

# Capítulo 1

## Cinemática

### 1.1. El movimiento en el espacio

#### 1.1.1. La velocidad y aceleración promedio

Para estudiar el movimiento, por ejemplo el de un cuerpo que cae debido al campo gravitacional o el movimiento de la luna alrededor de la tierra, es necesario medir distancias y tiempos. Para medir estas dos cantidades necesitamos definir alguna clase de patrones, para medir distancias usamos una regla y para el tiempo un reloj. El primero estrictamente corresponde a lo que llamamos un cuerpo rígido y el segundo está basado en algún fenómeno que, por diferentes agentes, se repite una y otra vez como la oscilación de un péndulo o la rotación de la luna alrededor de la tierra.

La velocidad promedio del recorrido se define como el la razón entre la distancia ( $D$ ) y el tiempo de recorrido ( $T$ ), es decir,

$$V = \frac{D}{T}. \quad (1.1)$$

En la mayoría de los casos esta cantidad no permanece constante en el tiempo. En el caso de un cuerpo que cae en el campo gravitacional, por ejemplo, la velocidad inicial es cero y la velocidad después de recorrer una distancia  $D$  resulta ser proporcional a  $\sqrt{D}$ . Para mejorar la descripción del movimiento es más conveniente dividir el tiempo de recorrido  $T$  en  $n$  intervalos más pequeños de tiempo ( $\Delta t_n$ ). Si  $\Delta x_n$  representa la distancia recorrida en el intervalo de tiempo  $\Delta t_n$  la velocidad promedio del  $n$ -ésimo intervalo de tiempo es

$$V_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta t_n}, \quad (1.2)$$

que en el caso general varía con el tiempo.

Un tipo de movimiento muy importante para el desarrollo del principio de inercia es el movimiento rectilíneo uniforme en el cual la velocidad promedio es constante. La expresión anterior resulta ser la pendiente de una línea recta, así que la posición como función del tiempo tiene la forma

$$x(t) = x_0 + V(t - t_0),$$

en donde  $x_0$  es la posición en el tiempo inicial  $t_0$ , que se puede escoger igual a cero sin pérdida de generalidad. Desde el punto de vista del cálculo de funciones, la distancia recorrida resulta ser una función lineal del tiempo.

En el caso general, la velocidad promedio cambia con el tiempo. De manera análoga al caso de la distancia recorrida, el cambio de la velocidad se cuantifica con la aceleración promedio que se define como

$$a_n = \frac{V_n - V_{n-1}}{\Delta t_n}. \quad (1.3)$$

Evidentemente esta cantidad también puede variar en el tiempo, el caso más simple en el que es constante ( $a_n = a$ ) se conoce como movimiento acelerado uniforme. De manera similar al movimiento rectilíneo uniforme, cuando la aceleración es constante la velocidad como función del tiempo es de la forma

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0), \quad (1.4)$$

en donde  $v_0$  es la velocidad al tiempo  $t_0$ . Es importante notar que  $V_n$  y la expresión anterior son diferentes.

## La ley de caída libre

La ley de caída libre nos dice que todos los cuerpos al caer en el campo gravitacional de la tierra se aceleran igual; en otras palabras es un movimiento acelerado uniforme. Los experimentos de Galileo sobre la caída de los cuerpos lo llevaron a concluir que la distancia se recorre en proporción al cuadrado de los tiempos, es decir, la distancia recorrida debe tener la forma

$$x(t) = x_0 + v_0 t + At^2,$$

en donde se eligió el tiempo inicial  $t_0 = 0$ .

La velocidad promedio en el intervalo de tiempo  $\Delta t = t - t_\alpha$  para este caso se puede escribir como

$$V_t = v_0 + 2At - A\Delta t, \quad (1.5)$$

que al comparar con (1.4) se ve que son aproximadamente iguales si se escoge  $A = \frac{1}{2}a$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ . La velocidad promedio depende del tiempo y de  $\Delta t$  a diferencia de la expresión (1.4) que solo depende del tiempo. Entonces, las ecuaciones que describen el movimiento uniforme acelerado están dadas por

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \quad (1.6)$$

$$v(t) = v_0 + at, \quad (1.7)$$

que dependen de dos parámetros: la posición y la velocidad en el tiempo inicial  $t_0 = 0$ .

### 1.1.2. La velocidad y la aceleración

Para los casos mas simples en los que el promedio de la velocidad o de la aceleración son conocidos encontramos las expresiones que describen el movimiento completamente. Sin

embargo, para movimientos en los que la aceleración es función del tiempo es conveniente usar las herramientas del cálculo y no sólo las de geometría. En el ejemplo de la caída libre, se encontró que la velocidad instantánea coincide con la velocidad promedio en el límite cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero.

Desde el punto de vista del cálculo diferencial, al tomar el límite cuando  $\Delta t_n \rightarrow 0$  de la expresiones (1.2) y (1.3) se obtienen las derivadas temporales de la posición y velocidad, es decir,

$$v(t) = \frac{dx}{dt}, \quad (1.8)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt}, \quad (1.9)$$

así que conociendo ya sea la posición, la velocidad o la aceleración es posible, a partir de la expresiones anteriores, determinar completamente el movimiento.

En el caso en el que no se conoce la posición como función del tiempo pero la velocidad o la aceleración están dadas, podemos integrar las ecuaciones (1.8) y (1.9) en el intervalo de tiempo que va de  $t_0$  a  $t$ . Entonces si  $a(t)$  es conocida integramos la ecuación (1.9) respecto del tiempo

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^t a(t') dt',$$

y si integramos el lado derecho obtenemos

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t') dt'.$$

Al substituir la expresión anterior en la ecuación (1.8) e integrando respecto del tiempo tenemos que

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = v(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t''} a(t') dt',$$

por lo que la posición como función del tiempo es

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} a(t'') dt'', \quad (1.10)$$

en donde  $x(t_0)$  y  $v(t_0)$  representan las condiciones iniciales del problema.

En el caso del movimiento rectilíneo uniforme ( $a(t) = 0$ ), el tercer término de la expresión anterior se hace cero y la velocidad es constante. Si el movimiento es uniforme acelerado ( $a = cte$ ) la solución general es

$$\begin{aligned} v(t) &= v(t_0) + at, \\ x(t) &= x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2, \end{aligned}$$

de manera que, para determinar completamente el movimiento, se deben conocer las condiciones iniciales  $x(t_0)$  y  $v(t_0)$ .

## La caída libre como ecuación diferencial

En el caso de la caída libre, si se deja caer un objeto una distancia  $h(=1)$  medida desde el suelo, el problema a resolver está dado por

$$\frac{dv}{dt} = -1, \quad (1.11)$$

$$v(0) = 0, \quad (1.12)$$

en donde por simplicidad se eligió  $g = 1$ . En este lenguaje, el problema de aceleración uniforme se traduce en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que requiere una condición inicial. La solución del problema anterior es

$$v(t) = -t,$$

y al integrar la expresión (1.10) para este caso, con la condición inicial  $y(0) = 1$ , se encuentra que

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2.$$

Para el caso de dejar caer el objeto de una altura  $h$  en el campo gravitacional de la Tierra hacemos el cambio

$$\begin{aligned} y(t) &\rightarrow \frac{y(t)}{h}, \\ t &\rightarrow \sqrt{\frac{g}{h}}t, \end{aligned}$$

en donde  $g$  es la aceleración gravitacional, con los que obtenemos que la solución es

$$\begin{aligned} y(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2, \\ v(t) &= -gt, \end{aligned}$$

la segunda expresión se obtiene derivando a la primera respecto del tiempo.

### 1.1.3. El movimiento en el espacio 3D

Para ubicar la posición de un punto en el espacio necesitamos tres coordenadas  $(x, y, z)$  referidas a un origen común que se elige de manera arbitraria. En este caso la posición se caracteriza por el vector de posición  $\mathbf{r}$  que, referido a un sistema coordenado, tiene la forma

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}},$$

en donde  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  y  $\hat{\mathbf{k}}$  son los vectores unitarios canónicos en coordenadas cartesianas. Evidentemente, este vector depende de la elección del origen de coordenadas como se puede apreciar en la figura 1.1. La distancia recorrida al ir de una posición inicial  $\mathbf{r}_i$  a una posición final  $\mathbf{r}_f$

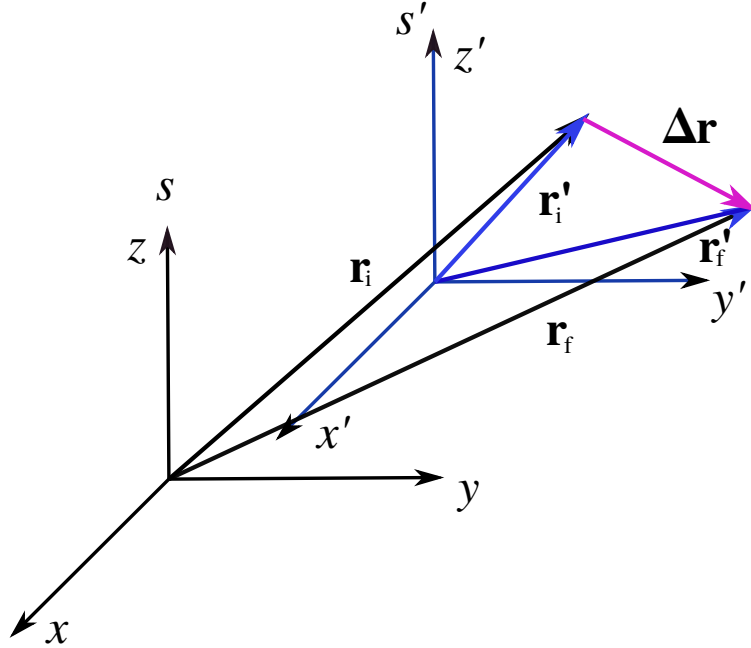


Figura 1.1: Vector de posición y vector de desplazamiento vistos desde dos sistemas coordenados  $S$  y  $S'$ .

es la magnitud del vector  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$ , que se conoce como vector de desplazamiento. Es importante notar (ver figura 1.1) que este vector es independiente del sistema coordenado.

La velocidad promedio en este caso tomaría la forma

$$\mathbf{v}_n = \frac{\Delta \mathbf{r}_n}{\Delta t_n}$$

de donde encontramos que la velocidad promedio es un vector paralelo al vector de desplazamiento  $\Delta \mathbf{r}_n$  en el  $n$ -ésimo intervalo de tiempo  $\Delta t_n$ . Las componentes de este vector en coordenadas cartesianas son los desplazamientos en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  entre el intervalo de tiempo  $\Delta t_n$ , es decir,

$$\mathbf{v}_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta t_n} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y_n}{\Delta t_n} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\Delta z_n}{\Delta t_n} \hat{\mathbf{k}}.$$

Para obtener la velocidad instantánea tomamos el límite de la expresión anterior cuando  $\Delta t_n \rightarrow 0$ , con lo que se obtiene

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt} \hat{\mathbf{k}}, \quad (1.13)$$

o en notación vectorial

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Es importante notar que este vector no depende de la elección del origen de coordenadas.

Para el caso de la aceleración procedemos igual, el promedio en el intervalo  $n$ -ésimo se define como el cambio del vector velocidad  $\Delta \mathbf{v}_n$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t_n$  y la aceleración instantánea se obtiene al tomar el límite de la aceleración promedio cuando  $\Delta t_n \rightarrow 0$ , por lo que las ecuaciones de la cinemática para el movimiento general en tres dimensiones son

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (1.15)$$

### La integrales de las ecuaciones cinemáticas

Cuando  $\mathbf{a}$  está dada integramos la ecuación (1.15) respecto del tiempo en el intervalo que va de  $t_0$  a  $t$  con lo que se obtiene que el vector velocidad está dado por

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t') dt',$$

y al integrar (1.14) para este valor de la velocidad encontramos que

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} \mathbf{a}(t'') dt'', \quad (1.16)$$

es el vector de posición como función del tiempo. En analogía al caso 1D, esta expresión depende de dos condiciones iniciales que se deben conocer para que el problema esté unívocamente determinado.

El problema del movimiento, en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales, se puede escribir como

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a}(t), \quad (1.17)$$

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad (1.19)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con condiciones iniciales. La solución general está dada por la expresión (1.16).

### La derivada temporal de un vector

Para calcular la derivada temporal de un vector se procede igual que en cálculo de funciones escalares, es decir,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t},$$

en donde  $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$ . El cambio en  $\mathbf{A}$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  se puede descomponer como  $\Delta \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A}_{\parallel} + \Delta \mathbf{A}_{\perp}$  en donde  $\Delta \mathbf{A}_{\parallel}$  es un vector paralelo a  $\mathbf{A}$  y  $\Delta \mathbf{A}_{\perp}$  es un vector perpendicular a  $\mathbf{A}$  (ver figura 1.2).

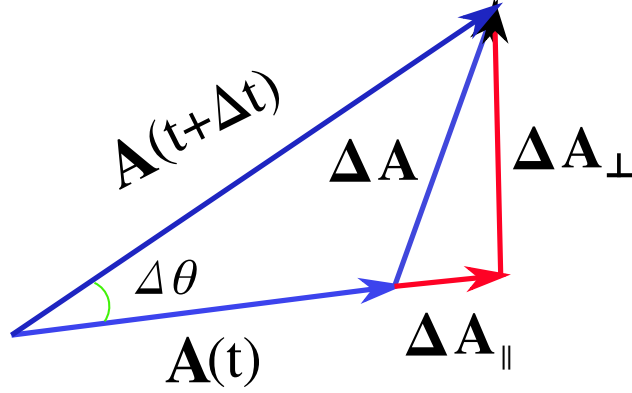


Figura 1.2: Diagrama del cambio del vector  $\mathbf{A}$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . El cambio de  $\mathbf{A}$  se descompone en una parte perpendicular  $\Delta \mathbf{A}_\perp$  y una paralela  $\Delta \mathbf{A}_\parallel$ ;  $\Delta \theta$  mide el cambio en la dirección de  $\mathbf{A}$ .

Como  $\Delta \mathbf{A}_\parallel$  y  $\mathbf{A}$  son paralelos solo difieren en magnitud, de manera que  $\Delta \mathbf{A}_\parallel$  mide el cambio en la magnitud del vector  $\mathbf{A}$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . La parte del cambio que es perpendicular a  $\mathbf{A}$  mide entonces la rotación de  $\mathbf{A}$  un cierto ángulo  $\Delta \theta$  como se muestra en la figura 1.2. La magnitud del cambio de  $\mathbf{A}$  en la dirección perpendicular es

$$|\Delta \mathbf{A}_\perp| = A \sin \Delta \theta,$$

en vista que el ángulo es pequeño  $\sin \Delta \theta \sim \Delta \theta$  de manera que

$$|\Delta \mathbf{A}_\perp| = A \Delta \theta.$$

Al tomar el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y considerar el cambio en la dirección de  $\mathbf{A}$  se encuentra que la derivada temporal de  $\mathbf{A}$  se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA}{dt} \hat{\mathbf{A}} + A \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{A}}_\perp,$$

en donde  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/A$  y  $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{A}}_\perp = 0$ . En otras palabras, el primer término corresponde a la variación en la magnitud de  $\mathbf{A}$  mientras que el segundo corresponde al cambio en la dirección de  $\mathbf{A}$ .

## El movimiento circular uniforme

Tomemos como ejemplo el caso de una partícula que se mueve en círculos de tal manera que la magnitud de la velocidad es constante. El vector de posición en coordenadas cartesianas es  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$  en vista que el movimiento ocurre en el plano  $xy$ . En este caso, es conveniente trabajar con variables angulares ya que, aunque el movimiento sucede en un plano, se puede caracterizar haciendo un censo del cambio del ángulo  $\theta$  como función del tiempo como se muestra en la figura 1.3.

