# 幾何学 暫定版

@k74226197Y126

2023 年 6 月 27 日

# はじめに

この.pdf ファイルはもともと一学生が勉強のため、特に、自分の言葉で整理するために作成したものです。そのため、比較的行間は狭めになっております。そこで、他に私が勉強している内容を勉強している方がある箇所などで悩んだときに、参考になるかと思い公開させていただきました。そのこともあって、参考文献を詳細に書き章末にまとめてみました。ぜひ、参考文献リストもご活用してみるといいかもしれません。また、公開した他の理由として、誤植や間違い、不適切な表現、紛らわしい表現を自分でも探しておりますが、いかんせん大変なので、あえて公開することで誰かが探してくれるかもしれないというのもございます。

この.pdf ファイルは一学生が勉強のため作成したもので監修を受けたわけではないので、正確性については保証できなく誤植や間違い、不適切な表現、紛らわしい表現があるかもしれません。誤植も今まで多数見つかってきております。論理の誤りは、書籍の定義や定理の主張に気を配っているので、少なめかもしれませんが、ないとは言い切れません。もし、そのようなものがございましたら、ご連絡していただければ幸いです。また、記号や言い回しで独特な箇所があり見苦しい箇所もあるかと思います。これも深刻であれば、可能な限り対応したいと考えております。また、参考文献に挙げられた書籍などと併読しておくこともお勧めいたします。

この.pdf ファイル、および、そのソースコードの著作権は frmrnthdr(Twitter:@k74226197Y126) にあるものといたします。.pdf ファイルのダウンロード、印刷、勉強会での配布などでご利用していただいても問題ございませんし、そのソースコードのダウンロード、編集、改造をしていただいても問題ございません。ただ、自作発言、二次配布、商用利用はご遠慮くださいますようお願いいたします。

.pdf ファイルで使用された.png ファイルや.pdf ファイルのベースとなる.tex ファイル、プリアンブルに書くための.tex ファイル (macro.tex) も公開しております。先ほど述べられた通り自由にダウンロード、編集をしていただいても問題ございません。ただ、ローカルリポジトリの親フォルダに保存しております本文の.tex ファイルに関しましては、当面の間、非公開とさせていただきます。ご了承ください。

この PDF 資料はまだ書きかけですが、幾何学の内容が広範囲なため、完成は大変厳しい見通しです。また、位相空間論は集合論にまわす案もありましたが、抽象度が高くはじめに集合論を読むときの負担が重くなる恐れがありましたので、幾何学にまわすことにいたしました。今後の予定としては、主に多様体論などの内容の拡充があげられますが、すべてを網羅しきるのはほぼ現実的でないので、ほかの書籍と併読をお勧めいたします。

# 目次

# 第 1 部　位相空間論

ここでは、位相空間論の初歩的な内容を扱うことにする。この分野の特徴としてはかなり抽象的な内容であり心象するのがかなり困難で、実際、議論するときは記号論理学や集合論の知識が駆使されることになる[*1]。なぜ位相空間を考えようとしたかの動機を説明する。諸説あるが、微分積分学でお馴染みである極限の厳密な議論である $\varepsilon$-$\delta$ 論法を $n$ 次元に拡張してここで位相空間に該当するものが後に述べる $n$ 次元 Euclid 空間そのものでありこれを一般的な集合に対して適用できないか考えだした結果である。これは連続写像の章でみれば、いかに位相空間がうまく定義されているかがより顕在化するであろう。ここで、微分可能な集合を考えた場合、開球体という概念が導入されるはずであるが、実は属されるどの点を中心とするある開球体を含むような集合全体が Euclid 空間における位相となっている。この議論は距離空間における位相空間の議論でよく分かるであろう。さて、なぜ一般的な集合に位相を持ち込みたかった理由について述べれば、1 つの理由としては、一般的な集合に縁があるかないかで班分けしたかったものが挙げられる。この章の最後のほうに境界という概念が出てくるのだが、これは位相空間があったおかげで生じた概念である。これによって、後に述べるように一般的な集合に点列の極限の概念が定式化でき、さらに連結の章で詳しく述べられることになると思われるが、集合が 1 つのかたまりになっているか否かという違いも定式化できる。やや解析学よりの理由になってしまったが、いづれにせよ、幾何学や解析学以外にも代数学にもあらわれるさまざまな状況に現れる共通した概念であるゆえ、このようにかなり抽象化されているのが特徴である[*2]。なお、記号論理学や集合論、実数論に関する初歩的な知識のみ仮定しておいた。

## 1.1　位相空間

### 1.1.1　位相

**定義 1.1.1.** 1 つの空集合でない集合 $S$ の部分集合系を $\mathfrak{O}$ とおく。この集合 $\mathfrak{O}$ が次の 3 つの条件たちを満たすとき、その集合 $\mathfrak{O}$ はその集合 $S$ に 1 つの位相構造を定める、その集合 $S$ における 1 つの位相である、その集合 $S$ とその位相 $\mathfrak{O}$ との組 $(S,\mathfrak{O})$ を位相空間、その集合 $S$ をその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の台集合、台など、その台集合 $S$ の元をその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の点、その集合 $S$ の部分集合をその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の部分集合という。

- $S,\emptyset \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $\forall O,P \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \cap P \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- 任意の添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ において $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

もちろん、次のように定義してもよい。

---

[*1] 俗にいえば、これは数学科でかなり人を選ぶ魔窟ともいわれており、図学的なセンスがあってもこの分野ですっかり幾何学が嫌いになってしまう人もいれば、逆に、図学アレルギーの人でもこの分野を通じてすっかり幾何学に慣れ親しむ人もいたり…(独断と偏見を含む)。あと、しばしばみかける標語としては、初学の時点ではイメージしたり語句の名前の由来を考えだしたら負けというのがあるらしい。

[*2] ほかのモチベがあがるような説明があったら、ぜひ教えてください!

- $S, \emptyset \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- 有限集合である添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\{O_\lambda\}_{\substack{\lambda \in \varLambda \\ \# \varLambda < \aleph_0}}$ において $\bigcap_{\substack{\lambda \in \varLambda \\ \# \varLambda < \aleph_0}} O_\lambda \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- 任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ において $\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

例えば、集合 $\{a, b, c\}$ における位相は 29 つある[*3]。

**定理 1.1.1.** 任意の集合 $S$ において、必ず $\mathfrak{O}_* = \{\emptyset, S\}$、$\mathfrak{O}^* = \mathfrak{P}(S)$ と 2 つの位相たちを考えることができその集合 $S$ における任意の位相 $\mathfrak{O}$ に対して次式が成り立つ。

$$\mathfrak{O}_* \subseteq \mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}^*$$

**証明.** これは定義にあてはめれば、明らかであろう。 □

**定義 1.1.2.** このような位相たち $\mathfrak{O}_*$、$\mathfrak{O}^*$ をそれぞれその集合 $S$ における密着位相、離散位相といい、それらの位相空間たち $(S, \mathfrak{O}_*)$、$(S, \mathfrak{O}^*)$ をそれぞれその集合 $S$ を台とする密着空間、離散空間という。

## 1.1.2 開集合

**定義 1.1.3.** 1 つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ においてその位相 $\mathfrak{O}$ に属する集合 $O$ をこの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開集合という。位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開集合全体の集合 $\{O \in \mathfrak{P}(S) | O \in \mathfrak{O}\}$ はまさしく位相 $\mathfrak{O}$ そのものでありこれをその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開集合系ともいう。

---

[*3]

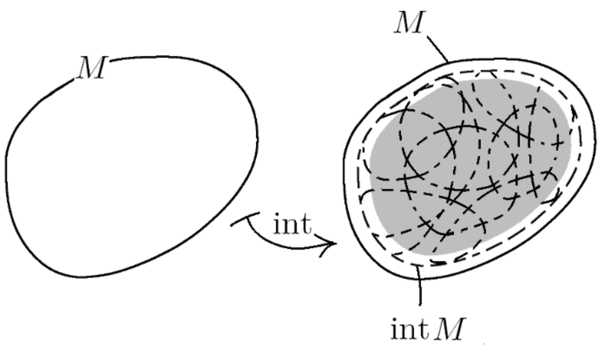
$$\begin{aligned}
&\{\{a,b,c\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{a\},\emptyset\},\{\{a,b,c\},\{b\},\emptyset\},\{\{a,b,c\},\{c\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{a,b\},\{a\},\emptyset\},\{\{a,b,c\},\{a,b\},\{b\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{b,c\},\{b\},\emptyset\},\{\{a,b,c\},\{b,c\},\{c\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{c,a\},\{c\},\emptyset\},\{\{a,b,c\},\{c,a\},\{a\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{a,b\},\{a\},\{b\},\emptyset\},\{\{a,b,c\},\{b,c\},\{b\},\{c\},\emptyset\},\ \{\{a,b,c\},\{c,a\},\{c\},\{a\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{a,b\},\{c\},\emptyset\},\{\{a,b,c\},\{b,c\},\{a\},\emptyset\},\ \{\{a,b,c\},\{c,a\},\{b\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{a,b\},\{b,c\},\{b\},\emptyset\},\{\{a,b,c\},\{b,c\},\{c,a\},\{c\},\emptyset\},\ \{\{a,b,c\},\{c,a\},\{a,b\},\{a\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a\},\ \{b\},\emptyset\},\{\{a,b,c\},\{a,b\},\{b,c\},\{b\},\{c\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{b,c\},\{c,a\},\{b\},\{c\},\emptyset\},\{\{a,b,c\},\{b,c\},\{c,a\},\{c\},\{a\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{c,a\},\{a,b\},\{c\},\{a\},\emptyset\},\ \{\{a,b,c\},\{c,a\},\{a,b\},\{a\},\{b\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a\},\ \{b\},\{c\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{b,c\},\{c,a\},\{a\},\ \{b\},\{c\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{c,a\},\{a,b\},\{a\},\ \{b\},\{c\},\emptyset\},\\
&\{\{a,b,c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a\},\ \{b\},\{c\},\emptyset\} = \mathfrak{P}(\{a,b,c\})
\end{aligned}$$

### 1.1.3　開核

**定義 1.1.4.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$O \in \mathfrak{O}$ かつ $O \subseteq M$ なる集合 $O$ 全体の和集合 $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ において、位相の定義より $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O \in \mathfrak{O}$ が成り立つかつ、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \subseteq M$ が成り立つなら、$O \subseteq \bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ が成り立つ、即ち、その集合 $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ の大きさはいかなる、$O \subseteq M$ が成り立つかつ、その位相 $\mathfrak{O}$ に属するような集合 $O$ の大きさ以上になる。これは後述する定理 1.1.2 で改めて述べられるが、このような集合 $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ をその集合 $M$ の開核、内部、位相的内部といい $\mathrm{int}M$、$\mathrm{Int}(M)$、$M^\circ$、$M^i$ などと書く、即ち、次式のように定義される。この開核 $\mathrm{int}M$ の元を内点という。もちろん、これはその集合 $M$ の元である。

$$S' = \mathrm{int}M \Leftrightarrow S' = \bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O \text{ if } M \in \mathfrak{P}(S)$$

これは次の図のように考えると、分かりやすかろう。




**定理 1.1.2.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ の開核 $\mathrm{int}M$ が集合 $S'$ であるならそのときに限り、次のこといずれも成り立つ、

- $S' \subseteq M$ が成り立つ。
- $S' \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $O \subseteq M$ かつ $O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O \subseteq S'$ が成り立つ。

さらに、順序集合 $(\mathfrak{P}(S),\subseteq)$ が与えられたとき、次式が成り立つ。

$$\mathrm{int}M = \max\left\{O \in \mathfrak{O} | O \subseteq M\right\}$$

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、その集合 $S$ の任意の部分集合 $M$ の開核 $\mathrm{int}M$ が集合 $S'$ であるなら、その集合 $S'$ はその集合 $S$ の部分集合で和集合 $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ に等しい。ここで、$O \subseteq M$ が成り立つので、$\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O \subseteq M$

が成り立つかつ、$O \in \mathfrak{O}$ と位相の定義より $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O \in \mathfrak{O}$ が成り立つかつ、$O \subseteq M$ なる任意のその位相 $\mathfrak{O}$ の元 $O$ に対し、$O \subseteq \bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ が成り立つので、全称除去より $O \subseteq M \wedge O \in \mathfrak{O} \Rightarrow O \subseteq \bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ が成り立つ。したがって、その集合 $M$ の開核 $\mathrm{int}M$ が集合 $S'$ であるならそのときに限り、次のこといずれも成り立つ。

- $S' \subseteq M$ が成り立つ。
- $S' \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $O \subseteq M$ かつ $O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O \subseteq S'$ が成り立つ。

逆に、これらが成り立つなら、その和集合 $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ は上記の議論によりこれらを満たすので、その集合 $S'$ はその和集合 $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ とおくことができる。ここで、これらを満たすその和集合 $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ ではない集合 $S''$ が存在すると仮定すると、$S'' \subseteq M$ かつ $S'' \in \mathfrak{O}$ が成り立つので、$S'' \subseteq \bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ が成り立つが、これは $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O \subseteq M$ かつ $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O \subseteq S''$ が成り立つことに矛盾する。したがって、その集合 $S'$ はその和集合 $\bigcup_{\substack{O \in \mathfrak{O} \\ O \subseteq M}} O$ である必要がありその集合 $M$ の開核 $\mathrm{int}M$ が集合 $S'$ である。

さらに、順序集合 $(\mathfrak{P}(S), \subseteq)$ が与えられたとき、次のことが成り立つなら、

- $\mathrm{int}M \subseteq M$ が成り立つ。
- $\mathrm{int}M \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $O \subseteq M$ かつ $O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O \subseteq \mathrm{int}M$ が成り立つ。

これは次のように書き換えられることができる。

$$\forall O \in \{O \in \mathfrak{O} | O \subseteq M\} [O \subseteq \mathrm{int}M]$$

したがって、最大元の定義より次式が成り立つ。

$$\mathrm{int}M = \max \{O \in \mathfrak{O} | O \subseteq M\}$$

□

**定理 1.1.3.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開核について、次のことが成り立つ。

- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \in \mathfrak{O}$ が成り立つならそのときに限り、$\mathrm{int}M = M$ が成り立つ。
- $\forall M, N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \subseteq N$ が成り立つなら、$\mathrm{int}M \subseteq \mathrm{int}N$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$M \subseteq M$ が成り立つかつ、$M \in \mathfrak{O}$ が成り立つかつ、$O \subseteq M$ かつ $O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O \subseteq M$ が成り立つので、$\mathrm{int}M = M$ が成り立つ。逆に、$\mathrm{int}M = M$ が成り立つなら、$M \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

$\forall M, N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \subseteq N$ が成り立つときを考える。開核 $\mathrm{int}M$ について、$\mathrm{int}M \subseteq M$ が成り立つかつ、$\mathrm{int}M \in \mathfrak{O}$ が成り立つかつ、$O \subseteq M$ かつ $O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O \subseteq \mathrm{int}M$ が成り立つ。開核 $\mathrm{int}N$ についても同様である。以上より、$\mathrm{int}M \subseteq M \subseteq N$ が成り立つかつ、$\mathrm{int}M \in \mathfrak{O}$ が成り立つので、$\mathrm{int}M \subseteq \mathrm{int}N$ が成り立つ。 □

### 1.1.4 閉集合

**定義 1.1.5.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において開集合のその集合 $S$ に対する補集合となるその集合 $S$ の部分集合をこの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合という。即ち、$S \setminus A \in \mathfrak{O}$ なる集合 $A$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合である。位相空間 $(S,\ \mathfrak{O})$ の閉集合全体の集合 $\{A \in \mathfrak{P}(S) | S \setminus A \in \mathfrak{O}\}$ をその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系という。

**定理 1.1.4.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、次のことが成り立つ。

- $S, \emptyset \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。
- $\forall A, B \in \mathfrak{A}$ に対し、$A \cup B \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。
- 任意の添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{A}$ の元の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ において $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ と添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたそれらの集合 $\mathfrak{O}$ の元の族を $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とし $A_\lambda = S \setminus O_\lambda$ とおくと、添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたそれらの集合 $\mathfrak{A}$ の元の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が得られる。したがって、次のようになる。

$$S, \emptyset \in \mathfrak{O} \Leftrightarrow S \setminus S, S \setminus \emptyset \in \mathfrak{O} \Leftrightarrow S, \emptyset \in \mathfrak{A}$$

$\forall A, B \in \mathfrak{A}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} A, B \in \mathfrak{A} &\Leftrightarrow S \setminus A, S \setminus B \in \mathfrak{O} \\ &\Rightarrow S \setminus A \cap S \setminus B \in \mathfrak{O} \\ &\Leftrightarrow S \setminus (A \cup B) \in \mathfrak{O} \\ &\Leftrightarrow A \cup B \in \mathfrak{A} \end{aligned}$$

任意の添数集合 $\Lambda$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O} &\Leftrightarrow S \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{A} \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (S \setminus O_\lambda) \in \mathfrak{A} \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A} \end{aligned}$$

□

**定理 1.1.5.** その集合 $S$ の部分集合系 $\mathfrak{A}$ で上の 3 つの条件たちが満たされれば、その集合 $\mathfrak{A}$ が位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系と一致できるその位相 $\mathfrak{O}$ がただ 1 つに決まる。しかも、その位相 $\mathfrak{O}$ は次式を満たす。

$$\mathfrak{O} = \{S \setminus A \in \mathfrak{P}(S) | A \in \mathfrak{A}\}$$

**証明.** その集合 $S$ の部分集合系 $\mathfrak{A}$ が次の 3 つの条件たちを満たすとしよう。

- $S, \emptyset \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。
- $\forall A, B \in \mathfrak{A}$ に対し、$A \cup B \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。
- 任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{A}$ の元の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ において $\bigcap_{\lambda \in \varLambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。

集合 $\{S \setminus A \in \mathfrak{P}(S) | A \in \mathfrak{A}\}$ を $\mathfrak{O}$ とおくと、$S, \emptyset \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、次のようになる。

$$\begin{aligned} S, \emptyset \in \mathfrak{A} &\Leftrightarrow S \setminus S, S \setminus \emptyset \in \mathfrak{O} \\ &\Leftrightarrow S, \emptyset \in \mathfrak{O} \end{aligned}$$

$\forall S \setminus A, S \setminus B \in \mathfrak{O}$ に対し、$A \cup B \in \mathfrak{A}$ が成り立つので、次のようになる。

$$S \setminus A \cap S \setminus B = S \setminus (A \cup B) \in \mathfrak{O}$$

任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\{S \setminus A_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ において、$\bigcap_{\lambda \in \varLambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$ が成り立つので、次のようになる。

$$\bigcup_{\lambda \in \varLambda} (S \setminus A_\lambda) = S \setminus \bigcap_{\lambda \in \varLambda} A_\lambda \in \mathfrak{O}$$

以上より、その集合 $\mathfrak{O}$ は位相になる。

逆に、その位相 $\mathfrak{O}$ が与えられたとき、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} O \in \mathfrak{O} &\Leftrightarrow O \in \mathfrak{P}(S) \land S \setminus O \in \mathfrak{A} \\ &\Leftrightarrow S \setminus (S \setminus O) \in \mathfrak{P}(S) \land S \setminus O \in \mathfrak{A} \end{aligned}$$

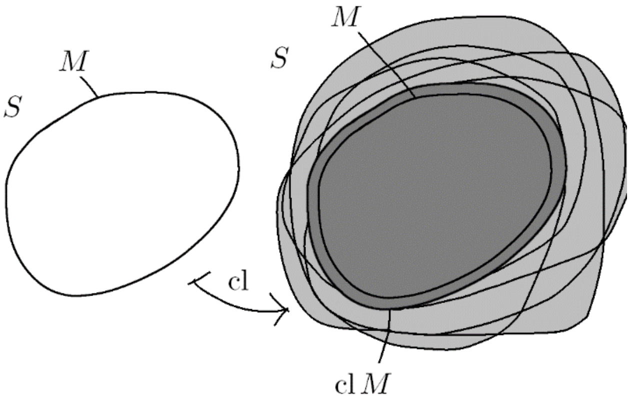
したがって、その位相 $\mathfrak{O}$ がその集合 $\mathfrak{A}$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系と一致できる 1 つの位相 $\mathfrak{O}$ となっている。 □

### 1.1.5 閉包

**定義 1.1.6.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系 $\mathfrak{A}$ を用いて $A \in \mathfrak{A}$ かつ $M \subseteq A$ なる集合 $A$ 全体の積集合 $\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$ において、上記の閉集合についての定理より $\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A \in \mathfrak{A}$ が成り立つかつ、$\forall A \in \mathfrak{A}$ に対し、$M \subseteq A$ が成り立つなら、$\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A \subseteq A$ が成り立つ、即ち、その集合 $\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$ の大きさはいかなる、$M \subseteq A$ が成り立つかつ、その閉集合系 $\mathfrak{A}$ に属するような集合 $A$ の大きさ以下になる。これは後述する定理 1.1.6 で改めて述べられるが、このような集合 $\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$ をその集合 $M$ の閉包、触集合といい $\mathrm{cl}M$、$Cl(M)$、$\overline{M}$、$M^a$ などと書く、即ち、次式のように定義される。この閉包 $\mathrm{cl}M$ の元を触点という。もちろん、その集合 $M$ の任意の元はその閉包 $\mathrm{cl}M$ の触点である。

$$\mathrm{cl}M = \bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$$

これは次の図のように考えると、分かりやすかろう。




**定理 1.1.6.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ の閉包 $\mathrm{cl}M$ が集合 $S'$ であるならそのときに限り、次のこといずれも成り立つ。

- $M \subseteq S'$ が成り立つ。
- $S' \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。
- $M \subseteq A$ かつ $A \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$S' \subseteq A$ が成り立つ。

さらに、順序集合 $(\mathfrak{P}(S), \subseteq)$ が与えられたとき、次式が成り立つ。

$$\mathrm{cl}M = \min\left\{A \in \mathfrak{A} | M \subseteq A\right\}$$

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系 $\mathfrak{A}$ を用いてその集合 $S$ の任意の部分集合 $M$ の閉包 $\mathrm{cl}M$ が集合 $S'$ であるなら、その集合 $S'$ はその集合 $S$ の部分集合で積集合 $\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$ に等しい。ここで、$M \subseteq A$ が成り立つので、$M \subseteq \bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$ が成り立つかつ、$A \in \mathfrak{A}$ と閉集合についての定理より $\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A \in \mathfrak{A}$ が成り立つかつ、$M \subseteq A$ なる任意のその閉集合系 $\mathfrak{A}$ の元 $A$ に対し、$\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A \subseteq A$ が成り立つので、全称除去より $M \subseteq A \wedge A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A \subseteq A$ が成り立つ。したがって、その集合 $M$ の閉包 $\mathrm{cl}M$ が集合 $S'$ であるならそのときに限り、次のこといずれも成り立つ。

- $M \subseteq S'$ が成り立つ。
- $S' \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。
- $M \subseteq A$ かつ $A \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$S' \subseteq A$ が成り立つ。

逆に、これらが成り立つなら、その積集合 $\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$ は上記の議論によりこれらを満たすので、その集合 $S'$ はその積集合 $\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$ とおくことができる。ここで、これらを満たすその積集合 $\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$ ではない集合 $S''$

が存在すると仮定すると、$M \subseteq S''$ かつ $S'' \in \mathfrak{A}$ が成り立つので、$\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A \subseteq S''$ が成り立つが、これは $M \subseteq \bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$ かつ $\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$S'' \subseteq \bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$ が成り立つことに矛盾する。したがって、その集合 $S'$ はその積集合 $\bigcap_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ M \subseteq A}} A$ である必要がありその集合 $M$ の閉包 $\mathrm{cl}M$ が集合 $S'$ である。

さらに、順序集合 $(\mathfrak{P}(S), \subseteq)$ が与えられたとき、次のことが成り立つなら、

- $M \subseteq \mathrm{cl}M$ が成り立つ。
- $\mathrm{cl}M \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。
- $M \subseteq A$ かつ $A \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$\mathrm{cl}M \subseteq A$ が成り立つ。

これは次のように書き換えられることができる。

$$\forall A \in \{A \in \mathfrak{A} | M \subseteq A\} \left[\mathrm{cl}M \subseteq A\right]$$

したがって、最小元の定義より次式が成り立つ。

$$\mathrm{cl}M = \min\{A \in \mathfrak{A} | M \subseteq A\}$$

□

**定理 1.1.7.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉包について次のことが成り立つ。

- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \in \mathfrak{A}$ が成り立つならそのときに限り、$\mathrm{cl}M = M$ が成り立つ。
- $\forall M, N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \subseteq N$ が成り立つなら、$\mathrm{cl}M \subseteq \mathrm{cl}N$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系 $\mathfrak{A}$ を用いて $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$M \subseteq M$ が成り立つかつ、$M \in \mathfrak{A}$ が成り立つかつ、$M \subseteq A$ かつ $A \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$M \subseteq A$ が成り立つので、$\mathrm{cl}M = M$ が成り立つ。逆に、$\mathrm{cl}M = M$ が成り立つなら、$M \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。

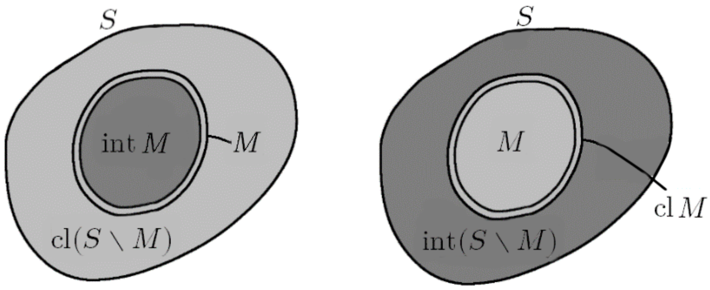
$\forall M, N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \subseteq N$ が成り立つときを考える。閉包 $\mathrm{cl}M$ について、$\mathrm{cl}M \supseteq M$ が成り立つかつ、$\mathrm{cl}M \in \mathfrak{A}$ が成り立つかつ、$M \subseteq A$ かつ $A \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$\mathrm{cl}M \subseteq A$ が成り立つ。閉包 $\mathrm{cl}N$ についても同様である。以上より、$M \subseteq N \subseteq \mathrm{cl}N$ が成り立つかつ、$\mathrm{cl}N \in \mathfrak{A}$ が成り立つので、$\mathrm{cl}M \subseteq \mathrm{cl}N$ が成り立つ。 □

### 1.1.6 開核と閉包との関係

**定理 1.1.8.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と $M\in\mathfrak{P}(S)$ なる集合 $M$ において、次式たちが成り立つ。このことをここでは開核と閉包との関係と呼ぶことにする[*4]。

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(S\setminus M)&=S\setminus\mathrm{int}M\\ S\setminus\mathrm{cl}(S\setminus M)&=\mathrm{int}M\\ \mathrm{int}(S\setminus M)&=S\setminus\mathrm{cl}M\\ S\setminus\mathrm{int}(S\setminus M)&=\mathrm{cl}M\end{aligned}$$

これは次の図のように考えると、分かりやすかろう。




ちなみに、1 つの位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において $S$ 対 $\emptyset$、int 対 cl、$\cup$ 対 $\cap$、$\subseteq$ 対 $\supseteq$ を交互に入れ替えたものも成り立つことが知られており、この性質を位相的双対律という。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と $\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ なる集合 $M$ において、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおけば、$\forall A\in\mathfrak{A}$ に対し $\mathrm{int}M\subseteq M$ より $S\setminus M\subseteq S\setminus\mathrm{int}M$ が得られ、$\mathrm{int}M=S\setminus S\setminus\mathrm{int}M\in\mathfrak{O}$ と閉集合の定義より $S\setminus\mathrm{int}M\in\mathfrak{A}$ が得られる。ここで、$S\setminus M\subseteq A$ なる任意の閉集合 $A$ を考えると、$S\setminus A\subseteq S\setminus S\setminus M=M$ と閉集合の定義より $S\setminus A\in\mathfrak{O}$ かつ $S\setminus A\subseteq M$ が得られる。ここで、その集合 $\mathrm{int}M$ は $O\in\mathfrak{O}$ かつ $O\subseteq M$ なる開集合 $O$ 全体の和集合 $\bigcup_{\substack{O\in\mathfrak{O}\\ O\subseteq M}}O$ でありその集合 $\mathrm{int}M$ の大きさはいかなる、$O\subseteq M$ が成り立つかつ、その位相 $\mathfrak{O}$ に属するような集合 $O$ の大きさ以上になるのであったので、$S\setminus A\subseteq\mathrm{int}M$ が成り立つ。したがって、$S\setminus\mathrm{int}M\in\mathfrak{A}$ かつ $S\setminus\mathrm{int}M\subseteq S\setminus S\setminus A=A$ が得られる。ここで、その集合 $\mathrm{cl}(S\setminus M)$ は $A\in\mathfrak{A}$ かつ $S\setminus M\subseteq A$ なる閉集合 $A$ 全体の積集合 $\bigcap_{\substack{A\in\mathfrak{A}\\ M\subseteq A}}A$ でありその集合 $\mathrm{cl}(S\setminus M)$ の大きさはいかなる、$M\subseteq A$ が成り立つかつ、その閉集合系 $\mathfrak{A}$ に属するような集合 $A$ の大きさ以下になるのであったので、$\mathrm{cl}(S\setminus M)=S\setminus\mathrm{int}M$ が成り立つ。

---

[*4] 別の表記を用いれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}M^{ca}&=M^{ic}\\ M^{cac}&=M^{i}\\ M^{ci}&=M^{ac}\\ M^{cic}&=M^{a}\end{aligned}$$

これが用いられると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
S \setminus \mathrm{cl}(S \setminus M) &= S \setminus S \setminus \mathrm{int}M \\
&= \mathrm{int}M \\
\mathrm{int}(S \setminus M) &= S \setminus S \setminus \mathrm{int}(S \setminus M) \\
&= S \setminus \mathrm{cl}(S \setminus S \setminus M) \\
&= S \setminus \mathrm{cl}M \\
S \setminus \mathrm{int}(S \setminus M) &= \mathrm{cl}(S \setminus S \setminus M) \\
&= \mathrm{cl}M
\end{aligned}$$

□

**定理 1.1.9.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとする。$\forall a \in S$ に対し、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O$ が成り立つなら、$O \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとする。$\forall a \in S$ に対し、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立たないなら、$a \in S \setminus \mathrm{cl}M$ が成り立つ。したがって、$a \in \mathrm{int}(S \setminus M)$ が成り立つことになりその集合 $\mathrm{int}(S \setminus M)$ はその位相 $\mathfrak{O}$ の開集合で $\mathrm{int}(S \setminus M) \subseteq S \setminus M$ が成り立つことから、次のようになるので、

$$\mathrm{int}(S \setminus M) \cap M \subseteq S \setminus M \cap M = \emptyset$$

$\mathrm{int}(S \setminus M) = \emptyset$ が成り立つ。

逆に、$\exists O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \cap M = \emptyset$ が成り立つなら、$\forall a \in O$ に対し、$a \in O$ かつ $a \notin O \cap P$ が成り立つことになり、したがって、$a \in O$ かつ $a \notin M$ が成り立つので、$O \subseteq S \setminus M$ が成り立つ。ここで、その集合 $O$ が開集合で $O = \mathrm{int}O$ が成り立つことに注意すれば、$O \subseteq \mathrm{int}(S \setminus M)$ が成り立ち、$\mathrm{int}(S \setminus M) = S \setminus \mathrm{cl}M$ が成り立つので、その元 $a$ はその閉包 $\mathrm{cl}M$ に属さない。

以上対偶律により、$\forall a \in S$ に対し、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O$ が成り立つなら、$O \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。 □

**定理 1.1.10.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとする。このとき、次のことが成り立つ。

- $\forall O \in \mathfrak{O} \forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$O \cap \mathrm{cl}M \subseteq \mathrm{cl}(O \cap M)$ が成り立つ。
- $\forall O \in \mathfrak{O} \forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$O \cap M = \emptyset$ が成り立つなら、$O \cap \mathrm{cl}M = \emptyset$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとする。

$\forall O \in \mathfrak{O} \forall M \in \mathfrak{P}(S) \forall a \in O \cap \mathrm{cl}M$ に対し、明らかに $a \in \mathrm{cl}M$ が成り立ち、$a \in O'$ なるその位相 $\mathfrak{O}$ の任意の開集合 $O'$ が与えられると、位相の定義よりその集合 $O \cap O'$ も開集合で $O \cap O' \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。したがって、$a \in O'$ なるその位相 $\mathfrak{O}$ の任意の開集合たち $O'$ に対し、$O' \cap (O \cap M) \neq \emptyset$ が成り立つので、$a \in \mathrm{cl}(O \cap M)$ が成り立つ。以上より、$O \cap \mathrm{cl}M \subseteq \mathrm{cl}(O \cap M)$ が成り立つ。

特に、$O \cap M = \emptyset$ が成り立つなら、上記の議論により $O \cap \mathrm{cl}M \subseteq \mathrm{cl}\emptyset$ が成り立つかつ、空集合 $\emptyset$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ での閉集合でもあるので、$\mathrm{cl}\emptyset = \emptyset$ が成り立つことになり、したがって、$O \cap \mathrm{cl}M = \emptyset$ が成り立つ。 □

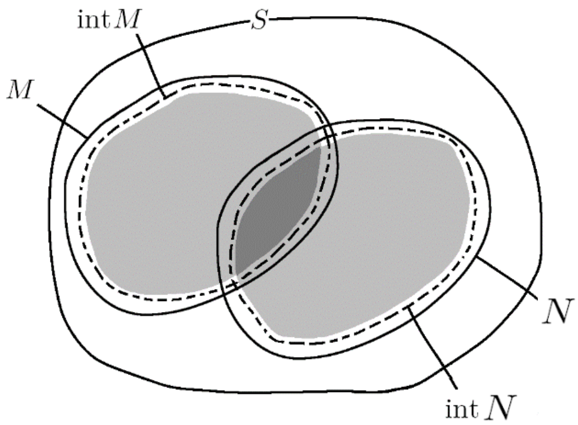
### 1.1.7 開核作用子と閉包作用子

**定義 1.1.7.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、写像 $\mathrm{int}:\mathfrak{P}(S)\rightarrow\mathfrak{P}(S);M\mapsto\mathrm{int}M$ をその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における開核作用子という。

**定理 1.1.11.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、次のことが成り立つ。

- $\mathrm{int}S=S$ が成り立つ。
- $\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$\mathrm{int}M\subseteq M$ が成り立つ。
- $\forall M,N\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$\mathrm{int}(M\cap N)=\mathrm{int}M\cap\mathrm{int}N$ が成り立つ。
- $\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$\mathrm{int}\mathrm{int}M=\mathrm{int}M$ が成り立つ。

これは次の図のように考えると、分かりやすかろう。




**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、定理 1.1.2 より $S\subseteq S$ かつ $S\in\mathfrak{O}$ かつ $O\subseteq S\wedge O\in\mathfrak{O}\Rightarrow O\subseteq S$ が成り立つので、$\mathrm{int}S=S$ が得られる。

$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、定義より明らかに $\mathrm{int}M\subseteq M$ が成り立つ。

これにより、$\forall M,N\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$\mathrm{int}M\cap\mathrm{int}N\subseteq M\cap N$ が成り立つ。ここで、位相の定義と $\mathrm{int}M,\mathrm{int}N\in\mathfrak{O}$ より $\mathrm{int}M\cap\mathrm{int}N\in\mathfrak{O}$ が成り立つかつ、$O\subseteq M\cap N$ なる任意の開集合 $O$ を考えると、$O\subseteq M$ かつ $O\in\mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O\subseteq\mathrm{int}M$ が成り立つことと $O\subseteq N$ かつ $O\in\mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O\subseteq\mathrm{int}N$ が成り立つことより $O\subseteq\mathrm{int}M\cap\mathrm{int}N$ が得られる。したがって、定理 1.1.2 より $\mathrm{int}(M\cap N)=\mathrm{int}M\cap\mathrm{int}N$ が成り立つ。

$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$\mathrm{int}M\subseteq\mathrm{int}M$ かつ $\mathrm{int}M\in\mathfrak{O}$ が成り立つかつ、$O\subseteq\mathrm{int}M$ かつ $O\in\mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O\subseteq\mathrm{int}M$ が成り立つことより $\mathrm{int}\mathrm{int}M=\mathrm{int}M$ が得られる。 □

**定理 1.1.12.** 空集合 $\emptyset$ でない集合 $S$ の各部分集合たちにその集合 $S$ の部分集合たちを対応させる写像 $i:\mathfrak{P}(S)\rightarrow\mathfrak{P}(S)$ で次のことが成り立つとする。

- $i(S)=S$ が成り立つ。
- $\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$i(M)\subseteq M$ が成り立つ。
- $\forall M,N\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$i(M\cap N)=i(M)\cap i(N)$ が成り立つ。

- $i \circ i = i$ が成り立つ。

このとき、その写像 $i$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ における開核作用子と一致できる 1 つの位相 $\mathfrak{O}$ がただ 1 つに決まり、次式のように与えられる。

$$\mathfrak{O} = \{M \in \mathfrak{P}(S) | i(M) = M\}$$

**証明.** 空集合 $\emptyset$ でない集合 $S$ の各部分集合たちにその集合 $S$ の部分集合たちを対応させる写像 $i$ : $\mathfrak{P}(S) \rightarrow \mathfrak{P}(S)$ で次のことが成り立つとする。

- $i(S) = S$ が成り立つ。
- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$i(M) \subseteq M$ が成り立つ。
- $\forall M, N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$i(M \cap N) = i(M) \cap i(N)$ が成り立つ。
- $i \circ i = i$ が成り立つ。

ここで、$\mathfrak{O} = \{M \in \mathfrak{P}(S) | i(M) = M\}$ なる集合 $\mathfrak{O}$ が位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ における位相に一致しその写像 $i$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開核作用子と一致することを示そう。

　仮定と空集合はどの集合にも含まれることより次のようになる。

$$\begin{aligned} i(S) = S \wedge i(\emptyset) \subseteq \emptyset \wedge \emptyset \subseteq i(\emptyset) &\Leftrightarrow i(S) = S \wedge i(\emptyset) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow S, \emptyset \in \mathfrak{O} \end{aligned}$$

$\forall O, P \in \mathfrak{O}$ に対し、仮定とこれの数学的帰納法より次のようになる。

$$\begin{aligned} O, P \in \mathfrak{O} &\Leftrightarrow i(O) = O \wedge i(P) = P \\ &\Rightarrow i(O \cap P) = i(O) \cap i(P) = O \cap P \\ &\Leftrightarrow O \cap P \in \mathfrak{O} \end{aligned}$$

任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ が与えられると、$\forall \lambda \in \varLambda$ に対し、仮定より次のようになる。

$$\begin{aligned} O_\lambda \in \mathfrak{O} &\Leftrightarrow O_\lambda \in \mathfrak{O} \wedge O_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \wedge i\left(\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \\ &\Leftrightarrow i\left(O_\lambda\right) = O_\lambda \wedge O_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \wedge i\left(\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \\ &\Leftrightarrow i\left(O_\lambda\right) = O_\lambda \subseteq i\left(\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) \wedge i\left(\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \\ &\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \subseteq i\left(\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) \wedge i\left(\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \\ &\Leftrightarrow i\left(\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \\ &\Leftrightarrow \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \in \mathfrak{O} \end{aligned}$$

以上より次の条件たちが満たされその集合 $\mathfrak{O}$ は位相に相当する。

- $S, \emptyset \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $\forall O, P \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \cap P \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- 任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ において $\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

また、次のようになることから、

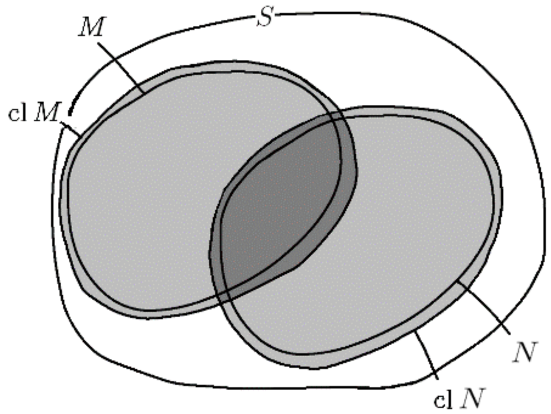
- $i(M) \subseteq M$ が成り立つ。
- $i \circ i(M) = i(i(M)) = i(M)$ より $i(M) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $O \subseteq M$ かつ $O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$i(O) \subseteq i(M)$ かつ $i(O) = O$ が成り立つことにより、$O \subseteq i(M)$ が成り立つ。

定理 1.1.2 よりその集合 $i(M)$ はその集合 $M$ の開核である。 □

**定理 1.1.13.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、写像 $\mathrm{cl} : \mathfrak{P}(S) \rightarrow \mathfrak{P}(S); M \mapsto \mathrm{cl}M$ をその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ における閉包作用子という。これについて次式たちが成り立つ。

- $\mathrm{cl}\emptyset = \emptyset$ が成り立つ。
- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \subseteq \mathrm{cl}M$ が成り立つ。
- $\forall M, N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$\mathrm{cl}(M \cup N) = \mathrm{cl}M \cup \mathrm{cl}N$ が成り立つ。
- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$\mathrm{clcl}M = \mathrm{cl}M$ が成り立つ。

これは次の図のように考えると、分かりやすかろう。




**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、これの閉集合系 $\mathfrak{A}$ が与えられたとき、定理 1.1.6 より $\emptyset \subseteq \emptyset$ かつ $\emptyset \in \mathfrak{A}$ かつ $\emptyset \subseteq A \wedge A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \emptyset \subseteq A$ が成り立つので、$\mathrm{cl}\emptyset = \emptyset$ が得られる。

$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、定義より明らかに $M \subseteq \mathrm{cl}M$ が成り立つ。

これにより、$\forall M, N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \cup N \subseteq \mathrm{cl}M \cup \mathrm{cl}N$ が成り立つ。ここで、$\mathrm{cl}M, \mathrm{cl}N \in \mathfrak{A}$ より $\mathrm{cl}M \cup \mathrm{cl}N \in \mathfrak{A}$ かつ $M \cup N \subseteq A$ なる任意の閉集合 $A$ を考えると、$M \subseteq A$ かつ $A \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$\mathrm{cl}M \subseteq A$ が成り立つことと $N \subseteq A$ かつ $A \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$\mathrm{cl}N \subseteq A$ が成り立つことより $\mathrm{int}M \cup \mathrm{int}N \subseteq A$ が得られる。したがって、定理 1.1.6 より $\mathrm{cl}(M \cup N) = \mathrm{cl}M \cup \mathrm{cl}N$ が成り立つ。

$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$\mathrm{cl}M \subseteq \mathrm{cl}M$ かつ $\mathrm{cl}M \in \mathfrak{A}$ が成り立つかつ、$\mathrm{cl}M \subseteq A$ かつ $A \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$\mathrm{cl}M \subseteq A$ が成り立つことより $\mathrm{clcl}M = \mathrm{cl}M$ が得られる。 □

**定理 1.1.14.** 空集合 $\emptyset$ でない集合 $S$ の各部分集合たちにその集合 $S$ の部分集合たちを対応させる写像 $a : \mathfrak{P}(S) \rightarrow \mathfrak{P}(S)$ で次のことが成り立つとする。

- $a(\emptyset) = \emptyset$ が成り立つ。
- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \subseteq a(M)$ が成り立つ。
- $\forall M, N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$a(M \cup N) = a(M) \cup a(N)$ が成り立つ。
- $a \circ a = a$ が成り立つ。

このとき、その写像 $a$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ における閉包作用子と一致できる 1 つの位相 $\mathfrak{O}$ がただ 1 つに決まり、次式のように与えられる。

$$\mathfrak{O} = \{S \setminus M \in \mathfrak{P}(S) | a(M) = M\}$$

これを位相 $\mathfrak{O}$ の公理系とする場合があり、このときの公理系を Kuratowski の公理系という。

**証明.** 空集合 $\emptyset$ でない集合 $S$ の各部分集合たちにその集合 $S$ の部分集合たちを対応させる写像 $a : \mathfrak{P}(S) \rightarrow \mathfrak{P}(S)$ で次のことが成り立つとする。

- $a(\emptyset) = \emptyset$ が成り立つ。
- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \subseteq a(M)$ が成り立つ。
- $\forall M, N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$a(M \cup N) = a(M) \cup a(N)$ が成り立つ。
- $a \circ a = a$ が成り立つ。

ここで、$\mathfrak{O} = \{S \setminus M \in \mathfrak{P}(S) | a(M) = M\}$ なる集合 $\mathfrak{O}$ が位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ における位相に、$\mathfrak{A} = \{M \in \mathfrak{P}(S) | a(M) = M\}$、即ち、$\mathfrak{A} = \{M \in \mathfrak{P}(S) | S \setminus M \in \mathfrak{O}\}$ なる集合 $\mathfrak{A}$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ における閉集合系に一致しその写像 $a$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉包作用子と一致することを示そう。

仮定とその集合 $S$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ でのどの集合にも含まれることより次のようになる。

$$\begin{aligned} a(\emptyset) = \emptyset \wedge S \subseteq a(S) \wedge a(S) \subseteq S &\Leftrightarrow a(S) = S \wedge a(\emptyset) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow S, \emptyset \in \mathfrak{A} \\ &\Leftrightarrow S \setminus S, S \setminus \emptyset \in \mathfrak{O} \\ &\Leftrightarrow S, \emptyset \in \mathfrak{O} \end{aligned}$$

$\forall O, P \in \mathfrak{O}$ に対し、仮定とこれの数学的帰納法より次のようになる。

$$\begin{aligned} O, P \in \mathfrak{O} &\Leftrightarrow a(S \setminus O) = S \setminus O \wedge a(S \setminus P) = S \setminus P \\ &\Rightarrow a(S \setminus O \cup S \setminus P) = a(S \setminus O) \cup a(S \setminus P) = S \setminus O \cup S \setminus P \\ &\Leftrightarrow S \setminus O \cup S \setminus P = S \setminus (O \cap P) \in \mathfrak{A} \\ &\Leftrightarrow O \cap P \in \mathfrak{O} \end{aligned}$$

任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ が与えられると、$\forall \lambda \in \varLambda$ に対し、仮定より次のようになる。

$$O_\lambda \in \mathfrak{O} \Leftrightarrow O_\lambda \in \mathfrak{O} \wedge O_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \wedge S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \subseteq a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow a\left(S \setminus O_\lambda\right) = S \setminus O_\lambda \wedge S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \subseteq S \setminus O_\lambda \wedge S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \subseteq a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right)\\
&\Leftrightarrow a\left(S \setminus O_\lambda\right) = S \setminus O_\lambda \wedge S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \subseteq S \setminus O_\lambda \wedge S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \subseteq a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right)\\
&\Rightarrow a\left(S \setminus O_\lambda\right) = S \setminus O_\lambda \wedge a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(S \setminus O_\lambda\right) \wedge S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \subseteq a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right)\\
&\Rightarrow a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) \subseteq S \setminus O_\lambda \wedge S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \subseteq a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right)\\
&\Rightarrow a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \varLambda} \left(S \setminus O_\lambda\right) \wedge S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \subseteq a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right)\\
&\Leftrightarrow a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) \subseteq S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \wedge S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \subseteq a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right)\\
&\Leftrightarrow a\left(S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) = S \setminus \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\\
&\Leftrightarrow \bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}
\end{aligned}$$

以上より次の条件たちが満たされその集合 $\mathfrak{O}$ は位相に相当する。

- $S, \emptyset \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $\forall O, P \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \cap P \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- 任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\left\{O_\lambda\right\}_{\lambda \in \varLambda}$ において $\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

また、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、次のようになることから、

- $M \subseteq a(M)$ が成り立つ。
- $a \circ a(M) = a\left(a(M)\right) = a(M)$ より $a(M) \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。
- $M \subseteq A$ かつ $A \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$a(M) \subseteq a(A) = A$ が成り立つことにより、$a(M) \subseteq A$ が成り立つ。

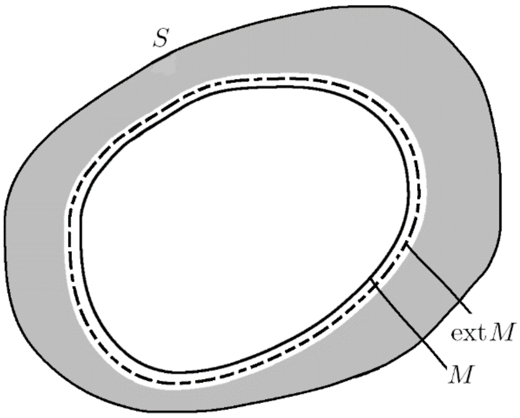
1.1.6 よりその集合 $a(M)$ はその集合 $M$ の閉包である。 □

### 1.1.8 外部と境界

**定義 1.1.8.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$M \in \mathfrak{P}(S)$ なる集合 $M$ の補集合 $S \setminus M$ の開核 $\mathrm{int}(S \setminus M)$ をその集合 $M$ の外部といい、$\mathrm{ext}M$、$M^e$ などと書く、即ち、次式のようになる。この外部 $M^e$ の元を外点という。

$$\mathrm{ext}M = \mathrm{int}(S \setminus M)$$

これは次の図のように考えると、分かりやすかろう。




**定理 1.1.15.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、次式が成り立つ[*5]。

$$\begin{aligned} \mathrm{ext}M &\in \mathfrak{O} \\ \mathrm{ext}M &= S \setminus \mathrm{cl}M \\ S &= \mathrm{cl}M \sqcup \mathrm{ext}M \end{aligned}$$

**証明.** これらは定義と開核と閉包との関係より明らかである。実際、位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられ $M \in \mathfrak{P}(S)$ なる集合 $M$ において、開核は定義より位相 $\mathfrak{O}$ に属するので、$\mathrm{ext}M = \mathrm{int}(S \setminus M) \in \mathfrak{O}$ が成り立ち、開核と閉包との関係より $\mathrm{int}(S \setminus M) = S \setminus \mathrm{cl}M$ が成り立つので、$\mathrm{ext}M = S \setminus \mathrm{cl}M$ が成り立ち、これと差集合の性質より $S = \mathrm{cl}M \sqcup S \setminus \mathrm{cl}M = \mathrm{cl}M \sqcup \mathrm{ext}M$ が成り立つ。 □

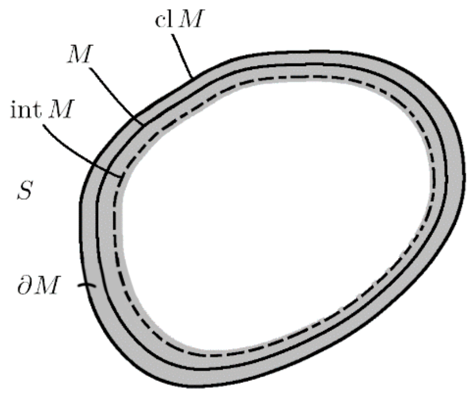
**定義 1.1.9.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$M \in \mathfrak{P}(S)$ なる集合 $M$ の閉包 $\mathrm{cl}M$ から開核 $\mathrm{int}M$ への差集合 $\mathrm{cl}M \setminus \mathrm{int}M$ をその集合 $M$ の境界といい、$\partial M$、$\partial(M)$、$bdM$、$M^f$ などと書く、即ち、次式のようになる。この境界 $\partial M$ の元を境界点という。

$$\partial M = \mathrm{cl}M \setminus \mathrm{int}M$$

これは次の図のように考えると、分かりやすかろう。

[*5] 別の表記を用いれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} M^e &\in \mathfrak{O} \\ M^e &= M^{ac} \\ S &= M^a \sqcup M^e \end{aligned}$$




