin{matrix} \begin{matrix} \boxed{1417.6} \\ \boxed{951.9} \\ \boxed{710.5} \\ \boxed{559.8} \\ \boxed{440.3} \\ \boxed{247.6} \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

El momento de vuelco en la base, en $\text{kN} \cdot \text{m}$, calculado para estas fuerzas correspondientes es:

$$M^E = \{h\}^T [F^E] = \{18 \mid 15 \mid 12 \mid 9 \mid 6 \mid 3\} \begin{bmatrix} 1417.6 \\ 951.9 \\ 710.5 \\ 559.8 \\ 440.3 \\ 247.6 \end{bmatrix} = 56742.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Este momento de vuelco es, en este caso, ligeramente superior al que se obtuvo anteriormente aplicando RCSC de los momentos de vuelco modales. Dado que en ejemplo 14-3 se encontró la respuesta cronológica de la misma estructura ante el mismo acelerograma de El Centro, cuyo espectro se empleó en el presente ejemplo, pueden hacerse algunas comparaciones acerca de los valores máximos obtenidos en el ejemplo 14-3 y los valores máximos probables calculados utilizando RCSC en el presente ejemplo.

Tabla 15-9 - Ejemplo 15-2 - Comparación de los valores obtenidos en los ejemplos 14-3, 15-1 y 15-2

Parámetro	Ejemplo 14-3 Análisis Cronológico	Ejemplo 15-1 Espectral Modal Valor absoluto	Ejemplo 15-2 Espectral Modal RCSC
Desplazamiento de la cubierta	0.14873 m	0.16044 m	0.14903 m
Corte Basal	4 355.8 kN	6 168.4 kN	4 327.6 kN
Momento de vuelco	54 406 kN · m	56 687 kN · m	53 866 kN · m

Como puede verse los valores obtenidos por medio del procedimiento RCSC solo varían con respecto al máximo valor cronológico en la tercera cifra decimal.

■

Con el fin de aclarar un poco más aquellos casos en los cuales no es lícito utilizar el método RCSC, los dos errores más comunes en su aplicación consisten aplicar el procedimiento a los desplazamientos modales $[U_{mod}]$, o a las fuerzas modales $[F_{mod}]$, obteniendo un vector de desplazamientos, o de fuerzas horizontales, de los pisos; para luego ser empleado directamente en un análisis de la estructura por procedimientos convencionales. El error se introduce en aquellos pisos en los cuales los desplazamientos o las fuerzas cambian de signo, con respecto al piso inmediatamente superior, pues tanto la deriva como el cortante de piso se calcula dentro del modo como la diferencia algebraica, tomando en cuenta el signo; pero si esta diferencia se calcula a partir de desplazamientos, o fuerzas, que se obtuvieron sacando raíz cuadrada de los cuadrados de los valores de cada modo, los valores pierden su signo al elevar al cuadrado, y la diferencia es en consecuencia menor.

15.3.3 — Método de la combinación cuadrática completa (CCC)

El método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados parte de la premisa de las respuestas de los grados de libertad desacoplados son estadísticamente independientes. En aquellos casos en los cuales existe interacción modal debe recurrirse a otros procedimientos. El más utilizado de ellos se conoce como el *método de la combinación cuadrática completa (CCC)*. La forma de combinar la respuesta de los diferentes parámetros modales, r , se expresa así:

$$\bar{r} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (r_i \cdot r_j \cdot \rho_{ij})} \quad (15-28)$$

donde r_i y r_j corresponden a las respuestas modales máximas del parámetro, para los modos i y j respectivamente, y ρ_{ij} corresponde al coeficiente de correlación entre los dos modos, el cual varía entre cero y uno, siendo uno para el modo con si mismo. Por esta última razón, los términos de las dos sumatorias para el mismo modo pueden sacarse del producto, lo cual conduce a la siguiente expresión:

$$\bar{r} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^m r_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (r_i \cdot r_j \cdot \rho_{ij})} \quad (15-29)$$

Es evidente aquí que la primera sumatoria corresponde al método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (RCSC), el cual es un caso particular del método CCC cuando los coeficientes de correlación entre modos son cero, lo cual solo ocurre cuando hay independencia estadística entre ellos, confirmando la base del método RCSC.

El método fue planteado por primera vez por Rosenblueth [Rosenblueth y Elorduy, 1969], y posteriormente Der Kiureghian [Der Kiureghian, 1981] propuso una manera diferente de calcular los coeficientes de correlación, la cual es la más empleada hoy en día, y es la que se presenta a continuación. En [Gupta, 1990] se introducen otros métodos y se comparan con los dos mencionados. Todos ellos se fundamentan en la teoría de vibraciones aleatorias y su deducción se sale del alcance de una presentación introductoria.

De acuerdo con el procedimiento de Der Kiureghian los coeficientes de correlación se calculan por medio de:

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \cdot \xi_j} \cdot (\xi_i + \beta_{ij} \cdot \xi_j) \cdot (\beta_{ij})^{3/2}}{(1 - \beta_{ij}^2)^2 + 4 \cdot \xi_i \cdot \xi_j \cdot \beta_{ij} \cdot (1 + \beta_{ij}^2) + 4 \cdot (\xi_i^2 + \xi_j^2) \cdot \beta_{ij}^2} \quad (15-30)$$

donde ξ_i y ξ_j son los coeficientes de amortiguamiento de los modos i y j , respectivamente, y $\beta_{ij} = \omega_i/\omega_j$, siendo ω_i y ω_j las frecuencia naturales, en radianes por segundo de los modos i y j , respectivamente. Cuando el coeficiente de amortiguamiento crítico es el mismo para los dos modos, la ecuación anterior se convierte en:

$$\rho_{ij} = \frac{8 \cdot \xi^2 \cdot (1 + \beta_{ij}) \cdot (\beta_{ij})^{3/2}}{(1 - \beta_{ij}^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta_{ij} \cdot (1 + \beta_{ij}^2)} \quad (15-31)$$

Un aspecto que se deduce de la ecuación anterior, es que la ausencia de amortiguamiento hace que el coeficiente de correlación se convierta en cero. En la Figura 15-10 se grafica la ecuación (15-31) anterior. Allí es evidente que el coeficiente de correlación se hace mayor en la medida que las dos frecuencias se acercan, y que este efecto es más pronunciado cuando el amortiguamiento es mayor.

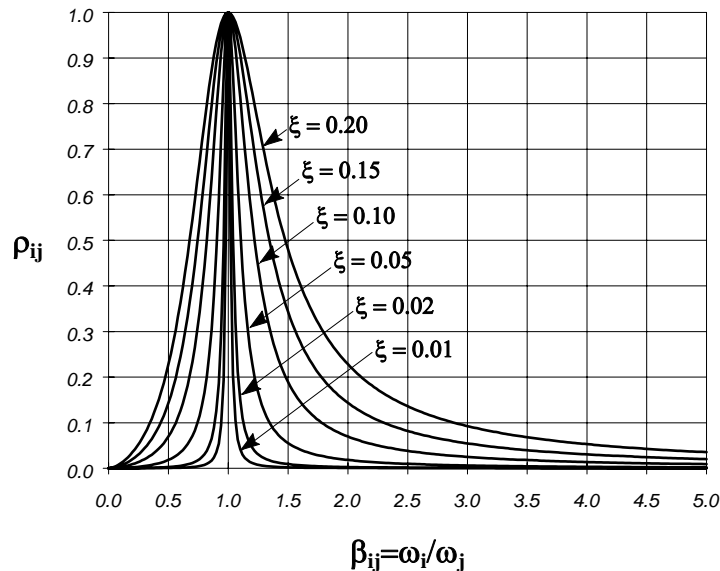


Figura 15-10 - Coeficiente de correlación para el método CCC

La gráfica anterior demuestra que aun para amortiguamientos hasta de 10% del crítico, para frecuencias que difieran por un factor de 2 o más ($0.5 > \beta_{ij}$ o $\beta_{ij} > 2$), el coeficiente de correlación ρ_{ij} , se mantiene por debajo de 0.10. La importancia del método CCC se hace manifiesta cuando existen frecuencias naturales cercanas, de resto los resultados obtenidos son prácticamente los mismos que se obtendrían con el método RCSC. Desde el punto de vista de la utilización del método debe realizarse de la misma manera que para el RCSC, la diferencia estriba en la manera como se realizan las sumas antes de

extraer la raíz cuadrada. La manera más simple de realizar la operación implícita en la ecuación (15-28) es realizar el siguiente producto de matrices:

$$\bar{\mathbf{r}}^2 \approx \{\mathbf{r}\}_{1 \times m} [\boldsymbol{\rho}]_{m \times m} \{\mathbf{r}\}_{m \times 1}^T \quad (15-32)$$

Ejemplo 15-3

Se desea emplear el método de la combinación cuadrática completa (CCC) a los resultados del ejemplo 15-1, el cual fue el mismo empleado para el método RCSC en el ejemplo 15-2. Las frecuencias y períodos naturales del sistema, se dan en la tabla 15-10.

Tabla 15-10 - Ejemplo 15-3 - Valores de las frecuencias y períodos naturales

Modo	ω^2 (rad/s) ²	ω (rad/s)	f (Hertz)	T (s)
1	29.108	5.3952	0.85866	1.1646
2	301.81	17.373	2.76495	0.3616
3	973.78	31.205	4.96647	0.2013
4	2494.3	49.943	7.94849	0.1258
5	4686.5	68.458	10.89550	0.0918
6	7113.8	84.344	13.42372	0.0745

Utilizando los valores de la frecuencia ω , en rad/s construimos la siguiente tabla con los cocientes $\beta_{ij} = \omega_i/\omega_j$:

Tabla 15-11 - Ejemplo 15-3 - Valores del cociente de frecuencias $\beta_{ij} = \omega_i/\omega_j$

modo →		1	2	3	4	5	6
modo ↓	ω (rad/s)	5.3952	17.373	31.205	49.943	68.458	84.344
1	5.3952	1.00000	0.31055	0.17290	0.10803	0.07881	0.06397
2	17.373	3.22008	1.00000	0.55674	0.34786	0.25378	0.20598
3	31.205	5.78384	1.79618	1.00000	0.62481	0.45583	0.36997
4	49.943	9.25693	2.87475	1.60048	1.00000	0.72954	0.59213
5	68.458	12.68869	3.94048	2.19382	1.37072	1.00000	0.81165
6	84.344	15.63316	4.85489	2.70290	1.68881	1.23205	1.00000

Luego se calculan los coeficientes de correlación, utilizando la ecuación (15-31) y con un coeficiente de amortiguamiento crítico de $\xi = 0.05$, igual al empleado en los ejemplos 14-3, 15-1 y 15-2 para la misma estructura. Los coeficientes de correlación se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 15-12 - Ejemplo 15-3 - Valores del coeficiente de correlación ρ_{ij}

↓ modo →	1	2	3	4	5	6
1	1.00000	0.00552	0.00179	0.00080	0.00048	0.00035
2	0.00552	1.00000	0.02641	0.00710	0.00365	0.00245
3	0.00179	0.02641	1.00000	0.04135	0.01406	0.00820
4	0.00080	0.00710	0.04135	1.00000	0.08958	0.03322
5	0.00048	0.00365	0.01406	0.08958	1.00000	0.18519
6	0.00035	0.00245	0.00820	0.03322	0.18519	1.00000

El empleo de procedimiento conduce a los siguientes resultados, en el cálculo de los desplazamientos máximos del sexto piso

$$\bar{r}^2 \approx \left\{ \begin{array}{c} 0.148703 \\ -0.009692 \\ 0.001618 \\ -0.000355 \\ 0.000066 \\ -0.000010 \end{array} \right\}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1.00000 & 0.00552 & 0.00179 & 0.00080 & 0.00048 & 0.00035 \\ 0.00552 & 1.00000 & 0.02641 & 0.00710 & 0.00365 & 0.00245 \\ 0.00179 & 0.02641 & 1.00000 & 0.04135 & 0.01406 & 0.00820 \\ 0.00080 & 0.00710 & 0.04135 & 1.00000 & 0.08958 & 0.03322 \\ 0.00048 & 0.00365 & 0.01406 & 0.08958 & 1.00000 & 0.18519 \\ 0.00035 & 0.00245 & 0.00820 & 0.03322 & 0.18519 & 1.00000 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{array}{c} 0.148703 \\ -0.009692 \\ 0.001618 \\ -0.000355 \\ 0.000066 \\ -0.000010 \end{array} \right\}$$

$$= 0.022193$$

$$U_6^{\max} = \sqrt{\bar{r}^2} = \sqrt{0.022193} = 0.148974 \text{ m}$$

Este valor se compara bastante bien con el valor de 0.14873 m obtenido por medio de la respuesta cronológica realizada en el ejemplo 14-3.

■

15.3.4 — Combinación de componentes horizontales

En una estructura modelada tridimensionalmente se puede llegar a tener seis direcciones globales para plantear el equilibrio; consistentes en dos desplazamientos horizontales ortogonales en planta, un desplazamiento vertical, y tres rotaciones alrededor de estos mismos ejes. Dado que los registros acelerográficos que se obtienen de sismos reales solo contienen tres componentes de desplazamiento, dos horizontales ortogonales y una vertical; los registros sísmicos, o sus espectros, que se emplean en el estudio de la respuesta de la estructura están limitados a estas tres componentes, y se desconocen las componentes rotacionales.

Por otro lado, el estudio de la respuesta de una estructura ante aceleraciones verticales es elaborado en la formulación del modelo de la estructura y en la manera como se determinan los elementos críticos de la respuesta. Aspectos tales como la excitación vertical en los diferentes apoyos y su interacción con las componentes horizontales del movimiento juegan un papel fundamental. La importancia de la respuesta ante aceleraciones verticales de estructuras convencionales ha sido motivo de debate desde hace mucho tiempo, pero tradicionalmente ha prevalecido el criterio de que es secundaria al ser comparada con la respuesta ante aceleraciones horizontales. Estos aspectos se salen del alcance de estas notas y por esta razón la discusión aquí se limita a la respuesta ante aceleraciones horizontales.

En la Sección 11.3.1(h), al plantear las ecuaciones de equilibrio dinámico se distinguía entre la dirección en que actúan las aceleraciones del terreno y la dirección en que actúan las fuerzas inerciales de la estructura. En la Figura 15-11 se muestran las direcciones **x-y-z** que describen las direcciones en las cuales actúan las fuerzas inerciales de un diafragma de la estructura, y las direcciones de las dos componentes horizontales de un acelerograma, que en este caso se han denominado **1-2**.