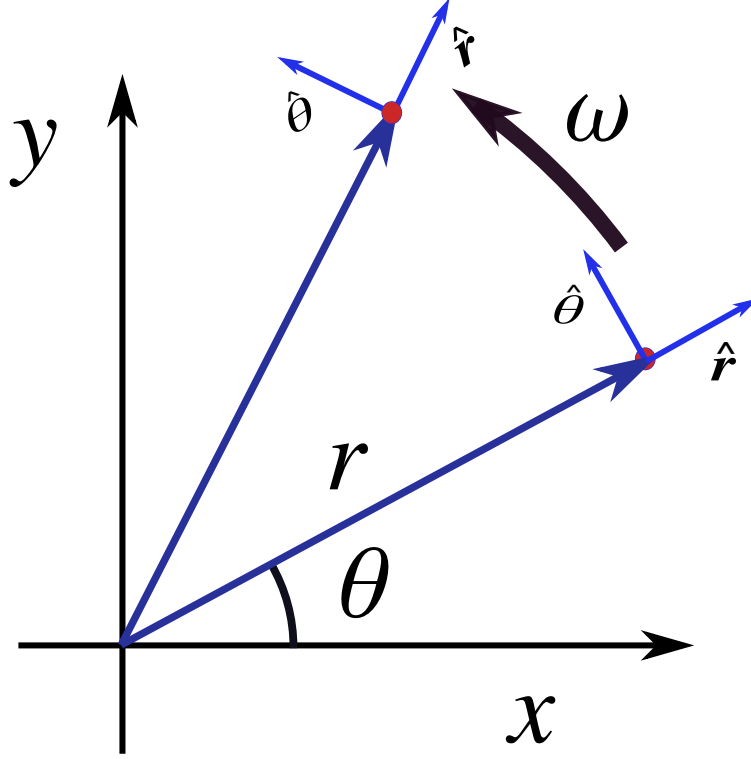


Figura 1.3: Esquema de una partícula en movimiento circular uniforme en coordenadas polares.

Para calcular la derivada temporal de la posición, reescribimos el vector  $\mathbf{r}$  en términos del ángulo de rotación con lo que se obtiene que

$$\mathbf{r} = r(\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}),$$

en donde  $\theta$  es una función del tiempo. Al tomar las dos primeras derivadas respecto del tiempo de la expresión anterior se obtiene que la velocidad y la aceleración están dadas por

$$\dot{\mathbf{r}} = r\dot{\theta}(-\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}), \quad (1.20)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = r\ddot{\theta}(-\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}) - r\dot{\theta}^2(\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}), \quad (1.21)$$

en donde se usó que  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}$  y se considera  $r = cte$ , en vista de que la partícula se mueve en un círculo.

Antes de continuar con el cálculo notemos que, por un lado, el vector  $\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$  es un vector unitario en la dirección radial  $\hat{\mathbf{r}}$ . Por el otro lado, la velocidad está escrita en términos del vector  $\hat{\boldsymbol{\theta}} \equiv -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}$  que es un vector unitario perpendicular a  $\hat{\mathbf{r}}$  y que apunta en la dirección en la que crece el ángulo  $\theta$  (ver figura 1.3). Por lo que las expresiones anteriores



se pueden escribir la siguiente manera

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}, \quad (1.22)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (1.23)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (1.24)$$

Como pedimos que la magnitud de la velocidad  $v = r\dot{\theta}$  sea constante, entonces  $\dot{\theta} = cte$  y al integrar esta expresión se obtiene que

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t,$$

en donde  $\omega \equiv \dot{\theta}$  es la velocidad angular y  $\theta_0$  es el ángulo inicial, en analogía con la posición en el movimiento rectilíneo uniforme. Entonces, en el movimiento circular uniforme la velocidad angular es constante y, como el vector de posición cambia de dirección en el tiempo, la aceleración es diferente de cero y es antiparalela al vector de posición; éste término se conoce como aceleración Centrípetas.

#### 1.1.4. La velocidad y la aceleración en coordenadas polares

En la sección anterior encontramos los vectores

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}, \quad (1.25)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}, \quad (1.26)$$

que son los vectores canónicos en coordenadas polares, se debe notar que a diferencia del caso cartesiano estos vectores no permanecen fijos en el espacio. En coordenadas polares, los puntos en el plano se especifican con su distancia al origen de coordenadas ( $r$ ) y el ángulo que hacen con el eje horizontal ( $\theta$ ). Las variables cinemáticas en estas coordenadas son de la forma

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}, \quad (1.27)$$

$$\mathbf{v} = v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (1.28)$$

$$\mathbf{a} = a_r\hat{\mathbf{r}} + a_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (1.29)$$

las componentes de la velocidad y la aceleración se encuentran a partir de calcular las dos primeras derivadas temporales del vector de posición.

La derivada respecto del tiempo de la expresión (1.27) es

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

derivando respecto del tiempo la expresión (1.25) se encuentra que  $\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , de tal manera que el vector velocidad en coordenadas polares es

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (1.30)$$

el primer término corresponde al cambio de la magnitud del vector de posición, mientras que el segundo, es la variación debida al cambio en la dirección del vector de posición.

Para encontrar la aceleración, derivamos respecto del tiempo la expresión (1.30) con lo que se obtiene

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (1.31)$$

en donde utilizamos que  $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}$  que se puede mostrar derivando respecto del tiempo la expresión (1.26).

En el movimiento circular uniforme, la magnitud de la velocidad es constante y la aceleración es el término de aceleración centrípeta  $\mathbf{a}_c = -r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}}$ . Cuando la velocidad angular  $\omega \equiv \dot{\theta}$  no es constante, hay una aceleración en la dirección de  $\theta$  debida al cambio en el tiempo de la velocidad angular.

Cuando la magnitud del vector de posición no es constante, tenemos un término de aceleración radial cuando  $\ddot{r}$  sea diferente de cero, en analogía con el movimiento unidireccional que se puede recuperar haciendo  $\theta(t) = 0$ . Finalmente, cuando la magnitud de la velocidad radial y la velocidad angular son ambas diferentes de cero hay un término de aceleración angular adicional que se conoce como aceleración de Coriolis.

En el caso tridimensional se procede de manera análoga, hay que escribir al vector de posición como una combinación lineal de un algún conjunto de tres vectores unitarios ortogonales y calcular su dos primeras derivadas respecto del tiempo. La elección del sistema coordenado depende de las condiciones del problema.

## 1.2. La rueda al rodar

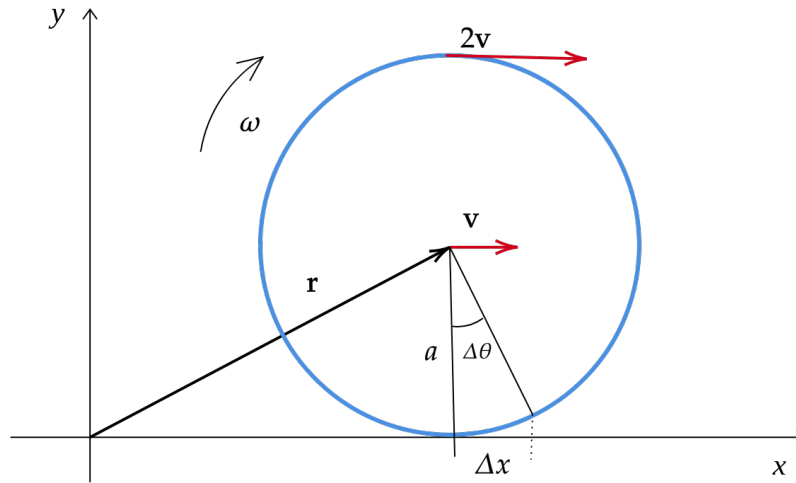


Figura 1.4: Esquema de las coordenadas para describir el movimiento de un disco de radio  $a$  que rueda sin resbalar.

El rodar de una llanta se puede describir como un movimiento de traslación (del eje de la llanta) acoplado con un movimiento de rotación respecto de un eje que pasa por el eje de la llanta. Para describir el rodamiento ideal, suponemos que la rueda es un cilindro de masa uniforme de radio  $a$  y que el movimiento ocurre en un plano siempre perpendicular al eje del cilindro, como se muestra en la figura 1.4. Para que el disco ruede sin resbalar se requieren dos condiciones: que la velocidad del centro de masa esté en la dirección horizontal y que el punto de contacto entre el disco y la mesa esté en reposo. Esta última condición se traduce en que si el disco da una vuelta completa, el centro de masa recorre una distancia de  $2\pi a$ .

Para encontrar la relación entre la velocidad de rotación y la de traslación del centro de masa, designamos a  $\Delta x$  como el desplazamiento del centro de masa y por  $\Delta\theta$  el cambio en el ángulo debido a la rotación del disco. Entonces, en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el centro de masa se desplaza una distancia de  $\Delta x = a\Delta\theta$ . Al dividir esta última expresión entre el intervalo de tiempo y al tomar el límite cuando éste tiende a cero se obtiene

$$v = a\omega,$$

en donde  $v$  es la velocidad del centro de masa del disco y  $\omega$  velocidad angular.

Por la forma de esta expresión hay que notar que  $a\omega$  también es la velocidad tangencial de un punto sobre la periferia de manera que la velocidad en el punto de contacto es cero como se había supuesto.



# Capítulo 2

## Dinámica

### 2.1. Dinámica

Las causas del movimiento se estudian a partir de las tres leyes de Newton, por lo que es necesario introducir dos nuevos conceptos: la masa y la fuerza. El primero es una propiedad intrínseca del cuerpo y el segundo corresponde a la interacción entre el cuerpo de masa  $m$  y el resto del universo. Aunque la masa se puede medir midiendo aceleraciones, también se puede medir usando básculas. En cualquier caso es necesario definir una masa patrón, es decir, una unidad de masa. Hay que notar que al usar básculas para medir la masa no es necesario conocer la fuerza, pues solo compara cuándo dos objetos "pesan" lo mismo.

Las fuerzas son las interacciones de unos cuerpos con otros, como los empujones y jalones o las fuerzas gravitacionales. Dentro de los primeros es muy importante el estudio de las cuerdas y barras, así como las fuerzas superficiales como la fricción con el suelo al arrastrar objetos o la fricción con el aire de un cohete espacial entrando o saliendo de la atmósfera. Las fuerzas gravitacionales y las fuerzas electromagnéticas dependen de la masa del objeto y, como se verá más adelante, nos llevan a la noción de campo.

El primer postulado de la mecánica, el principio de inercia, es la definición de sistema aislado, pues estipula que en ausencia de fuerzas el movimiento es rectilíneo uniforme. El segundo postulado, la segunda ley de Newton, establece que la fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa  $m$  es proporcional a su aceleración, es decir, la fuerza es un vector que es igual a la aceleración (1.15) multiplicada por la masa. Finalmente, el tercer postulado de la mecánica es la ley de acción-reacción de Newton, que establece que la interacción entre cuerpos es entre pares de fuerzas que actúan en direcciones opuestas y tienen la misma magnitud.

#### 2.1.1. Fuerzas de cuerpo

Las fuerzas de cuerpo son aquellas que son proporcionales a la masa; como es el caso de la fuerza gravitacional, las fuerzas electromagnéticas y las fuerzas debidas a estar en un sistema de referencia acelerado. Una característica fundamental de estas fuerzas es que son vectores que dependen de la posición. Por ejemplo, para un objeto de masa  $m$  que cae a

una altura  $h$  sobre la superficie de la tierra la fuerza es  $mg$  y está dirigida hacia abajo. La aceleración gravitacional es aproximadamente constante en una localidad, el laboratorio por ejemplo, y será en general ligeramente diferente en otras localidades.

### 2.1.2. Fuerzas geométricas

Una gran cantidad de fuerzas que ocurren en la naturaleza, sobre todo en el caso en el que uno o varios cuerpos interactúan tienen un origen geométrico. El caso más simple es el caso del movimiento en un plano que se describe haciendo constantes una de las tres coordenadas que describen el movimiento de un punto. Sin embargo, desde el punto de vista dinámico, imaginemos el escenario de la figura 2.1-(a) en donde se tiene un bloque sobre una mesa sujeto a una fuerza  $\mathbf{F}(x, y)$ . En presencia de un campo gravitacional es necesario que, según la segunda ley de Newton, haya una fuerza sobre el bloque para que no haya desplazamiento en la dirección vertical; esta fuerza es la reacción de la mesa y se conoce como fuerza normal.

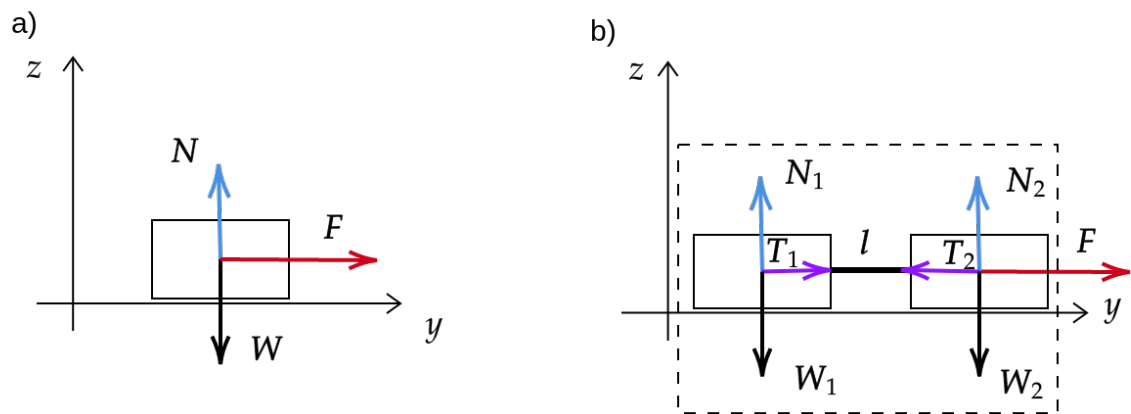


Figura 2.1: Vector de posición y vector de desplazamiento vistos desde dos sistemas coordenados  $S$  y  $S'$ .

Ahora analicemos el escenario de la figura 2.1-(a), en donde se incluye un segundo cuerpo acoplado al primero mediante un barra rígida. Como el acoplamiento es rígido las posiciones de los bloques satisfacen que  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{l}$ , siendo  $\mathbf{l}$  la separación entre los bloques, por lo que las aceleraciones de los bloques son iguales. Esto también incluye a la barra, que se acelera junto con los dos bloques.

Ahora, desde el punto de vista dinámico, cada cuerpo (bloques y barra) se puede describir a partir de las leyes de Newton. Primero, si consideramos que el sistema completo es lo que está contenido en la caja punteada en la figura 2.1-(b), tenemos justo el mismo escenario que el caso de la figura 2.1-(a). Al hacer el análisis por separado de cada cuerpo las tres leyes de

Newton serían

$$M_1 \mathbf{a} = \mathbf{T}_1, \quad (2.1)$$

$$m \mathbf{a} = \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1, \quad (2.2)$$

$$M_2 \mathbf{a} = \mathbf{F} - \mathbf{T}_2, \quad (2.3)$$

en donde  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$  son las fuerzas de reacción debidas a la barra, o en otras palabras, las fuerzas de interacción entre pares que debería de haber para que los bloques y la barra se muevan con la misma aceleración. Por lo que una restricción geométrica (que los cuerpos se muevan juntos) se traduce en una “Tensión”. La aceleración del sistema es la fuerza  $\mathbf{F}$  entre la masa total de donde es fácil notar que, si  $m \ll M_1$  y  $M_2$ , se puede despreciar a la masa de la barra rígida. Por lo que barras rígidas y cuerdas inextensibles es equivalente a imponer restricciones entre las distancias relativas entre cuerpos.

## 2.2. Soluciones a las ecuaciones de movimiento

Para encontrar soluciones a la segunda ley de Newton, es decir, para encontrar la trayectoria de una partícula de masa  $m$  como función del tiempo  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  es necesario conocer la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo bajo estudio. Así, el problema del movimiento de la partícula corresponde a resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden con condiciones iniciales para el vector de posición  $\mathbf{r}(t)$ .

### 2.2.1. Fuerzas dependientes del tiempo $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$

Cuando la fuerza es una función que depende explícitamente del tiempo nada mas, la ecuación de movimiento para una partícula de masa  $m$  es

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(t),$$

que se puede integrar en dos pasos. Como la velocidad de la partícula es  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  la ecuación anterior se puede integrar una vez, de tal manera que

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t'} dt' \mathbf{F}(t'), \quad (2.4)$$

en donde  $t_0$  es el tiempo inicial. Al integrar en el tiempo una vez más se obtiene que la solución general para el vector de posición es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \mathbf{F}(t''). \quad (2.5)$$

de donde se ve que la solución depende de las dos condiciones iniciales  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$  y  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ , el tiempo inicial se puede escoger de manera arbitraria.