**定理 1.1.16.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、次式が成り立つ[*6]。

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}M &= \mathrm{int}M \sqcup \partial M \\ S &= \mathrm{int}M \sqcup \partial M \sqcup \mathrm{ext}M \end{aligned}$$

**証明.** これらは定義より明らかである。実際、位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられ $M \in \mathfrak{P}(S)$ なる集合 $M$ において、差集合の性質より $\mathrm{cl}M = \mathrm{int}M \sqcup \mathrm{cl}M \setminus \mathrm{int}M = \mathrm{int}M \sqcup \partial M$ が成り立ち、これと $S = \mathrm{cl}M \sqcup \mathrm{ext}M$ が成り立つことにより、$S = \mathrm{int}M \sqcup \partial M \sqcup \mathrm{ext}M$ が得られる。 □

**定理 1.1.17.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ の境界 $\partial(M)$ は閉集合である。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ とこれの閉集合系 $\mathfrak{A}$、$M \in \mathfrak{P}(S)$ なる集合 $M$ が与えられたとき、境界の定義より次のようになる。

$$\begin{aligned} S \setminus \partial M &= S \setminus (\mathrm{cl}M \setminus \mathrm{int}M) \\ &= S \setminus (\mathrm{cl}M \cap (S \setminus \mathrm{int}M)) \\ &= S \setminus \mathrm{cl}M \cup S \setminus S \setminus \mathrm{int}M \\ &= S \setminus \mathrm{cl}M \cup \mathrm{int}M \end{aligned}$$

ここで、$\mathrm{cl}M \in \mathfrak{A}$ が成り立つのであったので、閉集合の定義より $S \setminus \mathrm{cl}M \in \mathfrak{O}$ が成り立つかつ、$\mathrm{int}M \in \mathfrak{O}$ が成り立つので、位相の定義より $S \setminus \mathrm{cl}M \cap \mathrm{int}M \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。したがって、$S \setminus \partial M \in \mathfrak{O}$ が成り立ち閉集合の定義より $S \setminus \partial M$ が成り立つ。 □

**定理 1.1.18.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が開集合であるならそのときに限り、積集合 $M \cap \partial M$ は空集合である、即ち、$M \in \mathfrak{O}$ が成り立つならそのときに限り、$M \cap \partial M = \emptyset$ が成り立つ。

これにより、開集合とはその集合自身の境界と交わらないような集合であることが分かる。

---

[*6] 別の表記を用いれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} M^a &= M^i \sqcup M^f \\ S &= M^i \sqcup M^f \sqcup M^e \end{aligned}$$

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と $M\in\mathfrak{O}$ なる集合 $M$ を考える。このとき、その集合 $M$ が開集合で $M=\mathrm{int}M$ が成り立つので、したがって、$M\cap\partial M=\emptyset$ が成り立つとすれば、

$$\begin{aligned} M\cap\partial M=\emptyset &\Leftrightarrow M\cap(\mathrm{cl}M\setminus\mathrm{int}M)=\emptyset \\ &\Leftrightarrow M\cap\mathrm{cl}M\cap S\setminus\mathrm{int}M=\emptyset \\ &\Leftrightarrow \mathrm{cl}M\cap M\cap S\setminus\mathrm{int}M=\emptyset \\ &\Leftrightarrow \mathrm{cl}M\cap M\cap S\setminus M=\emptyset \\ &\Leftrightarrow \mathrm{cl}M\cap\emptyset=\emptyset \end{aligned}$$

これは恒真式であるから、これより $M\in\mathfrak{O}$ かつ $M\cap\partial M=\emptyset$ は常に真であり、$M\in\mathfrak{O}$ かつ $M\cap\partial M=\emptyset$ が成り立つまたは $M\in\mathfrak{O}$、$M\cap\partial M=\emptyset$ どちらも成り立たないということも真となりこれが同値にあたるので、$M\in\mathfrak{O}$ が成り立つならそのときに限り、$M\cap\partial M=\emptyset$ が成り立つことも真である。 □

**定理 1.1.19.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が閉集合であるならそのときに限り、その集合 $M$ はその境界 $\partial M$ を含む、即ち、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ として $M\in\mathfrak{A}$ が成り立つならそのときに限り、$\partial M\subseteq M$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ とこれの閉集合系 $\mathfrak{A}$、$M\in\mathfrak{A}$ なる集合 $M$ を考える。このとき、閉集合の定義より $S\setminus M\in\mathfrak{O}$ が成り立つので、$\mathrm{int}(S\setminus M)=S\setminus M$ が成り立ち $S\setminus\mathrm{int}(S\setminus M)=\mathrm{cl}M$ より $\mathrm{cl}M=M$ が成り立つ。したがって、$\partial M\subseteq M$ が成り立つとすれば、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \partial M\subseteq M &\Leftrightarrow \mathrm{cl}M\setminus\mathrm{int}M\subseteq M \\ &\Leftrightarrow M\setminus\mathrm{int}M\subseteq M \end{aligned}$$

これは恒真式であるから、これより $M\in\mathfrak{A}$ かつ $\partial M\subseteq M$ は常に真であり、$M\in\mathfrak{A}$ かつ $\partial M\subseteq M$ が成り立つまたは $M\in\mathfrak{A}$、$\partial M\subseteq M$ どちらも成り立たないということも真となりこれが同値にあたるので、$M\in\mathfrak{A}$ が成り立つならそのときに限り、$\partial M\subseteq M$ が成り立つことも真である。 □

**定理 1.1.20.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ の境界点はその集合 $M$ の触点であるかつ、集合 $S\setminus M$ の触点でもある。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と $M\in\mathfrak{P}(S)$ なる集合 $M$ が考えられれば、その集合 $M$ の位相的境界の定義より次のようになる。

$$\begin{aligned} a\in\partial M &= \mathrm{cl}M\setminus\mathrm{int}M \\ &= \mathrm{cl}M\cap(S\setminus\mathrm{int}M) \\ &= \mathrm{cl}M\cap\mathrm{cl}(S\setminus M) \end{aligned}$$

これが成り立つならそのときに限り、その元 $a$ はその集合 $M$ の触点であるかつ、集合 $S\setminus M$ の触点でもある。 □

**定義 1.1.10.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$a\in S$ なる元 $a$ が集合 $M\setminus\{a\}$ の触点であるとき、即ち、$a\in\mathrm{cl}\,(M\setminus\{a\})$ が成り立つとき、その元 $a$ はその集合 $M$ の集積点という。

**定理 1.1.21.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ の集積点 $a$ はその集合 $M$ の触点の 1 つでもある。特に、$a\notin M$ なるその集合 $M$ の全ての触点たち $a$ はその集合 $M$ の集積点でもある。

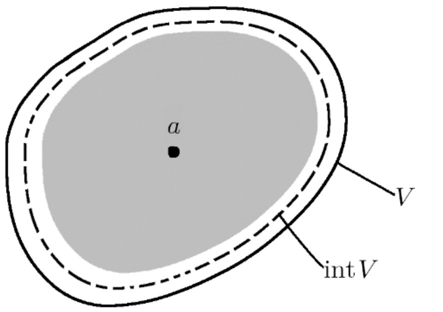
**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられ $M \in \mathfrak{P}(S)$ なる任意の集合 $M$ とその集合 $M$ の集積点 $a$ において、$M \setminus \{a\} \subseteq M$ が成り立つので、$\mathrm{cl}\,(M \setminus \{a\}) \subseteq \mathrm{cl}M$ が成り立つことにより、$a \in \mathrm{cl}M$ が得られ、したがって、その集積点 $a$ はその集合 $M$ の触点の 1 つでもある。特に、$a \notin M$ なるその集合 $M$ の任意の触点 $a$ について、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つかつ、$M \setminus \{a\} = M$ が成り立つので、$a \in \mathrm{cl}\,(M \setminus \{a\})$ が成り立つ。 □

**定義 1.1.11.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$a \in M$ なる元 $a$ でその集合 $M$ の集積点でないとき、その元 $a$ はその集合 $M$ の孤立点という。

### 1.1.9 近傍

**定義 1.1.12.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$a \in S$ なる元 $a$ が $V \in \mathfrak{P}(S)$ なる集合 $V$ の内点である、即ち、$a \in \mathrm{int}V$ が成り立つとき、その集合 $V$ がその元 $a$ の近傍であるという。

これは次の図のように考えると、分かりやすかろう。

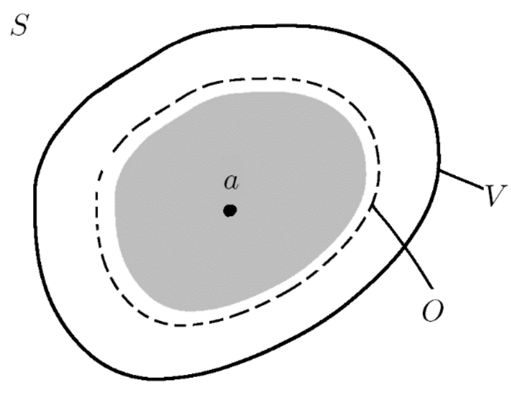



**定義 1.1.13.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$a \in S$ なる元 $a$ の近傍全体の集合をその位相 $\mathfrak{O}$ におけるその元 $a$ の全近傍系といい、$\mathbf{V}(a)$ などと書く、即ち、次式のように定義する。

$$\mathbf{V}(a) = \{V \in \mathfrak{P}(S) | a \in \mathrm{int}V\}$$

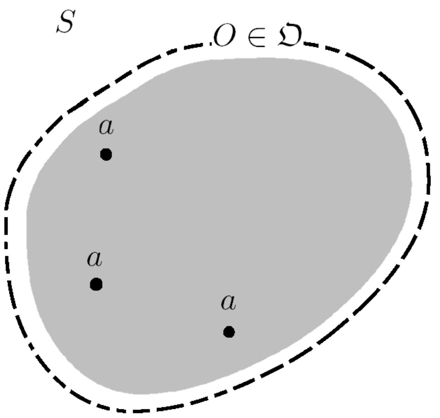
**定理 1.1.22.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall a \in S$ に対し、$V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つならそのときに限り、$\exists O \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O \subseteq V$ が成り立つ。

これは次の図のように考えると、分かりやすかろう。



**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall a \in S$ に対し、$V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つなら、開核と近傍の定義より $a \in \mathrm{int}V \subseteq V$ が成り立つ。逆に、$a \in \mathrm{int}V$ が成り立たないとき、$\exists O \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O \subseteq V$ が成り立つ仮定すると、$a \in O = \mathrm{int}O \subseteq \mathrm{int}V$ が得られるが、これは矛盾している。ゆえに、$a \in \mathrm{int}V$ が成り立たないなら、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \notin O$ が成り立つ、または、$O \subseteq V$ が成り立たない。したがって、対偶律より $\exists O \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O \subseteq V$ が成り立つなら、$V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。 □

**定理 1.1.23.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$O \in \mathfrak{O}$ が成り立つならそのときに限り、$\forall a \in O$ に対し、$O \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。これは次の図のように考えると、分かりやすかろう。



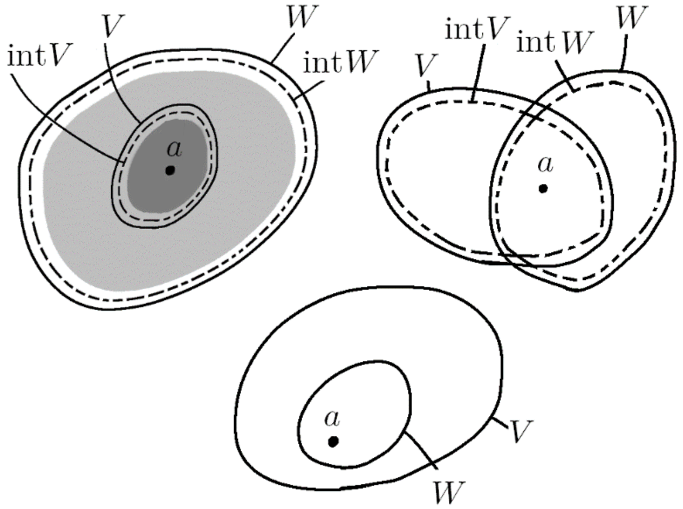

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O = \mathrm{int}O$ が成り立つので、$\forall a \in O$ に対し、$a \in O = \mathrm{int}O$ が成り立つ、即ち、$O \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。逆に、$\forall a \in O$ に対し、$O \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ、即ち、$a \in \mathrm{int}O$ が成り立つなら、$O \subseteq \mathrm{int}O$ が得られることになり、$\mathrm{int}O \subseteq O$ が成り立つので、$O = \mathrm{int}O$ が成り立つ。これが成り立つならそのときに限り、その集合 $O$ は開集合である、即ち、$O \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。 □

**定理 1.1.24.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ について、次のことが成り立つ。

- $\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$a \in V$ が成り立つ。
- $\forall V \in \mathbf{V}(a) \forall W \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$V \subseteq W$ が成り立つなら、$W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。
- $\forall V, W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。
- $\forall V \in \mathbf{V}(a) \exists W \in \mathbf{V}(a) \forall b \in W$ に対し、$V \in \mathbf{V}(b)$ が成り立つ[*7]。

これらの主張は次の図のように考えると、分かりやすかろう。

[*7] 例えば、$W = \mathrm{int}V$ が挙げられる。




**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と $a \in S$ なる元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ において、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、定義より $a \in \mathrm{int}V$ が成り立ち、$\mathrm{int}V \subseteq V$ が成り立つので、$a \in \mathrm{int}V \subseteq V$ が得られる。よって、$a \in V$ が成り立つ。

また、$\forall V \in \mathbf{V}(a) \forall W \in \mathfrak{P}(S)$ に対し $V \subseteq W$ が成り立つなら、定義より $a \in \mathrm{int}V$ が成り立ち、$\mathrm{int}V \subseteq V$ が成り立つかつ、仮定より $V \subseteq W$ が成り立つことより $\mathrm{int}V \subseteq \mathrm{int}W$ が成り立つので、$a \in \mathrm{int}V \subseteq \mathrm{int}W$ が得られる。よって、$W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。

$\forall V, W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、定義より $a \in \mathrm{int}V$ かつ $a \in \mathrm{int}W$ が成り立ち、したがって、$a \in \mathrm{int}V \cap \mathrm{int}W = \mathrm{int}(V \cap W)$ が成り立つ。よって、$V \cap W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。

$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$W = \mathrm{int}V$ とおけば、$\forall b \in W$ に対し、$b \in W = \mathrm{int}V$ が成り立つので、定義より $V \in \mathbf{V}(b)$ が得られるかつ、$\forall a \in \mathrm{int}V$ に対し、$a \in \mathrm{int}V = \mathrm{intint}V$ が成り立つので、定義より $W = \mathrm{int}V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。よって、$\forall V \in \mathbf{V}(a) \exists W \in \mathbf{V}(a) \forall b \in W$ に対し、$V \in \mathbf{V}(b)$ が成り立つ。

□

**定理 1.1.25.** 空集合 $\emptyset$ でない集合 $S$ を用いて $a \in S$ なる元々 $a$ に対するそれぞれ 1 つづつの空集合 $\emptyset$ でない集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合たち $\mathbf{V}(a)$ が次のことが成り立つとする。

- $\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$a \in V$ が成り立つ。
- $\forall V \in \mathbf{V}(a) \forall W \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$V \subseteq W$ が成り立つなら、$W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。
- $\forall V, W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。
- $\forall V \in \mathbf{V}(a) \exists W \in \mathbf{V}(a) \forall b \in W$ に対し、$V \in \mathbf{V}(b)$ が成り立つ。

このとき、その集合 $\mathbf{V}(a)$ が位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における $a \in S$ なる元々 $a$ の全近傍系と一致できる 1 つの位相 $\mathfrak{O}$ がただ 1 つに決まり、次式のように与えられる。

$$\mathfrak{O} = \{M \in \mathfrak{P}(S) | a \in M \Rightarrow M \in \mathbf{V}(a)\}$$

これを位相の公理とするときがありこのような公理を全近傍系の公理という[*8]。

**証明.** 空集合 $\emptyset$ でない集合 $S$ を用いて $a \in S$ なる元々 $a$ に対するそれぞれ 1 つづつの空集合 $\emptyset$ でない集合

[*8] もしかしたら、人によっては直感的にわかりやすい位相空間の公理かもしれません…。

$\mathfrak{P}(S)$ の部分集合たち $\mathbf{V}(a)$ が次のことが成り立つとする。

- $\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$a \in V$ が成り立つ。
- $\forall V \in \mathbf{V}(a)\forall W \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$V \subseteq W$ が成り立つなら、$W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。
- $\forall V, W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。
- $\forall V \in \mathbf{V}(a)\exists W \in \mathbf{V}(a)\forall b \in W$ に対し、$V \in \mathbf{V}(b)$ が成り立つ。

ここで、$\mathfrak{O} = \{M \in \mathfrak{P}(S) | a \in M \Rightarrow M \in \mathbf{V}(a)\}$ なる集合 $\mathfrak{O}$ が位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ における位相に、その集合 $\mathbf{V}(a)$ が $a \in S$ なる元 $a$ の全近傍系に一致することを示そう。

$\forall a \in S$ に対し、仮定より $\exists V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立ち、その集合 $\mathbf{V}(a)$ がその集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合であるから、$V \subseteq S$ が成り立つ。これにより、$S \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。また、明らかに $\emptyset \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

$\forall O, P \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \cap P = \emptyset$ が成り立つなら、上記より $O \cap P \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。$O \cap P \neq \emptyset$ が成り立つなら、$\forall a \in S$ に対し、$a \in O \cap P$ が成り立つとき、その集合 $\mathfrak{O}$ の定義より $a \in O$ が成り立つなら、$O \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つかつ、$a \in P$ が成り立つなら、$P \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つので、$O, P \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つなら、$O \cap P \in \mathbf{V}(a)$ が成り立ち、よって、$O \cap P \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

任意の添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ において、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \emptyset$ が成り立つなら、上記より $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \neq \emptyset$ が成り立つなら、$\forall a \in S$ に対し、$a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ が成り立つとき、$a \in O_{\lambda'}$ なるその添数集合 $\Lambda$ の元 $\lambda'$ が存在して、$O_{\lambda'} \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。$O_{\lambda'} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ が成り立つので、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。よって、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

以上より次の条件たちが満たされその集合 $\mathfrak{O}$ は位相に相当する。

- $S, \emptyset \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $\forall O, P \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \cap P \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- 任意の添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ において $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

また、$S' = \mathrm{int} M$ が成り立つことを次のこといづれも成り立つことと定め

- $S' \subseteq M$ が成り立つ。
- $S' \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $O \subseteq M$ かつ $O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O \subseteq S'$ が成り立つ。

$a \in \mathrm{int} V \Leftrightarrow V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つことを示そう。

このとき、$\mathrm{int} V \in \mathfrak{O}$ が成り立つので、$a \in \mathrm{int} V \Rightarrow \mathrm{int} V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立ち、$\mathrm{int} V \subseteq V$ が成り立つので、以上より、$a \in \mathrm{int} V \Rightarrow V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。

逆に、$\forall a \in S \forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$U = \{b \in S | V \in \mathbf{V}(b)\}$ なる集合 $U$ を考えよう。$b \in U$ が成り立つなら、$V \in \mathbf{V}(b)$ が得られ、したがって、$b \in V$ が成り立つので、$U \subseteq V$ が得られる。$\forall b \in U$ に対し、$V \in \mathbf{V}(b)$ が成り立ち、$\exists W \in \mathbf{V}(b)\forall c \in W$ に対し、$V \in \mathbf{V}(c)$ が成り立つのであったので、定義より $c \in U$ が成り立ち $W \subseteq U$ が得られ、$W \in \mathbf{V}(b)$ より $W \subseteq U$ が成り立つなら、$U \in \mathbf{V}(b)$ が成り立つので、$b \in U \Rightarrow U \in \mathbf{V}(b)$ が得られ、したがって、$U \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。$O \subseteq V$ かつ $O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$\forall d \in O$ に対し、$O \in \mathbf{V}(d)$

が成り立ち、したがって、$V \in \mathbf{V}(d)$ が成り立つので、$d \in U$ が成り立つ。したがって、$d \in O \Rightarrow d \in U$ が得られ $O \subseteq U$ が成り立つ。以上より、$U \subseteq V$ かつ $U \in \mathfrak{O}$ が成り立つかつ、$O \subseteq V$ かつ $O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O \subseteq U$ が成り立つので、$U = \mathrm{int}V$ が成り立ち $V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つなら、$a \in \{b \in S | V \in \mathbf{V}(b)\} = \mathrm{int}V$ が得られ、したがって、$V \in \mathbf{V}(a) \Rightarrow a \in \mathrm{int}V$ が成り立つ。

以上より、$a \in \mathrm{int}V \Leftrightarrow V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つことが示された。 □

**定理 1.1.26.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において $\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の 1 つの全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、次のことが成り立つ。

- $a \in \mathrm{int}M$ が成り立つならそのときに限り、$\exists V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \subseteq M$ が成り立つ。
- $a \in \mathrm{ext}M$ が成り立つならそのときに限り、$\exists V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap M = \emptyset$ が成り立つ。
- $a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。
- $a \in \partial M$ が成り立つならそのときに限り、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap M \neq \emptyset$ かつ $V \cap S \setminus M \neq \emptyset$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において $\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の 1 つの全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$a \in \mathrm{int}M$ が成り立つなら、$M \in \mathbf{V}(a)$ より明らかに $\exists V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \subseteq M$ が成り立つ。逆に、$\exists V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \subseteq M$ が成り立つなら、$a \in \mathrm{int}V$ が成り立つかつ $\mathrm{int}V \subseteq \mathrm{int}M$ が成り立つので、$a \in \mathrm{int}M$ が得られる。

$a \in \mathrm{ext}M = \mathrm{int}(S \setminus M)$ が成り立つならそのときに限り、上記の議論により $\exists V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \subseteq S \setminus M$ が成り立つ。このとき、次のようになることから、

$$\begin{aligned} V \subseteq S \setminus M &\Leftrightarrow \forall a \in S[a \in V \Rightarrow a \in S \setminus M] \\ &\Leftrightarrow \forall a \in S\,[a \notin V \vee (a \in S \wedge a \notin M)] \\ &\Leftrightarrow \forall a \in S\,[(a \notin V \vee a \in S) \wedge (a \notin V \vee a \notin M)] \\ &\Leftrightarrow \forall a \in S[a \notin V \vee a \in S] \wedge \forall a \in S\,[\neg(a \in V \wedge a \in M)] \\ &\Leftrightarrow \forall a \in S[a \in V \Rightarrow a \in S] \wedge \neg\exists a \in S[a \in V \cap M] \\ &\Leftrightarrow V \subseteq S \wedge V \cap M = \emptyset \\ &\Leftrightarrow V \cap M = \emptyset \end{aligned}$$

これが成り立つならそのときに限り、$\exists V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap M = \emptyset$ が成り立つ。

$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り、$a \in S \setminus \mathrm{int}(S \setminus M)$ が成り立つ、即ち、$a \notin \mathrm{int}(S \setminus M)$ が成り立つ。そこで、上記の議論によりこれが成り立つならそのときに限り、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。

$a \in \partial M$ が成り立つならそのときに限り、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つかつ、$a \notin \mathrm{int}M$ が成り立つ。これが成り立つならそのときに限り、上記の議論により、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap M \neq \emptyset$ が成り立つかつ、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \subseteq M$ が成り立たない。このとき、次のようになることから、

$$\begin{aligned} \neg V \subseteq M &\Leftrightarrow \neg\forall a \in S[a \in V \Rightarrow a \in M] \\ &\Leftrightarrow \exists a \in S\,[\neg(a \notin V \vee a \in M)] \\ &\Leftrightarrow \exists a \in S[a \in V \wedge a \notin M] \\ &\Leftrightarrow \exists a \in S[a \in V \wedge a \in S \setminus M] \\ &\Leftrightarrow \exists a \in S[a \in V \cap S \setminus M] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow V \cap S \setminus M \neq \emptyset$$

これが成り立つならそのときに限り、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap M \neq \emptyset$ が成り立つかつ、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap S \setminus M \neq \emptyset$ が成り立つ、即ち、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap M \neq \emptyset$ かつ $V \cap S \setminus M \neq \emptyset$ が成り立つ。 □

# 参考文献


[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p152-165 ISBN978-4-00-029871-1

[2] 川平友規. "第 3 章 位相空間の基礎のキソ". 一橋大学. http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/kiso/03-isou.pdf (2021-1-10 取得)

[3] きいねく. "大学数学の難関分野：【位相空間論】とは一体何なのか？". note. https://note.com/keyneqq/n/na8d370a26bff (2022-3-26 18:04 閲覧)

[4] 桂田祐史. "数学解析 第 11 回〜開集合と閉集合 (1)〜". 明治大学. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/K11_0628_handout.pdf (2022-3-26 18:12 取得)

## 1.2 開基

### 1.2.1 位相の強弱

**定義 1.2.1.** 1 つの空集合でない集合 $S$ における 2 つの位相たち $\mathfrak{O}$、$\mathfrak{P}$ が $\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{P}$ を満たすとき、その位相 $\mathfrak{O}$ はその位相 $\mathfrak{P}$ より弱い、その位相 $\mathfrak{P}$ はその位相 $\mathfrak{O}$ より強いなどという。以上のように定義されることができるその集合 $S$ における位相たち全体の集合を $\mathcal{T}(S)$ としよう。

**定理 1.2.1.** この組 $(\mathcal{T}(S), \subseteq)$ は明らかに順序集合をなす。

ただし、全順序集合ではないことを注意されたい。

**証明.** 順序集合の公理にあてはめれば、直ちに示される。 □

**定理 1.2.2.** また、明らかに次式が成り立つ。

$$\min \mathcal{T}(S) = \mathfrak{O}_* = \{\emptyset, S\}$$
$$\max \mathcal{T}(S) = \mathfrak{O}^* = \mathfrak{P}(S)$$

**証明.** 位相の公理より任意の位相 $\mathfrak{O}$ はその集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合であるかつ、$\mathfrak{O} \subset \{\emptyset, S\}$ なる位相 $\mathfrak{O}$ が存在すれば、これは位相の公理を満たさない。背理法により任意の位相 $\mathfrak{O}$ に対し、$\{\emptyset, S\} \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つ。これにより、示すべきことが示される。 □

**定理 1.2.3.** それらの位相たち $\mathfrak{O}$、$\mathfrak{P}$ から定まる閉集合系たちをそれぞれ $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$、全近傍系をそれぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(a)$ とおくと、次のことは同値である。

- $\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{P}$ が成り立つ。
- $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ が成り立つ。
- $\forall a \in S$ に対し、$\mathbf{V}(a) \subseteq \mathbf{W}(a)$ が成り立つ。

**証明.** 1 つの空集合でない集合 $S$ における 2 つの位相たち $\mathfrak{O}$、$\mathfrak{P}$ が $\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{P}$ を満たすならそのときに限り、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$O \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。ここで、その集合 $O$ が $S \setminus A$ と書き換えられると、それらの位相たち $\mathfrak{O}$、$\mathfrak{P}$ から定まる閉集合系たちをそれぞれ $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$ とおいて、$\forall A \in \mathfrak{A}$ に対し、$A \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$A \in \mathfrak{B}$ が成り立つので、これが成り立つならそのときに限り、$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ が成り立つ。以上より、次のことは同値であることが示された。

- $\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{P}$ が成り立つ。
- $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ が成り立つ。

また、それらの位相たち $\mathfrak{O}$、$\mathfrak{P}$ が $\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{P}$ を満たすとき、$\forall a \in S$ に対し、全近傍系をそれぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(a)$ とおくと、$V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つなら、定義より明らかに $\exists O \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O$ かつ $O \subseteq V$ が成り立ち、$\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{P}$ が成り立つことに注意すれば、$O \in \mathfrak{P}$ が成り立ち、これにより、$V \in \mathbf{W}(a)$ が成り立つ。ゆえに、$\mathbf{V}(a) \subseteq \mathbf{W}(a)$ が得られる。逆に、$\forall a \in S$ に対し、$\mathbf{V}(a) \subseteq \mathbf{W}(a)$ が成り立つとき、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \in \mathfrak{O}$ が成り立つならそのときに限り、$\forall a \in O$ に対し、$a \in \mathrm{int} O$ が成り立つので、$a \in O$ が成り立つなら、$O \in \mathbf{V}(a)$ が成り立ち、したがって、$O \in \mathbf{W}(a)$ が成り立つ。これにより、$O \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。以上より、

$\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{P}$ が得られた。以上の議論により、次のことは同値であることが示された。

- $\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{P}$ が成り立つ。
- $\forall a \in S$ に対し、$\mathbf{V}(a) \subseteq \mathbf{W}(a)$ が成り立つ。

□

**定理 1.2.4.** その集合 $\mathcal{T}(S)$ の任意の元の族 $\left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ が与えられたとき、その集合 $\left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ の上限 $\sup \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ と下限 $\inf \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ がその集合 $\mathcal{T}(S)$ に存在する。しかも、次式が成り立つ。

$$\sup \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{O} \in \mathcal{T}(S) \\ \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{O}}} \mathfrak{O}$$

$$\inf \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} = \bigcap_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda$$

ここで、その集合 $\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda$ は必ずしもその集合 $S$ における位相となるとは限らないことに注意されたい。例えば、$S = \{a, b, c\}$、$\mathfrak{O} = \{\emptyset, \{a\}, S\}$、$\mathfrak{P} = \{\emptyset, \{b\}, S\}$ が与えられたとき、それらの集合たち $\mathfrak{O}$、$\mathfrak{P}$ は位相となるが、$\{a\} \cup \{b\} \notin \mathfrak{O} \cup \mathfrak{P}$ が成り立つので、その集合 $\mathfrak{O} \cup \mathfrak{P}$ は位相ではない。

**証明.** その集合 $S$ における位相たち全体の集合 $\mathcal{T}(S)$ の任意の元の族 $\left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ が与えられたとき、明らかに $\forall \lambda \in \varLambda$ に対し、$\mathfrak{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{P}(S)$ が成り立つので、順序集合 $\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda}, \subseteq \right)$ は上に有界であり、その順序集合 $\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda}, \subseteq \right)$ の上界全体の集合を $U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)$ とおくと、$\forall \mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right) \forall \lambda \in \varLambda$ に対し、$\mathfrak{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つことになり、これが成り立つならそのときに限り、$\mathfrak{O} \in \mathcal{T}(S)$ かつ $\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つ。ここで、$\forall \mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)$ に対し、$\bigcap_{\mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)} \mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つので、上限の定義と上記の議論により $\sup \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{O} \in \mathcal{T}(S) \\ \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{O}}} \mathfrak{O}$ が成り立つ。さらに、$\forall \mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)$ に対し、$S, \emptyset \in \mathfrak{O}$ が成り立つので、$S, \emptyset \in \bigcap_{\mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)} \mathfrak{O}$ が成り立つかつ、任意の添数集合 $M$ に対し、$\forall \mu \in M$ に対し、$O_\mu \in \bigcap_{\mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)} \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$\forall \mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)$ に対し、$O_\mu \in \mathfrak{O}$ が成り立ち $\bigcup_{\mu \in M} O_\mu \in \mathfrak{O}$ が成り立つので、$\bigcup_{\mu \in M} O_\mu \in \bigcap_{\mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)} \mathfrak{O}$ が成り立つかつ、$\forall O, P \in \bigcap_{\mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)} \mathfrak{O}$ に対し、$\forall \mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)$ に対し、$O, P \in \mathfrak{O}$ が成り立ち $O \cap P \in \mathfrak{O}$ が成り立つので、$O \cap P \in \bigcap_{\mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)} \mathfrak{O}$ が成り立つ。以上より、その集合 $\bigcap_{\mathfrak{O} \in U\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)} \mathfrak{O}$ は位相であり、したがって、$\bigcap_{\substack{\mathfrak{O} \in \mathcal{T}(S) \\ \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{O}}} \mathfrak{O} \in \mathcal{T}(S)$ が成り立つ。

また、明らかに $\forall \lambda \in \varLambda$ に対し、$\bigcap_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立つので、その順序集合 $\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda}, \subseteq \right)$ は下に有界であり、その順序集合 $\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda}, \subseteq \right)$ の下界全体の集合を $L\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)$ とおくと、$\forall \mathfrak{O} \in L\left( \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} \right)$ に対し、$\mathfrak{O} \subseteq \bigcap_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立つので、下限の定義より $\inf \left\{ \mathfrak{O}_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda} = \bigcap_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立つ。さらに、$\forall \lambda \in \varLambda$

に対し、$S,\emptyset \in \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立つので、$S,\emptyset \in \bigcap_{\mathfrak{O} \in U\left(\{\mathfrak{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\right)} \mathfrak{O}$ が成り立つかつ、任意の添数集合 $M$ に対し、$\forall\mu \in M$ に対し、$O_\mu \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立つなら、$\forall\lambda \in \Lambda$ に対し、$O_\mu \in \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立ち $\bigcup_{\mu \in M} O_\mu \in \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立つので、$\bigcup_{\mu \in M} O_\mu \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立つかつ、$\forall O,P \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda$ に対し、$\forall\lambda \in \Lambda$ に対し、$O,P \in \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立ち $O \cap P \in \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立つので、$O \cap P \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立つ。以上より、その集合 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda$ は位相であり、したがって、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda \in \mathcal{T}(S)$ が成り立つ。 □

### 1.2.2 位相の生成

**定義 1.2.2.** $\mathfrak{M} \in \mathfrak{P}\left(\mathfrak{P}(S)\right)$ なる集合 $\mathfrak{M}$ が与えられたとき、上記の議論によりその集合 $S$ における位相全体の集合を $\mathcal{T}(S)$ とおいて、$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{O}$ なるその集合 $S$ における位相 $\mathfrak{O}$ 全体の集合 $\mathcal{T}'$ の下限 $\inf \mathcal{T}'$ が存在するのであった。これを $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ とおくと、下限の定義より、$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{O}$ なる位相の中でその位相 $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ が最も弱い。この位相 $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ をその集合 $\mathfrak{M}$ で生成される位相という。明らかに、$\mathfrak{O}\left(\mathfrak{O}(\mathfrak{M})\right) = \mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ が成り立つし、$\mathfrak{M} \in \mathcal{T}(S)$ が成り立つなら、$\mathfrak{O}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ が成り立つ。

**定理 1.2.5.** $\forall\mathfrak{M} \in \mathfrak{P}\left(\mathfrak{P}(S)\right)$ に対し、その位相 $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ は、有限集合である添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}$ の元の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の積集合全体の集合を $\mathfrak{M}_0$ として、任意の添数集合 $M$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}_0$ の元の族 $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$ の和集合全体の集合に等しい、即ち、集合 $\mathfrak{M}_0$ が次式のように定義されると、

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{P}(S) \middle| \#\Lambda < \aleph_0,\quad \forall\lambda \in \Lambda \left[A_\lambda \in \mathfrak{M}\right] \right\}$$

次式が成り立つ。

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{M}) = \left\{ \bigcup_{\mu \in M} B_\mu \in \mathfrak{P}(S) \middle| \forall\mu \in M \left[B_\mu \in \mathfrak{M}_0\right] \right\}$$

**証明.** $\forall\mathfrak{M} \in \mathfrak{P}\left(\mathfrak{P}(S)\right)$ に対し、次式のように有限集合である添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}$ の元の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の積集合全体の集合を $\mathfrak{M}_0$ として、

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{P}(S) \middle| \#\Lambda < \aleph_0,\quad \forall\lambda \in \Lambda \left[A_\lambda \in \mathfrak{M}\right] \right\}$$

$\Lambda = \emptyset$ のとき、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = S$ が成り立つとする。次に、任意の添数集合 $M$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}_0$ の元の族 $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$ の和集合全体の集合を $\widetilde{\mathfrak{M}}$ として、

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \left\{ \bigcup_{\mu \in M} B_\mu \in \mathfrak{P}(S) \middle| \forall\mu \in M \left[B_\mu \in \mathfrak{M}_0\right] \right\}$$

$M = \emptyset$ のとき、$\bigcup_{\mu \in M} B_\mu = \emptyset$ が成り立つとする。

このとき、$\forall A \in \mathfrak{M}$ に対し、$A \in \mathfrak{M}$ が成り立つなら、$\bigcap\{A\} = A \in \mathfrak{M}$ が成り立つので、$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_0$ が成り立つかつ、$\forall\mu \in M$ に対し、$B_\mu \in \mathfrak{M}_0$ が成り立つことにより $\bigcup_{\mu\in M} B_\mu \in \mathfrak{M}_0$ が成り立ち、$\mathfrak{M}_0 \subseteq \widetilde{\mathfrak{M}}$ が成り立つので、$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_0 \subseteq \widetilde{\mathfrak{M}}$ が成り立つ。

これにより、$\emptyset \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ が成り立つかつ、$S \in \mathfrak{M}_0$ が成り立つので、$\emptyset, S \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ が成り立つ。また、任意の添数集合 $N$ によって添数づけられたその集合 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ の任意の元の族 $\{O_\nu\}_{\nu\in N}$ が与えられたとき、その集合 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ の定義より任意の添数集合たち $M_\nu$ を用いて、$\forall\nu \in N$ に対し、$B_{\mu_\nu} \in \mathfrak{M}_0$ なる集合たち $B_{\mu_\nu}$ を用いて、$O_\nu = \bigcup_{\mu_\nu\in M_\nu} B_{\mu_\nu}$ と書かれることができる。したがって、次のようになり、

$$\bigcup_{\nu\in N} O_\nu = \bigcup_{\nu\in N} \bigcup_{\mu_\nu\in M_\nu} B_{\mu_\nu} = \bigcup_{\forall\nu\in N[\mu_\nu\in M_\nu]} B_{\mu_\nu}$$

$\forall\nu \in N \forall\mu_\nu \in M_\nu$ に対し、$B_{\nu_{\mu_\nu}} \in \mathfrak{M}_0$ が成り立つので、$\bigcup_{\forall\nu\in N[\mu_\nu\in M_\nu]} B_{\mu_\nu} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ が成り立ち $\bigcup_{\nu\in N} O_\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ が成り立つ。$\forall O, P \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ に対し、その集合 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ の定義より任意の添数集合たち $M_O$、$M_P$ を用いて、$B_\mu \in \mathfrak{M}_0$ なる集合たち $B_\mu$ を用いて、$O = \bigcup_{\mu\in M_O} B_\mu$、$P = \bigcup_{\mu\in M_P} B_\mu$ と書かれることができる。したがって、次のようになり、

$$\begin{aligned} O \cap P &= \bigcup_{\mu\in M_O} B_\mu \cap \bigcup_{\mu\in M_P} B_\mu \\ &= \bigcup_{\substack{\mu_O \in M_O \\ \mu_P \in M_P}} \left(B_{\mu_O} \cap B_{\mu_P}\right) \end{aligned}$$

その集合 $\mathfrak{M}_0$ の定義より有限集合である添数集合たち $\Lambda_{\mu_O}$、$\Lambda_{\mu_P}$ を用いて、$A_{\lambda\mu_O}, A_{\lambda\mu_P} \in \mathfrak{M}$ なる集合たち $A_{\lambda\mu_O}$、$A_{\lambda\mu_P}$ を用いて、$B_{\mu_O} = \bigcap_{\lambda\mu_O\in\Lambda_{\mu_O}} A_{\lambda\mu_O}$、$B_{\mu_P} = \bigcap_{\lambda\mu_P\in\Lambda_{\mu_P}} A_{\lambda\mu_P}$ と書かれることができる。したがって、次のようになる。

$$B_{\mu_O} \cap B_{\mu_P} = \bigcap_{\lambda\mu_O\in\Lambda_{\mu_O}} A_{\lambda\mu_O} \cap \bigcap_{\lambda\mu_P\in\Lambda_{\mu_P}} A_{\lambda\mu_P}$$

これにより、$B_{\mu_O} \cap B_{\mu_P} \in \mathfrak{M}_0$ が成り立つので、$O \cap P \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ が成り立つ。以上より、その集合 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ はその集合 $S$ における位相となる。

一方で、$\forall\mathfrak{O} \in \mathcal{T}(S)$ に対し、$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つとき、$\forall A \in \mathfrak{M}_0$ に対し、$A \in \mathfrak{M}_0$ が成り立つなら、有限集合である添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}$ の元の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の積集合 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を用いて $A = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ と書かれることができる。ここで、$\forall\lambda \in \Lambda$ に対し、$A_\lambda \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つかつ、位相の定義より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。したがって、$A \in \mathfrak{O}$ が成り立ち $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つ。さらに、$\forall B \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ に対し、$B \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ が成り立つなら、任意の添数集合 $M$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}_0$ の元の族 $\{B_\mu\}_{\mu\in M}$ の和集合 $\bigcup_{\mu\in M} B_\mu$ を用いて $B = \bigcup_{\mu\in M} B_\mu$ と書かれることができる。ここで、$\forall\mu \in M$ に対し、$B_\mu \in \mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つかつ、位相の定義より $\bigcup_{\mu\in M} B_\mu \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。したがって、$B \in \mathfrak{O}$ が成り立ち $\widetilde{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つ。これにより、$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{O}$ なる位相の中でその位相 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ が最も弱いことになり $\widetilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ が成り立つ。 □

### 1.2.3 開基

**定義 1.2.3.** その集合 $S$ における 1 つの位相 $\mathfrak{O}$ が与えられたとき、$\exists\mathfrak{M} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{O})$ に対し、$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ となるようなその集合 $\mathfrak{M}$ をその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の準開基、準基底という。

さらに、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、その集合 $O$ は添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ の和集合であるようなその集合 $\mathfrak{B}$ をその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開基、基底という。

もちろん、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の準開基、開基は一意的に存在するというわけではない。

**定理 1.2.6.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の任意の開基 $\mathfrak{B}$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の準開基でもあり $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の任意の開基 $\mathfrak{B}$ は、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、その集合 $O$ は添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ の和集合となることを満たす。これにより、$O = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} W_\lambda$ が成り立つかつ、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$W_\lambda \in \mathfrak{B}$ が成り立つ。ここで、有限集合である添数集合によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族の積集合全体の集合が $\mathfrak{B}_0$ とおかれると、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$W_\lambda \in \mathfrak{B}_0$ が成り立つので、$O = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} W_\lambda$ が成り立つかつ、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$W_\lambda \in \mathfrak{B}_0$ が成り立つ。全称除去に注意すれば、$O \in \mathfrak{P}(S)$ かつ $O = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} W_\lambda$ が成り立つかつ、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$W_\lambda \in \mathfrak{B}_0$ が成り立つ。これにより、次式が成り立つ。

$$O \in \left\{ \bigcup_{\lambda \in \varLambda} W_\lambda \in \mathfrak{P}(S) \middle| \forall\lambda \in \varLambda \left[ W_\lambda \in \mathfrak{B}_0 \right] \right\}$$

ここで、その集合 $\mathfrak{B}$ で生成される位相 $\mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ について、次式が成り立つのであったので、

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{B}) = \left\{ \bigcup_{\lambda \in \varLambda} W_\lambda \in \mathfrak{P}(S) \middle| \forall\lambda \in \varLambda \left[ W_\lambda \in \mathfrak{B}_0 \right] \right\}$$

$O \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ が成り立ち、したがって、$\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ が成り立つ。

逆に、$\forall O \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ に対し、$O \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ が成り立つなら、上記と同様にして、$O \in \mathfrak{P}(S)$ かつ $O = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} W_\lambda$ が成り立つかつ、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$W_\lambda \in \mathfrak{B}_0$ が成り立つ。したがって、$O \in \mathfrak{P}(S)$ かつ $O = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} W_\lambda$ が成り立つかつ、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$W_\lambda \in \mathfrak{B}$ が成り立つ。その集合 $\mathfrak{B}$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開基となすのであったので、開基の定義より $O \in \mathfrak{O}$ が成り立ち、したがって、$\mathfrak{O}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つ。

以上より、$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ が得られその集合 $\mathfrak{B}$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の準開基となる。 □

**定理 1.2.7.** $\forall\mathfrak{M} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(S))$ に対し、次式のように有限集合である添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}$ の元の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ の積集合全体の集合が $\mathfrak{M}_0$ とおかれると、

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ \bigcap_{\lambda \in \varLambda} A_\lambda \in \mathfrak{P}(S) \middle| \#\varLambda < \aleph_0, \quad \forall\lambda \in \varLambda \left[ A_\lambda \in \mathfrak{M} \right] \right\}$$

その集合 $\mathfrak{M}_0$ はその集合 $\mathfrak{M}$ で生成される位相 $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ を用いた位相空間 $(S, \mathfrak{O}(\mathfrak{M}))$ の開基となる。

**証明.** $\forall\mathfrak{M}\in\mathfrak{P}\left(\mathfrak{P}(S)\right)$ に対し、その集合 $\mathfrak{M}$ で生成される位相 $\mathfrak{O}\left(\mathfrak{M}\right)$ を用いた位相空間 $\left(S,\mathfrak{O}\left(\mathfrak{M}\right)\right)$ が与えられたとする。次式のように有限集合である添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}$ の元の族 $\left\{A_\lambda\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の積集合全体の集合が $\mathfrak{M}_0$ とおかれると、

$$\mathfrak{M}_0=\left\{\bigcap_{\lambda\in\varLambda}A_\lambda\in\mathfrak{P}(S)\middle|\#\varLambda<\aleph_0,\ \ \forall\lambda\in\varLambda\left[A_\lambda\in\mathfrak{M}\right]\right\}$$

その集合 $\mathfrak{M}$ で生成される位相 $\mathfrak{O}\left(\mathfrak{M}\right)$ について、次式が成り立つのであったので、

$$\mathfrak{O}\left(\mathfrak{M}\right)=\left\{\bigcup_{\lambda\in\varLambda}B_\lambda\in\mathfrak{P}(S)\middle|\forall\lambda\in\varLambda\left[B_\lambda\in\mathfrak{M}_0\right]\right\}$$

$\forall O\in\mathfrak{O}\left(\mathfrak{M}\right)$ に対し、その集合 $O$ は添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}_0$ の元の族 $\left\{B_\lambda\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の和集合である。定義よりしたがって、その集合 $\mathfrak{M}_0$ はその集合 $\mathfrak{M}$ で生成される位相 $\mathfrak{O}\left(\mathfrak{M}\right)$ を用いた位相空間 $\left(S,\mathfrak{O}\left(\mathfrak{M}\right)\right)$ の開基となる。 $\square$

**定理 1.2.8.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\mathfrak{B}\in\mathfrak{P}\left(\mathfrak{O}\right)$ なる集合 $\mathfrak{B}$ がその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開基となるならそのときに限り、$\forall O\in\mathfrak{O}\forall a\in O\exists W\in\mathfrak{B}$ に対し、$a\in W\subseteq O$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\mathfrak{B}\in\mathfrak{P}\left(\mathfrak{O}\right)$ なる集合 $\mathfrak{B}$ がその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開基となるならそのときに限り、添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\left\{W_\lambda\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ を用いて、$\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、$O=\bigcup_{\lambda\in\varLambda}W_\lambda$ が成り立つ。ここで、$\forall a\in O$ に対し、$a\in\bigcup_{\lambda\in\varLambda}W_\lambda$ が成り立つので、$a\in W_\lambda\subseteq O$ なる添数 $\lambda$ がその添数集合 $\varLambda$ に存在し、したがって、$\forall O\in\mathfrak{O}\forall a\in O\exists W\in\mathfrak{B}$ に対し、$a\in W\subseteq O$ が成り立つ。

逆に、これが成り立つなら、$\forall O\in\mathfrak{O}\forall a\in O$ に対し、$a\in\bigcup_{W\in\mathfrak{B}}W$ が成り立つので、$O\subseteq\bigcup_{W\in\mathfrak{B}}W$ が成り立つかつ、$W\subseteq O$ が成り立つので、$\bigcup_{W\in\mathfrak{B}}W\subseteq O$ が成り立つ。したがって、$\bigcup_{W\in\mathfrak{B}}W=O$ が成り立ち、その集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\left\{W\right\}_{W\in\mathfrak{B}}$ を用いて、$\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、$O=\bigcup_{\lambda\in\varLambda}W_\lambda$ が成り立つので、その集合 $\mathfrak{B}$ がその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開基となる。 $\square$

**定理 1.2.9.** 空集合でない集合 $S$ の部分集合全体の集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ がこの集合 $\mathfrak{B}$ で生成される位相 $\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)$ を用いた位相空間 $\left(S,\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)\right)$ の 1 つの開基であるならそのときに限り、その集合 $\mathfrak{B}$ が次のこといづれも満たす。

- $\forall a\in S\exists W\in\mathfrak{B}$ に対し、$a\in W$ が成り立つ。
- $\forall V,W\in\mathfrak{B}$ に対し、$V\cap W\neq\emptyset$ が成り立つなら、$\forall a\in V\cap W\exists U\in\mathfrak{B}$ に対し、$a\in U\subseteq V\cap W$ が成り立つ。

**証明.** 空集合でない集合 $S$ の部分集合全体の集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ がこの集合 $\mathfrak{B}$ で生成される位相 $\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)$ を用いた位相空間 $\left(S,\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)\right)$ の 1 つの開基であるとする。

その集合 $S$ はその位相空間 $\left(S,\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)\right)$ における開集合であるから、これは添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\left\{W_\lambda\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の和集合である、即ち、$S=\bigcup_{\lambda\in\varLambda}W_\lambda$ が成り立つ。$\forall a\in S$ に対し、$a\in\bigcup_{\lambda\in\varLambda}W_\lambda$ が成り立つので、添数集合 $\varLambda$ のある添数 $\lambda$ を用いて $a\in W_\lambda$ が成り立つ。これにより、$\forall a\in S$ に対し、$a\in W$ なる集合 $W$ がその集合 $\mathfrak{B}$ に存在する。

$\forall V,W\in\mathfrak{B}$ に対し、$V\cap W\neq\emptyset$ が成り立つなら、$\forall a\in V\cap W$ に対し、開基の定義より $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)$ が成り立つことに注意すれば、$V,W\in\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)$ が成り立つので、位相の定義より $V\cap W\in\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)$ が成り立つ。したがって、定理 1.2.6、定理 1.2.8 より $\exists U\in\mathfrak{B}$ に対し、$a\in U\subseteq V\cap W$ が成り立つことになる。

逆に、その集合 $\mathfrak{B}$ が次のこといずれも満たすなら、

- $\forall a\in S\exists W\in\mathfrak{B}$ に対し、$a\in W$ が成り立つ。
- $\forall V,W\in\mathfrak{B}$ に対し、$V\cap W\neq\emptyset$ が成り立つなら、$\forall a\in V\cap W\exists U\in\mathfrak{B}$ に対し、$a\in U\subseteq V\cap W$ が成り立つ。

次式のように集合 $\mathfrak{O}$ が定義されると、

$$\mathfrak{O}=\left\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}W_{\lambda}\in\mathfrak{P}(S)\middle|\forall\lambda\in\Lambda\left[W_{\lambda}\in\mathfrak{B}\right]\right\}$$