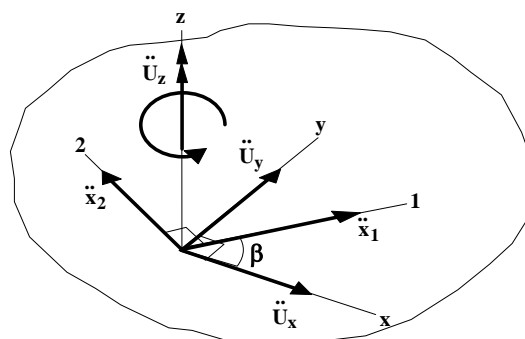


Figura 15-11 - Dirección de las aceleraciones de los grados de libertad de una estructura modelada por medio de diafragmas rígidos y la dirección de las excitaciones horizontales del terreno

Al plantear las ecuaciones de equilibrio de la estructura, las aceleraciones horizontales del terreno deben ser colineales con las aceleraciones inerciales de las direcciones principales de la estructura. Entonces en las ecuaciones de equilibrio, tenemos:

$$[\mathbf{M}_E]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}_E]\{\mathbf{U}\} = -[\mathbf{M}_E][\gamma]\{\ddot{\mathbf{x}}_0\} \quad (15-33)$$

Dado que existen tres grados de libertad por diafragma, las ecuaciones simultáneas de equilibrio dadas en la ecuación (15-33) tendrían la forma que se da a continuación, donde \mathbf{m}_t^i es la masa translacional del nivel i , y \mathbf{m}_r^i es la masa rotacional, con respecto a un eje vertical localizado en el centro de masa del diafragma.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_t^p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_t^p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m}_r^p & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{m}_t^i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{m}_t^i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{m}_r^i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{m}_t^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{m}_t^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{m}_r^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_x^p \\ \ddot{\mathbf{U}}_y^p \\ \ddot{\mathbf{U}}_z^p \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{U}}_x^i \\ \ddot{\mathbf{U}}_y^i \\ \ddot{\mathbf{U}}_z^i \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{U}}_x^1 \\ \ddot{\mathbf{U}}_y^1 \\ \ddot{\mathbf{U}}_z^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{pxpx} & \mathbf{k}_{pxpy} & \mathbf{k}_{pxpz} & \dots & \mathbf{k}_{pxix} & \mathbf{k}_{pxiy} & \mathbf{k}_{pxiz} & \dots & \mathbf{k}_{px1x} & \mathbf{k}_{px1y} & \mathbf{k}_{px1z} \\ \mathbf{k}_{pypx} & \mathbf{k}_{pypy} & \mathbf{k}_{pypz} & \dots & \mathbf{k}_{pyix} & \mathbf{k}_{pyiy} & \mathbf{k}_{pyiz} & \dots & \mathbf{k}_{py1x} & \mathbf{k}_{py1y} & \mathbf{k}_{py1z} \\ \mathbf{k}_{pzpx} & \mathbf{k}_{pzpy} & \mathbf{k}_{pmpz} & \dots & \mathbf{k}_{pzix} & \mathbf{k}_{pziy} & \mathbf{k}_{pziz} & \dots & \mathbf{k}_{pz1x} & \mathbf{k}_{pz1y} & \mathbf{k}_{pz1z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{k}_{ixpx} & \mathbf{k}_{ixpy} & \mathbf{k}_{ixpz} & \dots & \mathbf{k}_{ixix} & \mathbf{k}_{ixiy} & \mathbf{k}_{ixiz} & \dots & \mathbf{k}_{ix1x} & \mathbf{k}_{ix1y} & \mathbf{k}_{ix1z} \\ \mathbf{k}_{iypx} & \mathbf{k}_{iypy} & \mathbf{k}_{iypz} & \dots & \mathbf{k}_{iyix} & \mathbf{k}_{iyyi} & \mathbf{k}_{iyiz} & \dots & \mathbf{k}_{iy1x} & \mathbf{k}_{iy1y} & \mathbf{k}_{iy1z} \\ \mathbf{k}_{izpx} & \mathbf{k}_{izpy} & \mathbf{k}_{izpz} & \dots & \mathbf{k}_{izix} & \mathbf{k}_{iziy} & \mathbf{k}_{iziz} & \dots & \mathbf{k}_{iz1x} & \mathbf{k}_{iz1y} & \mathbf{k}_{iz1z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{k}_{1xpx} & \mathbf{k}_{1xpy} & \mathbf{k}_{1xpz} & \dots & \mathbf{k}_{1xix} & \mathbf{k}_{1xiy} & \mathbf{k}_{1xiz} & \dots & \mathbf{k}_{1x1x} & \mathbf{k}_{1x1y} & \mathbf{k}_{1x1z} \\ \mathbf{k}_{1ypx} & \mathbf{k}_{1ypy} & \mathbf{k}_{1ypz} & \dots & \mathbf{k}_{1yix} & \mathbf{k}_{1yiy} & \mathbf{k}_{1yiz} & \dots & \mathbf{k}_{1y1x} & \mathbf{k}_{1y1y} & \mathbf{k}_{1y1z} \\ \mathbf{k}_{1zpx} & \mathbf{k}_{1zpy} & \mathbf{k}_{1zpz} & \dots & \mathbf{k}_{1zix} & \mathbf{k}_{1ziy} & \mathbf{k}_{1ziz} & \dots & \mathbf{k}_{1z1x} & \mathbf{k}_{1z1y} & \mathbf{k}_{1z1z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^p \\ \mathbf{U}_y^p \\ \mathbf{U}_z^p \\ \vdots \\ \mathbf{U}_x^i \\ \mathbf{U}_y^i \\ \mathbf{U}_z^i \\ \vdots \\ \mathbf{U}_x^1 \\ \mathbf{U}_y^1 \\ \mathbf{U}_z^1 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{m}_t^p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_t^p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m}_r^p & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{m}_t^i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{m}_t^i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{m}_r^i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{m}_t^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{m}_t^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{m}_r^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{0x} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{0y} \end{Bmatrix} \quad (15-34)$$

Al desacoplar las ecuaciones simultáneas indicadas en la ecuación (15-34) por medio de las transformaciones de coordenadas:

$$\{\ddot{\mathbf{U}}\} = [\Phi]\{\ddot{\mathbf{n}}\} \quad \text{y} \quad \{\mathbf{U}\} = [\Phi]\{\mathbf{n}\} \quad (15-35)$$

y premultiplicar por $[\Phi]^T$ a ambos lados de la ecuación, se obtiene \mathbf{n} ecuaciones del tipo:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = -(\alpha_{ix} \cdot \ddot{x}_{0x} + \alpha_{iy} \cdot \ddot{x}_{0y}) \quad (15-36)$$

y si suponemos, por ahora, que disponemos de un espectro de desplazamientos para la dirección x , S_{dx} , el cual es diferente del que se tienen para la dirección y , S_{dy} . Entonces tenemos, por analogía con la ecuación (15-7):

$$(\eta_i)_{\max} = |\alpha_{ix} \cdot S_{dx}(T_i, \xi_i)| + |\alpha_{iy} \cdot S_{dy}(T_i, \xi_i)| \quad (15-37)$$

pero en la combinación de las componentes indicada en la ecuación anterior los valores espectrales no necesariamente ocurrieron en el mismo instante, ni reflejan el ángulo de ataque β más desfavorable, indicado en la Figura 15-11. En realidad, lo único que podemos decir con certeza es que el valor máximo que se puede asignar al grado de libertad desacoplado η_i si el sismo actúa únicamente en la dirección x , es:

$$(\eta_i^x)_{\max} = |\alpha_{ix} \cdot S_{dx}(T_i, \xi_i)| \quad (15-38)$$

y que el valor máximo que se puede asignar al grado de libertad desacoplado η_i si el sismo actúa únicamente en la dirección y , es:

$$(\eta_i^y)_{\max} = |\alpha_{iy} \cdot S_{dy}(T_i, \xi_i)| \quad (15-39)$$

Los desplazamientos dinámicos modales máximos que se presentan en la estructura, correspondientes a cada modo individual, por ejemplo el modo (i) , cuando el sismo actúa únicamente en la dirección x , son:

$$\{U_x^{(i)}\} = \{\phi^{(i)}\} \cdot (\eta_i^x)_{\max} = \{\phi^{(i)}\} \cdot |\alpha_{ix} \cdot S_{dx}(T_i, \xi_i)| \quad (15-40)$$

y si el sismo actúa únicamente en la dirección y , son:

$$\{U_y^{(i)}\} = \{\phi^{(i)}\} \cdot (\eta_i^y)_{\max} = \{\phi^{(i)}\} \cdot |\alpha_{iy} \cdot S_{dy}(T_i, \xi_i)| \quad (15-41)$$

De una manera análoga, para cada modo individual (i) , las fuerzas dinámicas inerciales modales máximas que se presentan en la estructura cuando el sismo actúa en la dirección x , pueden obtenerse multiplicando los desplazamientos modales máximos en la dirección x , por la matriz de rigidez de la estructura:

$$\begin{aligned} \{F_x^{(i)}\} &= [K] \{U_x^{(i)}\} = [K] \{\phi^{(i)}\} \cdot (\eta_i^x)_{\max} \\ &= [K] \{\phi^{(i)}\} \cdot |\alpha_{ix} \cdot S_{dx}(T_i, \xi_i)| \end{aligned} \quad (15-42)$$

y si el sismo actúa únicamente en la dirección y , son:

$$\begin{aligned} \{F_y^{(i)}\} &= [K] \{U_y^{(i)}\} = [K] \{\phi^{(i)}\} \cdot (\eta_i^y)_{\max} \\ &= [K] \{\phi^{(i)}\} \cdot |\alpha_{iy} \cdot S_{dy}(T_i, \xi_i)| \end{aligned} \quad (15-43)$$

Lo mismo ocurre para cualquier parámetro de respuesta r , pues se tiene un valor para cada modo cuando el sismo actúa en la dirección x , y otro cuando actúa únicamente en la dirección y . Utilizando cualquiera de los métodos de combinación modal, RCSC o CCC, obtendríamos el valor máximo factible del parámetro, independientemente para las direcciones x y y , como \bar{r}_x y \bar{r}_y , respectivamente. Ahora

solo nos resta determinar la forma como se combinan estos resultados de las dos direcciones principales.

En el *análisis dinámico modal espectral de estructuras tridimensionales* lo usual es emplear el mismo espectro en las dos direcciones principales, pues no existen elementos de juicio, en el estado actual del conocimiento, para afectar los dos espectros y hacerlos diferentes. En la Sección 5.6 se discutió la variación entre los espectros obtenidos para las dos componentes horizontales de un mismo sismo. En general la correlación entre las dos componentes horizontales de un registro acelerográfico es baja [Clough y Penzien, 1993], y es recomendable realizar una reducción de una de las dos componentes multiplicándola por un coeficiente λ que oscila entre 0 y 1. Entonces, de acuerdo con lo indicado en la Figura 15-12 se tendría un espectro actuando en la dirección 1 y el mismo espectro, afectado por el coeficiente λ , actuando en la dirección 2.

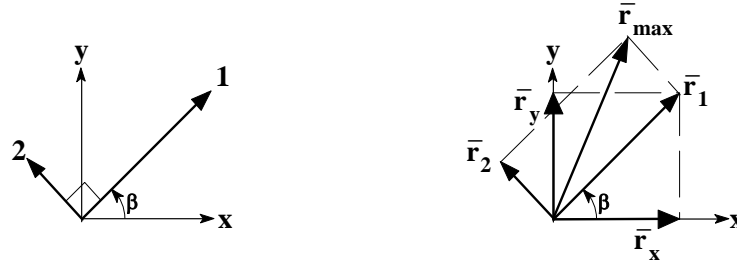


Figura 15-12 - Direcciones en que actúan las dos componentes horizontales del sismo

Entonces los valores máximos probables del parámetro r en las direcciones 1 y 2 son:

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= \bar{r}_x \cos \beta + \bar{r}_y \sin \beta \\ \bar{r}_2 &= -\lambda \bar{r}_x \sin \beta + \lambda \bar{r}_y \cos \beta\end{aligned}\quad (15-44)$$

El máximo probable \bar{r}_{\max} , se obtiene por medio de:

$$\bar{r}_{\max} = \sqrt{\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2} \quad (15-45)$$

Reemplazando (15-44) en (15-45):

$$\bar{r}_{\max} = \left[(\bar{r}_x^2 + \lambda^2 \bar{r}_y^2) \cos^2 \beta + (\bar{r}_y^2 + \lambda^2 \bar{r}_x^2) \sin^2 \beta + 2\bar{r}_x \bar{r}_y (1 - \lambda^2) \sin \beta \cos \beta \right]^{1/2} \quad (15-46)$$

y derivando con respecto al ángulo β :

$$\frac{d\bar{r}_{\max}}{d\beta} = \frac{-2 \cos \beta \sin \beta (\bar{r}_x^2 + \lambda^2 \bar{r}_y^2) + 2 \sin \beta \cos \beta (\bar{r}_y^2 + \lambda^2 \bar{r}_x^2) + (-\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) 2\bar{r}_x \bar{r}_y (1 - \lambda^2)}{2 \cdot \left[(\bar{r}_x^2 + \lambda^2 \bar{r}_y^2) \cos^2 \beta + (\bar{r}_y^2 + \lambda^2 \bar{r}_x^2) \sin^2 \beta + 2\bar{r}_x \bar{r}_y (1 - \lambda^2) \sin \beta \cos \beta \right]^{1/2}} \quad (15-47)$$

El valor del ángulo β que conduce al máximo valor de \bar{r}_{\max} se obtiene igualando la derivada anterior a cero:

$$\left[(\bar{r}_y^2 + \lambda^2 \bar{r}_x^2) - (\bar{r}_x^2 + \lambda^2 \bar{r}_y^2) \right] 2 \cos \beta \sin \beta + 2\bar{r}_x \bar{r}_y (1 - \lambda^2) (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) = 0 \quad (15-48)$$

Reordenando:

$$\frac{2\bar{r}_x \bar{r}_y (1 - \lambda^2)}{\left[(\bar{r}_x^2 + \lambda^2 \bar{r}_y^2) - (\bar{r}_y^2 + \lambda^2 \bar{r}_x^2) \right]} = \frac{2 \cos \beta \sin \beta}{\cos^2 \beta - \sin^2 \beta} = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \tan 2\beta \quad (15-49)$$

Pero:

$$(\bar{r}_x^2 + \lambda^2 \bar{r}_y^2) - (\bar{r}_y^2 + \lambda^2 \bar{r}_x^2) = (1 - \lambda^2)(\bar{r}_x^2 - \bar{r}_y^2) \quad (15-50)$$

Entonces:

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \bar{r}_x \bar{r}_y}{\bar{r}_x^2 - \bar{r}_y^2} \right) \quad (15-51)$$

Solo nos resta definir valores para el parámetro λ . Clough y Penzien [Clough y Penzien, 1993], indican que la reducción de la componente menor con respecto a la mayor debe ser del orden del quince por ciento, convirtiéndola en el 85 por ciento de la otra, lo cual lleva a un valor de $\lambda = 0.85$.