En la naturaleza conocemos pocas formas útiles de fuerzas dependientes del tiempo. Sin embargo, la expresión (2.5) resulta útil en casos en los que la fuerza actúa durante intervalos de tiempo muy cortos, como en el caso de empujones y jalones y/o colisiones. En estos casos la fuerza  $\mathbf{F}(t)$  es diferente de cero en un pequeño intervalo de tiempo mucho menor que el tiempo de observación.

### El teorema de conservación del momento lineal

Una consecuencia muy importante de los resultados de la sección anterior junto con la tercera ley de Newton es el teorema de la conservación del momento lineal. Tenemos dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que se mueven con velocidades  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  respectivamente. Si estas dos partículas tienen velocidades tales que en  $t_\epsilon$  colisionan, sus velocidades para todo tiempo están dadas por la expresión (2.4) que reescribimos de la siguiente manera

$$\mathbf{p}_1(t) - \mathbf{p}_1(0) = \int_{t_\epsilon}^{t_\epsilon + \epsilon} \mathbf{F}_{21}(t) dt',$$

para la partícula 1 y

$$\mathbf{p}_2(t) - \mathbf{p}_2(0) = \int_{t_\epsilon}^{t_\epsilon + \epsilon} \mathbf{F}_{12}(t) dt',$$

para la partícula 2, en donde  $\epsilon$  es lo que dura la interacción entre partículas,  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$  es la cantidad de movimiento (o momento lineal) y  $\mathbf{F}_{ij}$  es la fuerza que hace la partícula  $j$ -ésima sobre la partícula  $i$ -ésima. La tercera ley de Newton asegura que  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  y por lo tanto  $p_1(0) - p_1(t) = p_2(t) - p_2(0)$ . Ésta última expresión se puede reescribir de la siguiente manera

$$\Delta P = 0,$$

en donde  $P(t) = p_1(t) + p_2(t)$  es el momento total del sistema de partículas y  $\Delta P = P(t) - P(0)$ . En otras palabras, el momento lineal del sistema de partículas se conserva; este resultado se conoce con el nombre de teorema de conservación del momento lineal.

### 2.2.2. Fuerzas dependientes de la posición $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$

Las fuerzas dependientes de la posición o, en otras palabras, de las coordenadas que describen el movimiento de la partícula de masa  $m$ , son un conjunto muy importante que requiere un estudio en si mismo, como en el caso de la fuerza gravitacional de Newton o la fuerza de Coulomb entre cargas eléctricas. El procedimiento de la sección anterior no es útil, puesto que para conocer la fuerza como función del tiempo hay que conocer la trayectoria. La segunda ley de Newton en este caso tiene la forma

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$



La ecuación anterior se puede integrar una vez de la siguiente manera. Si se calcula el producto punto entre la ecuación anterior con la velocidad de la partícula y escribiendo la derivada temporal del lado izquierdo como la derivada de un producto se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

al integrar la ecuación anterior respecto del tiempo se obtiene que

$$\Delta T = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.6)$$

en donde  $T = \frac{1}{2}mv^2$  y se utilizó que  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ . Por lo tanto, aunque en este caso no es posible encontrar a la posición como función del tiempo, encontramos una expresión para la velocidad final en términos de la fuerza aplicada. Cuando la fuerza depende sólo de la posición, la integral en la expresión anterior se puede evaluar sin conocer la trayectoria explícitamente y llegar a una ecuación diferencial de primer orden para la velocidad.

### El oscilador armónico

A manera de ejemplo, considérese un bloque de masa  $m$  sujeto a un resorte con las condiciones iniciales  $x(t_0) = x_0$  y  $v(t_0) = 0$ . La fuerza en este caso es la ley de Hooke, es decir,  $F = -kx$  en donde  $k$  es constante y se conoce como constante de restitución. En este caso la ecuación (2.6) toma la forma

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2),$$

usando que  $v = \dot{x}(t)$  esta ecuación resulta en una ecuación diferencial ordinaria para  $x(t)$  cuya solución es de la forma

$$\omega(t - t_0) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{x_0^2 - x'^2}},$$

en donde  $\omega = \sqrt{k/m}$ , la integral del lado derecho es igual al  $\arcsin(x/x_0)$  por lo que se obtiene que la posición del bloque como función del tiempo es  $x(t) = x_0 \cos \omega(t - t_0)$ .

### 2.2.3. Fuerzas dependientes de la velocidad $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$

En el caso que la fuerza es dependiente de la velocidad es conveniente escribir la segunda ley de Newton en términos de la velocidad, es decir,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{v}),$$

que resulta en una ecuación diferencial para la velocidad de primer orden que se puede integrar directamente cuando la fuerza depende del vector velocidad.

Las fuerzas dependientes de la velocidad se presentan en la naturaleza en en fenómenos como la fricción de un cuerpo que se desplaza dentro de un fluido o la fuerza que siente una carga eléctrica al moverse dentro de un campo magnético. Estas fuerzas pueden tener características muy diferentes a las fuerzas dependientes de la posición, como en el caso de la fricción, o tener características similares en el caso magnético.

### Caída libre con fricción

Cuando un cuerpo se mueve dentro de un fluido viscoso experimenta una fuerza de fricción (o arrastre) que es función de la velocidad del cuerpo. Newton propuso basado en sus resultados experimentales que dicha fuerza es función de la velocidad del cuerpo. Más específicamente propuso que a velocidades bajas la fuerza es proporcional al vector velocidad.

Entonces, la ecuación de movimiento para un cuerpo de masa  $m$  que cae bajo la acción del campo gravitacional y sufre una fuerza de fricción  $f = cv$  es

$$m\dot{v} = -mg + cv,$$

en donde  $c$  es una constante positiva. Si inicialmente el cuerpo se deja caer desde el reposo a una altura  $h$  la velocidad como función del tiempo está dada por

$$v(t) = -\frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m}).$$

Este resultado predice que al paso del tiempo ( $t \rightarrow \infty$ ) el cuerpo tendrá velocidad constante, conocida como velocidad terminal, dada por  $v_T = mg/c$ . Esto significa que a tiempos largos la fuerza de gravedad y la fuerza de fricción se balancean, de manera que el cuerpo se mueve a velocidad constante.

Al integrar la expresión anterior para la velocidad se obtiene

$$y(t) = h - \frac{mg}{c}\left(t + \frac{m}{c}e^{-ct/m}\right).$$

Si se compara esta expresión con la expresión (2.5), se ve que es posible encontrar la fuerza como función sólo del tiempo que es equivalente a la suma de la fuerza gravitacional con la fuerza de fricción para este caso.

## 2.3. Sistemas de partículas

Hasta el momento sólo hemos considerado el movimiento de puntos a los que se les asocia cierta cantidad de masa: puntos materiales. Para la descripción de un cuerpo rígido es conveniente el estudio de sistemas de partículas que tienen diferentes interacciones o restricciones. Por ejemplo, el sistema solar, compuesto por planetas y el sol por ejemplo, es un sistema de partículas de diferentes masas que interactúan gravitacionalmente. En cambio, un cuerpo rígido se puede construir a partir de una sistema de  $n$  partículas unidas por restricciones rígidas (pequeñas barras de masa despreciable).

Entonces, para  $n$  partículas de masa  $m_i$  con posiciones  $\mathbf{r}_i$  y velocidades  $\mathbf{v}_i$  que interactúan entre si, el problema a resolver es de la forma

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{f}_{ji} + \mathbf{F}_i, \quad (2.7)$$

en donde  $\mathbf{f}_{ji}$  es la fuerza que hace la partícula  $j$ -ésima sobre la partícula  $i$ -ésima y  $\mathbf{F}_i$  representa una fuerza externa que actúa sobre la partícula con masa  $m_i$ . Es de notar que una propiedad importante de esta fuerza es que no forma un par acción-reacción con ninguna fuerza dentro del sistema de partículas. De manera que el problema consiste de resolver  $3n$  ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas de segundo orden.

Sin embargo, no siempre es de interés conocer con detalle la trayectoria para las  $n$  partículas sino el movimiento colectivo del conjunto de ellas. Para ello notemos que si se suma la ecuación (2.7) sobre todas las partículas obtenemos que

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{f}_{ji} + \mathbf{F}, \quad (2.8)$$

en donde

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

y se reescribió la ecuación en términos del momento lineal de la  $i$ -ésima partícula  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ . El término de en medio del lado derecho está compuesto por términos de la forma  $(\mathbf{f}_{lk} + \mathbf{f}_{kl})$  con  $k \neq l$  ya que los dos índices van de uno hasta  $n$ . Por lo que, en vista de la tercera ley de Newton  $\mathbf{f}_{kl} = -\mathbf{f}_{lk}$ , esta doble suma se anula. Para el lado derecho notamos que se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt},$$

en donde  $\mathbf{P}$  es el momento total del sistema de partículas, de manera que se obtiene finalmente la ecuación

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (2.9)$$

que es idéntica a la ley de Newton para una partícula puntual de masa  $M$ . Ahora, de la definición del momento total del sistema de partículas notamos que si  $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$  y  $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i$ , entonces

$$M = \sum_{i=1}^n m_i,$$

y

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i,$$

$M$  es la masa total del sistema de partículas y la posición  $\mathbf{R}$  es el promedio pesado por las masas de todos los vectores de posición  $\mathbf{r}_i$ 's y se le conoce como centro de masa. Por lo tanto, encontramos que el centro de masa del sistema de partículas se mueve como una masa puntual debido a una fuerza, que resulta de la suma de las fuerzas externas que actúa sobre cada partícula individualmente.

### 2.3.1. Sistemas de partículas con restricciones: momento de las fuerzas.

En el caso en el que las interacciones entre las partículas son restricciones geométricas, es decir, las partículas están unidas por barras rígidas es claro que el análisis anterior es válido, de manera que la ecuación para el centro de masa está dada por la ecuación (2.9). Ahora estudiaremos qué pasa con el momento de las fuerzas que actúan en el sistema, calculando el producto vectorial entre la posición de la  $i$ -ésima partícula con la segunda ley de Newton (2.7) y, de manera similar al caso traslacional, se toma la suma sobre todas las partículas con lo que se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ji} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \right), \quad (2.10)$$

En vista que sabemos la ecuación de movimiento para el centro de masa, escribiremos la expresión anterior en términos de la posición del centro de masa y el vector de posición relativo a un sistema que viaja junto con el centro de masa. Entonces, si  $\mathbf{r}'_i$  es el vector de posición relativo a un sistema con origen en el centro de masa

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i$$

y la velocidad de la partícula  $i$ -ésima es de la forma

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i$$

en donde  $\mathbf{V}$  es la velocidad del centro de masa. Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (2.10) se obtiene

$$\mathbf{R} \times \left( M \frac{d\mathbf{V}}{dt} - \mathbf{F} \right) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) - \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i \right) = 0, \quad (2.11)$$

y, en virtud de la ecuación (2.9) se encuentra que

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i. \quad (2.12)$$

Para obtener esta expresión hay varios términos que se anulan por tercera ley de Newton y por estar haciendo una descripción relativa al sistema centro de masa. Ya se había hecho notar

que la doble suma de las fuerzas de interacción  $\mathbf{f}_{ij}$  se anula por tercera ley de Newton y no ejerce torcas. El término correspondiente a las torcas relativas es de la forma  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij}$  y se anula ya que la distancia relativa  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  es un vector paralelo a  $\mathbf{f}_{ij}$ . Finalmente, hay dos términos adicionales que se anulan ya que la descripción se hace relativa al centro de masa. En analogía con la traslación del centro de masa, el término entre paréntesis es el momento angular de la  $i$ -ésima partícula, así que definimos el momento angular  $\mathbf{L}$  del sistema de partículas, relativo al sistema cuyo origen está en el centro de masas como

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i),$$

y la ecuación (2.12) toma la forma

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.13)$$

en donde  $\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$  es la torca total hecha por las fuerzas externas medida desde el sistema centro de masa. Una de las características más importantes de esta ecuación es que tiene la misma forma que la segunda ley de Newton para la traslación: el cambio en el momento angular se debe a las torcas externas. Es importante notar que la expresión (2.11) muestra que el problema del sistema de partículas con restricciones rígidas se reduce al estudio de la traslación del centro de masa y las rotaciones respecto del sistema centro de masa.

En el caso que el eje de rotación es conocido, el momento angular toma una forma particularmente simple. En ese caso todos los puntos del sistema de partículas tienen un movimiento circular al rededor del eje de rotación. Por lo tanto, la magnitud de la velocidad relativa al sistema centro de masa es  $\mathbf{v}'_i = \rho_i \boldsymbol{\omega}$  en donde  $\rho_i$  es la distancia de la partícula  $i$ -ésima al eje de rotación y  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad angular. El momento angular y la velocidad angular en este caso son paralelos de manera que el momento angular total toma la forma

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$$

en donde  $I = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2$  es el momento de inercia, por lo que la ecuación de Newton para torcas toma la forma

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\tau}.$$

Esta expresión tiene una forma muy similar a su contraparte traslacional, sin embargo se debe notar que en este caso el coeficiente de inercia  $I$  depende del eje de rotación.

## 2.4. Aplicaciones de las leyes de Newton

Hasta el momento se partió de las tres leyes de Newton para puntos materiales. Después, se extendieron las ideas a sistemas que contienen muchas partículas y se encontró que las

ecuaciones a resolver tienen la misma estructura que para puntos materiales. Entonces, para la solución de problemas del movimiento de cuerpos rígidos acoplados hay que resolver las ecuaciones de Newton para la traslación del centro de masa y la rotación del cuerpo respecto de un sistema fijo al centro de masa.

Para el caso de  $n$  cuerpos que interactúan por restricciones geométricas y fuerzas de diferente naturaleza, como la gravedad y las fuerzas electromagnéticas, el primer paso es construir un diagrama de cuerpo libre de cada cuerpo, como se muestra en la figura 2.2. Si se busca estudiar el movimiento de traslación de un cuerpo encontramos que es suficiente considerar que todas las fuerzas que actúan sobre él se aplican en el centro de masa.

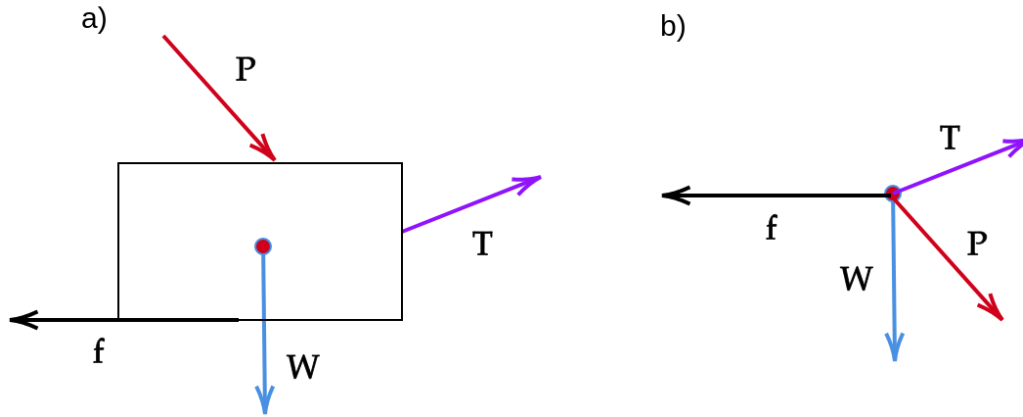


Figura 2.2: Vector de posición y vector de desplazamiento vistos desde dos sistemas coordenados  $S$  y  $S'$ .

## 2.5. El principio de Relatividad Galileana

Consideremos el problema general de transformación de coordenadas de un sistema inercial a uno no inercial, es decir, el movimiento relativo entre sistemas coordenados es acelerado. Tenemos una partícula de masa  $m$  sujeta a una fuerza  $\mathbf{F}$  que se mueve a velocidad  $\mathbf{v}$  vista desde un sistema inercial ( $S$ ). El sistema no inercial ( $S'$ ) puede tener un movimiento general que partiremos en traslación y rotación pura respecto de un eje fijo.

### 2.5.1. Las leyes en un sistema no-inercial: Traslación

Primero consideramos que el sistema no inercial ( $S'$ ) solo se traslada con una aceleración  $\mathbf{a}_{rel}$  respecto del sistema inercial. El vector de posición desde el sistema inercial  $S$  es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{rel},$$

como se muestra en la figura 2.3. Derivando dos veces respecto del tiempo encontramos que  $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{rel}$ , en donde  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}'$  son las aceleraciones vistas desde  $S$  y  $S'$  respectivamente, de manera que la ley de Newton en el sistema no inercial es

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}^* + \mathbf{F},$$

en donde  $\mathbf{F}^* = -m\mathbf{a}_{rel}$  es una fuerza debida a que el sistema  $S'$  en donde hacemos la descripción está acelerado.

