



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Optimización experimental y de
postproceso de la técnica Background Oriented
Schlieren

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Física

PRESENTA:

Jesica Leticia González Robles

TUTOR

David Porta Zepeda

Ciudad Universitaria, CDMX, 2022





UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (Méjico).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. Carlos Málaga Iguiñiz
Secretario (TUTOR):	M. en I. David Porta Zepeda
Vocal (EXTERNO):	Dr. Gabriel Ascanio Gasca
1° Suplente:	Dr. Carlos Echeverría Arjonilla
2° Suplente:	Dr. Pablo Luis Rendón Garrido

Dedicatoria

A mis papás, mi más grande ejemplo y admiración.

Agradecimientos

Agradezco el apoyo de DGAPA UNAM a través del proyecto PAPIME #PE111020.

A mi director de tesis David Porta y a Carlos Echeverría por su apoyo, sus enseñanzas, aportaciones y tiempo invertido en cada junta para discutir todos los aspectos de este trabajo.

Al Dr. Florian Raudies por haber respondido mis dudas con respecto al algoritmo de flujo óptico. Asimismo, al Dr. Owen Williams, por brindarme la oportunidad de trabajar en su laboratorio y poder adaptar la optimización presentada en este trabajo para el estudio de flujos de retropropulsión supersónica.

A la Facultad de Ciencias, por haber sido mi segundo hogar durante estos años, retarme y capacitarme con una educación de la más alta calidad. A la UNAM, por permitirme conocer tantas personas distintas, por darme la oportunidad de realizar movilidad académica y trabajar en proyectos multidisciplinarios tanto dentro como fuera de México.

A mis papás, por impulsarme a buscar desarrollarme de manera integral y enseñarme que la constancia y perseverancia son claves para lograr cualquier objetivo que me proponga. Asimismo, por enseñarme a valorar cada oportunidad y empoderarme a seguir mis sueños. A mi hermano David, quien cada día me enseña de aquellas cosas que me cuestan trabajo y me comparte sus distintas perspectivas del mundo a mi alrededor.

A mi familia, por siempre estar de alguna u otra forma presentes apoyándome en cada paso que doy.

A Eder Vázquez, por impulsarme y motivarme durante cada proyecto que decido comenzar, por ayudar a enfocarme, por creer en mí, por escucharme y ayudarme a mantener mi equilibrio físico y mental a lo largo de este tiempo.

A Rafael y Vania, quienes se convirtieron también en parte de mi familia desde mi estancia en Alemania. A Fernanda De Luna, por su incondicional apoyo y cariño desde hace casi 10 años.

A mis amigos de la carrera, con quienes tuve la fortuna de atravesar los días buenos y malos durante este tiempo, así como brindarme un espacio para compartir nuestro amor por la física.

Y a todos los que me he encontrado en el camino que me han brindado su apoyo aún sin conocerme, a aquellos que me han inspirado y han aportado profesional y personalmente a este camino.

ÍNDICE

SIGLAS	1
NOMENCLATURA	1
LISTA DE TABLAS Y FIGURAS.....	2
RESUMEN Y OBJETIVOS	4
1 INTRODUCCIÓN.....	5
1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LAS TÉCNICAS DE MEDICIÓN.....	5
1.2 PROBLEMÁTICA.....	7
1.3 OBJETIVOS	8
1.4 TÉCNICAS SHADOWGRAPH Y SCHLIEREN.....	8
1.4.1 <i>Desviación de la luz en un medio</i>	8
1.4.2 <i>Técnica Shadowgraph</i>	11
1.4.3 <i>Técnica Schlieren</i>	13
2 TÉCNICA BOS	16
2.1 ECUACIÓN DE GLADSTONE-DALE.....	18
2.2 ECUACIÓN DE POISSON	20
2.3 ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE DESPLAZAMIENTOS	20
2.3.1 <i>Correlación cruzada</i>	20
3 VISIÓN COMPUTACIONAL	23
3.1 FLUJO ÓPTICO.....	24
3.2 TRABAJOS ANTERIORES	26
3.3 ALGORITMO DE HORN Y MÉTODOS VARIACIONALES.....	28
3.3.1 <i>Propuesta de escalamiento</i>	33
3.3.2 <i>Validación del algoritmo con escalamiento</i>	38
4 DESARROLLO EXPERIMENTAL.....	48
4.1 PATRÓN DE FONDO	48
4.1.1 <i>Tamaño de los puntos</i>	48
4.1.2 <i>Densidad de puntos</i>	49
4.2 SISTEMA ÓPTICO Y CAPTURA DE IMÁGENES	51
4.2.1 <i>Gas de encendedor</i>	53
4.2.2 <i>Distribución de puntos en el patrón de fondo</i>	54
4.2.3 <i>Gas de soplete</i>	58
4.3 PREPROCESAMIENTO DE IMÁGENES.....	59
4.4 ALGORITMO DE FLUJO ÓPTICO-BOS	60
5 RESULTADOS Y ANÁLISIS	62
5.1 GAS DE ENCENDEDOR.....	62
5.2 GAS DE SOPLETE.....	68
6 CONCLUSIONES	78
7 TRABAJO A FUTURO	80
BIBLIOGRAFÍA	82
APÉNDICES	84
A. CÓDIGO DESCARGABLE DE LA OPTIMIZACIÓN	84

B.	RUTINAS USADAS EN LA OPTIMIZACIÓN	84
	<i>Creación de un patrón cuadricular</i>	84
	<i>Rutina Flujo Óptico – BOS</i>	85
	<i>Estimación del flujo óptico 2D</i>	88
	<i>Rutina de escalamiento</i>	92
C.	DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE PARA FLUJO ÓPTICO	96

Siglas

BOS	Background Oriented Schlieren (Schlieren con un Fondo como Referencia).
DCC	Direct Cross-Correlation (Correlación Cruzada Directa).
DFT	Direct Fourier Transform (Transformada de Fourier Directa).
FFT	Fast Fourier Transform (Transformada Rápida de Fourier).
CFD	Computational Fluid Dynamics (Dinámica de Fluidos Computacional).
PIV	Particle Image Velocimetry (Velocimetría de Imágenes de Partículas).
FO	Flujo Óptico.
CC	Correlación Cruzada.
DOF	Depth Of Field (Profundidad de Campo).
SOR	Successive Over Relaxation Method (Método de Sobre Relajación Sucesiva).

Nomenclatura

M	Número de Mach.
ε	Ángulo de desviación de la luz al atravesar un medio.
Z_p	Distancia del gradiente de densidad a la pantalla [m].
n_0	Índice de refracción del medio que rodea el fenómeno.
n	Índice de refracción.
$\frac{\Delta I}{I_k}, \frac{\Delta I}{I_0}$	Contraste en la imagen.
C	Función de correlación cruzada.
F	Distancia Focal [m].
G	Constante de Gladstone-Dale.
a_k	Distancia que un rayo de luz viaja al no ser obstruido por el filo de la navaja. [m]
h	Espesor del gradiente de índice de refracción.
M_{ag}	Magnificación.
Z_D	Distancia del patrón de fondo al gradiente de índice de refracción [m].
z	Dirección de propagación de la luz [m].
x	Dirección horizontal del gradiente de densidad [m].
y	Dirección vertical del gradiente de densidad [m].
u	Velocidad de un flujo en la dirección x [m/s].
v	Velocidad de un flujo en la dirección y [m/s].
(i, j)	Coordenadas del pico de correlación [pixeles].
ρ	Densidad [$\frac{kg}{m^3}$].
ξ	Distancia entre un rayo de luz sin desviar y el rayo desviado en BOS.
Δy	Distancia entre dos rayos de luz incidentes en un <i>Shadowgraph</i> .
$\Delta y'$	Distancia entre dos rayos de luz desviados en un <i>Shadowgraph</i> .
$f(x, y, t)$	Función escalar de intensidad en la escala de grises de la imagen.
α	Parámetro de suavizado en el algoritmo de flujo óptico.
$val(i)$	Valor correspondiente al dato i del conjunto de desplazamientos resultantes de flujo óptico.
$n_{intervalo}$	Número de intervalos de tamaño 0.1px correspondiente al valor de flujo óptico.
f	Factor de escala.
s	Escala entre los datos de flujo óptico y correlación cruzada.

Lista de Tablas y Figuras

<i>Tabla 1. Valores de los parámetros requeridos para el cálculo de densidad e índice de refracción</i>	64
<i>Tabla 2. Orden de magnitud de los parámetros utilizados considerados en el experimento.....</i>	76
<i>Figura 1. Diagrama del ángulo de desviación de dos rayos $\Delta\epsilon$ al atravesar un medio con un gradiente de índice de refracción en la dirección y.....</i>	9
<i>Figura 2. Desplazamiento de los rayos de luz incidentes en la técnica de visualización Shadowgraph. Δy es la distancia entre dos rayos separados que atraviesan el medio, ϵ es el ángulo de desviación de los rayos consecuencia del gradiente del índice de refracción, $\Delta y'$ es la distancia en la pantalla entre los dos rayos después de haber sido refractados y Z_p es la distancia de la región de estudio a la pantalla.</i>	11
<i>Figura 3. Diagrama de rayos en un sistema Schlieren. Una porción de los rayos que atraviesan la lente es bloqueada por el filo de la navaja, impidiendo su paso hacia la pantalla y generando regiones oscuras en la imagen.</i>	14
<i>Figura 4. Diagrama de formación de imágenes en un sistema BOS. Los rayos de luz iluminan el patrón de fondo y atraviesan el gradiente de densidad, el cual hace que los rayos se refracten e incidan en una posición distinta a la trayectoria original en el sensor de la cámara.</i>	16
<i>Figura 5. Patrón de fondo con puntos aleatorios de tamaño 3px y desplazamiento máximo de 2 px. Imagen de 234 x 233 px: a) imagen de referencia, b) imagen con patrón desplazado.....</i>	29
<i>Figura 6. Comparación de desplazamientos en: a) la dirección x (U) y b) la dirección y (V) obtenidos mediante flujo óptico (FO) y correlación cruzada (CC) para el patrón con desplazamientos lineales.....</i>	30
<i>Figura 7. Patrón con vórtice de Rankine generado en PIVLab. a) Campo de desplazamientos y columna central de análisis (indicada en color rojo). b) Comparación de desplazamientos en la dirección x a lo largo de la columna de análisis obtenidos mediante flujo óptico (FO) y correlación cruzada (CC).</i>	32
<i>Figura 8. Diagrama del proceso de escalamiento propuesto para los desplazamientos resultantes de flujo óptico. Para llevar a cabo el escalamiento, es indispensable contar con los desplazamientos resultantes del análisis de correlación cruzada, ya que éstos sirven como referencia.</i>	37
<i>Figura 9. Campo vectorial de desplazamientos resultantes de: a) correlación cruzada y b) flujo óptico.</i>	38
<i>Figura 10. Valores resultantes del análisis de correlación cruzada (CC) y flujo óptico (FO) sin escalamiento para: a) desplazamientos en la dirección x (U) y b) desplazamientos en la dirección y (V).</i>	39
<i>Figura 11. Comparación de valores para los desplazamientos en la dirección y con distinto factor de escala. a) $f = 0.1$, b) $f = 0.2$, c) $f = 0.4$ y d) $f = 0.6$.....</i>	40
<i>Figura 12. Error absoluto medio en los valores de: a) U y b) V para distintos factores de escala.....</i>	41
<i>Figura 13. Magnitud de los desplazamientos en: a) U y b) V después de aplicar la escala a los datos originales de flujo óptico con un factor de escala $f = 0.4$.</i>	42
<i>Figura 14. Campo escalar de densidad obtenido del análisis de: a) flujo óptico y b) correlación cruzada para un flujo supersónico.</i>	44
<i>Figura 15. Campo escalar de índice de refracción obtenido del análisis de: a) flujo óptico y b) correlación cruzada para un flujo supersónico.</i>	45
<i>Figura 16. Comparación de los valores de densidad con respecto a la distancia resultado de: a) análisis de flujo óptico y b) análisis de correlación cruzada. Densidad del aire = 1.204 kgm^{-3}.....</i>	46

<i>Figura 17. Patrón con 60,000 partículas. Campo de desplazamientos resultante de correlación cruzada para el patrón de puntos con desplazamientos lineales. a) Un pase con ventana de 64 x 64 px, paso de 32 px. b) Dos pases con ventanas de 64 x 64 px y 32 x 32 px con 50% de sobreposición. c) Tres pases con ventanas de 64 x 64 px, 32 x 32 px y 16 x 16 px con un 50% de sobreposición.</i>	50
<i>Figura 18. Patrón con 600,000 partículas. Campo vectorial de desplazamientos para el análisis de correlación cruzada utilizando dos pases con ventanas de 32 x 32 y 16 x 16 con un 50% de sobreposición.</i>	51
<i>Figura 19. Distribución de puntos en el patrón de fondo: a) puntos en cuadrícula y b) puntos en posiciones aleatorias.</i>	54
<i>Figura 20. Campo de desplazamientos para el gas de un encendedor con patrón de fondo: a) con puntos aleatorios y b) con puntos en cuadrícula.</i>	55
<i>Figura 21. Diagrama del montaje experimental para la técnica de Schlieren con un Fondo de Referencia: a) vista lateral y b) vista aérea.</i>	56
<i>Figura 22. Fotos del montaje experimental para la técnica de Schlieren con un Fondo de Referencia: a) vista lateral y b) vista aérea.</i>	57
<i>Figura 23. Fotografía del patrón de Moiré sobre una de las imágenes a analizar.</i>	59
<i>Figura 24. Algoritmo general de flujo óptico-BOS para el análisis de un par de imágenes.</i>	61
<i>Figura 25. Campo vectorial de desplazamientos. a) Correlación cruzada y b) Flujo óptico. La coordenada (0,0) de la imagen se encuentra en la esquina superior izquierda.</i>	62
<i>Figura 26. Comparación de los desplazamientos con respecto a: a) dirección x y b) dirección y.</i>	63
<i>Figura 27. Campo escalar de: a) densidad y b) índice de refracción para el gas de un encendedor. Análisis realizado mediante el algoritmo de flujo-óptico-BOS.</i>	66
<i>Figura 28. Campo escalar de: a) densidad y b) índice de refracción para el gas de un encendedor. Análisis realizado mediante correlación cruzada (PIVLab).</i>	67
<i>Figura 29. Campo vectorial de desplazamientos. a) Correlación cruzada y b) Flujo óptico. La boquilla del soplete se ubicó en la zona inferior, fuera del área de la imagen.</i>	69
<i>Figura 30. Comparación de los valores de los desplazamientos en: a) dirección x y b) dirección y.</i>	70
<i>Figura 31. Campo escalar de desplazamientos obtenidos mediante el análisis de flujo óptico en: a) dirección x y b) dirección y.</i>	70
<i>Figura 32. Campo escalar de densidad para el gas de un soplete. Análisis realizado mediante el algoritmo de: a) flujo-óptico-BOS y b) correlación cruzada.</i>	72
<i>Figura 33. Campo escalar de índice de refracción para el gas de un soplete. Análisis realizado mediante el algoritmo de: a) flujo-óptico-BOS y b) correlación cruzada.</i>	73

Resumen y Objetivos

Desde su creación, la técnica *Background Oriented Schlieren* (BOS) se ha desarrollado para ser cada vez más certera para la medición de campos de densidad completos. De esta forma, la técnica BOS tiene un gran potencial de complementar a otras técnicas de visualización de fluidos en el estudio de diversos fenómenos. En la actualidad, existe una necesidad cada vez mayor de contar con datos experimentales de alta calidad para la validación de simulaciones numéricas (CFD) y la mejora de modelos fisicomatemáticos de flujos complejos. En particular, en el Taller de Hidrodinámica y Turbulencia de la Facultad de Ciencias de la UNAM, se han realizado medidas de la densidad como función de la posición, dentro de un flujo supersónico utilizando la técnica BOS (Porta, 2015). Sin embargo, existen múltiples detalles de la técnica que no han sido explorados o resueltos, particularmente aquellos relacionados al incremento en la resolución espacial de la técnica. Es por ello que hay un creciente interés por optimizar la técnica BOS.

El objetivo principal de este trabajo es optimizar la técnica *Background Oriented Schlieren* mediante la implementación de técnicas de visión computacional para el procesamiento de imágenes. De esta forma, se busca incrementar la resolución espacial de los datos resultantes. Primero se introducen algunas de las técnicas de medición de densidades en gases, después se introduce la técnica BOS y posteriormente se describe la visión computacional, en particular los algoritmos de flujo óptico. Ya que los algoritmos de flujo óptico están diseñados esencialmente para la detección de movimientos en una imagen sin considerar la magnitud de los desplazamientos, en este trabajo se presenta una propuesta de escalamiento para obtener resultados cuantitativos del análisis de estos desplazamientos. En este sentido, se presenta la validación de dicho escalamiento con el flujo supersónico previamente estudiando en el Taller de Hidrodinámica y Turbulencia de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Además, en este trabajo se presenta una adaptación del montaje experimental para llevar a cabo la técnica BOS con material casero. Con el fin de demostrar el funcionamiento de la optimización propuesta en este trabajo, se presentan los resultados obtenidos del estudio del gas de un encendedor y del gas proveniente de un soplete convencional.

Finalmente, se discuten las diferencias entre los resultados obtenidos mediante el análisis de flujo óptico y el análisis de correlación cruzada, tanto en términos de resolución espacial, como en tiempo de cómputo.

1 INTRODUCCIÓN

Una de las propiedades físicas fundamentales para caracterizar un sistema es la densidad. Ésta depende de la presión, temperatura y concentración del sistema u objeto de estudio. Un ejemplo de ello es el agua a distintas presiones y temperaturas en una turbomáquina, en donde es esencial conocer los cambios que experimenta el fluido en cuestión (Schobeiri, 2012).

Contar con datos cuantitativos de densidad es esencial tanto para aplicaciones en la industria, como para la investigación científica. En este sentido, los valores de densidad permiten expandir el entendimiento de la física subyacente en un determinado fenómeno y sirve como término fuente para los trabajos de simulaciones.

En esta sección se presentan algunas de las técnicas usadas para medir densidades en gases, así como las problemáticas que surgen al medir dicha propiedad. Asimismo, se introduce a las técnicas no intrusivas y cualitativas para la obtención de densidades en gases, tal como lo son la técnica *Shadowgraph* y la técnica *Schlieren*.

1.1 Antecedentes históricos de las técnicas de medición

La primera técnica de medición de densidades data alrededor del año 250 A.C., cuando el matemático, físico y astrónomo Arquímedes se dio a la tarea de identificar si la corona del rey de Siracusa estaba compuesta totalmente de oro. Para ello, sumergió la corona y un lingote de oro del mismo peso que la corona en un recipiente con agua. Como resultado, encontró que la corona desplazó un mayor volumen de agua que el lingote de oro. Debido a que la plata tiene menor densidad que el oro, entonces se necesita un mayor volumen de ésta para igualar el peso, por lo que el resultado del experimento implicó que la corona no estaba compuesta completamente de oro.

A lo largo de los años, se han desarrollado diferentes técnicas para medir densidades en gases. Algunas de ellas son: técnicas de velocidad del sonido, técnicas de expansión y densímetros basados en tubos oscilantes y flotabilidad (Atilhan y Aparicio, 2012).

La técnica basada en la velocidad del sonido permite estudiar las propiedades termodinámicas de líquidos, gases y sólidos de componentes puros y mezclas. Esto se realiza mediante la correlación de la velocidad del sonido con las propiedades termodinámicas de interés, lo cual permite obtener valores de densidad y los factores de compresibilidad correspondientes.

Otra de las técnicas usadas para medir densidades es la de expansión, la cual hace uso de dos celdas para contener el gas. Inicialmente, el gas es contenido en la primera celda, para después ser expandido hacia la segunda celda. Se mide la presión y temperatura del gas antes y después de su expansión y se calcula la razón entre el volumen inicial y el final. Dicha razón también corresponde a la razón entre la densidad inicial y la final.

Por otro lado, los densímetros de tubo oscilante son un sistema en donde se pone en contacto un tubo con el fluido que se está estudiando y se determina la frecuencia de oscilación de dicho elemento. Posteriormente, se relaciona la frecuencia de oscilación con la densidad del fluido. Esta técnica provee mediciones en un corto tiempo, sin embargo, para mantener la certidumbre de las mediciones, es necesario realizar calibraciones recurrentes y compensar por los efectos de cambios de temperatura y presión en el tubo.

Por último, los densímetros basados en la flotabilidad utilizan el principio de Arquímedes. En esta técnica, un objeto se suspende de un alambre en una balanza y el fluido de interés se mantiene en un recipiente de presión a temperatura constante. Después, se ingresa el objeto al recipiente y se mide la pérdida aparente en el peso del objeto, que es igual al peso del fluido desplazado.

En ocasiones se miden densidades a partir de tablas o curvas de vapor saturado. Dichas curvas de vapor saturado son una representación gráfica de las propiedades termodinámicas del agua y el vapor (temperatura, presión, entalpía y calor específico) y hacen referencia al vapor en un determinado punto de saturación (punto de ebullición). En este punto, el líquido y el vapor coexisten en la misma temperatura y presión. La densidad se calcula en función de la temperatura y la presión como el inverso del volumen específico de una sustancia (m^3/kg), siendo éste el volumen por unidad de masa de la sustancia (Connor, 2019).

Para elegir una técnica de medición de densidades, es necesario considerar el intervalo de presión y temperatura del objeto de estudio, la incertidumbre de la técnica, el tiempo que se requiere para obtener cada medición, así como la facilidad de operación y mantenimiento de la técnica.

1.2 Problemática

Las técnicas de medición de densidades en gases mencionadas anteriormente permiten caracterizar, en su mayoría, una muestra de un determinado gas o mezcla de gases. Sin embargo, en dichas técnicas primero se caracteriza el gas y luego se utiliza, lo cual no garantiza que las características obtenidas anteriormente sean iguales una vez iniciado el fenómeno de estudio. En mecánica de fluidos es crucial poder realizar mediciones de los fenómenos de interés sin perturbarlos, por lo que la obtención de valores de densidad se convierte en una tarea compleja.

Además, todos los fluidos son compresibles y únicamente se consideran incompresibles (densidad constante) bajo ciertas circunstancias. En la mayoría de los casos, la densidad de los fluidos de estudio varía dependiendo de la presión y temperatura. Algunos ejemplos son las ondas de choque generadas por explosiones o en los flujos compresibles. Un flujo se considera compresible cuando los cambios de densidad son significativos, esto en general se considera cuando el número de Mach es grande ($M \geq 0.3$) (Echeverría A., 2013; M. White, 2016; Kundu et al., 2016). En este régimen, las técnicas convencionales para medir la densidad fallan.

Por otro lado, para estudiar a los fluidos se hace uso de las ecuaciones de Navier-Stokes y de la correspondiente relación de estado, la cual depende de las propiedades del fluido bajo estudio. Las ecuaciones de Navier-Stokes en general no se pueden resolver analíticamente y se hacen simplificaciones para poder resolverlas. En particular, al estudiar flujos compresibles, se necesita conocer el valor de la densidad adicionalmente a de las velocidades y presión.

1.3 Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es optimizar la técnica no-intrusiva de medición de densidades en gases *Background Oriented Schlieren* (BOS por sus siglas en inglés), mediante la implementación de técnicas de visión computacional para el procesamiento de imágenes. Se presenta una propuesta de escalamiento para la magnitud de los desplazamientos obtenidos a través de un algoritmo de flujo óptico, con el fin de obtener resultados cuantitativos del campo escalar de densidad e índice de refracción acordes al fenómeno de estudio. En este sentido, se presenta la validación de dicho escalamiento con el flujo supersónico previamente estudiando en el Taller de Hidrodinámica y Turbulencia de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Adicionalmente, se tiene como objetivo el estudio de dos sistemas: el gas de un encendedor y el gas de un soplete convencional, ambos de butano, mediante el análisis de los campos de densidad e índice de refracción obtenidos de la optimización de la técnica BOS.

1.4 Técnicas Shadowgraph y Schlieren

Las técnicas *Shadowgraph* y *Schlieren* son sistemas ópticos que permiten estudiar un fluido de forma cualitativa y no intrusiva. Esto se realiza mediante el análisis de la desviación de los rayos de luz producida al atravesar un medio translúcido cuyo índice de refracción es función de la posición.

1.4.1 Desviación de la luz en un medio

Con el fin de encontrar una expresión para el ángulo de desviación de los rayos, a continuación se presenta el planteamiento geométrico de la desviación de un haz de luz que viaja en la dirección z y que atraviesa un medio translúcido cuyo índice de refracción varía (por conveniencia) en la dirección y .

Si se tienen dos rayos que entran en dos posiciones distintas y y $y + \Delta y$, entonces la distancia que recorre la luz en el medio es función de la posición, es decir, $z = z(y)$.

Asumiendo que el haz se desvía muy poco al atravesar el medio, entonces la distancia recorrida por el haz que entra en la posición y en un tiempo ΔT está dada por (Goldstein y Kuehn, 1996):

$$\Delta z(y) = \frac{c}{n} \Delta T \quad (1)$$

$$\Rightarrow n \Delta z = c \Delta T \quad (2)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y n es el índice de refracción del medio.

De la Figura 1 se observa que: $z(y) = \overline{AC}$, $z(y + \Delta y) = \overline{DE}$ y $\Delta_2 z = \overline{BC}$. Se tiene como objetivo encontrar la relación entre la distancia $\Delta_2 z$ y el índice de refracción (Porta, 2013).

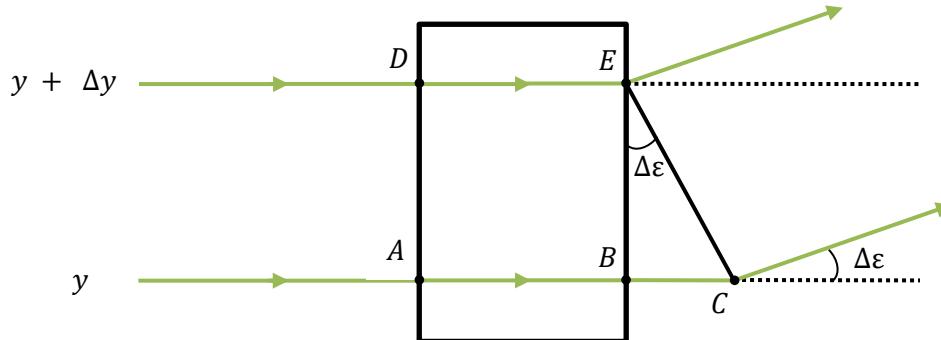


Figura 1. Diagrama del ángulo de desviación de dos rayos $\Delta\epsilon$ al atravesar un medio con un gradiente de índice de refracción en la dirección y .

De la Figura 1 se tiene que:

$$\Delta_2 z = \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{DE} = \Delta z(y) - \Delta z(y + \Delta y) \quad (3)$$

Si se divide la Ec. (3) entre Δy , se obtiene la definición de la derivada:

$$\frac{\Delta_2 z}{\Delta y} = \frac{-(\Delta z(y + \Delta y) - \Delta z(y))}{\Delta y} \quad (4)$$

Sustituyendo las Ec. (1) y (2) en la Ec. (4) se llega a:

$$\frac{\Delta_2 z}{\Delta y} = -\frac{1}{\Delta y} \left(\left(\frac{c}{n} + \frac{c}{\Delta n} \right) - \frac{c}{n} \right) = -\frac{1}{\Delta y} \left(\frac{c}{\Delta n} \Delta T \right) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_2 z}{\Delta y} = -\frac{\Delta \left(\frac{1}{n} \right)}{\Delta y} c \Delta T = -\frac{\Delta \left(\frac{1}{n} \right)}{\Delta y} n \Delta z \quad (6)$$

Por otro lado, considerando ángulos de desviación $\Delta\varepsilon$ pequeños:

$$\Delta\varepsilon \approx \tan \Delta\varepsilon = \frac{\Delta_2 z}{\Delta y} \quad (7)$$

$$\therefore \Delta\varepsilon = -\frac{\Delta \left(\frac{1}{n} \right)}{\Delta y} n \Delta z \quad (8)$$

Cuando $\Delta y \rightarrow 0$ y $\Delta z \rightarrow 0$, la ecuación anterior se convierte en la diferencial:

$$d(\varepsilon) = -n \frac{\partial \left(\frac{1}{n} \right)}{\partial y} dz \quad (9)$$

$$\therefore d(\varepsilon) = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dz = \frac{\partial (\ln n)}{\partial y} dz \quad (10)$$

Para desviaciones pequeñas, el ángulo de desviación del haz de luz corresponde a la pendiente del haz $\frac{\partial y}{\partial z}$, entonces:

$$d(\varepsilon) = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \quad (11)$$

Si el ángulo se mantiene pequeño, entonces la expresión anterior es válida a lo largo del camino óptico del haz al atravesar el medio. Por lo tanto, si el haz entra al gradiente de índice de refracción a un ángulo cero, el ángulo de salida del haz estará dado por (Goldstein y Kuehn, 1996):

$$\varepsilon = \int \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dz \quad (12)$$

donde la integral considera todo el camino que recorre el haz de luz en el medio con gradientes de índice de refracción.