Los conceptos presentados en esta Sección, han sido extendidos a los códigos de diseño sismo resistente de la siguiente manera. Si r_x y r_y corresponden al efecto de las respuestas máximas del parámetro r para el sismo actuando en la dirección x y en la dirección y , respectivamente, como la correlación entre las dos componentes del mismo acelerograma es baja, el empleo del método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (RCSC) sería apropiado, pues prácticamente no hay correlación entre las dos componentes. Entonces:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{r_x^2 \cdot (1 + \lambda^2)} = \sqrt{r_x^2 \cdot (1 + 0.85^2)} = r_x \sqrt{1 + 0.723} \approx 1.3 r_x \quad (15-52)$$

De aquí viene el requisito de combinación entre componentes a 90° que prescriben los códigos de diseño sismo resistente en el cual se exige que se combine el 100% de la respuesta en una dirección principal con el 30% de la respuesta en la dirección principal ortogonal, lo que algunas veces se denomina *efectos ortogonales*.

15.4 — Número de modos a emplear

La respuesta dinámica exacta obtenida por medio de superposición modal de una estructura en el rango elástico, solo se obtiene si se incluyen todos los modos de vibración. No obstante, en muchos casos la contribución a la respuesta producida por los modos superiores es despreciable, por esta razón es válido utilizar un número de modos menor. Dado que existen metodologías que permiten calcular, con una precisión adecuada, un número de modos menor que el número de grados de libertad, como el método de iteración en el subespacio presentado en la Sección 13.5, la decisión de cuántos modos incluir se presenta con mucha frecuencia.

Históricamente han existido toda clase de recomendaciones al respecto, pero desde hace algún tiempo, para el caso de respuesta sísmica de estructuras, se ha recomendado incluir un número de modos tal que la masa que se excita a través de estos modos sea al menos el noventa por ciento de la masa total de la edificación. En la Sección 14.4 se probó que la masa activa corresponde a la suma de los cuadrados de los coeficientes de participación de los modos que se incluyan.

Muchos códigos de diseño sismo resistente modernos fijan un límite inferior a la masa activa en un valor igual al 90% de la masa de la estructura; lo cual se traduce en que debe incluirse un número de modos tal que se active el 90% de la masa en cada dirección principal en la cual se presente excitación.

No obstante, el número de modos que se requiere para obtener una respuesta que no se desvíe de la respuesta obtenida utilizando todos los modos; en un valor de error prefijado, por ejemplo un cinco por ciento, no es el mismo para la respuesta de diferentes parámetros. En general, en edificios en altura, los modos superiores tienen una mayor influencia en el corte basal que en los desplazamientos horizontales del último piso, indicando en alguna medida que los modos superiores afectan más las fuerzas que las deformaciones [Chopra, 1995]. Además, el orden de magnitud de la respuesta espectral de cualquier parámetro depende fundamentalmente del producto del coeficiente de participación del modo por el valor leído del espectro para el período de vibración del modo, $\alpha_i \cdot S_d(T_i)$. En general en los espectros de

desplazamientos de los sismos (véase la Sección 5.7), el desplazamiento decrece en la medida que el período de vibración se hace menor; por lo tanto la influencia de los modos superiores, con períodos cada vez menores, va a ser menor. Lo anterior sugiere que la decisión de fijar el número de modos a emplear se tome cuidadosamente, aún en los casos convencionales.

15.5 — El método de la fuerza horizontal equivalente

Prácticamente todos los códigos de diseño sismo resistente incluyen un procedimiento aproximado que permite determinar unas fuerzas sísmicas horizontales de diseño sin que haya necesidad de realizar un análisis dinámico de la estructura, este procedimiento se denomina el *método de la fuerza horizontal equivalente*. A continuación se presentan sus fundamentos.

Partiendo de las ecuaciones de equilibrio dinámico de la estructura:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = -[\mathbf{M}][\gamma]\{\ddot{x}_o\} \quad (15-53)$$

y obteniendo los n modos y frecuencias, $[\Phi]$ y $[\omega^2]$, con base en sus propiedades para vibración libre, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas se obtiene desacoplando el sistema por medio de la aplicación de la transformación de coordenadas:

$$\{\mathbf{U}\} = [\Phi]\{\eta\} \quad (15-54)$$

y

$$\{\ddot{\mathbf{U}}\} = [\Phi]\{\ddot{\eta}\} \quad (15-55)$$

Esta transformación desacopla el sistema de ecuaciones de equilibrio, conduciendo a:

$$\underbrace{[\Phi]^T[\mathbf{M}][\Phi]}_{[\mathbf{I}]} \{\ddot{\eta}\} + \underbrace{[\Phi]^T[\mathbf{K}][\Phi]}_{[\omega^2]} \{\eta\} = -\underbrace{[\Phi]^T[\mathbf{M}][\gamma]}_{[\alpha]} \{\ddot{x}_o\} \quad (15-56)$$

Tanto $[\mathbf{I}]$ como $[\omega^2]$, son matrices diagonales, y por esto el sistema se desacopla, obteniendo n ecuaciones independientes de un grado de libertad del tipo:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = -\alpha_i \ddot{x}_o \quad (15-57)$$

Nos limitamos a sistemas planares, con p pisos, en los cuales $\{\gamma\}=\{\mathbf{1}\}$, donde $\{\mathbf{1}\}$ es un vector con todos sus términos iguales a la unidad. Además, en este caso la matriz de masa $[\mathbf{M}]$, es diagonal. Si los modos son ortonormales, o sea que se normalizaron utilizando $[\Phi]^T[\mathbf{M}][\Phi]=[\mathbf{I}]$, entonces:

$$\alpha_i = \{\phi^{(i)}\}^T [\mathbf{M}] \{\gamma\} \quad (15-58)$$

o con cualquier tipo de normalización:

$$\alpha_i = \frac{\{\phi^{(i)}\}^T [\mathbf{M}] \{\gamma\}}{\{\phi^{(i)}\}^T [\mathbf{M}] \{\phi^{(i)}\}} = \frac{\sum_{j=1}^p (m_j \phi_j^{(i)})}{\sum_{j=1}^p [m_j (\phi_j^{(i)})^2]} \quad (15-59)$$

De acuerdo con lo presentado en la Sección 15.2, el máximo valor de puede tener η_i corresponde al valor leído del espectro de desplazamientos amplificado por el coeficiente de participación α_i . Entonces:

$$(\eta_i)_{\max} = |\alpha_i \cdot S_d(T_i, \xi_i)| \quad (15-60)$$

y

$$(\ddot{\eta}_i)_{\max} = |\alpha_i \cdot S_a(T_i, \xi_i)| \quad (15-61)$$

Donde $T_i = 2\pi/\omega_i$ y ξ_i corresponde al valor del amortiguamiento. Ahora, de acuerdo con la transformación dada en la ecuación (15-54), los desplazamientos máximos que puede tener la estructura, causados por el modo i , son:

$$\{U_{\max}^{(i)}\} = \{\phi^{(i)}\}(\eta_i)_{\max} = \{\phi^{(i)}\}\alpha_i \cdot S_d(T_i, \xi_i) \quad (15-62)$$

y las aceleraciones máximas, son:

$$\{\ddot{U}_{\max}^{(i)}\} = \{\phi^{(i)}\}(\ddot{\eta}_i)_{\max} = \{\phi^{(i)}\}\alpha_i \cdot S_a(T_i, \xi_i) \quad (15-63)$$

Las máximas fuerzas inerciales a que se ve sometido el sistema son entonces:

$$\{F_{\max}^{(i)}\} = [M]\{\ddot{U}_{\max}^{(i)}\} = [M]\{\phi^{(i)}\}\alpha_i \cdot S_a(T_i, \xi_i) \quad (15-64)$$

y el máximo cortante en la base, para el modo i :

$$V_{\max}^{(i)} = \{1\}^T \{F_{\max}^{(i)}\} = [M]\{\ddot{U}_{\max}^{(i)}\} = \{1\}^T [M]\{\phi^{(i)}\}\alpha_i \cdot S_a(T_i, \xi_i) \quad (15-65)$$

Ahora, expandiendo las operaciones matriciales de la ecuación (15-65), y reemplazando α_i por su definición en términos de sumatorias dada en la ecuación (15-59), obtenemos la siguiente expresión para el cortante máximo en la base causado por el modo i :

$$V_{\max}^{(i)} = \frac{\left[\sum_{j=1}^p (m_j \phi_j^{(i)}) \right]^2}{\sum_{j=1}^p \left[m_j (\phi_j^{(i)})^2 \right]} \cdot S_a(T_i, \xi_i) = m_{ef}^{(i)} \cdot S_a(T_i, \xi_i) \quad (15-66)$$

Debe notarse que el término $m_{ef}^{(i)}$ es precisamente la masa efectiva modal definida anteriormente en la Sección 14.4.

Si ahora estudiamos en detalle el caso del primero modo de vibración, o *modo fundamental*, para sistemas planares en general se puede decir que sus términos, para cualquier piso j , pueden expresarse por medio de:

$$\phi_j^{(1)} = (h_j)^k \quad (15-67)$$

donde h_j es la altura del piso j medida desde la base de la estructura, y k es un exponente que se relaciona con lo flexible que sea la estructura, siendo cercano a la unidad ($k = 1$), para estructuras bajas y rígidas y cercano a dos ($k = 2$), para estructuras flexibles y altas. En la Figura 15-17 se presenta la forma de calcular la masa efectiva para estructuras con masa uniforme por piso, m , y entrepisos con la misma altura, para un número de pisos igual a p .

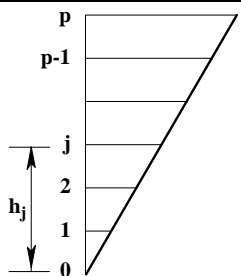
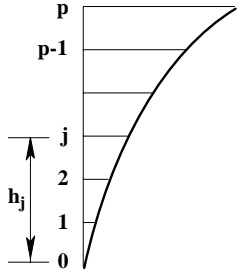
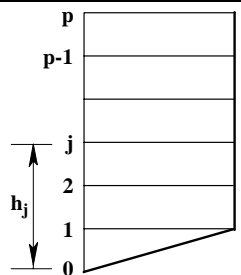
k	$\{\phi^{(1)}\}$	$\phi_j^{(1)}$	masa efectiva - $m_{ef}^{(1)}$
k=1		$\phi_j^{(1)} = h_j$	$m_{ef}^{(1)} = \frac{\left[m \cdot \frac{(p+1) \cdot p}{2} \right]^2}{m \cdot \frac{(2p+1) \cdot (p+1) \cdot p}{6}} = \frac{(p+1) \cdot p}{\frac{2p+1}{6}}$ $= 1.5 \cdot \frac{(p+1) \cdot p}{(2p+1)} \cdot m$
k=2		$\phi_j^{(1)} = (h_j)^2$	$m_{ef}^{(1)} = \frac{\left[m \cdot \frac{(2p+1) \cdot (p+1) \cdot p}{6} \right]^2}{m \cdot \frac{(3p^2 + 3p - 1) \cdot (2p+1) \cdot (p+1) \cdot p}{30}}$ $= 0.833 \cdot \frac{(2p+1) \cdot (p+1) \cdot p}{(3p^2 + 3p - 1)} \cdot m$
Piso blando		$\phi_j^{(1)} = 1$	$m_{ef}^{(1)} = \frac{[m \cdot p]^2}{m \cdot p} = m \cdot p$

Figura 15-17 - Cálculo de la masa efectiva modal para el primer modo

En la tabla 15-28 se utilizan las fórmulas anteriores para calcular la masa efectiva modal del primer modo en los casos mostrados y para diferentes números de pisos. La masa efectiva se expresa allí como fracción de la masa total de la edificación ($M_{tot} = mp$).

Tabla 15-28 - Masa efectiva para el primer modo como fracción de la masa total

número de pisos	masa efectiva del primer modo ($m_{ef}^{(1)} / M_{tot}$)		
	k=1	k=2	Piso blando
1	1.000	1.000	1.000
3	0.857	0.666	1.000
5	0.818	0.618	1.000
8	0.794	0.593	1.000
10	0.786	0.585	1.000
15	0.774	0.575	1.000
20	0.768	0.570	1.000
30	0.762	0.565	1.000
100	0.754	0.558	1.000

Para los casos típicos de estructuras regulares, la masa efectiva oscila entre el 55% y el 90% de la masa total de la estructura. En el caso del edificio con un primer piso blando, el primer modo siempre tiene una masa efectiva igual a la masa total. Esta situación se presenta en edificios con muros que no llegan a la cimentación y están apoyados en una losa de transferencia que a su vez está sostenida por una estructura aporticada. En el método de la fuerza horizontal equivalente se realizan las siguientes

aproximaciones, las cuales siguen la forma como está planteado en el ATC-3 [ATC, 1978] y en las normas sísmicas colombianas [A/S, 1981, 1983, 1997, 1998].

Las dos aproximaciones fundamentales del método consisten en: limitar la respuesta sísmica al primer modo, e igualar la masa efectiva del primer modo a la masa total de la estructura, para compensar por la ausencia de los otros modos. Estas aproximaciones son generalmente conservadoras, pero existen casos en los cuales no los son; como es el edificio con un primer piso muy flexible, como el caso de piso blando mostrado anteriormente. El grado de conservatismo de los casos de estructuras sin irregularidades se puede determinar de los resultados mostrados en la tabla 15-28. Al limitarnos al primer modo, la ecuación (15-66) se convierte en:

$$V_s = M_{tot} \cdot S_a(T_i, \xi_i) \quad (15-68)$$

El espectro de aceleraciones que se emplea en las normas por lo general incluye un coeficiente de amortiguamiento crítico del 5% ($\xi = 0.05$) y además está expresado como fracción de la aceleración de la gravedad, g . Dado esto, habría necesidad de multiplicar los resultados por g . Tradicionalmente, esto se ha obviado en las normas dejando el espectro como fracción de la gravedad y utilizando el valor de g para multiplicar la masa, convirtiéndola en fuerzas gravitacionales, o peso, W . En el caso de las normas sismo resistentes colombianas, se ha dejado en función de la masa, así:

$$V_s = M_{tot} \cdot g \cdot S_a(T_i, \xi_i) \quad (15-69)$$

Es evidente que la ecuación anterior corresponde a la 2ª Ley de Newton. La siguiente aproximación del método consiste en estimar un *período de vibración fundamental* de la estructura T_a , y con él determinar las ordenadas espectrales:

$$T_a = C_t \cdot h_n^{3/4} \quad (15-70)$$

Donde C_t es un coeficiente que depende del sistema y material estructural (para pórticos resistentes a momento, de concreto reforzado $C_t = 0.08$ y de acero $C_t = 0.09$), y h_n es la altura en metros medida desde la base del piso más alto del edificio.