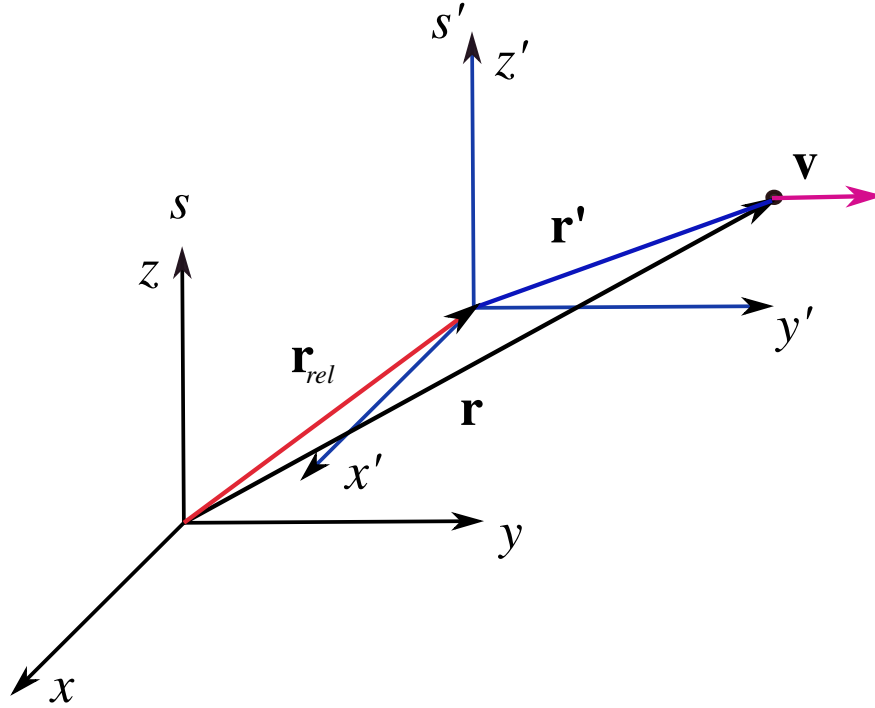


Figura 2.3: El sistema coordenado  $S$  es inercial y corresponde al Sistema Laboratorio.  $S'$  es un sistema coordenado que se traslada respecto de  $S$  con aceleración relativa  $\mathbf{a}_{rel}$ .

Lo primero que salta a la vista es que la Ley de Newton en un sistema no inercial es diferente, ya que aparece una fuerza que no se observa desde el sistema inercial. Desde  $S$  la fuerza inercial está relacionada con la aceleración relativa entre los sistemas coordenados, y en ese sentido se le da el nombre de fuerza ficticia. Sin embargo, en el sistema acelerado está fuerza es indistinguible de cualquier otra al hacer experimentos.

Por ejemplo, para una partícula en el campo gravitacional de la tierra vista desde un sistema de referencia que se acelera hacia arriba (va en un elevador) con una aceleración igual a la gravitacional ( $\mathbf{g}$ ), el problema es equivalente a una partícula en campo gravitacional con el doble de  $g$ . En otras palabras, podemos imitar campos gravitacionales locales viajando en sistemas acelerados; esto se conoce como principio de equivalencia. El hecho de que sean locales está relacionado con que son fuerzas ficticias, pues según el observador en  $S'$  todo

el universo se estaría acelerando con aceleración constante y contradice el hecho de que los campos gravitacionales decaen con la distancia.

A manera de ejemplo, consideremos un barco que pasa paralelo al muelle, digamos dirección  $x$ , con una velocidad  $v_r(t)$ . Desde la torre del vigía se deja caer un objeto de masa  $m$  y queremos saber en dónde va a caer cuando choque con la cubierta. En primera instancia, la forma más robusta de resolver el problema es desde el muelle (el sistema inercial), sin embargo, los marineros están interesados en su propio punto de vista y ellos efectuarán las mediciones.

Entonces, a partir del principio de equivalencia, las leyes de Newton dentro del barco tendrán una fuerza adicional a la gravitacional igual al negativo de la masa del objeto por la aceleración del barco, es decir,

$$\begin{aligned} ma_x &= -m\dot{v}, \\ ma_y &= -mg, \end{aligned}$$

en donde  $g$  es la aceleración gravitacional. En el caso particular que  $\dot{v} = g$  los marineros observan que la partícula está en un campo gravitacional de la forma  $\mathbf{g} = -(g, g)$  y la solución al problema desde el barco es de la forma

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{1}{2}gt^2, \\ y'(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

en donde  $h$  es la altura a la que está el vigía.

Ahora, la transformación de coordenadas en este caso está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x'(t) + v_{0x}t + \frac{1}{2}gt^2, \\ y(t) &= y'(t), \end{aligned} \tag{2.14}$$

en donde  $v_{0x}$  es la velocidad del barco en  $t = 0$ . Al substituir las soluciones encontradas para  $x'(t)$  y  $y'(t)$  nos lleva a la solución esperada; desde el muelle se observa un cuerpo en el campo gravitacional terrestre cuyas condiciones iniciales corresponden a un cuerpo que de lanza a una altura  $h$  con una velocidad inicial en la dirección horizontal ( $v_{0x}$ ).

### 2.5.2. Las leyes en un sistema no-inercial: Rotación

Primero vamos a describir un vector unitario desde un sistema de ejes que rota respecto de un eje fijo. Los ejes verticales de los dos sistemas coordenados coinciden y  $S'$  rota respecto al eje  $z'$  con una velocidad angular  $\omega$ , como se muestra en la figura ???. Para una rotación respecto del eje  $z'$  la relación entre vectores canónicos antes y después de la rotación es de la forma

$$\hat{\mathbf{i}}' = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}, \tag{2.15}$$

$$\hat{\mathbf{j}}' = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}, \tag{2.16}$$



en donde  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$  y  $(\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{j}}', \hat{\mathbf{k}}')$  son los vectores canónicos en  $S$  y  $S'$  respectivamente. Si tomamos la derivada de las expresiones anteriores respecto del tiempo, tomando en cuenta que  $\theta = \theta(t)$ , obtenemos

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} = \dot{\theta}(-\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}), \quad (2.17)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt} = -\dot{\theta}(\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}), \quad (2.18)$$

en donde hay que recordar que las derivadas temporales de los vectores  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}})$  son cero ya que éstos están fijos en el espacio y  $\omega = \dot{\theta}$ . Las expresiones entre paréntesis son evidentemente los vectores canónicos en el sistema  $S'$  por lo que

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} = \omega \hat{\mathbf{j}}', \quad (2.19)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt} = -\omega \hat{\mathbf{i}}'. \quad (2.20)$$

Los dos vectores anteriores son las componentes de un vector perpendicular a el vector de posición  $\hat{\mathbf{r}}'$  y a la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{k}}'$ , por lo que es fácil demostrar que

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}',$$

es decir, la velocidad a la que rota el vector de posición respecto de un observador en  $S'$  es equivalente a cómo se escribe la velocidad de un punto que rota respecto de un eje fijo.

Ahora consideramos el caso más general en el que el sistema  $S'$  rota respecto del sistema del laboratorio con una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , como se muestra en la figura 2.4. Entonces, si  $\mathbf{v}$  es la velocidad del cuerpo de masa  $m$  desde el sistema laboratorio tendremos que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}',$$

en donde  $\mathbf{v}'$  es la velocidad del punto de masa  $m$  vista desde el sistema no inercial  $S'$ .

Este resultado es una analogía a la velocidad de un punto, que pertenece a un cuerpo rígido y que rota respecto de un eje, en donde la velocidad se descompone en la del centro de masa mas la velocidad relativa al centro de masa, que solo contempla la rotación. Sin embargo, este caso es diferente pues las velocidades están referidas a diferentes sistemas coordenados. Entonces, reescribimos la expresión anterior de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad (2.21)$$

en donde  $\dot{(\ )}$  y  $\frac{d(\ )}{dt}$  representan las derivadas temporales en los sistemas  $S$  y  $S'$ , respectivamente. La forma de esta ecuación nos muestra que podemos considerar a la expresión (2.21) como el prototipo para la regla de transformación general entre derivadas temporales (nótese de

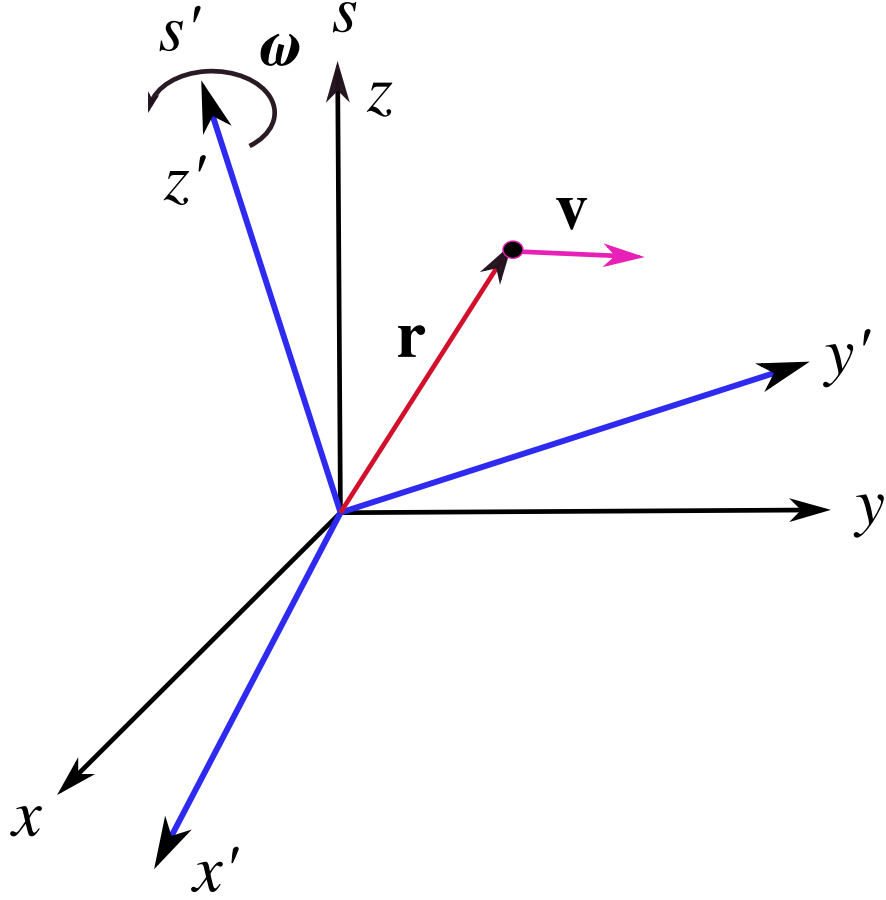


Figura 2.4: Diagrama de energía para un oscilador armónico simple en 1D.

la figura 2.4 que  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ ) de manera que la relación entre las derivadas temporales es de la forma

$$\dot{() = \frac{d()} {dt} + \boldsymbol{\omega} \times (). \quad (2.22)$$

Apliquemos este resultado a la segunda ley de Newton, entonces tomamos la derivada temporal de la expresión (2.21) y obtenemos

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}',$$

en todos los términos en donde hay punto se sustituye la regla general (2.22), así que la aceleración desde  $S$  toma la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}'} {dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}} {dt} \times \mathbf{r}'. \quad (2.23)$$

Ahora bien, del principio de D'Alembert teníamos que la segunda ley de Newton la podemos escribir como  $\mathbf{F} + \mathbf{F}^* = 0$  con  $\mathbf{F}^* = -m\dot{\mathbf{v}}$  y  $\mathbf{F}$  la fuerza externa, por lo tanto la ley

de Newton desde un sistema no inercial es

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \mathbf{F}, \quad (2.24)$$

el primer y segundo términos corresponden a la fuerza de coriolis y a la fuerza centrífuga, respectivamente. El tercer término sólo es diferente de cero cuando la velocidad angular de rotación del sistema no inercial depende del tiempo y se conoce como fuerza de Euler. En el caso en el que el sistema  $S'$  se traslada y rota hay que sumarle al lado derecho de la expresión (2.24) el término  $-m\mathbf{a}_{rel}$  (ver sección 2.5.1)).



# Capítulo 3

## Trabajo y energía mecánica

### 3.1. El teorema de Trabajo y Energía

Vamos a repasar algunas consecuencias útiles de la segunda ley de Newton. Ahora partimos de la energía cinética de un cuerpo de masa  $m$  que se mueve a velocidad  $\mathbf{v}$ , es decir,

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$

si tomamos su derivada temporal respecto del tiempo obtenemos

$$\frac{dT}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.1)$$

y sustituyendo la ley segunda ley de Newton  $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$  obtenemos que

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.2)$$

en donde  $\mathbf{F}$  es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo. Según las reglas del cálculo integral, esta expresión se puede reescribir como

$$\int dT = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.3)$$

en donde se utilizó que  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$  siendo  $d\mathbf{r}$  el vector de desplazamiento. Al evaluar esta integral en dos momentos diferentes del movimiento, digamos de un tiempo  $t_i$  a un tiempo  $t_f$ , obtenemos que el cambio en la energía cinética del cuerpo en este intervalo de tiempo es igual al trabajo realizado por las fuerzas aplicadas, que se conoce como teorema de Trabajo y Energía.

En el caso general, para realizar la integral del lado derecho de la expresión (3.3) es necesario conocer la trayectoria como función del tiempo, así que solo es útil para conocer el trabajo sabiendo la velocidad en dos momentos diferentes. Sin embargo, también del cálculo,

hay un conjunto de campos vectoriales dependientes de la posición que tienen la siguiente propiedad:

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}), \quad (3.4)$$

en donde  $U(\mathbf{r})$  es una función escalar; la fuerza se pueden derivar del gradiente de una función escalar. Para estos campos el teorema de trabajo y energía toma la forma

$$\int dT = - \int dU, \quad (3.5)$$

al integrar la expresión anterior en dos momentos diferentes a lo largo de la trayectoria, se obtiene que la cantidad

$$T + U = E, \quad (3.6)$$

es una constante a lo largo del movimiento y corresponde a la energía mecánica del sistema. Por lo tanto, todo sistema que satisfaga que las fuerzas aplicadas se derivan del negativo del gradiente de una función potencial, que se conoce como energía potencial, conservan la energía mecánica.

### 3.1.1. La ley de Hooke

Como ejemplo vamos a usar la ley de Hooke que podemos escribir para este caso como  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}^1$ , la energía potencial asociada es de la forma

$$U = \frac{1}{2}k \mathbf{r} \cdot \mathbf{r},$$

que satisface la expresión (3.3). La energía mecánica para un cuerpo de masa  $m$  sujeto a la fuerza de Hooke es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k r^2.$$

Si graficamos la energía potencial en función de la coordenada radial  $r$  (ver figura 3.1), la energía mecánica es una recta paralela al eje de las abscisas, de manera que la energía cinética es la diferencia entre la energía potencial y esta recta. Un aspecto importante del diagrama es que los puntos de intersección entre la energía potencial y la energía mecánica representan puntos de retorno y por lo tanto estados ligados; es decir, tenemos un movimiento confinado y/o oscilatorio. Un sistema que va mas allá de los puntos de retorno violaría la ecuación (3.6).