1.4.2 Técnica Shadowgraph

La técnica *Shadowgraph* es un método de visualización de fluidos desarrollado alrededor del año 1672 por Robert Hook (Settles, 2001). Esta técnica es considerada una de las más simples para visualizar flujos compresibles, puesto que únicamente se necesita una fuente de luz que ilumine al fenómeno de interés, como se muestra en la Figura 2.

Los rayos que atraviesan al objeto de estudio son refractados un cierto ángulo ε debido al cambio en el índice de refracción de la región de estudio, como se describió en la sección anterior. Como resultado, los rayos llegan al otro extremo en posiciones distintas.

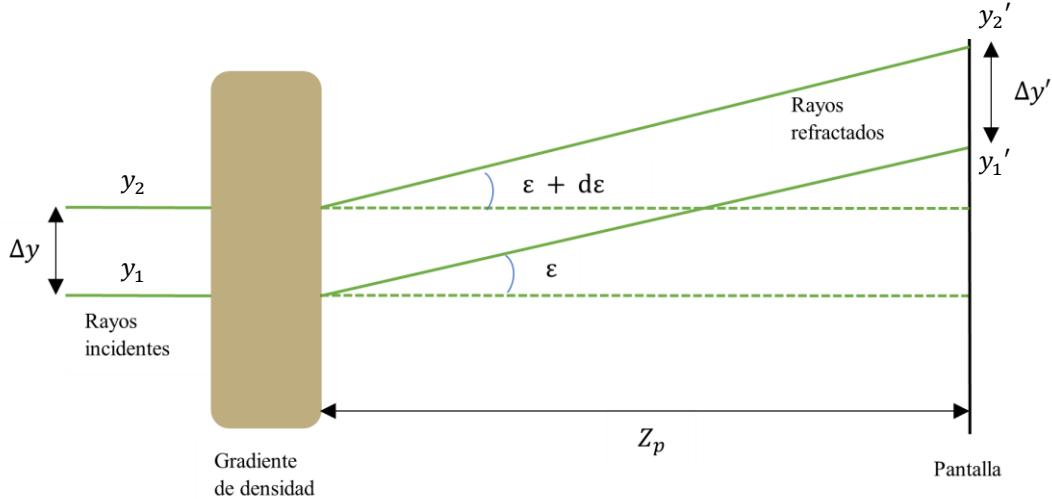


Figura 2. Desplazamiento de los rayos de luz incidentes en la técnica de visualización *Shadowgraph*. Δy es la distancia entre dos rayos separados que atraviesan el medio, ε es el ángulo de desviación de los rayos consecuencia del gradiente del índice de refracción, $\Delta y'$ es la distancia en la pantalla entre los dos rayos después de haber sido refractados y Z_p es la distancia de la región de estudio a la pantalla.

El cambio de posiciones aparentes de los rayos en la pantalla produce sombras debido a que hay rayos que ya no llegan a formar parte de la imagen. Así, la intensidad en la pantalla I_p se modifica y se relaciona con la intensidad de los rayos incidentes I_0 de la siguiente forma:

$$I_p = \frac{\Delta y}{\Delta y'} I_0 \quad (13)$$

Sean y_1, y_2 las coordenadas en donde los rayos inciden en el gradiente de índice de refracción y y'_1, y'_2 las coordenadas de llegada a la pantalla, entonces:

$$y'_1 = Z_p \tan(\varepsilon) \approx Z_p \quad (14)$$

$$y'_2 = Z_p \tan(\varepsilon + d\varepsilon) \approx Z_p (\varepsilon + d(\varepsilon)) \quad (15)$$

$$\therefore \Delta y' = \Delta y + \delta y = \Delta y + Z_p \tan(d\varepsilon) = \Delta y + Z_p d(\varepsilon) \quad (16)$$

Como se mencionó anteriormente, la diferencia en la posición de los rayos en la pantalla produce sombras, las cuales se observan como un contraste en la imagen. Sea ΔI la diferencia entre la intensidad de los rayos en la pantalla (rayos refractados) y la intensidad de los rayos incidentes, dicho contraste $\frac{\Delta I}{I_0}$ está dado por:

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{I_p - I_0}{I_0} = \frac{\Delta y}{\Delta y'} - 1 \quad (17)$$

Suponiendo que $Z_p d\varepsilon \ll \varepsilon$, entonces:

$$\frac{\Delta I}{I_0} \approx -Z_p \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \quad (18)$$

Sustituyendo la Ec. (12) en la Ec. (18) y considerando el camino total que atraviesa la luz en el volumen del objeto de estudio, se obtiene la expresión final para el contraste en la imagen (Porta, 2013):

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \pm \frac{Z_p}{n_0} \int \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} dz \quad (19)$$

donde n es el índice de refracción del objeto de estudio y n_0 es el índice de refracción del medio circundante sin perturbaciones.

1.4.3 Técnica Schlieren

La necesidad de contar con una mayor sensibilidad al visualizar fluidos se incrementó con el estudio de fenómenos con velocidades cercanas o mayores a las del sonido en el aire. En 1864, el físico alemán August Toepler fue el primero en estudiar la naturaleza de las ondas de choque mediante el desarrollo de la técnica *Schlieren*.

El arreglo experimental de esta técnica es similar al de la técnica *Shadowgraph*, sin embargo, requiere de elementos adicionales como lo son una lente y una navaja (Figura 3). Esto constituye una de las principales limitaciones de la técnica *Schlieren*, ya que el tamaño de lo que es posible ver depende de la óptica, lo que en su mayoría deriva en la necesidad de utilizar óptica especializada y costosa.

En la Figura 3 se muestra el diagrama de rayos en un sistema *Schlieren*. Los rayos paralelos que atraviesan al objeto de estudio son desviados y llegan a una lente, en cuyo foco se coloca el filo de una navaja para bloquear el paso de ciertos rayos de luz. Como resultado, aquellas áreas del objeto en donde la desviación de rayos haya sido mayor, se verán más oscuras en la imagen. Dicho contraste será proporcional al gradiente del índice de refracción en la dirección perpendicular a la navaja (Settles, 2001).

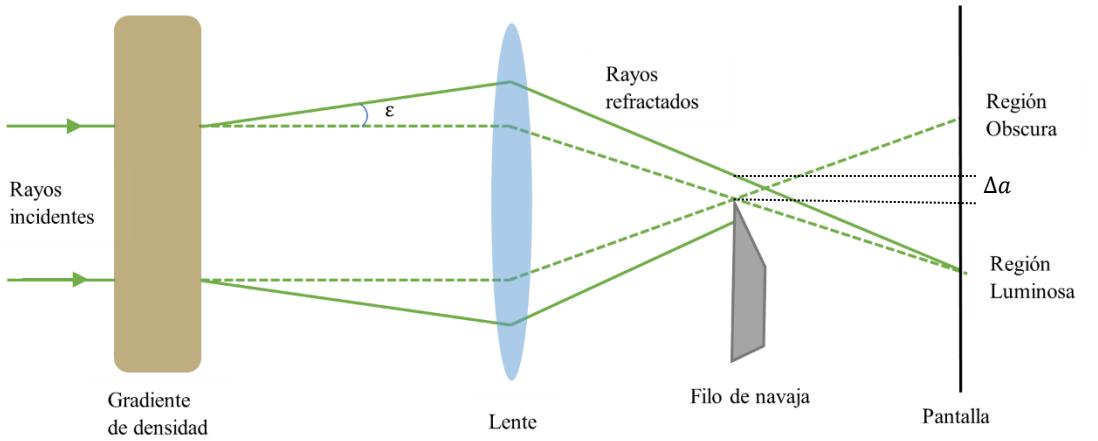


Figura 3. Diagrama de rayos en un sistema Schlieren. Una porción de los rayos que atraviesan la lente es bloqueada por el filo de la navaja, impidiendo su paso hacia la pantalla y generando regiones oscuras en la imagen.

Considerando a_0 como el diámetro de un haz incidente con intensidad inicial I_0 y a_k como la parte vertical del haz que no es bloqueada por el filo de la navaja, entonces la intensidad de luz I_k que se obtiene con la navaja está dada por:

$$I_k = \frac{a_k}{a_0} I_0 \quad (20)$$

Debido a que los rayos se desvían un ángulo ϵ al atravesar el gradiente de índice de refracción, entonces estos no convergen en el foco F de la lente, sino que pasan a una distancia Δa de la navaja, de modo que:

$$\Delta a = \pm F \epsilon \quad (21)$$

La intensidad en la pantalla está entonces dada por:

$$I_p = \frac{a_k + \Delta a}{a_k} I_k \quad (22)$$

Por lo que la intensidad relativa o contraste en la imagen $\frac{\Delta I}{I_k}$ se puede aproximar como:

$$\frac{\Delta I}{I_k} = \frac{I_p - I_k}{I_k} = \frac{\Delta a}{a_k} = \pm \frac{F}{a_k} \varepsilon \quad (23)$$

Sustituyendo la Ec. (12) en la Ec. (23) y considerando el camino total que atraviesa la luz en el volumen del objeto de estudio, se obtiene la expresión final para el contraste en la imagen en la técnica *Schlieren* (Porta, 2013):

$$\frac{\Delta I}{I_k} = \pm \frac{F}{a_k n_0} \int \frac{\partial n}{\partial y} dz \quad (24)$$

Por otro lado, la sensibilidad está dada por:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\Delta I}{I_k} \right) = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{F\varepsilon}{a_k} \right) = \frac{F}{a_k} \quad (25)$$

De la ecuación anterior se observa que es posible aumentar la sensibilidad del sistema *Schlieren* al utilizar una mayor distancia focal o al disminuir a_k , es decir, al bloquear una mayor porción del haz con la navaja. Sin embargo, bloquear una gran cantidad de luz tiene como desventaja el perder la información de las regiones en las que el gradiente de índice de refracción es pequeño en comparación con el resto del área de estudio.

Esencialmente, las técnicas de *Schlieren* y *Shadowgraph* permiten realizar mediciones cualitativas de los cambios de la densidad en un campo completo sin perturbar el flujo de estudio. En ambos casos se pueden utilizar de forma continua o discreta, utilizando videos, los cuales pueden ser de alta velocidad. La esencia cualitativa de estas técnicas hace necesario buscar una forma de encontrar el campo de densidades de manera cuantitativa.

2 TÉCNICA BOS

En contraste con las técnicas antes mencionadas, la técnica de Schlieren con un fondo como referencia (*Background Oriented Schlieren*, BOS por sus siglas en inglés), permite caracterizar cuantitativamente flujos compresibles con una buena resolución temporal y espacial. Esta técnica fue desarrollada por Meier en 1999 y debe su nombre a que, al igual que la técnica *Schlieren*, está basada en la primera derivada del índice de refracción.

El montaje experimental de la técnica BOS es más sencillo que el de la técnica *Schlieren* y permite estudiar fenómenos en escalas mayores debido a la flexibilidad para elegir un fondo de referencia y la óptica a utilizar (Dalziel et al., 2000). Para ello, se requiere únicamente de una iluminación uniforme (no necesariamente coherente), un patrón de fondo, una cámara y una computadora para analizar las imágenes (Figura 4).

Comúnmente, el patrón de fondo se genera colocando partículas o “puntos” distribuidos aleatoriamente, considerando las recomendaciones de tamaño de las partículas para PIV. El patrón puede ser generado de diversas formas como de manera digital o incluso salpicando pequeñas gotas de pintura sobre el material de fondo (Porta, 2015).

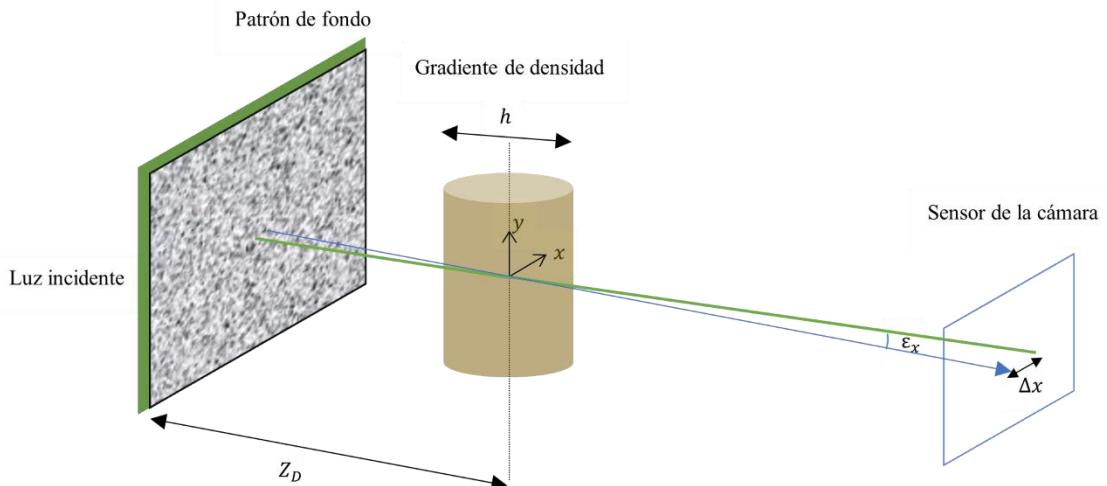


Figura 4. Diagrama de formación de imágenes en un sistema BOS. Los rayos de luz iluminan el patrón de fondo y atraviesan el gradiente de densidad, el cual hace que los rayos se refracten e incidan en una posición distinta a la trayectoria original en el sensor de la cámara.

El proceso básico de obtención de imágenes a través de la técnica BOS inicia capturando una fotografía del patrón de fondo observado a través del aire sin perturbaciones. Después, se captura otra imagen, esta vez con el objeto de estudio entre el patrón de fondo y la cámara. Debido a que la luz cambia su trayectoria (se refracta) al viajar de un punto a otro, las posiciones en las que los rayos de luz inciden en la cámara en la segunda imagen son ligeramente distintas, provocando así una imagen desplazada del patrón de fondo (Figura 4). Posteriormente, tanto la imagen de referencia como la imagen con el objeto de estudio son comparadas mediante algoritmos computacionales para calcular los desplazamientos del patrón de fondo. Dichos desplazamientos contienen información sobre el gradiente espacial del índice de refracción integrado a lo largo del camino óptico (Richard y Raffel, 2001).

Asumiendo que la luz se propaga en la dirección z y que, al atravesar el gas, los ángulos de desviación de la luz son pequeños y perpendiculares al eje óptico (*en dirección x y y*), entonces es posible derivar el desplazamiento aparente del patrón de fondo (Porta, 2015):

$$\xi_w = M_{ag} Z_D \varepsilon_w \quad (26)$$

donde el subíndice $w = x, y$ denota la dirección en la que se calcula el desplazamiento aparente, ε es el ángulo que se desvían los rayos de luz de su trayectoria al atravesar el gas, Z_D es la distancia entre el patrón de fondo y el gas y M_{ag} es la magnificación de la imagen en la cámara relacionada a las distancias del patrón a la lente y del sensor a la lente, así como a las características del sensor.

$$M_{ag} = \frac{\text{tamaño en pixeles de la referencia}}{\text{tamaño real de la referencia}} \times (\text{tamaño de pixel}) \quad (27)$$

Asumiendo que los rayos de luz se mueven en línea recta en la dirección z al atravesar el gas y que los cambios en cada dirección son independientes entre sí, se denota $w = x, y$ como la dirección respecto a la cual se deriva. Además, suponiendo que los cambios en el índice de refracción del gas son del mismo orden de magnitud en todas las direcciones, entonces el ángulo de desviación de la luz se expresa como:

$$\varepsilon_w = \frac{1}{n_0} \int_{z_D - \frac{h}{2}}^{z_D + \frac{h}{2}} \frac{\partial n}{\partial w} dz \quad (28)$$

donde h es el espesor del gradiente de índice de refracción y n_0 es el índice de refracción del medio alrededor. Usando el teorema del valor medio se sustituye la integral por el espesor del gradiente de índice de refracción, de modo que:

$$\varepsilon_w = \frac{h}{n_0} \frac{\partial n}{\partial w} \quad (29)$$

Sustituyendo la Ec. (29) en la Ec. (26) se llega a la expresión del gradiente del índice de refracción en cualquiera de las direcciones ($w = x, y$).

$$\frac{\partial n}{\partial w} = \frac{n_0}{M_{ag} Z_D h} \xi_w \quad (30)$$

2.1 Ecuación de Gladstone-Dale

Tanto las técnicas *Shadowgraph* y *Schlieren*, como la técnica BOS, basan su funcionamiento en la relación entre el índice de refracción de un fluido y su densidad. Dicha relación está representada por la ecuación de Gladstone-Dale para medios gaseosos.

$$n - 1 = \rho G \quad (31)$$

En la ecuación anterior, n es el valor del índice de refracción del medio, G es la constante de Gladstone-Dale y ρ es la densidad del medio. Es importante considerar que la constante de Gladstone-Dale depende del gas de estudio, así como de la longitud de onda con la que se ilumine el fenómeno (Porta, 2015), de modo que:

$$G = \left(\frac{e^2 \Omega}{2\pi c^2 m_e M_m} \right) \sum \left(\frac{f_i \lambda_i^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \right) \quad (32)$$

donde i indica los diferentes osciladores armónicos inducidos por el campo eléctrico, Ω es el número de Loschmidt, el cual es igual a $2.6516467 \times 10^{25} m^{-3}$ y representa el número de partículas de un gas ideal dentro de un volumen de $1 cm^3$ a $0^\circ C$ y $100 kPa$. Aunado a ello, c es la velocidad de la luz en el vacío, e es la carga del electrón, m_e es la masa del electrón, λ es la longitud de onda incidente, λ_i es la longitud de onda que corresponde a la frecuencia de resonancia de las moléculas del medio, f_i es la constante de restitución del oscilador armónico asociado a la vibración de las moléculas y M_m es la masa molar del medio (Porta, 2015).

Utilizando la ecuación Ec. (31) para obtener el gradiente del índice de refracción con respecto a cada dirección ($w = x, y$), se llega a:

$$\frac{\partial n}{\partial w} = G \frac{\partial \rho}{\partial w} \quad (33)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ec. (30) se obtiene la expresión para el gradiente de la densidad con respecto a cada dirección.

$$\frac{\partial \rho}{\partial w} = \frac{n_0}{M_{ag} Z_D G h} \xi_w \quad (34)$$

2.2 Ecuación de Poisson

Una vez conocidos los desplazamientos aparentes ξ_w , es posible obtener los valores de densidad en el gas de estudio resolviendo la ecuación diferencial (34) en cada dirección. Debido a que la densidad es una función tanto de la coordenada x , como de la coordenada y , es necesario acoplar el sistema de ecuaciones.

Al derivar la Ec. (34) y sumar la contribución en cada dirección, se obtiene la ecuación de Poisson que describe al fenómeno de estudio dadas las características del experimento (Ec. (35)). Finalmente, el último paso para obtener los valores de densidad en el gas es resolver dicha ecuación de Poisson imponiendo condiciones de frontera acordes al fenómeno.

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \frac{n_0}{M_{ag} Z_D G h} \left[\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \right] \quad (35)$$

2.3 Algoritmos de detección de desplazamientos

Cuando se tiene un conjunto de imágenes tomadas a distintos tiempos, es posible identificar aquellas regiones de la imagen en donde existen cambios. Para la técnica BOS, el primer paso esencial es determinar el desplazamiento aparente del patrón de fondo de manera local.

La técnica BOS emplea tradicionalmente algoritmos de correlación cruzada utilizados en la Velocimetría de Imágenes de Partículas (PIV, por sus siglas en inglés) en dos dimensiones.

2.3.1 Correlación cruzada

La correlación cruzada es una técnica estadística de emparejamiento de valores de intensidades en un conjunto de imágenes. En esta técnica se dividen las imágenes en bloques

de un determinado número de pixeles, llamados ventanas o áreas de interrogación. De cada una de las áreas de interrogación en una primera imagen A, se detectan distintos valores de intensidades, que serán posteriormente buscados por el algoritmo en las áreas de interrogación de la subsecuente imagen B. Para detectar el desplazamiento de cada una de las ventanas de interrogación de la imagen A y B, se hace uso de la función de correlación cruzada discreta, que se define como:

$$C(m, n) = \sum_i \sum_j A(i, j)B(i - m, j - n) \quad (36)$$

donde i, j indica la ubicación de las ventanas de interrogación correspondientes en las imágenes A y B.

La ubicación del pico de intensidad de la correspondiente matriz de correlación indica el desplazamiento más probable que sufrieron las partículas de la imagen A a la imagen B (Thielicke, 2014).

La operación correspondiente a la función de correlación se puede calcular en el dominio espacial (correlación cruzada directa o DCC) o en el dominio de las frecuencias (mediante la transformada de Fourier discreta o DFT), ya que la correlación cruzada es un caso particular de una convolución. Si bien el error en el cálculo se reduce utilizando la técnica DCC, el tiempo computacional aumenta en comparación a las técnicas con DFT para ventanas de interrogación grandes.

Una forma de contrarrestar el aumento en el tiempo de cómputo es usar la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés), en donde en vez de tener una suma de multiplicaciones sobre toda el área de interrogación, se tiene simplemente una multiplicación (Porta, 2015).

Para aumentar la resolución espacial del análisis, es necesario disminuir el tamaño de las áreas de interrogación. Sin embargo, esto introduce una limitante dada por el tamaño de los elementos en el patrón de fondo que se analiza y por la cantidad de éstos. La correlación cruzada, al ser un método estadístico necesita de un mínimo de diferencia de intensidades (lo que se traduce a un mínimo de elementos en el patrón de fondo) para poder funcionar adecuadamente.

Asimismo, el tener un menor tamaño de las ventanas de interrogación ocasiona que existan un mayor número de estas en la imagen, por lo que el tiempo de cómputo aumenta. Si, por otro lado, el desplazamiento de las partículas es mayor que la mitad del tamaño del área de interrogación, el pico de intensidad cambia al lado opuesto de la matriz de correlación, afectando a la detección. Además, para mantener bajo el ruido de fondo en la matriz de correlación, se recomienda que los desplazamientos de las partículas sean de alrededor de $\frac{1}{4}$ del tamaño del área de interrogación (Thielicke, 2014).

Por lo anterior, la alternativa más utilizada para mejorar la resolución espacial es utilizar la sobreposición (*overlap*), en donde se recorre el centro del área de interrogación un cierto porcentaje y se vuelve a calcular la correlación. También se recurre a utilizar distintos pasos comenzando con una ventana de interrogación grande y refinando su tamaño en cada paso. Si bien lo anterior funciona, debe considerarse que, aún con estos métodos, no es posible correlacionar pixel por pixel en la imagen.

3 VISIÓN COMPUTACIONAL

La visión computacional es una subrama de ciencias de la computación, en específico de la rama de inteligencia artificial, cuyo objetivo primordial es el de enseñar a una computadora a distinguir e interpretar el mundo a nuestro alrededor.

El proceso de visión computacional comienza con la adquisición de una imagen, lo cual se realiza iluminando con luz natural o artificial el objeto de interés y fotografiándolo. El sensor de la cámara detecta la radiación proveniente del objeto y la convierte en una señal electrónica que conforma a la imagen digital. Esta imagen es procesada mediante diversos algoritmos con el fin de extraer parámetros que después son usados para clasificar o estudiar a los objetos en la imagen. El avance acelerado del área de visión computacional ha derivado en nuevas técnicas y algoritmos enfocados en procesar casi cualquier tipo de imagen.

El campo de visión computacional es interdisciplinario. Éste conecta a las ciencias físicas con las técnicas para adquirir imágenes, así como también conecta a la investigación pura con sus aplicaciones tanto en la industria, como en la ciencia. Algunos ejemplos de las aplicaciones son los autos autónomos, el reconocimiento facial utilizado tanto para desbloquear equipos electrónicos, como para identificar a las personas presentes en una fotografía subida a redes sociales, e incluso como método auxiliar en la detección de secciones cancerosas en imágenes de la piel de un paciente, por mencionar algunos (Jähne et al., 1999).

Durante las últimas décadas, un gran número de miembros de la comunidad científica ha mostrado interés en utilizar a la visión computacional como una herramienta que permita optimizar el estudio de diversos fenómenos y objetos. Tal es el caso de la física enfocada en el estudio de la mecánica de fluidos, cuyos métodos de visualización forman una parte crucial en el entendimiento de los fenómenos estudiados.

3.1 Flujo óptico

Se le llama flujo óptico al movimiento aparente de patrones de intensidad en una secuencia de imágenes 2D. Este movimiento aparente de patrones tiene origen en el movimiento relativo entre el observador y el objeto que está siendo capturado, con respecto al tiempo transcurrido entre dos imágenes. Sin embargo, no es posible medir directamente dicho movimiento, sino únicamente medir el movimiento aparente de los patrones de intensidad que éste genera en la imagen. Idealmente, el flujo óptico calculado sería igual al campo de movimiento real, a menos que la iluminación del objeto cambie con respecto al tiempo.

El flujo óptico identifica el cambio en las imágenes mediante un campo vectorial. Para estimar el flujo óptico en una imagen, uno de los retos es correlacionar cada uno de los pixeles que conforman la imagen de un objeto con su respectivo movimiento, y no sólo aquellos pixeles del contorno del objeto (Raudies, 2013).

El problema de la estimación de flujo óptico a partir de una imagen en 2D se plantea de la siguiente forma. Sea $f(x, y, t)$ la función escalar con valores de intensidad en la escala de grises de la imagen, donde (x, y) denotan las coordenadas espaciales cartesianas y t denota el tiempo en el que se capturó la imagen. Entonces, se desea determinar el campo de velocidades $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ correspondiente.

Si se asume que la intensidad de un determinado punto en la imagen se mantiene constante en el tiempo y que los desplazamientos (dx, dy) y el intervalo de tiempo dt son pequeños, entonces se tiene que:

$$f(x, y, t) \approx f(x + dx, y + dy, t + dt) \quad (37)$$

Se busca obtener la derivada total de la intensidad $f(x, y, t)$ por lo que, expandiendo el lado derecho de la ecuación anterior mediante una serie de Taylor, se obtiene:

$$f(x + dx, y + dy, t + dt) = f(x, y, t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \epsilon \quad (38)$$

donde $\epsilon \ll 1$ y contiene a los términos de segundo orden y de orden superior de la serie de Taylor para dx, dy y dt .

De la Ec. (37) y la Ec. (38) se tiene entonces que:

$$f(x, y, t) = f(x, y, t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \epsilon \quad (39)$$

Restando $f(x, y, t)$ de ambos lados y dividiendo entre dt se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{O}(dt) = 0 \quad (40)$$

donde $\mathcal{O}(dt)$ es un término de orden dt (se asume que dx y dy varían como dt). En el límite cuando $dt \rightarrow 0$, la Ec. se convierte en:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (41)$$

Sea $u = \frac{dx}{dt}$ y $v = \frac{dy}{dt}$, se puede reescribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (42)$$

La Ec. (42) es llamada “ecuación de restricción de flujo óptico”, en donde (u, v) denotan a las componentes del flujo óptico.

Los términos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial t}$ son calculados del cambio en el valor de la intensidad en una secuencia de imágenes, de forma que se llega a un sistema indeterminado de una ecuación por pixel con dos incógnitas (u, v) .

La Ec. (42) corresponde a la ecuación de una recta en el plano (u, v) . Sin embargo, al tener sólo una ecuación y dos incógnitas, esta ecuación por sí sola no es suficiente para encontrar una solución única para los valores de (u, v) conociendo los cambios de intensidad en las imágenes. Debido a ello, es necesario plantear restricciones adicionales para resolver el problema.