$\forall a\in S\exists W_{\lambda}\in\mathfrak{B}$ に対し、$a\in W_{\lambda}$ が成り立つ。このような添数 $\lambda$ が属するように添数集合 $\Lambda$ が定められれば、$a\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}W_{\lambda}$ が成り立つので、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}W_{\lambda}\subseteq S$ が成り立つことに注意すれば、$S=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}W_{\lambda}$ が成り立つ。したがって、$S\in\mathfrak{O}$ が成り立つ。さらに、$\bigcup_{\lambda\in\emptyset}W_{\lambda}=\emptyset$ が成り立つので、$\emptyset\in\mathfrak{O}$ が成り立つ。また、$\forall O,P\in\mathfrak{O}$ に対し、$O\cap P=\emptyset$ が成り立つなら、上記の議論により $O\cap P\in\mathfrak{O}$ が成り立つ。一方で、$O\cap P\neq\emptyset$ のとき、定義より $\forall a\in O\cap P\exists W\in\mathfrak{B}$ に対し、$a\in W\subseteq O\cap P$ が成り立つ。このような集合 $W$ 全体の集合を $\mathfrak{W}$ とおくと、$a\in\bigcup_{W\in\mathfrak{W}}W$ が成り立つので、$O\cap P\subseteq\bigcup_{W\in\mathfrak{W}}W$ が成り立つ。$W\subseteq O\cap P$ が成り立つことにより $\bigcup_{W\in\mathfrak{W}}W\subseteq O\cap P$ が成り立つことに注意すれば、$\bigcup_{W\in\mathfrak{W}}W=O\cap P$ が成り立つので、$O\cap P\in\mathfrak{O}$ が成り立つ。添数集合 $M$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\left\{O_{\mu}\right\}_{\mu\in M}$ の和集合 $\bigcup_{\mu\in M}O_{\mu}$ において、$O_{\mu}\in\mathfrak{O}$ が成り立つので、ある添数集合 $\Lambda_{\mu}$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\left\{W_{\lambda_{\mu}}\right\}_{\lambda_{\mu}\in\Lambda_{\mu}}$ を用いて $O_{\mu}=\bigcup_{\lambda_{\mu}\in\Lambda_{\mu}}W_{\lambda_{\mu}}$ が成り立つ。したがって、次のようになるので、

$$\bigcup_{\mu\in M}O_{\mu}=\bigcup_{\mu\in M}\bigcup_{\lambda_{\mu}\in\Lambda_{\mu}}W_{\lambda_{\mu}}=\bigcup_{\forall\mu\in M\left[\lambda_{\mu}\in\Lambda_{\mu}\right]}W_{\lambda_{\mu}}$$

$\bigcup_{\mu\in M}O_{\mu}\in\mathfrak{O}$ が成り立つ。以上より、その集合 $\mathfrak{O}$ はその集合 $S$ を台集合とする位相である。

さらに、$\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、その集合 $O$ は添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\left\{W_{\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ の和集合である。定義よりしたがって、その集合 $\mathfrak{B}$ はその位相 $\mathfrak{O}$ を用いた位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開基となる。ここで、定理 1.2.6 よりその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開基はその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の準開基でもあったので、この集合 $\mathfrak{B}$ で生成される位相 $\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)$ を用いた $\mathfrak{O}=\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)$ が成り立つ。したがって、その集合 $\mathfrak{B}$ はその位相空間 $\left(S,\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)\right)$ の 1 つの開基である。 □

**定理 1.2.10.** 空集合でない集合 $S$ の部分集合全体の集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合たち $\mathfrak{B}$、$\mathfrak{C}$ で生成される位相たちそれぞれ $\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)$、$\mathfrak{O}\left(\mathfrak{C}\right)$ の開基たちそれぞれがそれらの集合たち $\mathfrak{B}$、$\mathfrak{C}$ であるとき、$\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)\subseteq\mathfrak{O}\left(\mathfrak{C}\right)$ が成り立つならそのときに限り、$\forall V\in\mathfrak{B}\forall a\in V\exists W\in\mathfrak{C}$ に対し、$a\in W\subseteq V$ が成り立つ。

**証明.** 空集合でない集合 $S$ の部分集合全体の集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合たち $\mathfrak{B}$、$\mathfrak{C}$ で生成される位相たちそれぞれ $\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)$、$\mathfrak{O}\left(\mathfrak{C}\right)$ の開基たちそれぞれがそれらの集合たち $\mathfrak{B}$、$\mathfrak{C}$ であるとき、$\mathfrak{O}\left(\mathfrak{B}\right)\subseteq\mathfrak{O}\left(\mathfrak{C}\right)$ が成り立つな

ら、$\forall V \in \mathfrak{B}$ に対し、定義より $V \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{O}(\mathfrak{C})$ が成り立つので、添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{C}$ の元の族 $\left\{ W_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ を用いて $V = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} W_\lambda$ が成り立つ。これにより、$\forall a \in V \exists \lambda \in \varLambda$ に対し、$a \in W_\lambda \subseteq V = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} W_\lambda$ が成り立つ。

逆に、$\forall V \in \mathfrak{B} \forall a \in V \exists W \in \mathfrak{C}$ に対し、$a \in W \subseteq V$ が成り立つなら、$\forall O \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ に対し、添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\left\{ V_\lambda \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ を用いて $O = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} V_\lambda$ が成り立つ。ここで、$\forall a \in V_\lambda \exists W_\lambda \in \mathfrak{C}$ に対し、$a \in W_\lambda \subseteq V_\lambda$ が成り立つので、このような集合 $W_\lambda$ 全体の集合を $\mathfrak{W}_\lambda$ とおくと、$a \in \bigcup_{W_\lambda \in \mathfrak{W}_\lambda} W_\lambda$ が成り立つので、$V_\lambda \subseteq \bigcup_{W_\lambda \in \mathfrak{W}_\lambda} W_\lambda$ が成り立つ。さらに、$\bigcup_{W_\lambda \in \mathfrak{W}_\lambda} W_\lambda \subseteq V_\lambda$ が成り立つので、$V_\lambda = \bigcup_{W_\lambda \in \mathfrak{W}_\lambda} W_\lambda$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$O = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \bigcup_{W_\lambda \in \mathfrak{W}_\lambda} W_\lambda = \bigcup_{\forall \lambda \in \varLambda [W_\lambda \in \mathfrak{W}_\lambda]} W_\lambda$$

これにより、$O \in \mathfrak{O}(\mathfrak{C})$ が成り立つので、$\mathfrak{O}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{O}(\mathfrak{C})$ が得られた。 □

### 1.2.4 基本近傍系

**定義 1.2.4.** 1 つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとし、$a \in S$ なる元 $a$ の全近傍系を $\mathbf{V}(a)$ とおく。これの部分集合 $\mathbf{V}^*(a)$ が、$\forall V \in \mathbf{V}(a) \exists U \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U \subseteq V$ を満たすとき、この集合 $\mathbf{V}^*(a)$ をその元 $a$ の基本近傍系という。

例えば、その集合 $V$ がその元 $a$ の近傍であるならそのときに限り、$a \in O$ かつ $O \subseteq V$ なる開集合 $O$ がその位相 $\mathfrak{O}$ に存在するのであったので、その全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ とその位相 $\mathfrak{O}$ との共通部分もその元 $a$ の基本近傍系である。

**定理 1.2.11.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$\forall a \in S$ に対し、1 つの開基 $\mathfrak{B}$ の元々 $W$ のうち $a \in W$ を満たすようなもの全体の集合 $\mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a)$ はその元 $a$ の 1 つの基本近傍系となる。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$\forall a \in S$ に対し、1 つの開基 $\mathfrak{B}$ の元々 $W$ のうち $a \in W$ を満たすようなもの全体の集合 $\mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a)$ が与えられたとする。その元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ の任意の元 $V$ は定義より $a \in \mathrm{int} V$ を満たし、その集合 $\mathrm{int} V$ は開集合であるから、定理 1.2.8 より $\exists W \in \mathfrak{B}$ に対し、$a \in W \subseteq \mathrm{int} V$ が成り立つ。ここで、$W \in \mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a)$ が成り立つことによりしたがって、$\exists W \in \mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a)$ に対し、$W \subseteq V$ が成り立つので、定義よりその集合 $\mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a)$ はその元 $a$ の 1 つの基本近傍系となる。 □

**定理 1.2.12.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の基本近傍系 $\mathbf{V}^*(a)$ について次のことが成り立つ。

- $\forall U \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$a \in U$ が成り立つ。
- $\forall U, V \in \mathbf{V}^*(a) \exists W \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$W \subseteq U \cap V$ が成り立つ。
- $\forall U \in \mathbf{V}^*(a) \exists V \in \mathbf{V}^*(a) \forall b \in V \exists W \in \mathbf{V}^*(b)$ に対し、$W \subseteq U$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の基本近傍系 $\mathbf{V}^*(a)$ が与えられたとする。$\forall U \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、定義より明らかその集合 $U$ はその元 $a$ の近傍でもあるので、$a \in \mathrm{int} U \subseteq U$ が成り立つ。

$\forall U,V \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、定義より明らかそれらの集合たち $U$、$V$ はその元 $a$ の近傍でもあるので、その元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ を用いて $U \cap V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。このとき、基本近傍系の定義より明らかに $\exists W \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$W \subseteq U \cap V$ が成り立つ。$\forall U \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、定義より明らかその集合 $U$ はその元 $a$ の近傍でもあるので、$a \in \mathrm{int}U \subseteq U$ が成り立つ。ここで、その集合 $\mathrm{int}U$ が開集合であるので、$\mathrm{int}U \in \mathbf{V}(a)$ が成り立ち、$\exists V \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$V \subseteq \mathrm{int}U$ が成り立つ。そこで、$\forall b \in V$ に対し、$b \in V \subseteq \mathrm{int}U$ が成り立つので、上記と同様に $\mathrm{int}U \in \mathbf{V}(b)$ が成り立ち、$\exists W \in \mathbf{V}^*(b)$ に対し、$W \subseteq \mathrm{int}U \subseteq U$ が成り立つ。 □

**定理 1.2.13.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$a \in S$ なる元 $a$ の基本近傍系 $\mathbf{V}^*(a)$ が与えられたとき、その元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ は次式のように与えられる。

$$\mathbf{V}(a) = \{V \in \mathfrak{P}(S) | \exists U \in \mathbf{V}^*(a)[U \subseteq V]\}$$

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$a \in S$ なる元 $a$ の基本近傍系 $\mathbf{V}^*(a)$ が与えられたとき、定義よりあるその元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ を用いて $\forall V \in \mathbf{V}(a) \exists U \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U \subseteq V$ が成り立つ。これにより、次式が成り立つ。

$$\mathbf{V}(a) \subseteq \{V \in \mathfrak{P}(S) | \exists U \in \mathbf{V}^*(a)[U \subseteq V]\}$$

逆に、$\forall V \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$\exists U \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U \subseteq V$ が成り立つなら、$a \in \mathrm{int}U \subseteq \mathrm{int}V$ が成り立つので、$V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$\mathbf{V}(a) \supseteq \{V \in \mathfrak{P}(S) | \exists U \in \mathbf{V}^*(a)[U \subseteq V]\}$$

よって、次式が成り立つ。

$$\mathbf{V}(a) = \{V \in \mathfrak{P}(S) | \exists U \in \mathbf{V}^*(a)[U \subseteq V]\}$$

□

**定理 1.2.14.** 空集合 $\emptyset$ でない集合 $S$ を用いて $\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ に対する空集合 $\emptyset$ でない集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 $\mathbf{V}^*(a)$ が次のことが成り立つとする。

- $\forall U \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$a \in U$ が成り立つ。
- $\forall U,V \in \mathbf{V}^*(a) \exists W \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$W \subseteq U \cap V$ が成り立つ。
- $\forall U \in \mathbf{V}^*(a) \exists V \in \mathbf{V}^*(a) \forall b \in V \exists W \in \mathbf{V}^*(b)$ に対し、$W \subseteq U$ が成り立つ。

このとき、その集合 $\mathbf{V}^*(a)$ が位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における $a \in S$ なる元々 $a$ の基本近傍系と一致できる 1 つの位相 $\mathfrak{O}$ がただ 1 つに決まる。

これを位相の公理とするときがありこのような公理を基本近傍系の公理という。

**証明.** 空集合 $\emptyset$ でない集合 $S$ を用いて $a \in S$ なる元々 $a$ に対するそれぞれ 1 つづつの空集合 $\emptyset$ でない集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合たち $\mathbf{V}^*(a)$ が次のことが成り立つとする。

- $\forall U \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$a \in U$ が成り立つ。
- $\forall U,V \in \mathbf{V}^*(a) \exists W \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$W \subseteq U \cap V$ が成り立つ。
- $\forall U \in \mathbf{V}^*(a) \exists V \in \mathbf{V}^*(a) \forall b \in V \exists W \in \mathbf{V}^*(b)$ に対し、$W \subseteq U$ が成り立つ。

ここで、次式のように集合 $\mathbf{V}(a)$ が定義されると、

$$\mathbf{V}(a)=\{V\in\mathfrak{P}(S)|\exists U\in\mathbf{V}^*(a)[U\subseteq V]\}$$

$\forall V\in\mathbf{V}(a)$ に対し、その集合 $\mathbf{V}(a)$ の定義より $\exists U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\subseteq V$ が成り立ち、仮定より $a\in U$ が成り立つので、$a\in V$ が成り立つ。$\forall V\in\mathbf{V}(a)\forall W\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$V\subseteq W$ が成り立つなら、その集合 $\mathbf{V}(a)$ の定義より $\exists U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\subseteq V\subseteq W$ が成り立つので、$W\in\mathbf{V}(a)$ が成り立つ。$\forall V,W\in\mathbf{V}(a)$ に対し、その集合 $\mathbf{V}(a)$ の定義より $\exists U_V,U_W\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U_V\subseteq V$ かつ $U_W\subseteq W$ が成り立ち、仮定より $\exists U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\subseteq U_V\cap U_W$ が成り立つかつ、$U_V\cap U_W\subseteq V\cap W$ が成り立つので、$U\subseteq V\cap W$ が成り立ち $V\cap W\in\mathbf{V}(a)$ が成り立つ。$\forall V\in\mathbf{V}(a)$ に対し、その集合 $\mathbf{V}(a)$ の定義より $\exists W\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$W\subseteq V$ が成り立ち、もちろん、$W\in\mathbf{V}(a)$ が成り立つかつ、$\forall b\in W\exists U\in\mathbf{V}^*(b)$ に対し、$U\subseteq V$ が成り立つ。したがって、$V\in\mathbf{V}(b)$ も成り立つ。

以上の議論により、その集合 $\mathbf{V}(a)$ について、次のことが成り立つので、

- $\forall V\in\mathbf{V}(a)$ に対し、$a\in V$ が成り立つ。
- $\forall V\in\mathbf{V}(a)\forall W\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$V\subseteq W$ が成り立つなら、$W\in\mathbf{V}(a)$ が成り立つ。
- $\forall V,W\in\mathbf{V}(a)$ に対し、$V\cap W\in\mathbf{V}(a)$ が成り立つ。
- $\forall V\in\mathbf{V}(a)\exists W\in\mathbf{V}(a)\forall b\in W$ に対し、$V\in\mathbf{V}(b)$ が成り立つ。

全近傍系の公理よりその集合 $\mathbf{V}(a)$ が位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における $a\in S$ なる元々 $a$ の全近傍系と一致できる 1 つの位相 $\mathfrak{O}$ がただ 1 つに決まる。さらに、基本近傍系の定義よりその集合 $\mathbf{V}^*(a)$ がその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の基本近傍系となる。 □

**定理 1.2.15.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において $\forall a\in S$ に対し、その元 $a$ の 1 つの基本近傍系 $\mathbf{V}^*(a)$ が与えられたとき、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、次のことが成り立つ。

- $a\in\mathrm{int}M$ が成り立つならそのときに限り、$\exists U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\subseteq M$ が成り立つ。
- $a\in\mathrm{ext}M$ が成り立つならそのときに限り、$\exists U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\cap M=\emptyset$ が成り立つ。
- $a\in\mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り、$\forall U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\cap M\neq\emptyset$ が成り立つ。
- $a\in\partial M$ が成り立つならそのときに限り、$\forall U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\cap M\neq\emptyset$ かつ $U\cap S\setminus M\neq\emptyset$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において $\forall a\in S$ に対し、その元 $a$ の 1 つの全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ と基本近傍系 $\mathbf{V}^*(a)$ が与えられたとき、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$a\in\mathrm{int}M$ が成り立つならそのときに限り、$M\in\mathbf{V}(a)$ が成り立つ。これが成り立つならそのときに限り、基本近傍系の定義より明らかに $\exists U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\subseteq M$ が成り立つ。

$a\in\mathrm{ext}M=\mathrm{int}(S\setminus M)$ が成り立つならそのときに限り、$S\setminus M\in\mathbf{V}(a)$ が成り立つ。これが成り立つならそのときに限り、基本近傍系の定義より明らかに $\exists U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\subseteq S\setminus M$ が成り立ち、集合算によりこれが成り立つならそのときに限り、$U\cap M=\emptyset$ が成り立つ。

$a\in\mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り、$a\in S\setminus\mathrm{int}(S\setminus M)$ が成り立つことになり、これは $a\notin\mathrm{int}(S\setminus M)$ が成り立つことになり、上記の議論が対偶律を適用されれば、これが成り立つならそのときに限り、$\forall U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\cap M\neq\emptyset$ が成り立つ。

$a\in\partial M$ が成り立つならそのときに限り、$a\in\mathrm{cl}M\setminus\mathrm{int}M$ が成り立ち、これは $a\in\mathrm{cl}M$ が成り立つかつ、$a\in\mathrm{int}M$ が成り立たないことになり、上記の議論と対偶律より $\forall U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\cap M\neq\emptyset$ が成り立つかつ、$U\subseteq M$ が成り立たない。このとき、$\exists a'\in U$ に対し、$a'\in U$ かつ $a'\notin M$ が成り立ち、

$a' \in U \cap S \setminus M$ が成り立つので、$a \in \partial M$ が成り立つならそのときに限り、$\forall U \in \mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U \cap M \neq \emptyset$ かつ $U \cap S \setminus M \neq \emptyset$ が成り立つ。 □

### 1.2.5 可算公理

**定義 1.2.5.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、たかだか可算集合である、即ち、$\#\mathbf{V}^*(a) \leq \aleph_0$ が成り立つようなその元 $a$ の基本近傍系 $\mathbf{V}^*(a)$ が存在することを第 1 可算公理という。

**定義 1.2.6.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開基 $\mathfrak{B}$ がたかだか可算集合であること、即ち、$\#\mathfrak{B} \leq \aleph_0$ が成り立つことを第 2 可算公理という。

**定理 1.2.16.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が第 2 可算公理を満たすなら、第 1 可算公理も満たす。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、これが第 2 可算公理を満たすなら、位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開基 $\mathfrak{B}$ がたかだか可算集合であることになる。ここで、$a \in S$ なる元 $a$ の全近傍系を $\mathbf{V}(a)$ とおくと、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、定義より明らかに $a \in \mathrm{int}V$ が成り立ち、その開核 $\mathrm{int}V$ は開集合であったので、定理 1.2.8 より $\exists W \in \mathfrak{B}$ に対し、$a \in W \subseteq \mathrm{int}V$ が成り立つ。さらに、$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つので、その集合 $W$ は開集合となり $W = \mathrm{int}W$ が成り立つので、$a \in \mathrm{int}W$ が成り立ち $W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。このとき、このような集合 $W$ 全体の集合を $\mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a)$ とおくと、次式を満たすので、

$$\mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a) \in \mathfrak{P}\left(\mathbf{V}(a)\right) \wedge \forall V \in \mathbf{V}(a) \exists W \in \mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a)[W \subseteq V]$$

その集合 $\mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a)$ はその元 $a$ の基本近傍系となる。ここで、$\mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a) \subseteq \mathfrak{B}$ が成り立つので、$\#\mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a) \leq \#\mathfrak{B}$ が成り立ち、その開基 $\mathfrak{B}$ がたかだか可算集合であるので、その基本近傍系 $\mathbf{V}^*_{\mathfrak{B}}(a)$ もたかだか可算集合となる。

よって、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は第 1 可算公理も満たす。 □

**定理 1.2.17** (第 1 可算公理の基本補題). 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が第 1 可算公理を満たすとき、$\forall a \in S$ に対し、その全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ のある元の列 $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して、次のことが成り立つ。

- $\forall V \in \mathbf{V}(a) \exists n \in \mathbb{N}$ に対し、$U_n \subseteq V$ が成り立つ。
- $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$U_{n+1} \subseteq U_n$ が成り立つ。

この定理を第 1 可算公理の基本補題という。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が第 1 可算公理を満たすとき、$\forall a \in S$ に対し、たかだか可算集合であるようなその元 $a$ の基本近傍系 $\mathbf{V}^*(a)$ が存在するので、$\mathbf{V}^*(a) = \{U'_i\}_{i \in \Lambda_{n'}}$ または $\mathbf{V}^*(a) = \{U'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とおかれることができる。

$\mathbf{V}^*(a) = \{U'_i\}_{i \in \Lambda_{n'}}$ のとき、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$n \leq n'$ なら $U_n = \bigcap_{i \in \Lambda_n} U'_i$、$n' < n$ なら $U_n = \bigcap_{i \in \Lambda_{n'}} U'_i$ となるようなその全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ の元の列 $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が考えられれば、$\forall V \in \mathbf{V}(a) \exists n'' \in \Lambda_{n'}$ に対し、$U'_{n''} \subseteq V$ が成り立つので、次のようになる。

$$U_{n''} = \bigcap_{i \in \Lambda_{n''}} U'_i \subseteq U'_{n''} \subseteq V$$

また、もちろん、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$U_{n+1} \subseteq U_n$ が成り立つ。

$\mathbf{V}^*(a) = \{U'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のとき、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$U_n = \bigcap_{i\in\Lambda_n} U'_i$ となるようなその全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ の元の列 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が考えられれば、$\forall V \in \mathbf{V}(a)\exists n' \in \mathbb{N}$ に対し、$U'_{n'} \subseteq V$ が成り立つので、次のようになる。

$$U_{n'} = \bigcap_{i\in\Lambda_{n'}} U'_i \subseteq U'_{n'} \subseteq V$$

また、もちろん、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$U_{n+1} \subseteq U_n$ が成り立つ。 □

### 1.2.6 可分な位相空間

**定義 1.2.7.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\mathrm{cl}M = S$ を満たすようなその集合 $S$ の部分集合 $M$ が与えられたとき、その集合 $M$ はその集合 $S$ において稠密である、または、密であるという。

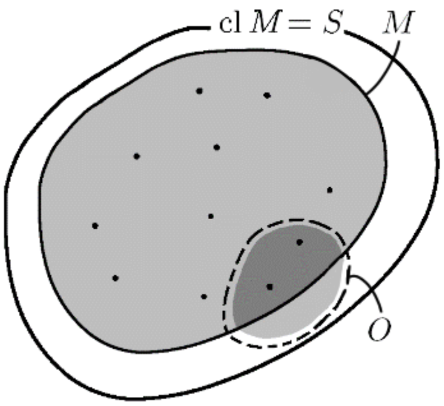
**定理 1.2.18.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、その集合 $S$ はその集合 $S$ 自身において稠密である。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、その集合 $S$ は閉集合でもあったので、$\mathrm{cl}S = S$ が成り立つ。よって、その集合 $S$ はその集合 $S$ 自身において稠密である。 □

**定理 1.2.19.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、次のことは同値である。

- その集合 $M$ がその集合 $S$ において稠密である。
- $\mathrm{int}(S \setminus M) = \emptyset$ が成り立つ。
- $\forall O \in \mathfrak{O} \setminus \{\emptyset\}$ に対し、$O \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。

これらは次の図のように考えられれば、分かりやすかろう。




**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、その集合 $M$ がその集合 $S$ において稠密であるなら、$\mathrm{cl}M = S$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$\emptyset = S \setminus S = S \setminus \mathrm{cl}M = \mathrm{int}(S \setminus M)$$

逆に、$\mathrm{int}(S \setminus M) = \emptyset$ が成り立つなら、開核と閉包の関係より $\mathrm{int}(S \setminus M) = S \setminus \mathrm{cl}M$ が成り立ち、したがって、$\mathrm{cl}M = S$ が成り立つ。

$\mathrm{cl}M = S$ が成り立つかつ、$\exists O \in \mathfrak{O} \setminus \{\emptyset\}$ に対し、$O \cap M = \emptyset$ が成り立つと仮定すると、その集合 $O$ は空集合ではないので、その集合 $M$ は空集合であり、空集合は閉集合でもあるので、$\mathrm{cl}M = \mathrm{cl}\emptyset = \emptyset$ が成り立つ

が、これは $S=\emptyset$ が成り立つことになり位相の定義に矛盾している。したがって、$\mathrm{cl}M=S$ が成り立つなら、$\forall O\in\mathfrak{O}\setminus\{\emptyset\}$ に対し、$O\cap M\neq\emptyset$ が成り立つ。

逆に、$\mathrm{cl}M\neq S$ が成り立つなら、集合 $S\setminus\mathrm{cl}M$ は空集合ではないかつ、開集合となる。したがって、$S\setminus\mathrm{cl}M\cap\mathrm{cl}M=\emptyset$ が成り立つ。ここで、$M\subseteq\mathrm{cl}M$ が成り立つことに注意すれば、$S\setminus\mathrm{cl}M\cap M=\emptyset$ も成り立つ。これにより、その集合 $M$ がその集合 $S$ において稠密でないなら、$\exists O\in\mathfrak{O}\setminus\{\emptyset\}$ に対し、$O\cap M=\emptyset$ が成り立つことになる。対偶律より、$\forall O\in\mathfrak{O}\setminus\{\emptyset\}$ に対し、$O\cap M\neq\emptyset$ が成り立つなら、その集合 $M$ はその集合 $S$ において稠密であることになる。 □

**定義 1.2.8.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、その集合 $S$ において稠密であるかつ、たかだか可算集合である集合 $M$ が存在するとき、即ち、$\exists M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$\mathrm{cl}M=S$ が成り立つかつ、$\#M\leq\aleph_0$ が成り立つとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は可分であるなどという。

**定理 1.2.20.** 第 2 可算公理を満たす位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は可分である。

**証明.** 第 2 可算公理を満たす位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、たかだか可算集合であるその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開基 $\mathfrak{B}$ が存在することになる。ここで、その集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとき、その添数集合 $\varLambda$ を空集合とすれば、その和集合 $\bigcup_{\lambda\in\varLambda}W_\lambda$ は空集合となるので、集合 $\mathfrak{B}\setminus\{\emptyset\}$ もその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開基となる。ここで、$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、選択の公理より $a_\lambda\in W_\lambda$ なる元々 $a_\lambda$ を取り出し次式のように集合 $M$ が与えられれば、

$$M=\{a_\lambda\in S|\forall\lambda\in\varLambda\,[a_\lambda\in W_\lambda]\}$$

これはその集合 $S$ の部分集合となる。ここで、$\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、開基の定義より $\exists\lambda\in\varLambda$ に対し、$W_\lambda\subseteq O$ が成り立つので、$a_\lambda\in O$ が成り立つ。したがって、$a_\lambda\in O$ かつ $a_\lambda\in M$ が成り立つので、$O\cap M\neq\emptyset$ が成り立つ。これが成り立つならそのときに限り、その集合 $M$ はその集合 $S$ において稠密となる。

ここで、その開基 $\mathfrak{B}$ はたかだか可算集合であるので、$\#\mathfrak{B}\leq\aleph_0$ が成り立つ。さらに、その集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられているので、$\#\varLambda\leq\#\mathfrak{B}$ が成り立つかつ、次式のような写像 $f$ は明らかに全射であるので、

$$f:\varLambda\rightarrow M;\lambda\mapsto a_\lambda$$

Bernstein の定理よりその集合 $M$ からその集合 $\varLambda$ への単射が存在し $\#M\leq\#\varLambda$ が成り立つ。

以上より、$\#M\leq\#\varLambda\leq\#\mathfrak{B}\leq\aleph_0$ が成り立つので、その集合 $M$ もたかだか可算集合である。これにより、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は可分である。 □

# 参考文献


[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p165-175 ISBN978-4-00-029871-1

[2] 加塩朋和. "一般位相 A（２組）". 東京理科大学. `https://www.rs.tus.ac.jp/a25594/2018-2019_General_Topology.pdf` (2021-3-11 取得)

[3] 佃修一. "位相空間問題集". 琉球大学. `http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/exercise-1104.pdf` (2021-3-29 取得)

## 1.3 連続写像

### 1.3.1 連続写像

**定理 1.3.1.** 2 つの空集合でない集合 $S$、$T$ における 2 つのそれぞれの位相たち $\mathfrak{O}$、$\mathfrak{P}$ とこれらの閉集合系それぞれ $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$、$a \in S$、$b \in T$ における全近傍系それぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(b)$ において、写像 $f : S \rightarrow T$ を考える。このとき、次のことは同値である。

- $\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $\forall B \in \mathfrak{B}$ に対し、$V\left(f^{-1}|B\right) \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。
- $\forall a \in S \forall W \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ に対し、$V\left(f^{-1}|W\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。

**証明.** 2 つの空集合でない集合 $S$、$T$ における 2 つのそれぞれの位相たち $\mathfrak{O}$、$\mathfrak{P}$ とこれらの閉集合系それぞれ $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$、$a \in S$、$b \in T$ における全近傍系それぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(b)$ において、写像 $f : S \rightarrow T$ を考える。

$\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$\forall B \in \mathfrak{B}$ に対し、$T \setminus B = P$ とおけば、定義より明らかに $P \in \mathfrak{P}$ が成り立つので、$V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立つことと閉集合の定義より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} V\left(f^{-1}|B\right) &= V\left(f^{-1}|T \setminus P\right) \\ &= S \setminus V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{A} \end{aligned}$$

逆に、$\forall B \in \mathfrak{B}$ に対し、$V\left(f^{-1}|B\right) \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら、$\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$T \setminus P = B$ とおけば $B \in \mathfrak{B}$ が成り立つので、$V\left(f^{-1}|B\right) \in \mathfrak{B}$ より、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} V\left(f^{-1}|P\right) &= f^{-1}(T \setminus B) \\ &= S \setminus V\left(f^{-1}|B\right) \in \mathfrak{O} \end{aligned}$$

以上より、次のことは同値である。

- $\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $\forall B \in \mathfrak{B}$ に対し、$V\left(f^{-1}|B\right) \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。

$\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$\forall a \in S \forall W \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ に対し、定理 1.1.22 より $\exists P \in \mathfrak{P}$ に対し、$f(a) \in P \subseteq W$ が成り立ち $a \in V\left(f^{-1}|P\right) \subseteq V\left(f^{-1}|W\right)$ が成り立つ。仮定より $V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立ち $a \in V\left(f^{-1}|P\right) = \mathrm{int}V\left(f^{-1}|P\right)$ が成り立つので、$V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathbf{W}(a)$ が成り立ち、したがって、$V\left(f^{-1}|W\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。逆に、$\forall a \in S \forall W \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ に対し、$V\left(f^{-1}|W\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つなら、$\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$O = V\left(f^{-1}|P\right)$ とすれば、$\forall b \in O$ に対し、$f(b) \in V\left(f|V\left(f^{-1}|P\right)\right) = P$ が成り立つかつ、$P \in \mathfrak{P}$ より $f(b) \in P = \mathrm{int}P$ が成り立つので、$P \in \mathbf{V}\left(f(b)\right)$ が成り立つ。したがって、仮定より $V\left(f^{-1}|P\right) = O \in \mathbf{V}(b)$ が成り立つ、即ち、$b \in \mathrm{int}O$ が成り立つので、$O \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

以上より、次のことは同値である。

- $\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。
- $\forall a \in S \forall W \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ に対し、$V\left(f^{-1}|W\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。

□

**定義 1.3.1.** 上記のことのいづれかを満たす写像 $f:S \rightarrow T$ はその定理によって上記の性質たち全て満たすことになり上記の性質たちを満たす写像 $f$ をその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ へ連続であるなどといいこのような写像 $f$ をその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ への連続写像という。

例えば、始集合が離散位相 $\mathfrak{P}(S)$ の台集合である、または、密着位相 $\{\emptyset,S\}$ の台集合であるときは任意の写像 $f:S \rightarrow T$ は位相的に連続になる。また、2 つの空集合でない集合 $S$、$T$ における 2 つのそれぞれの位相たち $\mathfrak{O}$、$\mathfrak{P}$ においての写像 $f:S \rightarrow T$ が定値写像であったり、$S=S$ かつ $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つときの恒等写像であったりするとき、それらの写像も位相的に連続である。

**定理 1.3.2.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ が与えられたとする。写像 $f:S \rightarrow T$ が連続であるならそのときに限り、その位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ の準開基 $\mathfrak{N}$ が与えられたとき、$\forall N \in \mathfrak{N}$ に対し、$V\left(f^{-1}|N\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

**証明.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ が与えられたとしその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ の準開基 $\mathfrak{N}$ が与えられたとき、$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{P}$ が成り立つので、$\forall N \in \mathfrak{N}$ に対し、その集合 $N$ は開集合となる。したがって、写像 $f:S \rightarrow T$ が連続であるなら、$V\left(f^{-1}|N\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

逆に、写像 $f:S \rightarrow T$ が与えられ、$\forall N \in \mathfrak{N}$ に対し、$V\left(f^{-1}|N\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つとき、次式のように集合 $\mathfrak{S}$ が考えられると、

$$\mathfrak{S}=\left\{N \in \mathfrak{P}(T) \middle| V\left(f^{-1}|N\right) \in \mathfrak{O}\right\}$$

仮定より、$\forall N \in \mathfrak{N}$ に対し、$N \in \mathfrak{S}$ が成り立つので、$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{S}$ が成り立つ。また、$V\left(f^{-1}|T\right)=S$ かつ $V\left(f^{-1}|\emptyset\right)=\emptyset$ が明らかに成り立つので、$T,\emptyset \in \mathfrak{S}$ が成り立つ。$\forall M,N \in \mathfrak{S}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} M,N \in \mathfrak{S} &\Leftrightarrow V\left(f^{-1}|M\right),V\left(f^{-1}|N\right) \in \mathfrak{O} \\ &\Rightarrow V\left(f^{-1}|M\right) \cap V\left(f^{-1}|N\right)=V\left(f^{-1}|M \cap N\right) \in \mathfrak{O} \end{aligned}$$

これにより、$M \cap N \in \mathfrak{S}$ が成り立つ。任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{S}$ の元の族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ が与えられたとき、次のようになる。

$$\begin{aligned} \forall\lambda \in \varLambda\left[M_\lambda \in \mathfrak{S}\right] &\Leftrightarrow \forall\lambda \in \varLambda\left[V\left(f^{-1}\middle|M_\lambda\right) \in \mathfrak{O}\right] \\ &\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \varLambda} V\left(f^{-1}|M_\lambda\right)=V\left(f^{-1}|\bigcup_{\lambda \in \varLambda} M_\lambda\right) \in \mathfrak{O} \end{aligned}$$

これにより、$\bigcap_{\lambda \in \varLambda} M_\lambda \in \mathfrak{S}$ が成り立つ。以上より、その集合 $\mathfrak{S}$ は位相である。

ここで、その集合 $\mathfrak{N}$ はその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ の準開基であるので、その集合 $\mathfrak{N}$ で生成される位相がその位相 $\mathfrak{P}$ である。したがって、$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{S}$ が成り立つので、$\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立ちその写像 $f$ は連続である。 □

**定義 1.3.2.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ が与えられたとする。写像 $f:S \rightarrow T$ において、$a \in S$ かつ $b \in T$ なる元々 $a$、$b$ のその位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ の全近傍系たちがそれぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(b)$ とおく。$\forall a \in S\forall W \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ に対し、$V\left(f^{-1}|W\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つとき、その写像 $f$ はその点 $a$ において連続であるという。

**定理 1.3.3.** $\forall a \in S$ に対し、写像 $f : S \rightarrow T$ がその点 $a$ において連続であるならそのときに限り、その写像 $f$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ へ連続である。

**証明.** 2 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとする。$\forall a \in S$ に対し、写像 $f : S \rightarrow T$ がその点 $a$ において連続であるならそのときに限り、$a \in S$ かつ $b \in T$ なる元々 $a$、$b$ のその位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ の全近傍系たちがそれぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(b)$ とおかれ、$\forall a \in S \forall W \in \mathbf{W}(f(a))$ に対し、$V\left(f^{-1}|W\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。これが成り立つならそのときに限り、その写像 $f$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ へ連続である。 □

**定理 1.3.4.** 2 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとする。写像 $f : S \rightarrow T$ が $a \in S$ なる点 $a$ において連続であるならそのときに限り、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つなら、$f(a) \in \mathrm{cl}V(f|M)$ も成り立つ。

**証明.** 2 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとする。写像 $f : S \rightarrow T$ が $a \in S$ なる点 $a$ において連続であるとき、$a \in S$ かつ $b \in T$ なる元々 $a$、$b$ のその位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ の全近傍系たちがそれぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(b)$ とおかれると、$\forall W \in \mathbf{W}(f(a))$ に対し、$V\left(f^{-1}|W\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つので、$a \in \mathrm{int}V\left(f^{-1}|W\right) \subseteq V\left(f^{-1}|W\right)$ が成り立つ。$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つなら、$V\left(f^{-1}|W\right) \cap \mathrm{cl}M \neq \emptyset$ が成り立つことになるので、$V\left(f^{-1}|W\right) \cap M \neq \emptyset$ も成り立つ。また、次のようになり

$$\begin{aligned} V\left(f|V\left(f^{-1}|W\right) \cap M\right) &\subseteq V\left(f|V\left(f^{-1}|W\right)\right) \cap V(f|M) \\ &\subseteq W \cap V(f|M) \end{aligned}$$

その値域 $V\left(f|V\left(f^{-1}|W\right) \cap M\right)$ が空集合ではないので、その集合 $W \cap V(f|M)$ も空集合ではない。ゆえに、定理 1.1.26 より $f(a) \in \mathrm{cl}V(f|M)$ が成り立つ。

逆に、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つなら、$f(a) \in \mathrm{cl}V(f|M)$ も成り立つとき、$\exists W \in \mathbf{W}(f(a))$ に対し、$V\left(f^{-1}|W\right) \notin \mathbf{V}(a)$ が成り立つと仮定すると、$a \notin \mathrm{int}V\left(f^{-1}|W\right)$ が成り立つことになるので、次のようになる。

$$\begin{aligned} a \in S \setminus \mathrm{int}V\left(f^{-1}|W\right) &= \mathrm{cl}\left(S \setminus V\left(f^{-1}|W\right)\right) \\ &= \mathrm{cl}\left(V\left(f^{-1}\right) \setminus V\left(f^{-1}|W\right)\right) \\ &= \mathrm{cl}\left(V\left(f^{-1}|T\right) \setminus V\left(f^{-1}|W\right)\right) \\ &= \mathrm{cl}V\left(f^{-1}|T \setminus W\right) \end{aligned}$$

したがって、仮定より次のようになる。

$$\begin{aligned} f(a) \in \mathrm{cl}V\left(f|V\left(f^{-1}|T \setminus W\right)\right) &\subseteq \mathrm{cl}(T \setminus W) \\ &= T \setminus \mathrm{int}W \end{aligned}$$

これにより、$f(a) \notin \mathrm{int}W$ が成り立ち、定義より $W \notin \mathbf{W}(f(a))$ が成り立つことになるが、これは仮定に矛盾する。したがって、$\forall W \in \mathbf{W}(f(a))$ に対し、$V\left(f^{-1}|W\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立ち、定義よりその写像 $f$ はその点 $a$ において連続である。 □

### 1.3.2 開写像と閉写像

**定義 1.3.3.** 2 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとする。写像 $f : S \rightarrow T$ において、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$V(f|O) \in \mathfrak{P}$ が成り立つ、即ち、その位相 $\mathfrak{O}$ に属する任意の開集合 $O$ に制限されたその写像 $f$ の値域

もまたその位相 $\mathfrak{P}$ に属するとき、その写像 $f$ は開写像であるという。

**定義 1.3.4.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ が与えられたとし写像 $f:S\to T$ において、それらの位相たち $\mathfrak{O}$、$\mathfrak{P}$ の閉集合系をそれぞれ $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$ とおくとき、$\forall A\in\mathfrak{A}$ に対し、$V(f|A)\in\mathfrak{B}$ が成り立つ、即ち、その閉集合系 $\mathfrak{A}$ に属する任意の開集合 $A$ に制限されたその写像 $f$ の値域もまたその閉集合系 $\mathfrak{B}$ に属するとき、その写像 $f$ は閉写像であるという。

例えば、$\mathfrak{P}=\mathfrak{P}(T)$ が成り立つなら、任意の写像 $f:S\to T$ は開写像であるかつ、閉写像でもある。$S=T$ が成り立つとき、恒等写像 $I_S:S\to S$ が開写像であるならそのときに限り、$\mathfrak{O}\subseteq\mathfrak{P}$ が成り立つ。また、同じくその恒等写像 $I_S$ が閉写像であるならそのときに限り、$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$ が成り立つ。

その写像 $f$ が連続写像であることと、開写像であることと、閉写像であることとは一般に同値ではないことに注意されたい。しかしながら、その写像 $f$ が全単射であるときでは、連続な写像であることと、開写像であることと、閉写像であることとの間に次に述べる関係がある。

**定理 1.3.5.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ が与えられたとする。全単射な写像 $f:S\overset{\sim}{\to}T$ において、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は開写像である。
- その写像 $f$ は閉写像である。
- その逆写像 $f^{-1}$ は連続写像である。

**証明.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ が与えられたとする。それらの位相たち $\mathfrak{O}$、$\mathfrak{P}$ の閉集合系をそれぞれ $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$ とおくとき、全単射な写像 $f:S\overset{\sim}{\to}T$ が開写像であるなら、定義より $\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、$V(f|O)\in\mathfrak{P}$ が成り立つ。ここで、その写像 $f$ が単射でもあるので、$V(f|S\setminus O)=V(f|S)\setminus V(f|O)$ が成り立つかつ、その写像は全射でもあるので、$V(f|S)=T$ が成り立つことに注意すれば、$\forall A\in\mathfrak{A}$ に対し、$A=S\setminus O$ なる開集合 $O$ がその位相 $\mathfrak{O}$ に存在して次式が成り立つので、

$$\begin{aligned}V(f|A)&=V(f|S\setminus O)\\&=V(f|S)\setminus V(f|O)\\&=T\setminus V(f|O)\in\mathfrak{B}\end{aligned}$$

その写像は閉写像でもある。同様に、その写像が閉写像であるなら、定義より $\forall A\in\mathfrak{A}$ に対し、$V(f|A)\in\mathfrak{B}$ が成り立つ。ここで、$\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、集合 $S\setminus O$ が閉集合となり $V(f|S\setminus O)\in\mathfrak{B}$ が成り立ち $V(f|S\setminus O)=T\setminus P$ なる開集合 $P$ がその位相 $\mathfrak{P}$ に存在する。その写像 $f$ が単射でもあるので、$V(f|S\setminus(S\setminus O))=V(f|S)\setminus V(f|S\setminus O)$ が成り立つかつ、その写像は全射でもあるので、$V(f|S)=T$ が成り立つことに注意すれば、次式が成り立つので、

$$\begin{aligned}V(f|O)&=V(f|S\setminus(S\setminus O))\\&=V(f|S)\setminus V(f|S\setminus O)\\&=T\setminus V(f|S\setminus O)\\&=T\setminus(T\setminus P)\\&=P\in\mathfrak{P}\end{aligned}$$

その写像 $f$ は開写像でもある。以上の議論により、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は開写像である。

- その写像 $f$ は閉写像である。

さらに、その写像 $f$ が開写像であるなら、定義より $\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$V(f|O) \in \mathfrak{P}$ が成り立つことになる。ここで、その写像 $f$ は全単射なので、これの逆写像 $f^{-1}$ が存在し、$f = \left(f^{-1}\right)^{-1}$ が成り立つので、$V\left(\left(f^{-1}\right)^{-1}|O\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。これにより、その逆写像 $f^{-1}$ は連続写像である。逆に、その逆写像 $f^{-1}$ が連続写像であるなら、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$V\left(\left(f^{-1}\right)^{-1}|O\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立つことになり、$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ が成り立つので、$V(f|O) \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。これにより、その写像 $f$ は開写像である。以上の議論により、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は開写像である。
- その逆写像 $f^{-1}$ は連続写像である。

$\square$

**定理 1.3.6.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ が与えられたとする。$a \in S$ かつ $b \in T$ なる元々 $a$、$b$ のその位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ の全近傍系たちがそれぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(b)$ とおかれるとき、写像 $f : S \to T$ について、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は開写像である。
- $\forall a \in S \forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V(f|V) \in \mathbf{W}(f(a))$ が成り立つ。
- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の 1 つの開基 $\mathfrak{B}$ について、$\forall W \in \mathfrak{B}$ に対し、$V(f|W) \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。

**証明.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ が与えられたとする。$a \in S$ かつ $b \in T$ なる元々 $a$、$b$ のその位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ の全近傍系たちがそれぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(b)$ とおかれるとする。写像 $f : S \to T$ が開写像であるとき、$\forall a \in S \forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$a \in \mathrm{int}V$ が成り立つことになり、したがって、$f(a) \in V(f|\mathrm{int}V)$ が成り立つ。ここで、その写像 $f$ は開写像でその集合 $\mathrm{int}V$ はその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における開集合であるから、その値域 $V(f|\mathrm{int}V)$ はその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ における開集合となる。したがって、$\mathrm{int}V(f|\mathrm{int}V) = V(f|\mathrm{int}V)$ が成り立つ。また、$\mathrm{int}V \subseteq V$ が成り立つので、$V(f|\mathrm{int}V) \subseteq V(f|V)$ が成り立ち、したがって、$V(f|\mathrm{int}V) \subseteq \mathrm{int}V(f|V)$ が成り立つ。これにより、$f(a) \in \mathrm{int}V(f|V)$ が成り立ち、定義より $V(f|V) \in \mathbf{W}(f(a))$ が得られる。逆に、$\forall a \in S \forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V(f|V) \in \mathbf{W}(f(a))$ が成り立つなら、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O = \emptyset$ のときは明らかなので、空集合でないとすると、$\forall b \in V(f|O)$ に対し、値域の定義より $\exists a \in O$ に対し、$f(a) = b$ が成り立つことになる。その集合 $O$ は $\mathrm{int}O = O$ を満たすので、$O \in \mathbf{V}(a)$ が成り立ち、$a \in S$ が成り立つので、仮定より $V(f|O) \in \mathbf{W}(f(a))$ が成り立ち、定義より明らかに、$f(a) = b \in \mathrm{int}V(f|O)$ が成り立ち、したがって、$V(f|O) \subseteq \mathrm{int}V(f|O)$ が成り立つ。$\mathrm{int}V(f|O) \subseteq V(f|O)$ が成り立つので、$\mathrm{int}V(f|O) = V(f|O)$ が成り立ちその値域 $V(f|O)$ はその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ の開集合となる。これにより、その写像 $f$ は開写像となる。以上の議論により、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は開写像である。
- $\forall a \in S \forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V(f|V) \in \mathbf{W}(f(a))$ が成り立つ。

写像 $f : S \to T$ が開写像であるなら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の 1 つの開基 $\mathfrak{B}$ について、$\forall W \in \mathfrak{B}$ に対し、開基の定義よりその集合 $W$ はその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開集合となりその写像 $f$ は開写像であるから、定義より明らかに $V(f|W) \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。逆に、$\forall W \in \mathfrak{B}$ に対し、$V(f|W) \in \mathfrak{P}$ が成り立つなら、開基の定義より

$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ を用いて $O = \bigcup_{\lambda\in\varLambda} W_\lambda$ が成り立つ。したがって、次のようになり

$$V\left(f|O\right) = V\left(f|\bigcup_{\lambda\in\varLambda} W_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\varLambda} V\left(f|W_\lambda\right)$$

開基の定義より、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの集合たち $W_\lambda$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ における開集合たちであるので、仮定より $V\left(f|W_\lambda\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立ち、位相の定義より、$\bigcup_{\lambda\in\varLambda} V\left(f|W_\lambda\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。したがって、$V\left(f|O\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立ちその写像 $f$ は開写像となる。以上の議論により、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は開写像である。
- $\forall W \in \mathfrak{B}$ に対し、$V\left(f|W\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。

□

**定理 1.3.7.** 3 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$、$(U, \mathfrak{Q})$ と写像たち $f : S \to T$、$g : T \to U$ が与えられたとき、次のことが成り立つ。

- それらの写像たち $f : S \to T$、$g : S \to T$ がどちらも連続写像であるなら、その合成写像 $g \circ f$ も連続写像である。
- それらの写像たち $f : S \to T$、$g : S \to T$ がどちらも開写像であるなら、その合成写像 $g \circ f$ も開写像である。
- それらの写像たち $f : S \to T$、$g : S \to T$ がどちらも閉写像であるなら、その合成写像 $g \circ f$ も閉写像である。

**証明.** 3 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$、$(U, \mathfrak{Q})$ と写像たち $f : S \to T$、$g : T \to U$ が与えられたとする。それらの写像たち $f : S \to T$、$g : S \to T$ がどちらも連続写像であるなら、定義より $\forall Q \in \mathfrak{Q}$ に対し、$V\left(g^{-1}|Q\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立ち、さらに、$V\left(f^{-1}|V\left(g^{-1}|Q\right)\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。ここで、値域の定義より $a \in V\left(f^{-1}|V\left(g^{-1}|Q\right)\right)$ が成り立つならそのときに限り、$\exists b \in V\left(g^{-1}|Q\right)$ に対し、$f(a) = b$ が成り立ち、さらに、$\exists c \in Q$ に対し、$g(b) = c$ が成り立つことになるので、$g\left(f(a)\right) = g \circ f(a) = c$ が成り立つ。ゆえに、次式が成り立つ。

$$V\left(f^{-1}|V\left(g^{-1}|Q\right)\right) = V\left((g \circ f)^{-1}|Q\right) \in \mathfrak{O}$$

これにより、その合成写像 $g \circ f$ は連続写像である。

それらの写像たち $f : S \to T$、$g : S \to T$ がどちらも開写像であるなら、定義より $\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$V\left(f|O\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立ち、さらに、$V\left(g|V\left(f|O\right)\right) \in \mathfrak{Q}$ が成り立つ。ここで、値域の定義より $c \in V\left(g|V\left(f|O\right)\right)$ が成り立つならそのときに限り、$\exists b \in V\left(f|O\right)$ に対し、$g(b) = c$ が成り立ち、さらに、$\exists a \in O$ に対し、$f(a) = b$ が成り立つことになるので、次式が成り立つ。

$$V\left(g|V\left(f|O\right)\right) = V\left(g \circ f|O\right) \in \mathfrak{Q}$$

これにより、その合成写像 $g \circ f$ は開写像である。

それらの写像たち $f : S \to T$、$g : S \to T$ がどちらも閉写像であるなら、それらの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$、$(U, \mathfrak{Q})$ における閉集合系たちをそれぞれ $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$、$\mathfrak{C}$ とおくと、定義より $\forall A \in \mathfrak{A}$ に対し、$V\left(f|A\right) \in \mathfrak{B}$

が成り立ち、さらに、$V(g|V(f|A)) \in \mathfrak{C}$ が成り立つことになる。ここで、上記と同様にして、次式が成り立つことが示される。

$$V(g|V(f|A)) = V(g \circ f|A) \in \mathfrak{C}$$

これにより、その合成写像 $g \circ f$ は閉写像である。 □

### 1.3.3 同相写像

**定義 1.3.5.** 2 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとする。写像 $f: S \rightarrow T$ が全単射であるかつ、連続であるかつ、これの逆写像 $f^{-1}$ も連続であるとき、その写像 $f$ をその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ への同相写像、位相写像、同位相写像、位相同型写像などという。