### 3.1.2. El Potencial Gravitacional

En el caso de la fuerza gravitacional de Newton, podemos calcular la energía potencial asociada. El cálculo conviene hacerlo en coordenadas esféricas puesto que sabemos que la

---

<sup>1</sup>Todo está en un lenguaje vectorial para el vector de posición, para tener una imagen más clara recomiendo cambiar  $\mathbf{r} \rightarrow x$  en la fuerza y la energía potencial y eliminar la notación vectorial

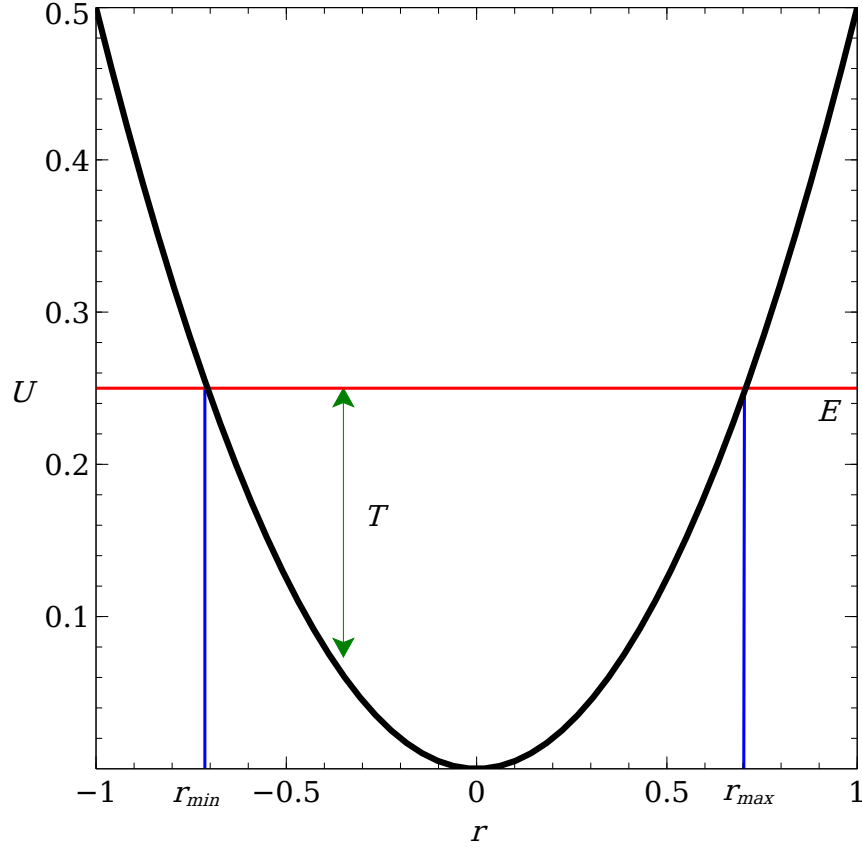


Figura 3.1: Diagrama de energía para un oscilador armónico simple en 1D.

fuerza gravitacional solo es función de la coordenada radial y apunta en la dirección radial. Por lo tanto la expresión (3.4) para este caso toma la forma

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{\mathbf{r}},$$

así que solo hay que encontrar una primitiva de una función inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es decir,

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

Ahora vamos a calcular la energía mecánica tomando en cuenta la segunda ley de Kepler para la velocidad aerolar; que es equivalente a que se conserva el momento angular  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$  en donde  $\mathbf{P}$  es el momento lineal. Esto tiene dos consecuencias, por un lado el movimiento está confinado al plano pues el vector momento angular no cambia de dirección y por lo tanto utilizamos coordenadas polares planas. Por otro lado, la magnitud del momento angular es  $l = mr^2\dot{\theta}$  y también es constante, entonces las coordenadas  $r$  y  $\theta$  no son independientes.

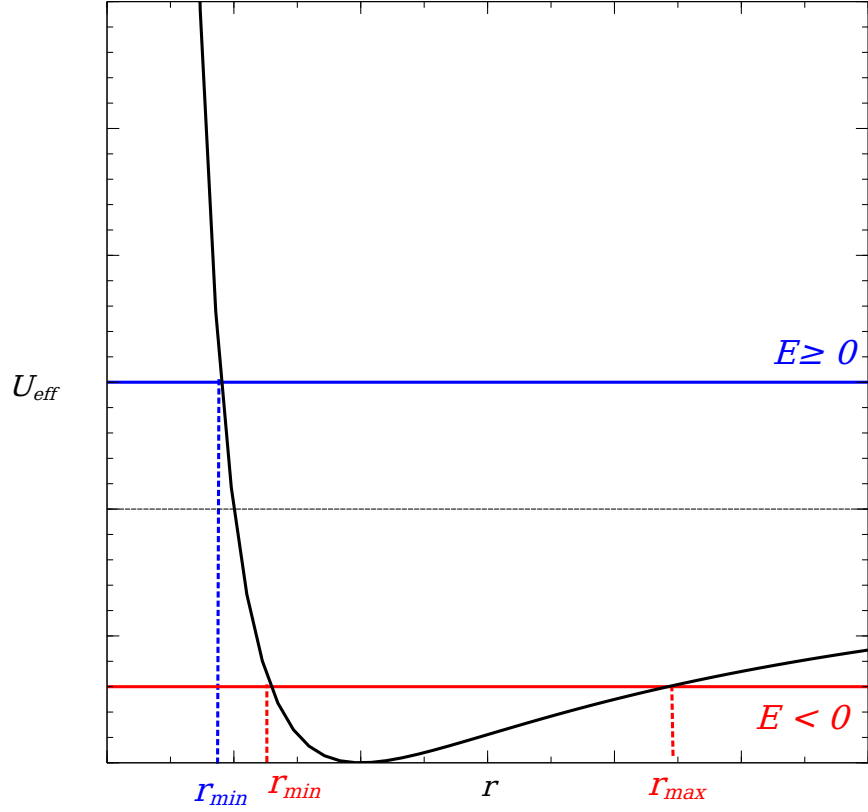


Figura 3.2: Diagrama de energía para el problema de un cuerpo en un campo gravitacional.

Tomando en cuenta estas consideraciones la energía total está dada por

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

que tiene la forma de la energía mecánica de un cuerpo de masa  $m$  que se mueve en una dimensión en presencia de un potencial efectivo dado por

$$U_{eff} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \quad (3.7)$$

el primer término se conoce como potencial centrífugo.

Analogamente al caso de la ley de Hooke, las rectas horizontales superpuestas en la grafica de la energía potencial contra la coordenada radial representan a la energía mecánica total, como se muestra en la figura 3.2. Aquí se pueden distinguir dos casos, cuando  $E \geq 0$  que corresponde a soluciones de órbitas abiertas (parábolas e hipérbolas) y cuando  $E < 0$  que corresponde a órbitas cerradas (elipses y círculos).



Una característica importante de los movimientos que tienen estados ligados es que la energía potencial tiene un mínimo y, del cálculo diferencial sabemos que toda función que tiene un mínimo se puede aproximar por un polinomio de grado dos. Geométricamente, esto significa que alrededor del mínimo siempre es posible ajustar una parábola mas términos de orden superior. El procedimiento general se conoce como serie de Taylor y consiste en evaluar las derivadas de la función a aproximar multiplicadas por potencias de la variable independiente.

Entonces, primero hay que encontrar el valor de  $r_0$  calculando la primera derivada de la expresión (3.7) e igualandola a cero. Así, se encuentra que  $r_0 = l^2/GM$ , de manera que el potencial efectivo se puede escribir

$$U_{eff} = \frac{GMm}{r_0} \left( \frac{r_0^2}{2r^2} - \frac{r_0}{r} \right).$$

Para obtener una aproximación a segundo orden en serie de Taylor utilizamos que

$$U_{eff} = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 U_{eff}}{dr^2} \right)_{r=r_0} (r - r_0)^2 + U_0,$$

el término lineal en  $r - r_0$  desaparece puesto que la primera derivada del potencial es cero en el mínimo. Sustituyendo el potencial efectivo se obtiene finalmente que, en la vecindad de  $r_0$ , el potencial gravitacional efectivo está dado aproximadamente por

$$U_{eff} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_0^3} (r - r_0)^2 - \frac{GMm}{2r_0},$$

que corresponde al potencial de un oscilador armónico de frecuencia  $\omega = \sqrt{GM/r_0^3}$ .

Para el problema de dos cuerpos cuando la energía mecánica es tal que  $E = U_{eff}(r_0)$  la órbita es circular, la fuerza gravitacional se balancea con la fuerza centrífuga. Por lo tanto, cuando las órbitas son elipses cuya excentricidad es pequeña (casi círculos) el potencial gravitacional se puede aproximar por el de un oscilador armónico simple de frecuencia  $\sqrt{GM/r_0^3}$ .

### 3.1.3. El potencial de Lenard-Jones

En las secciones anteriores usamos el teorema de conservación de energía para problemas que involucraban a un cuerpo de masa  $m$  sujeto a diferentes fuerzas. En este caso nos vamos a concentrar solo en un campo, es decir, nos concentramos solo en la función potencial, conocida como potencial de Lenard-Jones que está dado por

$$U = \epsilon \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right],$$

la forma de este potencial se muestra en la figura 3.3, donde podemos notar que también tiene un mínimo y estados ligados.

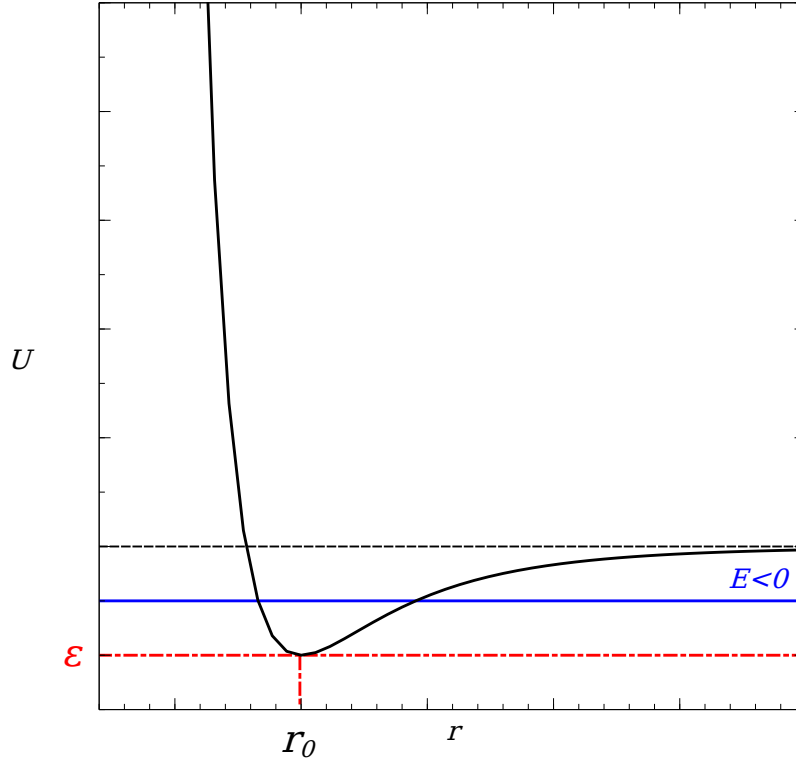


Figura 3.3: Diagrama de energía para el potencial de Lenard-Jones.

En vista de la forma del potencial, podemos hacer un cálculo equivalente al caso gravitacional. Entonces, tomamos la primera derivada del potencial de Lenard-Jones con lo que obtenemos

$$\frac{dU}{dr} = \frac{12\epsilon}{r} \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right],$$

esta expresión se anula en  $r = r_0$  que es la posición del mínimo. Análogamente al caso gravitacional, para encontrar la frecuencia calculamos la segunda derivada del potencial y la evaluamos en el mínimo con lo que se obtiene que, a segundo orden de aproximación en serie de Taylor, el potencial de Lenard-Jones es

$$U = \frac{36\epsilon}{r_0^2} (r - r_0)^2 - \epsilon,$$

de manera que la frecuencia asociada a este potencial está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{72\epsilon}{mr_0^2}},$$

en donde  $m$  representa la masa de un cuerpo sujeto al campo de fuerzas correspondiente esta función potencial.

## 3.2. Algunas observaciones

Los aspectos fundamentales en estos problemas son la existencia de estados ligados, en otras palabras que la energía potencial tenga uno o varios mínimos. Esto permite aproximar, alrededor del mínimo, a la energía potencial original por la de un oscilador armónico simple.

Como se pudo notar de la última sección, el problema es relativamente simple si se conocen la herramientas del cálculo apropiadas. En este caso, fue importante saber encontrar máximos y mínimos con el cálculo diferencial y la serie de Taylor.

## 3.3. La energía de un sistema de partículas

Para introducir las nuevas ideas de esta sección vamos a trabajar un problema y después desarrollaremos la teoría general.

### 3.3.1. Una mancuerna

Ya hemos visto algunas de las propiedades cuando estudiamos sistemas de partículas desde el punto de vista de las leyes de Newton. Ahora vamos a explorar algunos resultados importantes que resultan de construir la energía mecánica de un sistema de partículas cuando las fuerzas involucradas son conservativas.

A manera de ejemplo, estudiemos el movimiento de una mancuerna formada por dos masas iguales unidas por una barra rígida de masa despreciable. Ya sabemos que el movimiento del centro de masa se describe simplemente considerando las fuerzas externas, así que lo consideraremos fijo en el espacio; de tal manera que la mancuerna solo puede rotar respecto de un eje que pasa por el centro de masa como se muestra en la figura 3.4.

La energía cinética de la mancuerna, suponiendo que solo rota respecto a un eje que pasa por el centro de masa es<sup>2</sup>

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2, \quad (3.8)$$

como cada partícula se mueve en un círculo, la magnitud de la velocidad es  $\omega l_i$  en donde  $l_i$  es la distancia del la partícula  $i$ -ésima al centro de rotación y  $\omega$  la velocidad angular a la que rota. De tal manera que la energía cinética toma la forma

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

en donde  $I = m_1l_1^2 + m_2l_2^2$ , que se conoce como momento de inercia.

De este resultado vemos que la energía cinética de la mancuerna tiene la misma forma que la energía cinética de una partícula de masa  $m$ , moviéndose a velocidad  $v$ ; un coeficiente de inercia, asociado a la rotación, por una velocidad angular. Es importante notar que para el caso que estudiamos, el coeficiente de inercia  $I$  depende de dónde está la masa respecto algún punto, en este caso  $l$  que se mide desde el eje de rotación.

---

<sup>2</sup>Aquí se supone que  $\mathbf{R} = 0$  y que el centro de masa no está sujeto a fuerzas externas.

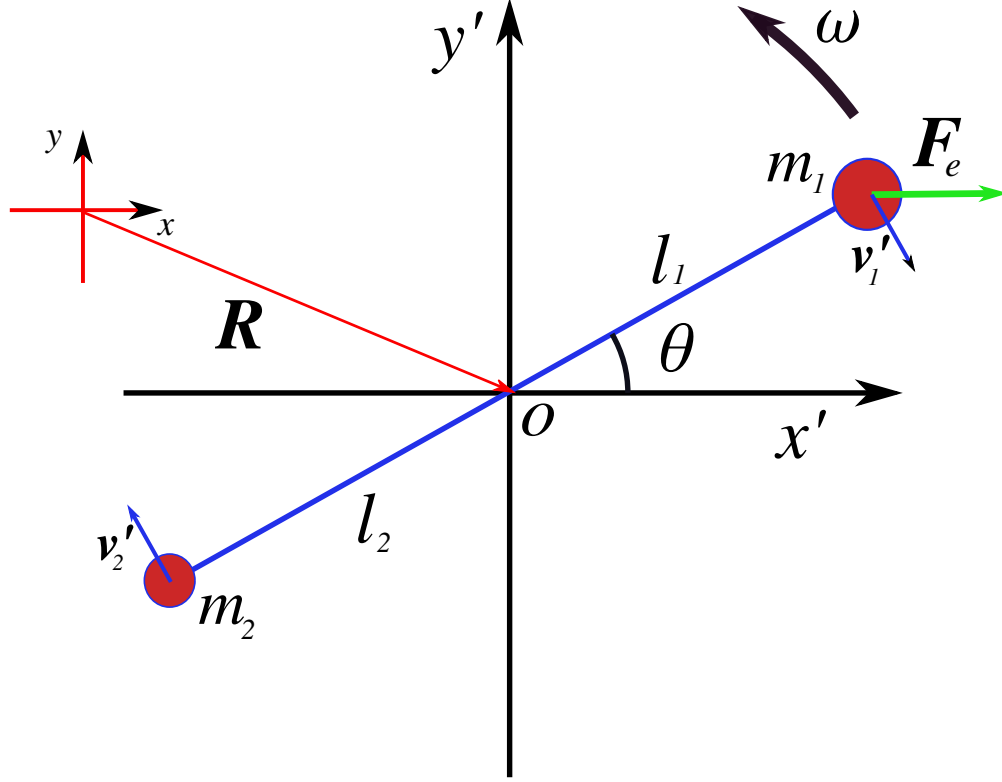


Figura 3.4: Diagrama de la rotación de una mancuerna hecha de dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  unidos por una barra rígida de masa despreciable. La mancuerna rota con velocidad angular  $\omega$  respecto de un eje que pasa por el centro de masa (el punto O);  $\mathbf{R}$  es la posición del centro de masa respecto del Laboratorio.