3.2 Trabajos anteriores

Los primeros algoritmos para estimar el flujo óptico de una secuencia de imágenes fueron propuestos en la década de los 80's (Horn y Schunck, 1981) y (Lucas y Kanade, 1981), en donde se utilizó un esquema clásico basado en gradientes. Dicho esquema es representado por la ecuación de restricción de flujo óptico derivada en la sección anterior (Ec. (42)), sin embargo, la forma de determinar las componentes del flujo óptico (u, v) varía. En este sentido, los esquemas basados en gradientes, o también llamados métodos diferenciales, se dividen en métodos locales y métodos globales.

Por un lado, en los métodos locales se optimiza una función local para encontrar el valor de (u, v) bajo la suposición de constancia espacial en la imagen. Lucas y Kanade (Lucas y Kanade, 1981) propusieron que el vector de flujo óptico desconocido dada una secuencia de imágenes se mantiene constante en una ventana de tamaño determinado. De esta forma, se tiene un sistema de ecuaciones por cada pixel en la ventana. Dicho sistema de ecuaciones se resuelve utilizando una optimización de mínimos cuadrados. Si bien este método es robusto incluso en conjuntos de datos con ruido, no otorga campos de flujo densos.

Por otro lado, en los métodos globales se busca (u, v) tal que se minimice una función, llamada en el área de visión computacional como “funcional de energía” y denotada por $E(u, v)$, sobre el dominio de la imagen completa Ω , para lo cual se propone un término regularizador de suavizado. Este tipo de método resulta en campos de flujo densos, sin embargo, es más sensible al ruido en las imágenes. Horn y Schunck (Horn y Schunck, 1981) introdujeron esta idea usando la expresión que se muestra en la Ec. (43), en donde el segundo término corresponde a un regularizador homogéneo y $\alpha > 0$ es el parámetro de suavizado. De esta forma, se tiene un regularizador que impone un suavizado de forma global y de la misma magnitud en toda la imagen, en donde se penalizan gradientes de flujo grandes.

A través de dicho regularizador, se impone la condición de que las derivadas parciales de (u, v) deben ser pequeñas.

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \left[\left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \alpha(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \right] dx dy \quad (43)$$

Utilizando cálculo variacional (Apéndice C), la solución única de (u, v) que minimiza el funcional propuesto se encuentra resolviendo numéricamente las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes (Bruhn et al., 2005):

$$\nabla^2 u - \frac{1}{\alpha} (f_x^2 u + f_x f_y v + f_x f_t) = 0 \quad (44)$$

$$\nabla^2 v - \frac{1}{\alpha} (f_x f_y u + f_y^2 v + f_y f_t) = 0 \quad (45)$$

donde $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $f_w = \frac{\partial f}{\partial w}$ y $f_w^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$, con $w = x, y, t$.

Además, a lo largo de las últimas décadas han existido múltiples trabajos con enfoque en métodos diferenciales robustos (Bab-Hadiashar y Suter, 1998), técnicas basadas en la fase de la imagen local (Fleet y Jepson, 1990) y distintas restricciones a la ecuación de flujo óptico a través de métodos probabilísticos (Mitiche y Aggarwal, 2014), por mencionar algunos. Sin embargo, ha habido pocos cambios en la formulación inicial realizada por Horn & Schunck. La mayoría de los trabajos únicamente proponen restricciones y regularizadores que suavizan la solución de flujo óptico. A pesar de ello, el funcionamiento de dicho algoritmo de flujo óptico ha sido mejorado en términos de calidad y tiempo de cómputo gracias a técnicas avanzadas de optimización numérica y funciones robustas que disminuyen el error inducido por valores atípicos en las imágenes.

(Bruhn et al., 2005) propuso un método novedoso que combina la alta robustez de los métodos locales con la amplia densidad del campo de flujo que otorgan los métodos globales. En dicho trabajo se proponen regularizadores espaciotemporales, es decir, que consideran también las variaciones de intensidad en una imagen con respecto al tiempo. Lo anterior provee una estimación más certera de los desplazamientos, aún en imágenes con ruido o en

donde hay ligeras variaciones en la iluminación.

Debido a que la ecuación de flujo óptico es una ecuación lineal resultante de suponer que la intensidad es constante, (u, v) deben ser pequeños para que la linealización se cumpla. Como consecuencia, se dice que los algoritmos de flujo óptico únicamente pueden detectar desplazamientos pequeños. Sin embargo, (Bruhn et al., 2006) propuso una técnica multiescala, también llamada multimalla, para realizar el análisis de las imágenes. En dicha técnica se comienza por analizar la imagen con una resolución menor y en cada iteración se refina la resolución. De esta forma, el desplazamiento detectado en resoluciones menores se usa para corregir el resultado de la imagen original antes de pasar al siguiente nivel con más resolución. El desplazamiento final se obtiene sumando todos los incrementos en el desplazamiento, dando como resultado una mejor estimación de (u, v) . Asimismo, se propone una notación generalizada de las ecuaciones de Euler-Lagrange y un esquema numérico que, junto con el método de sobre relajación sucesiva (SOR, por sus siglas en inglés), acelera el cómputo de dos a cuatro órdenes de magnitud.

3.3 Algoritmo de Horn y Métodos Variacionales

Como se mencionó en la sección anterior, los algoritmos de flujo óptico han sido de interés en las últimas décadas debido al potencial que tiene este tipo de esquema para aumentar la resolución espacial en el análisis de imágenes. Esta característica es de particular interés en la técnica BOS para obtener campos de desplazamientos resultantes más densos. Además, ya que en la técnica BOS el patrón de fondo y las condiciones de iluminación están controladas por el usuario y pueden ser modificadas, los algoritmos de flujo óptico son una alternativa ideal a los tradicionales métodos de correlación cruzada.

Se ha buscado reducir el tiempo de cómputo para este tipo de algoritmos, así como acoplarlos con métodos numéricos para optimizar la solución del sistema de ecuaciones de flujo óptico. En este sentido, (Raudies, 2013) desarrolló una implementación del algoritmo de Horn y Schunck, en la que integra el método variacional propuesto en (Bruhn et al., 2005) y (Bruhn et al., 2006), que preserva las discontinuidades en las imágenes. Esto es, que se reduce el suavizado a lo largo de los contornos (bordes), obteniendo un campo de

desplazamientos mejor definido del flujo bajo estudio. Además, en esta implementación se hace uso de una plataforma multimalla para acelerar el cómputo (Apéndice B). Dicha implementación, de ahora en adelante referida como “algoritmo de flujo óptico”, fue utilizada como el algoritmo principal para el desarrollo del trabajo expuesto en esta tesis y modificada con el fin de adaptarla a la técnica BOS.

Usando el algoritmo de flujo óptico y el algoritmo de correlación cruzada del *software* PIVLab (W. y E.J., 2014) en MATLAB (*MATLAB*, 2019), se analizaron dos imágenes de patrones con puntos aleatorios, generadas a través de PIVLab. A dichas imágenes se les aplicó una traslación lineal de 2 px en dirección vertical (Figura 5). Para el análisis con correlación cruzada se utilizó una ventana de 32 x 32 px y un paso de 8 px, usando el estimador 2D Gauss.

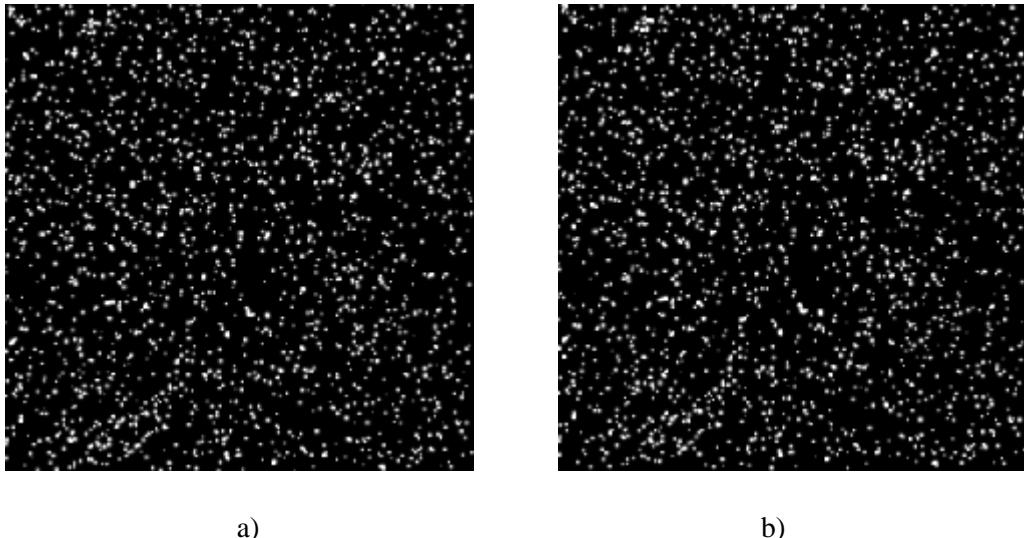


Figura 5. Patrón de fondo con puntos aleatorios de tamaño 3px y desplazamiento máximo de 2 px. Imagen de 234 x 233 px: a) imagen de referencia, b) imagen con patrón desplazado.

Como resultado de este análisis, por un lado, se encontró que los desplazamientos no eran constantes, lo cual se deriva de la generación sintética de las imágenes a través de PIVLab. En este sentido, PIVlab genera partículas con ligeras variaciones de tamaño que a su vez provocan variaciones en los desplazamientos. Estas diferencias son más notorias al incrementar la resolución espacial del análisis, como se observa en la Figura 6 para el caso del flujo óptico, en donde el análisis se realiza pixel por pixel.

Por otro lado, se encontraron diferencias entre las magnitudes de los desplazamientos calculados mediante flujo óptico y aquellos calculados mediante correlación cruzada (Figura 6). Estas diferencias fueron mayormente notables cuando las magnitudes de los desplazamientos calculados con correlación cruzada fueron mayores a 1 px. Debido a ello, se variaron los parámetros del algoritmo de flujo óptico, como son la constante de suavizado y el número de iteraciones, siendo este último el único que mostró cambios en los desplazamientos resultantes. Se observó que el número de iteraciones varía según el fenómeno a analizar, sin embargo, se obtuvo un máximo general de 100 iteraciones a partir del cual los desplazamientos resultantes no mostraban más cambios. Sin embargo, ningún número de iteraciones resultó en desplazamientos con magnitudes similares a aquellos obtenidos con correlación cruzada.

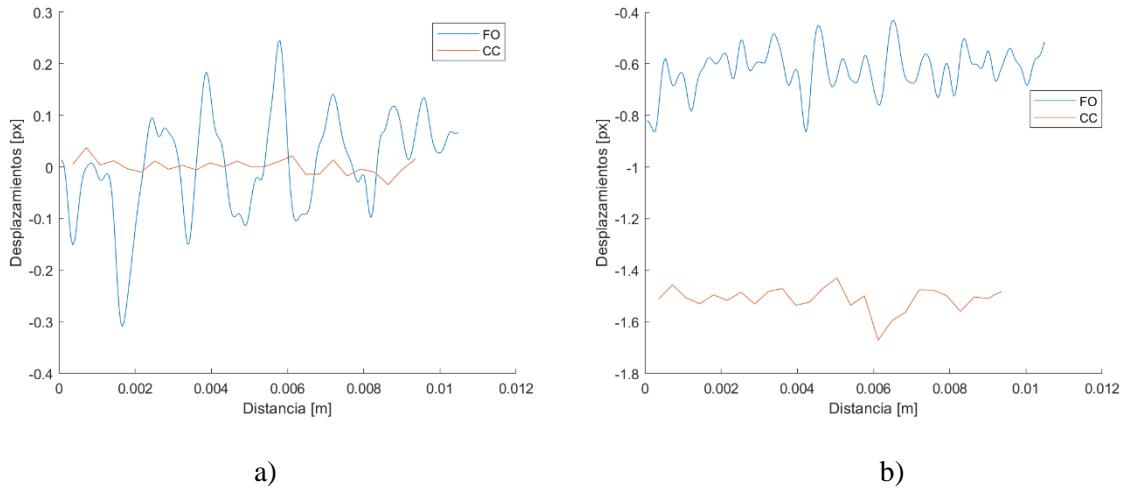


Figura 6. Comparación de desplazamientos en: a) la dirección x (U) y b) la dirección y (V) obtenidos mediante flujo óptico (FO) y correlación cruzada (CC) para el patrón con desplazamientos lineales.

Se realizaron pruebas con otro par de imágenes correspondientes a un vórtice de tipo Rankine generado sintéticamente a través de PIVLab. Las partículas de dicho vórtice tuvieron un tamaño máximo de 3 pixeles de diámetro, con una variación de tamaño de 0.5 pixeles (valor mínimo en PIVLab) y distribuidas aleatoriamente en la imagen. Dicho vórtice tiene un campo de velocidades característico perpendicular al eje de simetría z y al vector radial r (coordenadas cilíndricas). Las partículas del interior del vórtice experimentan una rotación y la magnitud de la velocidad tangencial es proporcional a r , mientras que para las

partículas en el exterior del vórtice (más allá de la distancia característica del vórtice, en este caso el radio R), la magnitud de la velocidad tangencial es inversamente proporcional a r .

La definición analítica de la velocidad del vórtice de Rankine es (Acheson, 1990):

$$\vec{v} = v_\theta \hat{e}_\theta = \begin{cases} V_R \frac{r}{R} & \text{si } 0 \leq r < R \\ V_R \frac{R}{r} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (46)$$

donde V_R es el máximo desplazamiento y en este caso $R = 0.0035 \text{ m}$.

En la Figura 7 se muestran los desplazamientos correspondientes a la dirección x . Es importante considerar que los datos graficados correspondieron a la columna central de la matriz de desplazamientos. Debido a ello, los datos de la columna analizada se encuentran a lo largo del diámetro del vórtice (Figura 7-a). Así, se observa que la magnitud de los desplazamientos aumenta y disminuye de forma aproximadamente lineal con respecto a la distancia, estando el centro ubicado en 0.005 m . Además, en la región superior de la imagen (desde el $(0,0)$ hasta el centro), los desplazamientos en esta dirección son negativos, contrario a la región inferior (del centro al final de la imagen). Dicho comportamiento cambia al sobrepasar la distancia de radio R en ambas direcciones, en donde comienza a exhibirse la relación inversa entre la distancia y los desplazamientos (Figura 7- b). Además, se muestran un mayor número de variaciones en el análisis de flujo óptico debido a que, al ser capaz de obtener un valor por cada pixel en vez de un valor por cada ventana de interrogación (correlación cruzada), las variaciones en el tamaño de las partículas del patrón generado en PIVLab se vuelven más notorias.

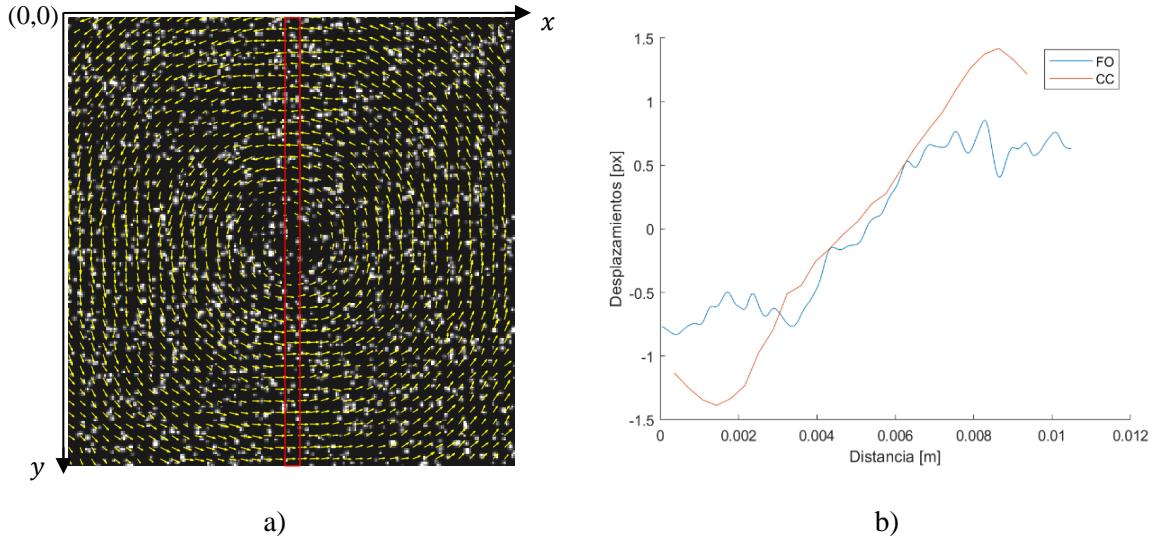


Figura 7. Patrón con vórtice de Rankine generado en PIVLab. a) Campo de desplazamientos y columna central de análisis (indicada en color rojo). b) Comparación de desplazamientos en la dirección x a lo largo de la columna de análisis obtenidos mediante flujo óptico (FO) y correlación cruzada (CC).

Análogo al primer caso, se observó que el comportamiento general de los desplazamientos de los puntos en la imagen concordó aquellos obtenidos con PIVLab (Figura 7). Sin embargo, existió una clara diferencia entre las magnitudes de los desplazamientos, sobre todo en aquellas regiones en donde los desplazamientos son mayores a un pixel, independientemente del tamaño de la ventana usada para el análisis de correlación cruzada.

Como se mencionó anteriormente, el algoritmo de flujo óptico parece preservar el comportamiento general de los desplazamientos obtenidos con correlación cruzada, e incluso es capaz de detectar desplazamientos menores a un pixel, lo que implica una mejora en la resolución espacial de un orden de magnitud. Por otro lado, es importante considerar que los algoritmos de flujo óptico son usados para la dirección de los desplazamientos en una imagen, sin embargo, los resultados carecen de sentido físico. Esto debido a que el orden de magnitud de los desplazamientos resultantes no concuerda con el fenómeno, lo cual se hace más notorio al calcular la ecuación de Poisson, con valores de densidad resultantes de órdenes de magnitud por debajo o por arriba de los valores esperados.

Para ejecutar la técnica BOS es crucial contar con valores cuantitativos de los desplazamientos de los puntos del patrón de fondo con la mayor precisión posible. Debido a ello, se consideró necesario encontrar una escala que permitiese ajustar los datos usando como referencia los datos resultantes de correlación cruzada. Esto debido a que, hasta la fecha, el algoritmo de correlación cruzada continúa siendo uno de los métodos más utilizados y certeros para la detección de desplazamientos en una imagen.

3.3.1 Propuesta de escalamiento

Una forma de resolver el problema de la diferencia de magnitud en los desplazamientos es hacer ajustes a la óptica para cambiar la magnificación, como puede ser alejar la cámara del fenómeno. Sin embargo, no siempre es posible realizar este tipo de modificaciones, en particular cuando la magnificación y la resolución con la que se visualiza el fenómeno de estudio tienen la misma importancia.

Por lo anterior, se buscó un escalamiento general para las magnitudes de los desplazamientos, sin embargo, dicho tipo de escalamiento únicamente logró escalar una pequeña fracción de los datos en la imagen. Debido a ello, fue necesario buscar un escalamiento que considerara segmentos de los datos. El escalamiento propuesto se muestra en la Ec. (47).

$$val(i)' = val(i) + (n_{intervalo})(s)(f) \quad (47)$$

en donde $val(i)$ es el valor correspondiente al dato i del conjunto de desplazamientos resultantes de flujo óptico, $n_{intervalo}$ es el número de intervalos de tamaño 0.1px que corresponden al valor de flujo óptico (Ec. (48)), f es un factor de escala y s es la escala entre los datos definida por los límites inferior y superior del conjunto de datos de flujo óptico (FO) y correlación cruzada (CC), como se muestra en la Ec. (49)-(51).

$$n_{intervalo} = \frac{val(i)}{0.1} \quad (48)$$

$$s = \frac{intervalo_{cc}}{intervalo_{FO}} \quad (49)$$

$$intervalo_{FO} = max(X)_{FO} - min(X)_{FO} \quad (50)$$

$$intervalo_{cc} = max(X)_{cc} - min(X)_{cc} \quad (51)$$

Se realizaron pruebas con el patrón de puntos en posiciones aleatorias desplazado linealmente (Figura 5). Para este caso, se minimizó la diferencia entre los valores resultantes de flujo óptico y de correlación cruzada tal que se preservara la pendiente de los datos, lo que resultó en un factor de escala óptimo de $f = 0.4$. En la siguiente sección se muestra la validación de dicho factor de escala utilizando un caso previamente estudiado.

Ya que el factor de escala fue determinado a prueba y error, se propuso determinarlo de forma iterativa, evaluando la desviación entre los datos hasta llegar a un determinado valor de tolerancia. Sin embargo, no se continuó por este camino ya que el algoritmo no convergió en aquellos datos con magnitudes menores a 1 pixel, aun cuando el factor de tolerancia era relativamente grande (0.1) y el factor de escala se variaba en incrementos de 0.001 unidades. Es relevante mencionar que, a pesar de que la mínima escala física en las imágenes es de 1 pixel, el algoritmo es capaz de detectar desplazamientos del orden de 10^{-1} px ya que se calcula la diferencia entre valores de intensidad y se resuelven las ecuaciones de Euler-Lagrange (Ec. (44) y (45)) de forma iterativa hasta alcanzar la convergencia.

Por otra parte, debido a que el escalamiento propuesto considera un valor mínimo y máximo para los datos de flujo óptico y de correlación cruzada (Ec. (50) y (51)), es necesario contar con un conjunto de datos. Como primer paso en la implementación del algoritmo de escalamiento, se trabaja uno a uno con las columnas de las matrices de datos de flujo óptico y de correlación cruzada. De dichos conjuntos de datos se obtienen los intervalos correspondientes y con éstos se calcula la escala general s para la columna de datos correspondiente.

Ya que los algoritmos de flujo óptico permiten incrementar la resolución espacial de los datos, las matrices de datos correspondientes a flujo óptico son de mayor tamaño que aquellas de correlación cruzada. Por ello, para poder escalar todos los datos de flujo óptico, es necesario realizar una correspondencia entre estos datos y los de correlación cruzada. La correspondencia propuesta en este trabajo consiste en relacionar subconjuntos de datos de flujo óptico con cada dato de correlación cruzada.

Para obtener los subconjuntos de datos de flujo óptico, estos datos se dividen en segmentos del mismo tamaño que el paso correspondiente a la última ventana usada en el análisis de correlación cruzada. Esto es, si la última ventana usada en correlación cruzada fue, suponiendo, de 16 pixeles con una superposición del 50% para el paso, entonces el paso será de 8 pixeles y los datos de flujo óptico se dividirán en segmentos de 8 datos. De esta forma, cada segmento de 8 datos de flujo óptico corresponde a un único valor de los datos de correlación cruzada.

Posteriormente, el algoritmo de escalamiento toma cada subconjunto de datos de flujo óptico y compara cada valor i en el subconjunto con el correspondiente valor k de correlación cruzada. Para evaluar dicha comparación, se utilizaron dos valores de tolerancia, uno para cuando los datos son menores a 1 px y otro para el caso contrario. Para valores de desplazamientos menores a 1px, se utilizó un valor de tolerancia de 0.05 y, para el caso contrario, se utilizó un valor de tolerancia de 0.5. De acuerdo con cada caso, si la diferencia entre el valor del desplazamiento de flujo óptico y el valor de correlación cruzada excede el valor de tolerancia, entonces se le aplica la escala propuesta a dicho dato en el subconjunto. Con este nuevo valor, se aplica un factor de translación igual a la diferencia entre el valor del desplazamiento de flujo óptico inicial y el valor de correlación cruzada (Ec. (52)). El signo de la translación será negativo, cuando el valor de correlación cruzada sea menor a cero, o positivo, cuando sea mayor a cero. Este proceso se repite para cada subconjunto de datos en la columna actual de la matriz de desplazamientos.

$$val(i)'' = val(i)' \pm |val(k)_{CC} - val(i)_{FO}| \quad (52)$$

Finalmente, se aplica un promedio de tres puntos (Ec. (53)) a los datos al inicio y al final de cada subconjunto de datos de flujo óptico para suavizar los resultados.

$$y(i) = \frac{y(i-1) + y(i) + y(i+1)}{3} \quad (53)$$

Es importante resaltar que, en ocasiones, el análisis de correlación cruzada arroja un valor distinto a un número (NaN). Esto ocurre cuando los algoritmos de correlación cruzada son incapaces de detectar un desplazamiento en esa región. Sin embargo, esto no necesariamente quiere decir que no haya un desplazamiento en términos físicos. Por ello, se agregó al algoritmo de escalamiento un condicional para que, si la matriz de datos de correlación cruzada no tiene valor en una celda, entonces se asigne un valor igual al promedio de sus dos celdas vecinas.

El proceso de escalamiento de muestra de manera resumida en la Figura 8 y el código de la rutina de escalamiento se puede consultar en el Apéndice B.

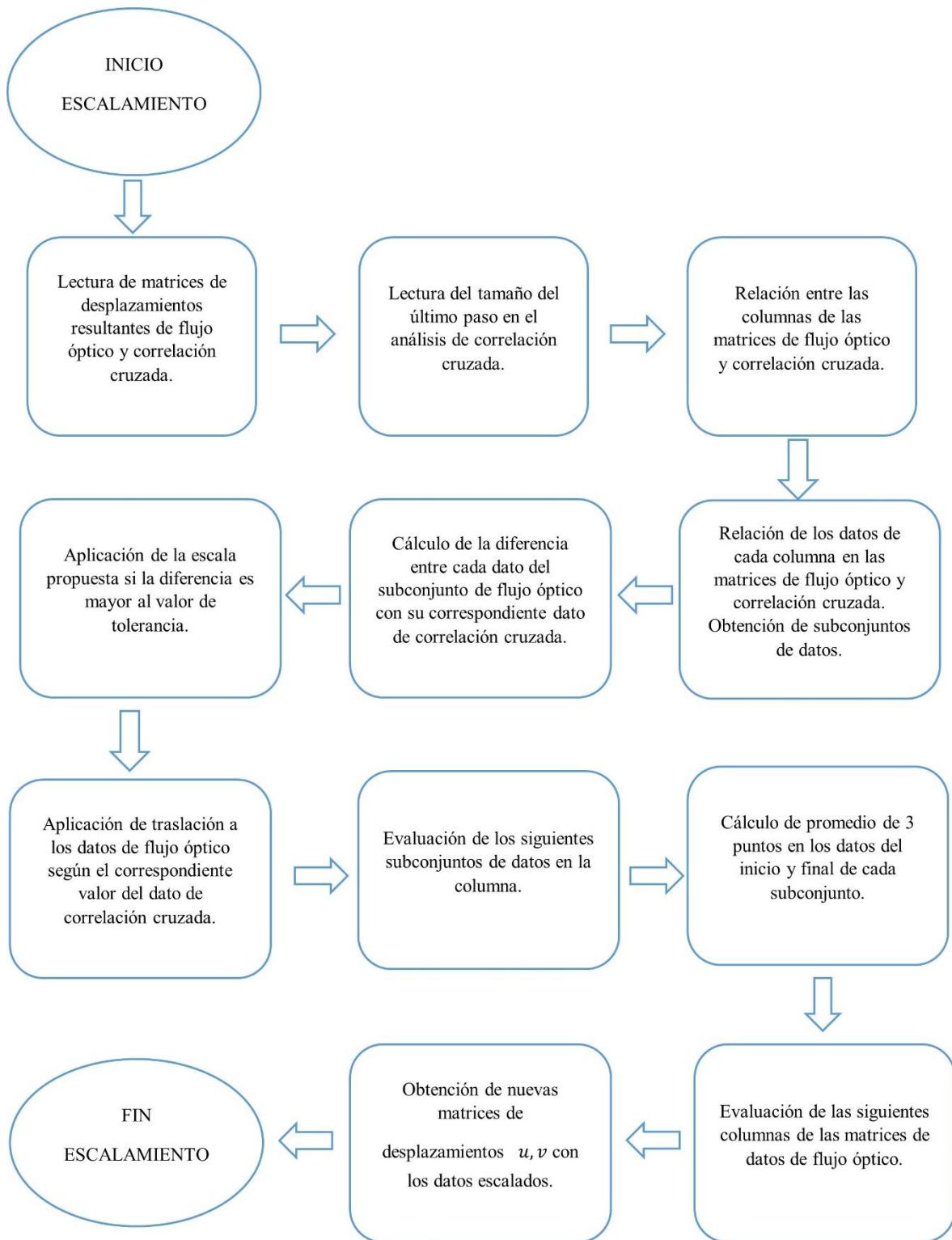


Figura 8. Diagrama del proceso de escalamiento propuesto para los desplazamientos resultantes de flujo óptico. Para llevar a cabo el escalamiento, es indispensable contar con los desplazamientos resultantes del análisis de correlación cruzada, ya que éstos sirven como referencia.