Históricamente, dentro de la terminología de las normas de diseño sismo resistente, el espectro de aceleraciones, S_a , expresado en unidades de fracción de la gravedad (g), ha sido llamado *coeficiente sísmico*, utilizando el término C_s para denominarlo. Dado que las fuerzas de diseño que prescriben los códigos incluyen una reducción a las ordenadas espectrales por medio de un *coeficiente de reducción de resistencia*, R , debido a que se espera que la estructura responda en el rango inelástico (véase la Sección 6.4). Entonces el coeficiente sísmico, $C_s = S_a$, si las fuerzas sísmicas están prescritas al nivel de respuesta elástica, e igual a $C_s = S_a/R$, si incluyen el efecto inelástico descrito a través del coeficiente R . Entonces, el cortante en la base que impone el sismo a la estructura, incluyendo los efectos inelásticos, si se desea, se obtiene modificando la ecuación (15-68) así:

$$V_s = M_{tot} \cdot g \cdot C_s = M_{tot} \cdot g \cdot S_a(T_a) \quad (15-71)$$

Es importante notar aquí que el coeficiente sísmico corresponde a la fracción del peso de la estructura que se emplea como *cortante basal* de diseño corresponde al coeficiente sísmico, $C_s = V_s/(M_{tot} \cdot g) = V_s/W$,

El cortante basal, V_s , corresponde a la suma de unas fuerzas horizontales localizadas en cada uno de los pisos de la estructura. Estas fuerzas varían en la altura con la forma del primero modo, o *modo fundamental*. La norma define la forma del primer modo así:

$$\phi_j = h_j^k \quad \text{donde} \quad k = \begin{cases} 1.0 & \text{para } T_a < 0.5 \text{ s} \\ 0.75 + 0.5 \cdot T_a & \text{para } 0.5 \text{ s} < T_a < 2.5 \text{ s} \\ 2.0 & \text{para } 2.5 \text{ s} < T_a \end{cases} \quad (15-72)$$

Las fuerzas horizontales se obtienen a partir de la ecuación (15-64):

$$\{F\} = [M] \{\ddot{U}_{\max}^{(1)}\} = [M] \{\phi^{(1)}\} \alpha_1 \cdot S_a(T_1, \xi_1) \quad (15-73)$$

Pero de acuerdo con las simplificaciones realizadas, al hacer la masa efectiva igual a la masa total y aplicar la definición de los términos modales dada en la ecuación (15-72), entonces:

$$\alpha_1 = \frac{M_{\text{tot}}}{\sum_{i=1}^p [m_i \cdot h_i^k]} \quad (15-74)$$

y al modificar el espectro de aceleraciones a un espectro, elástico o inelástico, expresado como fracción de la gravedad:

$$\frac{S_a(T_1, \xi_1)}{g} = S_a(T_a) = C_s \quad (15-75)$$

Reemplazando las ecuaciones (15-74) y (15-75) en la ecuación (15-73), obtenemos:

$$\{F\} = [M] \{\phi^{(1)}\} \cdot \frac{M_{\text{tot}}}{\sum_{ij=1}^p [m_i \cdot h_i^k]} \cdot C_s = \frac{[M] \{\phi^{(1)}\}}{\sum_{i=1}^p [m_i \cdot h_i^k]} \cdot V_s \quad (15-76)$$

Entonces, para cualquier piso j , la fuerza horizontal está dada por:

$$F_j = \frac{m_j \cdot h_j^k}{\sum_{i=1}^p [m_i \cdot h_i^k]} \cdot V_s = C_{vj} \cdot V_s \quad (15-77)$$

El coeficiente C_{vj} indica la fracción del corte basal que se aplica en cada piso de la estructura.

El método de la fuerza horizontal equivalente ha sido históricamente el procedimiento de determinación de las fuerzas sísmicas de diseño de prácticamente todos los códigos sísmicos del mundo. El procedimiento es indudablemente una manera de realizar un análisis dinámico aproximado sin complejidad matemática, pero con limitaciones en su aplicación, especialmente a estructuras irregulares, ya sea en planta o en alzado.

Bibliografía

- AASHTO - American Association of State Highway and Transportation Officials, (1994), AASHTO LRFD Bridge Design Specifications, AASHTO, Washington, DC, USA, 2 Vol. []
- Abrams, D. P., (1985), Nonlinear Earthquake Analysis of Concrete Building Structures, A report to the American Society for Engineering Education, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 77p. [6a, 6a]
- Abrams, D. P., (1991), Laboratory Definitions of Behavior for Structural Components and Building Systems, Earthquake-Resistant Concrete Structures - Inelastic Response and Design, Special Publication SP-127, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 91-152. [6a, 6a, 6a]
- Abrams, D. P., and M. A. Sozen, (1979), Experimental Study of Frame-Wall Interaction in Reinforced Concrete Structures Subjected to Strong Earthquake Motions, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 460, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 386 p. []
- ACI - American Concrete Institute, (1981), Building Code Requirements for Concrete Masonry Structures (ACI 531-81), ACI, Detroit, MI, USA, 76 p. []
- ACI - American Concrete Institute, (1991a), Design of Beam-Column Joints for Seismic Resistance, Jirsa, J. O., editor, Special Publication SP-123, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, 518 p. []
- ACI - American Concrete Institute, (1991b), Earthquake-Resistant Concrete Structures - Inelastic Response and Design, Ghosh, S. K., editor, Special Publication SP-127, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, 558 p. [6a]
- ACI - American Concrete Institute, (1994), Masonry in the Americas, Abrams, D. P., editor, Special Publication SP-147, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, 360 p. [6a, 6a]
- ACI - American Concrete Institute, (1995a), Recent Developments in Lateral Force Transfer in Buildings - Thomas Paulay Symposium, Priestley, N. J. N., Collins, M. P., and Seible, F., editors, Special Publication SP-157, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, 516 p. []
- ACI - American Concrete Institute, (1995b), Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-95), ACI, Detroit, MI, USA, 347 p. []
- ACI - American Concrete Institute, (1996), Mete A. Sozen Symposium - A Tribute form His Students, Wight, J. K., and M. E. Kreger, editors, Special Publication SP-162, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, 460 p. []
- ACI - ASCE Committee 426, (1973), The Shear Strength of Reinforced Concrete Members, (ACI 426R-74 Reaffirmed in 1980), Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, New York, NY, USA, June, p. []
- ACI - ASCE Committee 530, (1988), Building Code Requirements for Masonry Structures and Specifications for Masonry Structures, American Society of Civil Engineers, New York, NY, USA, 491 p. []
- AFGP - Association Francaise du Genie Parasismique, (1990), Recommandations AFPS-90 pur la redaction de regles relatives aux ouvrages et installations a realiser dans les regions sujettes aux seismes, AFGP, Presses de l'ecole nationale des ponts et chaussées, Paris, France, 183 p. []
- AFGP - Association Francaise du Genie Parasismique, (1991), Proceedings of the International Conference on Buildings with Load Bearing Concrete Walls in Seismic Zones, AFGP, París, France, 505 p. []
- AIE - Asociación de Ingenieros Estructurales, (1982), Diseño y Construcción de Puentes, Publicación P-01, Asociación de Ingenieros Estructurales de Antioquia, Medellín, Colombia, 257 p. []
- AIJ - Architectural Institute of Japan, (1994), AIJ Design Guidelines for Earthquake Resistant Reinforced Concrete Buildings Based on Ultimate Strength Concept - 1990 Edition, English Translation performed by AIJ, Tokyo, Japan, 207 p., []
- AIS - Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, (1981), Requisitos Sísmicos para Edificios - Norma AIS 100-81, AIS, Bogotá, Colombia, 58 p. [7b]
- AIS - Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, (1983), Requisitos Sísmicos para Edificaciones - Norma AIS 100-83, AIS, Bogotá, Colombia, 12 Cap. [7b]
- AIS - Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, (1988), Comentarios al Código Colombiano de Construcciones Sismo Resistentes CCCSR-84, AIS - MOPT - SCI - OND, AIS, Bogotá, Colombia, 3 Vol. []
- AIS - Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, (1997), Requisitos Sísmicos para Edificaciones - Norma AIS 100-97, AIS, Bogotá, Colombia, 2 Vol. [6b, 6b, 7b, 7b, 7b,15b]
- AIS - Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, (1998), Normas colombianas de diseño y construcción sismo resistente - NSR-98 (Ley 400 de 1997 y Decreto 33 de 1998), AIS, Bogotá, Colombia, 4 Vol. [6b, 6b, 7b, 7b, 7b,15b]
- AISC - American Institute of Steel Construction, (1994), Manual of Steel Construction - Load and Resistance Factor Design - Volume I: Structural Members, Specifications & Codes - Volume II: Connections, 2nd. Edition, AISC, Chicago, IL, USA, 2021 p. [6a]
- Akivis, M. A., and V. V. Goldberg, (1972), An Introduction to Linear Algebra & Tensors, Dover Publications, New York, NY, USA, 167 p. [8a, 13]
- Algan, B. B., (1982), Drift and Damage Consideration in Earthquake-Resistant Design of Reinforced Concrete Buildings, Ph. D. Dissertation Submitted to the Graduate College of the University of Illinois, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 2 vol. []
- Ali, A., and J. K. Wight, (1990), Reinforced Concrete Structural Walls with Staggered Opening Configurations Under Reversed Cyclic Loading, Report No. UMCE 90-05, Department of Civil Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA, 241 p. []

- Ambrose, J., and D. Vergun, (1985), *Seismic Design of Buildings*, John Wiley, New York, NY, USA, 289 p. []
- Ang, A. H-S., and W. H. Tang, (1984), *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, 2 volumes, John Wiley, New York, NY, USA, 409 p. and 562 p. [15]
- ANSI - American National Standards Institute, (1982), *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures ANSI A 58-82*, ANSI, New York, NY, USA, 100 p. []
- Arnold, C., and R. K. Reitherman, (1982), *Building Configuration and Seismic Design*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 296 p. []
- ASCE - American Society of Civil Engineers, (1978), *Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, ASCE, New York, NY, USA, 3 Vol. []
- ASCE - American Society of Civil Engineers, (1985), *Measurement and Use of Shear Wave Velocity*, Woods, R. D., editor, ASCE, New York, NY, USA, 78 p. [7b]
- ASCE - American Society of Civil Engineers, (1987), *The Mexico Earthquakes - 1985 - Factors Involved and Lessons Learned*, Cassaro, M. A., and Martinez, E., editors, ASCE, New York, NY, USA, 474 p. [6a]
- ASCE - American Society of Civil Engineers, (1994), *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures - ANSI/ASCE 7-93*, ASCE, New York, NY, USA, 134 p. []
- ATC - Applied Technology Council, (1978), *Tentative Provisions for the Development of Seismic Regulations for Buildings, ATC-3-06*, ATC, Palo Alto, CA, USA, 505 p. [7a, 7b, 7c, 15b]
- ATC - Applied Technology Council, (1981), *Proceedings of a Workshop on Design of Prefabricated Concrete Buildings for Earthquake Loads, ATC-8*, ATC, Berkeley, CA, USA, December, 711 p. []
- ATC - Applied Technology Council, (1983), *Seismic Resistance of Reinforced Concrete Shear Walls and Frame Joints: Implications of Recent Research for Design Engineers*, ATC-11, Applied Technology Council, Palo Alto, CA, USA, 711 p. []
- ATC - Applied Technology Council, (1986), *ATC-6 - Seismic Design Guidelines for Highway Bridges*, 2nd Printing, ATC, Redwood City, CA, USA, 204 p. []
- Barda, F., J. M. Hanson, and W. G. Corley, *Shear Strength of Low Rise Walls with Boundary Elements*, Reinforced Concrete W. G., (1977), Structures in Seismic Zones, Publication SP-53, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, p. []
- Bathe, K-J., (1982), *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 735 p. [8a, 13]
- Bathe, K-J., (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 1037 p. [3]
- Bathe, K-J. and E. L. Wilson, (1976), *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, p. [8a, 13]
- Bathe, K-J., E. L. Wilson, and F. E. Peterson, (1973), *SAP-IV A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems*, Report No. EERC 73-11, University of California, Berkeley, CA, USA, p. []
- Beckmann, P., (1995), *Structural Aspects of Building Conservation*, McGraw-Hill Book Co. Europe, Maidenhead, England, UK, 286 p. []
- Beer, F. P., and E. R. Johnston, (1972), *Vector Mechanics for Engineers*, 2^a Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, NY, USA, p. []
- Berg, G. V., (1982), *Seismic Design Codes and Procedures*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA, USA, 119 p. []
- Berg, G. V., (1989), *Elements of Structural Dynamics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 268 p. [1,3]
- Bernal, C. E., (1985), *Consideraciones Sísmicas en el Análisis y Diseño de Estructuras Viales*, Cuarto Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 56 p. []
- Bertero, V. V., and R. D. Bertero, (1993), *The Reinforced Concrete Buildings: Conceptual Earthquake - Resistant Design Methodology*, VII Seminario Latinoamericano de Ingeniería Sísmica, Mérida, Venezuela, Julio, 64 p. []
- Bertero, V. V., and E. P. Popov, (1977), *Seismic Behavior of Ductile Moment-Resisting Reinforced Concrete Frames*, Reinforced Concrete in Seismic Zones, Special Publication SP-53, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 247-291 [6a]
- Biggs, J. M., (1964), *Introduction to Structural Dynamics*, McGraw-Hill, New York, NY, USA, p. [1]
- Blume, J., N. M. Newmark, and L. H. Corning, (1961), *Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions*, Portland Cement Association, Skokie, IL, USA, 318 p.
- Bolander, J. E., and J. K. Wight, (1989), *Towards Realistic F-E Models for Reinforced Concrete Shear Wall Dominant Buildings Subjected to Lateral Loading*, Report UMCE 89-2, Department of Civil Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA, 192 p.
- Bolt, B. A., (1993a), *Earthquakes*, 3rd Edition, W. H. Freeman and Co., New York, NY, USA, p. [4a, 4b]
- Bolt, B. A., (1993b), *Earthquakes and Geological Discovery*, Scientific American Library, New York, NY, USA, 229 p. [4a, 4b]
- Bolt, B. A., (1989), *The Nature of Earthquake Ground Motion*, Chapter 1 of The Seismic Design Handbook, Van Nostrand Reinhold Co., New York, NY, USA, 1-31 pp. [4b, 4b]
- Bolton, A., (1994), *Structural Dynamics in Practice*, McGraw-Hill International (UK), London, U. K., p. [1]
- Bonacci, J. F., and J. K. Wight, (1996), *Displacement-Based Assessment of Reinforced Concrete Frames in Earthquakes*, Mete A. Sozen Symposium - A Tribute from His Students, Special Publication SP-162, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 117-138. []
- Borcherdt, R. D., (1994), *Simplified Site Classes and Empirical Amplification Factors for Site Dependent Code Provisions*, Proceedings of the NCEER/SEAOC/BSSC Workshop on Site Response During Earthquakes and Seismic Code Provisions, University of Southern California, San Diego, CA, USA, p. [7b]