Si el centro de masa no está fijo en el espacio y se mueve debido a fuerzas externas, la energía cinética es de la misma forma que la expresión (3.8), solo que ahora la velocidad de cada partícula es de la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \quad (3.9)$$

en donde  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{v}'$  son la velocidad del centro de masa y la velocidad relativa al centro de masa, respectivamente. Si escribimos la expresión (3.8) desde un sistema con origen en el centro de masa de la mancuerna obtenemos

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + \mathbf{V} \cdot (m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'), \quad (3.10)$$

en donde  $M$  es la masa total de la mancuerna.

Como las partículas están unidas por una barra rígida, la parte de la energía cinética relativa al centro e masa tiene la forma  $\omega l_i$ , en analogía con la mancuerna rotando respecto a un eje fijo. El tercer término se anula, pues es la posición del centro de masa relativa al

centro de masa. De manera que la energía cinética se puede escribir como

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

el primer término corresponde a la energía cinética del centro de masa y, el segundo, es la energía cinética debida a la rotación medida respecto del centro de masa.

Este resultado solo es válido al describir al sistema mecánico en las coordenadas del centro de masa, en cualquier otro caso el tercer término en la expresión (3.10) es diferente de cero. Como la energía se puede separar en una parte de traslación y una de rotación, significa que el estudio del sistema de partículas se traduce en resolver la traslación del centro de masa, por un lado, y la rotación desde el centro de masa considerando al sistema como si fuera inercial aún cuando en general está acelerado.

Vayamos un poco mas adelante con este ejemplo y calculemos la magnitud del momento angular del sistema de partículas en las coordenadas del centro de masa

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m_1 + m_2)\mathbf{V} + \mathbf{r} \times (m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2)$$

el primer término corresponde al momento angular del centro de masa y, el segundo, el momento angular relativo al centro de masas. Analicemos la magnitud del momento angular relativo, es decir,

$$L' = m_1 l_1 v'_1 + m_2 l_2 v'_2,$$

y como  $v'_i = l_i \omega$  obtenemos que  $L' = I\omega$ . En otras palabras, cuando el eje de rotación pasa por el centro de masa, el momento angular  $L'$  se escribe como un coeficiente de inercia por la velocidad angular, en analogía con el momento lineal que es la masa por la velocidad.

Ahora supongamos que sobre la masa  $m_1$  actúa una fuerza externa  $\mathbf{F}_e$ , de manera que las ecuaciones de Newton serían

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{T}_{12} + \mathbf{F}_e, \quad (3.11)$$

$$m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{T}_{21}, \quad (3.12)$$

en donde  $\mathbf{T}_{ij}$  representa la tensión que siente la masa  $i$  debido a la masa  $j$ , si sumamos las expresiones anteriores obtenemos la ley de Newton para el centro de masa, es decir,

$$\mathbf{F}_e = M\dot{\mathbf{V}}, \quad (3.13)$$

donde  $M = m_1 + m_2$  es la masa total y utilizamos la tercera ley de Newton para las tensiones. De lo que obtuvimos calculando la energía mecánica del sistema, podemos ahora montarnos en el centro de masa de la mancuerna y describir la rotación desde ahí. Entonces calculemos el producto vectorial de las ecuaciones anteriores con sus respectivos vectores de posición

$$(\mathbf{r}'_1 + \mathbf{R}) \times m_1(\mathbf{a}'_1 + \dot{\mathbf{V}}) = (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{R}) \times (\mathbf{T}_{12} + \mathbf{F}_e), \quad (3.14)$$

$$(\mathbf{r}'_2 + \mathbf{R}) \times m_2(\mathbf{a}_2 + \dot{\mathbf{V}}) = (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{R}) \times \mathbf{T}_{21}, \quad (3.15)$$

en donde usamos la regla de transformación (3.9) para la posición y para la aceleración, al sumar estas dos ecuaciones obtenemos que

$$\mathbf{r}'_1 \times m_1 \mathbf{a}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times m_1 \mathbf{a}'_2 = \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}_e + (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) \times \mathbf{T}_{21},$$

en donde se utilizó que

$$\begin{aligned} (m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2) &= 0, \\ (m_1 \mathbf{a}'_1 + m_2 \mathbf{a}'_2) &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

puesto que estas variables están medidas desde el centro de masa y la ecuación (3.13). El último término que corresponde a las torcas debidas a la tensión se anula, ya que el brazo de palanca es paralelo a la tensión. Finalmente notamos que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{a},$$

ya que el término  $\mathbf{v} \times m\mathbf{v}$  es cero y la ecuación toma la forma

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}_e, \quad (3.17)$$

en donde  $\mathbf{L}' = \mathbf{r}'_1 \times m_1 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times m_1 \mathbf{v}'_2$  es el momento angular relativo cuya magnitud es  $L' = I\omega$ . Entonces, encontramos que para resolver la rotación del cuerpo respecto del centro de masa hay que resolver la ecuación anterior sin importar qué tipo de movimiento tenga el centro de masa, que está determinado por la ecuación (3.13).

En resumen, encontramos que la mancuerna se puede describir con dos ecuaciones dinámicas una para la traslación y otra para la rotación que, además, tienen la misma forma “masa (momento de inercia) por aceleración (aceleración angular) igual a la fuerza externa (torca externa)”, es decir, la rotación se describe con la “Ley de Newton para Torcas”.

Ahora consideremos que la mancuerna está hecha por las partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$  y que están en un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{i}}$ ; la primera partícula tiene carga  $q$  y la otra es neutra. Así, la fuerza externa es  $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$  de manera que las ecuaciones de Newton para traslación y rotación, respecto del sistema centro de masa, toman la forma

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{V}} &= qE\hat{\mathbf{i}}, \\ I\dot{\omega} &= lqE \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.18)$$

en donde  $\theta$  es el ángulo entre la mancuerna y la horizontal. Si la condición inicial para la coordenada angular es de la forma  $\theta(0) \ll 1$ , se puede hacer la aproximación de ángulos pequeños y la ecuación que describe la rotación se reduce a un oscilador armónico simple.

Hay que notar que empezamos con dos masas unidas por una barra y determinamos que el problema se describe con cinco ecuaciones diferenciales para  $\mathbf{R}(t)$  y  $\theta(t)$ , es decir, cinco grados de libertad tres de traslación y uno de rotación. Cada masa tiene tres por lo que el sistema mecánico tendría seis pero, como hay una restricción geométrica, se disminuye en uno; la regla general será restarle a la suma de los grados de libertad, el número de restricciones geométricas. Las soluciones de las ecuaciones obtenidas corresponden a un movimiento uniforme acelerado en la horizontal y, para la rotación, oscilaciones no lineales.

### 3.3.2. El vector velocidad angular

En la sección anterior demostramos que la magnitud de  $L = I\omega$ , en donde  $\omega$  era la velocidad angular de rotación respecto de un eje perpendicular a la mancuerna. Cuando el centro de masa de la mancuerna está fijo en el espacio, la dirección del momento angular es fija pues es siempre perpendicular al plano de rotación. Sin embargo, si el centro de masa se mueve, la mancuerna rota alrededor del mismo eje, pero éste puede cambiar su dirección en el espacio.

Entonces, ya tenemos una relación para la magnitud del momento angular en términos de la velocidad angular de rotación y cómo se distribuye la masa y falta poder determinar su dirección. Lo primero que viene a la mente es construir un vector cuyas componentes son ángulos, cierto número, y así en analogía con el vector de posición construir la velocidad; que de cierta forma es lo que ya encontramos en la sección anterior. Sin embargo, al formar una triada de ángulos para describir rotaciones de un cuerpo rígido general, nos encontramos que no es un vector pues hacer rotaciones en diferente orden resulta en configuraciones finales diferentes; en otras palabras no conmutan.

Cuando el eje de rotación está fijo, se puede escoger la variación del ángulo como la magnitud del vector velocidad angular y en la dirección del canónico correspondiente; por ejemplo en polares el vector velocidad angular promedio es de la forma

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \hat{\theta},$$

por lo que el momento angular y el la velocidad angular son paralelos, es decir,

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}.$$

Aunque las rotaciones finitas no son conmutativas, las variaciones infinitesimales de los ángulos si lo son. Se debe notar que está es una elección conveniente pero no se ha demostrado, en el caso general la velocidad angular y el momento angular no son paralelos.<sup>3</sup>

Finalmente, para determinar la velocidad de las masas de la mancuerna a partir de la velocidad del centro de masa y la velocidad angular usamos que, por ejemplo para la masa  $m_1$ ,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_1$ , en donde  $\mathbf{v}'_1$  es la velocidad tangencial relativa al centro de masa y tiene magnitud  $\omega r$ . La velocidad angular, el vector de posición y la velocidad tangencial relativa son perpendiculares entre si, por lo que es fácil mostrar que

$$\mathbf{v}'_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_1,$$

este resultado es heurístico y se mostrará en general más adelante.

---

<sup>3</sup>Cuando el centro de masa se mueve debido a fuerzas externas, la idea se puede extender ya que hay casos en los que la velocidad angular y el momento angular siguen siendo paralelos.

### 3.4. Para un sistema de $n$ partículas

Para un sistema conservativo de  $n$  partículas, la energía mecánica es de la forma

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|),$$

en donde el segundo término representa a la energía potencial de interacción entre partículas que depende de la distancia relativa entre ellas. Esto quiere decir que este sistema es cerrado pues no hay fuerzas externas.

Al hacer la transformación (3.9) en la energía se encuentra que

$$E = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} m_i V^2 + 2m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{V} \right) + U(|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|),$$

como

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = 0$$

obtenemos finalmente que

$$E = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + U(|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|). \quad (3.19)$$

Si suponemos que la velocidad del centro de masa es cero, entonces la expresión anterior representa a la energía interna del sistema mecánico. Por ejemplo, en el aire contenido en un contenedor cerrado las moléculas de aire tienen energía cinética e interactúan entre ellas con fuerzas centrales que dependen de la distancia relativa entre ellas.

En el caso de un cuerpo rígido, definido como aquel que no se deforma sin importar qué tan grandes sean las fuerzas que se le aplican, el término correspondiente a la energía interna puede escribirse de una manera más simple como en el caso de la mancuerna. Para simplificar aún mas las cosas supongamos que el cuerpo rota, a una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , alrededor de un eje que pasa por el centro de masa como se muestra en la figura 3.5. La magnitud de la velocidad de una pequeña partícula del rígido es  $\mathbf{v}_p = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_p$  en donde  $\mathbf{v}'_p$  es la velocidad tangencial relativa al sistema centro de masas.

Entonces, si el punto está a una distancia  $\rho$  del eje de rotación, entonces  $v_p = \omega \rho$  y de la figura 3.5 se ve que  $\rho = r \sin \theta$ . Por lo que

$$v'_p = \omega r \sin \theta, \quad (3.20)$$

finalmente la velocidad tangencial relativa, el vector de posición y la velocidad angular son mutuamente perpendiculares, de tal manera que

$$\mathbf{v}'_p = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_p,$$



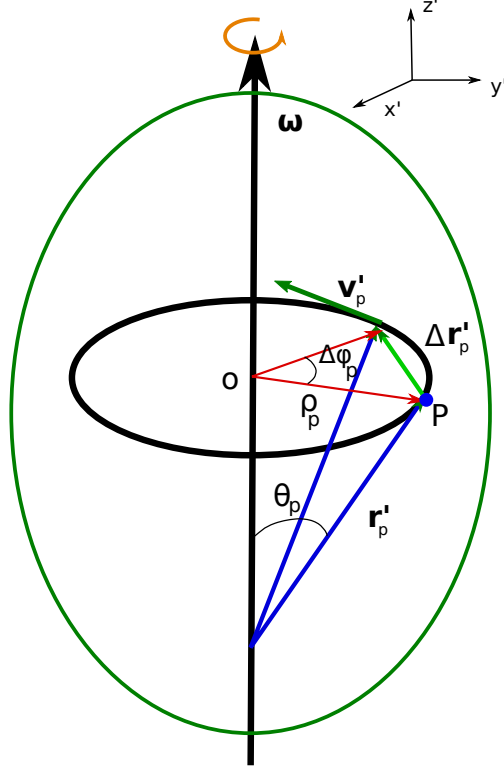


Figura 3.5: Diagrama de la rotación de un cuerpo rígido. El cuerpo (en verde) rota respecto a un eje que pasa por el centro de masa (el punto O) con una velocidad angular  $\omega$  en la dirección del eje  $z'$ . El punto  $P$  denota un pequeño pedazo del cuerpo rígido que se mueve alrededor de un círculo de radio  $\rho_p$ .

cuya magnitud está dada por la expresión (3.20) y la dirección se eligió usando la regla de la mano derecha eligiendo localmente a la velocidad angular en la dirección en la dirección de  $z'$  (ver figura 3.5).

Para incluir este resultado en la expresión para la energía cinética, suponemos que el rígido está compuesto por  $n$  partículas unidas por restricciones geométricas (como en la mancuerna), de manera que la velocidad de la partícula  $i$ -ésima es

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i,$$

en donde  $\mathbf{r}_i$  es la posición de la  $i$ -ésima partícula. Sustituyendo esta expresión en la parte correspondiente a la energía cinética de la expresión (3.19) obtenemos

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2, \quad (3.21)$$

el último término se puede reescribir usando la identidad vectorial

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2 = r_i^2\omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_i)^2,$$

este término es aún complicado, ya que los coeficientes de inercia (momentos de inercia) dependen del eje de rotación y no se reducen a una cantidad escalar como la masa. Así que por el momento consideraremos que el rígido gira alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, del tal manera que el momento de inercia es  $I = \sum m_i r_i'^2$  y en ese caso  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i' = 0$ , de manera que la expresión para la energía cinética es de la forma

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (3.22)$$

El tipo de rígidos que estamos describiendo son aquellos en los que, además de que rotan respecto de un eje que pasa por el centro de masa, éste es también un eje de simetría del cuerpo; una esfera rotando respecto de un eje que pasa por el centro, un cilindro rotando respecto de su eje de simetría, etc.

El resultado que obtuvimos tiene la misma forma que en el caso de la mancuerna, de manera que hemos probado que para describir el movimiento de un cuerpo rígido basta con resolver la segunda ley de Newton para el movimiento del centro de masa y la rotación con la ecuación de Newton para la rotación descrita desde el sistema centro de masa, como si fuera un sistema inercial. Hay que notar que si el eje de rotación está fijo en el espacio, sin importar si pasa o no por el centro de masa, el problema se describe a partir de la ecuación de Newton para la rotación.

En todo el análisis trabajamos por un lado con la energía cinética del sistema de partículas, y por el otro lado, con las leyes de Newton en donde el movimiento del rígido solo depende de las fuerzas y torcas externas. En el caso general es posible mostrar que, en la energía mecánica del sistema de partículas, la energía potencial que aparece es solo debida a las fuerzas externas, los términos correspondientes a las interacciones entre partículas suman a lo más una constante.

### 3.4.1. El momento de inercia

En la sección anterior encontramos que la rotación de la mancuerna se puede estudiar de una manera muy parecida a la traslación, en donde la variable cinemática Momento Lineal se cambia por la variable Momento Angular y éste último se puede escribir como un coeficiente de inercia por la velocidad angular; en analogía con el momento lineal.

En el caso más general encontramos que el momento de inercia del cuerpo rígido, pensado como un sistema de partículas unidas por barras inextensibles de masa despreciable, es de la forma  $I = \sum m_i r_i^2$  en donde  $r_i$  es la distancia al eje de rotación.<sup>4</sup> Lo importante de este coeficiente de inercia es que depende de la masa del cuerpo y de cómo está distribuida en el espacio.

Para una distribución continua de masa, por ejemplo un cuerpo sólido cuya densidad de masa es de la forma  $\rho = \rho(x, y, z)$  tenemos que la contribución al momento de inercia por una pequeño pedazo de cuerpo a una distancia  $r$  del eje de rotación es

$$dI = r^2 dm,$$

---

<sup>4</sup>Es importante notar que el cuerpo no tiene que rotar respecto a este eje. La rotación se puede estudiar desde cualquier eje igual que el momento angular se puede medir desde cualquier sistema coordenado.

en donde  $dm$  es la masa del pedazo. Como  $dm = \rho dV$  en donde  $dV$  es el volumen que pesa  $dm$ , encontramos que el momento de inercia de una distribución continua de masa es

$$I = \int r^2 \rho dV.$$

En el caso general, esta es una integral sobre el volumen del cuerpo como en el caso del cálculo del centro de masa. Se debe notar que existen tablas del valor del momento de inercia para un gran número de geometrías respecto de diferentes ejes por lo que no siempre es necesario, o recomendable, calcularlos.