3.3.2 Validación del algoritmo con escalamiento

Para validar el comportamiento del algoritmo con el escalamiento propuesto, se analizaron las imágenes de un flujo supersónico de aire correspondientes al caso previamente estudiado en (Porta, 2015). El análisis se llevó a cabo a través del algoritmo de correlación cruzada utilizada en dicho trabajo y el algoritmo de flujo óptico con el escalamiento propuesto. Se eligió usar los datos obtenidos con PIVLab para escalar los datos de flujo óptico considerando que dicho *software* es usado extensamente en la comunidad científica y su funcionamiento ha sido previamente estudiado (Thielicke, 2014), lo que lo hace una herramienta confiable y una referencia útil para obtener una escala correcta.

Se analizó una imagen de referencia y otra con el flujo supersónico, ambas de 720 x 590 px, usando correlación cruzada con un pase de ventana de 16 x 16 px y un paso de 8 px (50% de sobreposición). Asimismo, se utilizó el estimador de subpixel de forma 2D Gauss. Como resultado, se obtuvieron dos matrices de datos de 89 x 72 px, cada una correspondientes a los desplazamientos en u y v , respectivamente. En cuanto al análisis de flujo óptico, este se ejecutó con 100 iteraciones, después de las cuales los desplazamientos resultantes no presentaban cambios en su magnitud y dirección. El campo vectorial resultante del análisis de flujo óptico y de correlación cruzada se muestra en la Figura 9.

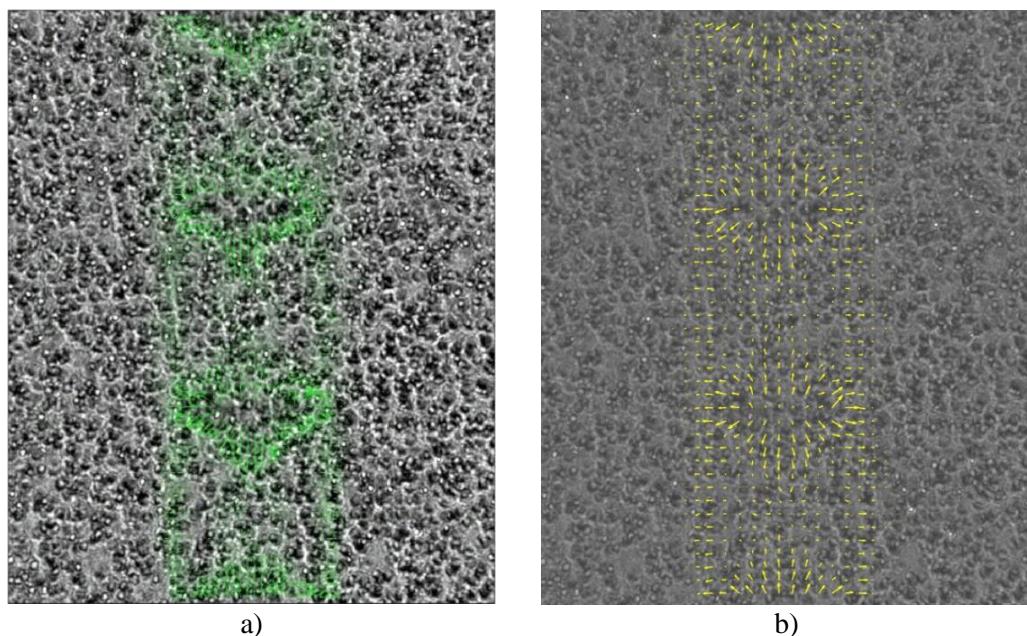


Figura 9. Campo vectorial de desplazamientos resultantes de: a) correlación cruzada y b) flujo óptico.

En la Figura 10 se muestran los valores de los desplazamientos en la dirección horizontal (U) y vertical (V) resultantes del análisis de flujo óptico sin aplicar el escalamiento. Dichos datos corresponden a la columna central de cada matriz de desplazamientos.

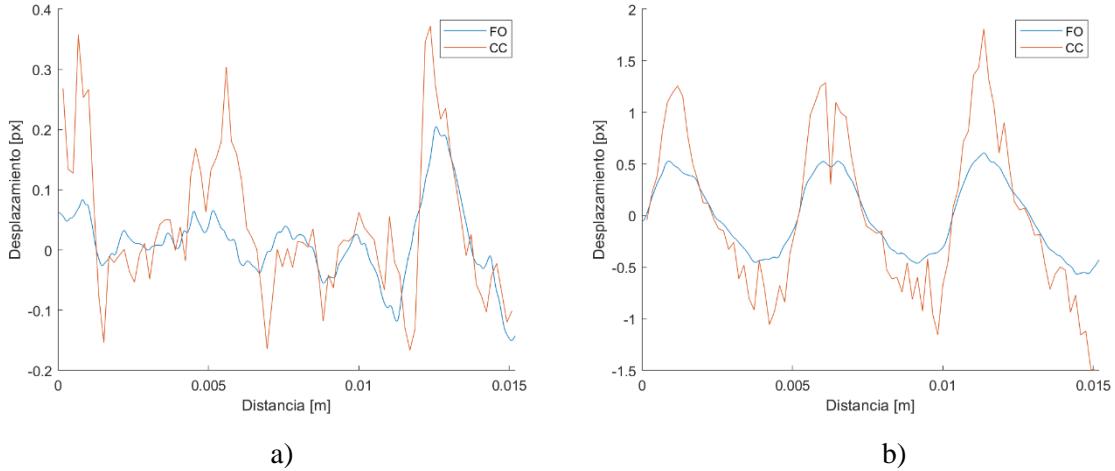


Figura 10. Valores resultantes del análisis de correlación cruzada (CC) y flujo óptico (FO) sin escalamiento para: a) desplazamientos en la dirección x (U) y b) desplazamientos en la dirección y (V).

En el caso de los datos del flujo supersónico, el análisis de flujo óptico sin escalamiento muestra una magnitud de los desplazamientos menor a los datos de correlación cruzada. En ambos casos, los datos de flujo óptico están confinados únicamente en un intervalo entre 0 y 1. Si bien el comportamiento general de los datos de flujo óptico concuerda con los datos de correlación cruzada, el objetivo final es obtener datos cuantitativos de dichos desplazamientos. Por ello, es necesario aplicar una escala que nos permita aproximar el valor real de los datos resultantes de flujo óptico.

Para el escalamiento propuesto (Ec. (47)), se encontró que el factor óptimo es $f = 0.4$. Para validar dicho valor, se aplicó el escalamiento a las imágenes de flujo supersónico con $f = 0.1, 0.2, 0.4$ y 0.6 . Los resultados se muestran en la Figura 11.

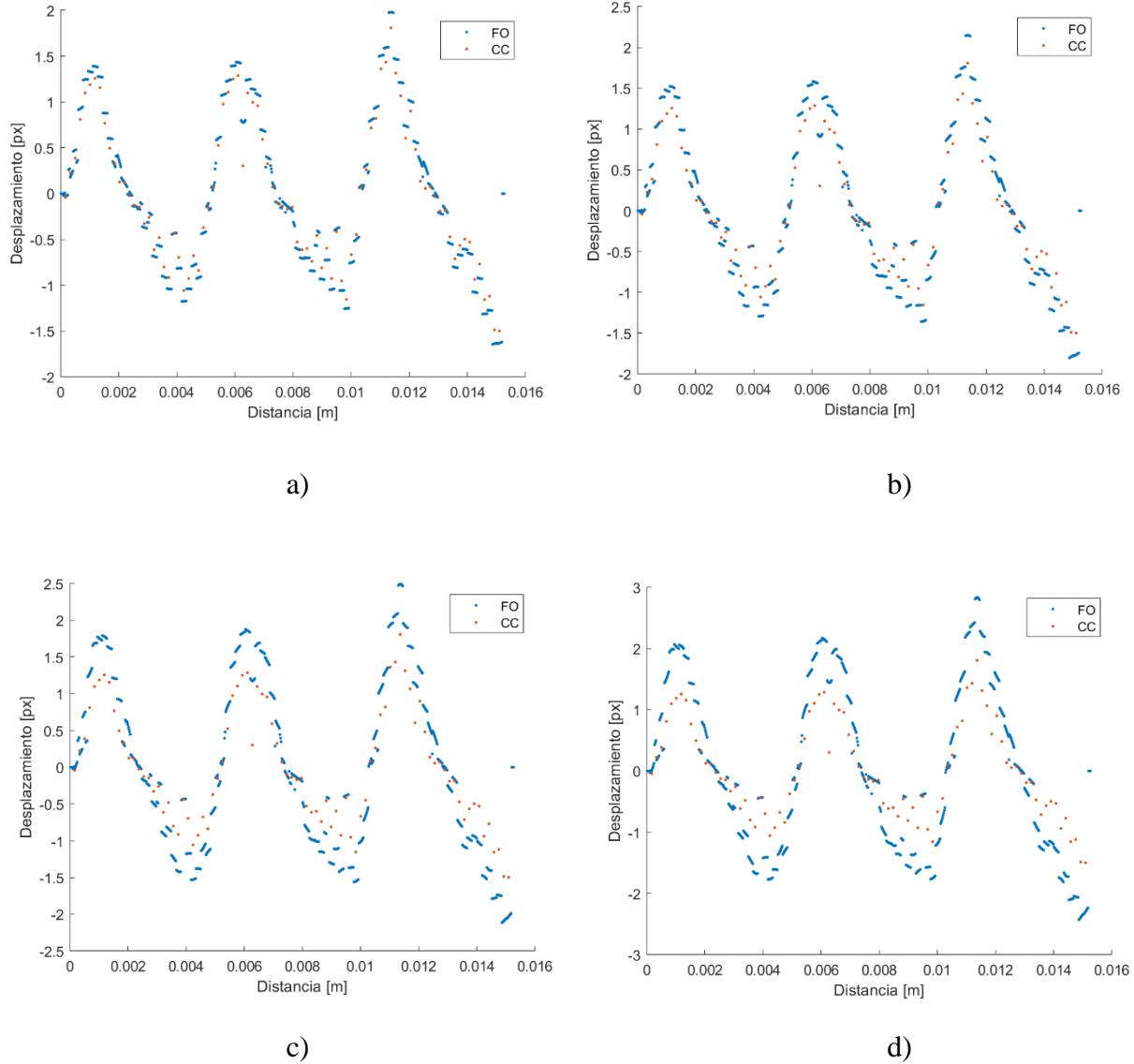


Figura 11. Comparación de valores para los desplazamientos en la dirección y con distinto factor de escala. a) $f = 0.1$, b) $f = 0.2$, c) $f = 0.4$ y d) $f = 0.6$.

De la Figura 11 se observa que a menor valor del factor de escala f , los datos de flujo óptico se asemejan en mayor medida a los datos de correlación cruzada. Sin embargo, el comportamiento de los subconjuntos de datos de flujo óptico comienza a perder la pendiente

de la curva, tendiendo en mayor medida hacia líneas horizontales. Por otro lado, cuando f es mayor, la pendiente se conserva, sin embargo, la magnitud de los desplazamientos en flujo óptico aumenta, alejándose de los valores de correlación cruzada, i.e. aumentando el error en la aproximación de los desplazamientos.

Con el objetivo de analizar el error del escalamiento con los distintos factores propuestos, se obtuvo el error absoluto medio (Ec. (54)) entre los valores del flujo óptico x_{FO} y aquellos correspondientes a correlación cruzada x_{CC} (Figura 12).

$$\Delta\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |x_{FO_i} - x_{CC_i}| \quad (54)$$

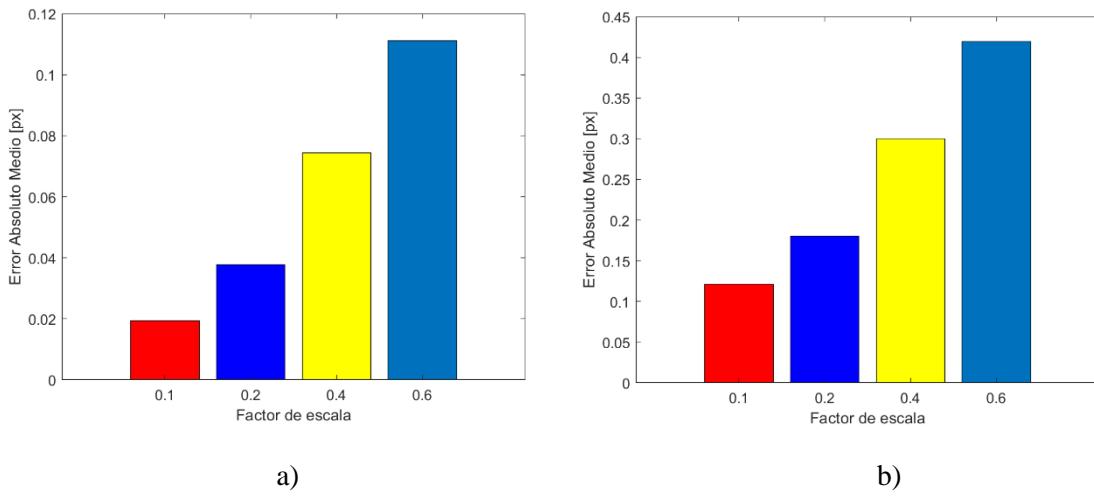


Figura 12. Error absoluto medio en los valores de: a) U y b) V para distintos factores de escala.

Como resultado, se obtuvo que los errores en el caso de los desplazamientos en u oscilaron en su mayoría por debajo de 0.1 px, con algunos valores alrededor de 0.11 px para $f = 0.6$. Para $f = 0.4$, el error absoluto medio de los datos se encuentra por debajo de 0.08 px. Estos resultados hacen evidente que las diferencias en las magnitudes de los desplazamientos obtenidos con correlación cruzada y con la escala de los datos de flujo óptico son pequeños. En el caso de los desplazamientos en u , el error absoluto medio resultante corresponde a valores de desplazamientos menores a 1 px.

Por otro lado, para el caso de los desplazamientos en v , la magnitud de los desplazamientos en v era mayor a 1 px y los errores se encontraron en su mayoría por debajo 0.4 px. Asimismo, en la Figura 12 se observa que el error absoluto medio crece conforme el valor del factor f incrementa. Para $f = 0.4$ el error absoluto general de los datos se encuentra alrededor de 0.3 px.

Debido a lo anterior, un punto clave para determinar qué tan bueno es el escalamiento propuesto es la preservación del sentido físico del conjunto de datos con el que se trabaja. En este sentido, el escalamiento propuesto en la Ec. (47) con $f = 0.4$ preserva la información que contiene la pendiente de los datos (Figura 11 - c), lo cual preserva a la vez el sentido físico de los datos. Adicionalmente, el error absoluto medio de los desplazamientos para este valor de f se sitúa alrededor del 14% del valor del desplazamiento máximo. La magnitud de los desplazamientos con la escala propuesta se muestra en la Figura 13.

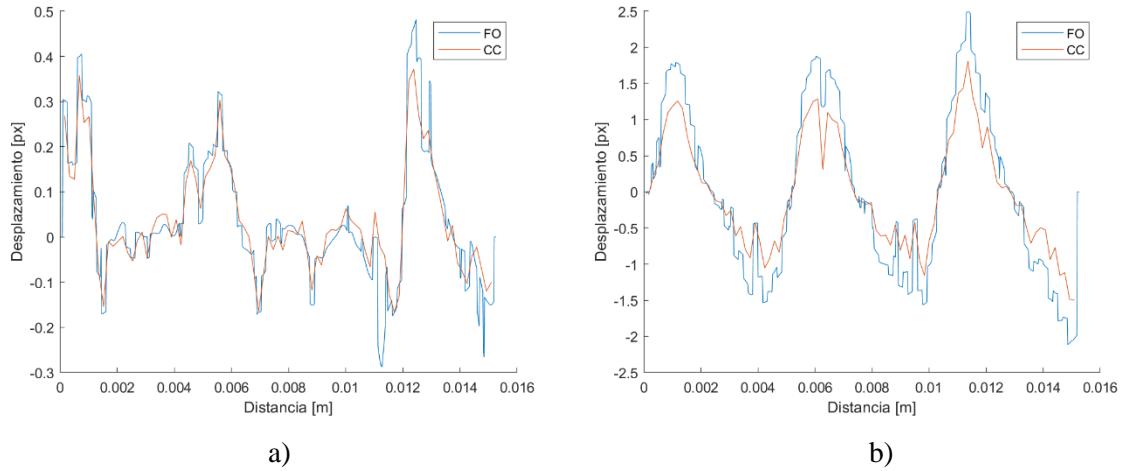


Figura 13. Magnitud de los desplazamientos en: a) U y b) V después de aplicar la escala a los datos originales de flujo óptico con un factor de escala $f = 0.4$.

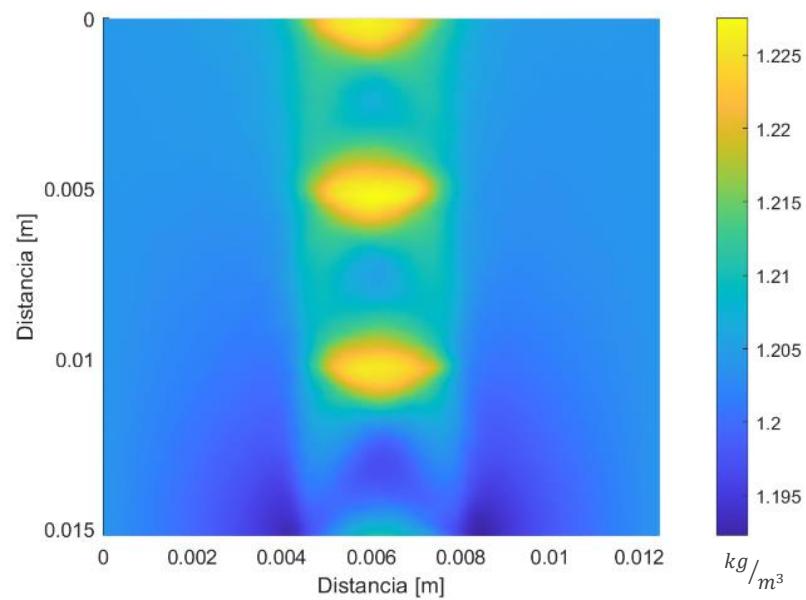
De la Figura 13 se observa que las diferencias entre las magnitudes de los desplazamientos u y v disminuyen al aplicarles el escalamiento propuesto. Esto es cierto independientemente de si la magnitud de los desplazamientos es mayor o menor a 1px.

Cabe destacar que los algoritmos de flujo óptico y estudios previos en el campo de visión computacional han validado la detección de desplazamientos de forma cualitativa, sin embargo, los datos que dichos algoritmos proveen no contienen la física del fenómeno de

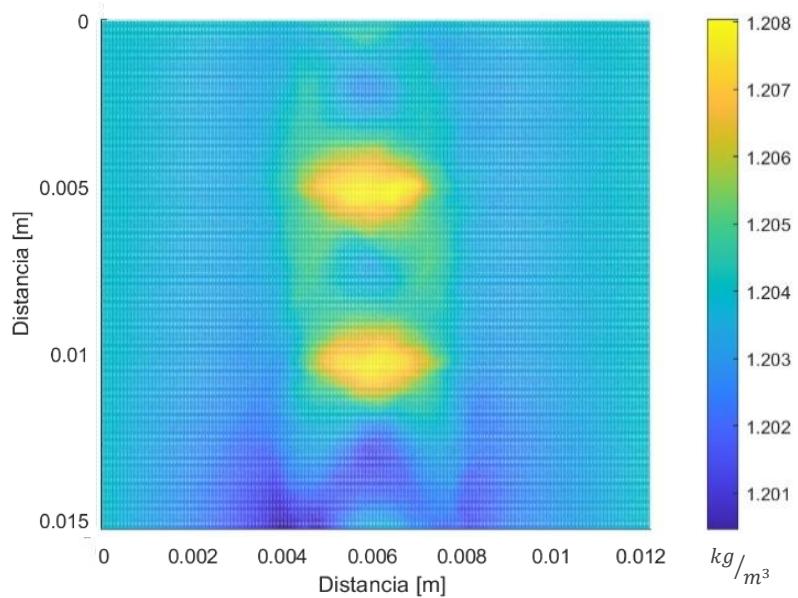
estudio. Por ello, el escalamiento propuesto en este trabajo representa un esfuerzo por unir a los algoritmos de flujo óptico con un fenómeno físico. Asimismo, haciendo uso de este escalamiento, se preserva el incremento en la resolución espacial que permite el análisis de flujo óptico, además de expandir la aplicación de estos algoritmos para obtener datos cuantitativos de los desplazamientos.

Una vez obtenidos los desplazamientos en el orden de magnitud correcto, se ejecutó el algoritmo de BOS, el cual calcula las diferencias finitas a partir de las matrices de desplazamientos y resuelve la ecuación de Poisson. Para ello, se utilizaron los mismos valores que los usados en (Porta, 2015) para un flujo supersónico de aire expulsado a través de una tobera de 0.004 m de diámetro con una presión de salida de 634.34 kPa (92 psi) y con condiciones de frontera tipo Neumann en las fronteras Norte-Sur.

El algoritmo de flujo óptico-BOS convergió en 28,261 iteraciones, con un tiempo de ejecución de 905.01 segundos, dando como resultado dos matrices de 717 x 587 px. Por otra parte, el algoritmo utilizado en (Porta, 2015) basado en el método de correlación cruzada dio como resultado dos matrices de datos de 353 x 288 y convergió en 27,993 iteraciones y 192.89 segundos. Los resultados se muestran en la Figura 14 y la Figura 15.

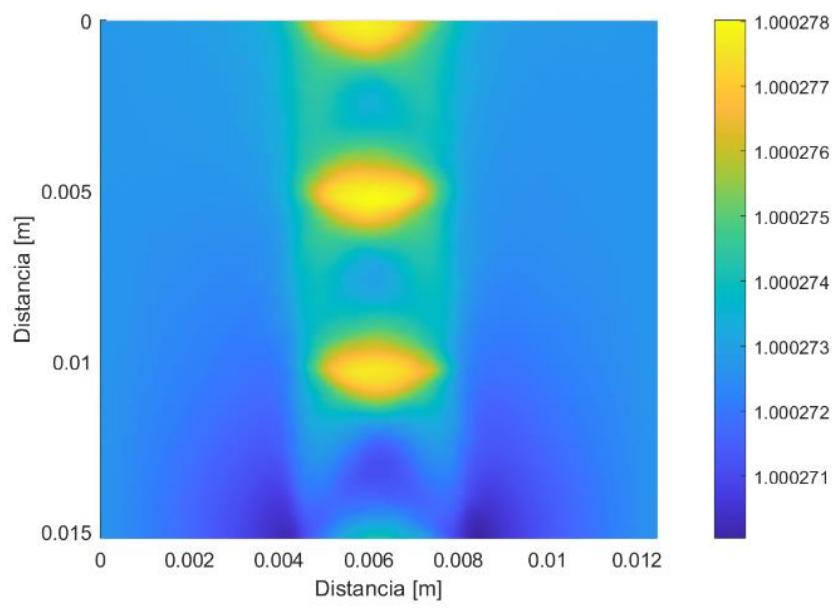


a)

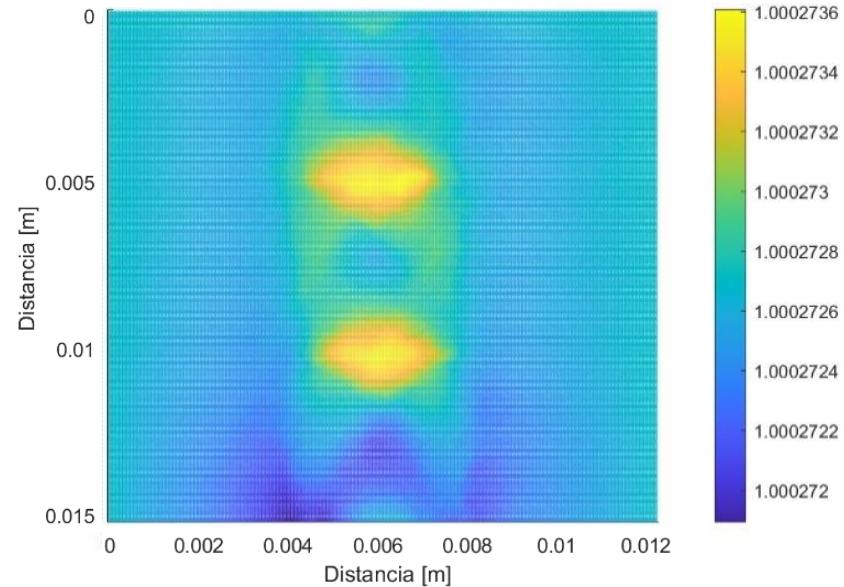


b)

Figura 14. Campo escalar de densidad obtenido del análisis de: a) flujo óptico y b) correlación cruzada para un flujo supersónico.



a)



b)

Figura 15. Campo escalar de índice de refracción obtenido del análisis de: a) flujo óptico y b) correlación cruzada para un flujo supersónico.

Analizando únicamente el campo escalar mostrado en la Figura 14 - a), se observa que en los resultados de flujo óptico-BOS el algoritmo fue capaz de identificar un tercer lóbulo en la estructura del flujo supersónico en la orilla superior de la imagen. En contraste, debido a la menor resolución espacial de correlación cruzada, dicho algoritmo no fue capaz de detectar en su totalidad el tercer lóbulo. Como resultado, además del error que representa en la caracterización de las distintas secciones de la estructura del flujo, en el caso de correlación cruzada se obtienen valores de densidad menores que aquellos calculados a partir de los datos de flujo óptico. Esta variación es particularmente importante en las fronteras superior e inferior de la imagen, en donde la diferencia entre los valores de densidad aproximados supera $0.017 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. En el caso del índice de refracción, la diferencia entre los valores máximos de flujo óptico y correlación cruzada es de 4.4×10^{-6} , equivalente a una diferencia porcentual de 0.0004%, mientras que la diferencia entre los valores mínimos es de 1×10^{-6} , igual a una diferencia porcentual de 0.0001%. Al ser estas diferencias mucho menores al 1% de la magnitud del valor del índice de refracción, es posible ignorarlas.

Por otro lado, en la Figura 15 se observan regiones de alta y baja densidad, en donde a mayor densidad, mayor índice de refracción del medio. Para analizar con mayor claridad el comportamiento de las distintas regiones del flujo supersónico en el campo de densidades, se graficó la densidad contra la posición, como se muestra en la Figura 16.

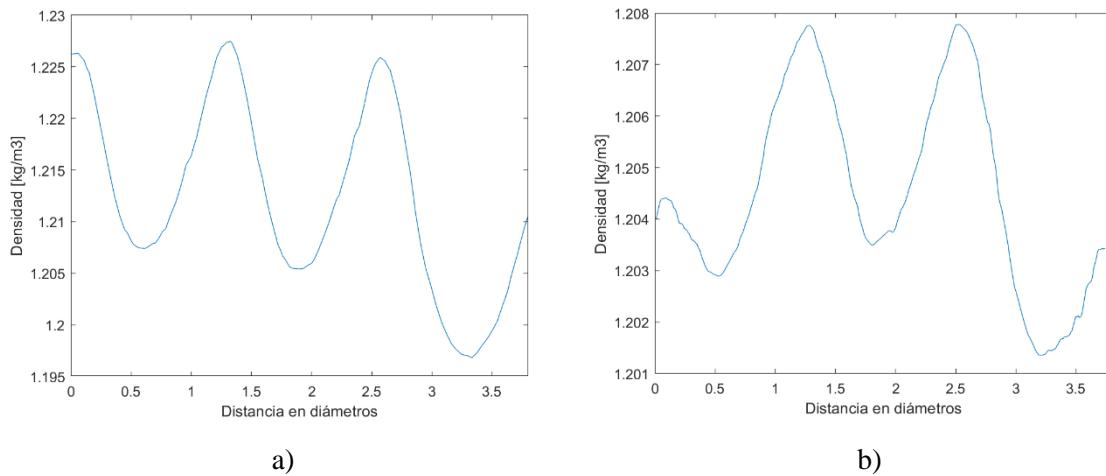


Figura 16. Comparación de los valores de densidad con respecto a la distancia resultado de: a) análisis de flujo óptico y b) análisis de correlación cruzada. Densidad del aire = $1.204 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

En la Figura 16 se observa con claridad el comportamiento periódico en la densidad relativa del flujo supersónico. La densidad del aire, al salir de la tobera (extremo derecho de la gráfica), disminuye por debajo de la densidad del aire sin perturbación hasta llegar a un mínimo local y después aumenta gradualmente a un máximo local. Sin embargo, si bien es de esperarse que este comportamiento se repita a lo largo de la estructura del flujo supersónico, este no es el caso en los resultados de correlación cruzada (Figura 16 - b).