- Bowles, J. E., (1996), *Foundation Analysis and Design*, 5th. Edition, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1175 p. [16]
- Bradley, G., (1975), *A Primer of Linear Algebra*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, p. [8a, 13]
- Brockenbrough, R. L., and F. S. Merritt, editors, (1994), *Structural Steel Designer's Handbook*, 2nd. Edition, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 946 p. []
- Bullen, K. E., (1963), *Introduction to the Theory of Seismology*, 3^a Edition, Cambridge University Press, Cambridge, U. K, p. []
- Burnett, D. S., (1987), *Finite Element Analysis - from Concepts to Applications*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, USA, 844 p. [9b]
- Cárdenas, A. E., J. M. Hanson, W. G. Corley, and E. Hognestad, (1973), *Design Provisions for Shear Walls*, ACI Journal, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, March, p. []
- Cárdenas, A. E., H. G. Russell, and W. G. Corley (1980), *Strength of Low Rise Structural Walls*, Reinforced Concrete Structures Subjected to Wind and Earthquake Forces, Publication SP-63, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, p. []
- Carnahan, B., H. A. Luther, and J. O. Wilkes, (1969), *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, p. [8a, 13]
- CEB Task Group Seismic Design, (1985), *CEB Model Code for Seismic Design of Concrete Structures*, Bulletin d'Information No. 165, Comité Euro-International du Béton, CEB, Geneva, Switzerland, 58 p. []
- CEB - Comité Euro-International du Béton, (1990), *CEB-FIP MODEL CODE 1990 (First Draft)*, Boletín de Información N° 195, CEB, Lausana, Suiza, Marzo, 2 Vol. []
- CEN - European Committee for Standardization, (1992), *Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1: General rules and rules for buildings - ENV 1992-1-1*, CEN, Brussels, Belgium, 253 p. []
- CEN - European Committee for Standardization, (1994), *Eurocode 8: Design provisions for earthquake resistance of structures - ENV 1998-1-1*, CEN, Brussels, Belgium, 276 p. [7b]
- Chandrupatla, T. R., and A. D. Belegundu (1991), *Introduction to Finite Elements in Engineering*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 414 p. [9b]
- Chen, P. A., P. Hidalgo, R. L. Mayes, R. W. Clough, and H. D. McNiven, (1978), *Cyclic Loading Tests of Masonry Shear Piers*, Volume II, Report N° UCB/EERC-78/28, Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA, p. [6a]
- Chopra, A. K., (1980), *Dynamics of Structures - A Primer*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA, USA, 126 p. [1, 5]
- Chopra, A. K., (1995), *Dynamics of Structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 729 p. [1, 12, 15b]
- Clough, R. W., and S. B. Johnson, (1966), *Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements*, Proceedings of the Second Japan Earthquake Engineering Symposium, Tokyo, Japan, p. [6a]
- Clough, R. W., and J. Penzien, (1993), *Dynamics of Structures*, 2^a Edition, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 648 p. [1, 5, 7b, 12, 15b]
- Coburn, A., and R. Spence, (1992), *Earthquake Protection*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, WS, UK, 355 p. [6a]
- Computech Engineering Services, (1983), *COMBAT - Comprehensive Building Analysis tool*, Computech Engineering Services, Inc., Berkeley, CA, USA, 87 p. []
- Cook, R. D., (1995), *Finite Element Modeling for Stress Analysis*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 320 p. [9b]
- Cook, R. D., D. S. Malkus, and M. E. Plesha, (1989), *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 630 p. [8a, 9b]
- Corley, W. G., A. E. Fiorato, and R. G. Oesterle, (1981), *Structural Walls*, Significant Developments in Engineering Practice and Research, Publication SP-72, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, p. []
- COPR - California Office of Planning and Research, (1990), *Competing Against Time - Report From the Governor's Board of Inquire on the 1989 Loma Prieta Earthquake*, State of California, Sacramento, CA, USA, May, p. []
- Craig Jr., R. R., (1981), *Structural Dynamics - An Introduction to Computer Methods*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, p. [1]
- Crandall, S. H., (1956), *Engineering Analysis - A Survey of Numerical Procedures*, McGraw-Hill Book Co., New York, NY, USA, 417 p. [8a, 13]
- CTBUH - Council on Tall Buildings and the Urban Habitat, (1978), *Monograph on the Planning and Design of Tall Buildings, Chapter CB-12 Design of Structures with Precast Elements*, CTBUH, McGraw-Hill, New York, NY, USA, p. []
- CTBUH - Council on Tall Buildings and Urban Habitat, (1992a), *Cast-In-Place Concrete in Tall Building Design and Construction*, CTBUH, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 402 p. []
- CTBUH - Council on Tall Buildings and Urban Habitat, (1992b), *Cladding*, CTBUH, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 151 p. []
- CTBUH - Council on Tall Buildings and Urban Habitat, (1994), *Structural Systems for Tall Buildings*, Committee 3, CTBUH, McGraw-Hill, New York NY, USA, p. []
- CTBUH - Council on Tall Buildings and Urban Habitat, (1995), *Structural Systems for Tall Buildings*, CTBUH, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 422 p. []
- CRSI - Concrete Reinforcing Steel Institute, (1984), *CRSI Handbook - Based Upon the 1983 ACI Building Code*, CRSI, Schaumburg, IL, USA, p. []
- CRSI - Concrete Reinforcing Steel Institute, (1993), *Seismic Design Examples of Two 7-Story Reinforced Concrete Buildings in Seismic Zones 4 and 2A of the Uniform Building Code*, CRSI, Schaumburg, IL, USA, 82 p. []

- CRSI - Concrete Reinforcing Steel Institute, (1994), Performance of Reinforced Concrete Bridges in the Northridge Earthquake, Special Report, CRSI, Schaumburg, IL, USA, 12 p. []
- Das, B. M., (1983), Fundamentals of Soil Dynamics, Elsevier, New York, NY, USA, 399 p.
- Deif, A. S., (1982), Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers, Abacus Press, Turnbridge Wells, Kent, U. K, p. [8a, 13]
- Den Hartog, J. P., (1961), Mechanics, Dover Publications, New York, NY, USA, 436 p. []
- Der Kiureghian, A., and A. H-S. Ang, (1975), A Line Source Model for Seismic Risk Analysis, Civil Engineering Studies, Structural Research Series N° 419, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, October, 134 p. [4b]
- Der Kiureghian, A., (1981), A Response Spectrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 9, pp. 419-435 [5]
- Derecho, A. T., (1989), Seismic Design of Reinforced Concrete Structures, Chapter 9 of The Seismic Design Handbook, Van Nostrand, New York, NY, USA, p. []
- Deschappelles, B., (1980), Análisis de Muros de Corte Intersectantes y Acoplados, Asociación Venezolana de Sistemas de Paredes Estructurales, Caracas, Venezuela, p. []
- DFM - Distrito Federal de México, (1993), Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, Diario Oficial de la Federación, México D. F., México, Agosto 2, [7b]
- Donovan, N. C., (1973), Earthquake Hazards for Buildings, Building Practices for Disaster Mitigation, Building Science Series 46, U. S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, DC, USA, p. [4b]
- DOT - U. S. Department of Transportation, (1983), Seismic Retrofitting Guidelines for Highway Bridges, U. S. Department of Transportation, Federal Highway Administration, Report N° FHWA/RD-83/007, Washington, DC, USA, 205 p. []
- Dobry, R., and M. Vucetic, (1987), Dynamic Properties and Seismic Response of Soft Clay Deposits, Proceedings of the International Symposium on Geotechnical Engineering of Soft Soils, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, México, D. F., México, 2 Vol. [7b, 7b]
- Dowrick, D. J., (1987), Earthquake Resistant Design for Engineers and Architects, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 519 p. [7b]
- Eberhard, M. O., and M. A. Sozen, (1989), Experiments and Analysis to Study the Seismic Response of Reinforced Concrete Frame-Wall Structures with Yielding Columns, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 548, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 424 p. []
- ECC - Engineering Computer Corporation, (1985), SEISAB - I - Seismic Analysis of Bridges - User Manual, ECC, Sacramento, CA, USA, 210 p. []
- EERC - Earthquake Engineering Research Center, (1989), Preliminary Report on the Seismological and Engineering Aspects of the October 17, 1989 Santa Cruz (Loma Prieta) Earthquake, Report No. UCB/EERC-89/14, University of California, Berkeley, CA, USA, October. []
- EERI - Earthquake Engineering Research Institute, (1973), Reconnaissance Report on the Managua, Nicaragua Earthquake of December 23, 1972, EERI, Oakland, CA, USA, May, p. []
- EERI - Earthquake Engineering Research Institute, (1980), Reconnaissance Report on the Imperial County, California Earthquake of October 15, (1979), EERI, Berkeley, CA, USA, February, p. []
- EERI - Earthquake Engineering Research Institute, (1989), Armenia Earthquake Reconnaissance Report, EERI, Earthquake Spectra, Berkeley, CA, USA, August, p. []
- EERI - Earthquake Engineering Research Institute, (1994), Expected Seismic Performance of Buildings, EERI, Berkeley, CA, USA, February, 19 p. [6a]
- Emmons, P. H., (1994), Concrete Repair and Maintenance Illustrated, R. S. Means Co. Inc. Construction Publishers and Consultants, Kingston, MA, USA, 295 p. []
- Englekirk, R. E., (1994), Steel Structures, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 807 p. []
- Englekirk, R. E., and G. C. Hart, (1982), Earthquake Design of Concrete Masonry Buildings, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 2 vol. []
- Espinosa, A., (1985), Dinámica de Suelos y Estabilidad de Taludes, Cuarto Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 70 p. []
- Espinosa, A., (1995), Geotécnica Sísmica en Bogotá, VII Jornadas Geotécnicas y II Foro sobre la geotécnica de la Sabana de Bogotá, Sociedad Colombiana de Ingenieros y Sociedad Colombiana de Geotécnica, Bogotá, Colombia, Septiembre, p. [4b, 7b]
- Faddeeva, V. N., (1959), Computational Methods of Linear Algebra, Dover Publications, New York, NY, USA, p. [8a, 13]
- FEMA - Federal Emergency Management Agency, (1986), NEHRP Recommended Provisions for the Development of Seismic Regulations for New Buildings - 1985 Edition, and Commentary, Earthquake Hazard Reduction Series N° 17, Building Seismic Safety Council, Washington, DC, USA, 129 p. [7b]
- FEMA - Federal Emergency Management Agency, (1991), NEHRP Recommended Provisions for the Development of Seismic Regulations for New Buildings - 1991 Edition, and Commentary, Earthquake Hazard Reduction Series N° 16, Building Seismic Safety Council, Washington, DC, USA, 436 p. [7b]
- FEMA - Federal Emergency Management Agency, (1992), NEHRP Handbook for the Seismic Evaluation of Existing Buildings, Earthquake Hazard Reduction Series N° 47, Building Seismic Safety Council, Washington, DC, USA, 98 p. []

- FEMA - Federal Emergency Management Agency, (1994a), Reducing the Risks of Nonstructural Earthquake Damage - A Practical Guide, 3rd. Edition Developed by Wiss, Janney, Elstner Associates, Inc., Report FEMA 74, FEMA, Washington, DC, USA, 101 p. []
- FEMA - Federal Emergency Management Agency, (1994b), NEHRP Recommended Provisions for the Development of Seismic Regulations for New Buildings - 1994 Edition, and Commentary, Earthquake Hazard Reduction Series N° 222A, Building Seismic Safety Council, Washington, DC, USA, p. [7b, 7b, 7b]
- Fenves, S. J., R. D. Logcher, S. P. Mauch, and K. F. Reinschmidt, (1964), STRESS - A User's Manual, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, p. [8a]
- Fenwick, R. C., and B. J. Davidson, (1995), Elongation in Ductile Seismic-Resistant Reinforced Concrete Frames, Recent Developments in Lateral Force Transfer in Buildings, Special Publication SP-157, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 143-170. [6a]
- Ferguson, P. M., J. E. Breen, and J. O. Jirsa, (1988), Reinforced Concrete Fundamentals, 5th. Edition, John Wiley, New York, NY, USA, 746 p. []
- Fertis, D. G., (1995), Mechanical and Structural Vibrations, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 804 p. [1]
- Fintel, M., (1974), Ductile Shear Walls in Earthquake-Resistant Multistory Buildings, Portland Cement Association, Skokie, IL, USA, p. []
- Fiorato, A. E., M. A. Sozen, and W. L. Gamble, (1970), An Investigation of the Interaction of Reinforced Concrete Frames with Masonry Filler Walls, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 370, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 495 p. []
- Fling, R. S., (1987), Practical Design of Reinforced Concrete, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, p. []
- Fröberg, C. E., (1965), Introduction to Numerical Analysis, Addison-Wesley, Reading, MA, USA, p. [8a, 13]
- Gallagher, R. H., (1975), Finite Element Analysis Fundamentals, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 420 p. [9b]
- García, L. E., (1975), Idealización Estructural para el Caso de Cargas Sísmicas, Primeras Jornadas Estructurales, Sociedad Colombiana de Ingenieros, Bogotá, Colombia, p. []
- García, L. E., (1980), Los Temblores Colombianos de Finales de 1979 y su Influencia en la Normalización Sísmica Colombiana, II Seminario Latinoamericano de Ingeniería Sísmica, Universidad Católica del Perú, Lima Perú, p. []
- García, L. E., (1984), Development of the Colombian Seismic Code, Proceedings of the Eight World Conference on Earthquake Engineering, Earthquake Engineering Research Institute, San Francisco, CA, USA, June, p. []
- García, L. E., (1985), El Efecto de Diafragma en el Análisis, Diseño y Comportamiento de Edificios ante Acciones Sísmicas, Cuarto Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 56 p. []
- García, L. E., (1991), Columnas de Concreto, Serie Selecta I, Asocreto, Bogotá, Colombia, p. [14b]
- García, L. E., (1994), Cost Implications of Drift Controlled Design of RC Buildings, paper presented at the Technical Session on Displacement Considerations in Design of Earthquake-Resisting Buildings, 1994 ACI Spring Convention, San Francisco CA, USA, 6 p. []
- García, L. E., (1995a), Moderate and Low Seismic Risk Zones Requirements for Reinforced Concrete Buildings, paper presented at the Technical Session on Low and Moderate Seismic Zones, 1995 ACI Fall Convention, Montreal, Canada, 24 p. []
- García, L. E., (1995b), El análisis como una herramienta para describir el comportamiento real de estructuras de concreto reforzado Idealización Estructural para el Caso de Cargas Sísmicas, Decimoprimeras Jornadas Estructurales, Sociedad Colombiana de Ingenieros, Bogotá, Colombia, p. [16]
- García, L. E., (1996), Economic Considerations of Displacement-Based Seismic Design of Structural Concrete Buildings, Structural Engineering International, Volume 6, Number 4, International Association for Bridge and Structural Engineering, IABSE, Zürich, Suiza, pp. []
- García, L. E., A. Sarria, R. Caicedo, y J. Muñoz, (1987), Adición, Modificación y Remodelación del Sistema Estructural de Edificaciones Existentes Antes de la Vigencia del Decreto 1400/84, Séptimas Jornadas Estructurales, Sociedad Colombiana de Ingenieros, Bogotá, Colombia, p. []
- García, L. E., A. Sarria, A. Espinosa, C. A. Bernal, y M. Puccini, (1984), Estudio General del Riesgo Sísmico de Colombia, Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, Bogotá, Colombia, 243 p. [4b, 4b, 7a, 7a]
- García, L. E., A. Sarria, and M. A. Sozen, (1991), Observed Behavior Under Lateral Load of a Five -Story Large-Panel Precast Building and its Mathematical Modeling, International Conference on Building with Load Bearing Concrete Walls in Seismic Zones, Association Francaise du Genie Parasismique, Paris, France, pp. 75-86. []
- García, L. E., and L. E. Yamín, (1994), A Review of Masonry Construction in Colombia, Masonry in the Americas, Special Publication SP-147, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 283-306. [6a]
- García, L. E., (Director), A. Alarcón, C. E. Bernal, O. D. Cardona, J. Escallón, A. Espinosa, M. Puccini, N. Pulido, E. Rodríguez, A. Sarria, M. Severiche, A. Taboada, y L. Yamín, (1996), Estudio General de Amenaza Sísmica de Colombia, Comité AIS 300 - Amenaza Sísmica, Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, Bogotá, Colombia, 320 p. [4a, 4b, 4b, 7a, 7a, 7b]
- García, L. E., and J. F. Bonacci, (1996), Implications of the Choice of Structural System for Earthquake Resistant Design of Buildings, Mete A. Sozen Symposium - A Tribute from His Students, Special Publication SP-162, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 379-398. []
- Gaylord, E. H., C. N. Gaylord, and J. E. Stallmeyer, (1992), Steel Structures, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 792 p. []