### El teorema de ejes paralelos.

Supongamos que el momento de inercia es conocido desde un eje arbitrario y busquemos calcularlo respecto de un eje que pasa por el centro de masa, con la condición de que sea paralelo al primero. Entonces partimos de que  $I = \sum m_i \rho_i'^2$  en donde  $\rho_i$  es la distancia al eje de rotación que pasa por el centro de masa. La relación entre el sistema centro de masa y cualquier otro es de la forma  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{R}_p + \boldsymbol{\rho}_i'$ , en donde  $\mathbf{R}_p$  es la distancia entre ejes.

Entonces, el momento de inercia se puede reescribir como

$$I = \sum m_i \rho_i'^2 + \sum m_i R_p^2 + 2\mathbf{R}_p \cdot \sum m_i \boldsymbol{\rho}_i',$$

el último término representa la posición del eje que pasa por el centro de masa, relativa al centro de masa por lo tanto este término vale cero. Usando que  $M = \sum m_i$  es la masa total del sistema de partículas, el momento de inercia respecto a un eje arbitrario se puede escribir como

$$I = \sum m_i \rho_i'^2 + MR_p^2, \quad (3.23)$$

el primer término es el momento de inercia medido desde un eje que pasa por el centro de masa y el segundo es la masa total por la distancia entre ejes. El resultado es muy útil, ya que en muchos casos el cálculo desde el sistema centro de masa es más simple.

### 3.4.2. El péndulo

Como ejemplo estudiaremos el péndulo en el caso en el que, en vez de una masa puntual suspendida de una cuerda inextensible, tenemos un cuerpo de geometría arbitraria suspendida de una cuerda inextensible, como se muestra en la figura 3.6. Entonces, el problema consta de un conjunto de partículas que representan al rígido de masa  $m$ , cuyo centro de masa está también restringido a moverse a una distancia  $l$  de un punto (el punto  $O$  en la figura 3.6).

En analogía con el caso de la mancuerna, el momento angular desde el punto  $O$  en coordenadas polares es  $\mathbf{L} = I\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$ , en donde  $I$  es el momento de inercia desde un eje que pasa por el punto de fijación y  $\hat{\mathbf{k}}$  es el canónico en la dirección de  $z$ . Por otro lado, las torcas medidas desde  $O$  se deben solo al peso  $\mathbf{W}$ , ya que la tensión en la cuerda y el brazo de palanca

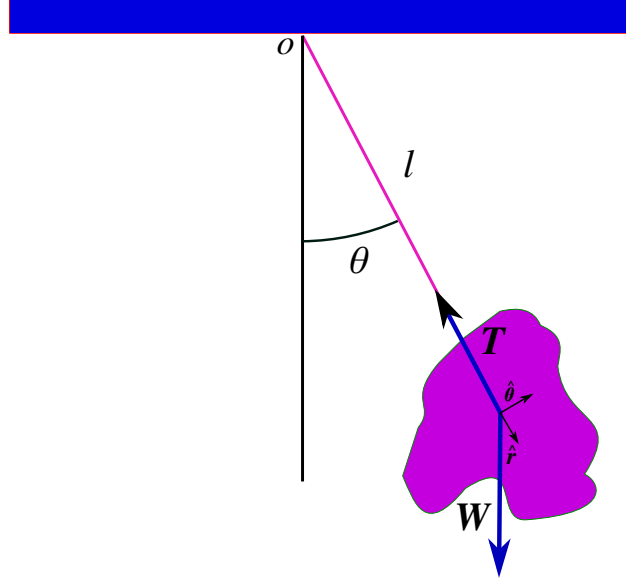


Figura 3.6: Péndulo de forma arbitraria, el cuerpo está suspendido de una cuerda inextensible de tal manera que el centro de masa está a una distancia  $l$  del pivote en  $O$ .

son vectores paralelos. Como  $\mathbf{W} = mg(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$  entonces la torca ( $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{W}$ ) es  $\boldsymbol{\tau} = -mgl \sin \theta \hat{\mathbf{k}}$  y la ecuación de movimiento es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{mgl}{I} \sin \theta,$$

en el caso de que el cuerpo es una partícula puntual de masa  $m$ , el momento de inercia es  $ml^2$  y se recupera el resultado para el péndulo puntual.

Es importante notar que este resultado es para cualquier cuerpo rígido sujeto a rotar respecto de un eje fijo. Para calcular el momento de inercia basta con conocerlo en un eje que pasa por el centro de masa y utilizar el teorema de ejes paralelos.

### 3.4.3. La rueda rodante

Como primer ejemplo consideramos un disco de masa  $m$  y radio  $R$  que rueda sin resbalar por una superficie plana. Supondremos que en el centro de masa se aplica una fuerza  $\mathbf{F}$  en dirección horizontal, como se muestra en la figura 3.7-(a). Las leyes de Newton para la traslación y la rotación toman la forma

$$F - f = ma, \quad (3.24)$$

$$N - mg = 0, \quad (3.25)$$

$$-Rf = I\dot{\omega}, \quad (3.26)$$

en donde  $\mathbf{N}$  es la normal a la superficie,  $\mathbf{f}$  es la fuerza de fricción que actúa en el punto de contacto entre la superficie y el disco y  $\omega$  la velocidad de rotación del disco.

Como la rueda no se desliza, el punto de contacto debe estar en reposo de manera que la fuerza de fricción debe asegurar que esto se cumpla. En otras palabras es una restricción geométrica; una vez que el disco a dado una vuelta completa, el centro de masa recorre exactamente un perímetro. Es conveniente escribir este resultado en diferencias, es decir,

$$\Delta x \approx -R\Delta\theta$$

en donde  $\Delta x$  es el desplazamiento horizontal del centro de masa y  $R\Delta\theta$  la longitud de arco. El signo negativo se debe a que los ángulos crecen en contra de las manecillas del reloj.

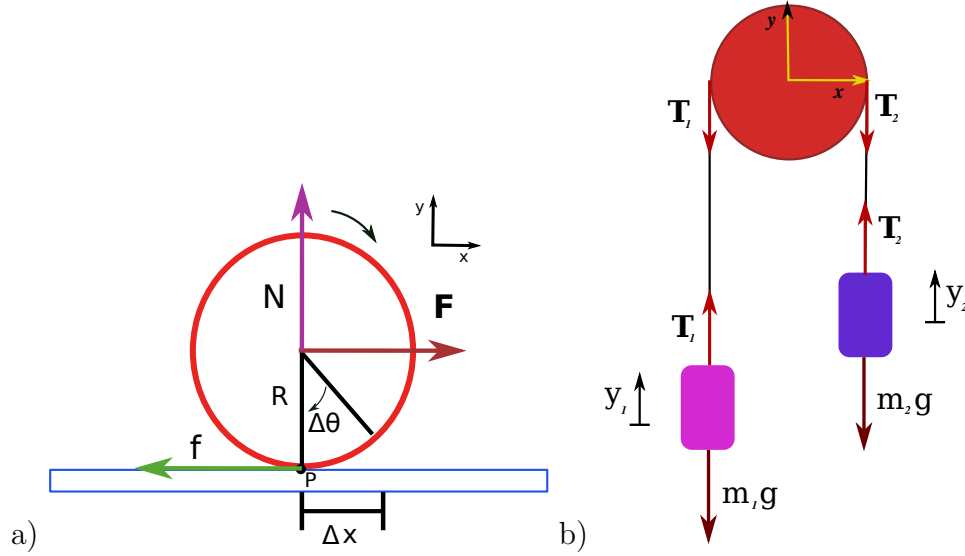


Figura 3.7: a) Diagrama de un disco que rueda sin resbalar por una superficie plana. b) Máquina de Atwood; la masa  $M$  de la polea no es despreciable.

Al dividir entre el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y al tomar el límite de éste tendiendo a cero encontramos que la condición de que la rueda no resbale es

$$V = -R\omega.$$

Con esta última ecuación se cierra el sistema de ecuaciones que tiene como solución

$$a = \frac{2F}{3m}, \quad (3.27)$$

$$f = \frac{F}{3}, \quad (3.28)$$

Investiguemos un poco la información en el teorema de trabajo y energía para este caso. Sin pérdida de generalidad suponemos que en  $t = 0$  la posición y la velocidad son cero, de las ecuaciones de movimiento acelerado uniforme tenemos que

$$\Delta \left( \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \right) = F\Delta x,$$

lo que significa que la fuerza en el punto  $P$  no hace trabajo. En otras palabras, el principio de D'Alambert en este caso toma la forma

$$(-ma + F)\delta x - I\dot{\omega}\delta\theta = 0,$$

pues la fuerza externa es  $F$  nada mas. Al usar la restricción  $\delta x = -R\delta\theta$ , se obtiene la expresión (3.27) para la aceleración del centro de masa.

Por último, estudiemos el problema de la rueda descendiendo por un plano inclinado que hace un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Note que no hay que resolver un problema nuevo, pues es el mismo problema si cambiamos la fuerza motriz  $F$  por  $mg \sin \alpha$ . Si reescribimos el teorema de trabajo y energía encontramos que

$$\Delta \left( \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \right) = mg \sin \alpha \Delta x,$$

como  $\sin \alpha \Delta x = h$  en donde  $h$  es la altura del plano inclinado obtenemos que

$$\Delta \left( \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \right) = -\Delta U$$

donde  $\Delta U = -mgh$ . Sabemos que este es el potencial gravitacional en la superficie de la tierra, por lo que encontramos que este sistema conserva a la energía mecánica. Entonces ¿por qué se gastan la llantas?

### 3.4.4. La máquina de Atwood

Como siguiente ejemplo, retomemos el problema de la máquina de Atwood que se muestra en la figura 3.7-(b), pero ahora vamos a considerar que la masa de la polea ( $M$ ) no es despreciable y gira de tal manera que la cuerda no resbala. Las ecuaciones de movimiento en este caso son

$$T_1 - m_1g = m_1a_1, \quad (3.29)$$

$$T_2 - m_2g = m_2a_2, \quad (3.30)$$

$$R(T_1 - T_2) = I\dot{\omega}, \quad (3.31)$$

$$\dot{y}_1 = -R\omega, \quad (3.32)$$

$$\dot{y}_2 = R\omega, \quad (3.33)$$

$$y_1 + y_2 = L, \quad (3.34)$$

en donde  $I$  es el momento de inercia del disco y  $\omega$  la velocidad angular de rotación de la polea. Las primeras dos ecuaciones (ecs (3.29) y (3.30)) corresponden a la segunda ley de Newton para cada masa, la ecuación (3.31) es la ecuación de torcas para la polea, dos condiciones de no deslizamiento y que la cuerda es inextensible, ecs. (3.32-3.34). La solución al sistema

anterior es de la forma

$$a_2 = -a_1, \quad (3.35)$$

$$\omega = -\frac{a_1}{R}, \quad (3.36)$$

$$a_1 = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}, \quad (3.37)$$

$$T_1 = gm_1m_2 \frac{2 + \frac{M}{2m_2}}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}, \quad (3.38)$$

$$T_2 = gm_1m_2 \frac{2 + \frac{M}{2m_1}}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}, \quad (3.39)$$

en donde se puede ver que si  $m_1$  y  $m_2$  son comparables y  $M \ll m_1$  las dos tensiones son iguales, la ecuación para torcas se reduce a la tercera ley de Newton entre los bloques, como si la polea no estuviera. Las aceleraciones van disminuyendo conforme la masa de la polea se hace más grande.

### 3.5. El teorema de trabajo y energía: rotación.

En la sección anterior encontramos que la rotación se describe a partir de tomar el producto vectorial del vector de posición con la segunda ley de Newton con lo que obtenemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau},$$

en donde  $\boldsymbol{\tau}$  es la torca. En el caso en el que el eje de rotación pasa por el centro de masa el momento angular se puede escribir como  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$  en donde  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad angular.

Para hacer más simples los cálculos, partimos de la energía cinética de rotación y tomamos su derivada temporal, es decir,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I \omega^2 \right) = I \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}},$$

sustituyendo la segunda ley para torcas en el lado derecho obtenemos que

$$\frac{dT_{rot}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau},$$

en donde  $T_{rot}$  representa a la energía cinética de rotación. Esta expresión, a partir del teorema fundamental del cálculo, se puede reescribir como

$$\int dT_{rot} = \int \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} dt.$$

Hasta aquí todo parece ser análogo al caso en donde solo consideramos la traslación. Sin embargo, este caso está restringido a que el rígido rota alrededor de un eje fijo o que pasa

por el centro de masa, en un caso más general, el momento angular y la velocidad angular no son paralelos. Así, resulta que la fuerza y el brazo de palanca son perpendiculares por lo que la torca y la velocidad angular son paralelos. Entonces, si utilizamos que  $\omega dt = d\theta$  y lo sustituimos en la expresión anterior encontramos finalmente que

$$\Delta T_{rot} = \int \tau d\theta$$

que es el teorema de trabajo y energía para la rotación. Además, como ya habíamos encontrado al estudiar el principio de trabajo virtual, el trabajo hecho por torcas tiene la forma

$$W_{rot} = \int \tau d\theta.$$

Este resultado es muy importante, pues el principio de D'Alembert es la suma del trabajo realizado por un sistema en el que las fuerzas (torcas) externas están en equilibrio con las fuerzas (torcas) inerciales. Por ejemplo, para la máquina de Atwood el principio de trabajo virtual toma la forma

$$(-m_1 a_1 - m_1 g) \delta y_1 + (-m_2 a_2 - m_2 g) \delta y_2 - I \dot{\omega} \delta \theta = 0,$$

en donde solo aparecen las fuerzas externas al sistema de partículas. Al incluir las restricciones geométricas (3.32-3.34) encontramos de manera mas directa la expresión (3.37).

### 3.6. El trabajo virtual

Para este concepto vamos a empezar con un ejemplo simple. Tenemos una pequeña cuenta que se mueve sobre un cable de forma dada debido a una fuerza  $\mathbf{F}$ , como se muestra en la figura 3.8, y buscamos calcular el trabajo de manera que debemos calcular

$$W = \int (\mathbf{F} + \mathbf{N}) \cdot d\mathbf{r},$$

en donde  $\mathbf{N}$  es la fuerza normal que hace el cable sobre la cuenta. Sin embargo, en vista que la integral se toma a lo largo de la trayectoria y que las fuerzas normales siempre son perpendiculares a ésta, el trabajo es simplemente

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

puesto que

$$\int \mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

en otras palabras la fuerza resultante de la restricción geométrica no hace trabajo.



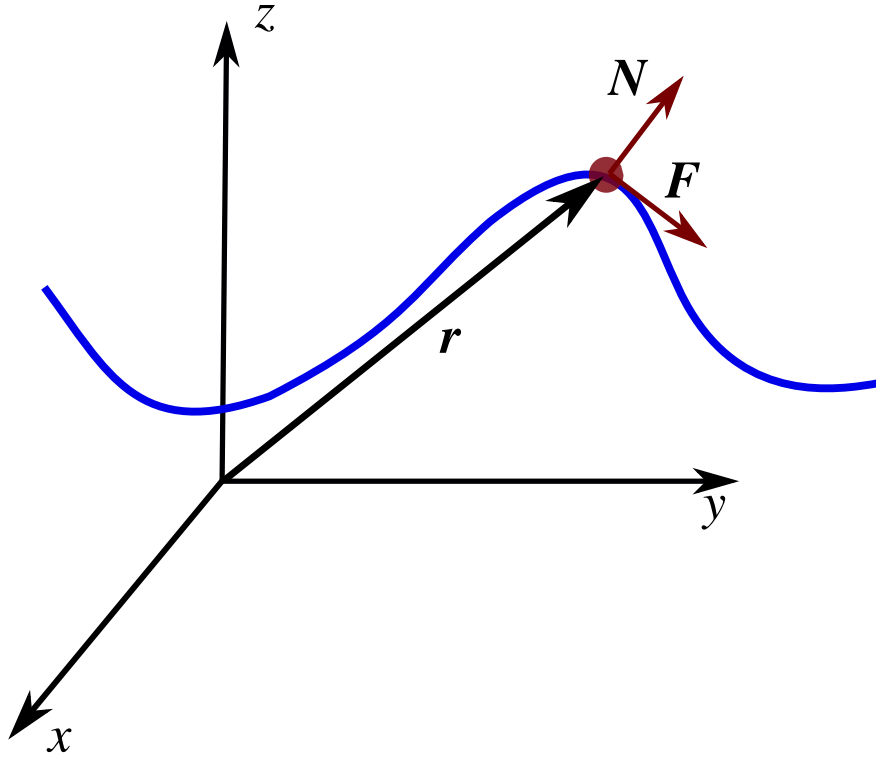


Figura 3.8: Una cuenta de masa  $m$  sujeta a una fuerza externa  $\mathbf{F}$  que está constreñida a moverse sobre un cable de forma determinada.