En este caso, la densidad del tercer lóbulo aumenta muy poco y disminuye hasta alcanzar la densidad del aire sin perturbación dadas las condiciones de frontera. En contraste, en los resultados de flujo óptico (Figura 16 - a), sí es posible observar un incremento en la densidad de magnitud cercana a los dos primeros lóbulos, con una ligera disminución. Dicha disminución en la magnitud de la densidad corresponde a lo esperado ya que los flujos supersónicos se expanden gradualmente a lo largo de su trayectoria.

En resumen, los resultados del análisis para el flujo supersónico presentados en esta sección validan el funcionamiento del algoritmo de flujo óptico con el escalamiento propuesto, además de ser una muestra clara del incremento en la resolución espacial que este tipo de algoritmos ofrecen. Dicho incremento en la resolución espacial expande la posibilidad de estudiar detalles en el objeto de estudio que no serían detectados al usar algoritmos de correlación cruzada.

4 DESARROLLO EXPERIMENTAL

En este capítulo se abordan los procedimientos para la elección de los parámetros relacionados al montaje experimental, tales como el patrón de fondo y el sistema óptico. Por otro lado, se muestra el arreglo experimental utilizado para aplicar BOS al estudio del gas de un encendedor y de un soplete. Se propuso el estudio de este último caso bajo la hipótesis de que, para el gas de soplete, el índice de refracción es mayor al del gas de un encendedor, por lo que los desplazamientos del patrón de fondo son de mayor magnitud. Cabe destacar que todos los elementos del montaje experimental se adaptaron para llevar a cabo el experimento con materiales caseros.

4.1 Patrón de Fondo

Para implementar la técnica de Schlieren con un fondo de referencia, se debe de elegir el patrón de fondo adecuado según las características del sistema óptico con el que se trabaje, así como las características del fenómeno a analizar. Además, debe considerarse la fuente de luz a utilizar, ya que de ésta dependerá el material sobre el cual se genere el patrón de fondo.

Para el estudio de los fenómenos presentados en este trabajo, se generó un patrón digital de tamaño 2736 x 1824 pixeles. Dicha imagen se mostró en la pantalla de una computadora Microsoft Surface Pro-6, con la misma resolución que la imagen del patrón de fondo. La elección de esta pantalla LED proporcionó tanto el patrón de fondo, como la iluminación requerida para la realización del experimento.

4.1.1 Tamaño de los puntos

El primer paso para generar un patrón de puntos adecuado es definir el tamaño de los puntos que conformarán dicho patrón. Estos dependen directamente de la capacidad del equipo óptico, en este caso, de la resolución de la cámara a utilizar.

Para los experimentos de este trabajo, se utilizó una cámara Nikon D3300 con una resolución de 4000 x 6000 pixeles montada sobre un riel óptico, así como una lente AF-S DX NIKKOR 18-55mm f/3.5-5.6G VR. Para identificar la distancia focal óptima a utilizar, se generó la imagen de una cuadrícula de la misma resolución que la pantalla. Se colocó la cámara a una distancia fija de 50 cm y se tomó una fotografía de la cuadrícula con cada una de las distancias focales. Posteriormente, se analizaron las imágenes y se determinó que la lente de 55 mm mostraba la menor deformación de los contornos de la cuadrícula.

Una vez seleccionada la distancia focal de 55 mm, se varió la distancia de la cámara a la pantalla en intervalos de 1 cm, con el fin de encontrar la distancia en la que se obtenía el mejor enfoque en la pantalla. Como resultado, se fijó una distancia cámara-pantalla de 57 cm.

Por otra parte, se generó una imagen con puntos de tamaño 1, 2, 5, 10 y 20 px. Se fotografió dicha imagen y se encontró que el diámetro mínimo para que un punto fuera visible para la cámara fue de 1 px (un pixel con valor entre 1 y 255). Los puntos de dicho diámetro en el patrón aparecían con un diámetro final de 3 px en la imagen tomada por la cámara.

Conociendo el diámetro mínimo de los puntos, se generó una imagen adicional con puntos de tamaño de 1 px separados por 1, 2, 3, 4, 5 y 10 px de distancia entre ellos. Se fotografió dicha imagen y se determinó que la menor distancia de separación para distinguir a través de la cámara entre un pixel y otro fue de 2 px.

4.1.2 Densidad de puntos

Una vez conocido el tamaño mínimo de los puntos y la distancia mínima de separación entre ellos, se creó un patrón de puntos aleatorios. Para ello, se utilizó el código “makebospattern.m” (Frédéric Moisy, 2016). Dicho código crea “partículas” utilizando 4 círculos concéntricos con distintos valores en escala de grises. El diámetro de las partículas corresponde al diámetro del círculo externo.

En cuanto a la densidad de puntos, el programa calcula el número de partículas por milímetro cuadrado, siendo esto de gran utilidad para estimar la densidad de puntos que se

tendría en una determinada área de interrogación. Por lo anterior, se generó un patrón con 60,000 puntos y otro con 600,000 puntos con un diámetro de 0.165 mm, equivalentes a puntos de diámetro de aproximadamente 3 px (3.2763 px) en las imágenes de la cámara. Para el patrón con 600,000 partículas, se obtuvo una densidad de $13.3 \frac{\text{part}}{\text{mm}^2} = 0.026 \frac{\text{part}}{\text{px}^2}$, o bien, 27.15 partículas en una ventana de 32 x 32 px. Por otra parte, para el patrón con 60,000 partículas, se obtuvo una densidad de $1.33 \frac{\text{part}}{\text{mm}^2} = 0.0026 \frac{\text{part}}{\text{px}^2}$, o bien, 2.71 partículas en una ventana de 32 x 32 px.

Se generó otra imagen de cada patrón aplicando una translación lineal, a modo de tener dos pares de imágenes, cada uno con su respectiva densidad de partículas. Se analizaron dichas imágenes utilizando correlación cruzada con distintas ventanas de interrogación (Figura 18 y Figura 18).

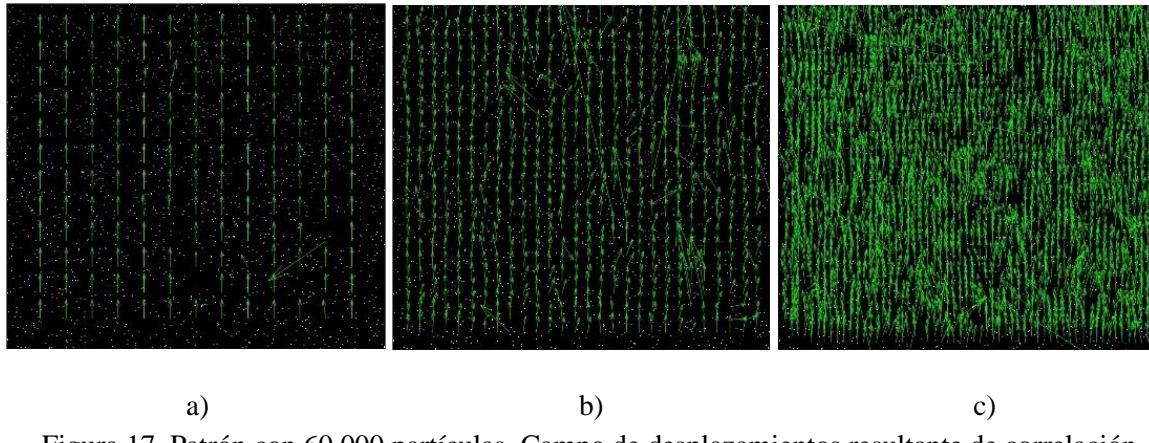


Figura 17. Patrón con 60,000 partículas. Campo de desplazamientos resultante de correlación cruzada para el patrón de puntos con desplazamientos lineales. a) Un pase con ventana de 64 x 64 px, paso de 32 px. b) Dos pasos con ventanas de 64 x 64 px y 32 x 32 px con 50% de sobreposición. c) Tres pasos con ventanas de 64 x 64 px, 32 x 32 px y 16 x 16 px con un 50% de sobreposición.



Figura 18. Patrón con 600,000 partículas.
Campo vectorial de desplazamientos para el análisis de correlación cruzada utilizando dos pasos con ventanas de 32 x 32 y 16 x 16 con un 50% de sobreposición.

De la Figura 17 se observa que, para el patrón con 60,000 puntos, la detección de los desplazamientos usando correlación cruzada muestra más vectores espurios conforme la ventana de interrogación decrece. En este caso, la separación entre puntos es en general mayor a 10 pixeles, lo cual se ve reflejado en una pobre detección de los desplazamientos. Sin embargo, en la Figura 18 correspondiente al patrón con 600,000 partículas, se observa el campo vectorial de desplazamientos con una menor cantidad de vectores espurios aún con ventanas pequeñas.

Debido a que, para utilizar el algoritmo de flujo óptico, se deben escalar los datos con respecto a los valores de correlación cruzada, es ideal utilizar el menor tamaño de ventana posible en el análisis. En este sentido, la mejor detección de los desplazamientos para ventanas de interrogación pequeñas (16 x16 px y 50% de superposición) correspondió al caso de una densidad igual a 600,000 puntos/partículas.

4.2 Sistema óptico y captura de imágenes

Como se mencionó anteriormente, el montaje experimental de la técnica BOS es relativamente más sencillo que otras técnicas de visualización de fluidos, ya que consta únicamente de una cámara, una fuente de luz, un patrón de fondo y el fenómeno de estudio.

En la Sección 4.1 se determinó el tamaño y densidad de los puntos del patrón de fondo. Por otro lado, otro de los parámetros que continúan siendo una incógnita al trabajar con la técnica BOS es el enfoque por utilizar al momento de fotografiar el fenómeno de estudio.

Se propuso estudiar tres enfoques principales: enfoque al patrón, enfoque patrón-objeto de estudio y enfoque al objeto de estudio. Sin embargo, con la óptica disponible, el máximo valor de apertura que se pudo utilizar correspondió a f/9.0. Lo anterior debido a que, utilizando un valor mayor de apertura, las fotografías del patrón de fondo eran lo suficientemente oscuras para que el algoritmo de flujo óptico no pudiese detectar ningún desplazamiento. Dicho problema persistió a pesar de incrementar el brillo de la pantalla al máximo, comprobando que para los algoritmos de flujo óptico es crucial contar con una iluminación suficiente para mostrar contraste entre los puntos del patrón y el fondo.

Un problema similar se tuvo al alejar el patrón de la cámara para incrementar la profundidad de campo, en donde la iluminación disminuyó y dio como resultado una imagen demasiado oscura.

Una vez determinado el tamaño de la apertura a utilizar, se calculó la profundidad de campo con las especificaciones correspondientes a la lente usada. Con una distancia focal de 55mm, el campo visual fue de 28°50' (Nikon Corporation, 2021) y, considerando una apertura f/9.0 y una distancia cámara-patrón de 57 cm, la profundidad de campo resultante (DOF por sus siglas en inglés) correspondió a 3.49 cm (PhotoPills, 2022).

Para la captura de imágenes, se utilizó un control remoto para tomar las fotografías a distancia, de forma que no se indujera un movimiento adicional al presionar el botón de captura. Asimismo, se configuró la cámara para guardar las imágenes en formato RAW. Se incrementó el brillo de la pantalla LED al máximo y se procuró que la iluminación en los alrededores fuera mínima para que la cámara capturara la mayor cantidad posible de iluminación proveniente de la pantalla. Asimismo, se modificaron los parámetros de la cámara para trabajar en el modo “Manual”.

Se alineó la cámara con respecto a los bordes de la pantalla LED y posteriormente se enfocó al patrón de puntos.

4.2.1 Gas de encendedor

Se utilizó un encendedor convencional de gas butano, montado sobre una superficie plana a modo de nivelar la boquilla del encendedor con el borde del patrón. Se configuró la cámara con los parámetros ISO 100, f/5.6 y una velocidad de obturación de 1/30. Se tomaron diversos conjuntos de fotografías, fotografiando primero al patrón de fondo sin fenómeno y después al patrón de fondo con el fenómeno.

Inicialmente, para accionar la salida del gas del encendedor, se presionó manualmente el gatillo y se capturó la correspondiente fotografía. Sin embargo, al analizar las imágenes, se mostró un desplazamiento lineal general del patrón. Se planteó como hipótesis que dicho movimiento era inducido al presionar manualmente el gatillo, lo cual podría generar un movimiento en la superficie sobre la cual se montó el experimento. Para solucionar dicho problema, se utilizaron tres superficies distintas sobre las cuales se montaron el riel con la cámara, el encendedor y la pantalla, respectivamente.

Como resultado, el movimiento del patrón disminuyó, sin embargo, aún fue detectado por el algoritmo de flujo óptico debido a la alta sensibilidad de éste. Se capturó un video y se trajeron los dos cuadros requeridos, sin embargo, al tener una menor resolución y menor control de los parámetros de la cámara en modo video, no se logró un correcto enfoque del patrón de fondo.

Finalmente, se colocó una liga para ejercer presión constante sobre el gatillo del encendedor, a modo de reducir el movimiento inducido a los demás elementos del experimento. De esta forma, se logró obtener un conjunto de fotografías con un mínimo movimiento del patrón de fondo, en la cual fue posible distinguir la región de estudio de interés.

4.2.2 Distribución de puntos en el patrón de fondo

Se propuso utilizar el gas del encendedor con el objetivo de determinar la distribución de puntos óptima en el patrón de fondo.

Se utilizó el patrón con 600,000 partículas aleatorias mencionado en la sección anterior (Figura 5) y otro patrón con posiciones de los puntos definidas en una cuadrícula (Figura 19 - a). Es importante destacar que, para este último caso, los “puntos” hacen referencia a un pixel de la matriz de la imagen cuyo valor de intensidad sea distinto de cero.

Para generar el patrón de puntos cuadricular, se creó un script en MATLAB (Apéndice B). Dicho programa generó una matriz de tamaño igual a la resolución de la pantalla (2736 x 1824 px), en la cual se colocó un valor aleatorio entre 1 y 255 cada tercera entrada, de forma que un pixel tendría un valor distinto a cero y los dos pixeles a sus alrededores tendrían el valor de cero. De esta forma los puntos cumplían con el tamaño y separación mínima para ser detectados por la cámara.

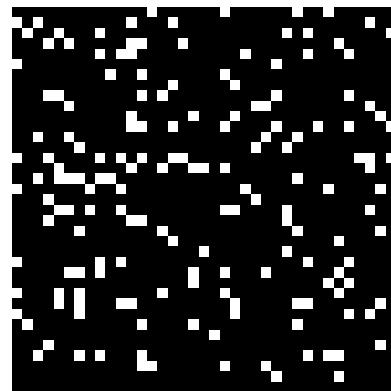
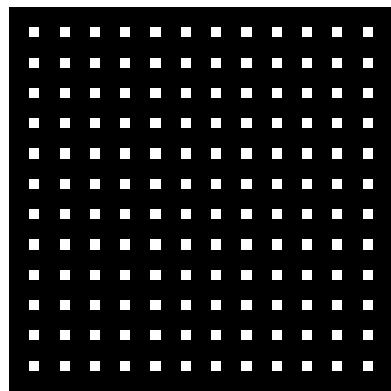


Figura 19. Distribución de puntos en el patrón de fondo: a) puntos en cuadrícula y b) puntos en posiciones aleatorias.

Para determinar la distancia óptima entre el patrón y el objeto de estudio, se varió la posición del objeto en intervalos de 1cm, partiendo desde la pantalla y hasta 17 cm después de ella. Se tomaron fotografías del gas de un encendedor para cada distancia, tanto con el patrón cuadricular, como con el patrón de puntos aleatorios. Los parámetros utilizados para dichas fotografías fueron ISO 100, f/9.0 y velocidad de obturación 1/30 s.

Como resultado, únicamente fue posible detectar desplazamientos mediante el algoritmo de flujo óptico para el caso en donde la distancia entre el encendedor y el patrón de fondo fue de 15 cm. Los resultados se muestran en la Figura 20. Considerando lo anterior y el DOF calculado, el enfoque utilizado para el desarrollo experimental correspondió a un enfoque exclusivo del patrón de fondo.

En la Figura 20 - a) se distingue con claridad la sección en la cual está presente el flujo del gas, mientras que en la Figura 20 - b) no es posible distinguir el flujo del gas debido a que se muestran desplazamientos en toda la imagen. Dichos desplazamientos parecieran indicar un movimiento general de los puntos del patrón, en particular en la mitad izquierda de la imagen. En esta región, la dirección de los vectores cambió gradualmente hasta llegar a vectores en dirección horizontal en el extremo superior izquierdo de la imagen.

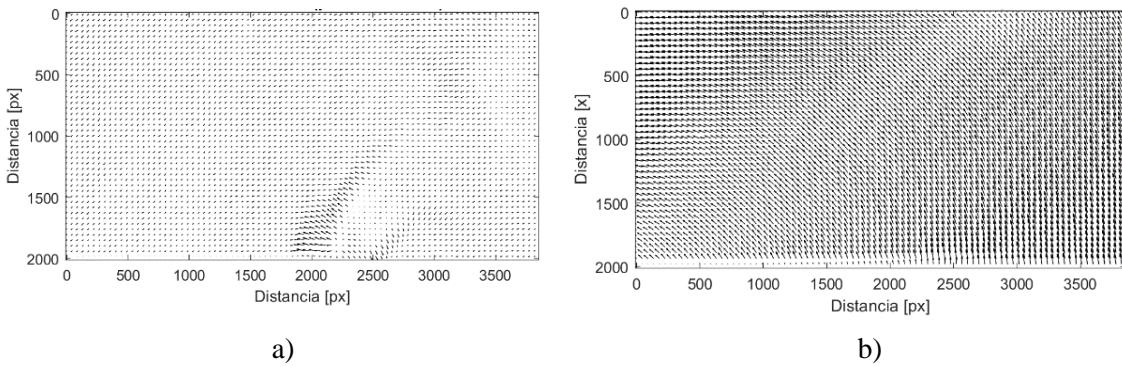


Figura 20. Campo de desplazamientos para el gas de un encendedor con patrón de fondo: a) con puntos aleatorios y b) con puntos en cuadrícula.

La hipótesis que se presenta en este trabajo para el comportamiento del patrón de puntos cuadricular es que, al tener puntos en posiciones definidas en una cuadrícula, el algoritmo de flujo óptico ya no detecta desplazamientos en cualquier dirección. Al contrario, se favorece a la detección de desplazamientos en las direcciones x y y , lo cual a su vez favorece a la detección de los cambios de intensidad en la pantalla debidos a la tasa de refresco de la pantalla. En consecuencia, se eligió al patrón de puntos aleatorios para llevar a cabo los experimentos mostrados en este trabajo.

En la Figura 21 y Figura 22 se muestra el montaje experimental final utilizado en este trabajo.

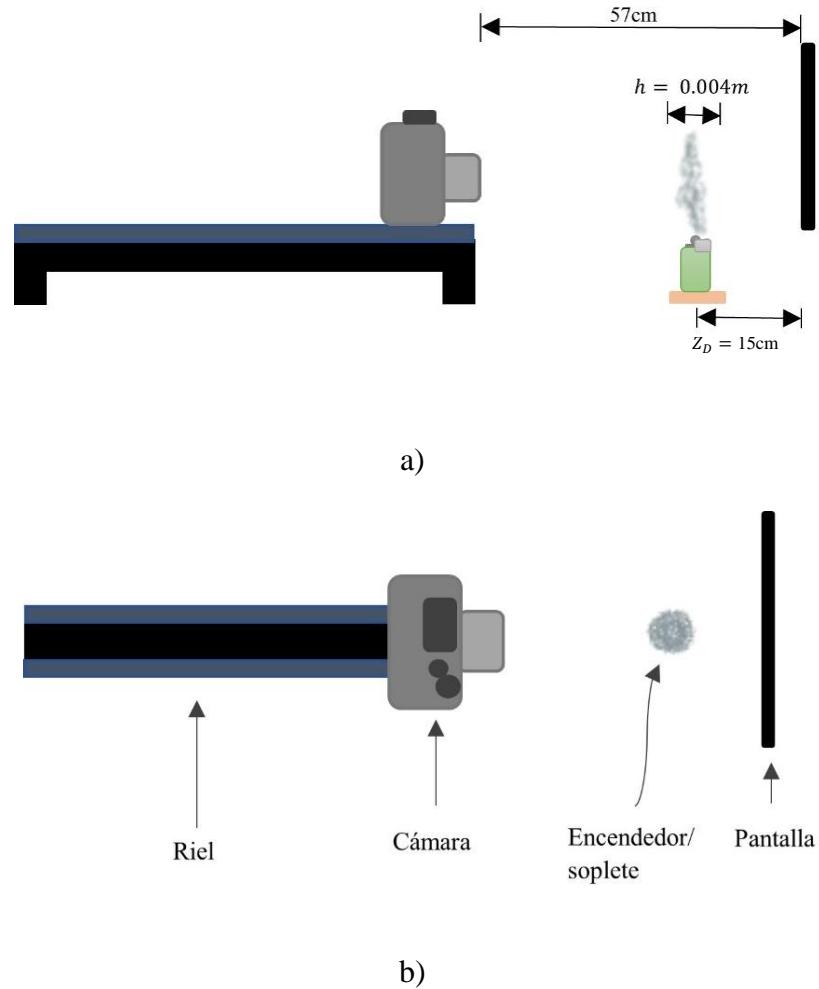
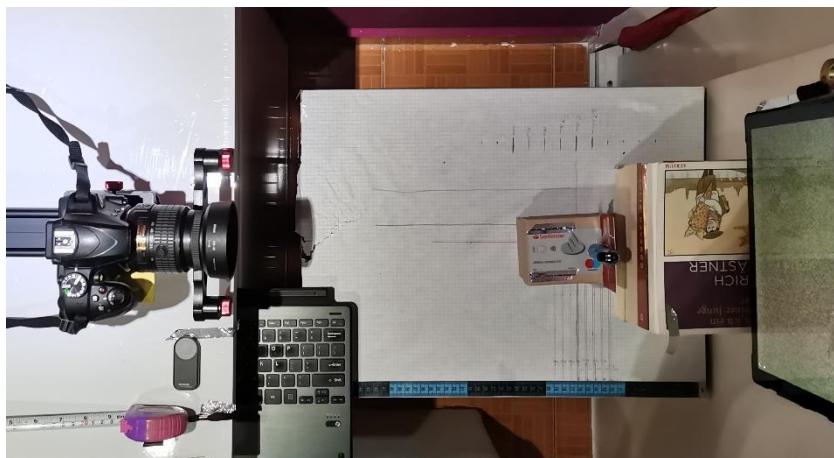


Figura 21. Diagrama del montaje experimental para la técnica de Schlieren con un Fondo de Referencia: a) vista lateral y b) vista aérea.



a)



b)

Figura 22. Fotos del montaje experimental para la técnica de Schlieren con un Fondo de Referencia: a) vista lateral y b) vista aérea.

4.2.3 Gas de soplete

Para el estudio del gas de un soplete, se utilizó un cartucho de gas butano/propano de 275 g marca Truper®, con una boquilla para lata roscada de 120 mm de largo y una apertura de 0.004 m para la salida del gas.

Se colocó el soplete a una distancia de 15 cm con respecto a la pantalla y se capturaron dos fotografías del patrón de fondo, una sin soplete y otra con el soplete. Para evitar el movimiento del montaje experimental, se colocó el soplete sobre una superficie externa y se abrió la válvula momentos antes de capturar la primera fotografía. Una vez capturada la primera fotografía, únicamente se inclinó el soplete para que el gas atravesara la sección de la pantalla y se tomó la segunda fotografía.

A pesar de reducir al mínimo cualquier movimiento inducido al encender el soplete, el análisis de las fotografías continuó mostrando un desplazamiento general de la imagen en forma diagonal, hacia la esquina superior de la pantalla. Como posible hipótesis para explicar este comportamiento, se pensó en que el tiempo de refresco de la pantalla podría inducir un cambio significativo en la intensidad de los pixeles. Ya que la pantalla utilizada tenía una única frecuencia de refresco (60 Hz), se optó por aumentar la velocidad de obturación de la cámara, a modo de capturar las fotografías antes del refresco de la pantalla.

Se configuró la cámara para tomar las fotografías utilizando ISO 100, f/5.6 y una velocidad de obturación de 1/100. Debido a que las fotografías resultaban opacas, independientemente de la apertura a utilizar, se optó intercambiar los colores del patrón, de modo que el fondo fuese blanco en vez de negro.

Al capturar el nuevo conjunto de imágenes, se detectaron franjas diagonales sobre toda la imagen (Figura 23). Debido a que dichas franjas se mantenían presentes a pesar de la velocidad de obturación, se determinó que pertenecían a un patrón de Moiré generado en la pantalla.

Los patrones de Moiré son patrones de interferencia visuales que surgen como resultado de la superposición de dos patrones de rejillas con líneas a un determinado ángulo. Cuando dichos patrones tienen tamaños diferentes o están ligeramente desalineados, se produce un

nuevo patrón con un efecto visual fluctuante. Dependiendo de la frecuencia y la dirección de las rejillas, se pueden observar distintos patrones (Weisstein, s/f).

En el caso concreto del experimento, debido a que la pantalla está compuesta por pixeles discretos a modo de cuadrícula con una resolución dada, al tomar una fotografía existió una superposición de dicho patrón y el sensor de la cámara que generó un patrón de Moiré en la imagen.

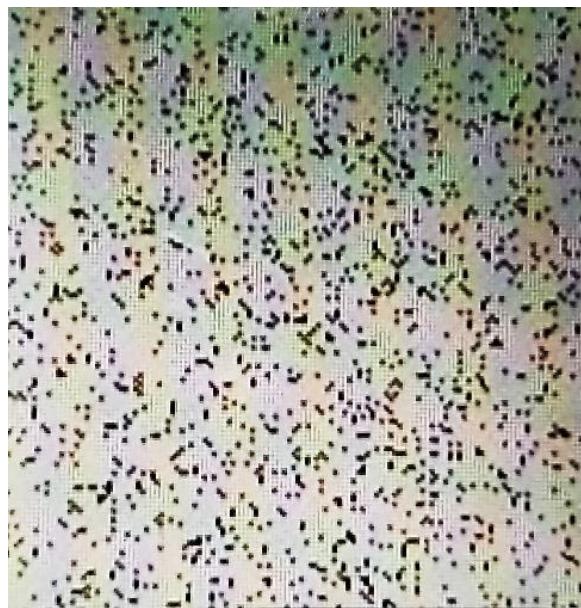


Figura 23. Fotografía del patrón de Moiré sobre una de las imágenes a analizar.

Con el objetivo de resolver este problema, se inclinó la pantalla hacia atrás un ángulo de 2° con respecto a la vertical. De esta forma, finalmente las líneas desaparecieron de las fotografías y fue posible realizar el análisis de las imágenes correspondientes al gas del soplete.

4.3 Preprocesamiento de imágenes

El primer paso para poder trabajar con las fotografías capturadas consistió en utilizar el programa Capture NX-D (Nikon, 2021) para editar y procesar las imágenes en formato RAW de forma no destructiva, conservando la calidad de las imágenes y la información de

intensidad de los pixeles. En este programa se recortaron las imágenes para conservar únicamente los segmentos de la imagen en donde se encontraba el objeto de estudio y se convirtieron las imágenes a un formato .TIFF.