**定理 1.3.8.** 3 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$、$(U, \mathfrak{Q})$ と写像たち $f: S \rightarrow T$、$g: T \rightarrow U$ が与えられたとき、それらの写像たち $f$、$g$ が同相写像であるなら、その合成写像 $g \circ f$ も同相写像である。

**証明.** 3 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$、$(U, \mathfrak{Q})$ と写像たち $f: S \rightarrow T$、$g: T \rightarrow U$ が与えられたとき、それらの写像たち $f$、$g$ が同相写像であるなら、これらは全単射でもあるので、もちろん、その合成写像 $g \circ f$ は全単射である。さらに、それらの写像たち $f$、$g$ は連続でもあり定理 1.3.7 よりその合成写像 $g \circ f$ も連続である。ここで、定義よりそれらの逆写像たち $f^{-1}$、$g^{-1}$ も連続であるので、定理 1.3.7 よりその合成写像 $f^{-1} \circ g^{-1}$ も連続である。ここで、$f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$ が成り立つので、その逆写像 $(g \circ f)^{-1}$ も連続である。以上の議論により、その合成写像 $g \circ f$ も全単射であるかつ、連続であるかつ、開写像であるので、その合成写像 $g \circ f$ も同相写像である。 □

**定義 1.3.6.** 2 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとする。これらの間に同相写像が存在するとき、これらは同相である、同位相である、位相同型であるなどといいこのことを $(S, \mathfrak{O}) \approx (T, \mathfrak{P})$ などと書きこの関係 $\approx$ を同相関係という。

**定理 1.3.9.** 同相関係 $\approx$ は同値関係である、即ち、次のことが成り立つ。

- その関係 $\approx$ は反射的である、即ち、$(S, \mathfrak{O}) \approx (S, \mathfrak{O})$ が成り立つ。
- その関係 $\approx$ は対称的である、即ち、$(S, \mathfrak{O}) \approx (T, \mathfrak{P})$ が成り立つなら、$(T, \mathfrak{P}) \approx (S, \mathfrak{O})$ が成り立つ。
- その関係 $\approx$ は推移的である、即ち、$(S, \mathfrak{O}) \approx (T, \mathfrak{P})$ かつ $(T, \mathfrak{P}) \approx (U, \mathfrak{Q})$ が成り立つなら、$(S, \mathfrak{O}) \approx (U, \mathfrak{Q})$ が成り立つ。

**証明.** 1 つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとする。このとき、恒等写像 $I_S: S \rightarrow S$ は明らかに同相写像であるので、$(S, \mathfrak{O}) \approx (S, \mathfrak{O})$ が成り立つ。

2 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとする。$(S, \mathfrak{O}) \approx (T, \mathfrak{P})$ が成り立つなら、これらの間に同相写像 $f: S \rightarrow T$ が存在することになる。ここで、定義よりその写像 $f$ の逆写像 $f^{-1}: T \rightarrow S$ もまた同相写像となるのであったので、$(T, \mathfrak{P}) \approx (S, \mathfrak{O})$ が成り立つ。

3 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$、$(U, \mathfrak{Q})$ が与えられたとする。$(S, \mathfrak{O}) \approx (T, \mathfrak{P})$ かつ $(T, \mathfrak{P}) \approx (U, \mathfrak{Q})$ が成り立つなら、同相写像たち $f: S \rightarrow T$、$g: T \rightarrow U$ が存在することになる。ここで、定理 1.3.8 よりその合成写像 $g \circ f: S \rightarrow U$ もまた同相写像となるのであったので、$(S, \mathfrak{O}) \approx (U, \mathfrak{Q})$ が成り立つ。 □

**定理 1.3.10.** 2 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとき、それらの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$

における閉集合系たちをそれぞれ$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$、$a \in S$ かつ $b \in T$ なる元々 $a$、$b$ のその位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ の全近傍系たちがそれぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(b)$ とおかれると、写像 $f:S \rightarrow T$ について、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は同相写像である。
- その写像 $f$ は全単射であるかつ、連続であるかつ、これの逆写像 $f^{-1}$ も連続である。
- その写像 $f$ は全単射であるかつ、連続であるかつ、開写像である。
- その写像 $f$ は全単射であるかつ、連続であるかつ、閉写像である。
- その逆写像 $f^{-1}$ は同相写像である。
- その写像 $f$ は全単射で、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \in \mathfrak{O} \Leftrightarrow V(f|O) \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。
- その写像 $f$ は全単射で、$\forall A \in \mathfrak{A}$ に対し、$A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow V(f|A) \in \mathfrak{B}$ が成り立つ。
- その写像 $f$ は全単射で、$\forall a \in S \forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \in \mathbf{V}(a) \Leftrightarrow V(f|V) \in \mathbf{W}(f(a))$ が成り立つ。
- その写像 $f$ は全単射で、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$V(f|\mathrm{int}M) = \mathrm{int}V(f|M)$ が成り立つ。
- その写像 $f$ は全単射で、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$V(f|\mathrm{cl}M) = \mathrm{cl}V(f|M)$ が成り立つ。

**証明.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ が与えられたとき、写像 $f:S \rightarrow T$ について、それらの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ における閉集合系たちをそれぞれ$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$、$a \in S$ かつ $b \in T$ なる元々 $a$、$b$ のその位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ の全近傍系たちがそれぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(b)$ とおかれよう。定義より明らかに次のことは同値である。

- その写像 $f$ は同相写像である。
- その写像 $f$ は全単射であるかつ、連続であるかつ、これの逆写像 $f^{-1}$ も連続である。

定理 1.3.5 より明らかに次のことは同値である。

- その写像 $f$ は全単射であるかつ、連続であるかつ、これの逆写像 $f^{-1}$ も連続である。
- その写像 $f$ は全単射であるかつ、連続であるかつ、開写像である。
- その写像 $f$ は全単射であるかつ、連続であるかつ、閉写像である。

また、その逆写像 $f^{-1}$ も全単射で、$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ が成り立つことから、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は同相写像である。
- その写像 $f$ は全単射であるかつ、連続であるかつ、これの逆写像 $f^{-1}$ も連続である。
- その逆写像 $f^{-1}$ は同相写像である。

その写像 $f$ が同相写像であるなら、上記の議論により、その写像 $f$ は開写像でもあるので、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$V(f|O) \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。また、上記の議論により、その逆写像 $f^{-1}$ も同相写像で開写像でもあり、$V(f|O) \in \mathfrak{P}$ が成り立つなら、$V\left(f^{-1}|V(f|O)\right) = O$ より $O \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。これにより、その写像 $f$ は全単射で $O \in \mathfrak{O} \Leftrightarrow V(f|O) \in \mathfrak{P}$ が成り立つことが示された。逆に、その写像 $f$ は全単射で、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \in \mathfrak{O} \Leftrightarrow V(f|O) \in \mathfrak{P}$ が成り立つなら、$\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$O = V\left(f^{-1}|P\right)$ とすれば、その写像 $f$ は全単射であるので、$P = V\left(f|V\left(f^{-1}|P\right)\right)$ が成り立ち $V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。したがって、その写像 $f$ は連続である。また、その写像 $f$ は明らかに開写像でもあるので、上記の議論によりしたがって、その写像 $f$ は同相写像である。以上の議論により、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は同相写像である。

- その写像 $f$ は全単射で、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \in \mathfrak{O} \Leftrightarrow V\left(f|O\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。

その写像 $f$ が同相写像であるなら、上記の議論により、その写像 $f$ は閉写像でもあるので、$\forall A \in \mathfrak{A}$ に対し、$V\left(f|A\right) \in \mathfrak{B}$ が成り立つ。また、上記の議論により、その逆写像 $f^{-1}$ も同相写像で閉写像でもあり、$V\left(f|A\right) \in \mathfrak{B}$ が成り立つなら、$V\left(f^{-1}|V\left(f|A\right)\right) = A$ より $A \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。これにより、その写像 $f$ は全単射で $A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow V\left(f|A\right) \in \mathfrak{B}$ が成り立つことが示された。逆に、その写像 $f$ は全単射で、$\forall A \in \mathfrak{A}$ に対し、$A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow V\left(f|A\right) \in \mathfrak{B}$ が成り立つなら、$\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$A = V\left(f^{-1}|T \setminus P\right)$ とすれば、その写像 $f$ は全単射であるので、$T \setminus P = V\left(f|V\left(f^{-1}|T \setminus P\right)\right)$ が成り立ち $V\left(f^{-1}|T \setminus P\right) = S \setminus V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{A}$ が成り立つ。したがって、$V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が得られその写像 $f$ は連続である。また、その写像 $f$ は明らかに閉写像でもあるので、上記の議論によりしたがって、その写像 $f$ は同相写像である。以上の議論により、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は同相写像である。
- その写像 $f$ は全単射で、$\forall A \in \mathfrak{A}$ に対し、$A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow V\left(f|A\right) \in \mathfrak{B}$ が成り立つ。

写像 $f: S \rightarrow T$ が同相写像であるなら、定義より明らかにその写像 $f$ は全単射である。また、その写像 $f$ の逆写像 $f^{-1}$ は連続であるので、$\forall a \in S \forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V\left(f|V\right) \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ が成り立つ。また、その写像 $f$ は連続であるので、$V\left(f|V\right) \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ が成り立つなら、$V\left(f^{-1}|V\left(f|V\right)\right) \in \mathbf{V}\left(f^{-1}\left(f(a)\right)\right)$ が成り立つ。そこで、その写像 $f$ は全単射であるので、$V\left(f^{-1}|V\left(f|V\right)\right) = V$ が成り立つかつ、$f^{-1}\left(f(a)\right) = a$ も成り立つので、$V\left(f|V\right) \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ が成り立つなら、$V \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。これにより、その写像 $f$ は全単射で、$\forall a \in S \forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \in \mathbf{V}(a) \Leftrightarrow V\left(f|V\right) \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ が成り立つことが示された。逆に、その写像 $f$ は全単射で、$\forall a \in S \forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \in \mathbf{V}(a) \Leftrightarrow V\left(f|V\right) \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ が成り立つなら、$\forall W \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ に対し、その写像 $f$ が全単射なので、$W = V\left(f|V\left(f^{-1}|W\right)\right)$ が成り立つことにより $V\left(f|V\left(f^{-1}|W\right)\right) \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ が成り立ち、したがって、$V\left(f^{-1}|W\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。したがって、その写像 $f$ は連続である。また、$\forall b \in T$ に対し、その写像 $f$ は全単射なので、$\exists a \in S$ に対し、$f(a) = b$ が成り立つ。そこで、$\forall V \in \mathbf{V}\left(f^{-1}(b)\right)$ に対し、$V \in \mathbf{V}\left(f^{-1}(b)\right)$ が成り立つなら、$a = f^{-1}(b)$ より $V \in \mathbf{V}(a)$ で $V\left(f|V\right) \in \mathbf{W}\left(f(a)\right) = \mathbf{W}(b)$ が成り立つ。したがって、その写像 $f^{-1}$ は連続である。定義よりしたがって、その写像 $f$ は同相写像である。以上の議論により、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は同相写像である。
- その写像 $f$ は全単射で、$\forall a \in S \forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \in \mathbf{V}(a) \Leftrightarrow V\left(f|V\right) \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ が成り立つ。

その写像 $f: S \rightarrow T$ が同相写像であるなら、定義より明らかにその写像 $f$ は全単射である。また、その写像 $f$ の逆写像 $f^{-1}$ が存在し連続であるので、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $\mathrm{int}M$ は開集合で $V\left(f|\mathrm{int}M\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立つ。これにより、$\mathrm{int}M \subseteq M$ が成り立つので、$V\left(f|\mathrm{int}M\right) \subseteq V\left(f|M\right)$ が成り立ち、したがって、$V\left(f|\mathrm{int}M\right) \subseteq \mathrm{int}V\left(f|M\right)$ が成り立つ。また、$\exists b \in \mathrm{int}V\left(f|M\right)$ に対し、$b \in \mathrm{int}V\left(f|M\right)$ かつ $b \notin V\left(f|\mathrm{int}M\right)$ が成り立つと仮定すると、$\mathrm{int}V\left(f|M\right) \subseteq V\left(f|M\right)$ が成り立つので、$b \in V\left(f|M\right) \setminus V\left(f|\mathrm{int}M\right)$ が成り立つ。その写像 $f$ は全単射なので、次のようになり、

$$b \in V\left(f|M\right) \setminus V\left(f|\mathrm{int}M\right) = V\left(f|M \setminus \mathrm{int}M\right)$$

値域の定義より $\exists a \in M \setminus \mathrm{int}M$ に対し、$f(a) = b$ が成り立ち $a \notin \mathrm{int}M$ が成り立つ。また、$\mathrm{int}V\left(f|M\right) \in \mathfrak{P}$ が成り立ちその写像 $f$ は連続であるので、$V\left(f^{-1}|\mathrm{int}V\left(f|M\right)\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。したがって、次のように

なり

$$\begin{aligned}V\left(f^{-1}|\mathrm{int}V\left(f|M\right)\right)&=\mathrm{int}V\left(f^{-1}|\mathrm{int}V\left(f|M\right)\right)\\&\subseteq\mathrm{int}V\left(f^{-1}|V\left(f|M\right)\right)\\&=\mathrm{int}M\end{aligned}$$

ここで、$a\notin\mathrm{int}M$ が成り立つので、$a\notin V\left(f^{-1}|\mathrm{int}V\left(f|M\right)\right)$ となり、その写像 $f$ が全単射であることに注意すれば、値域の定義よりしたがって、$f(a)=b\notin\mathrm{int}V\left(f|M\right)$ が成り立つことになるが、これは仮定の $b\in\mathrm{int}V\left(f|M\right)$ が成り立つことに矛盾している。したがって、$\forall b\in\mathrm{int}V\left(f|M\right)$ に対し、$b\in\mathrm{int}V\left(f|M\right)$ が成り立つなら、$b\in V\left(f|\mathrm{int}M\right)$ が成り立つことになり $V\left(f|\mathrm{int}M\right)\supseteq\mathrm{int}V\left(f|M\right)$ が得られる。よって、その写像 $f$ は全単射で、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$V\left(f|\mathrm{int}M\right)=\mathrm{int}V\left(f|M\right)$ が成り立つ。逆に、その写像 $f:S\rightarrow T$ が全単射で、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$V\left(f|\mathrm{int}M\right)=\mathrm{int}V\left(f|M\right)$ が成り立つなら、$\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、次のようになるので、

$$\begin{aligned}V\left(f|O\right)&=V\left(f|\mathrm{int}O\right)\\&=\mathrm{int}V\left(f|O\right)\in\mathfrak{P}\end{aligned}$$

その逆写像 $f^{-1}$ は連続である。また、$\forall P\in\mathfrak{P}$ に対し、その写像 $f$ は全単射で次のようになるので、

$$\begin{aligned}V\left(f^{-1}|P\right)&=V\left(f^{-1}|\mathrm{int}P\right)\\&=V\left(f^{-1}|\mathrm{int}V\left(f|V\left(f^{-1}|P\right)\right)\right)\\&=V\left(f^{-1}|V\left(f|\mathrm{int}V\left(f^{-1}|P\right)\right)\right)\\&=\mathrm{int}V\left(f^{-1}|P\right)\in\mathfrak{O}\end{aligned}$$

その写像 $f$ は連続である。よって、その写像 $f$ は同相写像である。以上の議論により、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は同相写像である。
- その写像 $f$ は全単射で、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$V\left(f|\mathrm{int}M\right)=\mathrm{int}V\left(f|M\right)$ が成り立つ。

その写像 $f:S\rightarrow T$ が同相写像であるなら、定義より明らかにその写像 $f$ は全単射である。また、その写像 $f$ は閉写像でもあるので、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $\mathrm{cl}M$ は閉集合で $V\left(f|\mathrm{cl}M\right)\in\mathfrak{B}$ が成り立つ。これにより、$M\subseteq\mathrm{cl}M$ が成り立つので、$V\left(f|M\right)\subseteq V\left(f|\mathrm{cl}M\right)$ が成り立ち、したがって、$\mathrm{cl}V\left(f|M\right)\subseteq V\left(f|\mathrm{cl}M\right)$ が成り立つ。また、$\exists b\in V\left(f|\mathrm{cl}M\right)$ に対し、$b\in V\left(f|\mathrm{cl}M\right)$ かつ $b\notin\mathrm{cl}V\left(f|M\right)$ が成り立つと仮定すると、$V\left(f|M\right)\subseteq\mathrm{cl}V\left(f|M\right)$ が成り立つので、$b\in V\left(f|\mathrm{cl}M\right)\setminus V\left(f|M\right)$ が成り立つ。その写像 $f$ は全単射なので、次のようになり、

$$b\in V\left(f|\mathrm{cl}M\right)\setminus V\left(f|M\right)=V\left(f|\mathrm{cl}M\setminus M\right)$$

値域の定義より $\forall a\in\mathrm{cl}M\setminus M$ に対し、$f(a)=b$ が成り立ち $a\in\mathrm{cl}M$ が成り立つ。また、$\mathrm{cl}V\left(f|M\right)\in\mathfrak{B}$ が成り立ちその写像 $f$ は連続であるので、$V\left(f^{-1}|\mathrm{cl}V\left(f|M\right)\right)\in\mathfrak{A}$ が成り立つ。したがって、次のようになり

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}M&=\mathrm{cl}V\left(f^{-1}|V\left(f|M\right)\right)\\&\subseteq\mathrm{cl}V\left(f^{-1}|\mathrm{cl}V\left(f|M\right)\right)\\&=V\left(f^{-1}|\mathrm{cl}V\left(f|M\right)\right)\end{aligned}$$

ここで、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つので、$a \in V\left(f^{-1}|\mathrm{cl}V(f|M)\right)$ となり、その写像 $f$ が全単射であることに注意すれば、値域の定義よりしたがって、$f(a) = b \in \mathrm{cl}V(f|M)$ に属することになるが、これは仮定の $b \notin \mathrm{cl}V(f|M)$ が成り立つことに矛盾している。したがって、$\forall b \in \mathrm{int}V(f|M)$ に対し、$b \in V(f|\mathrm{cl}M)$ が成り立つなら、$b \in \mathrm{cl}V(f|M)$ が成り立つことになり $\mathrm{cl}V(f|M) \supseteq V(f|\mathrm{cl}M)$ が得られる。よって、その写像 $f$ は全単射で、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$\mathrm{cl}V(f|M) = V(f|\mathrm{cl}M)$ が成り立つ。逆に、その写像 $f: S \rightarrow T$ が全単射で、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$\mathrm{cl}V(f|M) = V(f|\mathrm{cl}M)$ が成り立つなら、$\forall A \in \mathfrak{A}$ に対し、次のようになるので、

$$\begin{aligned} V(f|A) &= V(f|\mathrm{cl}A) \\ &= \mathrm{cl}V(f|A) \in \mathfrak{B} \end{aligned}$$

その写像 $f$ は閉写像であり定理 1.3.5 よりその逆写像 $f^{-1}$ は連続である。また、$\forall B \in \mathfrak{B}$ に対し、その写像 $f$ は全単射で次のようになるので、

$$\begin{aligned} V\left(f^{-1}|B\right) &= V\left(f^{-1}|\mathrm{cl}B\right) \\ &= V\left(f^{-1}|\mathrm{cl}V\left(f|V\left(f^{-1}|B\right)\right)\right) \\ &= V\left(f^{-1}|V\left(f|\mathrm{cl}V\left(f^{-1}|B\right)\right)\right) \\ &= \mathrm{cl}V\left(f^{-1}|B\right) \in \mathfrak{A} \end{aligned}$$

その写像 $f$ は連続である。よって、その写像 $f$ は同相写像である。以上の議論により、次のことは同値である。

- その写像 $f$ は同相写像である。
- その写像 $f$ は全単射で、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$V(f|\mathrm{cl}M) = \mathrm{cl}V(f|M)$ が成り立つ。

□

# 参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p175-186 ISBN978-4-00-029871-1

## 1.4 誘導位相空間

### 1.4.1 誘導位相空間

1 つの集合 $S$ と 1 つの位相空間 $(T,\mathfrak{P})$、1 つの写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとき、その写像 $f$ がある位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ への連続写像となるようなその位相 $\mathfrak{O}$ を求めたい。しかしながら、このような位相 $\mathfrak{O}$ が存在したとすれば、これより強い位相 $\mathfrak{O}'$ を用いて $\forall P\in\mathfrak{P}$ に対し、$V\left(f^{-1}|P\right)\in\mathfrak{O}\subseteq\mathfrak{O}'$ が成り立ちその写像 $f$ はその位相空間 $(S,\mathfrak{O}')$ からその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ への連続写像となるので、その位相 $\mathfrak{O}$ は必ずしも一意的に決まるとは限らない。

**定理 1.4.1.** 1 つの集合 $S$ と 1 つの位相空間 $(T,\mathfrak{P})$、1 つの写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとき、その写像 $f$ がある位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ への連続写像となるような位相たち $\mathfrak{O}$ のうち、最も強いものは離散位相 $\mathfrak{P}(S)$ である。

**証明.** 1 つの集合 $S$ と 1 つの位相空間 $(T,\mathfrak{P})$、1 つの写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとき、その集合 $S$ を台集合とする離散位相 $\mathfrak{P}(S)$ について、$\forall P\in\mathfrak{P}$ に対し、値域の定義より $V\left(f^{-1}|P\right)\in\mathfrak{P}(S)$ が必ず成り立つ。さらに、その離散位相 $\mathfrak{P}(S)$ はその集合 $S$ を台集合とするその写像 $f$ がある位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ への連続写像となるような任意の位相 $\mathfrak{O}$ に対し、$\mathfrak{O}\subseteq\mathfrak{P}(S)$ を満たすので、このような位相たち $\mathfrak{O}$ のうち、最も強いものはその離散位相 $\mathfrak{P}(S)$ となる。 □

**定理 1.4.2.** 1 つの集合 $S$ と 1 つの位相空間 $(T,\mathfrak{P})$、1 つの写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとき、その写像 $f$ がある位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ への連続写像となるような位相たち $\mathfrak{O}$ のうち、最も弱いものは次式のように定義されるその位相 $\mathfrak{P}$ の元 $P$ のその逆対応 $f^{-1}$ による値域 $V\left(f^{-1}|P\right)$ 全体の集合 $\mathfrak{O}_0$ である。

$$\mathfrak{O}_0=\left\{O'\in\mathfrak{P}(S)\middle|\exists P\in\mathfrak{P}\left[O'=V\left(f^{-1}|P\right)\right]\right\}$$

**定義 1.4.1.** この位相 $\mathfrak{O}_0$ をその写像 $f$ によってその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ から誘導される位相、その写像 $f$ によるその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ からの誘導位相、始位相などといいその位相空間 $(S,\mathfrak{O}_0)$ をその写像 $f$ によるその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ からの誘導位相空間、始位相空間などという。

**証明.** 1 つの集合 $S$ と 1 つの位相空間 $(T,\mathfrak{P})$、1 つの写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとし、次式のようにその位相 $\mathfrak{P}$ の元 $P$ のその逆対応 $f^{-1}$ による値域 $V\left(f^{-1}|P\right)$ 全体の集合 $\mathfrak{O}_0$ が定義される。

$$\mathfrak{O}_0=\left\{O'\in\mathfrak{P}(S)\middle|\exists P\in\mathfrak{P}\left[O'=V\left(f^{-1}|P\right)\right]\right\}$$

このとき、位相の定義より $T\in\mathfrak{P}$ が成り立つかつ、$D(f)=V\left(f^{-1}\right)$ が成り立つかつ、その対応 $f$ が写像であるので、$D(f)=S$ が成り立つことに注意すれば、$V\left(f^{-1}|T\right)=S$ が成り立つ。さらに、位相の定義より $\emptyset\in\mathfrak{P}$ が成り立つので、$V\left(f^{-1}|\emptyset\right)=\emptyset$ が成り立つ。以上より、$S,\emptyset\in\mathfrak{O}_0$ が成り立つ。任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}_0$ の元の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとき、その集合 $\mathfrak{O}_0$ の定義より $\forall\lambda\in\varLambda\exists P_\lambda\in\mathfrak{P}$ に対し、$O_\lambda=V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)$ が成り立つ。ここで、位相の定義より $\bigcup_{\lambda\in\varLambda}P_\lambda\in\mathfrak{P}$ が成り立つかつ、次式が成り立つ。

$$V\left(f^{-1}|\bigcup_{\lambda\in\varLambda}P_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\varLambda}V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)$$

$$= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}_0$$

$\forall O, P \in \mathfrak{O}_0$ に対し、その集合 $\mathfrak{O}_0$ の定義より $\exists Q, R \in \mathfrak{P}$ に対し、$O = V\left(f^{-1}|Q\right)$ かつ $P = V\left(f^{-1}|R\right)$ が成り立つ。ここで、位相の定義より $Q \cap R \in \mathfrak{P}$ が成り立つかつ、その対応 $f$ は写像であり次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} V\left(f^{-1}|Q \cap R\right) &= V\left(f^{-1}|Q\right) \cap V\left(f^{-1}|R\right) \\ &= O \cap P \in \mathfrak{O}_0 \end{aligned}$$

以上より、その集合 $\mathfrak{O}_0$ はその集合 $S$ を台集合とする位相である。また、その位相 $\mathfrak{O}_0$ の定義より $\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}_0$ が成り立つので、その写像 $f$ は連続写像である。

さらに、その写像 $f$ がある位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ への連続写像となるとき、$\forall O \in \mathfrak{O}_0 \exists P \in \mathfrak{P}$ に対し、$O = V\left(f^{-1}|P\right)$ が成り立つので、$O = V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。したがって、このような位相 $\mathfrak{O}$ すべて $\mathfrak{O}_0 \subseteq \mathfrak{O}$ を満たす。

以上より、このような位相たち $\mathfrak{O}$ のうち、最も弱いものはその位相 $\mathfrak{O}_0$ となる。 □

さらに、1 つの集合 $S$ と添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda \in \Lambda}$、その添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた写像の族 $\left\{f_\lambda : S \rightarrow S_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、それらの写像たち $f_\lambda$ がある位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ への連続写像となるようなその位相 $\mathfrak{O}$ を求めたい。

**定理 1.4.3.** このような位相 $\mathfrak{O}$ のうち最も強いものはやはり離散位相 $\mathfrak{P}(\mathfrak{O})$ となる。

**証明.** 1 つの集合 $S$ と添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda \in \Lambda}$、その添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた写像の族 $\left\{f_\lambda : S \rightarrow S_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき、その集合 $S$ を台集合とする離散位相 $\mathfrak{P}(S)$ について、$\forall \lambda \in \Lambda \forall O_\lambda \in \mathfrak{O}_\lambda$ に対し、値域の定義より $V\left(f^{-1}|O_\lambda\right) \in \mathfrak{P}(S)$ が必ず成り立つ。さらに、その離散位相 $\mathfrak{P}(S)$ はその集合 $S$ を台集合とする任意の位相たち $\mathfrak{O}$ を用いて $\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{P}(S)$ を満たすので、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、それらの写像たち $f_\lambda$ がある位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ への連続写像となるような位相たち $\mathfrak{O}$ のうち、最も強いものはその離散位相 $\mathfrak{P}(S)$ となる。 □

**定理 1.4.4.** このような位相 $\mathfrak{O}$ のうち最も弱いのは次式のように定義されるその集合 $S$ を台集合とする位相全体の集合 $\mathcal{T}(S)$ を用いた順序集合 $(\mathcal{T}(S), \subseteq)$ におけるその写像 $f_\lambda$ によるその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_\lambda'$ 全体の集合の上限 $\mathfrak{O}_0$ である。

$$\mathfrak{O}_0 = \sup\left\{\mathfrak{O}_\lambda' \in \mathcal{T}(S) | \lambda \in \Lambda\right\}$$

**定義 1.4.2.** この位相 $\mathfrak{O}_0$ をその写像の族 $\left\{f_\lambda : S \rightarrow S_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ によってその位相空間の族 $\left\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ から誘導される位相、その写像の族 $\left\{f_\lambda : S \rightarrow S_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ によるその位相空間の族 $\left\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ からの誘導位相、始位相などといいその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_0)$ をその写像の族 $\left\{f_\lambda : S \rightarrow S_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ によるその位相空間の族 $\left\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ からの誘導位相空間、始位相空間などという。

**証明.** 1 つの集合 $S$ と添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda \in \Lambda}$、その添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた写像の族 $\left\{f_\lambda : S \rightarrow S_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、その写像 $f_\lambda$ によるその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ からの誘導位相を $\mathfrak{O}_\lambda'$ とおくと、それらの写像たち $f_\lambda$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_\lambda')$ からその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ への連続写像となり、$\forall \lambda \in \Lambda \forall O_\lambda \in \mathfrak{O}_\lambda$ に対し、$V\left(f^{-1}|O_\lambda\right) \in \mathfrak{O}_\lambda'$ が成り立つ。その集合 $S$ を台集合とする位相全体の集合 $\mathcal{T}$ を用いた順序集合 $(\mathcal{T}(S), \subseteq)$ を考え、それらの誘導位相 $\mathfrak{O}_\lambda'$ 全体の集合 $\left\{\mathfrak{O}_\lambda' \in \mathcal{T}(S) | \lambda \in \Lambda\right\}$ の任意の上界 $\mathfrak{O}'$、即ち、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、$\mathfrak{O}_\lambda' \subseteq \mathfrak{O}'$ が成り立つような任意の位相 $\mathfrak{O}'$

は、$\forall\lambda \in \varLambda\forall O_\lambda \in \mathfrak{O}_\lambda$ に対し、$V\left(f^{-1}|O_\lambda\right) \in \mathfrak{O}'$ を満たすので、その位相 $\mathfrak{O}'$ は、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの写像たち $f_\lambda$ がある位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ への連続写像となる。ここで、それらの誘導位相 $\mathfrak{O}'_\lambda$ 全体の集合 $\{\mathfrak{O}'_\lambda \in \mathcal{T}(S)|\lambda \in \varLambda\}$ はその集合 $\mathcal{T}(S)$ の元の族でありこの集合 $\{\mathfrak{O}'_\lambda \in \mathcal{T}(S)|\lambda \in \varLambda\}$ の上限がその集合 $\mathcal{T}(S)$ に存在するのであったので、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの写像たち $f_\lambda$ がある位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ への連続写像となるような位相 $\mathfrak{O}'$ 全体の集合のうち最も弱いものがその順序集合 $(\mathcal{T}, \subseteq)$ における上限 $\sup\{\mathfrak{O}'_\lambda \in \mathcal{T}(S)|\lambda \in \varLambda\}$ となる。 □

**定理 1.4.5.** 写像の族 $\{f_\lambda : S \to S_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ によるその位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \varLambda}$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_0$ は次式を満たす、即ち、その和集合 $\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda$ で生成される位相 $\mathfrak{O}\left(\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}'_\lambda\right)$ に等しい。

$$\mathfrak{O}_0 = \mathfrak{O}\left(\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}'_\lambda\right)$$

さらに、集合 $\mathfrak{B}$ が次式のように定義されると、

$$\mathfrak{B} = \left\{\bigcap_{\mu \in M} A_\mu \in \mathfrak{P}(S)\middle|\#M < \aleph_0,\ \ \forall\mu \in M\left[A_\mu \in \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}'_\lambda\right]\right\}$$

次式が成り立つ、

$$\mathfrak{O}_0 = \left\{\bigcup_{\nu \in N} B_\nu \in \mathfrak{P}(S)\middle|\forall\nu \in N\left[B_\nu \in \mathfrak{B}\right]\right\}$$

即ち、その誘導位相 $\mathfrak{O}_0$ はその和集合 $\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda$ を用いて $A_\mu \in \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_\lambda$ なる有限個の集合たち $A_\mu$ の共通部分 $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu$ 全体の集合 $\mathfrak{B}$ を用いて $B_\nu \in \mathfrak{B}$ なる集合 $B_\nu$ の和集合 $\bigcup_{\nu \in N} B_\nu$ で表される集合全体の集合である。

**証明.** 1 つの集合 $S$ と添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \varLambda}$、その添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた写像の族 $\{f_\lambda : S \to S_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ が与えられたとき、写像の族 $\{f_\lambda : S \to S_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ によるその位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \varLambda}$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_0$ は次式のようにその集合 $S$ を台集合とする位相全体の集合 $\mathcal{T}(S)$ を用いた順序集合 $(\mathcal{T}(S), \subseteq)$ におけるその写像 $f_\lambda$ によるその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}'_\lambda$ 全体の集合の上限 $\mathfrak{O}_0$ であるのであった。

$$\mathfrak{O}_0 = \sup\{\mathfrak{O}'_\lambda \in \mathcal{T}(S)|\lambda \in \varLambda\}$$

ここで、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$\mathfrak{O}'_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}'_\lambda$ が成り立ち、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$\mathfrak{O}'_\lambda \subseteq \mathfrak{O}'$ が成り立つならそのときに限り、$\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}'_\lambda \subseteq \mathfrak{O}'$ が成り立つので、集合 $\mathfrak{O}'$ がその集合 $\{\mathfrak{O}'_\lambda \in \mathcal{T}(S)|\lambda \in \varLambda\}$ の上界であるならそのときに限り、$\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}'_\lambda \subseteq \mathfrak{O}'$ が成り立つことになる。したがって、その集合 $\{\mathfrak{O}'_\lambda \in \mathcal{T}(S)|\lambda \in \varLambda\}$ の上限 $\sup\{\mathfrak{O}'_\lambda \in \mathcal{T}|\lambda \in \varLambda\}$ は $\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}'_\lambda \subseteq \mathfrak{O}'$ が成り立つような位相 $\mathfrak{O}'$ のうち最も弱いので、定義より $\mathfrak{O}_0 = \mathfrak{O}\left(\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}'_\lambda\right)$ のようにその位相 $\mathfrak{O}_0$ はその集合 $\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}'_\lambda$ で生成される位相 $\mathfrak{O}\left(\bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}'_\lambda\right)$ である。

　このとき、その位相 $\mathfrak{O}_0$ は、有限集合である添数集合 $M$ によって添数づけられたその集合 $\bigcup_{\lambda\in\varLambda}\mathfrak{O}'_\lambda$ の元の族 $\left\{A_\mu\right\}_{\mu\in M}$ の積集合全体の集合を $\mathfrak{B}$ として、任意の添数集合 $N$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\left\{B_\nu\right\}_{\nu\in N}$ の和集合全体の集合に等しいのであったので、集合 $\mathfrak{B}$ が次式のように定義されると、

$$\mathfrak{B}=\left\{\bigcap_{\mu\in M}A_\mu\in\mathfrak{P}(S)\middle|\#M<\aleph_0,\ \ \forall\mu\in M\left[A_\mu\in\bigcup_{\lambda\in\varLambda}\mathfrak{O}'_\lambda\right]\right\}$$

次式が成り立つ。

$$\mathfrak{O}_0=\left\{\bigcup_{\nu\in N}B_\nu\in\mathfrak{P}(S)\middle|\forall\nu\in N\left[B_\nu\in\mathfrak{B}\right]\right\}$$

□

**定理 1.4.6.** 写像の族 $\left\{f_\lambda:S\rightarrow S_\lambda\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ によるその位相空間の族 $\left\{\left(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_0$ において、その写像 $f_\lambda$ によるその位相空間 $\left(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda\right)$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}'_\lambda$ を用いて集合 $\mathfrak{B}$ が次式のように定義されると、

$$\mathfrak{B}=\left\{\bigcap_{\mu\in M}A_\mu\in\mathfrak{P}(S)\middle|\#M<\aleph_0,\ \ \forall\mu\in M\left[A_\mu\in\bigcup_{\lambda\in\varLambda}\mathfrak{O}'_\lambda\right]\right\}$$

その集合 $\mathfrak{B}$ はその位相空間 $\left(S,\mathfrak{O}_0\right)$ の 1 つの開基となる。さらに、$\forall W\in\mathfrak{B}$ に対し、その添数集合 $\varLambda$ の有限集合である添数集合 $N$ の添数 $\nu$ につき $O_\nu\in\mathfrak{O}_\nu$ なる開集合たち $O_\nu$ を用いて次式のように書かれることができる。

$$W=\bigcap_{\nu\in N}V\left(f_\nu^{-1}|O_\nu\right)$$

**証明.** 写像の族 $\left\{f_\lambda:S\rightarrow S_\lambda\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ によるその位相空間の族 $\left\{\left(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_0$ において、その写像 $f_\lambda$ によるその位相空間 $\left(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda\right)$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}'_\lambda$ を用いて集合 $\mathfrak{B}$ が次式のように定義されると、

$$\mathfrak{B}=\left\{\bigcap_{\mu\in M}A_\mu\in\mathfrak{P}(S)\middle|\#M<\aleph_0,\ \ \forall\mu\in M\left[A_\mu\in\bigcup_{\lambda\in\varLambda}\mathfrak{O}'_\lambda\right]\right\}$$

次式が成り立つので、

$$\mathfrak{O}_0=\left\{\bigcup_{\nu\in N}B_\nu\in\mathfrak{P}(S)\middle|\forall\nu\in N\left[B_\nu\in\mathfrak{B}\right]\right\}$$

その位相 $\mathfrak{O}_0$ に属する任意の開集合 $O$ は添数集合 $N$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\left\{B_\nu\right\}_{\nu\in N}$ の和集合 $\bigcup_{\nu\in N}B_\nu$ であるので、定義よりその集合 $\mathfrak{B}$ はその位相空間 $\left(S,\mathfrak{O}_0\right)$ の 1 つの開基である。

　さらに、その開基 $\mathfrak{B}$ の任意の元 $W$ は、有限集合である添数集合 $M$ の添数 $\mu$ に対し、$O_\mu\in\bigcup_{\lambda\in\varLambda}\mathfrak{O}'_\lambda$ なる開集合たち $O_\mu$ を用いて $W=\bigcap_{\mu\in M}O_\mu$ を満たす。ここで、$\#M=1$ のとき、$\mu\in M$ なる添数 $\mu$ を用いて $O_\mu\in\bigcup_{\lambda\in\varLambda}\mathfrak{O}'_\lambda$ が成り立つので、$O_\mu\in\mathfrak{O}'_\lambda$ が成り立つような添数 $\lambda$ がその添数集合 $\varLambda$ に存在する。次式が成り立つのであったので、

$$\mathfrak{O}'_\lambda=\left\{O'\in\mathfrak{P}(S)\middle|\exists O_\lambda\in\mathfrak{O}_\lambda\left[O'=V\left(f_\lambda^{-1}|O_\lambda\right)\right]\right\}$$

その位相 $\mathfrak{O}'_\lambda$ のある開集合 $O_\lambda$ を用いて $O_\mu = V\left(f_\lambda^{-1}|O_\lambda\right)$ が成り立つ。

$\#M = k$ のときに示すべきことが成り立つと仮定しよう。$\#M = k+1$ のとき、その添数集合 $M$ の $1$ つの添数 $\mu'$ を用いれば、仮定よりその添数集合 $\varLambda$ の有限集合であるある部分集合 $\varLambda'$ が存在して、次のようになる。

$$\begin{aligned}\bigcap_{\mu \in M} O_\mu &= \bigcap_{\mu \in M \setminus \{\mu'\}} O_\mu \cap O_{\mu'} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \varLambda'} V\left(f_\lambda^{-1}|O_\lambda\right) \cap O_{\mu'}\end{aligned}$$

$O_{\mu'} \in \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}'_\lambda$ が成り立つので、$O_{\mu'} \in \mathfrak{O}'_{\lambda'}$ が成り立つような添数 $\lambda'$ がその添数集合 $\varLambda$ に存在する。次式が成り立つのであったので、

$$\mathfrak{O}'_{\lambda'} = \left\{O' \in \mathfrak{P}(S) \middle| \exists O_{\lambda'} \in \mathfrak{O}_{\lambda'}\left[O' = V\left(f_{\lambda'}^{-1}|O_{\lambda'}\right)\right]\right\}$$

$\exists O_{\lambda'} \in \mathfrak{O}'_{\lambda'}$ に対し、$O_{\mu'} = V\left(f_{\lambda'}^{-1}|O_{\lambda'}\right)$ が成り立つ。ここで、$\#\left(\varLambda' \cup \{\lambda'\}\right) < \aleph_0$ が成り立つことに注意すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}\bigcap_{\mu \in M} O_\mu &= \bigcap_{\lambda \in \varLambda'} V\left(f_\lambda^{-1}|O_\lambda\right) \cap V\left(f_{\lambda'}^{-1}|O_{\lambda'}\right) \\ &= \bigcap_{\lambda \in \varLambda' \cup \{\lambda'\}} V\left(f_\lambda^{-1}|O_\lambda\right)\end{aligned}$$

以上より数学的帰納法によって、その添数集合 $\varLambda$ の有限集合であるある部分集合 $\varLambda'$ の添数 $\lambda$ に対し、$O_\lambda \in \mathfrak{O}_\lambda$ なる開集合たち $O_\lambda$ を用いて次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}W &= \bigcap_{\mu \in M} O_\mu \\ &= \bigcap_{\lambda \in \varLambda'} V\left(f_\lambda^{-1}|O_\lambda\right)\end{aligned}$$

□

### 1.4.2 相対位相空間

**定義 1.4.3.** $1$ つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、その集合 $S$ の空でない部分集合 $M$ からその集合 $S$ への包含写像 $M \hookrightarrow S; a \mapsto a$ が与えられたとする。このとき、その集合 $M$ を台集合とするその写像 $M \hookrightarrow S$ によるその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_M$ をその集合 $M$ におけるその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の相対位相といいその位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ をその集合 $M$ におけるその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間、部分空間などという。

定義より明らかに、その写像 $M \hookrightarrow S$ がその部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}')$ からその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ への連続写像となるような位相たち $\mathfrak{O}'$ のうち、その相対位相 $\mathfrak{O}_M$ が最も弱い。

**定理 1.4.7.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の空でない部分集合 $M$ が与えられたとする。集合 $M$ における位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の相対位相 $\mathfrak{O}_M$ について、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$、$a \in M$ なる元 $a$ における全近傍系を $\mathbf{V}(a)$、その部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ の閉集合系を $\mathfrak{A}_M$、その元 $a$ における全近傍系を $\mathbf{V}_M(a)$ とおくと、$\forall a \in M$ に対し、次式が成り立つ。

$$\mathfrak{O}_M = \{O' \in \mathfrak{P}(M) | \exists O \in \mathfrak{O}\left[O' = O \cap M\right]\}$$

$$\mathfrak{A}_M = \{A' \in \mathfrak{P}(M) | \exists A \in \mathfrak{A}\, [A' = A \cap M]\}$$
$$\mathbf{V}_M(a) = \{V' \in \mathfrak{P}(M) | \exists V \in \mathbf{V}(a)\, [V' = V \cap M]\}$$

**証明.** 1 つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、その集合 $S$ の空でない部分集合 $M$ が与えられたとする。集合 $M$ における位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の相対位相 $\mathfrak{O}_M$ について、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$、$a \in M$ なる元 $a$ における全近傍系を $\mathbf{V}(a)$、その部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ の閉集合系を $\mathfrak{A}_M$、その元 $a$ における全近傍系を $\mathbf{V}_M(a)$ とおくと、その集合 $M$ における位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の相対位相 $\mathfrak{O}_M$ は定義より明らかに包含写像 $M \hookrightarrow S$ によるその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からの誘導位相であり、これについて、次式が成り立つのであった。

$$\mathfrak{O}_M = \left\{O' \in \mathfrak{P}(M) \middle| \exists O \in \mathfrak{O}\left[O' = V\left((M \hookrightarrow S)^{-1}|O\right)\right]\right\}$$

ここで、$\forall a \in V\left((M \hookrightarrow S)^{-1}|O\right)$ に対し、値域の定義より $(M \hookrightarrow S)(a) = b$ となるような元 $b$ がその集合 $O$ に存在し、その写像 $M \hookrightarrow S$ の定義より、$a = b$ が成り立つので、$a \in O \cap M$ が成り立ち $V\left((M \hookrightarrow S)^{-1}|O\right) = O \cap M$ が成り立つ。これにより、次式が成り立つ。

$$\mathfrak{O}_M = \{O' \in \mathfrak{P}(M) | \exists O \in \mathfrak{O}\, [O' = O \cap M]\}$$

$\forall A' \in \mathfrak{A}_M$ に対し、$\exists O' \in \mathfrak{O}_M$ に対し、$A' = M \backslash O'$ が成り立ち、したがって、$O' = M \backslash A'$ が成り立つ。ここで、$\mathfrak{O}_M = \{O' \in \mathfrak{P}(M) | \exists O \in \mathfrak{O}\, [O' = O \cap M]\}$ が成り立つので、$\exists A \in \mathfrak{A}$ に対し、$M \backslash A' = O' = (S \backslash A) \cap M$ が成り立つ。したがって、次のようになり、

$$\begin{aligned} A' &= M \setminus (M \setminus A') \\ &= M \setminus ((S \setminus A) \cap M) \\ &= M \setminus (S \setminus A) \cup M \setminus M \\ &= M \setminus (S \setminus A) \\ &= M \setminus S \cup (M \cap A) \\ &= A \cap M \end{aligned}$$

以上の議論が必要十分条件であることに注意すれば、よって、次式が成り立つ。

$$\mathfrak{A}_M = \{A' \in \mathfrak{P}(M) | \exists A \in \mathfrak{A}\, [A' = A \cap M]\}$$

また、$\forall a \in M \forall V' \in \mathbf{V}_M(a)$ に対し、$a \in \mathrm{int} V'$ が成り立つかつ、$V' \subseteq M$ が成り立つ。ここで、$V' \subseteq M$ が成り立つならそのときに限り、$V' \cap M = V'$ が成り立つので、$a \in \mathrm{int}\,(V' \cap M)$ が成り立つ。さらに、$V' \subseteq S$ も成り立つので、$V' \in \mathbf{V}(a)$ も成り立つことに注意すれば、$\exists V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V' = V \cap M$ が成り立ち、以上の議論が必要十分条件であることに注意すれば、よって、次式が成り立つ。

$$\mathbf{V}_M(a) = \{V' \in \mathfrak{P}(M) | \exists V \in \mathbf{V}(a)\, [V' = V \cap M]\}$$

□

**定理 1.4.8.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の空でない部分集合 $M$ が与えられたとする。集合 $M$ における位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の相対位相 $\mathfrak{O}_M$ について、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$、$a \in M$ なる元 $a$ における全近傍系を $\mathbf{V}(a)$、その部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ の閉集合系を $\mathfrak{A}_M$、その元 $a$ における全近傍系を $\mathbf{V}_M(a)$ とおくと、次のことが成り立つ。

- $\forall O' \in \mathfrak{P}(M)$ に対し、$O' \in \mathfrak{O}_M$ が成り立つならそのときに限り、$\exists O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O' = O \cap M$ が成り立つ。
- $\forall A' \in \mathfrak{P}(M)$ に対し、$A' \in \mathfrak{A}_M$ が成り立つならそのときに限り、$\exists A \in \mathfrak{A}$ に対し、$A' = A \cap M$ が成り立つ。
- $\forall a \in M \forall V' \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V' \in \mathbf{V}_M(a)$ が成り立つならそのときに限り、$\exists V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V' = V \cap M$ が成り立つ。

**証明.** 定理 1.4.7 より明らかである。 □

**定理 1.4.9.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の空でない部分集合 $M$ が与えられ、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉包作用子、その部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ の閉包作用子をそれぞれ cl、$\mathrm{cl}_M$ とおくと、$\forall M' \in \mathfrak{P}(M)$ に対し、$\mathrm{cl}_M M' = \mathrm{cl} M' \cap M$ が成り立つ。

**証明.** 1 つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、その集合 $S$ の空でない部分集合 $M$ が与えられ、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉包作用子、その部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ の閉包作用子をそれぞれ $cl$、$\mathrm{cl}_M$、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系、その部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ の閉集合系をそれぞれ $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{A}_M$ とおくと、$\forall M' \in \mathfrak{P}(M)$ に対し、$\forall A' \in \mathfrak{A}_M$ に対し、次式が成り立つので、

$$\mathfrak{A}_M = \{A' \in \mathfrak{P}(M) | \exists A \in \mathfrak{A} \, [A' = A \cap M]\}$$

$\exists A \in \mathfrak{A}$ に対し、$M' \subseteq A' = A \cap M \subseteq A$ が成り立ち、したがって、$\mathrm{cl} M \subseteq \mathrm{cl} A = A$ が成り立つ。

逆に、$\exists A \in \mathfrak{A}$ に対し、$A' = A \cap M$ が成り立って、$\mathrm{cl} M' \subseteq A$ が成り立つなら、$M' \subseteq \mathrm{cl} M' \subseteq A$ が成り立つかつ、$M' \subseteq M$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned} M' &= M' \cap M \\ &\subseteq A \cap M = A' \end{aligned}$$

これにより、$\forall A' \in \mathfrak{A}_M$ に対し、$M' \subseteq A'$ が成り立つならそのときに限り、$\exists A \in \mathfrak{A}$ に対し、$A' = A \cap M$ かつ $\mathrm{cl} M' \subseteq A$ が成り立つ。$M' \subseteq \mathrm{cl} M'$ かつ $M' \subseteq M$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned} M' &= M' \cap M \\ &\subseteq \mathrm{cl} M' \cap M \\ &\subseteq A \cap M = A' \end{aligned}$$

定義よりしたがって、$\mathrm{cl}_M M' = \mathrm{cl} M' \cap M$ が成り立つ。 □

**定理 1.4.10.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の空でない部分集合 $M$ におけるその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ が与えられたとする。このとき、次のことが成り立つ。

- 集合 $\mathfrak{M}$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の準開基であるとき、次式のような集合 $\mathfrak{M}_M$ はその部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ の準開基となる。
$$\mathfrak{M}_M = \{O' \in \mathfrak{P}(M) | \exists O \in \mathfrak{M} \, [O' = O \cap M]\}$$
- 集合 $\mathfrak{B}$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開基であるとき、次式のような集合 $\mathfrak{B}_M$ はその部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ の開基となる。
$$\mathfrak{B}_M = \{W' \in \mathfrak{P}(M) | \exists W \in \mathfrak{B} \, [W' = W \cap M]\}$$

**証明.** 1 つの位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、その集合 $S$ の空でない部分集合 $M$ におけるその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が与えられたとする。

集合 $\mathfrak{M}$ がその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の準開基であるとき、定義よりその集合 $\mathfrak{M}$ で生成される位相 $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ がその位相 $\mathfrak{O}$ に等しい。ここで、次式のように集合 $\mathfrak{M}_M$ が定義されると、

$$\mathfrak{M}_M = \{O' \in \mathfrak{P}(M) | \exists O \in \mathfrak{M} [O' = O \cap M]\}$$