- Gentry, T. R., and J. K. Wight, (1992), Reinforced Concrete Wide Beam-Column Connections Under Earthquake-Type Loading, Report UMCE 92-12, Department of Civil Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA, 203 p. []
- Gere, J., and H. C. Shah, (1984), Terra Non Firma - Understanding and Preparing for Earthquakes, W. H. Freeman and Co., New York, NY, USA, p. [4a, 6a]
- Gerstle, K. H., (1974), Basic Structural Analysis, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, p. [8a]
- Ghali, A., and A. M. Neville, (1989), Structural Analysis, 3rd Edition, Chapman & Hall, London, UK, 870 p. [8a, 9b]
- Ghosh, S. K., and A. W. Domel, (1992), Design of Concrete Buildings for Earthquake & Wind Forces, Portland Cement Association and International Conference of Building Officials, PCA, Skokie, IL, USA, 532 p. []
- Green, N. B., (1987), Earthquake Resistant Building Design and Construction, Elsevier, New York, NY, USA, p. []
- Guedelman-Israel, R., and G. H. Powell, (1977), DRAIN-TABS A Computer Program for the Inelastic Response of Three Dimensional Buildings, Report No. UCB/EERC-77-08, University of California, Berkeley, CA, USA, p. []
- Gulkan, P., and M. A. Sozen, (1974), Inelastic Response of Reinforced Concrete Structures to Earthquake Motions, Journal of the American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, December, p. [6b]
- Gupta, A. K., (1990), Response Spectrum Method, Blackwell Scientific Publications, Boston, MA, USA, 170 p. [15]
- Gupta, A. K., and P. J. Moss, (1993), Guidelines for Design of Low-Rise Buildings Subjected to Lateral Load, Council on Low-Rise Buildings, North Carolina University, CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 286 p. []
- Habibullah, A., (1994), ETABS - Three Dimensional Analysis of Building Systems - Users Manual, Computers and Structures, Inc. - CSI, Berkeley, CA, USA, 302 p. [14b]
- Hammion, R. W., (1962), Numerical Methods for Scientists and Engineers, 2nd. Edition, Dover Publications, New York, NY, USA, p. [8a, 13]
- Hanson, R. D., and H. J. Degenkolb, (1969), The Venezuela Earthquake of July 29, 1967, American Iron and Steel Institute, New York, NY, USA, p. []
- Harrison, H. B., (1973), Computer Methods in Structural Analysis, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, p. [8a]
- Healey, T. J., and M. A. Sozen, (1978), Experimental Study of the Dynamic Response of a Ten-Story Reinforced Concrete Frame with a Tall First Story, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 450, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 120 p. []
- Higashi, Y., and T. Takeda, (1972), Stiffness and its Influence on Dynamic Behavior, Proceeding International Conference on Tall Buildings, Lehigh University, American Society of Civil Engineers, New York, NY, USA, p. [6a]
- Hildebrand, F. B., (1965), Methods of Applied Mathematics, 2nd, Edition, Dover Publications, New York, NY, USA, 362 p. [8a]
- Hildebrand, F. B., (1974), Introduction to Numerical Analysis, 2nd. Edition, Dover Publications, New York, NY, USA, p. [8a, 13]
- Holzer, S. M., (1985), Computer Analysis of Structures, Elsevier, New York, NY, USA, 426 p. [8a]
- Housner, G. W., (1952), Spectrum Analysis of Strong-Motion Earthquakes, Proceedings of the Symposium on Earthquakes and Blast Effects on Structures, Earthquake Engineering Research Institute, University of California at Los Angeles, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA, USA, pp. 20-36. [7a, 7a]
- Housner, G. W., (1959), Behavior of Structures During Earthquakes, Journal of Structural Mechanics, American Society of Civil Engineers, ASCE, EM4, October 1959, pp. 109-129. [7a]
- Housner, G. W., (1970a), Strong Ground Motion, Chapter 4 of Earthquake Engineering, R. L. Wiegel, Editor, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, pp. 75-91. []
- Housner, G. W., (1970b), Design Spectrum, Chapter 5 of Earthquake Engineering, R. L. Wiegel, Editor, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, pp. 93-106. [7a]
- Housner, G. W., (1984), An Historical View of Earthquake Engineering, Proceedings of 8th World Conference on Earthquake Engineering, Post Conference Volume, Earthquake Engineering Research Institute, San Francisco, CA, USA, pp. 25-38. []
- Housner, G. W., and D. F. Hudson, (1961), Vibrations of Structures Induced By Seismic Waves, Shock and Vibration Handbook, Vol. 3, McGraw-Hill, New York, NY, USA, p. [7a]
- Housner, G. W., and P. C. Jennings, (1982), Earthquake Design Criteria, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA, USA, 140 p. [7b]
- Hudson, D. E., (1979), Reading and Interpreting Strong Motion Accelerograms, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA, USA, 112 p. [4b]
- Humar, J. L., (1990), Dynamics of Structures, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 780 p. [1, 3]
- Huria, V., M. Raghavendrachar, and A. E. Aktan, (1991), 3-D Characteristics of RC Wall Response, Journal of the Structural Division, ASCE, New York, NY, USA, October, pp. []
- Hurty, W. C., and M. F. Rubinstein, (1964), Dynamics of Structures, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 455 p. [1,12]
- ICBO - International Conference of Building Officials, (1994), UBC - Uniform Building Code - 1994 Edition, ICBO, Whittier, CA, USA, 3 Vol. [7b, 7b, 7b]
- ICBO - International Conference of Building Officials, (1997), UBC - Uniform Building Code - 1997 Edition, ICBO, Whittier, CA, USA, 3 Vol. [7b, 7b, 7b]
- ICC - International Code Council, (1997), International Building Code - 2000 (First Draft 1997), ICBO, Whittier, CA, USA, 1 Vol. [7]

- Ingeominas, (1986), El sismo de Popayán del 31 de marzo de 1983, Instituto Nacional de Investigaciones en Geociencia, Minería y Química, Bogotá, Colombia, 320 p. []
- Ingeominas y Comunidad Económica Europea, (1992), Microzonificación Sismogeotécnica de Popayán, Publicaciones Especiales de Ingeominas, N°2, Instituto Nacional de Investigaciones en Geociencia, Minería y Química, Bogotá, Colombia, 208 p. [4b]
- Ingeominas y Universidad de los Andes, (1997), Microzonificación Sísmica de Santa Fe de Bogotá, Convenio Interadministrativo 01-93, Ingeominas - Instituto Nacional de Investigaciones en Geociencia, Minería y Química, UPES - Unidad de Prevención y Atención de Emergencias de Santa Fe de Bogotá D.C., OND - Dirección Nacional para la Prevención y Atención de Desastres, Bogotá, Colombia, 130 p. [4b]
- Iqbal, M., and A. T. Derecho, (1980), Inertial Forces Over Height of Reinforced Concrete Structural Walls During Earthquakes, Reinforced Concrete Structures Subjected to Wind and Earthquake Forces, Publication SP-63, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, p. []
- Isaza, L. F., L. E. García, y C. A. Medina, (1983), Idealizaciones Estructurales, Quintas Jornadas Estructurales, Sociedad Colombiana de Ingenieros, Bogotá, Colombia, p. []
- James, M. L., G. M. Smith, and J. C. Wolford, (1985), Applied Numerical Methods for Digital Computation, 3rd. Edition, Harper & Row, New York, NY, USA, p. [8a, 13]
- Jennings, A., and J. J. McKeown, (1992), Matrix Computation, 2nd. Edition, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, WS, UK, 427 p. [8a, 13]
- Jennings, P. C., (1963), Response of Simple Yielding Structures to Earthquake Excitations, Thesis submitted to the California Institute of Technology in partial fulfillment of the degree of Doctor of Philosophy, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, p. [6a, 6a]
- Jensen, J. A., and J. H. Rowland, (1975), Methods of Computation, Scott, Foreman & Co., Glenview, IL, USA, p. [8a, 13]
- Kearey, P., and F. J. Vine, (1990), Global Tectonics, Blackwell Scientific Publications, Oxford, UK, p. []
- Kent, D. C., and R. Park, (1971), Flexural Members with Confined Concrete, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, New York NY, USA, July, p. []
- Key, D., (1988), Earthquake Design Practice for Buildings, Thomas Telford, London, UK, p. []
- Khan, F. R., and H. S. Iyengar, (1973), Optimization Approach for Concrete High-Rise Buildings, Special Publication SP-36, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, p. []
- Kramer, S. L., (1996), Geotechnical Earthquake Engineering, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 653 p. []
- Kreger, M. E., and M. A. Sozen, (1983), A Study of the Causes of Column Failures in the Imperial County Services Building During the 15 October 1979 Imperial Valley Earthquake, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 509, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 321 p. []
- Kreyszig, E., (1993), Advanced Engineering Mathematics, 7th. Edition, John Wiley, New York, NY, USA, 1271 p. [5, 8a, 13]
- Krinitzsky, E. L., J. P. Gould, and P. H. Edinger, (1993), Fundamentals of Earthquake Resistant Construction, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 299 p. []
- Lai, S. P., and J. M. Biggs, (1980), Inelastic Response Spectra for Aseismic Building Design, Journal Structural Division, 106, N° ST6, American Society of Civil Engineers, New York, NY, USA, June, pp. 1295-1310. [7a]
- Laursen, H. I., (1978), Structural Analysis, McGraw-Hill Book Co., New York, NY, USA, 468 p. [8a]
- Lay, T., and T. C. Wallace, (1995), Modern Global Seismology, Academic Press, San Diego, CA, USA, 521 p. []
- Le Grand, H. E., (1988), Drifting Continents And Shifting Theories, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 313 p. []
- Lepage, A., (1997), A Method for Drift-Control in Earthquake-Resistant Design of RC Building Structures, Ph. D. Dissertation Submitted to the Graduate College of the University of Illinois, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 251 p. [6b]
- Le, D. Q., H. Peterson, and E. P. Popov, (1977), SUBWALL - A Special Purpose Finite Element Computer Program for Practical Elastic Analysis and Design of Structural Walls with Substructure Option, Report No. UCB/EERC-77/09, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, USA, p. []
- Lew, H. S., V. Leyendecker, and R. D. Dikkers, (1971), Engineering Aspects of the 1971 San Fernando Earthquake, Building Series 40, National Bureau of Standards, Washington, DC, USA, p. []
- Lin, T. Y., and S. D. Stotesbury, (1988), Structural Concepts for Architects and Engineers, 2nd Edition, Van Nostrand, New York, NY, USA, p. []
- Livesley, R. K., (1964), Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, Oxford, UK, p. [8a]
- Livesley, R. K., (1983), Finite Elements: An Introduction for Engineers, Cambridge University Press, Cambridge, UK, p. [9b]
- Logcher, R. D., B. B. Flachbart, E. J. Hall, C. M. Power, R. A. Wells, and A. J. Ferrante, (1968), ICES-STRUDL-II, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, p. [8a]
- Lomnitz, C., (1994), Fundamentals of Earthquake Prediction, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 326 p. [4b, 4b]
- Troitsky, M. S., (1994), Planning and Design of Bridges, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 318 p. []
- MacGregor, J. G., (1997), Reinforced Concrete Mechanics and Design, 3rd Edition, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, p. []
- MacGuire, R. K., (1974), Seismic Structural Response Risk Analysis, Incorporating Peak Response Regressions on Earthquake Magnitude and Distance, MIT, Department of Civil Engineering, Research Report R74-51, Cambridge, MA, USA, p. [4b, 4b, 7a, 7a]