Posteriormente, mediante el *software* ImageJ (W.S, s/f) se convirtió a las imágenes a un formato 8 bits y se guardó cada par de imágenes con un formato “NOMBRE_000” y “NOMBRE_001” para las imágenes correspondientes al patrón de fondo sin objeto de estudio (imagen de referencia) y al patrón de fondo con objeto de estudio, respectivamente.

4.4 Algoritmo de Flujo Óptico-BOS

Debido a que el algoritmo de flujo óptico-BOS utiliza los valores de desplazamientos resultantes de correlación cruzada, es necesario primero analizar las imágenes con dicho método. En este trabajo se realizó el análisis de correlación cruzada mediante PIVLab y se guardaron las matrices de desplazamiento resultantes.

Cabe destacar que una de las ventajas de utilizar el algoritmo de flujo óptico con el escalamiento es que se aumenta la resolución espacial, además de brindar mayor precisión en los desplazamientos menores a un pixel.

Una vez obtenidas las matrices de desplazamiento de PIVLab, se ejecutó el código “OpticFlow_BOS.m”, escrito en MATLAB (Apéndice B). Dicho código realizó la lectura de las dos imágenes correspondientes al caso de estudio y calcularon los desplazamientos u y v . Después, se realizó la lectura de las matrices de desplazamientos obtenidos de PIVLab y se les aplicó a los datos el escalamiento propuesto.

Posteriormente, se utilizaron los parámetros experimentales de escala, magnificación, tamaño del objeto, distancia objeto-patrón de fondo, índice de refracción y densidad del medio que rodea al objeto, además de la constante de Gladstone-Dale del gas por estudiar. Con dichos datos y las matrices de desplazamientos, se ejecutó el algoritmo de diferencias finitas de cuarto orden y la matriz resultante se ingresó a la función que resuelve la ecuación de Poisson.

Finalmente, se obtuvo la matriz con los valores de la densidad en cada pixel y se multiplicó cada entrada de la matriz por la constante de Gladstone-Dale +1 para obtener la matriz de índice de refracción. En la Figura 24 se muestra un esquema general del algoritmo de flujo óptico-BOS. La implementación completa de dicho algoritmo se encuentra disponible para descargar en el Apéndice A.

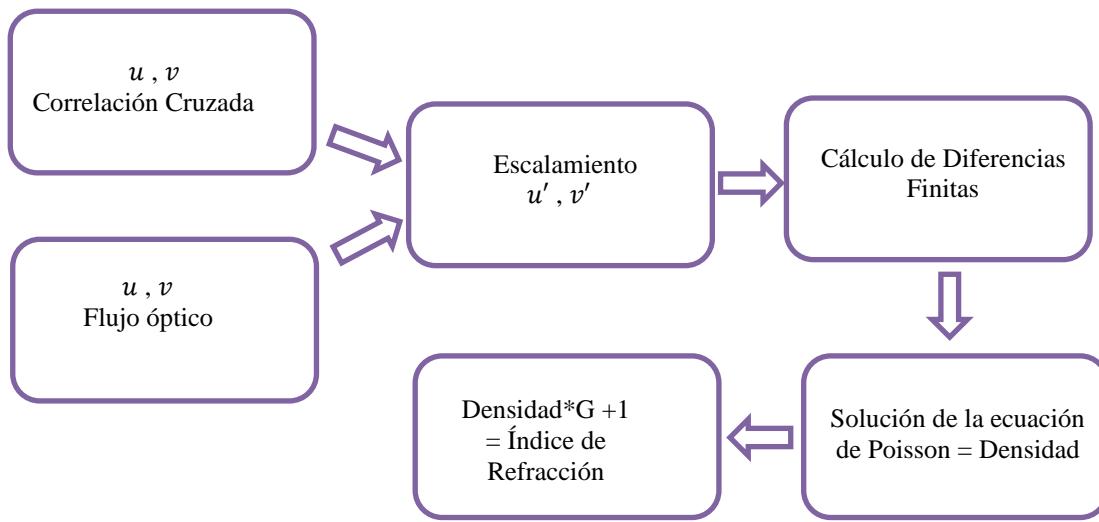


Figura 24. Algoritmo general de flujo óptico-BOS para el análisis de un par de imágenes.

5 RESULTADOS Y ANÁLISIS

5.1 Gas de encendedor

Se analizaron las imágenes correspondientes al gas del encendedor, las cuales tenían un tamaño de 638 x 820 px. Para el análisis de correlación cruzada se utilizaron dos pasos, el primero con una ventana de 32 x 32 px y un paso de 16 px, seguido de una ventana de 16 x 16 px y un paso de 8 px. La escala obtenida de los parámetros experimentales y las imágenes fue de $1px = 4.5 \times 10^{-5} m$. En la Figura 25 se muestra el campo de desplazamientos resultante para cada caso.

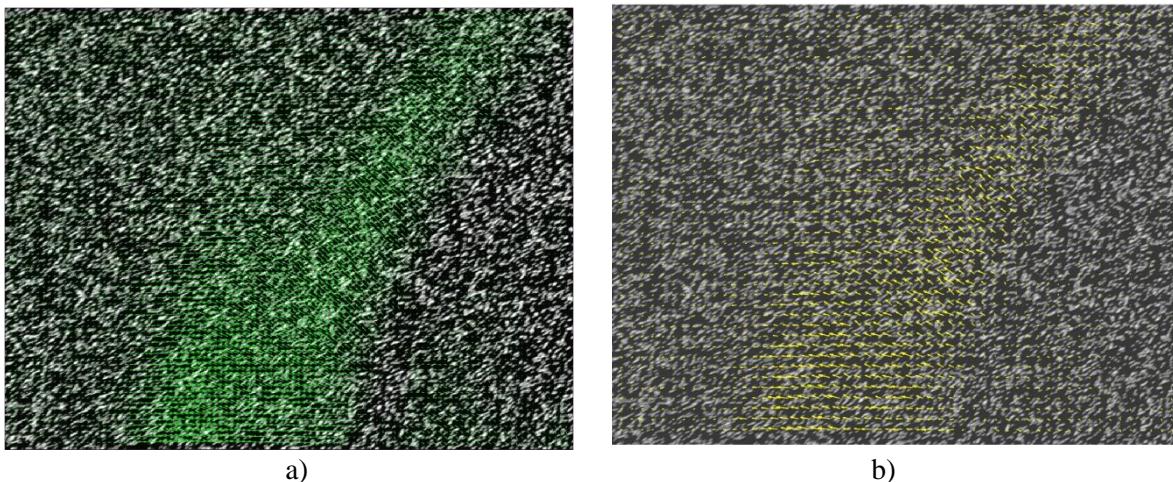


Figura 25. Campo vectorial de desplazamientos. a) Correlación cruzada y b) Flujo óptico. La coordenada (0,0) de la imagen se encuentra en la esquina superior izquierda.

Con el objetivo de verificar el comportamiento de los datos de flujo óptico con el escalamiento, se comparó la columna central de las matrices de los desplazamientos en la dirección x y y con los valores obtenidos a través del análisis de correlación cruzada (Figura 26).

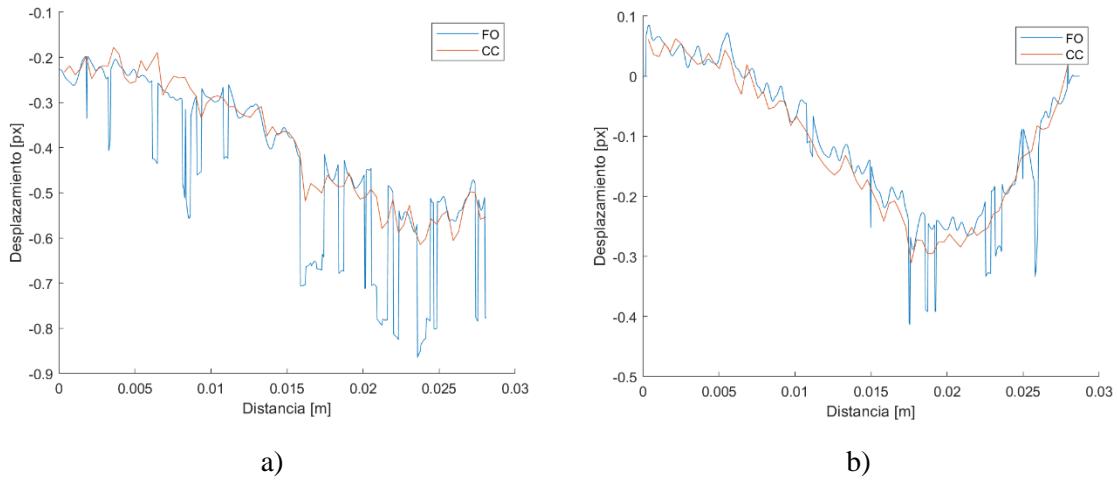


Figura 26. Comparación de los desplazamientos con respecto a: a) dirección x y b) dirección y.

Se observa que conforme la magnitud de los desplazamientos disminuye, el algoritmo de flujo óptico detecta desplazamientos de menor magnitud que aquellos detectados mediante correlación cruzada. Esto se debe a que, en PIVLab, el cálculo de desplazamientos del orden de subpixel está sesgado hacia valores enteros (Thielicke, 2014). De esta forma, PIVLab y su algoritmo de correlación cruzada subestima los desplazamientos de los puntos en la imagen, al contrario del algoritmo de flujo óptico que es capaz de detectar desplazamientos del orden de subpixel con mayor precisión.

Una vez obtenido el campo vectorial de desplazamientos, se calcularon las derivadas de éstos mediante diferencias finitas. Como resultado, se obtuvo una función para cada pixel en la imagen y el término fuente de la Ec. (35) de Poisson.

Para resolver la ecuación de Poisson, se usó el método de sobre relajación sucesiva (*Successive Over Relaxation, SOR* por sus siglas en inglés). Este método es una variante del método de Gauss-Seidel y tiene como ventajas que reduce el error numérico y tiende a converger más rápido en comparación con otros algoritmos (L. Burden et al., 2017).

Ya que la ecuación de Poisson es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, es necesario fijar condiciones de frontera para resolvérla. Debido a la naturaleza del flujo en las imágenes y a que no se conocen de antemano los valores de índice de refracción y densidad en las regiones en donde hay flujo, se supusieron condiciones de frontera tipo Neumann homogéneas (fronteras Norte y Sur de las imágenes) como una primera aproximación.

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (55)$$

Por otro lado, se propusieron condiciones de frontera de tipo Dirichlet en las orillas paralelas a los lados del flujo (fronteras Este y Oeste). De esta manera se usaron los valores de las propiedades del medio circundante, esto es, la densidad del aire.

$$\rho = \rho_{aire} \quad (56)$$

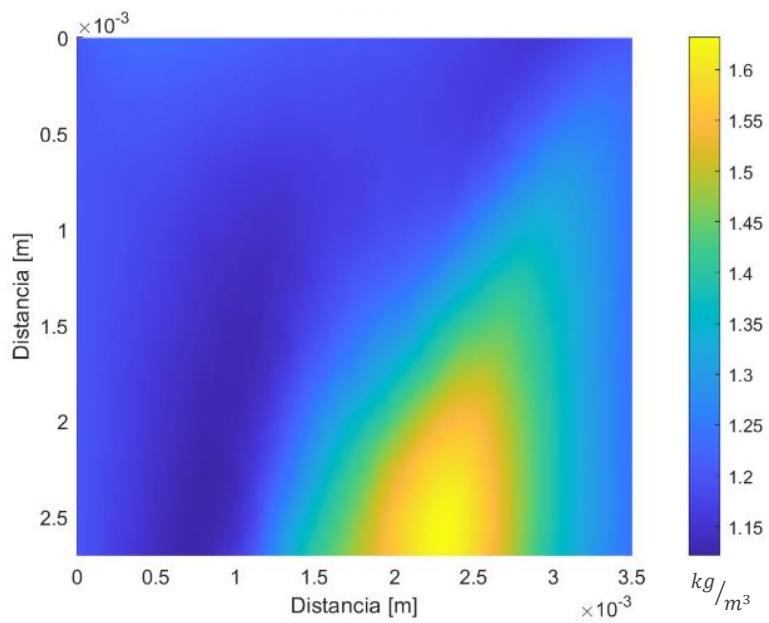
Asimismo, en el análisis se utilizaron los valores de parámetros mostrados en la Tabla 1. Ya que la constante de Gladstone-Dale no se determinó experimentalmente, se utilizó un valor estimado de para el butano (Kawahara et al., 2003).

Tabla 1. Valores de los parámetros requeridos para el cálculo de densidad e índice de refracción

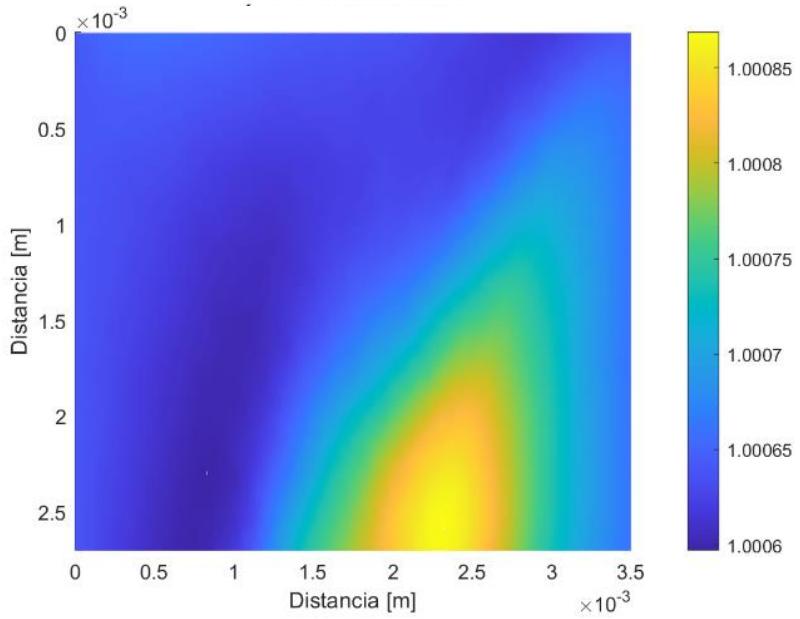
Símbolo	Valor
esc	$22222.22 \frac{px}{m}$
h	$0.0015 m$
L	$0.15 m$
Mag	0.0858
n_0	1.0002921
ρ_0	$1.204 \frac{kg}{m^3}$
G	$5.3236e-4 \frac{m^3}{kg}$

De la ejecución del algoritmo de flujo óptico, se tuvieron dos matrices de desplazamientos de tamaño 635×817 , mientras que las matrices de correlación cruzada resultaron de tamaño 89×72 px. Para el algoritmo de flujo óptico-BOS, la solución convergió en 65428 iteraciones, o 1147.44 segundos. Por otro lado, con las matrices de datos de correlación cruzada, la solución convergió en 2,585 iteraciones, o 2.89 segundos. Lo anterior implica que el algoritmo de flujo óptico-BOS requirió aproximadamente 25 veces más iteraciones para converger que en el caso de correlación cruzada.

De la Figura 27 y la Figura 28 se observa que el gas, al salir del encendedor, tiene una densidad mayor que el aire sin perturbar a su alrededor, y comienza a expandirse tanto en dirección horizontal, como en la vertical. Conforme el gas se expande, los desplazamientos de las moléculas que lo conforman decrecen en ambas direcciones, siendo la dirección x aquella que decrece con mayor rapidez. Asimismo, la magnitud de la densidad reduce hasta aproximadamente $0.054 \frac{kg}{m^3}$ por debajo de la densidad del aire sin perturbar (ρ_0). Como consecuencia, el campo escalar de densidad y de índice de refracción toma la forma análoga a la flama de una vela, aun cuando únicamente se trata del gas sin el proceso de combustión. Lo anterior indica que, una vez iniciado el proceso de combustión, las zonas de menor densidad que se observan en la estructura del gas del encendedor (capa exterior de la estructura) tendrán una mayor temperatura que el interior, lo cual es consistente con las temperaturas asociadas a la flama de una vela (*Candle Science*, 2020).

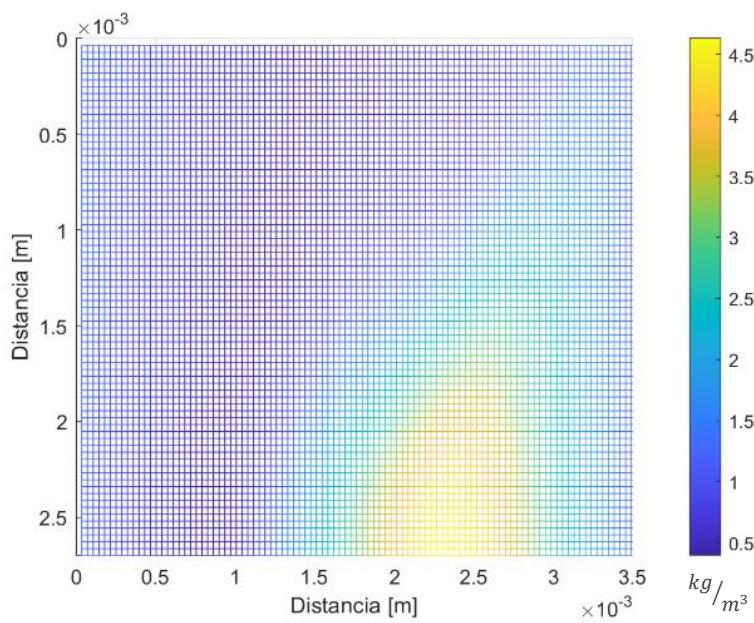


a)

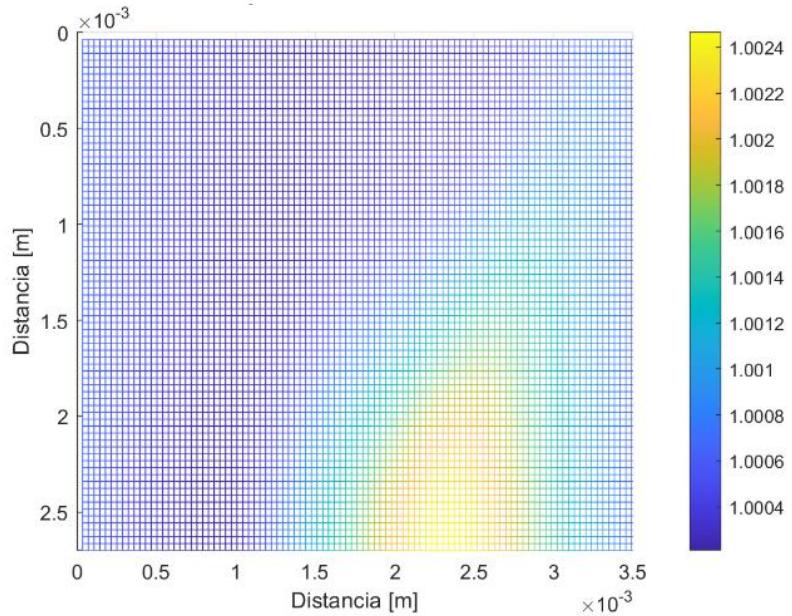


b)

Figura 27. Campo escalar de: a) densidad y b) índice de refracción para el gas de un encendedor. Análisis realizado mediante el algoritmo de flujo óptico-BOS.



a)



b)

Figura 28. Campo escalar de: a) densidad y b) índice de refracción para el gas de un encendedor. Análisis realizado mediante correlación cruzada (PIVLab).

Por otro lado, en la Figura 28 se muestra una estructura similar del gas, sin embargo, debido a la baja resolución espacial resultante del análisis de correlación cruzada, no se distingue a detalle la transición de las distintas regiones del gas. Asimismo, la baja resolución espacial ocasionó errores en el cálculo de la densidad, cuyo valor máximo se encuentra aproximadamente en $4.5 \frac{kg}{m^3}$, lo que equivale a más de 3.7 veces el valor de la densidad del aire sin perturbaciones. De este modo, el cambio en el índice de refracción en el gas, calculado con correlación cruzada, es de 2×10^{-3} , mientras que el cambio calculado mediante el algoritmo de flujo óptico-BOS es de 2.5×10^{-4} , es decir, un orden de magnitud menor.

5.2 Gas de soplete

Se analizaron un par de imágenes correspondientes al gas del soplete mencionado en la Sección 4.2.3, las cuales tenían un tamaño de 1106 x 2702 px. El análisis de correlación cruzada se realizó con dos pasos, el primero con una ventana de 32 x 32 px y un paso de 16 px, seguido de una ventana de 16 x 16 px y un paso de 8 px (50% de sobreposición). Análogo al caso anterior, La escala obtenida de los parámetros experimentales y las imágenes fue de $1px = 4.5 \times 10^{-5} m$. El campo vectorial de desplazamientos para cada caso se muestra en la Figura 29.

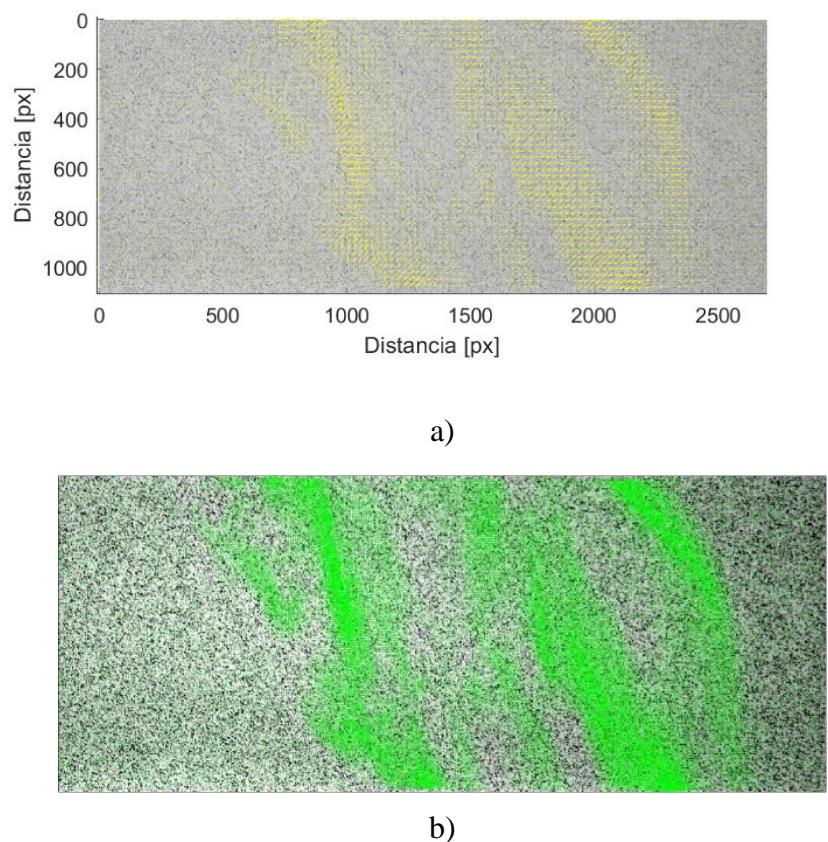


Figura 29. Campo vectorial de desplazamientos. a) Correlación cruzada y b) Flujo óptico. La boquilla del soplete se ubicó en la zona inferior, fuera del área de la imagen.

Con el objetivo de verificar el comportamiento de los datos de flujo óptico con el escalamiento, se comparó la columna central de las matrices de los desplazamientos en la dirección x y y con los valores obtenidos a través del análisis de correlación cruzada (Figura 30).

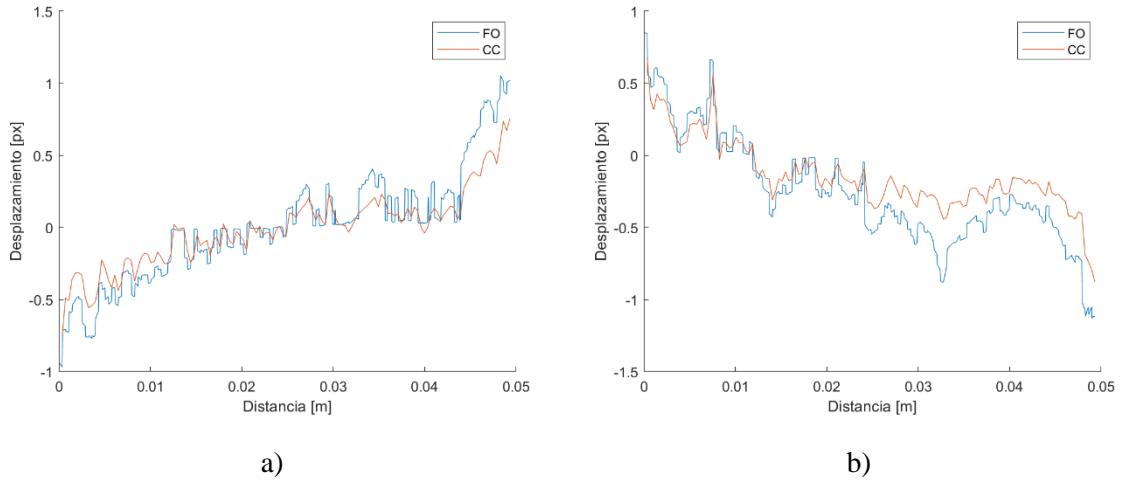


Figura 30. Comparación de los valores de los desplazamientos en: a) dirección x y b) dirección y .

En este caso, nuevamente la magnitud de los desplazamientos resultantes de flujo óptico y correlación cruzada difieren en mayor medida en los extremos de la imagen, en donde los desplazamientos aumentan. En la Figura 31 se observa que, en contraste con el caso del gas del encendedor, se tienen desplazamientos de mayor magnitud. Dichos desplazamientos se encuentran en el intervalo de (-2.7, 2.7) px para U y de (-2.3,1.3) px para V .