その集合 $\mathfrak{M}_M$ で生成される位相 $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}_M)$ は、有限集合である添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}_M$ の元の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ の積集合 $\bigcap_{\lambda\in\varLambda} A_\lambda$ の形に表される集合全体の集合を $\mathfrak{M}_0$ とおくと、任意の添数集合 $M$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}_0$ の元の族 $\{B_\mu\}_{\mu\in M}$ の和集合 $\bigcup_{\mu\in M} B_\mu$ の形に表される集合全体の集合に等しくなるのであったので、$\forall O' \in \mathfrak{O}(\mathfrak{M}_M)$ に対し、任意の添数集合 $M$ を用いて $\forall\mu \in M$ に対し、有限集合である添数集合 $\varLambda_\mu$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{M}_M$ の元の族 $\left\{A'_{\lambda_\mu}\right\}_{\lambda_\mu\in\varLambda}$ が与えられて $O' = \bigcup_{\substack{\mu \in M \\ \lambda_\mu \in \varLambda_\mu}} A'_{\lambda_\mu}$ が成り立つ。ここで、$\forall\lambda_\mu \in \varLambda_\mu$ に対し、$A'_{\lambda_\mu} = A_{\lambda_\mu} \cap M$ となるような集合 $A_{\lambda_\mu}$ がその集合 $\mathfrak{M}$ に存在するので、次のようになる。

$$\begin{aligned} O' &= \bigcup_{\substack{\mu \in M \\ \lambda_\mu \in \varLambda_\mu}} \left(A_{\lambda_\mu} \cap M\right) \\ &= \bigcup_{\substack{\mu \in M \\ \lambda_\mu \in \varLambda_\mu}} \left(A_{\lambda_\mu} \cap M\right) \\ &= \bigcup_{\substack{\mu \in M \\ \lambda_\mu \in \varLambda_\mu}} A_{\lambda_\mu} \cap M \end{aligned}$$

ここで、定理よりこのような集合 $\bigcup_{\substack{\mu \in M \\ \lambda_\mu \in \varLambda_\mu}} A_{\lambda_\mu}$ はその位相 $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ に属するので、仮定の $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{O}$ が成り立つことにより $\exists O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O' = O \cap M$ が成り立つ。以上の議論は必要十分であることに注意すれば、$\forall O' \in \mathfrak{O}(\mathfrak{M}_M)$ に対し、$O' \in \mathfrak{O}(\mathfrak{M}_M)$ が成り立つならそのときに限り、次式が成り立つ。

$$O' \in \{O' \in \mathfrak{P}(M) | \exists O \in \mathfrak{O} [O' = O \cap M]\}$$

ここで、次式が成り立つのであったので、

$$\mathfrak{O}_M = \{O' \in \mathfrak{P}(M) | \exists O \in \mathfrak{O} [O' = O \cap M]\}$$

$\mathfrak{O}(\mathfrak{M}_M) = \mathfrak{O}_M$ が成り立つ。したがって、定義よりその集合 $\mathfrak{M}_M$ はその部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ の準開基となる。

集合 $\mathfrak{B}$ がその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開基であるとき、次式のように集合 $\mathfrak{B}_M$ が定義されると、

$$\mathfrak{B}_M = \{W' \in \mathfrak{P}(M) | \exists W \in \mathfrak{B} [W' = W \cap M]\}$$

$\forall O' \in \mathfrak{O}_M$ に対し、$O' = O \cap M$ なる集合 $O$ がその位相 $\mathfrak{O}$ に存在する。ここで、開基の定義より添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその開基 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ を用いて次のようになる。

$$O' = \bigcup_{\lambda\in\varLambda} W_\lambda \cap M = \bigcup_{\lambda\in\varLambda} (W_\lambda \cap M)$$

ここで、その集合$\mathfrak{B}_M$の定義より$W_\lambda \cap M$が成り立つことになり開基の定義よりその集合$\mathfrak{B}_M$がその部分位相空間$(M,\mathfrak{O}_M)$の1つの開基となる。 □

**定理 1.4.11.** 位相空間$(S,\mathfrak{O})$の閉集合系$\mathfrak{A}$、その位相空間$(S,\mathfrak{O})$の台集合$S$の部分集合$M$におけるその位相空間$(S,\mathfrak{O})$の部分位相空間$(M,\mathfrak{O}_M)$、これにおける閉集合系$\mathfrak{A}_M$が与えられたとき、次のことが成り立つ。

- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$に対し、$\mathfrak{O} \cap \mathfrak{P}(M) \subseteq \mathfrak{O}_M$が成り立つ。
- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$に対し、$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}(M) \subseteq \mathfrak{A}_M$が成り立つ。
- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$に対し、$M \in \mathfrak{O}$が成り立つなら、$\mathfrak{O}_M \subseteq \mathfrak{O}$が成り立つ。
- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$に対し、$M \in \mathfrak{A}$が成り立つなら、$\mathfrak{A}_M \subseteq \mathfrak{A}$が成り立つ。

ただし、一般に、その部分位相空間$(M,\mathfrak{O}_M)$の任意の開集合たちはその位相空間$(S,\mathfrak{O})$の開集合たちでもあるとは限らないことに注意されたい。例えば、その集合$M$がその位相空間$(S,\mathfrak{O})$の閉集合であるとき、その集合$M$は位相空間の定義よりその部分位相空間$(M,\mathfrak{O}_M)$の開集合であるが、仮定よりその集合$M$はその位相空間$(S,\mathfrak{O})$の開集合でない。閉集合についても同様である。

**証明.** 1つの位相空間$(S,\mathfrak{O})$の閉集合系$\mathfrak{A}$、その位相空間$(S,\mathfrak{O})$の台集合$S$の部分集合$M$におけるその位相空間$(S,\mathfrak{O})$の部分位相空間$(M,\mathfrak{O}_M)$、これにおける閉集合系$\mathfrak{A}_M$が与えられたとする。

$\forall M \in \mathfrak{P}(S) \forall M' \in \mathfrak{P}(M)$に対し、$M' \in \mathfrak{O} \cap \mathfrak{P}(M)$が成り立つなら、定理 1.4.7 より次式が成り立つのであった。

$$\mathfrak{O}_M = \{O' \in \mathfrak{P}(M) | \exists O \in \mathfrak{O} \, [O' = O \cap M]\}$$

これにより、$M' = M' \cap M$が成り立つので、$M' \in \mathfrak{O}_M$が成り立ち、よって、$\mathfrak{O} \cap \mathfrak{P}(M) \subseteq \mathfrak{O}_M$が成り立つ。

$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$に対し、$M \in \mathfrak{O}$が成り立つとき、$\forall O' \in \mathfrak{P}(M)$に対し、$O' \in \mathfrak{O}_M$が成り立つなら、$\exists O \in \mathfrak{O}$に対し、$O' = O \cap M$が成り立つことになる。その集合$M$がその位相空間$(S,\mathfrak{O})$の開集合であるので、位相の定義よりその集合$O'$はその位相空間$(S,\mathfrak{O})$の開集合でもある。

閉集合の場合も同様にして示される。 □

**定理 1.4.12.** 1つの位相空間$(S,\mathfrak{O})$において、その集合$S$の空でない部分集合$M$が与えられ、その位相空間$(S,\mathfrak{O})$の開核作用子、閉包作用子、その部分位相空間$(M,\mathfrak{O}_M)$の開核作用子、閉包作用子をそれぞれ int、cl、$\mathrm{int}_M$、$\mathrm{cl}_M$とおくと、次のことが成り立つ。

- $\forall M' \in \mathfrak{P}(M)$に対し、$\mathrm{int}M' \subseteq \mathrm{int}_M M'$が成り立つ。
- $\forall M' \in \mathfrak{P}(M)$に対し、$\mathrm{cl}_M M' \subseteq \mathrm{cl}M'$が成り立つ。
- $M \in \mathfrak{O}$が成り立つならそのときに限り、$\forall M' \in \mathfrak{P}(M)$に対し、$\mathrm{int}M' = \mathrm{int}_M M'$が成り立つ。

**証明.** 1つの位相空間$(S,\mathfrak{O})$において、その集合$S$の空でない部分集合$M$が与えられ、その位相空間$(S,\mathfrak{O})$の開核作用子、閉包作用子、その部分位相空間$(M,\mathfrak{O}_M)$の開核作用子、閉包作用子をそれぞれ int、cl、$\mathrm{int}_M$、$\mathrm{cl}_M$とおくと、$\forall M' \in \mathfrak{P}(M)$に対し、その集合$\mathrm{int}M'$はその位相空間$(S,\mathfrak{O})$の開集合で、定理 1.4.11 よりその部分位相空間$(M,\mathfrak{O}_M)$の開集合となる。ここで、$\mathrm{int}M' \subseteq M'$が成り立つので、開核の定義より$\mathrm{int}M' \subseteq \mathrm{int}_M M'$が成り立つ。

また、定理 1.4.9 よりただちに$\forall M' \in \mathfrak{P}(M)$に対し、$\mathrm{cl}_M M' \subseteq \mathrm{cl}M'$が成り立つ。

さらに、$\forall M' \in \mathfrak{P}(M)$ に対し、$\mathrm{int}M' = \mathrm{int}_M M'$ が成り立つなら、位相の定義より $M = \mathrm{int}_M M = \mathrm{int}M$ が成り立つので、その集合 $M$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ での開集合であり $M \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。逆に、$M \in \mathfrak{O}$ が成り立つなら、$\forall M' \in \mathfrak{P}(M)$ に対し、その集合 $\mathrm{int}_M M'$ はその部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ の開集合で、その集合 $M$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ での開集合であることに注意すれば、定理 1.4.11 よりその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開集合となる。ここで、$\mathrm{int}_M M' \subseteq M'$ が成り立つので、開核の定義より $\mathrm{int}_M M' \subseteq \mathrm{int}M'$ が成り立つ。したがって、$\mathrm{int}M' = \mathrm{int}_M M'$ が成り立つ。 □

**定理 1.4.13.** 1 つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、その集合 $S$ の部分集合 $M$ におけるその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ とその集合 $M$ の部分集合 $M'$ におけるこれの部分位相空間 $(M', (\mathfrak{O}_M)_{M'})$ が与えられたとする。このとき、その集合 $M'$ におけるその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M', \mathfrak{O}_{M'})$ を用いて次式が成り立つ。

$$(M', (\mathfrak{O}_M)_{M'}) = (M', \mathfrak{O}_{M'})$$

**証明.** 1 つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、その集合 $S$ の部分集合 $M$ におけるその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ とその集合 $M$ の部分集合 $M'$ におけるこれの部分位相空 $(M', (\mathfrak{O}_M)_{M'})$ が与えられたとする。このとき、その位相 $(\mathfrak{O}_M)_{M'}$ は次式を満たすのであった。

$$(\mathfrak{O}_M)_{M'} = \{O'' \in \mathfrak{P}(M') | \exists O' \in \mathfrak{O}_M [O'' = O' \cap M']\}$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{O}_M)_{M'} &= \{O'' \in \mathfrak{P}(M') | \exists O' \in \mathfrak{O}_M [O'' = O' \cap M']\} \\
&= \{O'' \in \mathfrak{P}(M') | O' \in \mathfrak{O}_M \wedge O'' = O' \cap M'\} \\
&= \{O'' \in \mathfrak{P}(M') | O \in \mathfrak{O} \wedge O' = O \cap M \wedge O'' = O' \cap M'\} \\
&= \{O'' \in \mathfrak{P}(M') | \exists O \in \mathfrak{O} [O' = O \cap M \wedge O'' = O \cap M \cap M']\} \\
&= \{O'' \in \mathfrak{P}(M') | \exists O \in \mathfrak{O} [O'' = O \cap M']\} = \mathfrak{O}_{M'}
\end{aligned}$$

以上より、次式が成り立つ。

$$(M', (\mathfrak{O}_M)_{M'}) = (M', \mathfrak{O}_{M'})$$

□

**定理 1.4.14.** 2 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ とその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ への連続写像 $f$ が与えられたとする。このとき、次のことが成り立つ。

- $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その写像 $f|M$ もその集合 $M$ におけるその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ への連続写像である。
- $\forall N \in \mathfrak{P}(T)$ に対し、$V(f) \subseteq N$ が成り立つなら、写像 $f' : S \rightarrow N; a \mapsto f(a)$ もその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその集合 $N$ におけるその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ の部分位相空間 $(N, \mathfrak{P}_N)$ への連続写像である。

しかしながら、開写像、閉写像についてはそういえないことに注意されたい。

**証明.** 2 つの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ とその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ への連続写像 $f$ が与えられたとする。$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その部分集合 $M$ に制限された写像 $f|M$ において、$\forall P \in \mathfrak{P}$ に対

し、次のようになる。

$$\begin{aligned}V\left((f|M)^{-1}|P\right)&=\{a\in M|\exists b\in P\,[f|M(a)=b]\}\\&=\{a\in S|a\in M\wedge\exists b\in P\,[f|M(a)=b]\}\\&=\left\{a\in S\middle|a\in V\left(f^{-1}|P\right)\wedge a\in M\right\}\\&=V\left(f^{-1}|P\right)\cap M\end{aligned}$$

ここで、その写像 $f$ は連続であるので、$V\left(f^{-1}|P\right)\in\mathfrak{O}$ が成り立つかつ、その集合 $M$ におけるその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ について、次式が成り立つので、

$$\mathfrak{O}_M=\{O'\in\mathfrak{P}(M)|\exists O\in\mathfrak{O}\,[O'=O\cap M]\}$$

$V\left((f|M)^{-1}|P\right)\in\mathfrak{O}_M$ が成り立つ。これにより、その写像 $f|M$ もその部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ からその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ への連続写像である。

$\forall N\in\mathfrak{P}(T)$ に対し、$V(f)\subseteq N$ が成り立つなら、写像 $f':S\rightarrow N;a\mapsto f(a)$ において、その集合 $N$ におけるその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ の部分位相空間 $(N,\mathfrak{P}_N)$ で、$\forall P'\in\mathfrak{P}_N$ に対し、次式が成り立つので、

$$\mathfrak{P}_N=\{P'\in\mathfrak{P}(N)|\exists P\in\mathfrak{P}\,[P'=P\cap N]\}$$

$\exists P\in\mathfrak{P}$ に対し、$P'=P\cap N$ が成り立ち次のようになる。

$$\begin{aligned}V\left({f'}^{-1}|P'\right)&=V\left(f^{-1}|P'\right)\\&=V\left(f^{-1}|P\cap N\right)\\&=V\left(f^{-1}|P\right)\cap V\left(f^{-1}|N\right)\end{aligned}$$

ここで、$V(f)\subseteq N$ が成り立つので、$S=V\left(f^{-1}|N\right)$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}V\left({f'}^{-1}|P'\right)&=V\left(f^{-1}|P\right)\cap V\left(f^{-1}|N\right)\\&=V\left(f^{-1}|P\right)\cap S\\&=V\left(f^{-1}|P\right)\end{aligned}$$

ここで、その写像 $f$ は連続であるので、$V\left({f'}^{-1}|P'\right)=V\left(f^{-1}|P\right)\in\mathfrak{O}$ が成り立つ。これにより、その写像 $f'$ はその位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ の部分位相空間 $(N,\mathfrak{P}_N)$ への連続写像である。 □

**定理 1.4.15.** また、密着空間と離散空間の部分位相空間について次のことが成り立つ。

- 密着空間 $(S,\mathfrak{O}_*)$ の任意の部分位相空間は密着空間 $(M,\{\emptyset,M\})$ である。
- 離散空間 $(S,\mathfrak{O}^*)$ の任意の部分位相空間は離散空間 $(M,\mathfrak{P}(M))$ である。

**証明.** 密着空間 $(S,\mathfrak{O}_*)$ の任意の部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ の相対位相 $\mathfrak{O}_M$ は次式のように与えられるのであった。

$$\mathfrak{O}_M=\{O'\in\mathfrak{P}(M)|\exists O\in\mathfrak{O}_*\,[O'=O\cap M]\}$$

このとき、$\forall O'\in\mathfrak{O}_M$ に対し、次のようになるので、

$$\exists O\in\mathfrak{O}_*\,[O'=O\cap M]\Leftrightarrow O'=\emptyset\cap M\vee O'=S\cap M$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow O' = \emptyset \vee O' = M \\ &\Leftrightarrow O' \in \{\emptyset, M\} \end{aligned}$$

$(M, \mathfrak{O}_M) = (M, \{\emptyset, M\})$ が成り立つ。

同様にして、離散空間 $(S, \mathfrak{O}^*)$ の任意の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ の相対位相 $\mathfrak{O}_M$ は次式のように与えられるのであった。

$$\mathfrak{O}_M = \{O' \in \mathfrak{P}(M) | \exists O \in \mathfrak{O}^* [O' = O \cap M]\}$$

このとき、$\forall O' \in \mathfrak{O}_M \exists O \in \mathfrak{O}_*$ に対し、次のようになるので、

$$\begin{aligned} O' = O \cap M &\Leftrightarrow O' = O \cap M \wedge O \subseteq S \\ &\Leftrightarrow O' = O \cap M \subseteq M \end{aligned}$$

$(M, \mathfrak{O}_M) = (M, \mathfrak{P}(M))$ が成り立つ。 □

### 1.4.3 直積位相空間

**定義 1.4.4.** 添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとする。その直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ からその集合 $S_\lambda$ への射影 $\mathrm{pr}_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \rightarrow S_\lambda; (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto a_\lambda$ の族 $(\mathrm{pr}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ によるその族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ からのその直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ の誘導位相 $\mathfrak{O}_0$、即ち、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、それらの射影たち $\mathrm{pr}_\lambda$ が位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda, \mathfrak{O}\right)$ からその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ への連続写像となるようなその位相 $\mathfrak{O}$ のうち最も弱いもの $\mathfrak{O}_0$ をその位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の弱い直積位相、Tikhonov 位相といい、単に、直積位相ともいう。その位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ をその位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の弱い直積位相空間といい、単に、直積位相空間、直積空間などという。

定義から明らかに $\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、それらの射影たち $\mathrm{pr}_\lambda$ は連続である。

**定理 1.4.16.** 添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ において、その添数集合 $\Lambda$ の有限集合である部分集合 $\Lambda'$ に属する任意の添数 $\lambda$ に対し、$O_\lambda \in \mathfrak{O}_\lambda$ なる開集合たち $O_\lambda$ によって $\prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda'} O_\lambda$ の形に表されるその直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ の部分集合全体の集合 $\mathfrak{B}$ はその位相 $\mathfrak{O}_0$ の 1 つの開基となる。

ここで、上記のように $\prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda'} O_\lambda$ の形に表されるその直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ の開集合をその直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ の初等開集合という。特に、有限集合である添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ の初等開集合は $\prod_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ の形に表される。

なお、添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の $O_\lambda \in \mathfrak{O}_\lambda$ なる開集合たち $O_\lambda$ によって $\prod_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ の形に表されるその直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ の部分集合の和集合で表されるもの全体の集合 $\mathfrak{O}$ も実

は位相となりその位相$\mathfrak{O}$を弱い直積位相、箱位相などといいその位相空間$\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda},\mathfrak{O} \right)$を強い直積位相空間などという。ここでは、あまり出てこないので、詳しく取り上げないことにする。

**証明.** 添数集合$\varLambda$によって添数づけられた位相空間の族$\left\{ \left( S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda} \right) \right\}_{\lambda \in \varLambda}$の直積位相空間$\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0} \right)$において、射影$\mathrm{pr}_{\lambda}$によるその位相空間$\left( S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda} \right)$からの誘導位相$\mathfrak{O}_{\lambda 0}$を用いて集合$\mathfrak{B}$が次式のように定義されると、

$$\mathfrak{B} = \left\{ \bigcap_{\mu \in M} A_{\mu} \in \mathfrak{P}\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda} \right) \middle| \#M < \aleph_{0},\ \ \forall\mu \in M\left[ A_{\mu} \in \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_{\lambda 0} \right] \right\}$$

その集合$\mathfrak{B}$はその位相空間$\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0} \right)$の1つの開基となるのであった。さらに、$\forall W \in \mathfrak{B}$に対し、その添数集合$\varLambda$の有限集合である部分集合$\varLambda'$に属する任意の添数$\lambda$に対し、$O_{\lambda} \in \mathfrak{O}_{\lambda}$なる開集合たち$O_{\lambda}$を用いて次式のように書かれることができる。

$$W = \bigcap_{\lambda \in \varLambda'} V\left( \mathrm{pr}_{\lambda}^{- 1}|O_{\lambda} \right)$$

ここで、$\forall\lambda \in \varLambda'$に対し、次のようになるので、

$$\begin{aligned}
V\left( \mathrm{pr}_{\lambda}^{- 1}|O_{\lambda} \right) &= \left\{ a \in \prod_{\lambda' \in \varLambda} S_{\lambda'} \middle| \exists b \in O_{\lambda}\left\lbrack \mathrm{pr}_{\lambda}a = b \right\rbrack \right\}\\
&= \left\{ \left( a_{\lambda'} \right)_{\lambda' \in \varLambda} \in \prod_{\lambda' \in \varLambda \setminus \{\lambda\}} S_{\lambda'} \times S_{\lambda} \middle| \exists b \in O_{\lambda}\left\lbrack \mathrm{pr}_{\lambda}\left( a_{\lambda'} \right)_{\lambda' \in \varLambda} = a_{\lambda} = b \right\rbrack \right\}\\
&= \left\{ \left( a_{\lambda'} \right)_{\lambda' \in \varLambda} \in \prod_{\lambda' \in \varLambda \setminus \{\lambda\}} S_{\lambda'} \times S_{\lambda} \middle| \left( a_{\lambda'} \right)_{\lambda' \in \varLambda} \in \prod_{\lambda' \in \varLambda \setminus \{\lambda\}} S_{\lambda'} \times O_{\lambda} \right\}\\
&= \prod_{\lambda' \in \varLambda \setminus \{\lambda\}} S_{\lambda'} \times O_{\lambda}
\end{aligned}$$

数学的帰納法によって明らかに次式が成り立つ。

$$W = \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} O_{\lambda}$$

よって、その添数集合$\varLambda$の有限集合である部分集合$\varLambda'$に属する任意の添数$\lambda$に対し、$O_{\lambda} \in \mathfrak{O}_{\lambda}$なる開集合たち$O_{\lambda}$によって$\prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} O_{\lambda}$の形に表されるその直積集合$\prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$の部分集合全体の集合$\mathfrak{B}$はその位相$\mathfrak{O}_{0}$の1つの開基となる。 □

**定理 1.4.17.** 添数集合$\varLambda$によって添数づけられた位相空間の族$\left\{ \left( S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda} \right) \right\}_{\lambda \in \varLambda}$の直積位相空間$\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0} \right)$において、$\forall\lambda \in \varLambda$に対し、その直積$\prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$からその集合$S_{\lambda}$への射影$\mathrm{pr}_{\lambda}$は開写像である。

ただし、これは閉写像であるとは限らないことには注意されたい。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{ \left( S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda} \right) \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ の直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{0} \right)$ の初等開集合全体の集合 $\mathfrak{B}$ はその直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{0} \right)$ の 1 つの開基である。ここで、$\forall\lambda' \in \varLambda$ に対し、$W = \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} O_{\lambda}$ で与えられる任意の初等開集合 $W$ に制限されたその直積 $\prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$ からその集合 $S_{\lambda'}$ への射影 $\mathrm{pr}_{\lambda'}$ について、$\lambda' \in \varLambda'$ のとき、初等開集合の定義より次式が成り立つ。

$$V\left( \mathrm{pr}_{\lambda'}|W \right) = V\left( \mathrm{pr}_{\lambda'}| \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} O_{\lambda} \right) = O_{\lambda'} \in \mathfrak{O}_{\lambda'}$$

$\lambda' \notin \varLambda'$ のとき、位相の定義より次式が成り立つ。

$$V\left( \mathrm{pr}_{\lambda'}|W \right) = V\left( \mathrm{pr}_{\lambda'}| \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} O_{\lambda} \right) = S_{\lambda'} \in \mathfrak{O}_{\lambda'}$$

いずれの場合でも $V\left( \mathrm{pr}_{\lambda'}|W \right) \in \mathfrak{O}_{\lambda'}$ が成り立つので、定理よりその射影 $\mathrm{pr}_{\lambda}$ は開写像である。 □

**定理 1.4.18.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{ \left( S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda} \right) \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ の直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{0} \right)$ において、その射影 $\mathrm{pr}_{\lambda}$ によるその位相空間 $\left( S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda} \right)$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_{\lambda}'$ を用いて $a \in \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$ なる元 $a$ における位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda}' \right)$ での全近傍系を $\mathbf{V}_{\lambda}'(a)$ とおくと、その添数集合 $\varLambda$ の有限集合である部分集合 $\varLambda'$ に属する任意の添数 $\lambda$ に対し、$V_{\lambda} \in \mathbf{V}_{\lambda}'(a)$ なる任意の近傍たち $V_{\lambda}$ によって $\prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} V_{\lambda}$ の形に表されるその直積集合 $\prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$ の部分集合全体の集合 $\mathbf{V}^{*}(a)$ はその直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{0} \right)$ の 1 つの基本近傍系となる。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{ \left( S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda} \right) \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ の直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{0} \right)$ において、$a = \left( a_{\lambda} \right)_{\lambda \in \varLambda} \in \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$ なる元 $a$ におけるその直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{0} \right)$ での全近傍系を $\mathbf{V}(a)$、基本近傍系を $\mathbf{V}^{*}(a)$、その元 $a$ の各 $\lambda$ 成分 $a_{\lambda}$ におけるその位相空間 $\left( S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda} \right)$ での全近傍系を $\mathbf{V}_{\lambda}\left( a_{\lambda} \right)$、基本近傍系を $\mathbf{V}_{\lambda}^{*}\left( a_{\lambda} \right)$、開核作用子を $\mathrm{int}_{\lambda}$、その射影 $\mathrm{pr}_{\lambda}$ によるその位相空間 $\left( S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda} \right)$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_{\lambda}'$ を用いてその元 $a$ における位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda}' \right)$ での全近傍系を $\mathbf{V}_{\lambda}'(a)$、基本近傍系を $\mathbf{V'}_{\lambda}^{*}(a)$ とおくと、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$a \in \mathrm{int}V$ が成り立ち、その集合 $\mathrm{int}V$ はその直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda}' \right)$ での開集合となり、集合 $\mathfrak{B}$ が次式のように定義されると、

$$\mathfrak{B} = \left\{ \bigcap_{\mu \in M} A_{\mu} \in \mathfrak{P}\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda} \right) \middle| \#M < \aleph_{0}, \ \ \forall\mu \in M\left[ A_{\mu} \in \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \mathfrak{O}_{\lambda}' \right] \right\}$$

その集合 $\mathfrak{B}$ はその位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ の1つの開基となるのであったので、任意の添数集合 $M$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{B}$ の元の族 $\left\{W_\mu\right\}_{\mu \in M}$ を用いて $a \in \mathrm{int}V = \bigcup_{\mu \in M} W_\mu$ が成り立つ。集合 $\mathfrak{B}$ の定義より、$\exists\mu \in M$ に対し、$a \in W_\mu \in \mathfrak{O}'_{\lambda'}$ なる位相 $\mathfrak{O}'_{\lambda'}$ が存在し、その射影 $\mathrm{pr}_{\lambda'}$ は開写像でもあるので、$a_{\lambda'} \in V\left(\mathrm{pr}_{\lambda'}|W_\mu\right) = \mathrm{int}V\left(\mathrm{pr}_{\lambda'}|W_\mu\right) \in \mathfrak{O}_{\lambda'}$ が成り立ち、したがって、$V\left(\mathrm{pr}_{\lambda'}|W_\mu\right) \in \mathbf{V}_{\lambda'}\left(a_{\lambda'}\right)$ が成り立つ。基本近傍系の定義より $U_{\lambda'} \subseteq \mathrm{pr}_{\lambda'}W_\mu$ なるその元 $a$ の近傍 $U_{\lambda'}$ が基本近傍系 $\mathbf{V}^*_{\lambda'}\left(a_{\lambda'}\right)$ に存在し、その射影 $\mathrm{pr}_{\lambda'}$ は連続であるので、$V\left(\mathrm{pr}_{\lambda'}^{-1}|U_{\lambda'}\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ、即ち、$a \in \mathrm{int}V\left(\mathrm{pr}_{\lambda'}^{-1}|U_{\lambda'}\right)$ が成り立つ。そのような添数 $\lambda'$ 全体の有限集合を $\varLambda'$ とおくと、やはり、$a \in \bigcap_{\lambda' \in \varLambda'} \mathrm{int}V\left(\mathrm{pr}_{\lambda'}^{-1}|U_{\lambda'}\right)$ が成り立つ。開核作用子の性質より $a \in \mathrm{int} \bigcap_{\lambda' \in \varLambda'} V\left(\mathrm{pr}_{\lambda'}^{-1}|U_{\lambda'}\right)$ が成り立つかつ、次式が成り立つので、

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\lambda' \in \varLambda'} V\left(\mathrm{pr}_{\lambda'}^{-1}|U_{\lambda'}\right) &= \bigcap_{\lambda \in \varLambda'} V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}^{-1}|U_{\lambda}\right) \\
&\subseteq V\left(\mathrm{pr}_{\lambda'}^{-1}|U_{\lambda'}\right) \\
&\subseteq W_\mu \subseteq \mathrm{int}V \subseteq V
\end{aligned}$$

基本近傍系の定義より $\bigcap_{\lambda \in \varLambda'} V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}^{-1}|U_{\lambda}\right) \in \mathbf{V}^*(a)$ が成り立つ。ここで、$\forall\lambda \in \varLambda'$ に対し、$V_\lambda \in \mathbf{V}'_\lambda(a)$ なる近傍たち $V_\lambda$ を用いて次のようになるので、

$$\begin{aligned}
V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}^{-1}|U_{\lambda}\right) &= \left\{a \in \prod_{\lambda' \in \varLambda} S_{\lambda'} \middle| \exists b \in U_\lambda\left[\mathrm{pr}_\lambda(a) = b\right]\right\} \\
&= \left\{\left(a_{\lambda'}\right)_{\lambda' \in \varLambda} \in \prod_{\lambda' \in \varLambda \setminus \{\lambda\}} S_{\lambda'} \times S_\lambda \middle| \exists b \in U_\lambda\left[\mathrm{pr}_\lambda\left(a_{\lambda'}\right)_{\lambda' \in \varLambda} = a_\lambda = b\right]\right\} \\
&= \left\{\left(a_{\lambda'}\right)_{\lambda' \in \varLambda} \in \prod_{\lambda' \in \varLambda \setminus \{\lambda\}} S_{\lambda'} \times S_\lambda \middle| \left(a_{\lambda'}\right)_{\lambda' \in \varLambda} \in \prod_{\lambda' \in \varLambda \setminus \{\lambda\}} S_{\lambda'} \times V_\lambda\right\} \\
&= \prod_{\lambda' \in \varLambda \setminus \{\lambda\}} S_{\lambda'} \times V_\lambda
\end{aligned}$$

数学的帰納法によって明らかに次式が成り立つ。

$$\bigcap_{\substack{\lambda \in \varLambda' \\ \#\varLambda' < \aleph_0}} V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}^{-1}|U_{\lambda}\right) = \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} V_\lambda$$

よって、その添数集合 $\varLambda$ の有限集合である部分集合 $\varLambda'$ に属する任意の添数 $\lambda$ に対し、$V_\lambda \in \mathbf{V}'_\lambda(a)$ なる任意の近傍たち $V_\lambda$ によって $\prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} V_\lambda$ の形に表されるその直積集合 $\prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda$ の部分集合全体の集合 $\mathbf{V}^*(a)$ はその直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ の1つの基本近傍系となる。 □

**定理 1.4.19.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{\left(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda\right)\right\}_{\lambda \in \varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ において、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $\left(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda\right)$ の開基 $\mathfrak{B}_\lambda$ が与えられれば、その添数集合 $\varLambda$ の有限集合である部分集合 $\varLambda'$ に属する任意の添数 $\lambda$ に対し、$W_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda$ なる開集合たち $W_\lambda$ に

よって $\prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} W_{\lambda}$ の形に表されるその直積集合 $\prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$ の部分集合全体の集合 $\mathfrak{B}'$ はその位相 $\mathfrak{O}_0$ の 1 つの開基となる。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda})\}_{\lambda \in \varLambda}$ の直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_0 \right)$ において、$\forall \lambda \in \varLambda$ に対し、その添数集合 $\varLambda$ の有限集合である部分集合 $\varLambda'$ に属する任意の添数 $\lambda$ に対し、$O_{\lambda} \in \mathfrak{O}_{\lambda}$ なる開集合たち $O_{\lambda}$ によって $\prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} O_{\lambda}$ の形に表されるその直積集合 $\prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$ の部分集合全体の集合 $\mathfrak{B}$ はその位相 $\mathfrak{O}_0$ の 1 つの開基となるのであった。これにより、$\forall O \in \mathfrak{O}_0$ に対し、$\forall \lambda \in \varLambda$ に対し、$O_{\lambda_{\mu}} \in \mathfrak{O}_{\lambda}$ なる集合たち $O_{\lambda_{\mu}}$ とある添数集合 $M$ を用いて次式のように書かれることができる。

$$O = \bigcup_{\mu \in M} \left( \prod_{\lambda_{\mu} \in \varLambda \setminus \varLambda'_{\mu}} S_{\lambda_{\mu}} \times \prod_{\lambda_{\mu} \in \varLambda'_{\mu}} O_{\lambda_{\mu}} \right)$$

ここで、それらの位相空間たち $(S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda})$ の開基 $\mathfrak{B}_{\lambda}$ が与えられれば、$\forall \lambda \in \varLambda$ に対し、$W_{\nu_{\lambda_{\mu}}} \in \mathfrak{B}_{\lambda}$ なる集合たち $W_{\nu_{\lambda_{\mu}}}$ とある添数集合 $N_{\lambda_{\mu}}$ を用いて次式のように書かれることができ、したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} O &= \bigcup_{\mu \in M} \left( \prod_{\lambda_{\mu} \in \varLambda \setminus \varLambda'_{\mu}} S_{\lambda_{\mu}} \times \prod_{\lambda_{\mu} \in \varLambda'_{\mu}} \bigcup_{\nu_{\lambda_{\mu}} \in N_{\lambda_{\mu}}} W_{\nu_{\lambda_{\mu}}} \right) \\ &= \bigcup_{\forall \mu \in M \left[ \nu_{\lambda_{\mu}} \in N_{\lambda_{\mu}} \right]} \left( \prod_{\lambda_{\mu} \in \varLambda \setminus \varLambda'_{\mu}} S_{\lambda_{\mu}} \times \prod_{\lambda_{\mu} \in \varLambda'_{\mu}} W_{\nu_{\lambda_{\mu}}} \right) \end{aligned}$$

ここで、開基の定義より明らかにその添数集合 $\varLambda$ の有限集合である部分集合 $\varLambda'$ に属する任意の添数 $\lambda$ に対し、$W_{\lambda} \in \mathfrak{B}_{\lambda}$ なる開集合たち $W_{\lambda}$ によって $\prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} W_{\lambda}$ の形に表されるその直積集合 $\prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$ の部分集合全体の集合 $\mathfrak{B}'$ はその位相 $\mathfrak{O}_0$ の 1 つの開基となる。 □

**定理 1.4.20.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda})\}_{\lambda \in \varLambda}$ の直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_0 \right)$ において、$\forall \lambda \in \varLambda$ に対し、$M_{\lambda} \in \mathfrak{P}(S_{\lambda})$ が成り立つとすれば、次式が成り立つ。

$$\mathrm{cl} \prod_{\lambda \in \varLambda} M_{\lambda} = \prod_{\lambda \in \varLambda} \mathrm{cl} M_{\lambda}$$

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda})\}_{\lambda \in \varLambda}$ の直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_0 \right)$ において、$\forall \lambda \in \varLambda$ に対し、$M_{\lambda} \in \mathfrak{P}(S_{\lambda})$ が成り立つとする。その射影 $\mathrm{pr}_{\lambda}$ によるその位相空間 $(S_{\lambda}, \mathfrak{O}_{\lambda})$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}'_{\lambda}$ を用いて $a \in \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$ なる元 $a$ における位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}'_{\lambda} \right)$ での全近傍系を $\mathbf{V}'_{\lambda}(a)$ とおくと、その添数集合 $\varLambda$ の有限集合である部分集合 $\varLambda'$ に属する任意の添数 $\lambda$ に対し、$V_{\lambda} \in \mathbf{V}'_{\lambda}(a)$ なる任意の近傍たち $V_{\lambda}$ によって $\prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} V_{\lambda}$ の形に表されるその直積集合 $\prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$ の部分集合全体の集合 $\mathbf{V}^*(a)$ はその直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O}_0 \right)$ の 1 つの基本近傍系となるのであった。ここで、$\forall (a_{\lambda})_{\lambda \in \varLambda} \in \prod_{\lambda \in \varLambda} S_{\lambda}$ に

対し、$(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \in \mathrm{cl}\prod_{\lambda\in\varLambda} M_\lambda$ が成り立つならそのときに限り、$\forall \prod_{\lambda\in\varLambda} U_\lambda \in \mathbf{V}^* (a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ に対し、これとその直積 $\prod_{\lambda\in\varLambda} M_\lambda$ との積集合が空集合とならなく、これが成り立つならそのときに限り、直積の定義より明らかに、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$U_\lambda \cap M_\lambda \neq \emptyset$ が成り立つことになる。したがって、これが成り立つならそのときに限り、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$a_\lambda \in \mathrm{cl}M_\lambda$ が成り立つことになり、したがって、$(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \in \prod_{\lambda\in\varLambda} \mathrm{cl}M_\lambda$ が得られる。よって、次式が成り立つ。

$$\mathrm{cl}\prod_{\lambda\in\varLambda} M_\lambda = \prod_{\lambda\in\varLambda} \mathrm{cl}M_\lambda$$

□

**定理 1.4.21.** 有限集合である添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ において、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$M_\lambda \in \mathfrak{P}(S_\lambda)$ が成り立つとすれば、次式が成り立つ。

$$\mathrm{int}\prod_{\lambda\in\varLambda} M_\lambda = \prod_{\lambda\in\varLambda} \mathrm{int}M_\lambda$$

なお、このことは任意の添数集合に対しては成り立つとは限らないことに注意されたい。例えば、$S_\lambda = \mathbb{R}$、$M_\lambda = (0,1)$、$\varLambda = \mathbb{N}$ とおくと、直積 $\prod_{\lambda\in\mathbb{N}} (0,1)$ はその直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\mathbb{N}} \mathbb{R}, \mathfrak{O}_0\right)$ の開集合ではないが、上の式が成り立つ。

**証明.** 有限集合である添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ において、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$M_\lambda \in \mathfrak{P}(S_\lambda)$ が成り立つとする。その射影 $\mathrm{pr}_\lambda$ によるその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_{\lambda 0}$ を用いて $a \in \prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda$ なる元 $a$ における位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda'\right)$ での全近傍系を $\mathbf{V}_\lambda'(a)$ とおくと、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$V_\lambda \in \mathbf{V}_\lambda'(a)$ なる任意の近傍たち $V_\lambda$ によって $\prod_{\lambda\in\varLambda} V_\lambda$ の形に表されるその直積集合 $\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda$ の部分集合全体の集合 $\mathbf{V}^*(a)$ はその直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ の 1 つの基本近傍系となるのであった。ここで、$\forall (a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \in \mathrm{int}\prod_{\lambda\in\varLambda} M_\lambda$ に対し、$(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \in \mathrm{int}\prod_{\lambda\in\varLambda} M_\lambda$ が成り立つならそのときに限り、$\exists \prod_{\lambda\in\varLambda} V_\lambda \in \mathbf{V}^* (a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ に対し、これがその直積 $\prod_{\lambda\in\varLambda} M_\lambda$ の部分集合となり、これが成り立つならそのときに限り、直積の定義より明らかに、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$V_\lambda \subseteq M_\lambda$ が成り立つことになる。したがって、これが成り立つならそのときに限り、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$a_\lambda \in \mathrm{int}M_\lambda$ が成り立つことになり、したがって、$(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \in \prod_{\lambda\in\varLambda} \mathrm{int}M_\lambda$ が得られる。よって、次式が成り立つ。

$$\mathrm{int}\prod_{\lambda\in\varLambda} M_\lambda = \prod_{\lambda\in\varLambda} \mathrm{int}M_\lambda$$

□

**定理 1.4.22.** 高々可算な添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{\left(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda}\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0}\right)$ において、どの位相空間たち $\left(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda}\right)$ が第 2 可算公理を満たすなら、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0}\right)$ もまた第 2 可算公理を満たす。

**証明.** 高々可算な添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{\left(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda}\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0}\right)$ において、どの位相空間たち $\left(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda}\right)$ が第 2 可算公理を満たすなら、それらの位相空間たち $\left(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda}\right)$ に高々可算な開基 $\mathfrak{B}_{\lambda}$ をもつことになり、上記の定理 1.4.19 よりその添数集合 $\varLambda$ の有限集合である部分集合 $\varLambda'$ に属する任意の添数 $\lambda$ に対し、$W_{\lambda}\in\mathfrak{B}_{\lambda}$ なる開集合たち $W_{\lambda}$ によって $\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\varLambda'}S_{\lambda}\times\prod_{\lambda\in\varLambda'}W_{\lambda}$ の形に表されるその直積集合 $\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda}$ の部分集合全体の集合 $\mathfrak{B}'$ はその位相 $\mathfrak{O}_{0}$ の 1 つの開基となることから、その集合 $\mathfrak{B}'$ の元として含まれる開集合たち $W_{\lambda}$ 全体の個数も高々可算となる。よって、その集合 $\mathfrak{B}'$ も高々可算であり、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0}\right)$ もまた第 2 可算公理を満たす。 □

**定理 1.4.23.** 1 つの位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{\left(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda}\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0}\right)$ への写像 $f:S\rightarrow\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda}$ が連続であるならそのときに限り、$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、合成写像 $\mathrm{pr}_{\lambda}\circ f:S\rightarrow S_{\lambda}$ が連続である。

**証明.** 1 つの位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{\left(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda}\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0}\right)$ への写像 $f:S\rightarrow\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda}$ が連続であるなら、$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、その射影たち $\mathrm{pr}_{\lambda}$ は明らかに連続であるから、その合成写像 $\mathrm{pr}_{\lambda}\circ f:S\rightarrow S_{\lambda}$ も連続である。

逆に、$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、その合成写像 $\mathrm{pr}_{\lambda}\circ f:S\rightarrow S_{\lambda}$ が連続であるなら、射影 $\mathrm{pr}_{\lambda}$ によるその位相空間 $\left(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda}\right)$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_{\lambda0}$ を用いて集合 $\mathfrak{B}$ が次式のように定義されると、

$$\mathfrak{B}=\left\{\bigcap_{\mu\in M}A_{\mu}\in\mathfrak{P}\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda}\right)\middle|\#M<\aleph_{0},\ \ \forall\mu\in M\left[A_{\mu}\in\bigcup_{\lambda\in\varLambda}\mathfrak{O}_{\lambda0}\right]\right\}$$

その集合 $\mathfrak{B}$ はその位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0}\right)$ の 1 つの開基となり、もちろん、準開基となるのであった。さらに、その開基 $\mathfrak{B}$ の任意の元 $W$ はその添数集合 $\varLambda$ の有限集合である部分集合 $\varLambda'$ に属する任意の添数 $\lambda$ に対し、$O_{\lambda}\in\mathfrak{O}_{\lambda}$ なる開集合たち $O_{\lambda}$ を用いて次式のように書かれることができる。

$$W=\bigcap_{\lambda\in\varLambda'}V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}^{-1}|O_{\lambda}\right)$$

これに制限されたその写像 $f$ の逆対応 $f^{-1}$ は $\left(\mathrm{pr}_{\lambda}\circ f\right)^{-1}=f^{-1}\circ\mathrm{pr}_{\lambda}^{-1}$ が成り立つことにより次のようになる。

$$V\left(f^{-1}|W\right)=V\left(f^{-1}|\bigcap_{\lambda\in\varLambda'}V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}^{-1}|O_{\lambda}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcap_{\lambda \in \Lambda'} V\left(f^{-1}|V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|O_\lambda\right)\right)\\
&= \bigcap_{\lambda \in \Lambda'} V\left(\left(\mathrm{pr}_\lambda \circ f\right)^{-1}|O_\lambda\right)
\end{aligned}$$

ここで、その合成写像 $\mathrm{pr}_\lambda \circ f : S \to S_\lambda$ が連続であるので、$V\left(f^{-1}|W\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

以上、その位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ の1つの準開基 $\mathfrak{B}$ の任意の元 $W$ に制限されたその逆対応 $f^{-1}$ の値域 $V\left(f^{-1}|W\right)$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の開集合となっているので、定理よりこれが成り立つならそのときに限り、その写像 $f$ は連続である。 □

**定理 1.4.24.** 添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ において、その添数集合 $\Lambda$ の部分集合 $\Lambda'$ と、$\forall\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'$ に対し、その集合 $S_\lambda$ の1つの元 $a'_\lambda$ が定められる。このとき、$a' = (a'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'}$ とおくと、次のような写像 $*_{a'}$ は

$$*_{a'} : \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \to \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \{a'_\lambda\}, \quad \begin{cases} \mathrm{pr}_\lambda *_{a'} (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'} = a_\lambda & \text{if} \quad \lambda \in \Lambda' \\ \mathrm{pr}_\lambda *_{a'} (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'} = a'_\lambda & \text{if} \quad \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda' \end{cases}$$

直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda, \mathfrak{O}'_0\right)$ から直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \{a'_\lambda\}, \mathfrak{O}''_0\right)$ への同相写像である。

**証明.** 添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ において、その添数集合 $\Lambda$ の部分集合 $\Lambda'$ と、$\forall\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'$ に対し、その集合 $S_\lambda$ の1つの元 $a'_\lambda$ が定められる。このとき、$a' = (a'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'}$ とおき次のような写像 $*_{a'}$ を考えよう。

$$*_{a'} : \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \to \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \{a'_\lambda\}, \quad \begin{cases} \mathrm{pr}_\lambda *_{a'} (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'} = a_\lambda & \text{if} \quad \lambda \in \Lambda' \\ \mathrm{pr}_\lambda *_{a'} (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'} = a'_\lambda & \text{if} \quad \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda' \end{cases}$$

このとき、明らかに単射で $\forall a \in \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \{a'_\lambda\}$ に対し、定義より明らかに $\exists (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'} \in \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda$ に対し、次式のように書かれることができるので、

$$\begin{cases} \mathrm{pr}_\lambda *_{a'}(a) = a_\lambda & \text{if} \quad \lambda \in \Lambda' \\ \mathrm{pr}_\lambda *_{a'}(a) = a'_\lambda & \text{if} \quad \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda' \end{cases}$$

その写像 $*_{a'}$ は全単射である。

ここで、直積位相空間たち $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda, \mathfrak{O}'_0\right)$、$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \{a'_\lambda\}, \mathfrak{O}''_0\right)$ を用いて、$\forall\lambda \in \Lambda$ に対し、射影 $\mathrm{pr}_\lambda$ によるその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_{\lambda 0}$ を用いて集合たち $\mathfrak{B}'$、$\mathfrak{B}''$ が次式のように定義されると、

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}' &= \left\{ \bigcap_{\mu \in M} A_\mu \in \mathfrak{P}\left(\prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda\right) \middle| \#M < \aleph_0, \ \ \forall\mu \in M \left[A_\mu \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_{\lambda 0}\right] \right\}\\
\mathfrak{B}'' &= \left\{ \bigcap_{\mu \in M} A_\mu \in \mathfrak{P}\left(\prod_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \{a'_\lambda\}\right) \middle| \#M < \aleph_0, \ \ \forall\mu \in M \left[A_\mu \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_{\lambda 0}\right] \right\}
\end{aligned}$$

それらの集合たち $\mathfrak{B}'$、$\mathfrak{B}''$ はそれぞれそれらの位相空間たち $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda, \mathfrak{O}'_0 \right)$、$\left( \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \left\{ a'_\lambda \right\}, \mathfrak{O}''_0 \right)$ の 1 つの開基となるのであった。したがって、$\forall O'' \in \mathfrak{O}''_0$ に対し、添数集合 $N$ とその集合 $\mathfrak{B}''$ の元 $\prod_{\lambda \in \varLambda'} W_{\lambda\nu} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \left\{ a'_\lambda \right\}$ を用いて次式のように書かれることができ、

$$O'' = \bigcup_{\nu \in N} \left( \prod_{\lambda \in \varLambda'} W_{\lambda\nu} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \left\{ a'_\lambda \right\} \right)$$

その写像 $*_{a'}$ の逆対応が写像となることに注意すれば、したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} *_{a'}^{-1} \left( O'' \right) &= *_{a'}^{-1} \left( \bigcup_{\nu \in N} \left( \prod_{\lambda \in \varLambda'} W_{\lambda\nu} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \left\{ a'_\lambda \right\} \right) \right) \\ &= *_{a'}^{-1} \left( \bigcup_{\nu \in N} \prod_{\lambda \in \varLambda'} W_{\lambda\nu} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \left\{ a'_\lambda \right\} \right) \\ &= \bigcup_{\nu \in N} \prod_{\lambda \in \varLambda'} W_{\lambda\nu} \end{aligned}$$

ここで、$\forall \nu \in N$ に対し、$\prod_{\lambda \in \varLambda'} W_{\lambda\nu} \in \mathfrak{B}'$ が成り立つので、$*_{a'}^{-1} \left( O'' \right) \in \mathfrak{O}'_0$ が成り立つことになり、したがって、その写像 $*_{a'}$ は連続である。同様にして、その逆写像 $*_{a'}^{-1}$ も連続であることが示される。よって、その写像 $*_{a'}$ は同相写像である。 $\square$

**定理 1.4.25.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{ \left( S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda \right) \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ の直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0 \right)$ から位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ への連続写像 $f$ とその添数集合 $\varLambda$ の部分集合 $\varLambda'$ と、$\forall \lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'$ に対し、その集合 $S_\lambda$ の 1 つの元 $a'_\lambda$ が定められるとき、$a' = \left( a'_\lambda \right)_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'}$ とおくと、次のような写像 $*_{a'}$ を用いた

$$*_{a'} : \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda \rightarrow \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \left\{ a'_\lambda \right\}, \ \begin{cases} \mathrm{pr}_\lambda *_{a'} \left( a_\lambda \right)_{\lambda \in \varLambda'} = a_\lambda & \text{if} \quad \lambda \in \varLambda' \\ \mathrm{pr}_\lambda *_{a'} \left( a_\lambda \right)_{\lambda \in \varLambda'} = a'_\lambda & \text{if} \quad \lambda \in \varLambda \setminus \varLambda' \end{cases}$$

合成写像 $f \circ *_{a'}$ は直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda, \mathfrak{O}'_0 \right)$ から位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ への連続写像である。

$$\begin{tikzcd} \prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda \arrow[r, "f"] & S \\ \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda \arrow[u, "*_{a'}"] \arrow[ur, "f \circ *_{a'}"'] & \end{tikzcd}$$

この定理より多変数の連続写像が与えられたとき、一部の変数たちが定数とみなされて固定されたとしても、残りの変数たちについてまたこの写像は連続写像となるということを主張している。ただ、逆として一部の変数たちが定数としてみなされて固定されたとき、残りの変数たちについてその写像が連続であるとしても、もとの多変数の写像は連続であるとは限らないことに注意されたい。例えば、次のような写像 $f$ が挙げられる。

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{if} \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ 0 & \text{if} \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

実際、計算すれば、$x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$ とおくと、次のようになる。

$$\begin{aligned}\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{xy}{x^2+y^2}\\ &= \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to0}\frac{xy}{x^2+y^2}\\ &= \lim_{r\to0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\\ &= \lim_{r\to0}\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