- MacLeod, I. A., (1967), Lateral Stiffness of Shear Walls with Openings, Tall Buildings, Pergamon Press, London, UK, p. []
- Maison, B. F., and C. F. Neuss, (1983), SUPER-ETABS - An Enhanced Version of the ETABS Program, a report to the National Science Foundation, J. G. Bouwkamp Inc., Berkeley, CA, USA, p. [14b]
- Marcus, M., and H. Minc, (1965), Introduction to Linear Algebra, Dover Publications, New York, NY, USA, p. [8a, 13]
- Martínez, J. M., E. Parra, G. París, C. A. Forero, M. Bustamante, O. D. Cardona, y J. Jaramillo, (1994), Los sismos del Atrato medio del 17 y 18 de octubre de 1992 - nor occidente de Colombia, Revista Ingeominas, N°4, Bogotá, Colombia. [4a]
- McGuire, W., and R. H. Gallagher, (1979), Matrix Structural Analysis, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 460 p. [8a, 8b]
- Meigs, B. E., M. O. Eberhard, and L. E. García, (1993), Earthquake-Resistant Systems for Reinforced Concrete Buildings: A Survey of Current Practice, Department of Civil Engineering, University of Washington, Seattle, WA, USA, 50 p. []
- Meirovitch, L., (1967), Analytical Methods in Vibrations, McMillan, New York, NY, USA, 555 p. [1]
- Meirovitch, L., (1975), Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, New York, NY, USA, p. [1]
- Mirza, M. S., (1980), Study of the Behavior of Coupled Shear Wall Systems, Reinforced Concrete Structures Subjected to Wind and Earthquake Forces, Publication SP-63, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, p. []
- Moehle, J. P., (1996), Seismic Design Considerations for Flat-Plate Construction, Mete A. Sozen Symposium - A Tribute from His Students, Special Publication SP-162, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 1-34. []
- Moehle, J. P., and M. A. Sozen, (1978), Earthquake - Simulation Tests of a Ten-Story Reinforced Concrete Frame With a Discontinued First-Level Beam, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 451, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 162 p. []
- Moehle, J. P., and M. A. Sozen, (1980), Experiments To Study Earthquake Response Of R/C Structures With Stiffness Interruptions, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 482, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 421 p. []
- Moehle, J. P., and J. W. Wallace, (1989), Ductility and Detailing Requirements of Shear Wall Buildings, 5th Chilean Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, August, p. []
- Mohraz, B., (1976), A Study of Earthquake Response Spectra for Different Geological Conditions, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 66, N°3, pp. 915-935. [4b, 7a]
- Mohraz, B., and F. E. Elghadamsi, (1989), Earthquake Ground Motion and Response Spectra, Chapter 2 of The Seismic Design Handbook, Van Nostrand Reinhold Co., New York, NY, USA, p. [6b, 7a, 7a]
- MOPT - Ministerio de Obras Públicas y Transporte, (1984), Código Colombiano de Construcciones Sismo Resistentes, Decreto 1400 de Junio 7 de 1984, Bogotá, Colombia, 307 p. [7b, 7b]
- Mostrow, G. D., and J. H. Sampson, (1969), Linear Algebra, McGraw-Hill, New York, NY, USA, p. [8a, 13]
- MOT - Ministry of Transportation, (1991), Ontario Highway Bridge Design Code, 3rd Edition, Ministry of Transportation, Quality and Standards Division, Toronto, Ontario, Canada, 370 p. []
- Naeim, F., editor, (1989), The Seismic Design Handbook, Van Nostrand Reinhold, New York, NY, USA, 450 p. []
- NAS - National Academy of Sciences, (1994), Practical Lessons from the Loma Prieta Earthquake, National Academy Press, Washington, DC, USA, 274 p. []
- Newmark, N. M., (1959), A Method of Computation for Structural Dynamics, Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, N° EM3, American Society of Civil Engineers, New York, NY, USA, July, pp. 67-94. [3, 6a]
- Newmark, N. M., (1968), Problems in Wave Propagation in Soil and Rock, Proceeding, International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, University of New Mexico, Albuquerque, NM, USA, pp. 7-26. [4b]
- Newmark, N. M., (1969), Torsion in Symmetrical Buildings, Proceedings, Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, pp. A3-19 to A3-32. [4b]
- Newmark, N. M., J. A. Blume, and K. K. Kapur, (1973), Seismic Design Spectra for Nuclear Power Plants, Journal of the Power Division, Vol. 99, N° PO2, American Society of Civil Engineers, New York, NY, USA, November, 17 p. [6b, 7a]
- Newmark, N. M., and W. J. Hall, (1969), Seismic Design Criteria for Nuclear Reactor Facilities, Proceedings, Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, pp. B4-37 to B4-50. [6b, 7a]
- Newmark, N. M., and W. J. Hall, (1972), Procedures and Criteria for Earthquake Resistant Design, National Workshop for Building Practices for Disaster Mitigation, U. S. Bureau of Standards, Building Science Series N° 46, Vol. 1, Gaithersburg, MD, USA, pp. 209-236. [6b, 7a, 7a]
- Newmark, N. M., and W. J. Hall, (1982), Earthquake Spectra and Design, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA, USA, 103 p. [6b, 7a, 7a, 7a]
- Newmark, N. M., and E. Rosenblueth, (1971), Fundamentals of Earthquake Engineering, Prentice- Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 640 p. [4b]
- Nicholson, W. K., (1986), Elementary Linear Algebra, Prindel, Weber & Schmidt, Boston, MA, USA, p. [8a, 13]
- Nilson, A., and G. Winter, (1991), Design of Concrete Structures, 11th Edition, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 904. []
- Norris, C. H., J. B. Wilbur, and S. Utku, (1976), Elementary Structural Analysis, 3rd. Edition, McGraw-Hill, New York, NY, USA, p. [8a]
- NZS - New Zealand Standards, (1989), Code of Practice for General Structural Design and Design Loading for Buildings - NZS 4203, Second Draft, Wellington, New Zealand, p. []

- Oesterle, R. G., and A. E. Fiorato, (1978), Free Vibration Tests of Structural Concrete Walls, Portland Cement Association, Skokie, IL, USA, p. []
- Oesterle, R. G., A. E. Fiorato, J. D. Aristizabal-Ochoa, and W. G. Corley, (1980), Hysteretic Response of Reinforced Concrete Structural Walls, Reinforced Concrete Structures Subjected to Wind and Earthquake Forces, Publication SP-63, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, p. []
- Olson, R. S., B. Podesta, and J. M. Nigg, (1989), The Politics of Earthquake Prediction, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 187 p. [4b, 4b, 4b]
- Organización Panamericana de la Salud, (1993), Mitigación de Desastres en las Instalaciones de Salud, OPS, Washington, DC, USA, 4 Vol. []
- Orie, D. and M. Sahiidi, (1988), MICRO-SARB - A Microcomputer Program for Seismic Analysis of Regular Highway Bridges, Center for Civil Engineering Earthquake Research, Report CCEER 88-3, Civil Engineering Department, University of Nevada, Reno, NV, USA, 103 p. []
- Otani, S., (1974), SAKE - A Computer Program for Inelastic Response of R/C Frames During Earthquakes, Structural Research Series No. 413, University of Illinois at Urbana Champaign, Urbana, IL, USA, p. []
- Otani, S., and M. A. Sozen, (1972), Behavior Of Multistory Reinforced Concrete Frames During Earthquakes, Structural Research Series No. 392, University of Illinois at Urbana Champaign, Urbana, IL, USA, 551 p. [6a]
- Palmieri, L., E. Saqan, C. French, and M. Kreger, (1996), Ductile Connections for Precast Concrete Frame Systems, Mete A. Sozen Symposium - A Tribute from His Students, Special Publication SP-162, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 313-356. []
- París, G., (1993), Fallas Activas de Colombia, Instituto de Investigaciones en Geociencias, Minería y Química, Ingeominas, Regional Pacífico, Cali, Colombia, p. [4b]
- Park, R., (1985a), Ductile Design Approach for Reinforced Concrete Frames, Cuarto Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 46 p. []
- Park, R., (1985b), Strength and Ductility of Reinforced Concrete Columns, Cuarto Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 58 p. []
- Park, R., (1985c), New Trends in the Design of Building and Bridge Structures for Earthquake Resistance, Cuarto Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 43 p. []
- Park, R., (1989), Ductile Design Approach for Reinforced Concrete Frames, I Seminario Nacional de "Tópicos Sobre Diseño Sismo Resistente de Estructuras de Concreto Reforzado", Asociación de Ingenieros Estructurales, Medellín, Colombia, 40 p. []
- Park, R., (1989), Strength and Ductility of Reinforced Concrete Columns, I Seminario Nacional de "Tópicos Sobre Diseño Sismo Resistente de Estructuras de Concreto Reforzado", Asociación de Ingenieros Estructurales, Medellín, Colombia, 58 p. []
- Park, R., (1989), Seismic Design Considerations for Precast Concrete Buildings, I Seminario Nacional de "Tópicos Sobre Diseño Sismo Resistente de Estructuras de Concreto Reforzado", Asociación de Ingenieros Estructurales, Medellín, Colombia, 28 p. []
- Park, R., (1989), New Zealand Research into the Seismic Design of Building Frames Incorporating Precast Prestressed Concrete, I Seminario Nacional de "Tópicos Sobre Diseño Sismo Resistente de Estructuras de Concreto Reforzado", Asociación de Ingenieros Estructurales, Medellín, Colombia, 20 p. []
- Park, R., (1989), Ductile Design Approach for Bridge Structures, I Seminario Nacional de "Tópicos Sobre Diseño Sismo Resistente de Estructuras de Concreto Reforzado", Asociación de Ingenieros Estructurales, Medellín, Colombia, 14 p. []
- Park, R., and T. Paulay, (1975), Reinforced Concrete Structures, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, p. [6b]
- Paulay, T., (1977), Ductility of Reinforced Concrete Shear Walls for Seismic Areas, Reinforced Concrete Structures in Seismic Zones, Publication SP-53, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, p. []
- Paulay, T., (1989), The Design of Ductile Reinforced Concrete Structural Walls for Earthquake Resistance, I Seminario Nacional de Tópicos Sobre Diseño Sismo Resistente de Estructuras de Concreto Reforzado, Asociación de Ingenieros Estructurales, Medellín, Colombia, 40 p. []
- Paulay, T., and M. J. N. Priestly, (1992), Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 744 p. [6a, 6b]
- Paz, M., (1991), Structural Dynamics - Theory and Computation, 3rd. Edition, Van Nostrand - Reinhold, New York, NY, USA, 626 p. [1, 5]
- Paz, M., editor, (1994), International Handbook of Earthquake Engineering - Codes, Programs, and Examples, Chapman & Hall, New York, NY, USA, 545 p. []
- PCA - Portland Cement Association, (1977), Interacción Estructural en Marcos y Muros de Cortante, Editorial Limusa, México, DF, México, p. []
- Peng, M. H, F. E. Elghadamsi, and B. Mohraz, (1989), A Simplified procedure for Constructing Probabilistic Response Spectra, Earthquake Spectra, Vol. 5 N° 2, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA, USA, p. [7a]
- Pérez, A., (1989), Análisis y Diseño de Losas de Fundación, Tesis de Magister MIC-88-II-09, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, p. []
- Popov, E. P., (1968), Introduction to the Mechanics of Solids, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 571 p, [6a, 6a]
- Popov, E. P., and V. V. Bertero, (1973), Cyclic Loading of Steel Beams and Connections, Journal of the Structural Division, ASCE, New York, NY, USA, June, pp. 1189-1204. [6a]
- Popov, E. P., V. Zayas, and S. Mahin, (1979), Cyclic Inelastic Buckling of Thin Tubular Columns, Journal of the Structural Division, ASCE, New York, NY, USA, November, pp. 2261-2277. []

- Priestley, N. J. N., T. Paulay, and B. G. Ang, (1987), The Shear Strength of Circular Reinforced Concrete Bridge Column Under Seismic Loading, Pacific Conference on Earthquake Engineering, New Zealand, August, pp. 261-270. []
- Priestley, N. J. N., F. Seible, and G. M. Calvi, (1996), Seismic Design and Retrofit of Bridges, John Wiley, New York, NY, USA, 686 p. []
- Przemieniecki, J. S., (1968), Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 468 p. [8a]
- Puccini, M., (1984), Análisis Por Elementos Finitos de Paredes de Cortante, Proyecto de Grado IC-83-II-15, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, p. []
- Qi, X., and J. P. Moehle, (1991), Displacement Design Approach for Reinforced Concrete Structures Subjected to Earthquakes, Report N° UCB/EERC-91/02, Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA, 179 p. [6b, 6b]
- Ramberg, W., and W. R. Osgood, (1943), Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters, National Advisory Committee of Aeronautics, Technical Note 902, 1943. [6a]
- Ramírez S. J., J. E., (1975), Historia de Los Terremotos en Colombia, 2ª Edición, Instituto Geográfico Augustin Codazzi, Bogotá, Colombia, 249 p. [4a]
- Rayleigh, J. W. S. Lord, (1894), The Theory of Sound, Reprinted from the original 1894 Edition, Dover Publications, New York, NY, USA, 1945, 2 Vol. []
- Richtart Jr., F. E., J. R. Hall Jr. and R. D. Woods (1970), Vibrations of Soils and Foundations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 414 p. [16]
- Richter, C. F., (1958), Elementary Seismology, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA, USA, p. []
- Riddell, R., and N. M. Newmark, (1979), Statistical Analysis Of The Response Of Nonlinear Systems Subjected To Earthquakes, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 468, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 291 p. [6a, 6a, 6a, 6b, 7a, 7a]
- Rosenblueth, E., (1951), A Basis for Aseismic Design, Ph. D. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, [15]
- Rosenblueth, E., and J. Elorduy, (1969), Responses of Linear Systems to Certain Transient Disturbances, Proceedings, Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, Vol. I, pp. 185-196 [5]
- Rosenblueth, E., editor, (1982), Diseño de Estructuras Resistentes a Sismos, Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, México, DF, México, p. []
- Rothe, D. H., and M. A. Sozen, (1983), A SDOF Model to Study Nonlinear Dynamic Response of Large- and Small-Scale R/C Test Structures, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 512, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 112 p. []
- Rutenberg, A., (1980), Laterally Loaded Flexible Diaphragm Buildings, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, New York, NY, USA, September, p. []
- Saatcioglu, M., (1991), Modeling Hysteretic Force-Deformation Relationships for Reinforced Concrete Elements, Earthquake-Resistant Concrete Structures - Inelastic Response and Design, Special Publication SP-127, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 153-198. [6a, 6a]
- SAC Joint Venture, (1995), Interim Guidelines: Evaluation, Repair, Modification and Design of Steel Moment Frames, Report N° SAC-95-02, A partnership of the Structural Engineers Association of California, the Applied Technology Council, and the California Universities for Research in Earthquake Engineering, Sacramento, CA, USA, 234 p. [6a, 6a, 6a]
- Sack, R. L., (1984), Structural Analysis, McGraw-Hill, New York, NY, USA, p. [8a]
- Sack, R. L., (1989), Matrix Structural Analysis, PWS-Kent Publishing Co., Boston, MA, USA, 329 p. [8a]
- Saiidi, M., (1979), Users Manual for the LARZ Family of Computer Programs for the Inelastic Response of Reinforced Concrete Planar Structures, Structural Research Series No. 466, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, p. []
- Saiidi, M. and M. A. Sozen, (1979), Simple and Complex Models for Nonlinear Seismic Response of Reinforced Concrete Structures, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 465, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 188 p. [6a]
- Saiidi, M. and M. A. Sozen, (1981), Simple Nonlinear Seismic Analysis of R/C Structures, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, Vol. 107, N° ST5, New York, NY, USA, Mayo, 1077-1087 pp. [6a]
- Saiidi, M., N. Wehbe, S. Acharya, and D. Sanders, (1996), Confinement of Rectangular Reinforced Concrete Bridge Columns and Pier Walls, Mete A. Sozen Symposium - A Tribute from His Students, Special Publication SP-162, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 93-116. []
- SANZ - Standards Association of New Zealand, (1989), NZS 3101 - Code of Practice for the Design of Reinforced Concrete Structures - 1982, Amended in 1989, SANZ, Wellington, New Zealand, p. []
- Saragoni, G. R., (1985), Destruktividad Sísmica o Capacidad de los Movimientos Sísmicos de Producir Daño Estructural, Cuarto Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 29 p. []
- Sarria, A., (1985), El Sismo de Popayán, Colombia, de Marzo 31 de 1983, Cuarto Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 29 p. []
- Sarria, A., (1995a), Ingeniería Sísmica, 2ª Edición, ECOE Ediciones y Ediciones Uniandes, Bogotá, Colombia, 569 p. [4a, 4b, 4b, 4b, 6a, 7b, 7b]
- Sarria, A., (1995b), Aspectos Básicos sobre la Microzonificación Sísmica de Areas Urbanas, Memorias del Seminario sobre Microzonificación Sismogeotécnica y Vulnerabilidad de Ciudades, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 29 p. [7b]