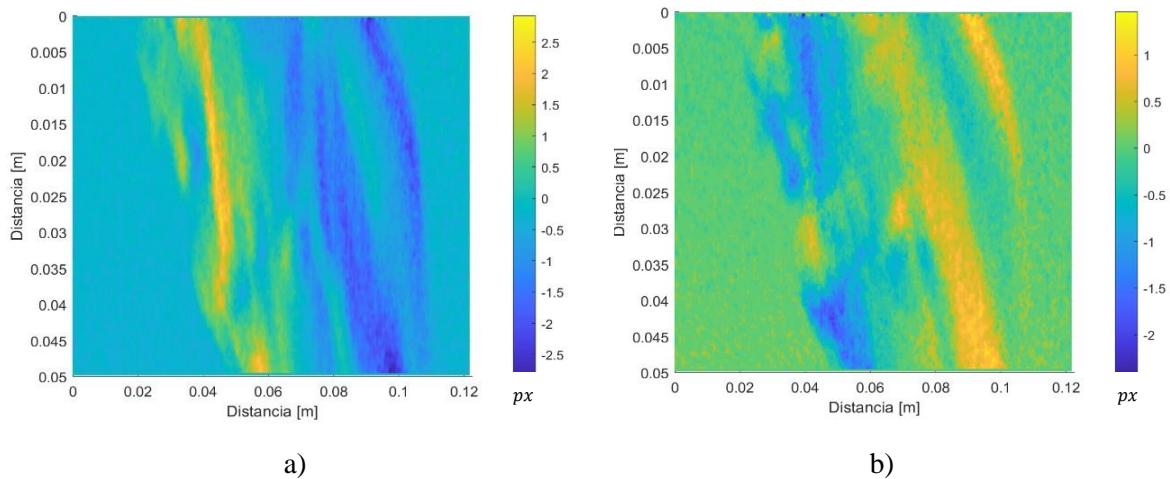
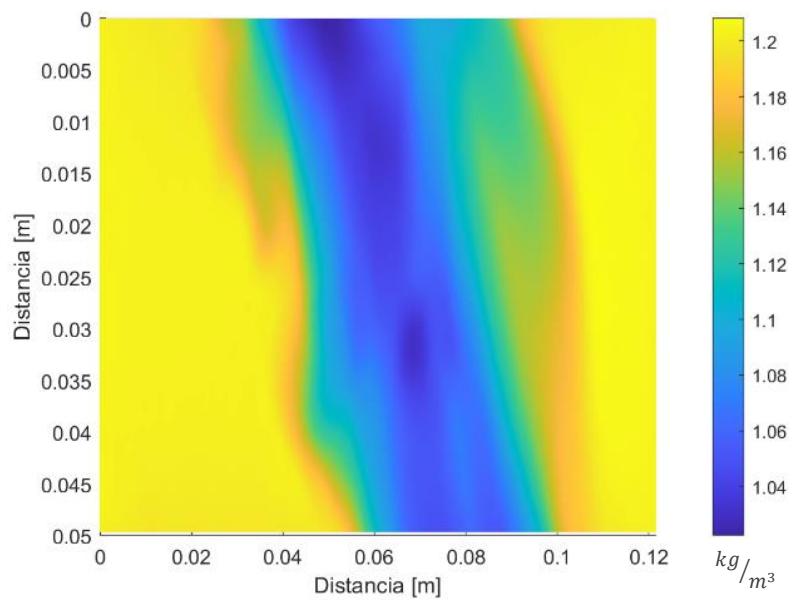


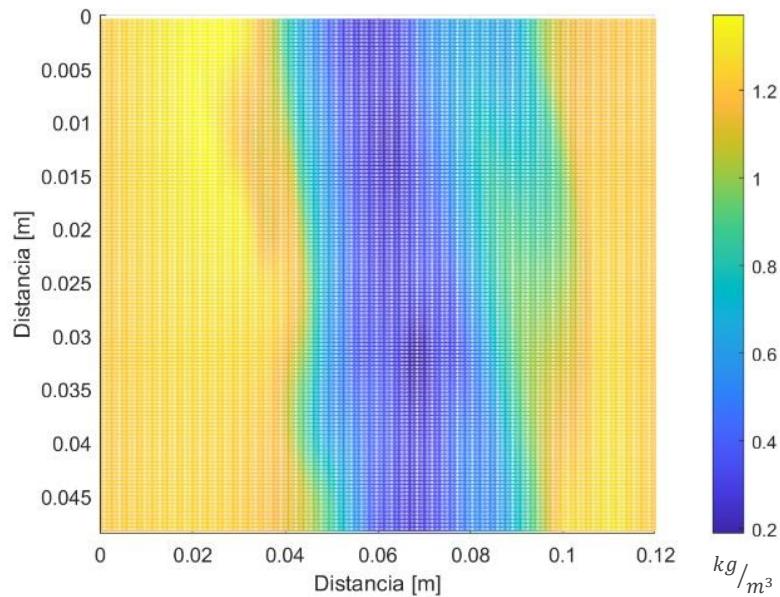
Figura 31. Campo escalar de desplazamientos obtenidos mediante el análisis de flujo óptico en: a) dirección x y b) dirección y .

Debido a la naturaleza del flujo en las imágenes, se utilizaron nuevamente condiciones de frontera tipo Neumann en las fronteras Norte y Sur de la imagen. En cuanto a los parámetros para resolver la ecuación de Poisson, únicamente se modificó el tamaño del objeto a $h = 0.004$ m (Tabla 2).

En el caso de la ejecución del algoritmo de flujo óptico-BOS con los datos de flujo óptico, la solución convergió en 109730 iteraciones, siendo un total de 6496.04 segundos y dando como resultado una matriz de datos de 1106 x 2702 pixeles. Por otro lado, en el caso de la ejecución del algoritmo de BOS con los datos de correlación cruzada, la solución convergió en 4010 iteraciones, siendo un total de 6.54 segundos y dando como resultado una matriz de 137 x 336 px. Análogo al caso anterior, estos datos muestran que se requirieron aproximadamente 27 veces más iteraciones al utilizar las matrices de datos de flujo óptico que al utilizar matrices de datos de correlación cruzada. Los resultados se muestran en la Figura 32 y la Figura 33.

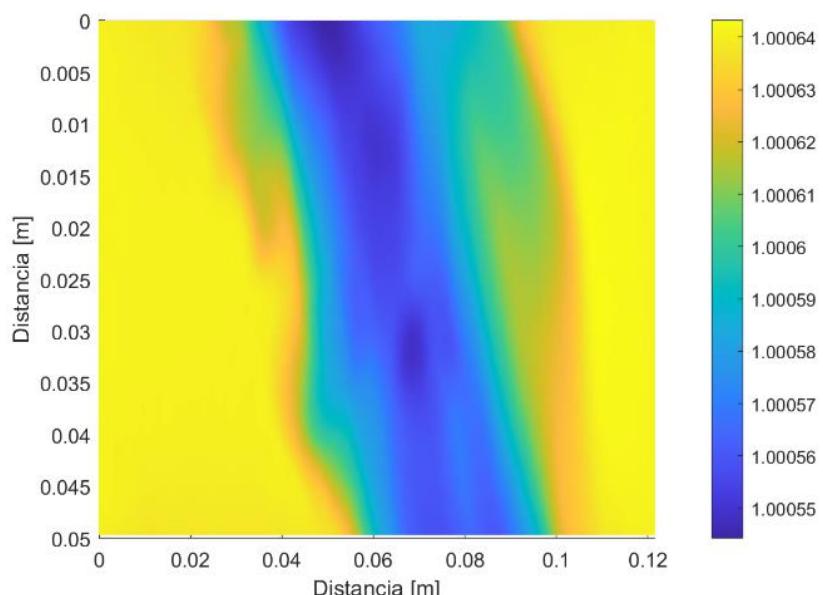


a)

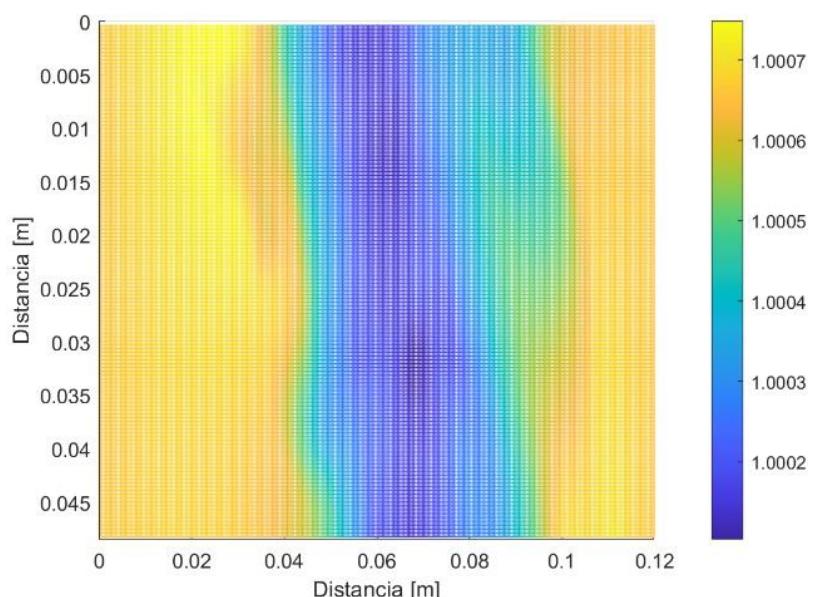


b)

Figura 32. Campo escalar de densidad para el gas de un soplete. Análisis realizado mediante el algoritmo de: a) flujo-óptico-BOS y b) correlación cruzada.



a)



b)

Figura 33. Campo escalar de índice de refracción para el gas de un soplete. Análisis realizado mediante el algoritmo de: a) flujo-óptico-BOS y b) correlación cruzada.

Analizando el comportamiento general de la distribución de densidad, se observa que el área correspondiente al flujo del gas del soplete muestra una menor densidad que el aire a su alrededor y aumenta gradualmente hacia los extremos de la imagen. Este comportamiento implica que la temperatura del gas proveniente del soplete es mayor que la del aire a su alrededor.

Aunado a lo anterior, a diferencia del gas del encendedor, la estructura del flujo es vertical, y dentro de ésta se observan distintas tonalidades de color que muestran una estructura con mayor complejidad. Relacionando estas observaciones con las características de la estructura general de los jets libres, es posible identificar las tres regiones del flujo: la región cercana o núcleo del flujo (área central azul), la región intermedia o mejor conocida como “región de mezcla” (área externa del flujo) y la región lejana (área del aire alrededor del flujo).

De las características conocidas de los flujos libres, se sabe que conforme el flujo se desarrolla, se inducen vórtices entre la región de mezcla y la región lejana (Wang y Feng, 2018). En este caso, los desplazamientos fueron menores a 2.7 px, lo que equivale a $1.215 \times 10^{-4} m$. Si se considera el diámetro de la región central del flujo del soplete observada, la viscosidad del butano y el valor de densidad obtenido del análisis se tiene que el número de Reynolds del flujo en cuestión es de $Re = 0.58$, es decir, se tiene un flujo laminar. En este tipo de flujos, los vórtices son formados en la región de mezcla debido al contacto entre dos flujos con distintas velocidades, en este caso el jet del soplete y el aire circundante. Los resultados del análisis de flujo óptico permiten observar con mayor detalle la región en donde se lleva a cabo la formación de vórtices. Dicha región está representada por los colores verde y naranja (Figura 33 y la Figura 33), en donde la estructura ya no es completamente uniforme y vertical.

Asimismo, en contraste con los resultados del análisis con flujo óptico, en los resultados correspondientes a correlación cruzada no es posible distinguir con claridad las distintas regiones dentro del flujo en donde existen cambios mínimos en la densidad, tan pequeños como $0.04 \frac{kg}{m^3}$. Asimismo, el cambio de la densidad entre la región del flujo de gas y sus alrededores, registrado por flujo óptico, es de aproximadamente $0.16 \frac{kg}{m^3}$, mientras que el

cambio calculado con correlación cruzada es de aproximadamente $1 \frac{kg}{m^3}$. En cuanto al índice de refracción, el cambio detectado por flujo óptico es de aproximadamente 9×10^{-5} , mientras que el cambio en el índice de refracción resultado de correlación cruzada es de 5×10^{-4} .

Por otro lado, se realizó un análisis de orden de magnitud para la resolución y la incertidumbre asociada en el índice de refracción considerando el algoritmo de flujo óptico. Dicho cálculo se obtuvo a partir de la ecuación de BOS para el cambio en índice de refracción y la expresión del correspondiente error asociado (Ec. (57) y (58)). En donde, al ser la misma expresión para ambas direcciones, el subíndice w corresponde a la dirección elegida ($w = x, y$).

$$n_w = \frac{\partial n}{\partial w} = \frac{n_0}{M_{ag} Z_D h} \xi_w \quad (57)$$

$$\Delta n_w = \sqrt{\left(\frac{\partial n_w}{\partial M_{ag}}\right)^2 \delta M_{ag}^2 + \left(\frac{\partial n_w}{\partial Z_D}\right)^2 \delta Z_D^2 + \left(\frac{\partial n_w}{\partial h}\right)^2 \delta h^2 + \left(\frac{\partial n_w}{\partial \xi_w}\right)^2 \delta \xi_w^2} \quad (58)$$

En el caso del desplazamiento aparente de los puntos en el patrón de fondo ξ_w , se sabe que el desplazamiento es del orden de subpixel. Este desplazamiento se escaló mediante el valor de la magnificación a las unidades de distancia correspondientes. En cuanto al desplazamiento en el gradiente del índice de refracción ∂w , éste se considera como la diferencia entre las regiones analizadas. Para los algoritmos de flujo óptico, dicha distancia corresponde a 1 px. En la Tabla 2 se muestran los parámetros considerados en el experimento con sus respectivos órdenes de magnitud e incertidumbres.

Tabla 2. Orden de magnitud de los parámetros utilizados considerados en el experimento.

Parámetro	Valor	Símbolo	Orden de Magnitud	Orden de Magnitud de la Incertidumbre
Magnificación	0.08582	M_{ag}	10^{-2}	10^{-5}
Distancia entre el patrón de fondo y el objeto de estudio	0.15 m	Z_D	10^{-2} m	10^{-3} m
Espesor del objeto de estudio	0.004 m	h	10^{-2} m	10^{-3} m
Índice de refracción del aire	1.0002921	n_0	10^0	10^{-7}
Desplazamiento aparente del patrón de fondo	3.8×10^{-7} m	ξ_w	10^{-7} m	10^{-8} m
Desplazamiento en el gradiente del índice de refracción	4.5×10^{-6}	δw	10^{-6}	-
Cambio del índice de refracción	-	δn	10^{-7}	10^{-8}
Constante de Gladstone-Dale	$5.3236 \times 10^{-6} \frac{m^3}{kg}$	G	$10^{-4} \frac{m^3}{kg}$	-

Como resultado, se obtuvo que el orden de magnitud del cambio en el índice de refracción es de 10^{-7} , y el orden de magnitud de su error asociado es del orden de 10^{-8} . La mayoría de los medidores de índice de refracción dan 4 dígitos e incluso algunos otorgan 6 dígitos, por lo que, al tener un orden de magnitud de 10^{-7} , se está aumentando en un orden de magnitud la precisión.

Finalmente, es importante notar que, en la técnica BOS, lo que se observa es la contribución de todos los planos 2D de un flujo 3D al mismo tiempo. Esto implica que en la técnica de BOS convencional es ideal trabajar con flujos axisimétricos, en donde todas las proyecciones sean idénticas. El sistema usado en este trabajo para el estudio del gas de un encendedor y de un soplete se supuso como axisimétrico. Esto debido a que en ambos casos se utilizó una boquilla circular para la salida del gas y a que se analizó una región cercana a ella, con distancia vertical con respecto de ésta de 0.25 cm para el gas del encendedor y 4.5 cm para el gas del soplete. Además, en la Figura 28, Figura 28, Figura 32 y Figura 33 se observan las regiones de mezcla, en donde el gas se mezcla con el aire a su alrededor de la misma manera con respecto a un eje.

Si en un futuro se deseara estudiar flujos no axisimétricos, sería posible utilizar el algoritmo de detección de desplazamientos desarrollado en este trabajo para beneficiarse del incremento en la resolución espacial y precisión, sin embargo, se requerirían más cámaras y modificar el patrón de fondo para obtener proyecciones a distintos ángulos de visión del experimento y a partir de éstas reconstruir la imagen del fenómeno.

6 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se cumplió con el objetivo de optimizar la técnica de Schlieren con un fondo como referencia, principalmente incrementando la resolución espacial de los resultados a través del algoritmo de flujo óptico. De esta forma, fue posible obtener un valor de densidad por cada pixel en la imagen, en comparación con el análisis de correlación cruzada, en donde se obtuvo un valor de densidad por cada conjunto de 8 píxeles (tamaño del último paso utilizado en los análisis).

Se implementó un algoritmo de flujo óptico para detectar desplazamientos. Con el cual se implementó un sistema BOS casero, comprobando el potencial de la técnica BOS para ser adaptada aun sin equipo de laboratorio especializado

Se encontró que el algoritmo utilizado de Flujo óptico – BOS, en comparación con la correlación cruzada y BOS, mejora la sensibilidad en los desplazamientos menores a un pixel y además aumenta la resolución espacial en un orden de magnitud. Ambas mejoras permiten estudiar la estructura del flujo supersónico a mayor profundidad, observando detalles que en el estudio previo con correlación cruzada no habían sido detectados.

Como una primera aproximación al problema de que el flujo óptico no mide la magnitud física del desplazamiento, se propuso un escalamiento para obtener valores cuantitativos de los desplazamientos detectados a través de flujo óptico. Dichos resultados fueron validados usando los datos de un flujo supersónico previamente estudiado.

Usando los resultados del flujo óptico se usó la técnica de BOS para obtener el campo escalar de densidad e índice de refracción del flujo libre del gas butano de un encendedor y del gas de un soplete. Lo anterior permitió estudiar la estructura del flujo supersónico a mayor profundidad, observando detalles que en el estudio previo con correlación cruzada no habían sido detectados.

Como resultado del análisis de Flujo óptico-BOS, el orden de magnitud del cambio en el índice de refracción calculado fue de 10^{-7} y el orden de magnitud de su error asociado fue del orden de 10^{-8} . De esta forma, se logró aumentar en un orden de magnitud la precisión de la técnica.

En cuanto al costo computacional del algoritmo de flujo óptico-BOS, debido a la alta resolución espacial que éste provee, la convergencia de la última etapa del código encargada de resolver la ecuación de Poisson requirió en promedio 25 veces más iteraciones que al utilizar matrices de datos de correlación cruzada. Lo anterior se reflejó en el tiempo de cómputo. Debido a esto, al utilizar el algoritmo de flujo óptico-BOS, es crucial considerar el fenómeno de estudio y los objetivos de la investigación. Para aquellos casos en donde el objetivo principal sea estudiar un fenómeno con la mayor resolución posible, como fue el caso de este trabajo, entonces el algoritmo de flujo óptico será una mejor opción. Por otro lado, en casos en donde la prioridad sea el analizar una gran cantidad de imágenes, los algoritmos de correlación cruzada serán mejores que los algoritmos presentados en este trabajo, a menos que se optimice el algoritmo para resolver la ecuación de Poisson.

7 TRABAJO A FUTURO

En el presente trabajo se cumplió con el objetivo de optimizar la técnica de Schlieren con un fondo como referencia, principalmente incrementando la resolución espacial de los resultados a través del algoritmo de flujo óptico. Sin embargo, los experimentos se realizaron con materiales caseros, por lo que aún hay espacio para mejoras, principalmente si se puede llevar la técnica al laboratorio.

Algunos puntos que se proponen para tratar en un futuro son:

- Utilizar otro patrón de fondo y una fuente de iluminación constante. Asimismo, colocar los elementos del montaje experimental en superficies más estables reduciría el número de conjuntos de imágenes con movimiento inducido al accionar el objeto de estudio.
- Determinar experimentalmente el valor de la constante de Gladstone-Dale específico según la composición del gas utilizado y las condiciones del experimento para aumentar la precisión de los resultados.
- Mejora de la determinación del factor de escala en el algoritmo de flujo óptico-BOS. Esto a modo de automatizar su determinación sin comprometer en mayor medida el tiempo de cómputo.
- Considerar distintos métodos de mallas o esquemas piramidales con más niveles para incrementar la magnitud de los desplazamientos que es posible detectar.
- Utilizar otro esquema computacional para resolver la ecuación de Poisson, como lo es la paralelización del algoritmo. Así, se ejecutaría el algoritmo por partes y al mismo tiempo en varias unidades de procesamiento, lo que en principio disminuiría el tiempo de cómputo resultante de aumentar la resolución espacial de los datos.

Finalmente, es de gran interés probar el algoritmo de flujo óptico-BOS en el estudio de un fenómeno con una dinámica más compleja y con desplazamientos de mayor tamaño. Por un lado, podría utilizarse la implementación propuesta en este trabajo para el estudio de plumas de combustión.

A finales de 2021 se inició una investigación sobre el estudio de un flujo supersónico de retropropulsión a través de la técnica BOS con flujo óptico en conjunto con el Dr. Owen Williams, miembro del departamento de Aeronáutica y Astronáutica de la Universidad de Washington y bajo la supervisión del M. en I. David Porta Zepeda y el Dr. Carlos Echeverría. Debido a la violenta naturaleza de estos flujos, han sido pocos los estudios cuantitativos que se han llevado a cabo. Sin embargo, el obtener valores del campo de desplazamientos y densidad para estos flujos ayudaría en gran medida a la comprensión de la física subyacente.

BIBLIOGRAFÍA

- Acheson, D. J. (1990). *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford University Press.
- Atilhan, M. y Aparicio, S. (2012). Review on Natural Gas Thermophysical Property Measurement Techniques. *Natural Gas - Extraction to End Use*. <https://doi.org/10.5772/48647>
- Bab-Hadiashar, A. y Suter, D. (1998). Robust Optic Flow Computation. *International Journal of Computer Vision*, 29(1), 59–77. <https://doi.org/10.1023/A:1008090730467>
- Bruhn, A., Weickert, J., Kohlberger, T. y Schnörr, C. (2006). A multigrid platform for real-time motion computation with discontinuity-preserving variational methods. *International Journal of Computer Vision*, 70(3), 257–277. <https://doi.org/10.1007/s11263-006-6616-7>
- Bruhn, A., Weickert, J. y Schnörr, C. (2005). Lucas/Kanade meets Horn/Schunck: Combining local and global optic flow methods. *International Journal of Computer Vision*, 61(3), 1–21. <https://doi.org/10.1023/B:VISI.0000045324.43199.43>
- Candle Science. (2020). <https://candles.org/candle-science/>
- Connor, N. (2019). ¿Qué es la densidad de vapor? Volumen específico de vapor. <https://www.thermal-engineering.org/es/que-es-la-densidad-de-vapor-volumen-especifico-de-vapor-definicion/>
- Corporation, N. (2021). *NIKKOR Lens Simulator*. <https://imaging.nikon.com/lineup/lens/simulator/>
- Courant, R. y Hilbert, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics* (Vol. I). Interscience Publishers, Inc.
- Dalziel, S. B., Hughes, G. O. y Sutherland, B. R. (2000). Whole-field density measurements by ‘synthetic schlieren’. *Experiments in Fluids*, 28(4), 322–335. <https://doi.org/10.1007/s003480050391>
- Echeverría A., C. (2013). *Velocimetría por imágenes de partículas de un flujo supersónico* [Universidad Nacional Autónoma de México]. <https://repositorio.unam.mx/contenidos/256888>
- Elsgolc, L. D. (2007). *Calculus of Variations*. Dover Publications.
- Fleet, D. J. y Jepson, A. D. (1990). Computation of component image velocity from local phase information. *International Journal of Computer Vision*, 5(1), 77–104. <https://doi.org/10.1007/BF00056772>
- Frédéric Moisy. (2016). *Random dot pattern for “Synthetic Schlieren” or ‘Background-Oriented Schlieren’*. <http://www.fast.u-psud.fr/~moisy/ml/>
- Goldstein, R. J. y Kuehn, T. H. (1996). *Optical Systems for Flow Measurement: Shadowgraph, Schlieren, and Interferometric Techniques* (Segunda Ed). Hemisphere.
- Horn, B. K. P. y Schunck, B. G. (1981). Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17(1–3), 185–203. [https://doi.org/10.1016/0004-3702\(81\)90024-2](https://doi.org/10.1016/0004-3702(81)90024-2)
- Jähne, B., Haussecker, H. y Geissler, P. (1999). Handbook of Computer Vision and Applications. En *The second great crash: Vol. 1,2,3*. Academic Press. <https://doi.org/10.7312/ikle13952-001>
- Kawahara, N., Tomita, E., Tabasu, K. y Goto, K. (2003). Measurement of Unburned Gas Temperature in an SI Engine Using Fiber-Optic Laser Interferometry. *SAE*

- Transactions, J. of Fuels and Lubricants*, 112(4), 1044–1151.
http://ltces.dem.ist.utl.pt/lxlaser/lxlaser2004/pdf/paper_17_3.pdf
- Kundu, P. K., Cohen, I. M. y Dowling, D. R. (2016). *Fluid Mechanics* (Sixth Edit).
- L. Burden, R., M. Burden, A. y J. Faires, D. (2017). *Análisis Numérico*. CENGAGE Learning.
- Lucas, B. D. y Kanade, T. (1981). Iterative Image Registration Technique With an Application To Stereo Vision. *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence - Volume 2*, 2, 674–679.
- M. White, F. (2016). *Fluid Mechanics* (8th ed.). McGraw-Hill Education.
- MATLAB and Statistics Toolbox Release 2012b* (Núm. R2019b). (2019). The MathWorks, Inc.
- Meier, G. E. A. (1999). *Hintergrund schlierenmessverfahren*.
- Mitiche, A. y Aggarwal, J. K. (2014). Optical flow estimation. *Springer Topics in Signal Processing*, 10, 250–252. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00711-3_3
- Nikon. (2021). *Capture NX-D* (Full Ver. 1.6.5).
- PhotoPills. (2022). *DEPTH OF FIELD (DOF) CALCULATOR*.
<https://www.photopills.com/calculators/dof>
- Porta, D. (2013). Estudio de interfaces en un flujo supersónico mediante shadowgraph (gráfica de sombras). *Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM.*, 14–25.
- Porta, D. (2015). *Estudio de las Interfaces de un Jet Supersónico Axisimétrico usando Schlieren con un Fondo como Referencia*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Raudies, F. (2013). Optic flow. *Scholarpedia*, 8(7), 30724.
<https://doi.org/10.4249/scholarpedia.30724>
- Richard, H. y Raffel, M. (2001). Principle and applications of the background oriented schlieren (BOS) method. *Measurement Science and Technology*, 12(9), 1576–1585.
<https://doi.org/10.1088/0957-0233/12/9/325>
- Schobeiri, M. T. (2012). Introduction, Turbomachinery, Applications, Types. *Turbomachinery Flow Physics and Dynamic Performance*, 3–14.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-24675-3_1
- Settles, G. S. (2001). Schlieren and Shadowgraph Techniques. En *Schlieren and Shadowgraph Techniques*. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56640-0>
- Thielicke, W. (2014). The flapping flight of birds Digital Particle Image Velocimetry. *University of Groningen The*, 41,42.
- W., T. y E.J., S. (2014). PIVlab – Towards User-friendly, Affordable and Accurate Digital Particle Image Velocimetry in MATLAB. *Journal of Open Research Software*, 2(1):e30. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.5334/jors.bl>
- W.S., R. (s/f). *Image J*. U. S. National Institutes of Health, Bethesda.
<https://imagej.nih.gov/ij/>, 1997-2018
- Wang, J., & Feng, L. (Eds.). (2018). Jet. En *Flow Control Techniques and Applications* (pp. 141–167). Cambridge University Press. <https://doi.org/DOI: 10.1017/9781316676448.008>
- Weisstein, E. W. (s/f). *Moiré Pattern*. MathWorld--A Wolfram Web Resource. Recuperado el 11 de marzo de 2022, de <https://mathworld.wolfram.com/MoirePattern.html>

APÉNDICES

A. Código descargable de la optimización

El código de la implementación de Flujo Óptico-BOS se puede encontrar en <https://github.com/jesica-lgr/OpticFlow-BOS>. El *software* es de código abierto, por lo que se puede descargar y ejecutar con las imágenes utilizadas para este trabajo o con otras imágenes.