**証明.** 添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda,\mathfrak{O}_0\right)$ から位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ への連続写像 $f$ とその添数集合 $\Lambda$ の部分集合 $\Lambda'$ と、$\forall\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'$ に対し、その集合 $S_\lambda$ の1つの元 $a'_\lambda$ が定められるとき、$a'=(a'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'}$ とおき次のような写像 $*_{a'}$ を考えよう。

$$*_{a'}:\prod_{\lambda\in\Lambda'}S_\lambda\to\prod_{\lambda\in\Lambda'}S_\lambda\times\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'}\{a'_\lambda\},\quad\begin{cases}\mathrm{pr}_\lambda *_{a'}(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'}=a_\lambda & \text{if} \quad \lambda\in\Lambda'\\ \mathrm{pr}_\lambda *_{a'}(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'}=a'_\lambda & \text{if} \quad \lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'\end{cases}$$

このとき、明らかにその写像 $*_{a'}$ は単射で、それらの直積位相空間たち $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda,\mathfrak{O}_0\right)$、$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda'}S_\lambda,\mathfrak{O}'_0\right)$ を用いて、$\forall\lambda\in\Lambda$ に対し、射影 $\mathrm{pr}_\lambda$ によるその位相空間 $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_{\lambda0}$ を用いて集合 $\mathfrak{B}$ が次式のように定義されると、

$$\mathfrak{B}=\left\{\bigcap_{\mu\in M}A_\mu\in\mathfrak{P}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda\right)\middle|\#M<\aleph_0,\ \ \forall\mu\in M\left[A_\mu\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{O}_{\lambda0}\right]\right\}$$

$$\mathfrak{B}'=\left\{\bigcap_{\mu\in M}A_\mu\in\mathfrak{P}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda'}S_\lambda\right)\middle|\#M<\aleph_0,\ \ \forall\mu\in M\left[A_\mu\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{O}_{\lambda0}\right]\right\}$$

それらの集合たち $\mathfrak{B}$、$\mathfrak{B}'$ はそれぞれそれらの位相空間たち $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda,\mathfrak{O}_0\right)$、$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda'}S_\lambda,\mathfrak{O}'_0\right)$ の1つの開基となるのであった。したがって、$\forall O\in\mathfrak{O}_0$ に対し、添数集合 $N$ とその集合 $\mathfrak{B}$ の元 $\prod_{\lambda\in\Lambda'}W_{\lambda\nu}\times\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'}\{a'_\lambda\}$ を用いて次式のように書かれることができるとき、

$$O=\bigcup_{\nu\in N}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda'}W_{\lambda\nu}\times\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'}\{a'_\lambda\}\right)$$

次のようになる。

$$\begin{aligned} V\left(*_{a'}^{-1}|O\right) &= V\left(*_{a'}^{-1}|\bigcup_{\nu\in N}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda'}W_{\lambda\nu}\times\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'}\left\{a'_{\lambda}\right\}\right)\right)\\ &= V\left(*_{a'}^{-1}|\bigcup_{\nu\in N}\prod_{\lambda\in\Lambda'}W_{\lambda\nu}\times\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'}\left\{a'_{\lambda}\right\}\right)\\ &= \bigcup_{\nu\in N}\prod_{\lambda\in\Lambda'}W_{\lambda\nu} \end{aligned}$$

ここで、$\forall\nu\in N$ に対し、$\prod_{\lambda\in\Lambda'}W_{\lambda\nu}\in\mathfrak{B}'$ が成り立つので、$*_{a'}^{-1}(O)\in\mathfrak{O}'_0$ が成り立つことになり、したがって、その写像 $*_{a'}$ は連続である。添数集合 $N$ とその集合 $\mathfrak{B}$ の元 $\prod_{\lambda\in\Lambda'}W_{\lambda\nu}\times\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'}\left\{a'_{\lambda}\right\}$ を用いて次式のように書かれることができないとき、

$$O=\bigcup_{\nu\in N}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda'}W_{\lambda\nu}\times\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'}\left\{a'_{\lambda}\right\}\right)$$

明らかに $O\notin V\left(*_{a'}\right)$ が成り立つことになり、したがって、$V\left(*_{a'}^{-1}|O\right)=\emptyset$ が成り立つので、その写像 $*_{a'}$ は連続である。

以上より、2 つの写像たち $*_{a'}$、$f$ は連続であるから、その合成写像 $f\circ*_{a'}$ も直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda'}S_{\lambda},\mathfrak{O}'_0\right)$ から位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ への連続写像である。 □

### 1.4.4 商位相空間

最後に、誘導位相ではなく本筋からややそれるが、似た概念として商位相空間というものがあるので、それが述べられよう。

**定義 1.4.5.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と同値関係 $R$ が与えられたとき、その標準的全射 $C_R:S\rightarrow S/R;a\mapsto C_R(a)$ を用いて次式のように集合 $\overline{\mathfrak{O}}$ が定義される。この集合 $\overline{\mathfrak{O}}$ を位相空間 $(S.\mathfrak{O})$ の同値関係 $R$ における商位相という。

$$\overline{\mathfrak{O}}=\left\{O\in\mathfrak{P}\left(S/R\right)\middle|V\left(C_R^{-1}|O\right)\in\mathfrak{O}\right\}$$

**定理 1.4.26.** 組 $\left(S/R,\overline{\mathfrak{O}}\right)$ は位相空間である。

**定義 1.4.6.** この位相空間 $\left(S/R,\overline{\mathfrak{O}}\right)$ を位相空間 $(S.\mathfrak{O})$ の同値関係 $R$ における商位相空間という。

**証明.** 上記のように定義された組 $\left(S/R,\overline{\mathfrak{O}}\right)$ において、次のようになることから、

$$V\left(C_R^{-1}|S/R\right)=V\left(C_R^{-1}\right)=D\left(C_R\right)=S,\quad V\left(C_R^{-1}|\emptyset\right)=\emptyset$$

$S/R,\emptyset\in\overline{\mathfrak{O}}$ が成り立つ。$\forall O,P\in\overline{\mathfrak{O}}$ に対し、$V\left(C_R^{-1}|O\right),V\left(C_R^{-1}|P\right)\in\mathfrak{O}$ が成り立つので、次のようになる。

$$V\left(C_R^{-1}|O\right)\cap V\left(C_R^{-1}|P\right)=V\left(C_R^{-1}|O\cap P\right)\in\mathfrak{O}$$

したがって、$O \cap P \in \overline{\mathfrak{O}}$ が成り立つ。任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたその商位相 $\overline{\mathfrak{O}}$ の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \varLambda}$ が与えられたとき、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$V\left(C_R^{-1}|O_\lambda\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つので、次のようになる。

$$\bigcup_{\lambda \in \varLambda} V\left(C_R^{-1}|O_\lambda\right) = V\left(C_R^{-1}|\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda\right) \in \mathfrak{O}$$

したがって、$\bigcup_{\lambda \in \varLambda} O_\lambda \in \overline{\mathfrak{O}}$ が成り立つ。以上より、その組 $\left(S/R, \overline{\mathfrak{O}}\right)$ は位相空間である。 □

**定理 1.4.27.** 位相空間 $(S.\mathfrak{O})$ の同値関係 $R$ における商位相空間 $\left(S/R, \overline{\mathfrak{O}}\right)$ が与えられたとき、標準的全射 $C_R : S \rightarrow S/R; a \mapsto C_R(a)$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその商位相空間 $\left(S/R, \overline{\mathfrak{O}}\right)$ への連続写像である。

**証明.** 位相空間 $(S.\mathfrak{O})$ の同値関係 $R$ における商位相空間 $\left(S/R, \overline{\mathfrak{O}}\right)$ が与えられたとき、その標準的全射 $C_R : S \rightarrow S/R; a \mapsto C_R(a)$ について、商位相の定義より明らかに、$\forall O \in \overline{\mathfrak{O}}$ に対し、$V\left(C_R^{-1}|O\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つので、その標準的全射 $C_R : S \rightarrow S/R; a \mapsto C_R(a)$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその商位相空間 $\left(S/R, \overline{\mathfrak{O}}\right)$ への連続写像である。 □

**定理 1.4.28.** 位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ とそれらの間の連続写像 $f : S \rightarrow T$、その集合 $S$ におけるその写像 $f$ に付随する同値関係 $R(f)$ が与えられたとき、次式のような写像 $\overline{f}$ が定まりこれはその商位相空間 $\left(S/R(f), \overline{\mathfrak{O}}\right)$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ への連続写像となる。

$$\overline{f} : S/R(f) \rightarrow T; C_{R(f)}(a) \mapsto f(a)$$

**証明.** 位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ とそれらの間の連続写像 $f : S \rightarrow T$、その集合 $S$ におけるその写像 $f$ に付随する同値関係 $R(f)$ が与えられたとき、次式のような対応 $\overline{f}$ について考えよう。

$$\overline{f} = (S/R(f), T, G), \quad G = \left\{\left(C_{R(f)}(a), b\right) \in S/R(f) \times T \middle| b = f(a)\right\}$$

このとき、$\forall C_{R(f)}(a), C_{R(f)}(b) \in S/R(f)$ に対し、$C_{R(f)}(a) = C_{R(f)}(b)$ が成り立つなら、$aR(f)b$ が成り立ち、したがって、$f(a) = f(b)$ も成り立つ。したがって、その対応 $\overline{f}$ は写像である。このとき、標準的全射 $C_{R(f)} : S \rightarrow S/R(f); a \mapsto C_{R(f)}(a)$ を用いて $f = \overline{f} \circ C_{R(f)}$ が成り立つことに注意すれば、$\forall P \in \mathfrak{P}$ に対し、$V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立ち、ここで、$f^{-1} = C_{R(f)}^{-1} \circ \overline{f}^{-1}$ が成り立つので、$V\left(C_{R(f)}^{-1}|V\left(\overline{f}^{-1}|P\right)\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。したがって、定義より明らかにその同値関係 $R$ による商位相 $\overline{\mathfrak{O}}$ を用いて $V\left(\overline{f}^{-1}|P\right) \in \overline{\mathfrak{O}}$ が得られるので、その写像 $\overline{f}$ はその商位相空間 $\left(S/R(f), \overline{\mathfrak{O}}\right)$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ への連続写像となる。 □

**定理 1.4.29.** 位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ とそれらの間の連続写像 $f : S \rightarrow T$、それらの集合たち $S$、$T$ における同値関係たち $Q$、$R$ が与えられ、$\forall a, b \in S$ に対し、$aQb$ が成り立つなら、$f(a)Rf(b)$ が成り立つとき、次式のような写像 $\overline{f}$ が定まりこれはその商位相空間 $\left(S/Q, \overline{\mathfrak{O}}\right)$ からその商位相空間 $\left(T/R, \overline{\mathfrak{P}}\right)$ への連続写像となる。

$$\overline{f} : S/Q \rightarrow T/R; C_Q(a) \mapsto C_R \circ f(a)$$

**証明.** 位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ とそれらの間の連続写像 $f : S \rightarrow T$、それらの集合たち $S$、$T$ における同値関係たち $Q$、$R$ が与えられ、$\forall a, b \in S$ に対し、$aQb$ が成り立つなら、$f(a)Rf(b)$ が成り立つとき、次式のような対応 $\overline{f}$ について考えよう。

$$\overline{f} = (S/Q, T/R, G), \quad G = \{(C_Q(a), C) \in S/Q \times T/R | C = C_R \circ f(a)\}$$

このとき、$\forall C_Q(a), C_Q(b) \in S/Q$ に対し、$C_Q(a) = C_Q(b)$ が成り立つなら、$aQb$ が成り立ち、したがって、$f(a)Rf(b)$ も成り立つので、$C_R \circ f(a) = C_R \circ f(b)$ も成り立つ。したがって、その対応 $\overline{f}$ は写像である。ここで、定理 1.4.27 よりその商位相空間 $\left(T/R, \overline{\mathfrak{P}}\right)$ を用いた標準的全射 $C_R : T \rightarrow T/R; a \mapsto C_R(a)$ はその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ からその商位相空間 $\left(T/R, \overline{\mathfrak{P}}\right)$ への連続写像となるのであった。このとき、その合成写像 $C_R \circ f : S \rightarrow T/R$ も連続写像で定理 1.4.28 よりその写像 $\overline{f} : S/Q \rightarrow T/R; C_Q(a) \mapsto C_R \circ f(a)$ も連続写像となる。 □

# 参考文献


[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p52-59,186-194 ISBN978-4-00-029871-1

[2] 加塩朋和. ”一般位相 A（２組）”. 東京理科大学. https://www.rs.tus.ac.jp/a25594/2018-2019_General_Topology.pdf (2021-8-6 12:15 取得)

## 1.5 連結

### 1.5.1 連結

**定義 1.5.1.** 任意の位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとする。これの台集合 $S$、空集合 $\emptyset$ はどちらもその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開集合でもあり閉集合でもあるのであった。ここで、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系 $\mathfrak{A}$ を用いて次式を満たすとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は連結であるという[*9]。

$$\mathfrak{O}\cap\mathfrak{A}=\{S,\emptyset\}$$

たとえば、任意の密着位相は連結である。また、離散位相は台集合 $S$ がただ 1 点のみからなるときに限り連結である。

**定理 1.5.1.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が連結であるならそのときに限り、その閉集合系 $\mathfrak{A}$ を用いて $S=M\sqcup N$ なるその集合 $\mathfrak{O}\cap\mathfrak{A}$ の空集合でない元々 $M$、$N$ が存在しない。

**証明.** 任意の位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとする。その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が連結でないなら、その閉集合系 $\mathfrak{A}$ を用いて $\mathfrak{O}\cap\mathfrak{A}=\{S,\emptyset\}$ が成り立たなく、その台集合 $S$、空集合 $\emptyset$ はどちらもその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開集合でもあり閉集合でもあることに注意すれば、$M\in\mathfrak{O}\cap\mathfrak{A}$ なる集合 $M$ が存在する。ここで、その集合 $S\setminus M$ について、$M\in\mathfrak{O}$ より $S\setminus M\in\mathfrak{A}$ が成り立つかつ、$M\in\mathfrak{A}$ より $S\setminus M\in\mathfrak{O}$ が成り立つので、$S\setminus M\in\mathfrak{O}\cap\mathfrak{A}$ が成り立つ。さらに、$M\cap S\setminus M=\emptyset$ が成り立つので、$M\sqcup S\setminus M=S$ が成り立つことになり $S=M\sqcup N$ なるその集合 $\mathfrak{O}\cap\mathfrak{A}$ の空集合でない元々 $M$、$N$ が存在する。

逆に、$S=M\sqcup N$ なるその集合 $\mathfrak{O}\cap\mathfrak{A}$ の空集合でない元々 $M$、$N$ が存在するなら、どちらも $M,N\notin\{S,\emptyset\}$ が成り立つので、$\mathfrak{O}\cap\mathfrak{A}\neq\{S,\emptyset\}$ が成り立つことになりその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は連結でない。 □

**定理 1.5.2.** また、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとする。その台集合 $S$ の空集合でない部分集合 $M$ を用いた部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が連結であるならそのときに限り、次式たちいづれもが成り立つようなその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開集合たち $O$、$P$ が存在しない。

$$M\subseteq O\cup P,\quad O\cap P\cap M=\emptyset,\quad O\cap M\neq\emptyset,\quad P\cap M\neq\emptyset$$

**証明.** 任意の位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとする。その台集合の空集合でない部分集合 $M$ を用いたその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が連結でないなら、その閉集合系 $\mathfrak{A}_M$ を用いて $M=M'\sqcup N'$ なるその集合 $\mathfrak{O}_M\cap\mathfrak{A}_M$ の空集合でない元々 $M'$、$N'$ が存在する。ここで定理 8.1.4.8 より $\exists O,P\in\mathfrak{O}$ に対し、$M'=O\cap M$ かつ $N'=P\cap M$ が成り立つので、次式たちいづれもが成り立つ。

$$M=(O\cap M)\cup(P\cap M),\quad O\cap M\cap P\cap M=\emptyset$$

したがって、$M\subseteq O\cup P$ かつ $O\cap P\cap M=\emptyset$ が得られる。また、それらの集合たち $M'$、$N'$ は空集合でないので、それらの集合たち $O\cap M$、$P\cap M$ は空集合でない。

逆に、次式たちいづれもが成り立つようなその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開集合たち $O$、$P$ が存在するなら、

$$M\subseteq O\cup P,\quad O\cap P\cap M=\emptyset,\quad O\cap M\neq\emptyset,\quad P\cap M\neq\emptyset$$

[*9] 定義だけみるとなんじゃあこりゃって感じであるものの、解析学的にいえば、弧状連結という平たくいえば集合内のどの 2 点でもある曲線を集合内で引けるような感じの集合と似た概念。

それらの集合たち $O \cap M$、$P \cap M$ をそれぞれ $M'$、$N'$ とおくと、$M', N' \in \mathfrak{O}_M$ が成り立つかつ、それらの集合たち $M'$、$N'$ は空集合でない。さらに、$M' \cap N' = \emptyset$ が成り立ち、$M \subseteq O \cup P$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned} M' \sqcup N' &= (O \cap M) \cup (P \cap M) \\ &= (O \cup P) \cap M \\ &= M \end{aligned}$$

したがって、次式が成り立つので、

$$M' = M \setminus N', \quad N' = M \setminus M'$$

$M', N' \in \mathfrak{O}_M \cap \mathfrak{A}_M$ なるある集合たち $M'$、$N'$ が $M' \sqcup N' = M$ を満たす。これにより、その部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ は連結でない。 □

**定理 1.5.3.** 位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとする。その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は連結で写像 $f : S \to T$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ へ連続であるとするとき、その位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ の部分位相空間 $\left( V(f), \mathfrak{O}_{V(f)} \right)$ は連結である。

**証明.** 位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとする。その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は連結で写像 $f : S \to T$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ へ連続であるとするとき、その位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ の部分位相空間 $\left( V(f), \mathfrak{O}_{V(f)} \right)$ が連結でないと仮定しよう。このとき、次式が成り立つような次式が成り立つようなその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ の開集合たち $O$、$P$ が存在する。

$$V(f) \subseteq O \cup P, \quad O \cap P \cap V(f) = \emptyset, \quad O \cap V(f) \neq \emptyset, \quad P \cap V(f) \neq \emptyset$$

ここで、次のようになるかつ、

$$\begin{aligned} V(f) \subseteq O \cup P &\Rightarrow V\left( f^{-1} | V(f) \right) \subseteq V\left( f^{-1} | O \cup P \right) \\ &\Rightarrow S \subseteq V\left( f^{-1} | O \right) \cup V\left( f^{-1} | P \right) \end{aligned}$$

値域の定義より $V\left( f^{-1} | O \right) \subseteq P$ かつ $V\left( f^{-1} | P \right) \subseteq S$ が成り立つので、$S = V\left( f^{-1} | O \right) \cup V\left( f^{-1} | P \right)$ が成り立つ。また、値域の定義より $V\left( f^{-1} | O \right) \subseteq S$ かつ $V\left( f^{-1} | P \right) \subseteq S$ が成り立つことに注意すれば、次のようになるかつ、

$$\begin{aligned} O \cap P \cap V(f) = \emptyset &\Rightarrow V\left( f^{-1} | O \cap P \cap V(f) \right) = V\left( f^{-1} | \emptyset \right) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow V\left( f^{-1} | O \right) \cap V\left( f^{-1} | P \right) \cap V\left( f^{-1} | V(f) \right) = \emptyset \\ &\Rightarrow V\left( f^{-1} | O \right) \cap V\left( f^{-1} | P \right) \cap S \subseteq \emptyset \\ &\Rightarrow V\left( f^{-1} | O_1 \right) \cap V\left( f^{-1} | O_2 \right) \subseteq \emptyset \end{aligned}$$

空集合はいかなる集合の部分集合であるのであったので、$V\left( f^{-1} | O \right) \cap V\left( f^{-1} | P \right) = \emptyset$ が成り立つ。以上より、$S = V\left( f^{-1} | O \right) \sqcup V\left( f^{-1} | P \right)$ が成り立つ。

さらに、$O \cap V(f) \neq \emptyset$ が成り立つので、$\exists b \in S$ に対し、$b \in O \cap V(f)$ が成り立ち、$b \in V(f)$ より $\exists a \in S$ に対し、$f(a) = b$ が成り立つ。これにより、明らかに $a \in S$ が成り立つかつ、$\exists b \in O \cap V(f)$ に対し、$f(a) = b$ が成り立つので、定義より $a \in V\left( f^{-1} | O \cap V(f) \right)$ が成り立つ。ここで、次式が成り立つので、

$$V\left( f^{-1} | O \cap V(f) \right) = V\left( f^{-1} | O \right) \cap V\left( f^{-1} | V(f) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= V\left(f^{-1}|O\right) \cap S \\
&= V\left(f^{-1}|O\right)
\end{aligned}
$$

$V\left(f^{-1}|O\right) \neq \emptyset$ が成り立つ。同様にして、$V\left(f^{-1}|P\right) \neq \emptyset$ が成り立つ。

ここで、その写像 $f$ は連続であったので、$V\left(f^{-1}|O\right), V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。$S = V\left(f^{-1}|O\right) \sqcup V\left(f^{-1}|P\right)$ が成り立つことに注意すれば、$S \setminus V\left(f^{-1}|O\right) = V\left(f^{-1}|P\right)$ かつ $S \setminus V\left(f^{-1}|P\right) = V\left(f^{-1}|O\right)$ が成り立つので、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系 $\mathfrak{A}$ を用いて $V\left(f^{-1}|O\right), V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{A}$ が成り立つことになり、したがって、$V\left(f^{-1}|O\right), V\left(f^{-1}|P\right) \in \mathfrak{O} \cap \mathfrak{A}$ が成り立つ。これにより、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は連結でない。しかしながら、これは仮定に矛盾するので、その位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ の部分位相空間 $\left(V(f), \mathfrak{O}_{V(f)}\right)$ は連結である。 □

**定理 1.5.4.** 位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとする。その台集合 $S$ の空集合でない部分集合 $M$ を用いたその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ は連結で写像 $f : S \to T$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ へ連続であるとするとき、その位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ の部分位相空間 $\left(V\left(f|M\right), \mathfrak{O}_{V(f|M)}\right)$ は連結である。

**証明.** 位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(T, \mathfrak{P})$ が与えられたとする。その台集合 $S$ の空集合でない部分集合 $M$ を用いたその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ は連結で写像 $f : S \to T$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ へ連続であるとするとき、その部分集合 $M$ に制限されたその写像 $f|M$ もまたその位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ からその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ へ連続であるので、上記の定理よりその位相空間 $(T, \mathfrak{P})$ の部分位相空間 $\left(V\left(f|M\right), \mathfrak{O}_{V(f|M)}\right)$ は連結である。 □

**定理 1.5.5.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の空集合でない部分集合 $M$ を用いた部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ が連結であるなら、$\forall N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \subseteq N \subseteq \mathrm{cl}M$ が成り立つなら、その部分位相空間 $(N, \mathfrak{O}_N)$ も連結である。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の空集合でない部分集合 $M$ を用いた部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ が連結であるかつ、$\exists N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M \subseteq N \subseteq \mathrm{cl}M$ が成り立つかつ、その部分位相空間 $(N, \mathfrak{O}_N)$ が連結でないと仮定しよう。このとき、$\exists O, P \in \mathfrak{O}$ に対し、次式が成り立つ。

$$
N \subseteq O \cup P, \quad O \cap P \cap N = \emptyset, \quad O \cap N \neq \emptyset, \quad P \cap N \neq \emptyset
$$

$M \subseteq N$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$
M \subseteq O \cup P, \quad O \cap P \cap M = \emptyset
$$

また、$O \cap M = \emptyset$ が成り立つと仮定すると、定理 1.1.10 より $O \cap \mathrm{cl}M = \emptyset$ が成り立ち、したがって、$O \cap N = \emptyset$ が成り立つことになるが、これは $O \cap N \neq \emptyset$ が成り立つことに矛盾するので、$O \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。同様にして、$O \cap M \neq \emptyset$ が得られる。以上より、次式が得られ、

$$
M \subseteq O \cup P, \quad O \cap P \cap M = \emptyset, \quad O \cap M \neq \emptyset, \quad P \cap M \neq \emptyset
$$

これにより、その部分位相空間 $(N, \mathfrak{O}_N)$ は連結でないことになるが、これはその部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ が連結であるに矛盾している。よって、その部分位相空間 $(N, \mathfrak{O}_N)$ も連結である。 □

**定理 1.5.6.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた部分集合系 $\left\{M_\lambda\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ を用いた部分位相空間の族 $\left\{\left(M_\lambda,\mathfrak{O}_{M_\lambda}\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとする。$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、それらの部分位相空間たち $\left(M_\lambda,\mathfrak{O}_{M_\lambda}\right)$ が連結であるかつ、$\forall\lambda,\mu\in\varLambda$ に対し、$M_\lambda\cap M_\mu\neq\emptyset$ が成り立つとき、その和集合 $\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda$ を用いた部分位相空間 $\left(\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda,\mathfrak{O}_{\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda}\right)$ も連結である。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた部分集合系 $\left\{M_\lambda\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ を用いた部分位相空間の族 $\left\{\left(M_\lambda,\mathfrak{O}_{M_\lambda}\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとする。$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、それらの部分位相空間たち $\left(M_\lambda,\mathfrak{O}_{M_\lambda}\right)$ が連結であるかつ、$\forall\lambda,\mu\in\varLambda$ に対し、$M_\lambda\cap M_\mu\neq\emptyset$ が成り立つかつ、その和集合 $\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda$ を用いた部分位相空間 $\left(\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda,\mathfrak{O}_{\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda}\right)$ は連結でないと仮定しよう。このとき、$\exists O,P\in\mathfrak{O}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda\subseteq O\cup P,\quad O\cap P\cap\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda=\emptyset,\quad O\cap\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda\neq\emptyset,\quad P\cap\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda\neq\emptyset$$

$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、$M_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda$ が成り立つので、$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、次式が成り立つ。

$$M_\lambda\subseteq O\cup P,\quad O\cap P\cap M_\lambda=\emptyset$$

ここで、$O\cap\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda\neq\emptyset$ が成り立つので、$\exists a\in S$ に対し、次のようになり、

$$a\in O\cap\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\varLambda}\left(O\cap M_\lambda\right)$$

$\exists\lambda\in\varLambda$ に対し、$a\in O\cap M_\lambda$ が成り立ち、したがって、$O\cap M_\lambda\neq\emptyset$ が成り立つ。同様にして、$\exists\mu\in\varLambda$ に対し、$P\cap M_\mu\neq\emptyset$ が成り立つ。ここで、それらの部分位相空間たち $\left(M_\lambda,\mathfrak{O}_{M_\lambda}\right)$、$\left(M_\mu,\mathfrak{O}_{M_\mu}\right)$ が連結であるので、$O_1\cap M_\mu=\emptyset$ かつ $O_2\cap M_\lambda=\emptyset$ が成り立つ。これにより、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\emptyset&=\left(\emptyset\cap M_\lambda\right)\cup\left(\emptyset\cap M_\mu\right)\\&=\left(O\cap M_\lambda\cap M_\mu\right)\cup\left(P\cap M_\lambda\cap M_\mu\right)\\&=(O\cup P)\cap\left(M_\lambda\cap M_\mu\right)\end{aligned}$$

ここで、$M_\lambda\cap M_\mu\subseteq\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda\subseteq O\cup P$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\emptyset&=(O\cup P)\cap\left(M_\lambda\cap M_\mu\right)\\&=M_\lambda\cap M_\mu\end{aligned}$$

しかしながら、これは仮定の、$\forall\lambda,\mu\in\varLambda$ に対し、$M_\lambda\cap M_\mu\neq\emptyset$ が成り立つことに矛盾しているので、その和集合 $\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda$ を用いた部分位相空間 $\left(\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda,\mathfrak{O}_{\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda}\right)$ も連結である。 □

**定理 1.5.7.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた部分集合系 $\left\{M_\lambda\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ を用いた部分位相空間の族 $\left\{\left(M_\lambda,\mathfrak{O}_{M_\lambda}\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとする。$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、それらの部分位相空間たち $\left(M_\lambda,\mathfrak{O}_{M_\lambda}\right)$ が連結であるかつ、$\exists a\in S$ に対し、$a\in M_\lambda$ が成り立つとき、その和集合 $\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda$ を用いた部分位相空間 $\left(\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda,\mathfrak{O}_{\bigcup_{\lambda\in\varLambda}M_\lambda}\right)$ も連結である。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた部分集合系 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ を用いた部分位相空間の族 $\{(M_\lambda,\mathfrak{O}_{M_\lambda})\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとする。$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、それらの部分位相空間たち $(M_\lambda,\mathfrak{O}_{M_\lambda})$ が連結であるかつ、$\exists a\in S$ に対し、$a\in M_\lambda$ が成り立つとき、$\forall\lambda,\mu\in\varLambda$ に対し、$a\in M_\lambda\cap M_\mu$ が成り立つので、$M_\lambda\cap M_\mu\neq\emptyset$ が成り立ち、したがって、その和集合 $\bigcup_{\lambda\in\varLambda} M_\lambda$ を用いた部分位相空間 $\left(\bigcup_{\lambda\in\varLambda} M_\lambda,\mathfrak{O}_{\bigcup_{\lambda\in\varLambda} M_\lambda}\right)$ も連結である。 □

### 1.5.2 連結成分

**定義 1.5.2.** 任意の位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとする。このとき、$a,b\in S$ なる元々 $a$、$b$ が属するようなその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の連結な部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ の台集合 $M$ が存在するとき、このことを $a\sim_{(S,\mathfrak{O})} b$ と書くことにする。

**定理 1.5.8.** その関係 $\sim_{(S,\mathfrak{O})}$ は同値関係となる。

このようにして、その集合 $S$ を同値関係 $\sim_{(S,\mathfrak{O})}$ で類別して得られる商集合 $S/\sim_{(S,\mathfrak{O})}$ の元をその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の連結成分という。

**証明.** 任意の位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとする。

$\forall a\in S$ に対し、位相空間 $(\{a\},\{\emptyset,\{a\}\})$ が考えれられれば、これは明らかにその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の部分位相空間であるかつ、上記の定理より明らかにその位相空間 $(\{a\},\{\emptyset,\{a\}\})$ は連結である。したがって、$a\sim_{(S,\mathfrak{O})} a$ が成り立つ。

また、$\forall a,b\in S$ に対し、定義より明らかに $a\sim_{(S,\mathfrak{O})} b$ が成り立つなら、$b\sim_{(S,\mathfrak{O})} a$ が成り立つ。

最後に、$\forall a,b,c\in S$ に対し、$a\sim_{(S,\mathfrak{O})} b$ かつ $b\sim_{(S,\mathfrak{O})} c$ が成り立つなら、それらの元々 $a$、$b$ が属するようなその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の連結な部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ の台集合 $M$ が存在するかつ、それらの元々 $b$、$c$ が属するようなその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の連結な部分位相空間 $(N,\mathfrak{O}_N)$ の台集合 $N$ が存在することになる。ここで、$b\in M$ かつ $b\in N$ が成り立つので、部分位相空間 $(M\cup N,\mathfrak{O}_{M\cup N})$ も連結であることになる。このとき、$a,c\in M\cup N$ が成り立つので、$a\sim_{(S,\mathfrak{O})} c$ が成り立つ。 □

**定理 1.5.9.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の元 $a$ が属する連結成分を $C_a$ とおく。その元 $a$ を含むその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の連結な任意の部分位相空間の台集合全体の集合を $\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ とすれば、順序集合 $\left(\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a},\subseteq\right)$ においてその連結成分 $C_a$ は最大元となる。さらに、その連結成分 $C_a$ はその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において閉集合である。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の元 $a$ が属する連結成分を $C_a$ とおく。その元 $a$ を含むその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の連結な任意の部分位相空間の台集合全体の集合を $\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ とすれば、$\forall M\in\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ に対し、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の部分位相空間たち $(M,\mathfrak{O}_M)$ は定義より連結であるかつ、定義より $a\in M$ が成り立つので、和集合 $\bigcup\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ を用いた部分位相空間 $\left(\bigcup\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a},\mathfrak{O}_{\bigcup\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}}\right)$ も連結であるので、明らかに $\bigcup\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}\in\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ が成り立つ。さらに、$\forall M\in\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ に対し、$M\subseteq\bigcup\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ が成り立つので、順序集合 $\left(\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a},\subseteq\right)$ において、その集合 $\bigcup_{M\in\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}} M$ は最大元となる。

一方で、$\forall b\in\bigcup\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ に対し、$a,b\in\bigcup\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ が成り立つので、$a\sim_{(S,\mathfrak{O})} b$ が成り立ち、したがっ

て、$b \in C_a$ が成り立つ。これにより、$\bigcup \mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a} \subseteq C_a$ が得られる。さらに、$\forall b \in C_a$ に対し、$a \sim_{(S,\mathfrak{O})} b$ が成り立つことになるので、それらの元々 $a$、$b$ が属するようなその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の連結な部分位相空間 $(M',\mathfrak{O}_{M'})$ の台集合 $M'$ が存在し、明らかに、$M' \in \mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ が成り立つことになる。以上より、次式が得られる。

$$C_a \subseteq M' \subseteq \bigcup_{M \in \mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}} M = \bigcup \mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$$

これにより、$\bigcup \mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a} = C_a$ が成り立つことになり順序集合 $\left(\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}, \subseteq\right)$ においてその集合 $C_a$ は最大元となる。

また、$\bigcup \mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a} = C_a$ が成り立つことに注意すれば、部分位相空間 $(C_a,\mathfrak{O}_{C_a})$ が連結であるなら、$C_a \subseteq M \subseteq \mathrm{cl}C_a$ なるその台集合 $S$ の任意の部分集合 $M$ を用いた部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ も連結であるのであったので、その部分位相空間 $(\mathrm{cl}C_a,\mathfrak{O}_{\mathrm{cl}C_a})$ も連結であることになり、したがって、$C_a \subseteq \mathrm{cl}C_a \in \mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ が成り立つ。ここで、その連結成分 $C_a$ がその順序集合 $\left(\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}, \subseteq\right)$ において最大元となることに注意すれば、$\mathrm{cl}C_a \subseteq C_a$ が成り立ち、したがって、$C_a = \mathrm{cl}C_a$ が成り立つ。これにより、その連結成分 $C_a$ は閉集合である。 □

**定理 1.5.10.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が連結であるならそのときに限り、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ はただ 1 つの連結成分をもちこれがその台集合 $S$ 自身となる。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が連結であるなら、位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の台集合 $S$ の元 $a$ が属する連結成分を $C_a$ とおき、その元 $a$ を含むその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の連結な任意の部分位相空間の台集合全体の集合を $\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ とすれば、順序集合 $\left(\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}, \subseteq\right)$ においてその連結成分 $C_a$ は最大元となるのであった。このとき、順序集合 $\left(\mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}, \subseteq\right)$ において、$S \in \mathcal{C}_{(S,\mathfrak{O}),a}$ が成り立つので、明らかに $C_a = S$ が成り立つ。これ以外にその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の連結成分 $C$ が存在すれば、商集合の定義より $C \sqcup C_a \subseteq S$ が成り立ち $C \sqcup S \subseteq S$ が成り立つことになるが、これは矛盾している。したがって、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ はただ 1 つの連結成分をもちこれがその台集合 $S$ 自身となる。逆に、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ はただ 1 つの連結成分をもちこれがその台集合 $S$ 自身となるなら、明らかに位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が連結である。 □

### 1.5.3 直積位相空間と連結

**定理 1.5.11.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}\right)$ が連結であるならそのときに限り、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ が連結である。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}\right)$ が連結であるなら、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、射影たち $\mathrm{pr}_\lambda : \prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda \rightarrow S_\lambda$ は定義より明らかに連続写像で、このとき、その位相空間 $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ の部分位相空間 $\left(V\left(\mathrm{pr}_\lambda\right), \mathfrak{O}_{V(\mathrm{pr}_\lambda)}\right)$ は連結であるのであった。このとき、それらの射影たち $\mathrm{pr}_\lambda$ の定義より明らかに $V\left(\mathrm{pr}_\lambda\right) = S_\lambda$ が成り立ち、さらに、その直積位相 $\mathfrak{O}$ はその直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}_0\right)$ の初等開集合全体の集合が 1 つの開基となるので、これの和集合に制限されたそれらの射影た

ち $\mathrm{pr}_\lambda$ の値域がそれらの位相空間たち $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ の開集合 $O_\lambda$ となることに注意すれば、やはり $\mathfrak{O}_{V(\mathrm{pr}_\lambda)} = \mathfrak{O}_\lambda$ が成り立つ。以上より、その位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ は連結である。

逆に、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ が連結であるなら、$\varLambda = \{1,2\}$ のとき、$\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in S_1 \times S_2$ に対し、次式が成り立つので、

$$(S_1, \mathfrak{O}_1) \approx (S_1 \times \{b_2\}, \mathfrak{O}_1') \wedge (S_2, \mathfrak{O}_2) \approx (\{a_1\} \times S_2, \mathfrak{O}_2')$$

直積位相空間たち $(S_1 \times \{b_2\}, \mathfrak{O}_1')$、$(\{a_1\} \times S_2, \mathfrak{O}_2')$ はいずれも連結で、$(a_1, b_2) \in (S_1 \times \{b_2\}) \cap (\{a_1\} \times S_2)$ が成り立つので、$(S_1 \times \{b_2\}) \cap (\{a_1\} \times S_2) \neq \emptyset$ が成り立つ。これにより、部分位相空間 $((S_1 \times \{b_2\}) \cup (\{a_1\} \times S_2), \mathfrak{O}')$ も連結となり、明らかに $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in (S_1 \times \{b_2\}) \cup (\{a_1\} \times S_2)$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$(a_1, a_2) \sim_{(S_1 \times S_2, \mathfrak{O})} (b_1, b_2)$$

ここで、その位相空間 $(S_1 \times S_2, \mathfrak{O})$ はただ 1 つの連結成分をもちこれがその台集合 $S$ 自身となるので、その位相空間 $(S_1 \times S_2, \mathfrak{O})$ も連結である。あとは数学的帰納法によって、一般に $\#\varLambda < \aleph_0$ なる添数集合 $\varLambda$ に対しても、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ が連結であるなら、その直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O} \right)$ も連結である。

さらに、任意の添数集合 $\varLambda$ において、$\forall (a_\lambda')_{\lambda \in \varLambda} \in \prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda$ に対し、その添数集合 $\varLambda$ の部分集合のうち有限集合であるもの全体の集合を $\varOmega$ とおくとする。$\forall\varLambda' \in \varOmega$ に対し、次式が成り立つかつ、

$$\prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \{a_\lambda'\} \approx \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda$$

$\#\varLambda' < \aleph_0$ が成り立つので、その直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \{a_\lambda'\}, \mathfrak{O}_{\varLambda'}' \right)$ も連結である。このような族 $\left\{ \left( \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \{a_\lambda'\}, \mathfrak{O}_{\varLambda'}' \right) \right\}_{\varLambda' \in \varOmega}$ がその直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O} \right)$ の連結な部分位相空間の族となり、$\forall\varLambda' \in \varOmega$ に対し、$(a_\lambda')_{\lambda \in \varLambda} \in \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \{a_\lambda'\}$ が成り立つので、上記の定理よりその和集合を用いた位相空間 $\left( \bigcup_{\varLambda' \in \varOmega} \left( \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \{a_\lambda'\} \right), \mathfrak{O}'' \right)$ も連結である。$\forall (a_\lambda)_{\lambda \in \varLambda} \in \prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda$ に対し、$\varLambda' \in \varOmega$ なる添数集合 $\varLambda'$ と各成分 $a_\lambda$ の全近傍系 $\mathbf{V}_{S_\lambda}(a_\lambda)$ の元々 $V_\lambda$ を用いて $\prod_{\lambda \in \varLambda'} V_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_\lambda$ という形で書かれる集合全体の集合 $\mathbf{V}^*(a_\lambda)_{\lambda \in \varLambda}$ はその直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O} \right)$ の基本近傍系となり、$(a_\lambda)_{\lambda \in \varLambda} \in \prod_{\lambda \in \varLambda'} V_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \{a_\lambda'\}$ が成り立つことにより、次のようになるので、

$$\begin{aligned}\left( \prod_{\lambda \in \varLambda'} V_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_\lambda \right) \cap \left( \prod_{\lambda \in \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \{a_\lambda'\} \right) &= \prod_{\lambda \in \varLambda'} (V_\lambda \cap S_\lambda) \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} (S_\lambda \cap \{a_\lambda'\}) \\ &= \prod_{\lambda \in \varLambda'} V_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \{a_\lambda'\} \neq \emptyset\end{aligned}$$

$\forall V \in \mathbf{V}^{*}\left(a_{\lambda}\right)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し、$V \cap \bigcup_{\Lambda' \in \Omega} \left( \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \left\{ a_{\lambda}' \right\} \right) \neq \emptyset$ が成り立つ。これにより、$\left(a_{\lambda}\right)_{\lambda \in \Lambda} \in \operatorname{cl} \bigcup_{\Lambda' \in \Omega} \left( \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \left\{ a_{\lambda}' \right\} \right)$ が成り立ち、したがって、次式が得られる。

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} = \operatorname{cl} \bigcup_{\Lambda' \in \Omega} \left( \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \left\{ a_{\lambda}' \right\} \right)$$

ここで、その位相空間 $\left( \bigcup_{\Lambda' \in \Omega} \left( \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \left\{ a_{\lambda}' \right\} \right), \mathfrak{O}'' \right)$ も連結であり、次式が成り立つので、

$$\begin{aligned} \bigcup_{\Lambda' \in \Omega} \left( \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \left\{ a_{\lambda}' \right\} \right) &\subseteq \prod_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} \\ &= \operatorname{cl} \bigcup_{\Lambda' \in \Omega} \left( \prod_{\lambda \in \Lambda'} S_{\lambda} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \left\{ a_{\lambda}' \right\} \right) \end{aligned}$$

その直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda}, \mathfrak{O} \right)$ も連結である。 □

# 参考文献


[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p195-208 ISBN978-4-00-029871-1

## 1.6 compact 空間

### 1.6.1 compact 空間

**定義 1.6.1.** 任意の位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとする。その台集合 $S$ の部分集合系 $\mathfrak{U}$ の和集合 $\bigcup\mathfrak{U}$ が $\bigcup\mathfrak{U}=S$ を満たすとき、その集合 $S$ はその集合 $\mathfrak{U}$ によって覆われるといい、その集合 $\mathfrak{U}$ をその集合 $S$ の被覆という。特に、$\mathfrak{U}\subseteq\mathfrak{O}$ が成り立つとき、即ち、$\forall U\in\mathfrak{U}$ に対し、それらの集合たち $U$ が開集合であるとき、その集合 $\mathfrak{U}$ をその集合 $S$ の開被覆という。さらに、その集合 $\mathfrak{U}$ がその位相 $\mathfrak{O}$ の部分集合で有限集合である、即ち、$\mathfrak{U}\subseteq\mathfrak{O}$ かつ $\#\mathfrak{U}<\aleph_0$ が成り立つとき、その集合 $\mathfrak{U}$ をその集合 $S$ の有限開被覆という。

**定義 1.6.2.** その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、その台集合 $S$ の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ に対し、これの部分集合となるその台集合 $S$ の有限開被覆 $\mathfrak{U}'$ が存在するとき、この位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である、完閉であるなどという。

**定義 1.6.3.** 集合 $S$ の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が与えられたとき、これの任意の空でない有限集合である部分集合に属する集合同士の共通部分が空でないとき、即ち、$\forall\mathfrak{X}'\in\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ に対し、$0<\#\mathfrak{X}'<\aleph_0$ が成り立つなら、$\bigcap\mathfrak{X}'\neq\emptyset$ が成り立つとき、その集合 $\mathfrak{X}$ は有限交叉性を持つという。

**定理 1.6.1.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ について、次のことは同値である。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である。
- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくとき、その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{A}$ かつ有限交叉性を持つなら、$\bigcap\mathfrak{X}\neq\emptyset$ が成り立つ。
- その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性を持つなら、$\bigcap_{X\in\mathfrak{X}}\mathrm{cl}X\neq\emptyset$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとする。その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間でその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくとき、その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{A}$ かつ有限交叉性を持つなら、$\forall X\in\mathfrak{X}$ に対し、$X\in\mathfrak{A}$ が成り立ち $S\setminus X\in\mathfrak{O}$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$\{S\setminus X\in\mathfrak{P}(S)|X\in\mathfrak{X}\}\subseteq\mathfrak{O}$$

ここで、その集合 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性を持つので、$\forall\mathfrak{X}'\in\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ に対し、$\#\mathfrak{X}'<\aleph_0$ が成り立つなら、$\bigcap\mathfrak{X}'\neq\emptyset$ が成り立つ。したがって、$\forall a\in\bigcap\mathfrak{X}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}
a\in\bigcap\mathfrak{X}'&\Leftrightarrow\forall X\in\mathfrak{X}'[a\in X]\\
&\Leftrightarrow\forall X\in\mathfrak{X}'[a\notin S\setminus X]\\
&\Leftrightarrow\forall S\setminus X\in\{S\setminus X\in\mathfrak{P}(S)|X\in\mathfrak{X}'\}[a\notin S\setminus X]\\
&\Leftrightarrow\neg\exists S\setminus X\in\{S\setminus X\in\mathfrak{P}(S)|X\in\mathfrak{X}'\}[a\in S\setminus X]\\
&\Leftrightarrow\neg a\in\bigcup_{S\setminus X\in\{S\setminus X\in\mathfrak{P}(S)|X\in\mathfrak{X}'\}}(S\setminus X)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a \notin \bigcup \{S \setminus X \in \mathfrak{P}(S) | X \in \mathfrak{X}'\}$$

これにより、次式が得られ、

$$S \setminus \bigcup \{S \setminus X \in \mathfrak{P}(S) | X \in \mathfrak{X}'\} \neq \emptyset$$

したがって、その集合 $\{S \setminus X \in \mathfrak{P}(S) | X \in \mathfrak{X}'\}$ はその台集合 $S$ の有限開被覆ではないことになり、ここで、compact 空間の定義が対偶律に適用されれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\emptyset &\neq S \setminus \bigcup \{S \setminus X \in \mathfrak{P}(S) | X \in \mathfrak{X}\} \\
&= S \setminus \bigcup_{S \setminus X \in \{S \setminus X \in \mathfrak{P}(S) | X \in \mathfrak{X}\}} (S \setminus X) \\
&= S \setminus \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} (S \setminus X) \\
&= S \setminus \left(S \setminus \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X\right) \\
&= \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X \\
&= \bigcap \mathfrak{X}
\end{aligned}$$

したがって、$\bigcap \mathfrak{X} \neq \emptyset$ が成り立つ。

逆に、その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$ かつ有限交叉性を持つなら、$\bigcap \mathfrak{X} \neq \emptyset$ が成り立つとき、その台集合 $S$ の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ について、$S = \bigcup \mathfrak{U}$ が成り立つので、

$$\begin{aligned}
\emptyset &= S \setminus S \\
&= S \setminus \bigcup \mathfrak{U} \\
&= S \setminus \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U \\
&= \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} (S \setminus U) \\
&= \bigcap_{S \setminus U \in \{S \setminus U \in \mathfrak{P}(S) | U \in \mathfrak{U}\}} (S \setminus U) \\
&= \bigcap \{S \setminus U \in \mathfrak{P}(S) | U \in \mathfrak{U}\}
\end{aligned}$$

ここで、仮定が対偶律に適用されれば、閉集合でないその集合 $\{S \setminus U \in \mathfrak{P}(S) | U \in \mathfrak{U}\}$ の元が存在するか、その集合 $\{S \setminus U \in \mathfrak{P}(S) | U \in \mathfrak{U}\}$ は有限交叉性を持たないことになる。ここで、閉集合でないその集合 $\{S \setminus U \in \mathfrak{P}(S) | U \in \mathfrak{U}\}$ の元が存在すると仮定すれば、このような元を $S \setminus U'$ とおくと、次のようになり、

$$\begin{aligned}
S \setminus U' \notin \mathfrak{A} &\Leftrightarrow \neg \exists O \in \mathfrak{O} \left[S \setminus U' = S \setminus O\right] \\
&\Leftrightarrow \forall O \in \mathfrak{O} \left[S \setminus U' \neq S \setminus O\right]
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \forall O \in \mathfrak{O}\,[U' \neq O]$$

これはその集合 $\mathfrak{U}$ がその台集合 $S$ の開被覆であることに矛盾する。したがって、その集合 $\{S \setminus U \in \mathfrak{P}(S) | U \in \mathfrak{U}\}$ は有限交叉性を持たないことになり、$\mathfrak{X}' \subseteq \{S \setminus U \in \mathfrak{P}(S) | U \in \mathfrak{U}\}$ かつ $\#\mathfrak{X}' < \aleph_0$ なるある集合 $\mathfrak{X}'$ に対し、$\bigcap \mathfrak{X}' = \emptyset$ が成り立つ。したがって、次のようになり、

$$\begin{aligned} S &= S \setminus \emptyset \\ &= S \setminus \bigcap \mathfrak{X}' \\ &= S \setminus \bigcap_{S \setminus U \in \mathfrak{X}'} (S \setminus U) \\ &= \bigcup_{S \setminus U \in \mathfrak{X}'} (S \setminus (S \setminus U)) \\ &= \bigcup_{S \setminus U \in \mathfrak{X}'} U \end{aligned}$$

これにより、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は compact 空間である。

その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$ かつ有限交叉性を持つなら、$\bigcap \mathfrak{X} \neq \emptyset$ が成り立つとき、その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}'$ が有限交叉性を持つなら、集合 $\{\mathrm{cl}X \in \mathfrak{P}(S) | X \in \mathfrak{X}'\}$ の部分集合で $\#\mathfrak{X}'' < \aleph_0$ なる任意の集合 $\mathfrak{X}''$ に対し、次式が成り立つので、

$$\begin{aligned} \bigcap \mathfrak{X}'' &= \bigcap_{\mathrm{cl}X \in \mathfrak{X}''} \mathrm{cl}X \\ &= \bigcap_{\substack{X \in \mathfrak{X}' \\ \mathrm{cl}X \in \mathfrak{X}''}} \mathrm{cl}X \\ &\supseteq \bigcap_{\substack{X \in \mathfrak{X}' \\ \mathrm{cl}X \in \mathfrak{X}''}} X \neq \emptyset \end{aligned}$$

その集合 $\{\mathrm{cl}X \in \mathfrak{P}(S) | X \in \mathfrak{X}'\}$ も有限交叉性をもつことになり、この集合は明らかにその集合 $\mathfrak{A}$ の部分集合であるから、仮定より次式が成り立つ。

$$\bigcap \{\mathrm{cl}X \in \mathfrak{P}(S) | X \in \mathfrak{X}'\} = \bigcap_{X \in \mathfrak{X}'} \mathrm{cl}X \neq \emptyset$$

逆に、その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性を持つなら、$\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathrm{cl}X \neq \emptyset$ が成り立つとき、その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}'$ が $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{A}$ かつ有限交叉性を持つなら、次のようになる。

$$\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathrm{cl}X = \bigcap_{X \in \mathfrak{X}'} X \neq \emptyset$$

□

**定理 1.6.2.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ が compact 空間であるならそのときに限り、$\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{O}$ かつ $M \subseteq \bigcup \mathfrak{U}$ なる任意の集合 $\mathfrak{U}$ に対し $\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U}$ かつ $M \subseteq \bigcup \mathfrak{U}'$ かつ $\#\mathfrak{U}' < \aleph_0$ なる集合 $\mathfrak{U}'$ が存在する。