Ahora vamos a poner el resultado en otras palabras y en vez de usar el cálculo integral usaremos el cálculo de diferencias. Entonces, el trabajo realizado por un desplazamiento infinitesimal es de la forma

$$\delta W = (\mathbf{F} + \mathbf{N}) \cdot \delta \mathbf{r}$$

en donde se usó la  $\delta$  para denotar diferenciales, como la fuerza normal es perpendicular al desplazamiento  $\mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$ . Hasta el momento, todo es lo mismo escrito de manera diferente, pero si ahora partimos de la segunda ley de Newton para este caso

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}^* = 0$$

en donde  $\mathbf{F}^* = -m\mathbf{a}$  con  $\mathbf{a}$  la aceleración de la cuenta. Multiplicamos por el desplazamiento infinitesimal ("virtual") y obtenemos

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathbf{F}^* \cdot \delta \mathbf{r}.$$

El ejemplo más simple es un bloque en una mesa sin fricción, la ecuación anterior corresponde a la componente de la segunda ley de Newton en la dirección del movimiento, es decir, perpendicular a la mesa.

En el caso de tener un sistema de partículas, multiplicamos a la segunda ley de Newton de la  $i$ -ésima partícula por su respectivo desplazamiento “virtual congruente con las restricciones” y obtenemos

$$\left(\sum_j \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_i^*\right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (3.40)$$

en donde  $\mathbf{F}_{ij}$  son las fuerzas entre las partículas,  $\mathbf{F}_{ie}$  la fuerza externa que siente la  $i$ -ésima partícula,  $\mathbf{F}_i^* = -m\mathbf{a}_i$  y  $\mathbf{a}_i$  es su aceleración. Nótese que esto es mucho más general, pues las fuerzas entre partículas pueden ser restricciones geométricas, como el caso de la mesa, o fuerzas gravitacionales en el caso de que el sistema de partículas sea el sistema solar por ejemplo. Lo importante es que todas estas fuerzas satisfacen la tercera ley de Newton.

Toda la diferencia con los cálculos realizados para el sistema de partículas es que hemos proyectado con el desplazamiento “congruente con las restricciones geométricas” de la  $i$ -ésima partícula y ahora sumamos sobre todas las partículas con lo que obtenemos

$$\sum_i (\mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_i^*) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (3.41)$$

esta expresión se conoce como principio de D’Alembert. Este principio muestra que la aceleración del sistema sólo depende de las fuerzas externas al sistema de partículas.

### 3.6.1. Algunos ejemplos de estática

- La ley de la palanca.

Este problemas se puede ver como dos masas, de pesos  $\mathbf{W}_1$  y  $\mathbf{W}_2$ , unidas por una

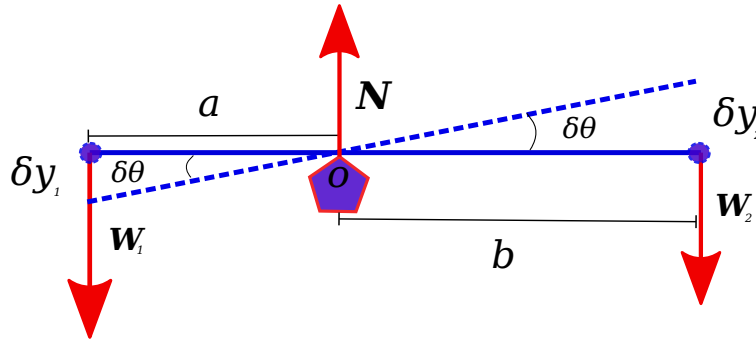


Figura 3.9: Dos partículas unidas por una barra rígida en equilibrio mecánico. Las fuerzas entre partículas no están representadas.

barra rígida de masa despreciable y pivotada en un punto  $O$ , como se muestra en la figura 3.9. Cada partícula siente la fuerza de gravedad, la fuerza en el pivote y la tensión debido a la barra.

Desde el punto de vista Newtoniano y visto como sistema de partículas las ecuaciones toman la forma

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{T}_{1b} = 0, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{W}_2 + \mathbf{T}_{2b} = 0, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{N} + \mathbf{T}_{b1} + \mathbf{T}_{b2} = 0, \quad (3.44)$$

en donde  $\mathbf{T}_{ij}$  son las tensiones entre las partículas. La tercera ecuación corresponde a la barra, que también se incluye como una tercera partícula. A este sistema hay que añadirle dos ecuaciones, correspondientes la tercera ley para las tensiones, y una restricción entre las aceleraciones. Este camino es claramente muy complicado para el resultado que buscamos.

Si aplicamos el principio D’Alambert, el trabajo realizado por un desplazamiento infinitesimal toma la forma

$$\delta W = (\mathbf{W}_1 + \mathbf{T}_{1b}) \cdot \delta \mathbf{r}_1 + (\mathbf{W}_2 + \mathbf{T}_{2b}) \cdot \delta \mathbf{r}_2,$$

el termino correspondiente a la barra desaparece pues su desplazamiento virtual es cero ya que está fijo en el espacio. En vista del principio de D’Alambert esta cantidad se debe anular, pero además, las fuerzas de interacción entre las partículas se anulan pues son perpendiculares a los desplazamientos virtuales, por lo que

$$W_1 \delta y_1 + W_2 \delta y_2 = 0, \quad (3.45)$$

de la figura 3.9 se ve que la relación entre los desplazamientos en la vertical y el desplazamiento angular es  $\delta y_1 = -a\delta\theta$  y  $\delta y_2 = b\delta\theta$  con lo que obtenemos

$$(-aW_1 + bW_2)\delta\theta = 0, \quad (3.46)$$

que se debe satisfacer para todo  $\delta\theta$  y por lo tanto

$$W_2 = \frac{a}{b}W_1.$$

que es la ley de la palanca. El caso general se encuentra cambiando el peso  $W_1$  por la magnitud de la fuerza aplicada y  $W_2$  por la magnitud de la fuerza resultante.

■ Las poleas múltiples.

El sistema de poleas se muestra en la figura 3.10-(a), la idea es calcular la fuerza que debe aplicarse en el punto  $A$  para que la masa, de peso  $W$ , se eleve a velocidad constante dado que hay  $n$  poleas. Primero utilizamos las leyes de Newton y para hacerlo más simple usamos una polea arriba y una abajo ( $n = 1$ ), como se muestra en la figura 3.10-(b). Las ecuaciones para el equilibrio son

$$-W + T_1 + T_2 = 0, \quad (3.47)$$

$$F - T_2 = 0, \quad (3.48)$$

$$T_1 - T_2 = 0, \quad (3.49)$$

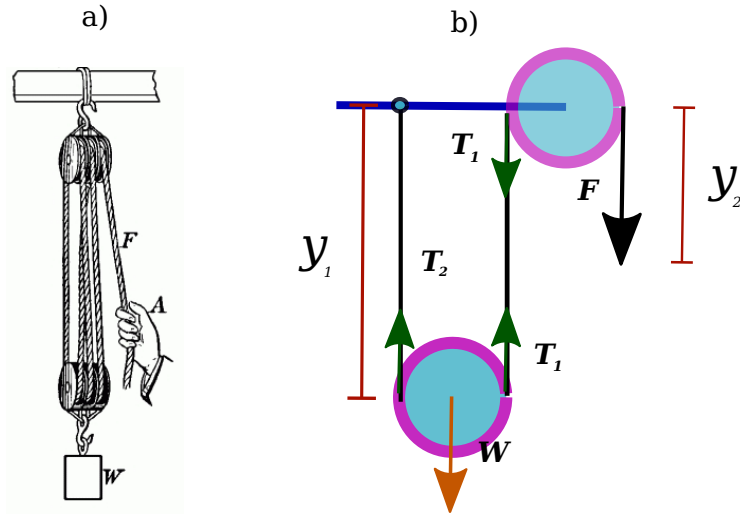


Figura 3.10: Poleas múltiples.

eliminando las tensiones se encuentra que  $F = W/2$ ; es de notar de la figura 3.10-(b) que la relación entre desplazamientos es de la forma  $2\delta y_1 = -\delta y_2$ . Sin embargo, esta información no es necesaria para resolver el caso de equilibrio, pues está contenida en las fuerzas de tensión. Para el caso de  $n$  poleas tendríamos un sistema de  $2n + 1$  ecuaciones con  $2n + 1$  incógnitas.

En cambio, el principio de D'Alembert toma la forma

$$W\delta y_1 + F\delta y_2 = 0.$$

Al jalar la cuerda una distancia  $\delta y_2$  las poleas de la parte de abajo se desplazan una distancia  $\delta y_1 = -\delta y_2/2n$ , con lo que obtenemos

$$(W - 2nF)\delta y_1 = 0,$$

que se debe satisfacer para todo  $\delta y_1$  y por lo tanto

$$F = \frac{W}{2n}.$$

Es notorio que el resultado implica que si  $n$  es muy grande, la fuerza que hay que hacer para levantar cualquier cosa es prácticamente cero. Sin embargo, hay que notar varias cosas, entre ellas que en un caso mas realista las poleas jugarían un papel más importante, como se verá más adelante.

#### ■ Las torcas

Si ahora calculamos la variación del trabajo debido a la rotación pura de un punto respecto a un eje fijo, tenemos que

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}.$$

Como el punto solo se rotó un ángulo  $\delta\theta$ , el vector de desplazamiento es perpendicular al vector de posición y tiene magnitud  $l\delta\theta$ , en donde  $l$  es la distancia al eje de rotación. Por lo tanto

$$\delta W = F_p l \delta\theta,$$

donde  $F_p$  es la componente de la fuerza perpendicular al vector de posición, como  $F_p l$  es la torca encontramos que el trabajo realizado al rotar respecto a un eje fijo es

$$W = \int \tau d\theta,$$

en donde  $\tau$  es la magnitud de la torca. Nótese, entonces, que la expresión (3.46) es el trabajo virtual hecho por las torcas medidas desde el punto  $O$ ; claramente  $\mathbf{N}$  no hace torca respecto al pivote ya que el brazo de palanca es cero. Este resultado particular anticipa uno más general en el que se demuestra que el principio de D'Alembert incluye grados de libertad de rotación.

### 3.6.2. La dinámica como problema de estática

Los ejemplos anteriores son de estática, pues la aceleración era en todos los casos cero. Para problemas de dinámica el principio se utiliza de manera similar, pues desde el sistema acelerado el problema es equivalente a un problema de estática. Vamos a aplicar, a manera de ejemplo, estas ideas a la máquina de Adwood (ver figura 3.10). Por el momento consideraremos que las masas de la cuerda y la polea son despreciables.

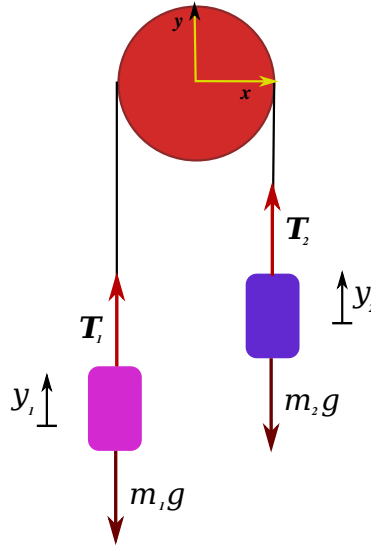


Figura 3.11: Máquina de Adwood.

Primero lo resolveremos usando las leyes de Newton, escogemos el sistema coordenado, como se muestra en la figura (3.11), realizamos el diagrama de cuerpo libre y escribimos las

ecuaciones. Como suponemos que las masas se mueven solo en la vertical tendremos

$$T_1 - m_1g = m_1a_1, \quad (3.50)$$

$$T_2 - m_2g = m_2a_2, \quad (3.51)$$

$$T_1 - T_2 = 0, \quad (3.52)$$

$$y_1 + y_2 = L, \quad (3.53)$$

en donde  $T_1$  y  $T_2$  son las tensiones,  $a_1$  y  $a_2$  son las aceleraciones verticales y  $L$  es la longitud de la cuerda. Por lo tanto, el problema resulta en un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Ahora bien, para aplicar la ecuación (3.41) a este caso observamos que hay dos desplazamientos, si la masa  $m_1$  se desplaza una distancia  $\delta y_1$  la masa  $m_2$  se desplaza  $-\delta y_2$ . Las fuerzas involucradas son las tensiones en la cuerda y el peso de cada cuerpo; las dos primeras satisfacen la tercera ley de Newton (la ecuación (3.52)), por lo que la ec. (3.41) toma la forma

$$(-m_1a_1 - m_1g)\delta y_1 + (-m_2a_2 - m_2g)\delta y_2 = 0.$$

Ahora usamos la restricción geométrica, la expresión (3.53) escrita como  $\delta y_1 = -\delta y_2$  y por lo tanto  $a_1 = -a_2$ <sup>5</sup> con lo que obtenemos

$$[-(m_1 + m_2)a_1 + (m_2 - m_1)g]\delta y_1 = 0,$$

y finalmente

$$a_1 = \frac{g(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)},$$

evidentemente, si  $m_2$  es cero,  $a_1 = -g$ . En otras palabras, para fines de conocer las aceleraciones del sistema de partículas, el problema se redujo a una ecuación con una sola incógnita.

### 3.7. Algunas notas adicionales

Las ideas antes expuestas siempre llevan a la pregunta de ¿qué es un desplazamiento virtual? Por un lado, utilizamos que en un sistema de partículas, todas las fuerzas que satisfacen la tercera ley de Newton no hacen trabajo. Pero, por el otro lado, utilizamos que los sistemas bajo estudio están en equilibrio<sup>6</sup> así que en principio el sistema, a lo más, se mueve con velocidad constante relativo al sistema desde donde se realiza la observación.

Entonces, en el caso de la ley de las palancas, partimos de un sistema que está en equilibrio (es decir  $\delta y_1$  y  $\delta y_2$  son ambos cero y la expresión (3.45) se cumple trivialmente sin dar ninguna información; véase la figura 3.9) por lo que para fines del cálculo lo representamos “ligeramente” fuera de equilibrio. Sin embargo, estrictamente hablando, el sistema mecánico

---

<sup>5</sup>Desde el punto de vista del cálculo  $\delta y$  es la diferencial por lo que la integrar  $\delta y_1 = -\delta y_2$  se obtiene la expresión (3.53).

<sup>6</sup>Recuerdese que en el caso de dinámica, el problema es de estática si viajamos en un sistema de referencia que se acelera con la misma aceleración que el centro de masa del sistema de partículas.

mantendrá su estado equilibrio mecánico siempre que no haya ningún otro agente externo que le aplique fuerzas como exige la segunda ley de Newton; una de las posibles fuentes para el nombre de “Desplazamiento Virtual” y de la notación con  $\delta$ 's, que hasta el momento solo hacen énfasis en que son desplazamientos virtuales en el sentido antes mencionado.

Ahora bien, a primera vista, podría parecer que la ecuación (3.41) se construyó de haber sumado las leyes de Newton para este sistema, multiplicada por alguna cantidad que representa los desplazamientos de cada partícula mismos que parecen un tanto arbitrarios. Este es el caso en el que las partículas no interactúan entre ellas y, en todo caso, sólo hay fuerzas externas; por ejemplo en un gas ideal. Cuando hay interacciones entre partículas, los desplazamientos virtuales no son todos independientes, lo cual, implica que en la suma de la ecuación (3.41) no se elimina término a término; como en el ejemplo de la máquina de Adwood. A esto se refiere justamente la frase de “Los  $\delta \mathbf{r}_i$  son los desplazamientos virtuales congruentes con las restricciones geométricas”.