B. Rutinas usadas en la optimización

Creación de un patrón cuadricular

```
function IMG = square_pattern(m,n)

S = zeros(m,n);

row=1;

while row <= m
    column = 1;
    while column <= n
        S(row,column) = 1 + (255-1).*rand(1,1);%random number in range 0-255

        column = column + 3;
    end
    row = row + 3;
end

IMG = S; %resulting image
imshow(S);
```

Rutina Flujo Óptico – BOS

Ubicación de los archivos a analizar

```
%%validation images Supersonic Flow
filePattern = 'C:/Users/Jesica González/Documents/School/UNAM/Titulación/Thesis/Código
Flujo óptico-BOS/Horn-BOS merge/validationImagesSF/SF_%03d.jpg';

%%Images for optic flow vs cross-correlation tests

%Linear displacement
%filePattern = 'C:/Users/Jesica González/Documents/School/UNAM/Titulación/Thesis/Código
Flujo óptico-BOS/Horn-BOS merge/L_3p_2d_%03d.tif';

%Vortex displacements
%filePattern = 'C:/Users/Jesica González/Documents/School/UNAM/Titulación/Thesis/Código
Flujo óptico-BOS/Horn-BOS merge/V_3p_2d_%03d.tif';

%%Pattern Tests

%Density of dots
%filePattern = 'C:/Users/Jesica González/Documents/School/UNAM/Titulación/Thesis/Código
Flujo óptico-BOS/Horn-BOS merge/Rand_pattern_black_crop_600000_%03d.tif';
%filePattern = 'C:/Users/Jesica González/Documents/School/UNAM/Titulación/Thesis/Código
Flujo óptico-BOS/Horn-BOS merge/Rand_pattern_black_crop_60000_%03d.tif';

%Structure of dots
%filePattern = 'C:/Users/Jesica González/Documents/School/UNAM/Titulación/Thesis/Código
Flujo óptico-BOS/Horn-BOS merge/square_rand_15_%03d.tif';
%filePattern = 'C:/Users/Jesica González/Documents/School/UNAM/Titulación/Thesis/Código
Flujo óptico-BOS/Horn-BOS merge/square_15_%03d.tif';

%%Object of study

%Gas of lighter 15cm
%filePattern = 'C:/Users/Jesica González/Documents/School/UNAM/Titulación/Thesis/Código
Flujo óptico-BOS/Horn-BOS merge/square_rand_ccc_15_%03d.tif';

%Blowtorch
%filePattern = 'C:/Users/Jesica González/Documents/School/UNAM/Titulación/Thesis/Código
Flujo óptico-BOS/Horn-BOS merge/sop_enc_test_%03d.tif';
```

Lectura de la secuencia de imágenes

```
ImgSeq = readImgSeq(filePattern,0,1);
```

Estimación del flujo óptico de la secuencia de imágenes

```
lx=1;
ly=1;

opt.eta = 0.1;
[Matx, Maty] = estimateOpticFlow2D(ImgSeq,opt); %optic flow displacements' matrixes
```

Escalamiento de los desplazamientos usando datos de correlación cruzada

```
data_PIV_x = load('u_PIV_validation2.mat'); %Supersonic Flow validation Images
data_PIV_y = load('v_PIV_validation2.mat');

% data_PIV_x = load('u_PIV_square_rand_ccc_15.mat'); %Gas of Lighter
% data_PIV_y = load('v_PIV_square_rand_ccc_15.mat');

% data_PIV_x = load('u_PIV_sop_enc_test.mat'); %Gas of blowtorch
% data_PIV_y = load('v_PIV_sop_enc_test.mat');

data_PIV_x = data_PIV_x.u_original;
data_PIV_y = data_PIV_y.v_original;
data_PIV_x = data_PIV_x{1,1};
data_PIV_y = data_PIV_y{1,1};

%Conjunto last window and step size
window = 16; %For Supersonic Flow, square_rand_crop_15 and sop_enc_test
step = 8;

n = size(data_PIV_y,2); %Number of columns of cross-correlation matrix

u = zeros(size(Matx)); %Generate initial matrixes for scaled displacements (u & v)
v = zeros(size(Maty));

diff_limit_lower = 0.05; %limit for displacements < 1 px
diff_limit_upper = 0.5; %limit for displacements > 1 px

for ii = 1:n %work with each column from cross-correlation displacements' matrixes

    %Define limits of columns subconjunto for the opfic flow matrixes
    left_s = (ii*step) - ((step/2)-1);
    right_s = (ii*step) + (step/2);

    for w = left_s:right_s %work with each column from the optic flow subconjunto

        %Asign scaled displacements' magnitudes to each column of u and v
        [u(:,w),v(:,w)] = scaling(Matx(:,w),Maty(:,w), data_PIV_x(:,ii),data_PIV_y(:,ii),
        diff_limit_lower, diff_limit_upper,step);

    end

end
```

Análisis BOS y gráficas de densidad e índice de refracción

```
%Experimental parameters
```

```
%Gas of lighter and blowtorch
```

```
% esc = 22222.22; %Inverse value of scale = 1/m
% h = 0.0015; %Size of object of study - Lighter
% L = 0.15; %Background/pattern - object of study distance
% Mag = 0.0858; %Magnification
% n_0=1.0002921; %Refractive Index of surrounding gas (air)
% rho_0=1.204; %Density of surrounding gas (air)
% G = 5.3236e-4; %Gladstone-Dale constant for butane
% scale= (1/esc); %Scale -> 1 px = X meters
```

```
%Supersonic Flow
```

```
esc = 47167; %Inverse value of scale = 1/m
h = 0.004; %Size of object of study - Nozzle
L = 0.147; %Background/pattern - object of study distance
Mag = 0.94; %Magnification
n_0=1.0002921; %Refractive Index of surrounding gas (air)
rho_0=1.204; %Density of surrounding gas (air)
G = 2.2649e-4; %Gladstone-Dale constant for air
scale= (1/esc); %Scale -> 1 px = X meters
```

```
Matxx=u;
Matyy=v;
```

```
%Conjunto values for Finite Differences routine
m=2; %number of consecutive pixel cells to analyze
a=1; %Distance between pixels
oo=1;
```

```
Dm=DiffFinFun_2(Matxx,Matyy,m,a)/esc; %Finite Differences matrix
```

```
%Conjunto values for Poisson solver routine
lx=size(Dm,1);
ly=size(Dm,2);
```

```
k= (n_0)/(G*Mag*L*h); %Constant term on Poisson equation
RHS=real((k)*Dm); %
```

```
[Density] = Poisson(real(RHS),lx,ly,m,rho_0,oo,a); %Compute density matrix
```

```
[IRefraction]= Density*G+1; %Compute density matrix
```

```
%Graphs
```

```
figure11 = figure;
axes1 = axes('Parent',figure11);
```

```

mesh_meters(Density,1,scale)
shading interp
view(0,-90)
colorbar('peer',axes1);

figure22 = figure;
axes2 = axes('Parent',figure22);
mesh_meters(IRefraction,1,scale)
shading interp
view(0,-90)
colorbar('peer',axes1);

```

toc

Estimación del flujo óptico 2D

```

function [Dx Dy] = estimateOpticFlow2D(ImgSeq, opt)
% estimateOpticFlow2D
% ImgSeq - Image sequence as a cube with dimensions:
%           height x width x frames.
% opt      - Structure with options:
%           * w       - weight matrix for sums constraints in the local
%                         neighborhood to build the structure tensor.
%           * DiffX   - Kernel that approximates the computation of the
%                         partial derivative in x.
%           * DiffY   - Ditto for y.
%           * DiffT   - Ditto for t.
%           * eta     - Regulates the smoothness constraint. A larger
%                         eta results in an increased smoothness.
%           * omega   - Parameter for the successive over relaxation
%                         (SOR) method, which is used to solve the sparse
%                         linear equation system. 0 <= omega <= 2.
%           * iNum    - Number of iterations for the SOR method.
%           * showFlow - If showFlow=1, then the flow per iteration is
%                         displayed.
%
% RETURN
% Dx      - X-component of optic flow.
% Dy      - Y-component of optic flow.
%           Computes the optic flow for all frames of the sequence,
%           thus, Dx and Dy have dimensions: height x width x frames-1.
%
% DESCRIPTION
% A modern implementation of the idea of
% Horn, B.K.P. and Schunck, B.G. (1981). Determining optical flow.
% Artificial Intelligence 17, 185-203.
% The discretization and implementation follows:
% Bruhn, A., Weickert, J. Kohlberger, T., and Schnörr, C. (2006). A
% multigrid platform for real-time motion computation with

```

```

%      discontinuity preserving variational methods. International
%      Journal of Computer Vision 70(3), 257-277.
%
% Copyright (c) 2013 Florian Raudies, 01/02/2013, Boston University.
% License, GNU GPL, free software, without any warranty.

% Conjunto default values for paraemters of the method.
if nargin<2,          opt      = struct();           end
if ~isfield(opt,'w'), opt.w    = fspecial('gaussian',[9 9],2); end
if ~isfield(opt,'Diffx'), opt.Diffx = [-1 8 0 -8 1]/12; end
if ~isfield(opt,'DiffY'), opt.DiffY = opt.Diffx'; end
if ~isfield(opt,'DiffT'), opt.DiffT = reshape([-1 1],[1 1 2]); end
%if ~isfield(opt,'eta'),   opt.eta   = 1/255;           end
if ~isfield(opt,'eta'),   opt.eta   = 0;                 end
if ~isfield(opt,'omega'), opt.omega = 1.5;             end
%if ~isfield(opt,'iNum'),  opt.iNum  = 50;              end
if ~isfield(opt,'iNum'),  opt.iNum  = 80;              end
if ~isfield(opt,'showFlow'),opt.showFlow= 1;           end
% Retreive default parameters to be saved in their own variables.
W       = opt.w;
Diffx   = opt.Diffx;
DiffY   = opt.DiffY;
DiffT   = opt.DiffT;
eta     = opt.eta;
omega   = opt.omega;
iNum    = opt.iNum;
showFlow = opt.showFlow;
% Check if the provided sequence contains at least two frames.
[yNum xNum tNum] = size(ImgSeq);
if tNum<2,
    error('MATLAB:frameErr', ['This method requires at least %d frames ',...
        'but only %d frames were provided!'], 2, tNum);
end
% Compute the partial derivatives in x, y, and t.
ImgSeqDx = imfilter(ImgSeq, Diffx, 'same', 'replicate');
ImgSeqDy = imfilter(ImgSeq, DiffY, 'same', 'replicate');
ImgSeqDt = convn(ImgSeq, DiffT, 'valid');
% Select the spatial and temporal valid part of the partial derivatives.
ktNum   = size(DiffT,3);
ValidT  = (1+floor((ktNum-1)/2)) : (tNum-floor(ktNum/2));
ImgSeqDx = squeeze(ImgSeqDx(:,:,ValidT));
ImgSeqDy = squeeze(ImgSeqDy(:,:,ValidT));
tNum    = length(ValidT);
Dx      = squeeze(zeros(yNum, xNum, tNum));
Dy      = squeeze(zeros(yNum, xNum, tNum));
% Compute the coefficients A, B, C, D, E, and F of the structure tensor
% / A B C \
% J = | B D E |
% \ C E F /
A = imfilter(ImgSeqDx.*ImgSeqDx,W, 'same', 'replicate');
B = imfilter(ImgSeqDx.*ImgSeqDy,W, 'same', 'replicate');
C = imfilter(ImgSeqDx.*ImgSeqDt,W, 'same', 'replicate');
D = imfilter(ImgSeqDy.*ImgSeqDy,W, 'same', 'replicate');
E = imfilter(ImgSeqDy.*ImgSeqDt,W, 'same', 'replicate');

```

```

% F = imfilter(ImgSeqDt.*ImgSeqDt,W, 'same', 'replicate'); % not used.
% Repeat boundary values by 1.
A = repeatBoundary(A, 1);
B = repeatBoundary(B, 1);
C = repeatBoundary(C, 1);
D = repeatBoundary(D, 1);
E = repeatBoundary(E, 1);
Dx = repeatBoundary(Dx, 1);
Dy = repeatBoundary(Dy, 1);
yNum = yNum + 2;
xNum = xNum + 2;
IndexY = 2 : (yNum-1);
IndexX = 2 : (xNum-1);

% Compute 2D optic flow.

if tNum==1,
    for iter = 1:iNum,
        for iy = IndexY,
            for ix = IndexX,
                Dx(iy,ix) = (1-omega) * Dx(iy,ix) ...
                    + omega * (Dx(iy-1,ix) + Dx(iy+1,ix)...
                    +Dx(iy,ix-1) + Dx(iy,ix+1)...
                    -1/eta*(B(iy,ix)*Dy(iy,ix) + C(iy,ix))) ...
                    /(1/eta*A(iy,ix) + 4);
                Dy(iy,ix) = (1-omega) * Dy(iy,ix) ...
                    + omega * (Dy(iy-1,ix) + Dy(iy+1,ix)...
                    +Dy(iy,ix-1) + Dy(iy,ix+1)...
                    -1/eta*(B(iy,ix)*Dx(iy,ix) + E(iy,ix))) ...
                    /(1/eta*D(iy,ix) + 4);
            end
        end
    % Dx = copyBoundary(Dx, kNum);
    % Dy = copyBoundary(Dy, kNum);
    % use the faster, direct way to copy boundary values.
    Dx(1,:) = Dx(2,:);    Dx(yNum,:) = Dx(yNum-1,:);
    Dx(:,1) = Dx(:,2);    Dx(:,xNum) = Dx(:,xNum-1);
    Dy(1,:) = Dy(2,:);    Dy(yNum,:) = Dy(yNum-1,:);
    Dy(:,1) = Dy(:,2);    Dy(:,xNum) = Dy(:,xNum-1);

    %Dx(:, :) = Dx.*255;
    %Dy(:, :) = Dy.*255;

    % Optionally, display the estimated flow of the current iteration.
    if showFlow, plotFlow(Dx,Dy,iter,iNum); end
end

```

```

%
% Compute 3D optic flow.
%
else
    tNum = tNum + 2;
    IndexT = 2 : tNum-1;

```

```

for iter = 1:iNum,
    for iy = IndexY,
        for ix = IndexX,
            for it = IndexT,
                Dx(iy,ix,it) = (1-omega) * Dx(iy,ix,it) ...
                    + omega * (Dx(iy-1,ix,it) + Dx(iy+1,ix,it) ...
                    +Dx(iy,ix-1,it) + Dx(iy,ix+1,it) ...
                    +Dx(iy,ix,it-1) + Dx(iy,ix,it+1) ...
                    -1/eta*(B(iy,ix,it)*Dy(iy,ix,it) + C(iy,ix,it)) ...
                    /(1/eta*A(iy,ix,it) + 6);
                Dy(iy,ix,it) = (1-omega) * Dy(iy,ix,it) ...
                    + omega * (Dy(iy-1,ix,it) + Dy(iy+1,ix,it) ...
                    +Dy(iy,ix-1,it) + Dy(iy,ix+1,it) ...
                    +Dy(iy,ix,it-1) + Dy(iy,ix,it+1) ...
                    -1/eta*(B(iy,ix,it)*Dx(iy,ix,it) + E(iy,ix,it)) ...
                    /(1/eta*D(iy,ix,it) + 6);
            end
        end
    end
    Dx = copyBoundary(Dx, 1);
    Dy = copyBoundary(Dy, 1);

    % Optionally, display the estimated flow (1st frame) of the current iteration.
    if showFlow, plotFlow(Dx(IndexY,IndexX,1),Dy(IndexY,IndexX,1),iter,iNum); end
end
end
Dx = eliminateBoundary(Dx, 1);
Dy = eliminateBoundary(Dy, 1);

function plotFlow(Dx, Dy, iter, iNum)
cla;
[yNum xNum] = size(Dx);
[Y X] = ndgrid(1:yNum, 1:xNum);
sample = ceil(yNum/45);
IndexY = 1:sample:yNum;
IndexX = 1:sample:xNum;
scale = sample*2;
quiver(X(IndexY,IndexX),Y(IndexY,IndexX),...
        scale*Dx(IndexY,IndexX),scale*Dy(IndexY,IndexX),0,'-k');
title(sprintf('Iteration %d of %d.',iter,iNum));
axis ij equal; axis([-10 xNum+10 -10 yNum+10]);
drawnow;

```

Rutina de escalamiento

Cálculo de la escala general entre la columna de flujo óptico y la columna de correlación cruzada

```
function [data_x, data_y] = Scaling(data_optic_flow_x,data_Optic_Flow_y,
data_CC_x,data_CC_y, diff_limit_lower, diff_limit_upper,step)

% diff_limit refres to the max difference between optic flow and cross-correlation (CC)
data
% This function scale the data from each column in the optic flow subconjunto and applies a
three point mean to smooth the data
% All data conjuntos need to be of size mx1

m = size(data_CC_x,1); %Number of row in each column

data_x = zeros(size(data_optic_flow_x,1),1); %Generate initial matrixes for scaled
displacements
data_y = zeros(size(data_Optic_Flow_y,1),1);

data_interval = 0.1; %Conjunto data interval
scale_x = General_scale(data_optic_flow_x, data_CC_x,data_interval); %Get general scale for
current column (horizontal displacements' matrix)
scale_y = General_scale(data_Optic_Flow_y, data_CC_y,data_interval); %Get general scale for
current column (vertical displacements' matrix)
```

Relación entre cada dato en una columna de correlación cruzada con cada dato de flujo óptico en la columna correspondiente.

```
for k = 1:m %k value in the current cross-correlation column

    clear left_val_1;
    clear left_val_2;
    clear right_val_1;
    clear right_val_1;

    %Define range for optic flow subconjunto of rows

    left_val_1 = (k*step)-((step/2)-1);
    right_val_2 = k*step+(step/2);

    right_val_1 = k*step;
    left_val_2 = (k*step)+1;

    %%%%%%%%%%%%%%%%X VALUES%%%%%%%%%%%%%%

    %Substitute any NaN data with the pixel neighbors' mean value
    if isnan(data_CC_x(k,1))
        if k == 1
            if isnan(data_CC_x(k+1,1))
```

```

        data_CC_x(k,1) = data_CC_x(k+2,1);
    else
        data_CC_x(k,1) = data_CC_x(k+1,1);
    end
elseif k == m
    data_CC_x(k,1) = data_CC_x(k-1,1);
elseif k== m-1
    if isnan(data_CC_x(k+1,1)) && ~isnan(data_CC_x(k-1,1))
        data_CC_x(k,1) = data_CC_x(k-1,1);
    elseif isnan(data_CC_x(k-1,1)) && ~isnan(data_CC_x(k+1,1))
        data_CC_x(k,1) = (data_CC_x(k-2,1)+ data_CC_x(k+1,1))/2;
    else
        data_CC_x(k,1) = (data_CC_x(k-1,1)+ data_CC_x(k+1,1))/2;
    end
elseif k== m-2
    if isnan(data_CC_x(k+1,1)) && ~isnan(data_CC_x(k-1,1))
        data_CC_x(k,1) = data_CC_x(k-1,1);
    elseif isnan(data_CC_x(k-1,1)) && ~isnan(data_CC_x(k+1,1))
        data_CC_x(k,1) = (data_CC_x(k-2,1)+ data_CC_x(k+1,1))/2;
    else
        data_CC_x(k,1) = (data_CC_x(k-1,1)+ data_CC_x(k+1,1))/2;
    end
else
    if isnan(data_CC_x(k+1,1)) && ~isnan(data_CC_x(k+2,1))
        data_CC_x(k,1) = (data_CC_x(k-1,1)+ data_CC_x(k+2,1))/2;
        %data_PIV_x(k,1) = data_PIV_x(k-1,1);
    elseif isnan(data_CC_x(k-1,1)) && ~isnan(data_CC_x(k+1,1))
        data_CC_x(k,1) = (data_CC_x(k-2,1)+ data_CC_x(k+1,1))/2;
    elseif ~isnan(data_CC_x(k-1,1)) && isnan(data_CC_x(k+1,1))
        data_CC_x(k,1) = (data_CC_x(k-1,1));
    else
        data_CC_x(k,1) = (data_CC_x(k-1,1)+ data_CC_x(k+1,1))/2;
    end
end
end

%Evaluate each optic flow row value (i) with current cross-correlation value (k)

for i = left_val_1:right_val_2 %Extra condition considering Horn's conjunto of 8 values
    diff_Horn_PIV_x = abs(data_CC_x(k,1) - data_Optic_flow_x(i,1)); %Difference between
    optic flow and cross-correlation

    if diff_Horn_PIV_x > diff_limit_lower %Scaling is needed
        n_interval_x = data_Optic_flow_x(i,1)/data_interval;
        data_x(i,1) = data_Optic_flow_x(i,1) + n_interval_x*scale_x*0.4;%Proposed
        scaling

        %Sum or subtract the difference
        if data_CC_x(k,1) < 0
            data_x(i,1) = data_x(i,1) - diff_Horn_PIV_x;
        else
            data_x(i,1) = data_x(i,1) + diff_Horn_PIV_x;
        end
    end
end

```

```

    else %No scaling is needed
        data_x(i,1) = data_Optic_flow_x(i,1);
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%Y VALUES%%%%%%%%%%%%%%

%Substitute any NaN data with the pixel neighbors' mean value
if isnan(data_CC_y(k,1))
    if k == 1
        if isnan(data_CC_y(k+1,1))
            data_CC_y(k,1) = data_CC_y(k+2,1);
        else
            data_CC_y(k,1) = data_CC_y(k+1,1);
        end
    elseif k == m
        data_CC_y(k,1) = data_CC_y(k-1,1);

    elseif k== m-1
        if isnan(data_CC_y(k+1,1)) && ~isnan(data_CC_y(k-1,1))
            data_CC_y(k,1) = data_CC_y(k-1,1);
        elseif isnan(data_CC_y(k-1,1)) && ~isnan(data_CC_y(k+1,1))
            data_CC_y(k,1) = (data_CC_y(k-2,1)+ data_CC_y(k+1,1))/2;
        else
            data_CC_y(k,1) = (data_CC_y(k-1,1)+ data_CC_y(k+1,1))/2;
        end
    elseif k== m-2
        if isnan(data_CC_y(k+1,1)) && ~isnan(data_CC_y(k-1,1))
            data_CC_y(k,1) = data_CC_y(k-1,1);
        elseif isnan(data_CC_y(k-1,1)) && ~isnan(data_CC_y(k+1,1))
            data_CC_y(k,1) = (data_CC_y(k-2,1)+ data_CC_y(k+1,1))/2;
        else
            data_CC_y(k,1) = (data_CC_y(k-1,1)+ data_CC_y(k+1,1))/2;
        end
    else
        if isnan(data_CC_y(k+1,1)) && ~isnan(data_CC_y(k+2,1))
            data_CC_y(k,1) = (data_CC_y(k-1,1)+ data_CC_y(k+2,1))/2;
            %data_PIV_x(k,1) = data_PIV_x(k-1,1);
        elseif isnan(data_CC_y(k-1,1)) && ~isnan(data_CC_y(k+1,1))
            data_CC_y(k,1) = (data_CC_y(k-2,1)+ data_CC_y(k+1,1))/2;
        elseif ~isnan(data_CC_y(k-1,1)) && isnan(data_CC_y(k+1,1))
            data_CC_y(k,1) = (data_CC_y(k-1,1));
        else
            data_CC_y(k,1) = (data_CC_y(k-1,1)+ data_CC_y(k+1,1))/2;
        end
    end
end

for i = left_val_1:right_val_2
    diff_Horn_PIV_y = abs(data_CC_y(k,1) - data_Optic_Flow_y(i,1)); %Difference between

```

```

optic flow and cross-correlation

    if diff_Horn_PIV_y > diff_limit_lower %scaling is needed
        n_interval_y = data_Optic_Flow_y(i,1)/data_interval;
        data_y(i,1) = data_Optic_Flow_y(i,1) + n_interval_y*scale_y*0.4;%Proposed
scaling

    %Sum or subtract the difference
    if data_cc_y(k,1) < 0
        data_y(i,1) = data_y(i,1) - diff_Horn_PIV_y;
    else
        data_y(i,1) = data_y(i,1) + diff_Horn_PIV_y;
    end

    else %No scaling is needed
        data_y(i,1) = data_Optic_Flow_y(i,1);
    end
end

end

```

Suavizado de los extremos de cada subconjunto a través de un promedio de tres puntos

```

datax_mean = data_x;
datay_mean = data_y;

for k_mean = 1:m-1

    left_val = (k_mean*step)-((step/2)-1);
    right_val = k_mean*step+(step/2);

    %X data matrix
    datax_mean(left_val,1) = (data_x(left_val-1,1) + data_x(left_val,1) +
data_x(left_val+1,1))/3;
    datax_mean(right_val,1) = (data_x(right_val-1,1) + data_x(right_val,1) +
data_x(right_val+1,1))/3;

    %Y data matrix
    datay_mean(left_val,1) = (data_y(left_val-1,1) + data_y(left_val,1) +
data_y(left_val+1,1))/3;
    datay_mean(right_val,1) = (data_y(right_val-1,1) + data_y(right_val,1) +
data_y(right_val+1,1))/3;

end

```

C. Derivación de las ecuaciones de Euler-Lagrange para flujo óptico

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden cuyas soluciones son puntos extremos de un determinado funcional. Dicho funcional es una función cuyas entradas son también funciones. En física, las soluciones a estas ecuaciones describen la evolución de un sistema.

Particularmente, estas ecuaciones son de utilidad porque hacen uso de la derivada del funcional con el que se trabaja, la cual, al ser igualada a cero, permite encontrar la función que minimiza o maximiza al funcional.

En el caso del flujo óptico, se tiene un funcional que tiene como entradas a las dos funciones $u(x, y, t)$ y $v(x, y, t)$, las cuales corresponden a la velocidad del flujo bajo estudio. El objetivo es encontrar las funciones (u, v) tal que, a un determinado tiempo fijo t , minimicen el funcional. Esto supone encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange para un funcional con dos funciones de más de una variable y con derivadas de primer orden.

Para encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas, se parte del funcional de energía $E(u, v)$ definido para el flujo óptico sobre el dominio de la imagen completa Ω (Bruhn et al., 2005):

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \left[\left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \alpha(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \right] dx dy \quad (59)$$

donde $f(x, y, t)$ es la función escalar con valores de intensidad en la escala de grises de la imagen, $\alpha > 0$ es el parámetro de suavizado, $|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ y $|\nabla v|^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$.

Sea el primer término de la Ec. (59) el término de los datos Ψ_d y el segundo término el término de suavizado Ψ_s , entonces:

$$\Psi_d^2 = \left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \quad (60)$$

$$\Psi_s^2 = |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (61)$$

$$\Rightarrow E(u, v) = \int_{\Omega} [(\Psi_d)^2 + \alpha(\Psi_s)^2] dx dy \quad (62)$$

Es posible reescribir al funcional como (Elsgolc, 2007):

$$E(u, v) = \int_{\Omega} L \left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (63)$$

donde

$$L \left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (\Psi_d)^2 + \alpha(\Psi_s)^2 \quad (64)$$

Para un funcional con dos funciones como entradas, las cuales dependen de más de una variable, las ecuaciones de Euler-Lagrange están dadas por (Courant y Hilbert, 1953):

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial w_{ij}} \right) = 0 \quad (65)$$

donde en este caso $i, j = 2$, de tal manera que: $w = (w_1, w_2) = (u, v)$, $w_{i,j} := \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ y $x = (x_1, x_2) = (x, y)$.

Por conveniencia, se presenta el cálculo para el caso $i = 1$, esto es, para la función u . Sin embargo, el procedimiento es análogo para la función v . Así, la ecuación de Euler-Lagrange está dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial w_{1j}} \right) = 0 \quad (66)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \right) \right] = 0 \quad (67)$$

Sea $u'_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $u'_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, entonces podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u'_y} \right) \right] = 0 \quad (68)$$

A continuación, se calcula cada uno de los términos de la ecuación anterior.

De la Ec. (64) se tiene que:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2\Psi_d \frac{\partial \Psi_d}{\partial u} + 2\alpha \Psi_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial u} \quad (69)$$

donde de la Ec. (60) y (61) se obtiene:

$$\frac{\partial \Psi_d}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (70)$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} = 0 \quad (71)$$

Sustituyendo la Ec. (70) y (71) en la Ec. (69):

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (72)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial u} = 2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 u + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) v + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] \quad (73)$$

Ahora, se calcula $\frac{\partial L}{\partial u'_x}$:

$$\frac{\partial L}{\partial u'_x} = 2\Psi_d \frac{\partial \Psi_d}{\partial u'_x} + 2\alpha \Psi_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial u'_x} \quad (74)$$

De la Ec. (60) tenemos que:

$$\frac{\partial \Psi_d}{\partial u'_x} = 0 \quad (75)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial u'_x} = 2\alpha \Psi_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial u'_x} = 2\alpha \frac{\Psi}{2\Psi} \frac{\partial}{\partial u'_x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (76)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u'_x} = \alpha \frac{\partial}{\partial u'_x} \left[(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (v'_x)^2 + (v'_y)^2 \right] \quad (77)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial u'_x} = 2\alpha u'_x \quad (78)$$

De forma análoga, se obtiene la expresión para $\frac{\partial L}{\partial u'_y}$:

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial u'_y} = 2\alpha u'_y \quad (79)$$

Usando la Ec. (78) y (79), se calcula $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u'_x} \right)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u'_x} \right) = 2\alpha \frac{\partial}{\partial x} u'_x = 2\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (80)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u'_x} \right) = 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (81)$$

Análogo al caso anterior, se calcula $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u'_y} \right)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u'_y} \right) = 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (82)$$

Sustituyendo la Ec. (73), (81) y (82) en la Ec. (68), se tiene que:

$$2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 u + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) v + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] - 2\alpha \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (83)$$

Multiplicando la ecuación anterior por el factor $(-\frac{1}{\alpha})$, se llega a:

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 u + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) v + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] = 0 \quad (84)$$

Realizando un procedimiento análogo para v , se obtiene:

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) u + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 v + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] = 0 \quad (85)$$

Sea $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_x^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_y^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ y $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$, es posible reescribir la Ec. (84) y (85) como:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{\alpha} (f_x^2 u + f_x f_y v + f_x f_t) = 0 \quad (86)$$

$$\nabla^2 v - \frac{1}{\alpha} (f_x f_y u + f_y^2 v + f_y f_t) = 0 \quad (87)$$

Finalmente, las ecuaciones anteriores corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al funcional de energía de flujo óptico (Bruhn et al., 2005).