**証明.** 定義より位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が compact 空間であるならそのときに限り、任意のその位相 $\mathfrak{O}_M$ の元の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、$M=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ が成り立つなら、$\Lambda'\subseteq\Lambda$ かつ $\#\Lambda'<\aleph_0$ に対し、$M=\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}O_\lambda$ が成り立つ。ここで、$\forall O\in\mathfrak{O}_M$ に対し、$O=M\cap O'$ なる集合 $O'$ がその位相 $\mathfrak{O}$ に存在するのであった。これにより、$\forall\lambda\in\Lambda$ に対し、$O_\lambda=M\cap O'_\lambda$ なる任意のその位相 $\mathfrak{O}$ の元の族 $\{O'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}M&=\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}O_\lambda\\&=\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}(M\cap O'_\lambda)\\&=M\cap\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}O'_\lambda\\&\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}O'_\lambda\\&\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O'_\lambda\end{aligned}$$

□

**定理 1.6.3.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の有限集合である添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた部分位相空間からなる族 $\{(M_\lambda,\mathfrak{O}_{M_\lambda})\}_{\lambda\in\Lambda}$ がいずれも compact 空間であるなら、部分位相空間 $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda,\mathfrak{O}_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda}\right)$ も compact 空間である。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の有限集合である添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた部分位相空間からなる族 $\{(M_\lambda,\mathfrak{O}_{M_\lambda})\}_{\lambda\in\Lambda}$ がいずれも compact 空間であるなら、$\mathfrak{U}_\lambda\subseteq\mathfrak{O}$ かつ $M_\lambda\subseteq\bigcup\mathfrak{U}_\lambda$ なる任意の集合 $\mathfrak{U}_\lambda$ に対し、$\mathfrak{U}'_\lambda\subseteq\mathfrak{U}_\lambda$ かつ $M_\lambda\subseteq\bigcup\mathfrak{U}'_\lambda$ かつ $\#\mathfrak{U}'_\lambda<\aleph_0$ なる集合 $\mathfrak{U}'_\lambda$ が存在する。したがって、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{U}_\lambda\subseteq\mathfrak{O}$ かつ $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup\mathfrak{U}_\lambda$ なる集合 $\bigcup\mathfrak{U}_\lambda$ には任意性があり、これにより、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{U}'_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{U}_\lambda$ が成り立つかつ、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup\mathfrak{U}'_\lambda$ が成り立ち、さらに、$\#\mathfrak{U}'_\lambda<\aleph_0$ かつ $\#\Lambda<\aleph_0$ が成り立つので、その集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup\mathfrak{U}'_\lambda$ はその位相 $\mathfrak{O}$ の有限集合である部分集合 $\mathfrak{U}$ を用いて $\bigcup\mathfrak{U}$ とおくことができる。よって、部分位相空間 $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda,\mathfrak{O}_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda}\right)$ も compact 空間である。 □

**定理 1.6.4.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるなら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ での任意の閉集合 $A$ を台集合とする部分位相空間 $(A,\mathfrak{O}_A)$ も compact 空間である。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ での任意の閉集合 $A$ を台集合とする部分位相空間 $(A,\mathfrak{O}_A)$ について、その位相 $\mathfrak{O}$ の部分集合で $A\subseteq\bigcup\mathfrak{U}$ が成り立つような集合 $\mathfrak{U}$ が用いられると、次のようになる。

$$S=A\sqcup(S\setminus A)$$

$$=\bigcup\mathfrak{U}\cup(S\setminus A)$$

ここで、$S\setminus A\in\mathfrak{O}$ が成り立つので、集合 $\mathfrak{U}\cup\{S\setminus A\}$ はその台集合 $S$ の開被覆である。このとき、$\mathfrak{U}'\subseteq\mathfrak{U}\cup\{S\setminus A\}$ かつ $\#\mathfrak{U}'<\aleph_0$ なるその台集合 $S$ の開被覆 $\mathfrak{U}'$ が存在し、やはり、$\mathfrak{U}'\cup\{S\setminus A\}\subseteq\mathfrak{U}\cup\{S\setminus A\}$ かつ $\#\left(\mathfrak{U}'\cup\{S\setminus A\}\right)<\aleph_0$ が成り立つので、その集合 $\mathfrak{U}'\cup\{S\setminus A\}$ もその台集合 $S$ の開被覆となり、したがって、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}S&=\bigcup\left(\mathfrak{U}'\cup\{S\setminus A\}\right)\\&=\bigcup\mathfrak{U}'\cup(S\setminus A)\\&=A\sqcup(S\setminus A)\end{aligned}$$

これにより、$A\subseteq\bigcup\mathfrak{U}'$ が成り立つので、その部分位相空間 $(A,\mathfrak{O}_A)$ も compact 空間である。 □

**定理 1.6.5.** compact 空間である位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ ともう 1 つの位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ を用いて連続写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとする。このとき、位相空間 $\left(V(f|S),\mathfrak{O}_{V(f|S)}\right)$ も compact 空間となる。

**証明.** compact 空間である位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ ともう 1 つの位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ を用いて連続写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとする。このとき、その位相 $\mathfrak{P}$ の開集合たちからなる族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ を用いて、$V(f|S)\subseteq\bigcup_{\lambda\in\varLambda}P_\lambda$ が成り立つとすれば、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}S&=V\left(f^{-1}|V(f|S)\right)\\&=V\left(f^{-1}|\bigcup_{\lambda\in\varLambda}P_\lambda\right)\\&=\bigcup_{\lambda\in\varLambda}V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)\end{aligned}$$

ここで、その写像 $f$ は連続なので、$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、$V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)\in\mathfrak{O}$ が成り立ちその位相 $\mathfrak{O}$ の族 $\left\{V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ はその台集合 $S$ の開被覆であり、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間なので、$\varLambda'\subseteq\varLambda$ かつ $\#\varLambda'<\aleph_0$ なるその位相 $\mathfrak{O}$ の族 $\left\{V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda'}$ もその台集合 $S$ の開被覆であることになる。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}V(f|S)&=V\left(f|\bigcup_{\lambda\in\varLambda'}V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)\right)\\&\subseteq\bigcup_{\lambda\in\varLambda'}V\left(f|V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)\right)\\&\subseteq\bigcup_{\lambda\in\varLambda'}P_\lambda\end{aligned}$$

定理 1.6.2 よりよって、その位相空間 $\left(V(f|S),\mathfrak{O}_{V(f|S)}\right)$ も compact 空間となる。 □

**定理 1.6.6.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ と連続写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとする。その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が compact 空間であるなら、その位相空間 $(T,\mathfrak{P})$ の部分位相空間 $\left(V(f|M),\mathfrak{O}_{V(f|M)}\right)$ も compact 空間である。

**証明.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ と連続写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとする。その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が compact 空間であるとき、その位相 $\mathfrak{P}$ の開集合たちからなる族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を用いて、$V(f|M)\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda$ が成り立つとすれば、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} M &\subseteq V\left(f^{-1}|V(f|M)\right) \\ &\subseteq V\left(f^{-1}|\bigcup_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda\right) \\ &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda}V\left(f^{-1}|P_\lambda\right) \end{aligned}$$

ここで、その写像 $f$ は連続なので、$\forall\lambda\in\Lambda$ に対し、$V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)\in\mathfrak{O}$ が成り立ちその位相 $\mathfrak{O}$ の族 $\left\{V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ は $M\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)$ を満たしその位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ は compact 空間なので、$\Lambda'\subseteq\Lambda$ かつ $\#\Lambda'<\aleph_0$ なるその位相 $\mathfrak{O}$ の族 $\left\{V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\Lambda'}$ も $M\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)$ を満たすことになる。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} V(f|M) &\subseteq V\left(f|\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)\right) \\ &\subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda'}V\left(f|V\left(f^{-1}|P_\lambda\right)\right) \\ &\subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda'}P_\lambda \end{aligned}$$

定理 1.6.2 よりよって、その部分位相空間 $\left(V(f|M),\mathfrak{O}_{V(f|M)}\right)$ も compact 空間である。 □

### 1.6.2 Tikhonov の定理

**定理 1.6.7** (Tikhonov の定理)**.** 添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda,\mathfrak{O}\right)$ が compact 空間であるならそのときに限り、$\forall\lambda\in\Lambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ が compact 空間である。

この定理を Tikhonov の定理という[*10]。

これは次のようにして示される。

1. 定理 1.6.5 に注意すれば、定理 1.5.11 の証明の前半と同様にして、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda,\mathfrak{O}\right)$ が compact 空間であるなら、$\forall\lambda\in\Lambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ が compact 空間であることが示される。
2. その集合 $\mathfrak{P}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda\right)$ の部分集合 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性をもつことは有限的な性質である[*11]ことを示す。

---

*10 この定理は 1935 年に証明されたものだそうで、選択公理との関係などこの定理からわかることが多い。また、箱型位相といわれる直積位相と似たものがあるが、これでは成り立たない。

*11 ある集合 $A$ の部分集合 $A'$ に関する命題 $P\left(A'\right)$ があって、その集合 $A$ の部分集合 $A''$ について $P\left(A''\right)$ が成り立つこととその

3. その集合 $\mathfrak{P}\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda}\right)$ の有限交叉性をもつような部分集合 $\mathfrak{X}$ 全体の集合 $\varOmega$ について、Tukey の補題の系より*12順序集合 $(\varOmega,\subseteq)$ で極大な部分集合 $\mathfrak{X}^{*}$ が存在し、$\forall\mathfrak{X}\in\varOmega$ に対し、$\bigcap_{X\in\mathfrak{X}^{*}}\mathrm{cl}X\subseteq\bigcap_{X\in\mathfrak{X}}\mathrm{cl}X$ が成り立つ。
4. 選択の公理より*13その直積 $\prod_{\lambda\in\varLambda}\bigcap_{X\in\mathfrak{X}^{*}}\mathrm{cl}V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}|X\right)$ は空集合でないことを示す。
5. この直積の任意の元 $a$ に対し、その元 $\mathrm{pr}_{\lambda}a$ の任意の近傍 $V_{\lambda}$ を用いて、$\forall X\in\mathfrak{X}^{*}$ に対し、定理 1.1.10 より*14集合 $X\cap V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}^{-1}|V_{\lambda}\right)$ が空集合でないことを示す。
6. その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda},\mathfrak{O}\right)$ の基本近傍系を構成して定理 1.1.9 より*15その集合 $\bigcap_{X\in\mathfrak{X}^{*}}\mathrm{cl}X$ 空集合でないことを示す。
7. 定理 1.6.1 よりその位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda},\mathfrak{O}\right)$ は compact 空間であることが示される。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda})\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda},\mathfrak{O}\right)$ が compact 空間であるなら、$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、射影たち $\mathrm{pr}_{\lambda}:\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda}\rightarrow S_{\lambda}$ は定義より明らかに連続写像で、このとき、定理 1.6.5 よりその位相空間 $(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda})$ の部分位相空間 $\left(V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}\right),\mathfrak{O}_{V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}\right)}\right)$ は compact 空間となるのであった。このとき、それらの射影たち $\mathrm{pr}_{\lambda}$ の定義より明らかに $V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}\right)=S_{\lambda}$ が成り立ち、さらに、その直積位相 $\mathfrak{O}$ はその直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0}\right)$ の初等開集合全体の集合が 1 つの開基となるので、これの和集合に制限されたそれらの射影たち $\mathrm{pr}_{\lambda}$ の値域がそれらの位相空間たち $(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda})$ の開集合 $O_{\lambda}$ となることに注意すれば、やはり $\mathfrak{O}_{V\left(\mathrm{pr}_{\lambda}\right)}=\mathfrak{O}_{\lambda}$ が成り立つ。以上より、その位相空間 $(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda})$ は compact 空間である*16。

逆に、$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda})$ が compact 空間であるとしよう。

その直積 $\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda}$ の部分集合全体の集合 $\mathfrak{P}\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_{\lambda}\right)$ の有限交叉性をもつような部分集合 $\mathfrak{X}$ 全体の集合 $\varOmega$ について、$\forall\mathfrak{X}\in\varOmega$ に対し、$\mathfrak{X}'\subseteq\mathfrak{X}$ なる任意の有限な部分集合 $\mathfrak{X}'$ を用いて $\bigcap\mathfrak{X}'\neq\emptyset$ が成り立つことになる

---

集合 $A''$ の全ての有限な部分集合たち $A'''$ について $P\left(A'''\right)$ が成り立つことが同値なとき、その命題 $P$ を有限的な性質、有限的な条件などといったりする。これは Tukey の補題などの証明で使われる。

*12 これは次のことを主張する定理で Zorn の補題から示されることができる。
集合 $A$ の部分集合に関する有限的な性質 $P$ を満たすようなその集合 $A$ の部分集合 $A'$ が与えられたなら、その命題 $P$ を満たすようなその集合 $A$ の部分集合全体の集合を $\mathfrak{M}$ とおくとき、順序集合 $(\mathfrak{M},\subseteq)$ で極大な部分集合 $A''$ が存在し $A'\subseteq A''$ が成り立つ。

*13 選択の公理と空でない集合 $\varLambda$ によって添数づけられた族 $\left\{A_{\lambda}\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積 $\prod_{\lambda\in\varLambda}A_{\lambda}$ において、$\forall\lambda\in\varLambda$に対し $A_{\lambda}\neq\emptyset$ が成り立つならそのときに限り、その直積 $\prod_{\lambda\in\varLambda}A_{\lambda}$ が空集合でないという主張とは同値なことに注意しよう。

*14 1 つの位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとするとき、次のことが成り立つということを主張する定理である。
- $\forall O\in\mathfrak{O}\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$O\cap\mathrm{cl}M\subseteq\mathrm{cl}(O\cap M)$ が成り立つ。
- $\forall O\in\mathfrak{O}\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$O\cap M=\emptyset$ が成り立つなら、$O\cap\mathrm{cl}M=\emptyset$ が成り立つ。

*15 次のことを主張する定理である。
1 つの位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとすると、$\forall a\in S$ に対し、$a\in\mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り、$\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、$a\in O$ が成り立つなら、$O\cap M\neq\emptyset$ が成り立つ。

*16 ここまでの議論は定理 1.5.11 と類似性があることに注意すれば、意外と思いつきやすいかも (?)

のであった。これにより、その部分集合 $\mathfrak{X}'$ の任意の部分集合 $\mathfrak{X}''$ はもちろん有限で $\bigcap\mathfrak{X}' \subseteq \bigcap\mathfrak{X}''$ が成り立つので、$\bigcap\mathfrak{X}'' \neq \emptyset$ が成り立つことになる。したがって、その任意の部分集合 $\mathfrak{X}''$ は有限交叉性をもつ。逆に、その集合 $\mathfrak{P}\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda\right)$ の任意の部分集合 $\mathfrak{X}$ に対し、その集合 $\mathfrak{X}$ の任意の有限な部分集合 $\mathfrak{X}'$ の部分集合 $\mathfrak{X}''$ に対し、$\bigcap\mathfrak{X}'' \neq \emptyset$ が成り立つなら、その集合 $\mathfrak{X}'$ もその集合 $\mathfrak{X}'$ 自身の部分集合でもあるので、$\bigcap\mathfrak{X}' \neq \emptyset$ が成り立つことになる。したがって、この集合 $\mathfrak{X}$ は有限交叉性をもつ。以上より、その集合 $\mathfrak{P}\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda\right)$ の部分集合 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性をもつことは有限的な性質である。

Tukey の補題の系より順序集合 $(\varOmega, \subseteq)$ で極大な部分集合 $\mathfrak{X}^*$ が存在し、$\forall\mathfrak{X} \in \varOmega$ に対し、$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^*$ が成り立つ。ここで、$\forall\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \varOmega$ に対し、$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ が成り立つなら、$\bigcap_{X\in\mathfrak{Y}} \mathrm{cl}X \subseteq \bigcap_{X\in\mathfrak{X}} \mathrm{cl}X$ が成り立つことに注意すれば、$\forall\mathfrak{X} \in \varOmega$ に対し、$\bigcap_{X\in\mathfrak{X}^*} \mathrm{cl}X \subseteq \bigcap_{X\in\mathfrak{X}} \mathrm{cl}X$ が成り立つことになる。

ここで、$\forall X \in \mathfrak{X}^*$ に対し、射影 $\mathrm{pr}_\lambda : \prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda \rightarrow S_\lambda$ のその集合 $X$ による値域 $V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right)$ 全体の集合を $\mathfrak{X}_\lambda$ とおく。これの任意の有限な部分集合 $\mathfrak{X}_\lambda'$ の任意の元 $X_\lambda'$ に対し、その射影 $\mathrm{pr}_\lambda$ の逆対応の値域 $V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|X_\lambda'\right)$ について、$X_\lambda' = V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right)$ なるその集合 $\mathfrak{X}^*$ の元 $X$ が存在するので、次式が成り立つ。

$$V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|X_\lambda'\right) = V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right)\right) \supseteq X$$

このような集合 $X$ 全体の集合を $\mathfrak{X}'$ とおくと、$\bigcap\mathfrak{X}' \neq \emptyset$ が成り立つので、その集合 $\bigcap\mathfrak{X}'$ の元 $a$ が存在して、$\forall X_\lambda' \in \mathfrak{X}_\lambda'$ に対し、$\mathrm{pr}_\lambda a \in X_\lambda'$ が成り立ち、したがって、$\mathrm{pr}_\lambda a \in \bigcap\mathfrak{X}_\lambda'$ が成り立つ。これにより、その集合 $\bigcap\mathfrak{X}_\lambda'$ は空集合でなくその集合 $\mathfrak{X}_\lambda$ は有限交叉性をもつ。ここで、その集合 $S_\lambda$ は compact 空間であるから、$\bigcap_{X\in\mathfrak{X}^*} \mathrm{cl}V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right) \neq \emptyset$ が成り立つ。このようなことが全ての添数 $\lambda$ に対し成り立つので、選択の公理よりその直積 $\prod_{\lambda\in\varLambda} \bigcap_{X\in\mathfrak{X}^*} \mathrm{cl}V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right)$ は空集合でない。

この直積の任意の元 $a$ に対し、$\mathrm{pr}_\lambda a \in \bigcap_{X\in\mathfrak{X}^*} \mathrm{cl}V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right)$ が成り立つので、$\forall X \in \mathfrak{X}^*$ に対し、その元 $\mathrm{pr}_\lambda a$ のその位相空間 $\left(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda\right)$ における任意の近傍 $V_\lambda$ を用いて次のようになる。

$$\mathrm{pr}_\lambda a \in \bigcap_{X\in\mathfrak{X}^*} \mathrm{cl}V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right) \cap \mathrm{int}V_\lambda \subseteq \mathrm{cl}V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right) \cap \mathrm{int}V_\lambda$$

これにより、その集合 $\mathrm{cl}V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right) \cap \mathrm{int}V_\lambda$ は空集合でなく、定理 1.1.10 よりその集合 $V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right) \cap V_\lambda$ も空集合でない。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}\emptyset &\neq V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right) \cap V_\lambda\right)\\ &= V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V\left(\mathrm{pr}_\lambda|X\right)\right) \cap V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V_\lambda\right)\\ &\subseteq X \cap V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V_\lambda\right)\end{aligned}$$

その集合 $\mathfrak{X}$ の任意の有限な部分集合 $\mathfrak{X}'$ を用いて $\bigcap\mathfrak{X}' \cap V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V_\lambda\right) \neq \emptyset$ が成り立つので、$\varLambda' \subseteq \varLambda$ なる有限な添数集合 $\varLambda'$ を用いて $\bigcap\mathfrak{X}' \cap \bigcap_{\lambda\in\varLambda'} V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V_\lambda\right) \neq \emptyset$ が成り立ち、したがって、$\mathfrak{X}^* \cup \left\{\bigcap_{\lambda\in\varLambda'} V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V_\lambda\right)\right\} \in \varOmega$

が成り立つ。ここで、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V_\lambda\right) \notin \mathfrak{X}^*$ が成り立つと仮定すると、$\mathfrak{X}^* \subset \mathfrak{X}^* \cup \left\{\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V_\lambda\right)\right\}$ が成り立ち、その集合 $\mathfrak{X}^*$ が極大元であることに矛盾する。したがって、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V_\lambda\right) \in \mathfrak{X}^*$ が成り立つ。

$\forall X \in \mathfrak{X}^*$ に対し、その集合 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V_\lambda\right)$ の形の集合全体の集合 $\mathbf{V}^*(a)$ はその元 $a$ のその位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda, \mathfrak{O}\right)$ における 1 つの基本近傍系をなす。これにより、$a \in O$ なる任意の開集合 $O$ に対し、$V^* \subseteq O$ なるその集合 $\mathbf{V}^*(a)$ の元が存在し、$\forall X \in \mathfrak{X}^*$ に対し、次式が成り立つので、

$$\emptyset \neq X \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda'} V\left(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}|V_\lambda\right)$$

$a \in O$ なる任意の開集合 $O$ に対し、$O \cap X \neq \emptyset$ が成り立つので、定理 1.1.9 より $a \in \mathrm{cl}X$ が成り立つ。これにより、$a \in \bigcap_{X \in \mathfrak{X}^*} \mathrm{cl}X$ が成り立つので、その集合 $\bigcap_{X \in \mathfrak{X}^*} \mathrm{cl}X$ は空集合でない。

$\forall \mathfrak{X} \in \Omega$ に対し、$\bigcap_{X \in \mathfrak{X}^*} \mathrm{cl}X \subseteq \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathrm{cl}X$ が成り立つことに注意すれば、その集合 $\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathrm{cl}X$ は空集合でなく、定理 1.6.1 よりその位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda, \mathfrak{O}\right)$ は compact 空間である。 □

### 1.6.3 Hausdorff 空間

**定義 1.6.4.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$a \in S$ なる元 $a$ の基本近傍系を $\mathbf{V}(a)$ とおくことにすると、$\forall a, b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$\exists V_a \in \mathbf{V}(a) \exists V_b \in \mathbf{V}(b)$ に対し、$V_a \cap V_b = \emptyset$ が成り立つ、即ち、$V_a \cap V_b = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ の近傍たちそれぞれ $V_a$、$V_b$ が存在するような位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ を Hausdorff 空間という。

**定理 1.6.8.** Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、集合 $\{a\}$ はその Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ での閉集合となる。

**証明.** Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、集合 $\{a\}$ が考えられれば、$\forall b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$V_a \cap V_b = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ の近傍たちそれぞれ $V_a$、$V_b$ が存在することになり、$\{a\} \subseteq \mathrm{int}V_a$ が成り立つことに注意すれば、$\mathrm{int}\left(V_a \cap V_b\right) = \mathrm{int}V_a \cap \mathrm{int}V_b = \emptyset$ が成り立ち、したがって、$\{a\} \cap \mathrm{int}V_b = \emptyset$ が成り立つ。ここで、定理 1.1.10 より $\mathrm{cl}\{a\} \cap \mathrm{int}V_b = \emptyset$ が成り立つので、$b \notin \mathrm{cl}\{a\}$ が成り立つ。対偶律により、$b \in \mathrm{cl}\{a\}$ が成り立つなら、$b \in \mathrm{cl}\{a\}$ が成り立つので、$\mathrm{cl}\{a\} = \{a\}$ が得られる。よって、$\forall a \in S$ に対し、集合 $\{a\}$ はその Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ での閉集合となる。 □

**定理 1.6.9.** Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、これの任意の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ も Hausdorff 空間である。

**証明.** Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、これの任意の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ について、$\forall a, b \in M$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$V_a \cap V_b = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ のその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ における近傍たちそれぞれ $V_a$、$V_b$ が存在するのであった。ここで、それらの集合たち $V_a \cap M$、$V_b \cap M$ はそれぞれそれらの元々 $a$、$b$ のその位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ における近傍となることに注意すれば、次のようになるので、

$$\emptyset = V_a \cap V_b$$

$$
\begin{aligned}
&= V_a \cap V_b \cap M \\
&= (V_a \cap M) \cap (V_b \cap M)
\end{aligned}
$$

その部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ も Hausdorff 空間である。 □

**定理 1.6.10.** Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ が compact 空間であるなら、その集合 $M$ はその Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ での閉集合となる。

**証明.** Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ が compact 空間であるとき、その集合 $S \setminus M$ の任意の元 $a$ とその集合 $M$ の任意の元 $b$ は明らかに $a \neq b$ を満たし、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は Hausdorff 空間でもあるので、$U_b \cap V_b = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ のその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ における近傍たちそれぞれ $U_b$、$V_b$ が存在する。$b \in M$ なるこのような近傍 $V_b$ の開核全体の集合を $\mathfrak{V}$ とおくと、$\forall b \in M$ に対し、$b \in \mathrm{int}V_b$ なる集合 $\mathrm{int}V_b$ がこの集合 $\mathfrak{V}$ に存在することから、その集合 $\mathfrak{V}$ はその集合 $M$ の開被覆であり $M \subseteq \bigcup \mathfrak{V}$ が成り立つ。そこで、その部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ は compact 空間であるので、定理 1.6.2 よりその集合 $\mathfrak{V}$ の有限な部分集合 $\mathfrak{V}'$ で $M \subseteq \bigcup \mathfrak{V}'$ が成り立つようなその集合 $\mathfrak{V}'$ が存在する。$\forall V \in \mathfrak{V}'$ に対し、定義より $V = \mathrm{int}V_b$ なるその集合 $M$ の元が存在して、これのうち 1 つ $b$ 全体の集合を $M'$ とおくと、その集合 $M'$ は有限集合であり、$\forall b \in M'$ に対し、$a \in \mathrm{int}U_b$ が成り立つので、$a \in \bigcap_{b \in M'} \mathrm{int}U_b$ が成り立つ。したがって、$\forall b \in M'$ に対し、$\bigcap_{b \in M'} \mathrm{int}U_b \subseteq U_b$ かつ $U_b \cap V_b = \emptyset$ が成り立つので、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\emptyset &= \bigcup_{b \in M'} (U_b \cap V_b) \\
&\supseteq \bigcup_{b \in M'} \mathrm{int}\,(U_b \cap V_b) \\
&= \bigcup_{b \in M'} (\mathrm{int}U_b \cap \mathrm{int}V_b) \\
&\supseteq \bigcup_{b \in M'} \left( \bigcap_{b' \in M'} \mathrm{int}U_{b'} \cap \mathrm{int}V_b \right) \\
&= \bigcup_{b \in M'} \left( \mathrm{int} \bigcap_{b' \in M'} U_{b'} \cap \mathrm{int}V_b \right) \\
&= \mathrm{int} \bigcap_{b \in M'} U_b \cap \bigcup_{b \in M'} \mathrm{int}V_b \\
&= \mathrm{int} \bigcap_{b \in M'} U_b \cap \bigcup \mathfrak{V}' \\
&\supseteq \mathrm{int} \bigcap_{b \in M'} U_b \cap M
\end{aligned}
$$

これにより、その集合 $\mathrm{int} \bigcap_{b \in M'} U_b \cap M$ は空集合であるので、その集合 $\mathrm{int} \bigcap_{b \in M'} U_b$ は明らかにその元 $a$ の近傍で $\mathrm{int} \bigcap_{b \in M'} U_b \subseteq S \setminus M$ が成り立つ。したがって、$\mathrm{int} \bigcap_{b \in M'} U_b = \mathrm{int}\mathrm{int} \bigcap_{b \in M'} U_b \subseteq \mathrm{int}(S \setminus M)$ が成り立つので、その集合 $S \setminus M$ はその元 $a$ のその Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ における近傍となっており、$\forall a \in S \setminus M$ に対し、その集合 $S \setminus M$ はその元 $a$ の近傍となっているので、定理 1.1.23 よりその集合 $S \setminus M$ はその Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ における開集合となり、よって、その集合 $M$ はその Hausdorff 空間 $(S, \mathfrak{O})$ での閉集合となる。 □

**定理 1.6.11.** compact 空間 $(S,\mathfrak{O})$ から Hausdorff 空間 $(T,\mathfrak{P})$ への連続写像 $f$ は閉写像である。

**証明.** compact 空間 $(S,\mathfrak{O})$ から Hausdorff 空間 $(T,\mathfrak{P})$ への連続写像 $f$ が与えられたとき、定理 1.6.4 よりその compact 空間 $(S,\mathfrak{O})$ の任意の閉集合 $M$ を台集合とする部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ も compact 空間で定理 1.6.6 よりその Hausdorff 空間 $(T,\mathfrak{P})$ の部分位相空間 $\left(V(f|M),\mathfrak{O}_{V(f|M)}\right)$ は compact 空間であるので、定理 1.6.10 よりその集合 $V(f|M)$ はその Hausdorff 空間 $(S,\mathfrak{O})$ での閉集合となる。以上より、その写像 $f$ は閉写像である。 □

**定理 1.6.12.** compact 空間 $(S,\mathfrak{O})$ から Hausdorff 空間 $(T,\mathfrak{P})$ への全単射な連続写像 $f$ は同相写像である。

**証明.** compact 空間 $(S,\mathfrak{O})$ から Hausdorff 空間 $(T,\mathfrak{P})$ への連続写像 $f$ は閉写像でもあるのであった。ここで、連続写像が閉写像であるかつ全単射であるなら、定理 1.3.10 よりその写像 $f$ は同相写像である。 □

**定理 1.6.13.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとする。$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、その位相空間 $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ が Hausdorff 空間であるなら、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_\lambda,\mathfrak{O}\right)$ も Hausdorff 空間である。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとする。$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、その位相空間 $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ が Hausdorff 空間であるとする。その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_\lambda,\mathfrak{O}\right)$ において、$\forall(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda},(b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}\in\prod_{\lambda\in\varLambda}S_\lambda$ に対し、$(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}\neq(b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ が成り立つなら、$\exists\lambda'\in\varLambda$ に対し、これらの元々 $a_{\lambda'}$、$b_{\lambda'}$ のある近傍たちそれぞれ $V_{a_{\lambda'}}$、$V_{b_{\lambda'}}$ が存在して、$V_{a_{\lambda'}}\cap V_{b_{\lambda'}}=\emptyset$ が成り立つ。このとき、その全近傍系自身も基本近傍系であることに注意すれば、残りの添数 $\lambda$ について、その集合 $S_\lambda$ がそれらの元々 $a_\lambda$、$b_\lambda$ の近傍であるので、それらの集合たち $\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}}S_\lambda\times V_{a_{\lambda'}}$、$\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}}S_\lambda\times V_{b_{\lambda'}}$ はこれらの元々 $(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$、$(b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ の近傍となる。このとき、選択の公理より次のようになるので、

$$\begin{aligned}\left(\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}}S_\lambda\times V_{a_{\lambda'}}\right)\cap\left(\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}}S_\lambda\times V_{b_{\lambda'}}\right)&=\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}}(S_\lambda\cap S_\lambda)\times\left(V_{a_{\lambda'}}\cap V_{b_{\lambda'}}\right)\\&=\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}}S_\lambda\times\emptyset=\emptyset\end{aligned}$$

その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_\lambda,\mathfrak{O}\right)$ も Hausdorff 空間である。 □

ここで、Hausdorff 空間 $(S,\mathfrak{O})$ とその集合 $S$ 上の同値関係 $R$ が与えられたとき、その商位相空間 $(S/R,\bar{\mathfrak{O}})$ も Hausdorff 空間であるとはかぎらない[*17]。

---

[*17] 反例を 2 つ挙げておこう。

1 つめの反例として、後述する 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ が与えられたとき、$a-b\in\mathbb{Q}$ でもって同値関係 $a\sim b$ が定義されると、その商位相空間 $(\mathbb{R}/\sim,\bar{\mathfrak{O}})$ は Hausdorff 空間でない。実際、これが Hausdorff 空間と仮定すると、定理 1.6.8 よりその集合 $\{0\}$ は閉集合となるので、$C_{\sim}^{-1}(\{0\})=\mathbb{Q}$ よりその集合 $\mathbb{Q}$ も閉集合となるが、すべての実数には有理数列があってこれの極限値とできることから、$\mathrm{cl}\mathbb{Q}=\mathbb{R}$ より $\mathbb{Q}=\mathbb{R}$ となり矛盾する。

2 つめの反例として、$\mathbb{C}^\times=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とおきその集合 $\mathbb{C}$ を 2 次元数空間 $\mathbb{R}^2$ と同一視し 2 次元 Euclid 空間 $E^2$ における位相空間 $\left(\mathbb{C},\mathfrak{O}_{d_{E^2}}\right)$ から誘導される部分位相空間 $(\mathbb{C}^\times,\mathfrak{O})$ が $\mathfrak{O}=\left(\mathfrak{O}_{d_{E^2}}\right)_{\mathbb{C}^\times}$ として考えられよう。このとき、次式が成り立つこと

**定義 1.6.5.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の近傍 $V$ でその部分位相空間 $(V,\mathfrak{O}_V)$ が compact 空間であるようなものが少なくとも 1 つ存在するようなその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ を局所 compact 空間である、局所的に完閉であるという。

**定理 1.6.14.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるなら、局所 compact 空間である。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるなら、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の近傍としてその台集合 $S$ がとれる。実際、$a \in S = \mathrm{int}S$ が成り立つ。このとき、その近傍 $S$ を台集合とする部分位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ はもとの位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ 自身そのものであるから、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間であったことに注意すれば、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は局所 compact 空間である。 □

### 1.6.4 1 点 compact 化

位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と同相な位相空間を部分位相空間として含むような compact 空間を求めることについて考えよう。この問題は位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の compact 化の問題といわれる。これについてはさまざまな方法があることが知られており、本項では、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が局所 compact 空間であるかつ、Hausdorff 空間であるとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ に 1 つの点を付け加えることでその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるかつ、Hausdorff 空間であることができる。このことを詳しく述べたものが次の定理として与えられよう。

**定理 1.6.15** (1 点 compact 化)**.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、その台集合 $S$ にない点 $a_\infty$ を付け加えた集合 $S \cup \{a_\infty\}$ を $S^*$ とおき、これを台集合とするある位相 $\mathfrak{O}^*$ を用いた位相空間 $(S^*,\mathfrak{O}^*)$ が次のことを満たすように構成されることができるならそのときに限り、

- その位相空間 $(S^*,\mathfrak{O}^*)$ は compact 空間である。
- その位相空間 $(S^*,\mathfrak{O}^*)$ は Hausdorff 空間である。
- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ はその位相空間 $(S^*,\mathfrak{O}^*)$ の部分位相空間となっている。

その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が局所 compact 空間な Hausdorff 空間である。さらに、その位相空間 $(S^*,\mathfrak{O}^*)$ は一意的である。この定理は 1 点 compact 化、Alexandrov 拡大などといわれる。

これは次のようにして示される。

1. その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、ある手続きで集合 $\mathfrak{O}^*$ が定義されたとする。
2. このとき、$O \in \mathfrak{O}^*$ が成り立つなら、$O \setminus \{a_\infty\} = O \cap S \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

---

でもって同値関係 $z \sim w$ が定義されると、

$$\begin{cases} 0 < \mathrm{Im}z\mathrm{Im}w & \text{if} \quad \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}w = 0 \\ \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}w & \text{otherwise} \end{cases}$$

その商位相空間 $(\mathbb{C}^\times / \sim, \bar{\mathfrak{O}})$ は Hausdorff 空間でない。実際、同値類たち $C_\sim(i)$、$C_\sim(-i)$ の任意の近傍たちそれぞれ $V$、$W$ がとられれば、$C_\sim(i) \in \mathrm{int}V$、$C_\sim(-i) \in \mathrm{int}W$ が成り立つ。そこで、それらの集合たち $\mathrm{int}V$、$\mathrm{int}W$ は開集合なので、それらの逆像たち $C_\sim^{-1}(\mathrm{int}V)$、$C_\sim^{-1}(\mathrm{int}W)$ もその位相空間 $\left(\mathbb{C}^\times,\mathfrak{O}\right)$ における開集合となり $i \in C_\sim^{-1}(\mathrm{int}V)$、$-i \in C_\sim^{-1}(\mathrm{int}W)$ が成り立つ。そこで、2 次元 Euclid 空間 $E^2$ における位相空間 $\left(\mathbb{C},\mathfrak{O}_{d_{E^2}}\right)$ の定義より次のことが成り立つ。

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ \forall z \in \mathbb{C}^\times \left[|z-i| < r \Rightarrow z \in C_\sim^{-1}(\mathrm{int}V)\right], \quad \exists s \in \mathbb{R}^+ \forall z \in \mathbb{C}^\times \left[|z+i| < s \Rightarrow z \in C_\sim^{-1}(\mathrm{int}W)\right]$$

そこで、$w = \dfrac{1}{2}\min\{r,s\}$ とすれば、$w \in \mathbb{C}^\times$ で $w+i \in C_\sim^{-1}(\mathrm{int}V)$、$w-i \in C_\sim^{-1}(\mathrm{int}W)$ より $C_\sim(w) \in \mathrm{int}V \cap \mathrm{int}W$ が得られ、したがって、$V \cap W \neq \emptyset$ より従う。

3. これにより、その組 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ が位相空間で、さらに、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ はその位相空間 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ の部分位相空間でもあることが分かる。
4. その集合 $S^*$ の任意の開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ のうち $a_\infty$ に属されるもの $\mathfrak{O}_{\lambda'}$ が存在し compact 空間 $\left(S^* \setminus O_{\lambda'}, \mathfrak{O}_{S^* \setminus O_{\lambda'}}\right)$ が得られることから、その位相空間 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ は compact 空間であることが示される。
5. その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が局所 compact 空間な Hausdorff 空間であるとすることで、その位相空間 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ は Hausdorff 空間でもあることも示される。
6. 以上で、必要条件が示された。
7. 逆に、その集合 $S^*$ を台集合とするある位相空間 $\left(S^*, \widetilde{\mathfrak{O}^*}\right)$ が所定のことを満たすように構成されることができたとする。
8. このとき、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が Hausdorff 空間であることがすぐ分かる。
9. また、$\forall a \in S$ に対し、$V_a \cap V_{a_\infty} = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$a_\infty$ のその位相空間 $\left(S^*, \widetilde{\mathfrak{O}^*}\right)$ での近傍たち $V_a$、$V_{a_\infty}$ が存在してその部分位相空間 $\left(\mathrm{cl}V_a, \widetilde{\mathfrak{O}^*}_{\mathrm{cl}V_a}\right)$ は compact 空間であることにより、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は局所 compact 空間であることが分かる。
10. 以上で、十分条件が示された。
11. $\forall O \in \widetilde{\mathfrak{O}^*}$ に対し、$a_\infty \in O$ のときと $a_\infty \notin O$ のときで場合分けすることで、$\widetilde{\mathfrak{O}^*} \subseteq \mathfrak{O} \cup \mathfrak{O}_\infty$ が示される。
12. $\mathfrak{O} \subseteq \widetilde{\mathfrak{O}^*}$ と $\mathfrak{O} \subseteq \widetilde{\mathfrak{O}^*}$ が示されることで $\mathfrak{O} \cup \mathfrak{O}_\infty \subseteq \widetilde{\mathfrak{O}^*}$ が示される。
13. 以上より、$\widetilde{\mathfrak{O}^*} = \mathfrak{O} \cup \mathfrak{O}_\infty$ が得られることで、その位相空間 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ は一意的であることが分かる。

**証明.** 任意の位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、その台集合 $S$ にない点 $a_\infty$ を付け加えた集合 $S \cup \{a_\infty\}$ を $S^*$ とおき、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ での閉集合 $A$ を台集合とする部分位相空間 $(A, \mathfrak{O}_A)$ が compact 空間となるようなその閉集合 $A$ 全体の集合と空集合との和集合を $\mathfrak{A}_0$ とおく。そこで、その集合 $S^*$ の部分集合系たち $\mathfrak{O}_\infty$、$\mathfrak{O}^*$ が次式のように定義されるとする。

$$\mathfrak{O}_\infty = \{O \in \mathfrak{P}(S^*) | S^* \setminus O \in \mathfrak{A}_0\}, \quad \mathfrak{O}^* = \mathfrak{O} \cup \mathfrak{O}_\infty$$

ここで、その集合 $\mathfrak{A}_0$ に属する閉集合すべてその集合 $S$ の部分集合でその点 $a_\infty$ に属されていないので、$S^* \setminus O \in \mathfrak{A}_0$ が成り立つような空集合でない集合 $O$ はその点 $a_\infty$ に属されていることになる。したがって、その集合 $\mathfrak{O}_\infty$ に属する全ての集合 $O$ はその点 $a_\infty$ に属されていることになり $\mathfrak{O}^* = \mathfrak{O} \sqcup \mathfrak{O}_\infty$ が成り立つ。このとき、$O \in \mathfrak{O}^*$ が成り立つなら、$O \setminus \{a_\infty\} = O \cap (S^* \setminus \{a_\infty\}) = O \cap S$ が成り立ち、ここで、$S \setminus (O \cap S) = S \setminus O = S^* \setminus O \in \mathfrak{A}_0$ が成り立つことに注意すれば、その集合 $S \setminus (O \cap S)$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ における閉集合となるので、$O \setminus \{a_\infty\} = O \cap S \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。

次に、その組 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ が位相空間であるかどうかについて議論しよう。その集合 $\mathfrak{A}_0$ の定義より $\emptyset \in \mathfrak{A}_0$ が成り立つので、$S^* \in \mathfrak{O}_\infty$ が成り立ち、したがって、$S^* \in \mathfrak{O}^*$ が成り立つ。また、位相の定義より $\emptyset \in \mathfrak{O}$ が成り立つので、$\emptyset \in \mathfrak{O}^*$ が成り立つ。有限集合である添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}^*$ の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、$O_\lambda \in \mathfrak{O}$ または $O_\lambda \in \mathfrak{O}_\infty$ が成り立つ。ここで、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、$O_\lambda \setminus \{a_\infty\} \in \mathfrak{O}$ が成り立ち、$S^* \setminus (O_\lambda \setminus \{a_\infty\}) \in \mathfrak{A}_0$ が成り立つなら、定理 8.1.6.3 より $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (S^* \setminus (O_\lambda \setminus \{a_\infty\})) = S^* \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \setminus \{a_\infty\}\right) \in \mathfrak{A}_0$ が成り立つので、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \setminus \{a_\infty\} \in \mathfrak{O}^*$ が成り立つ。集合 $\{a_\infty\}$ との和集合が考えられれば、したがって、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}^*$ が成り立つ。任意の添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}^*$ の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、$O_\lambda \in \mathfrak{O}$ または $O_\lambda \in \mathfrak{O}_\infty$ が

成り立つ。ここで、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、$O_\lambda \setminus \{a_\infty\} \in \mathfrak{O}$ が成り立ち、$S^* \setminus (O_\lambda \setminus \{a_\infty\}) \in \mathfrak{A}_0$ が成り立つなら、これらの集合たち $S^* \setminus (O_\lambda \setminus \{a_\infty\})$ は閉集合でありその積集合 $\bigcap_{\lambda\in\varLambda} (S^* \setminus (O_\lambda \setminus \{a_\infty\}))$ も閉集合となり、定理 1.6.4 より $\bigcap_{\lambda\in\varLambda} (S^* \setminus (O_\lambda \setminus \{a_\infty\})) = S^* \setminus \left( \bigcup_{\lambda\in\varLambda} O_\lambda \setminus \{a_\infty\} \right) \in \mathfrak{A}_0$ が成り立つので、$\bigcup_{\lambda\in\varLambda} O_\lambda \setminus \{a_\infty\} \in \mathfrak{O}^*$ が成り立つ。集合 $\{a_\infty\}$ との和集合が考えられれば、したがって、$\bigcup_{\lambda\in\varLambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}^*$ が成り立つ。以上より、その組 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ が位相空間である。さらに、$\forall O \in \mathfrak{O}^*$ に対し、$O \setminus \{a_\infty\} = O \cap S \in \mathfrak{O}$ が成り立つのであったので、定理 1.4.7 よりその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ はその位相空間 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ の部分位相空間でもある。

その集合 $S^*$ の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ が与えられたとき、これの添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ を用いれば、次のようになることから、

$$\begin{aligned} S^* = \bigcup \mathfrak{U} &\Leftrightarrow S \cup \{a_\infty\} = \bigcup_{\lambda\in\varLambda} O_\lambda \\ &\Rightarrow S = \bigcup_{\lambda\in\varLambda} O_\lambda \setminus \{a_\infty\} = \bigcup_{\lambda\in\varLambda} (O_\lambda \cap S) \end{aligned}$$

そのような族 $\{O_\lambda \cap S\}_{\lambda\in\varLambda}$ はその集合 $S$ の開被覆となる。ここで、その開被覆 $\mathfrak{U}$ に属する位相たちのうち $a_\infty$ に属されるものが存在するので、その位相を $\mathfrak{O}_{\lambda'}$ とおくと、$\mathfrak{O}^* = \mathfrak{O} \sqcup \mathfrak{O}_\infty$ が成り立つので、$O_{\lambda'} \in \mathfrak{O}_\infty$ が成り立つ。このとき、$S^* \setminus O_{\lambda'} \in \mathfrak{A}_0$ が成り立つので、その位相空間 $\left(S^* \setminus O_{\lambda'}, \mathfrak{O}_{S^* \setminus O_{\lambda'}}\right)$ は compact 空間でその族 $\{O_\lambda \cap S\}_{\lambda\in\varLambda}$ の部分集合である有限集合である添数集合 $\varLambda'$ によって添数づけられた族 $\{O_\lambda \cap S\}_{\lambda\in\varLambda}$ を用いて次式が成り立つ。

$$S^* \setminus O_{\lambda'} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\varLambda} (O_\lambda \cap S)$$

したがって、次のようになり、

$$\begin{aligned} S^* &= S \sqcup \{a_\infty\} \\ &= S^* \setminus O_{\lambda'} \sqcup S \setminus (S^* \setminus O_{\lambda'}) \sqcup \{a_\infty\} \\ &\subseteq \bigcup_{\lambda\in\varLambda} (O_\lambda \cap S) \cup O_{\lambda'} \\ &\subseteq \bigcup_{\lambda\in\varLambda} O_\lambda \cup O_{\lambda'} \end{aligned}$$

その位相空間 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ は compact 空間である。

その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が局所 compact 空間な Hausdorff 空間であるとする。$\forall a, b \in S^*$ に対し、$a, b \in S$ が成り立つなら、$V_a \cap V_b = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ の近傍たち $V_a$、$V_b$ が存在するのであった。さらに、その位相空間 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ のそれらの元々 $a$、$b$ のある近傍たち $V_a'$、$V_b'$ が存在して次式が成り立つので、

$$a \in \mathrm{int} V_a \in \mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}^*, \quad b \in \mathrm{int} V_b \in \mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}^*$$

これらの近傍たちはその位相空間 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ における近傍となっている。$\forall a \in S^*$ に対し、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は局所 compact 空間であるから、その元 $a$ の近傍のうちその部分位相空間 $(V_a, \mathfrak{O}_{V_a})$ が compact 空間であるようなその近傍 $V_a$ が存在し、これはその位相空間 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ におけるその元 $a$ の近傍でもある。ここで、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は Hausdorff 空間であるので、定理 1.6.10 よりその近傍 $V_a$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ での閉集合となる。したがって、$V_a \in \mathfrak{A}_0$ が成り立つことになり $S^* \setminus V_a \in \mathfrak{O}_\infty$ が得られる。このとき、その

集合 $S^{*} \setminus V_{a}$ はその元 $a_{\infty}$ に属されるその位相空間 $(S^{*}, \mathfrak{O}^{*})$ の開集合でその元 $x_{\infty}$ の近傍でもある。このとき、$V_{a} \cap S^{*} \setminus V_{a} = \emptyset$ が成り立つ。以上より、$\forall a, b \in S^{*}$ に対し、$V_{a} \cap V_{b} = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ の近傍たち $V_{a}$、$V_{b}$ が存在するので、その位相空間 $(S^{*}, \mathfrak{O}^{*})$ は Hausdorff 空間でもある。

以上より、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が局所 compact 空間な Hausdorff 空間であるなら、その位相空間 $(S^{*}, \mathfrak{O}^{*})$ が次のことを満たすように構成されることができる。

- その位相空間 $(S^{*}, \mathfrak{O}^{*})$ は compact 空間である。
- その位相空間 $(S^{*}, \mathfrak{O}^{*})$ は Hausdorff 空間である。
- その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ はその位相空間 $(S^{*}, \mathfrak{O}^{*})$ の部分位相空間となっている。

逆に、その集合 $S^{*}$ を台集合とするある位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ が次のことを満たすように構成されることができたとしよう。

- その位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ は compact 空間である。
- その位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ は Hausdorff 空間である。
- その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ はその位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ の部分位相空間となっている。

このとき、定理 1.6.9 よりその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が Hausdorff 空間であることが分かる。また、$\forall a \in S$ に対し、$a \neq a_{\infty}$ が成り立つので、$V_{a} \cap V_{a_{\infty}} = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$a_{\infty}$ のその位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ での近傍たち $V_{a}$、$V_{a_{\infty}}$ が存在する。このとき、定理 1.1.10 より $\mathrm{cl} V_{a} \cap V_{a_{\infty}} = \emptyset$ が成り立つので、定理 1.1.24 よりその集合 $\mathrm{cl} V_{a}$ はその元 $a$ の近傍で $a_{\infty} \notin \mathrm{cl} V_{a}$ が成り立ち、したがって、$\mathrm{cl} V_{a} \subseteq S$ が成り立つ。定理 1.4.12 よりその集合 $\mathrm{cl} V_{a}$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ でのその元 $a$ の近傍でもある。ここで、その位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ は compact 空間であるから、定理 1.6.4 よりその部分位相空間 $\left(\mathrm{cl} V_{a}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}_{\mathrm{cl} V_{a}}\right)$ は compact 空間である。また、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ はその位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ の部分位相空間であるから、定理 1.4.13 よりその部分位相空間 $\left(\mathrm{cl} V_{a}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}_{\mathrm{cl} V_{a}}\right)$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の compact 空間でもあるような部分位相空間である。したがって、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は局所 compact 空間である。

最後に、$\forall O \in \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}$ に対し、$a_{\infty} \notin O$ が成り立つなら、$O \subseteq S$ が成り立つかつ、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ はその位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ の部分位相空間であるから、その位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ が Hausdorff 空間であることに注意すれば、その集合 $\{a_{\infty}\}$ が定理 1.6.8 より閉集合でその集合 $S$ が開集合となり定理 1.4.11 よりその集合 $O$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ での開集合でもある。これにより、$O \in \mathfrak{O}$ が成り立つ。また、$a_{\infty} \in O$ が成り立つとき、$S^{*} \setminus O \subseteq S$ が成り立つが、その位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ は compact 空間でその集合 $S^{*} \setminus O$ はその位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ の閉集合であるから、定理 1.6.4 よりその部分位相空間 $\left(S^{*} \setminus O, \mathfrak{O}_{S^{*} \setminus O}\right)$ は compact 空間で、これはその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間としても compact 空間であるから、$S^{*} \setminus O \in \mathfrak{A}_{0}$ が成り立ち、したがって、$O \in \mathfrak{O}_{\infty}$ が得られる。以上より、$\widetilde{\mathfrak{O}^{*}} \subseteq \mathfrak{O} \cup \mathfrak{O}_{\infty}$ が成り立つ。

その位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ は Hausdorff 空間であるから、その集合 $\{a_{\infty}\}$ が定理 1.6.8 より閉集合でその集合 $S$ が開集合となりその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の任意の開集合はその位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ の開集合でもあり、したがって、$\mathfrak{O} \subseteq \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}$ が成り立つ。また、$\forall O \in \mathfrak{O}_{\infty}$ に対し、$S^{*} \setminus O \in \mathfrak{A}_{0}$ が成り立つので、その部分位相空間 $\left(S^{*} \setminus O, \mathfrak{O}_{S^{*} \setminus O}\right)$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分位相空間として compact 空間で、これはその位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ の部分位相空間としても compact 空間で、さらに、その位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ は Hausdorff 空間であるから、定理 1.6.10 よりその集合 $S^{*} \setminus O$ はその位相空間 $\left(S^{*}, \widetilde{\mathfrak{O}^{*}}\right)$ の閉集合となる。したがって、その集合