- SEAOC - Seismology Committee, (1974), Recommended Lateral Force Requirements and Commentary, (Traducido al español por AIS, Bogotá), Structural Engineers Association of California, San Francisco, CA, USA, p. []
- SEAOC - Seismology Committee, (1985), Tentative Lateral Force Requirements, Structural Engineers Association of California, SEAOC, San Francisco, CA, USA, October. [7b]
- SEAOC - Seismology Committee, (1996), Recommended Lateral Force Requirements and Commentary, 6th Edition, Structural Engineers Association of California, SEAOC, Sacramento, CA, USA, 504 p. []
- Schnabel, P. B., J. Lysmer, and H. B. Seed, (1972), SHAKE - A Computer Program for Earthquake Response Analysis of Horizontally Layered Sites, Report N° UCB/EERC-72/12, Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA, p. [7b]
- Schneider, R. R., and W. L. Dickey, (1994), Reinforced Masonry Design, 3rd. Edition, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 729 p. []
- Schodek, D. L., (1980), Structures, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, p. [8a]
- Schueller, W., (1990), The Vertical Building Structure, Van Nostrand Reinhold, New York, NY, USA, 658 p. [8a]
- Seed, H. B., and I. M. Idriss, (1982), Ground Motions and Soil Liquefaction During Earthquakes, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA, USA, 134 p. [4b, 7a, 7b]
- Seed, H. B., R. V. Whitman, and J. Lysmer, (1977), Soil-Structure Interaction Effects on the Design of Nuclear Power Plants, Chapter 13, Structural and Geotechnical Mechanics, W. J. Hall, Editor, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 220-241 pp. [16]
- Seed, H. B., C. Ugas, and J. Lysmer, (1976), Site-Dependent Spectra for Earthquake Resistant Design, Bulletin Seismological Society of America, Vol. 66, N° 1, pp. 221-243 [7a, 7b]
- Shabana, A. A., (1989), Dynamics of Multibody Systems, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, p. [1]
- Shah, S. P., and S. H. Ahmad, editors, (1994), High Performance Concrete: Properties and Applications, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 403 p. []
- Sheppard, D. A., and W. R. Phillips, (1989), Plant-Cast Precast & Prestressed Concrete, 3rd. Edition, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 789 p. []
- Shibata, A., and M. A. Sozen, (1976), Substitute-Structure Method for Seismic Design in R/C, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, New York, NY, USA, January, p. [6b, 7a, 7a]
- Shibata, A., N. Inoue, and N. Hori, (1996), Inelastic Design of Earthquake Resistant Reinforced Concrete Buildings Considering Displacement and Energy Limits, Mete A. Sozen Symposium - A Tribute from His Students, Special Publication SP-162, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 357-378. []
- Shilov, G. E., (1977), Linear Algebra, Dover Publications, New York, NY, USA, p. [8a, 13]
- Shimazaki, K., (1988), Strong Motion Drift and Base Shear Coefficient for R/C Structures, Proceedings 9th World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo-Kyoto, Japan. [6b]
- Shimazaki, K., and M. A. Sozen, (1985), Seismic Drift of Reinforced Concrete Structures, Special Research Paper, Hazama-Gumi, Ltd., Tokyo, Japan, pp. 145-166. [6b]
- Shimazaki, K., and M. A. Sozen, (1993), Seismic Drift of Reinforced Concrete Structures, 6° Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, p. [6b]
- Silano, L. G., editor, (1993), Bridge Inspection And Rehabilitation, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 288 p. []
- Sittipunt, C., and S. L. Wood, (1993), Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Shear Walls, Civil Engineering Studies, Structural Research Series N° 584, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 384 p. []
- Smith, I. M., (1982), Programming the Finite Element Method, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 351 p. []
- Sozen, M. A., (1974), Hysteresis in Structural Elements, Applied Mechanics in Earthquake Engineering, AMD8, American Society of Mechanical Engineers, New York NY, USA, pp. 63-98. [6a, 6a, 6a, 6a, 6a]
- Sozen, M. A., (1984), Lateral Drift of Reinforced Concrete Structures Subjected to Strong Ground Motion, Boletín Técnico N° 24, Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, Bogotá, Colombia, pp. 107-122. []
- Sozen, M. A., (1985), Uses of an Earthquake Simulator, Cuarto Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 58 p. []
- Sozen, M. A., (1989a), Earthquake Response of Buildings with Robust Walls, 5th Chilean Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, August, p. []
- Sozen, M. A., (1989b), The Chilean Formula for Earthquake Resistant Design of Medium-Rise Reinforced Concrete Structures, 5th Chilean Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, August, 24 p. []
- Sozen, M. A., (1993a), Toward a Behavior Based Design of Reinforced Concrete Frames to Resist Earthquakes, 6° Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 57 p. []
- Sozen, M. A., (1993b), A Frame of Reference for Structural Alternatives in Earthquake Resistant Design, 6° Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 7 p. []
- Sozen, M. A., (1993c), On the Role of Calculation in Proportioning of Earthquake Resistant Building Construction, 6° Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 36 p. []
- Sozen, M. A., y D. P. Abrams, (1979), Resistencia y Comportamiento de Juntas Losa-Pared, Armadas con Mallas Electrosoldadas y Sometidas a Cargas Reversibles, Informe a la Asociación Venezolana de Sistemas de Paredes Estructurales, AVESIPe, Urbana, IL, USA, April, p. []
- Sozen, M. A., and M. O. Eberhard, (1992), Design Shear for Earthquake-Resistant Walls, Reunión del Concreto 1992, Asocreto, Bogotá, Colombia, p. []
- Sozen, M. A., and L. E. García, (1992), Earthquake Resistant Design of Reinforced Concrete Buildings Based on Drift Control - Examples, Proyectos y Diseños Ltda., Bogotá, Colombia, p. []
- Stafford-Smith, B., (1970), Modified Beam Method for Analyzing Symmetrical Interconnected Shear Walls, Journal of the American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, December, p. [8a]

- Stafford-Smith, B., and A. Coull, (1991), *Tall Building Structures*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 537 p. []
- Strang, G., (1988), *Linear Algebra and its Applications*, 3rd. Edition, Harcourt, Brace & Jovanovich, San Diego, CA, USA, p. [8a, 13]
- Stratta, J. L., (1987), *Manual of Seismic Design*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 292 p. []
- Takeda, T. M., M. A. Sozen, and N. N. Neilson, (1970), *Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes*, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, Vol. 96, N° ST12, New York, NY, USA, December, p. [6a, 6a]
- Taranath, B. S., (1988), *Structural Analysis & Design of Tall Buildings*, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 739 p. [8a]
- Thomson, W. T., (1972), *Theory of Vibration with Applications*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 467 p. [1]
- Timoshenko, S., and J. N. Goodier, (1970), *Theory of Elasticity*, 3rd. Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, NY, USA, p. 567 [16]
- Timoshenko, S., and D. H. Young, (1956), *Engineering Mechanics*, 4th. Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, NY, USA, p. []
- Timoshenko, S., and D. H. Young, (1962) *Elements of strength of materials*, 4th Edition, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, NJ, USA, p. [6a]
- Timoshenko, S. P., and D. H. Young, (1965), *Theory of Structures*, 2nd. Edition, McGraw-Hill, New York, NY, USA, p. [8a]
- Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver Jr., (1974), *Vibration Problems in Engineering*, 4th. Edition, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, p. [1]
- Tonias, D. E., (1995), *Bridge Engineering*, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 472 p. []
- UA - Universidad de los Andes, (1994), *Comportamiento Sísmico de Muros de Mampostería Confinada*, Investigación realizada para la Dirección Nacional para la Prevención y Atención de Desastres, Laboratorios de Ingeniería Civil, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, Marzo, 101 p. [6a]
- UNAM - Universidad Nacional Autónoma de México, (1977), *Reglamento de Construcciones del Distrito Federal de México - Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería*, Instituto de Ingeniería, Boletín No. 403, UNAM, México, DF, México, p. []
- UNAM - Universidad Nacional Autónoma de México, (1986a), *Normas de Emergencia al Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, DF, México, Enero, p. [7b]
- UNAM - Universidad Nacional Autónoma de México, (1986b), *Requisitos de Seguridad y Servicio para Las Estructuras - Título IV*, Instituto de Ingeniería, Boletín No. 400, UNAM, México, DF, México, Enero, p. [7b]
- Unemori, A. L., J. M. Roesset, and J. M. Becker, (1980), *Effect on Inplane Floor Slab Flexibility on the Response of Crosswall Building Systems*, Reinforced Concrete Structures Subjected to Wind and Earthquake Forces, Publication SP-63, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, p. []
- UNIDO - United Nations Industrial Development Organization, (1983), *Prefabricated Reinforced Concrete Building Systems - Part 1 - General Earthquake Resistant Design Considerations for Prefabricated Reinforced Concrete Buildings Systems*, p. []
- Uribe, J., (1991), *Análisis de Estructuras*, Ediciones Uniandes, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, p. [8a]
- Vanderbilt, M. D., (1974), *Matrix Structural Analysis*, Quantum Publishers, New York, NY, USA, 397 p. [8a]
- Veletsos, A. S., (1977), *Dynamics of Soil-Foundation Systems*, Chapter 17, Structural and Geotechnical Mechanics, W. J. Hall, Editor, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, pp. 333-361. [16]
- Wagner, M. T., and V. V. Bertero, (1982), *Mechanical Behavior of Shear Wall Vertical Boundary Members: An Experimental Investigation*, Report No. UCB/EERC-82/18, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, USA, p. []
- Wakabayashi, M., (1986), *Design of Earthquake Resistant Buildings*, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 309 p. [6a]
- Wallace, J. W., and J. P. Moehle, (1989a), *BIAx: A Computer Program for the Analysis of Reinforced Concrete Sections*, Report No. UCB/SEMM-89/12, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA, USA, July, 33 p. []
- Wallace, J. W., and J. P. Moehle, (1989b), *The 1985 Chile Earthquake: An Evaluation of Structural Requirements for Bearing Walls*, Report No. UCB/EERC-89/05, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, USA, Julio, p. []
- Wallace, J. W., and J. P. Moehle, (1992), *Ductility and Detailing Requirements of Bearing Wall Buildings*, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, New York, NY, USA, June, p. []
- Wang, C. K., and C. G. Salmon, (1992), *Reinforced Concrete Design* 5th. Edition, Harper Collins, New York, NY, USA, 1030 p. []
- Weaver, W., and J. M. Gere, (1990), *Matrix Analysis of Framed Structures*, 3rd. Edition, Van Nostrand Reinhold, New York, NY, USA, 546 p. [8a]
- Whitman, R. V., editor, (1992), *Proceedings from the Site Effects Workshop*, National Center for Earthquake Research, Technical Report NCEER-92-0006, State University of New York at Buffalo, Buffalo, NY, USA, p. [7b, 7b]
- Wiegel, R. L., editor, (1970), *Earthquake Engineering*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, p. []
- Wight, J. K., and M. A. Sozen, (1973), *Shear Strength Decay in Reinforced Concrete Column Subjected to Large Deflection Reversals*, Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 403, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA, 290 p. [6a]
- Wight, J. K., S. L. Wood, J. P. Moehle, and J. W. Wallace (1996), *On Design Requirements for Reinforced Concrete Structural Walls*, Mete A. Sozen Symposium - A Tribute from His Students, Special Publication SP-162, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 431-456. []

- Wilson, E. L., (1991), CAL-91 Computer Assisted Learning of Static and Dynamic Analysis of Structural Systems, Report No. UCB/SEMM-91/01, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA, 73 p. [8a]
- Wilson, E. L., and H. H. Dovey, (1972), Three Dimensional Analysis of Building Systems -TABS, Report No. EERC 72-8, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, USA, p. [14b]
- Wilson, E. L., I. Farhoomand, and K-J. Bathe, (1973), Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, p. []
- Wilson, E. L., J. P. Hollings, and H. H. Dovey, (1975), Three Dimensional Analysis of Building Systems-Extended Version ETABS, Report No. 75-13, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, USA, p. [14b]
- Wilson, E. L., and A. Habibullah, (1992), SAP90 - A Series of Computer Programs for the Finite Element Analysis of Structures - Structural Analysis Users Manual, Computers and Structures, Inc. - CSI, Berkeley, CA, USA, 302 p. [14b]
- Wolf, J. P., (1985), Dynamic Soil-Structure-Interaction, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 466 p. [16]
- Wolf, J. P., (1988), Soil-Structure-Interaction Analysis in the Time Domain, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 446 p. [16]
- Wolf, J. P., (1994), Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models, PTR Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 423 p. [16]
- Wood, S. L., (1989), Minimum Tensile Reinforcement in Walls, ACI Structural Journal, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, September-October, p. []
- Wood, S. L., (1990), Shear Strength of Low-Rise Reinforced Walls, ACI Structural Journal, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, January-February, p. []
- Wood, S. L., (1991a), Performance of Reinforced Concrete Buildings During the 1985 Chile Earthquake: Implications for the Design of Structural Walls, Earthquake Spectra, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA, USA, November, p. []
- Wood, S. L., (1991b), Observed Behavior of Slender Reinforced Concrete Walls Subjected to Cyclic Loading, Special Publication SP-127, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 453-477. []
- Wood, S. L., and C. Sittipunt, (1996), Cyclic Response of Reinforced Concrete Structural Walls, Mete A. Sozen Symposium - A Tribute from His Students, Special Publication SP-162, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 399-430. []
- Xanthakos, P. P., (1994), Theory and Design of Bridges, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1443 p. []
- Xanthakos, P. P., (1995), Bridge Substructure and Foundation Design, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 844 p. []
- Xanthakos, P. P., (1996), Bridge Strengthening and Rehabilitation, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 966 p. []
- Yamín, L. E., y L. E. García, (1993), Comportamiento Sísmico de Muros de Mampostería Confinada, 6º Seminario Internacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, p. [6a]
- Yamín, L. E., and L. E. García, (1994), Masonry Materials, Masonry in the Americas, Special Publication SP-147, American Concrete Institute, Detroit, MI, USA, pp. 1-20. []
- Yamín, L. E., y A. E. Ojeda, (1995), Evaluación de Efectos de Sitio en Bogotá: Periodos Dominantes y Amplificaciones Relativas a Partir de Registros Sísmicos y Microtrepidaciones, VII Jornadas Geotécnicas y II Foro sobre la geotécnica de la Sabana de Bogotá, Sociedad Colombiana de Ingenieros y Sociedad Colombiana de Geotécnica, Bogotá, Colombia, Septiembre, p. [4b]
- Zeevaert, L., (1983a), Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, 2nd Edition, Van Nostrand - Reinhold, New York, NY, USA, 676 p. [7b, 16]
- Zeevaert, L., (1983b), Interacción suelo estructura, Limusa, México D. F., México, p. [16]
- Zienkiewicz, O. C., and R. L. Taylor, (1989), The Finite Element Method, 4th Edition, McGraw-Hill Book Co., London, UK, p. [9b]