$O$ はその位相空間 $\left(S^*, \widetilde{\mathfrak{O}^*}\right)$ の開集合となり、したがって、$\mathfrak{O}_\infty \subseteq \widetilde{\mathfrak{O}^*}$ が成り立つ。以上より、$\mathfrak{O} \cup \mathfrak{O}_\infty \subseteq \widetilde{\mathfrak{O}^*}$ が成り立つ。

これにより、$\widetilde{\mathfrak{O}^*} = \mathfrak{O} \cup \mathfrak{O}_\infty$ が得られるので、その位相空間 $(S^*, \mathfrak{O}^*)$ は一意的である。 □

### 1.6.5 Lindelöf の性質

**定義 1.6.6.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、その台集合 $S$ の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ に対し、その台集合 $S$ の開被覆 $\mathfrak{U}'$ が存在して、その開被覆 $\mathfrak{U}$ の部分集合でたかだか可算である、即ち、$\#\mathfrak{U}' \leq \aleph_0$ が成り立つとき、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は Lindelöf の性質をもっているという。

**定理 1.6.16** (Lindelöf の被覆定理の拡張)**.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が第 2 可算公理を満たすなら、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は Lindelöf の性質をもっている。この定理を Lindelöf の被覆定理の拡張という。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が第 2 可算公理を満たすなら、その台集合 $S$ の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ に対し、$\mathfrak{U} = \{O_i\}_{i \in \varLambda}$ とおかれると、任意の開集合は高々可算な開基の元々 $W_{j_i}$ の和集合で書かれることができ、たかだか可算な添数集合 $\varLambda'$ を用いれば、$\bigcup \mathfrak{U} = \bigcup_{i \in \varLambda} O_i = \bigcup_{j \in \varLambda'} W_j$ が成り立つ。このとき、$\forall j \in \varLambda'$ に対し、開集合 $W_j$ を含むその開被覆 $\mathfrak{U}$ の元が存在するので、これらのうち 1 つが $O_{i_j}$ とおかれると、$\bigcup \mathfrak{U} = \bigcup_{i \in \varLambda} O_i = \bigcup_{j \in \varLambda'} W_j \subseteq \bigcup_{j \in \varLambda'} O_{i_j}$ が成り立つ。よって、$\varLambda' \subseteq \varLambda$ なるたかだか可算な添数集合 $\varLambda'$ によって添数づけられたその開被覆 $\mathfrak{U}$ の部分集合 $\{O_i\}_{i \in \varLambda'}$ が存在して、これが $\mathfrak{U}'$ とおかれると、$S \subseteq \bigcup \mathfrak{U}'$ が成り立つので、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は Lindelöf の性質をもっている。 □

# 参考文献


[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p208-216 ISBN978-4-00-029871-1

[2] 加塩朋和. "一般位相 A（２組）". 東京理科大学. `https://www.rs.tus.ac.jp/a25594/2018-2019_General_Topology.pdf` (2021 年 8 月 6 日 12:15 閲覧)

[3] 佐伯修. "数学概論２". 九州大学. `https://imi.kyushu-u.ac.jp/~saeki/gairon6-2.pdf` (2023 年 5 月 22 日 6:00 閲覧)

[4] 高谷遼. "ハウスドルフ空間でない例". Takatani Note. `https://takataninote.com/topology/hausdorff.html` (2023 年 5 月 22 日 6:02 閲覧)

## 1.7 分離公理

### 1.7.1 正規空間

**定義 1.7.1.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a,b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$b \notin V$ なるその元 $a$ の近傍 $V$ が存在する、または、$a \notin V$ なるその元 $b$ の近傍 $V$ が存在するという条件を第 0 分離公理、Kolmogorov の公理といいこれを満たすような位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ を $\mathrm{T}_0$-空間、Kolmogorov 空間という。

**定理 1.7.1.** $\mathrm{T}_0$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ の任意の部分位相空間も $\mathrm{T}_0$-空間である。

**証明.** $\mathrm{T}_0$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ の任意の部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が与えられたとき、$\forall a,b \in M$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における $b \notin V$ なるその元 $a$ の近傍 $V$ が存在するとしても一般性は失われない。このとき、集合 $V \cap M$ はその部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ の $b \notin V \cap M$ なるその元 $a$ の近傍であるから、その部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ も $\mathrm{T}_0$-空間である。 □

**定義 1.7.2.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a,b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$b \notin V$ なるその元 $a$ の近傍 $V$ が存在するという条件を第 1 分離公理、Fréchet の公理といいこれを満たすような位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ を $\mathrm{T}_1$-空間、Fréchet な位相空間、到着可能空間、迫接空間という[*18]。

**定理 1.7.2.** $\mathrm{T}_1$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_0$-空間である。

**証明.** 定義より明らかである。 □

**定理 1.7.3.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が $\mathrm{T}_1$-空間である。
- $\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の近傍全体の集合を $\mathbf{V}(a)$ とおくとき、$\bigcap \mathbf{V}(a) = \{a\}$ が成り立つ。
- $\forall a \in S$ に対し、集合 $\{a\}$ はその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ での閉集合である。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が $\mathrm{T}_1$-空間であるとする。$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の近傍全体の集合を $\mathbf{V}(a)$ とおくとき、$\bigcap \mathbf{V}(a) = \{a\}$ が成り立たないと仮定しよう。ここで、その集合 $\bigcap \mathbf{V}(a)$ が空集合であるとき、これは定理 1.1.24 に矛盾するので、その集合 $\bigcap \mathbf{V}(a)$ は空集合でない。このとき、$b \in \bigcap \mathbf{V}(a)$ なるその元 $a$ とは異なる元 $b$ がその集合 $S$ に存在する。ここで、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_1$-空間であるから、$b \notin V$ なるその元 $a$ の近傍 $V$ が存在する。このとき、$\bigcap \mathbf{V}(a) \subseteq V$ が成り立たなくなるので、矛盾する。したがって、$\bigcap \mathbf{V}(a) = \{a\}$ が成り立つ。逆に、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の近傍全体の集合を $\mathbf{V}(a)$ とおくとき、$\bigcap \mathbf{V}(a) = \{a\}$ が成り立つかつ、$\exists a,b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つかつ、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$b \in V$ が成り立つと仮定すると、$b \in \bigcap \mathbf{V}(a)$ が成り立つことになるが、これは $\bigcap \mathbf{V}(a) = \{a\}$ が

[*18] 解析学で全く違う意味の Fréchet 空間というものがあるので、そうとはいわないことに注意されたい。

成り立つことに矛盾する。したがって、$\forall a \in S$ に対し、$\bigcap \mathbf{V}(a) = \{a\}$ が成り立つなら、$\forall a,b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$b \notin V$ なるその元 $a$ の近傍 $V$ が存在するので、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_1$-空間でもある。

その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が $\mathrm{T}_1$-空間であるとする。$\forall a,b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$a \notin V$ なるその元 $b$ の近傍 $V$ が存在するので、$V \cap \{a\} = \emptyset$ が成り立ち定理 1.1.10 より $b \notin \mathrm{cl}\,\{a\}$ が成り立つ。対偶律より $\mathrm{cl}\,\{a\} \subseteq \{a\}$ が成り立つので、$\{a\} = \mathrm{cl}\,\{a\}$ が得られ、よって、$\forall a \in S$ に対し、集合 $\{a\}$ はその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ での閉集合である。逆に、$\forall b \in S$ に対し、集合 $\{b\}$ はその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ での閉集合であるなら、集合 $S \setminus \{b\}$ は開集合で $a \in S \setminus \{b\}$ かつ $b \notin S \setminus \{b\}$ が成り立つので、その集合 $S \setminus \{b\}$ はその元 $a$ の近傍である。したがって、$\forall a,b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$b \notin V$ なるその元 $a$ の近傍 $V$ が存在するので、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_1$-空間でもある。 □

**定理 1.7.4.** $\mathrm{T}_1$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ の任意の部分位相空間も $\mathrm{T}_1$-空間である。

**証明.** $\mathrm{T}_1$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ の任意の部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が与えられたとき、$\forall a,b \in M$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における $b \notin V_a$ なるその元 $a$ の近傍 $V_a$ が存在する。このとき、集合 $V_a \cap M$ はその部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ の $b \notin V_a \cap M$ なるその元 $a$ の近傍であることになる。その元 $b$ の近傍 $V_b$ についても同様にして示される。よって、その部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ も $\mathrm{T}_1$-空間である。 □

**定理 1.7.5.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとき、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ が $\mathrm{T}_1$-空間であるならそのときに限り、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda,\mathfrak{O}\right)$ が $\mathrm{T}_1$-空間である。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとき、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ が $\mathrm{T}_1$-空間であるなら、$\forall (a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}, (b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \in \prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda$ に対し、$(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \neq (b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ が成り立つなら、$a_\lambda \neq b_\lambda$ なる添数全体の集合を $\varLambda'$ とおくと、$\forall\lambda \in \varLambda'$ に対し、$b_\lambda \notin V_\lambda$ なるその元 $a_\lambda$ の近傍 $V_\lambda$ が存在する。その添数集合 $\varLambda'$ の有限集合な部分集合である添数集合 $\varLambda''$ を用いた集合 $\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\varLambda''} S_\lambda \times \prod_{\lambda\in\varLambda''} V_\lambda$ は定理 1.4.18 よりその元 $(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ の近傍となるのであった。このとき、$(b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \notin \prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\varLambda''} V_\lambda \times \prod_{\lambda\in\varLambda''} V_\lambda$ が成り立つので、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda,\mathfrak{O}\right)$ も $\mathrm{T}_1$-空間となる。

逆に、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda,\mathfrak{O}\right)$ が $\mathrm{T}_1$-空間であるなら、$\forall\lambda' \in \varLambda'$ に対し、部分位相空間 $\left(S_{\lambda'} \times \prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}} \{a_\lambda\}, \mathfrak{O}_{S_{\lambda'}\times\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}}\{a_\lambda\}}\right)$ も $\mathrm{T}_1$-空間であるので、$\forall (a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}, (b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \in \prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda$ に対し、$(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \neq (b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ が成り立つなら、定理 1.4.18 より $(b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \notin V_{\lambda'} \times \prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}} \{a_\lambda\}$ が成り立つようなその元 $(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ の近傍が存在することになり、このとき、$b_{\lambda'} \notin V_{\lambda'}$ が成り立つようなその元 $a_{\lambda'}$ の近傍が存在する。よって、その位相空間 $(S_{\lambda'},\mathfrak{O}_{\lambda'})$ も $\mathrm{T}_1$-空間である。 □

**定義 1.7.3.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a,b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$V_a \cap V_b = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ の近傍たちそれぞれ $V_a$、$V_b$ が存在するという条件を第 2 分離公理、Hausdorff の公理とい

いこれを満たすような位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ を $\mathrm{T}_2$-空間、Hausdorff 空間という。

**定理 1.7.6.** $\mathrm{T}_2$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_1$-空間である。

**証明.** $\mathrm{T}_2$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、定理 1.6.8 より $\forall a \in S$ に対し、集合 $\{a\}$ はその $\mathrm{T}_2$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ での閉集合となるのであった。ここで、定理 1.7.1 より $\mathrm{T}_2$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_1$-空間である。 □

**定理 1.7.7.** $\mathrm{T}_2$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ の任意の部分位相空間も $\mathrm{T}_2$-空間である。

**証明.** $\mathrm{T}_2$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ の任意の部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が与えられたとき、$\forall a,b \in M$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における $V_a \cap V_b = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ の近傍たちそれぞれ $V_a$、$V_b$ が存在する。このとき、集合たち $V_a \cap M$、$V_b \cap M$ はそれぞれその部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ における $(V_a \cap M) \cap (V_b \cap M) = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ の近傍たちであることになる。よって、その部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ も $\mathrm{T}_2$-空間である。 □

**定理 1.7.8.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとき、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ が $\mathrm{T}_2$-空間であるならそのときに限り、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}\right)$ が $\mathrm{T}_2$-空間である。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとき、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ が $\mathrm{T}_2$-空間であるなら、$\forall (a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}, (b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \in \prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda$ に対し、$(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \neq (b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ が成り立つなら、$a_\lambda \neq b_\lambda$ なる添数全体の集合を $\varLambda'$ とおくと、$\forall\lambda \in \varLambda'$ に対し、$V_{a\lambda} \cap V_{b\lambda} = \emptyset$ なるそれらの元々 $a_\lambda$、$b_\lambda$ の近傍たちそれぞれ $V_{a\lambda}$、$V_{b\lambda}$ が存在する。その添数集合 $\varLambda'$ の有限集合な部分集合である添数集合 $\varLambda''$ を用いた集合たち $\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\varLambda''} S_\lambda \times \prod_{\lambda\in\varLambda''} V_{a\lambda}$、$\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\varLambda''} S_\lambda \times \prod_{\lambda\in\varLambda''} V_{b\lambda}$ は定理 1.4.18 よりそれぞれそれらの元々 $(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$、$(b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ の近傍となるのであった。このとき、次式が成り立つので、

$$\begin{aligned}\left(\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\varLambda''} S_\lambda \times \prod_{\lambda\in\varLambda''} V_{a\lambda}\right) \cap \left(\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\varLambda''} S_\lambda \times \prod_{\lambda\in\varLambda''} V_{b\lambda}\right) &= \prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\varLambda''} (S_\lambda \cap S_\lambda) \times \prod_{\lambda\in\varLambda''} (V_{a\lambda} \cap V_{b\lambda}) \\ &= \prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\varLambda''} S_\lambda \times \prod_{\lambda\in\varLambda''} \emptyset = \emptyset\end{aligned}$$

その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}\right)$ も $\mathrm{T}_2$-空間となる。

逆に、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}\right)$ が $\mathrm{T}_2$-空間であるなら、$\forall\lambda' \in \varLambda'$ に対し、部分位相空間 $\left(S_{\lambda'} \times \prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}} \{a_\lambda\}, \mathfrak{O}_{S_{\lambda'}\times\prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}}\{a_\lambda\}}\right)$ も $\mathrm{T}_2$-空間であるので、$\forall (a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}, (b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \in \prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda$ に対し、$(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda} \neq (b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ が成り立つなら、定理 1.4.18 より $\left(V_{a\lambda'} \times \prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}} \{a_\lambda\}\right) \cap \left(V_{b\lambda'} \times \prod_{\lambda\in\varLambda\setminus\{\lambda'\}} \{a_\lambda\}\right) = \emptyset$ が成り立つようなそれらの元々 $(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$、$(b_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ の近傍が存在することになり、このとき、次式のように

なる。

$$\left(V_{a\lambda'} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\}\right) \cap \left(V_{b\lambda'} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\}\right) = (V_{a\lambda'} \cap V_{b\lambda'}) \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\} \cap \{a_\lambda\}$$
$$= (V_{a\lambda'} \cap V_{b\lambda'}) \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\} = \emptyset$$

したがって、$V_{a\lambda'} \cap V_{b\lambda'} = \emptyset$ が成り立つので、よって、その位相空間 $(S_{\lambda'}, \mathfrak{O}_{\lambda'})$ も $\mathrm{T}_2$-空間である。 □

**定理 1.7.9.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が $\mathrm{T}_2$-空間である。
- $\forall a \in S$ に対し、閉集合系、その元 $a$ の近傍全体の集合をそれぞれ $\mathfrak{A}$、$\mathbf{V}(a)$ とおくとき、$\bigcap(\mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A}) = \{a\}$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が $\mathrm{T}_2$-空間であるとするなら、$\exists a \in S$ に対し、閉集合系、その元 $a$ の近傍全体の集合をそれぞれ $\mathfrak{A}$、$\mathbf{V}(a)$ とおくとき、$\bigcap(\mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A}) = \{a\}$ が成り立たないと仮定すると、$\forall b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$V_a \cap V_b = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ の近傍たちそれぞれ $V_a$、$V_b$ が存在するので、定理 1.1.10 より $\mathrm{cl}\,(V_a) \cap V_b = \emptyset$ が成り立つ。ここで、その集合 $\bigcap(\mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A})$ が空集合であるとき、これは定理 1.1.24 に矛盾するので、その集合 $\bigcap(\mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A})$ は空集合でない。これにより、$b \in \bigcap(\mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A})$ なるその元 $a$ とは異なる元 $b$ がその集合 $S$ に存在することになる。しかしながら、$\bigcap(\mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{cl}\,(V_a)$ が成り立つことにより、これは $\mathrm{cl}\,(V_a) \cap V_b = \emptyset$ が成り立つようなそれらの元々 $a$、$b$ の近傍たちそれぞれ $V_a$、$V_b$ が存在しないことになり矛盾する。よって、$\forall a \in S$ に対し、閉集合系、その元 $a$ の近傍全体の集合をそれぞれ $\mathfrak{A}$、$\mathbf{V}(a)$ とおくとき、$\bigcap(\mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A}) = \{a\}$ が成り立つ。逆に、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の近傍全体の集合を $\mathbf{V}(a)$ とおくとき、$\bigcap(\mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A}) = \{a\}$ が成り立つかつ、$\exists a, b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つかつ、$\forall V \in \mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A}$ に対し、$b \in V$ が成り立つと仮定すると、$b \in \bigcap(\mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A})$ が成り立つことになるが、これは $\bigcap(\mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A}) = \{a\}$ が成り立つことに矛盾する。したがって、$\forall a \in S$ に対し、$\bigcap(\mathbf{V}(a) \cap \mathfrak{A}) = \{a\}$ が成り立つなら、$\forall a, b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$b \notin V$ なるその元 $a$ の閉集合でもある近傍 $V$ が存在する。このとき、集合 $S \setminus V$ は開集合で $b \in S \setminus V$ かつ $a \notin S \setminus V$ が成り立つので、その集合 $S \setminus V$ はその元 $a$ に属されないその元 $b$ の近傍である。さらに、$V \cap S \setminus V = \emptyset$ が成り立つ。したがって、$\forall a, b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$V_a \cap V_b = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ の近傍たちそれぞれ $V_a$、$V_b$ が存在する。 □

**定義 1.7.4.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、これの閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくと、$\forall A \in \mathfrak{A} \forall a \in S \setminus A \exists O, P \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O$ かつ $A \subseteq P$ かつ $O \cap P = \emptyset$ が成り立つという条件を第 3 分離公理、Vietories の公理といいこれを満たすような位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ を正則空間、Vietories 空間という[*19]。

[*19] 書籍によってはこれを $\mathrm{T}_3$-空間と呼んでいるものもあるらしい。

**定義 1.7.5.** $\mathrm{T}_1$-空間であり正則空間でもあるような位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ を $\mathrm{T}_3$-空間、正則 Hausdorff 空間という[*20]。

**定理 1.7.10.** $\mathrm{T}_3$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_2$-空間である。

**証明.** $\mathrm{T}_3$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a,b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$b \notin V$ なるその元 $a$ の近傍 $V$ が存在するとしよう。このとき、$a \in \mathrm{int}V$ が成り立つので、その集合 $S \setminus \mathrm{int}V$ は閉集合で $a \notin S \setminus \mathrm{int}V$ かつ $b \in S \setminus \mathrm{int}V$ が成り立つ。したがって、$a \in O_1$ かつ $S \setminus \mathrm{int}V \subseteq O_2$ かつ $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ が成り立つような開集合たち $O_1$、$O_2$ が存在する。このとき、$a \in \mathrm{int}O_1 = O_1$ かつ $b \in \mathrm{int}O_2 = O_2$ が成り立つので、それらの開集合たち $O_1$、$O_2$ はそれぞれそれらの元々 $a$、$b$ の近傍である。よって、$\mathrm{T}_3$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_2$-空間である。 □

**定理 1.7.11.** 正則空間 $(S,\mathfrak{O})$ の任意の部分位相空間も正則空間である。

**証明.** 正則空間 $(S,\mathfrak{O})$ の任意の部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が与えられたとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$、その部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ の閉集合系を $\mathfrak{A}_M$ とおくと、$\forall O \in \mathfrak{O}_M \exists O' \in \mathfrak{O}$ に対し、$O = O' \cap M$ が成り立つかつ、$\forall A \in \mathfrak{A}_M \exists A' \in \mathfrak{A}$ に対し、$A = A' \cap M$ が成り立つ。ここで、$\forall a \in M \setminus A$ に対し、$a \in S \setminus A'$ が成り立つので、$\exists O', P' \in \mathfrak{O}_M$ に対し、$a \in O'$ かつ $A' \subseteq P'$ かつ $O' \cap P' = \emptyset$ が成り立つ。このとき、もちろん、$A \cap M \subseteq P' \cap M$ かつ $(O' \cap M) \cap (P' \cap M) = \emptyset$ が成り立つ。よって、その部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ も正則空間である。 □

**定理 1.7.12.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が正則空間である。
- $\forall a \in S \forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O$ が成り立つなら、$\exists O' \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O'$ かつ $\mathrm{cl}O' \subseteq O$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が正則空間であるとするとき、$\forall a \in S \forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O$ が成り立つなら、集合 $S \setminus O$ は閉集合で $a \notin S \setminus O$ が成り立つ。したがって、$\exists O', P' \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O'$ かつ $S \setminus O \subseteq P'$ かつ $O' \cap P' = \emptyset$ が成り立つ。このとき、$O' \subseteq S \setminus P'$ が成り立ちその集合 $S \setminus P'$ は閉集合であるから、$\mathrm{cl}O' \subseteq \mathrm{cl}\left(S \setminus P'\right) = S \setminus P'$ が成り立つ。このとき、$S \setminus O \subseteq P'$ が成り立つので、$\mathrm{cl}O' \subseteq S \setminus P' \subseteq O$ が成り立つ。

逆に、$\forall a \in S \forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O$ が成り立つなら、$\exists O' \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O'$ かつ $\mathrm{cl}O' \subseteq O$ が成り立つとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくと、$\forall A \in \mathfrak{A} \forall a \in S \setminus A$ に対し、集合 $S \setminus A$ は開集合で $a \in S \setminus A$ が成り立つので、$\exists O' \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O'$ かつ $\mathrm{cl}O' \subseteq S \setminus A$ が成り立つ。そこで、次式が成り立つことから、

$$A = S \setminus (S \setminus A) \subseteq S \setminus \mathrm{cl}\left(O'\right)$$

$a \in O'$ かつ $A \subseteq S \setminus \mathrm{cl}O'$ かつ $O' \cap S \setminus \mathrm{cl}O' = \emptyset$ が成り立つような開集合たち $O'$、$S \setminus \mathrm{cl}O'$ が存在する。 □

**定理 1.7.13.** 添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ が正則空間であるならそのときに限り、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda, \mathfrak{O}\right)$ が正則空間である。

---

[*20] 書籍によってはこれを正則空間と呼んでいるものもあるらしい。むしろ、そちらのほうが主流かも。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)\right\}_{\lambda \in \varLambda}$ が与えられたとき、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ が正則空間であるなら、$\forall O \in \mathfrak{O}\forall (a_\lambda)_{\lambda \in \varLambda} \in O$ に対し、定理 1.4.16 より有限集合である添数集合 $\varLambda'$ を用いて初等開集合 $\prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} O_\lambda$ が次式を満たすようにとられると、

$$(a_\lambda)_{\lambda \in \varLambda} \in \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} O_\lambda \subseteq O$$

$\forall\lambda \in \varLambda'$ に対し、$a_\lambda \in O_\lambda$ が成り立つので、定理 1.7.12 より $a_\lambda \in O'_\lambda$ かつ $\mathrm{cl}O'_\lambda \subseteq O_\lambda$ なるその位相空間 $(S_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ の開集合 $O'_\lambda$ が存在する。したがって、定理 1.4.20 より次のようになるので、

$$\begin{aligned}(a_\lambda)_{\lambda \in \varLambda} &\in \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} O'_\lambda, \\ \mathrm{cl}\left(\prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} O'_\lambda\right) &= \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} \mathrm{cl}S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} \mathrm{cl}O'_\lambda \\ &= \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} \mathrm{cl}O'_\lambda \\ &\subseteq \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \varLambda'} S_\lambda \times \prod_{\lambda \in \varLambda'} O_\lambda\end{aligned}$$

定理 1.7.12 よりその直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}\right)$ も正則空間となる。

逆に、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda \in \varLambda} S_\lambda, \mathfrak{O}\right)$ が正則空間であるなら、$\forall\lambda' \in \varLambda'$ に対し、部分位相空間 $\left(S_{\lambda'} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\}, \mathfrak{O}_{S_{\lambda'} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\}}\right)$ も定理 1.7.11 より正則空間であるので、$\forall O_{\lambda'} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\} \in \mathfrak{O}_{S_{\lambda'} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\}} \forall (a_\lambda)_{\lambda \in \varLambda} \in O$ に対し、定理 1.4.18 より次式を満たすような開集合 $O'_{\lambda'} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\}$ が存在する。

$$\begin{aligned}(a_\lambda)_{\lambda \in \varLambda} &\in O'_{\lambda'} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\}, \\ \mathrm{cl}\left(O'_{\lambda'} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\}\right) &= \mathrm{cl}O'_{\lambda'} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\} \\ &\subseteq O_{\lambda'} \times \prod_{\lambda \in \varLambda \setminus \{\lambda'\}} \{a_\lambda\}\end{aligned}$$

したがって、$a_{\lambda'} \in O'_{\lambda'}$ かつ $\mathrm{cl}O'_{\lambda'} \subseteq O_{\lambda'}$ が存在するので、定理 1.7.12 よりその位相空間 $(S_{\lambda'}, \mathfrak{O}_{\lambda'})$ も正則空間である。 □

**定義 1.7.6.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、これの閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくと、$\forall A, B \in \mathfrak{A}$ に対し、$A \cap B = \emptyset$ が成り立つなら、$\exists O, P \in \mathfrak{O}$ に対し、$A \subseteq O$ かつ $B \subseteq P$ かつ $O \cap P = \emptyset$ が成り立つという条件を第 4 分離公理、Tietze の公理といいこれを満たすような位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ を正規空間、Tietze 空間という[*21]。

---

[*21] 正規空間 $(S, \mathfrak{O})$ の任意の部分位相空間は正規空間であるとは限らないし、添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族

**定義 1.7.7.** $\mathrm{T}_1$-空間であり正規空間でもあるような位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ を $\mathrm{T}_4$-空間、正規 Hausdorff 空間という[*22]。

**定理 1.7.14.** $\mathrm{T}_4$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_3$-空間である。

**証明.** $\mathrm{T}_4$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall A\in\mathfrak{A}\forall a\in S\setminus A$ に対し、定理 1.7.2 より集合 $\{a\}$ は閉集合で $\{a\}\cap A=\emptyset$ が成り立つので、$\exists O,P\in\mathfrak{O}$ に対し、$\{a\}\subseteq O$ かつ $A\subseteq P$ かつ $O\cap P=\emptyset$ が成り立つ。これにより、$a\in O$ かつ $A\subseteq P$ かつ $O\cap P=\emptyset$ が成り立つことがいえたので、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_3$-空間でもある。 □

**定理 1.7.15.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が正規空間である。
- 閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくと、$\forall A\in\mathfrak{A}\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、$A\subseteq O$ が成り立つなら、$\exists O'\in\mathfrak{O}$ に対し、$A\subseteq O'$ かつ $\mathrm{cl}O'\subseteq O$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が正規空間であるとするとき、閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくと、$\forall A\in\mathfrak{A}\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、$A\subseteq O$ が成り立つなら、集合 $S\setminus O$ は閉集合で $A\cap S\setminus O=\emptyset$ が成り立つ。したがって、$\exists O',P'\in\mathfrak{O}$ に対し、$A\subseteq O'$ かつ $S\setminus O\subseteq P'$ かつ $O'\cap P'=\emptyset$ が成り立つ。このとき、$O'\subseteq S\setminus P'$ が成り立ちその集合 $S\setminus P'$ は閉集合であるから、$\mathrm{cl}O'\subseteq\mathrm{cl}\left(S\setminus P'\right)=S\setminus P'$ が成り立つ。このとき、$S\setminus O\subseteq P'$ が成り立つので、$\mathrm{cl}O'\subseteq S\setminus P'\subseteq O$ が成り立つ。

逆に、$\forall A\in\mathfrak{A}\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、$A\subseteq O$ が成り立つなら、$\exists O'\in\mathfrak{O}$ に対し、$A\subseteq O'$ かつ $\mathrm{cl}O'\subseteq O$ が成り立つとしよう。このとき、$\forall A',B'\in\mathfrak{A}$ に対し、$A'\cap B'=\emptyset$ が成り立つなら、集合 $S\setminus B'$ は閉集合で $A'\subseteq S\setminus B'$ が成り立つので、$\exists O'\in\mathfrak{O}$ に対し、$A'\subseteq O'$ かつ $\mathrm{cl}O'\subseteq S\setminus B'$ が成り立つ。そこで、次式が成り立つことから、

$$B'=S\setminus\left(S\setminus B'\right)\subseteq S\setminus\mathrm{cl}O'$$

$A'\subseteq O'$ かつ $B'\subseteq S\setminus\mathrm{cl}O'$ かつ $O'\cap S\setminus\mathrm{cl}O'=\emptyset$ が成り立つような開集合たち $O'$、$S\setminus\mathrm{cl}O'$ が存在する。 □

## 1.7.2 分離公理に関する二定理

**定理 1.7.16.** compact 空間である $\mathrm{T}_2$-空間は $\mathrm{T}_4$-空間である。

**証明.** compact 空間である $\mathrm{T}_2$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、これの閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおく。その $\mathrm{T}_2$-空間はもちろん $\mathrm{T}_1$-空間でもある。$\forall A,B\in\mathfrak{A}$ に対し、$A\cap B=\emptyset$ が成り立つなら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間であるから、定理 1.6.4 より部分位相空間たち $(A,\mathfrak{O}_A)$、$(B,\mathfrak{O}_B)$ は compact 空間である。さらに、$\forall a\in A\forall b\in B$ に対し、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_2$-空間であるから、$U_b(a)\cap V_a(b)=\emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ の近傍たちそれぞれ $U_b(a)$、$V_a(b)$ が存在する。ここで、近傍の定義に注意すれば族 $\left\{\mathrm{int}V_a(b)\right\}_{b\in B}$

---

$\left\{\left(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとき、$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $\left(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda\right)$ が正規空間であるならそのときに限り、その直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda}S_\lambda,\mathfrak{O}\right)$ が正規空間であるとも限らない。実際に証明しようとすると、$\forall A,B\in\mathfrak{A}$ に対し、$A\cap B=\emptyset$ が成り立つという条件で詰むと思われるであろう。これも $\mathrm{T}_4$-空間と呼ぶ書籍もあり、むしろ、そちらのほうが主流らしい。

[*22] これを正規空間と呼んでいる書籍もある。むしろ、そちらのほうが主流かもしれない。

は $B\subseteq\bigcup_{b\in B}\mathrm{int}V_a(b)$ を満たすが、その部分位相空間 $(B,\mathfrak{O}_B)$ は compact 空間であるから、集合 $B$ の有限集合である部分集合 $B'$ を用いた族 $\{\mathrm{int}V_a(b)\}_{b\in B'}$ も $B\subseteq\bigcup_{b\in B'}\mathrm{int}V_a(b)$ を満たすので、次のことが成り立つ。

$$a\in\bigcap_{b\in B'}\mathrm{int}U_b(a),\quad B\subseteq\bigcup_{b\in B'}\mathrm{int}V_a(b),\quad \bigcap_{b\in B'}\mathrm{int}U_b(a)\cap\bigcup_{b\in B'}\mathrm{int}V_a(b)=\emptyset$$

ここで、近傍の定義に注意すれば族 $\left\{\bigcap_{b\in B'}\mathrm{int}U_b(a)\right\}_{a\in A}$ は $A\subseteq\bigcup_{a\in A}\bigcap_{b\in B'}\mathrm{int}U_b(a)$ を満たすが、その部分位相空間 $(A,\mathfrak{O}_A)$ は compact 空間であるから、集合 $A$ の有限集合である部分集合 $A'$ を用いた族 $\left\{\bigcap_{b\in B'}\mathrm{int}U_b(a)\right\}_{a\in A'}$ も $A\subseteq\bigcup_{a\in A'}\bigcap_{b\in B'}\mathrm{int}U_b(a)$ を満たすので、開集合たち $\bigcup_{a\in A'}\bigcap_{b\in B'}\mathrm{int}U_b(a)$、$\bigcap_{a\in A'}\bigcup_{b\in B'}\mathrm{int}V_a(b)$ をそれぞれ $U$、$V$ とおくと、$A\subseteq U$ かつ $B\subseteq V$ かつ $U\cap V=\emptyset$ が成り立つので、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は正規空間である。よって、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_4$-空間でもある。 □

**定理 1.7.17.** 第 2 可算公理を満たす正則空間 $(S,\mathfrak{O})$ は正規空間である。

**証明.** 第 2 可算公理を満たす正則空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、これの閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおく。$\forall A,B\in\mathfrak{A}$ に対し、$A\cap B=\emptyset$ が成り立つとする。また、その位相 $\mathfrak{O}$ のたかだか可算な開基 $\mathfrak{B}$ が与えられたとする。$\forall a\in A$ に対し、$a\in S\setminus B\in\mathfrak{O}$ が成り立つので、定理 1.7.13 より $a\in O_a$ かつ $\mathrm{cl}O_a\subseteq S\setminus B$ なる開集合 $O_a$ がその位相 $\mathfrak{O}$ に存在する。また、その位相 $\mathfrak{O}$ の開基 $\mathfrak{B}$ が与えられているので、$a\in W_a\subseteq O_a$ なる開集合 $W_a$ がその開基 $\mathfrak{B}$ に存在する。さらに、$\mathrm{cl}W_a\subseteq\mathrm{cl}O_a$ が成り立つので、$\mathrm{cl}W_a\subseteq S\setminus B$ が成り立つ。したがって、$B\subseteq S\setminus\mathrm{cl}W_a$ が成り立つ。このようにして族 $\{W_a\}_{a\in A}$ が得られれば、$A\subseteq\bigcup_{a\in A}W_a$ が成り立つが、$\{W_a\}_{a\in A}\subseteq\mathfrak{B}$ が成り立つので、$\#\{W_a\}_{a\in A}\leq\aleph_0$ が成り立つことになり、したがって、$\{W_a\}_{a\in A}=\{W_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ と書き換えられることができる。したがって、$A\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}W_n'$ かつ、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$B\subseteq S\setminus\mathrm{cl}W_n'$ が成り立つことになる。同様にして、$B\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}W_n''$ かつ、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$A\subseteq S\setminus\mathrm{cl}W_n''$ が成り立つような族 $\{W_n''\}_{n\in\mathbb{N}}$ がその開基 $\mathfrak{B}$ の部分集合として存在する。

ここで、元の列たち $(V_n')_{n\in\mathbb{N}}$、$(V_n'')_{n\in\mathbb{N}}$ が次のように帰納法によって定義される。

$$V_1'=W_1',\quad V_1''=W_1''\cap S\setminus\mathrm{cl}W_1',\quad V_{n+1}'=W_{n+1}'\cap\bigcap_{i\in\varLambda_n}S\setminus\mathrm{cl}W_i'',\quad V_{n+1}''=W_{n+1}''\cap\bigcap_{i\in\varLambda_{n+1}}S\setminus\mathrm{cl}W_i'$$

このとき、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$A\subseteq S\setminus\mathrm{cl}W_n''$ が成り立ち、したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}A&=A\cap A\\&\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}W_n'\cap A\\&=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(W_n'\cap A)\\&=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(W_n'\cap A\cap A)\\&\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(W_n'\cap\bigcap_{i\in\varLambda_n}S\setminus\mathrm{cl}W_i''\cap A\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( V_n' \cap A \right)\\
&\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n'
\end{aligned}
$$

同様にして、$B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n''$ が成り立つ。一方で、$m > 1$ のとき、

$$
V_m' \cap V_n'' = W_m' \cap \bigcap_{i \in \Lambda_{m-1}} S \setminus \mathrm{cl}W_i'' \cap W_n'' \cap \bigcap_{i \in \Lambda_n} S \setminus \mathrm{cl}W_i'
$$

$m > n$ のとき、$n \in \Lambda_{m-1}$ が成り立つので、

$$
\begin{aligned}
V_m' \cap V_n'' &= W_m' \cap \bigcap_{i \in \Lambda_{m-1} \setminus \{n\}} S \setminus \mathrm{cl}W_i'' \cap S \setminus \mathrm{cl}W_n'' \cap W_n'' \cap \bigcap_{i \in \Lambda_n} S \setminus \mathrm{cl}W_i'\\
&= W_m' \cap \bigcap_{i \in \Lambda_{m-1} \setminus \{n\}} S \setminus \mathrm{cl}W_i'' \cap \emptyset \cap \bigcap_{i \in \Lambda_n} S \setminus \mathrm{cl}W_i' = \emptyset
\end{aligned}
$$

$m \leq n$ のとき、$m \in \Lambda_n$ が成り立つので、

$$
\begin{aligned}
V_m' \cap V_n'' &= W_m' \cap S \setminus \mathrm{cl}W_m' \cap \bigcap_{i \in \Lambda_{m-1}} S \setminus \mathrm{cl}W_i'' \cap W_n'' \cap \bigcap_{i \in \Lambda_n \setminus \{m\}} S \setminus \mathrm{cl}W_i'\\
&= \emptyset \cap \bigcap_{i \in \Lambda_{m-1}} S \setminus \mathrm{cl}W_i'' \cap W_n'' \cap \bigcap_{i \in \Lambda_n \setminus \{m\}} S \setminus \mathrm{cl}W_i' = \emptyset
\end{aligned}
$$

$m = 1$ のとき、

$$
\begin{aligned}
V_1' \cap V_n'' &= W_1' \cap W_n'' \cap \bigcap_{i \in \Lambda_n} S \setminus \mathrm{cl}W_i'\\
&= W_1' \cap S \setminus \mathrm{cl}W_1' \cap W_n'' \cap \bigcap_{i \in \Lambda_n \setminus \{1\}} S \setminus \mathrm{cl}W_i'\\
&= \emptyset \cap W_n'' \cap \bigcap_{i \in \Lambda_n \setminus \{1\}} S \setminus \mathrm{cl}W_i' = \emptyset
\end{aligned}
$$

以上、$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$ に対し、$V_m' \cap V_n'' = \emptyset$ が成り立つので、次のようになる。

$$
\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n' \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n'' = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \left( V_m' \cap V_n'' \right) = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \emptyset = \emptyset
$$

よって、$\forall A, B \in \mathfrak{A}$ に対し、$A \cap B = \emptyset$ が成り立つなら、$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n'$ かつ $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n''$ かつ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n' \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n'' = \emptyset$ が成り立つような開集合たち $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n'$、$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n''$ が存在することが示されたので、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は正規空間である。 $\square$

### 1.7.3 1 次元 Euclid 空間における位相空間

**定義 1.7.8.** $\forall a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式のように定義される集合 $B(a, \varepsilon)$ をその実数 $a$ を中心とする半径 $\varepsilon$ の球体という。

$$
B(a, \varepsilon) = \{ b \in \mathbb{R} | |a - b| < \varepsilon \} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)
$$

**定理 1.7.18.** 集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 $O$ において、$\forall a \in O \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$B(a, \varepsilon) \subseteq O$ が成り立つようなその集合 $O$ と空集合全体の集合が $\mathfrak{O}_{d_E}$ とおかれると、組 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ は位相空間をなす。

**定義 1.7.9.** このような位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ を 1 次元 Euclid 空間における位相空間ということにする。

**証明.** 集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 $O$ において、$\forall a \in O \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$B(a, \varepsilon) \subseteq O$ が成り立つようなその集合 $O$ と空集合全体の集合が $\mathfrak{O}_{d_E}$ とおかれると、$\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対し、$|a - b| < \varepsilon$ となる正の実数 $\varepsilon$ が存在するので、$\mathbb{R}, \emptyset \in \mathfrak{O}_{d_E}$ が成り立つ。

ここで、$\forall O, P \in \mathfrak{O}_{d_E}$ に対し、積集合 $O \cap P$ が空集合であれば、$O \cap P \in \mathfrak{O}_{d_E}$ が成り立つし、空集合でなければ、これの任意の実数 $a$ に対し、ある正の実数たち $\delta$、$\varepsilon$ が存在して $B(a, \delta) \subseteq O$、$B(a, \varepsilon) \subseteq P$ が成り立つことになる。ここで、$\varepsilon' = \min\{\delta, \varepsilon\}$ とおかれれば、$B(a, \varepsilon') \subseteq O$ かつ $B(a, \varepsilon') \subseteq P$ が成り立つので、$B(a, \varepsilon') \subseteq O \cap P$ が成り立ち、したがって、$O \cap P \in \mathfrak{O}_{d_E}$ が成り立つ。

さらに、添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}_{d_E}$ の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき、$\forall a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ に対し、$a \in O_\lambda$ なる開集合 $O_\lambda$ とある正の実数 $\varepsilon$ が存在して $B(a, \varepsilon) \subseteq O_\lambda$ が成り立つことになる。ここで、$O_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ が成り立つので、$B(a, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ が成り立ち、したがって、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}_{d_E}$ が成り立つ。

以上より、その組 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ は位相空間をなす。 □

**定理 1.7.19.** 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ が与えられたとき、$\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、その実数 $a$ を中心とする半径 $\varepsilon$ の球体 $B(a, \varepsilon)$ はその位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ における開集合である。これにより、球体を開球、開球体ともいう。

**証明.** 定義より明らかである。 □

**定理 1.7.20.** 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ の開基として、開球体全体の集合 $\mathfrak{U}$、開区間全体の集合 $\mathcal{I}$ が挙げられる。

**証明.** 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ が与えられたとき、これにおける開集合 $O$ の任意の実数 $a$ に対し、ある正の実数 $\varepsilon_a$ が存在して $B(a, \varepsilon_a) \subseteq O$ が成り立つので、$\bigcup_{a \in O} B(a, \varepsilon_a) \subseteq O$ が成り立つ。また、上記より $O \subseteq \bigcup_{a \in O} B(a, \varepsilon_a)$ が成り立つので、$O = \bigcup_{a \in O} B(a, \varepsilon_a)$ が成り立つ。これにより、開球体全体の集合 $\mathfrak{U}$ は開基をなす。

このとき、開球体は開区間でもあるので、開区間全体の集合 $\mathcal{I}$ も開基をなす。 □

**定理 1.7.21.** 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ が与えられたとき、$\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、その実数 $a$ の基本近傍系として、その元 $a$ を中心とする開球体全体の集合 $\mathfrak{U}_a$ が挙げられる。

**証明.** 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、$a \in O$ なる開集合 $O$ が存在するので、このような任意の開集合たち $O$ に対し、定理 1.7.20 より 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ の開基として、開球体全体の集合 $\mathfrak{U}$ が挙げられるので、その元 $a$ を中心とする開球体全体の集合 $\mathfrak{U}_a$ のある元 $B(a, \varepsilon)$ が存在して、$B(a, \varepsilon) \subseteq O$ が成り立つかつ、$a \in B(a, \varepsilon) = \mathrm{int} B(a, \varepsilon)$ が成り立つので、その集合 $\mathfrak{U}_a$ がその元 $a$ の基本近傍系をなす。 □

### 1.7.4 Urysohn の補題

**定理 1.7.22** (Urysohn の補題)**.** $T_4$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくとき、$\forall A,B\in\mathfrak{A}$ に対し、$A\cap B=\emptyset$ が成り立つなら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $\left(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E}\right)$ への連続写像 $f:S\to\mathbb{R}$ で次のことを満たすようなものが存在する。

- $\forall a\in A$ に対し、$f(a)=0$ が成り立つかつ、$\forall b\in B$ に対し、$f(b)=1$ が成り立つ。
- $\forall c\in S$ に対し、$0\leq f(c)\leq 1$ が成り立つ。

この定理を Urysohn の補題という。

**証明.** $T_4$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくとき、$\forall A,B\in\mathfrak{A}$ に対し、$A\cap B=\emptyset$ が成り立つとする。さらに、次式のように集合 $\varLambda$ が定義されるとする。

$$\varLambda=\left\{\frac{m}{2^n}\in\mathbb{Q}\middle|m\in\varLambda_{2^n}\cup\{0\},n\in\mathbb{N}\right\}$$

このとき、$A\subseteq O$ が成り立つようなその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合 $A$ と開集合 $O$ の組 $(A,O)$ 全体の集合を $\mathfrak{X}$ とし、$\forall(A,O)\in\mathfrak{X}$ に対し、次式のように集合 $\mathfrak{O}_{(A,O)}$ が定義されるとする。

$$\mathfrak{O}_{(A,O)}=\{O'\in\mathfrak{O}|A\subseteq O'\subseteq\mathrm{cl}O'\subseteq O\}$$

このとき、定理 1.7.15 よりそのような集合 $\mathfrak{O}_{(A,O)}$ は空集合でない。ここで、族 $\left\{\mathfrak{O}_{(A,O)}\right\}_{(A,O)\in\mathfrak{X}}$ が考えられれば、選択の公理より $\varPhi:\mathfrak{X}\to\mathfrak{O};(A,O)\mapsto\varPhi(A,O)\in\mathfrak{O}_{(A,O)}$ なる写像 $\varPhi$ が存在し、次のように族 $\{O(r)\}_{r\in\varLambda}$ が次のように定義されるとする。

- $\varPhi(A,S\setminus B)=O(0)$ が成り立つ。
- $O(1)=S\setminus B$ が成り立つ。
- $\varPhi\left(\mathrm{cl}O\left(\frac{m}{2^n}\right),O\left(\frac{m+1}{2^n}\right)\right)=O\left(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right)$ が成り立つ。

このとき、その族 $\{O(r)\}_{r\in\varLambda}$ は確かに存在できる。
次に、写像 $f:S\to\mathbb{R}$ を次式のように定義されるとする。

- $\forall b\in B$ に対し、$f(b)=1$ が成り立つ。
- $\forall c\in O(1)$ に対し、$f(c)=\inf\{r\in\varLambda|c\in O(r)\}$ が成り立つ。

このとき、$\forall a\in A$ に対し、$a\in A\subseteq O(0)$ が成り立つので、次のようになる。

$$f(a)=\inf\{r\in\varLambda|a\in O(r)\}=0$$

また、$\forall b\in B$ に対し、定義より明らかに $f(b)=1$ が成り立つ。さらに、その集合 $\varLambda$ の定義より $\varLambda\subseteq[0,1]$ が成り立つので、$\forall c\in S$ に対し、$0\leq f(c)\leq 1$ が成り立つ。

次に、$\forall r\in\varLambda\forall c\in O(r)$ に対し、定義より $f(c)\leq r$ が成り立つ。さらに、定義より $f(c)<r$ が成り立つなら、$\exists r'\in\varLambda$ に対し、$c\in O(r')$ が成り立つかつ、$O(r')\subseteq O(r)$ が成り立つので、$c\in O(r)$ が成り立つ。対偶律より $f(c)>r$ が成り立つなら、$c\notin O(r)$ が成り立つかつ、$c\notin O(r)$ が成り立つなら、$f(c)\geq r$ が成り立つ。ここで、有理数の稠密性より $f(c)>r'>r$ なる有理数 $r'$ がとられれば、その族 $\{O(r)\}_{r\in\varLambda}$ の定義より $\mathrm{cl}O(r)\subseteq O(r')$ が成り立つので、$c\notin\mathrm{cl}O(r)$ が成り立つ。

$\forall c \in S \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ において、$(f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon) = B(f(c), \varepsilon) \in \mathfrak{O}_{d_E}$ が成り立つので、$f(c) \in (0,1)$ が成り立つなら、有理数の稠密性と同じ議論により $f(c)-\varepsilon < r < f(c) < s < f(c)+\varepsilon$ なる有理数たち $r$、$s$ がその集合 $\Lambda$ に存在することが示される。このとき、集合 $O(s) \setminus \mathrm{cl}O(r)$ は開集合でこれを $U(c)$ とおくと、$r < f(c)$ が成り立つので、$c \notin \mathrm{cl}O(r)$ が成り立つかつ、$f(c) < s$ が成り立つので、$c \in O(s)$ が成り立つことになる。したがって、$c \in U(c)$ が成り立つので、その集合 $U(c)$ はその元 $c$ の近傍である。さらに、$\forall c' \in U(c)$ に対し、$r \leq f(c') \leq s$ が成り立つので、$f(c)-\varepsilon < r \leq f(c') \leq s < f(c)+\varepsilon$ が得られる。したがって、$|f(c') - f(c)| < \varepsilon$ が成り立つ。$f(c) = 1$ のとき、$1-\varepsilon < q < 1$ なる有理数 $q$ を用いて $U(c) = S \setminus \mathrm{cl}O(q)$ とおけば、$f(c) = 0$ のとき、$0 < q < \varepsilon$ なる有理数 $q$ を用いて $U(c) = O(q)$ とおけば、同様にして、その集合 $U(c)$ はその元 $c$ の近傍で、$\forall c' \in U(c)$ に対し、$|f(c') - f(c)| < \varepsilon$ が成り立つ。これにより、次のようになる。

$$V\left(f^{-1}|(f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)\right) = \{c' \in S | |f(c') - f(c)| < \varepsilon\} = U(c) \in \mathfrak{O}$$

以上より、その写像 $f$ は連続写像である。 □

**定義 1.7.10.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおき、$\forall A \in \mathfrak{A} \forall a \in S \setminus A$ に対し、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f: S \to \mathbb{R}$ で次のことを満たすようなものが存在するとき、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ を完全正則空間という。

- $f(a) = 0$ が成り立つ。
- $\forall b \in A$ に対し、$f(b) = 1$ が成り立つ。
- $\forall b \in S$ に対し、$0 \leq f(b) \leq 1$ が成り立つ。

**定義 1.7.11.** $\mathrm{T}_1$-空間であり完全正則空間でもあるような位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ を完全 $\mathrm{T}_3$-空間、Tikhonov 空間という。

**定理 1.7.23.** $\mathrm{T}_4$-空間は完全 $\mathrm{T}_3$-空間である。

**証明.** $\mathrm{T}_4$-空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、これは $\mathrm{T}_1$-空間でもあるので、その閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくと、$\forall A \in \mathfrak{A} \forall a \in S \setminus A$ に対し、$\{a\} \in \mathfrak{A}$ が成り立つので、Urysohn の補題より $\forall A, B$ に対し、$A \cap B = \emptyset$ が成り立つなら、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f: S \to \mathbb{R}$ で次のことを満たすようなものが存在する。

- $f(a) = 0$ が成り立つかつ、$\forall b \in B$ に対し、$f(b) = 1$ が成り立つ。
- $\forall c \in S$ に対し、$0 \leq f(c) \leq 1$ が成り立つ。

これにより、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は完全 $\mathrm{T}_3$-空間である。 □

**定理 1.7.24.** 完全 $\mathrm{T}_3$-空間は $\mathrm{T}_3$-空間である。

**証明.** 完全 $\mathrm{T}_3$-空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall O \in \mathfrak{O} \forall a \in O$ に対し、その集合 $S \setminus O$ は閉集合で $a \notin S \setminus O$ が成り立つので、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f: S \to \mathbb{R}$ で次のことを満たすようなものが存在する。

- $f(a) = 0$ が成り立つ。
- $\forall b \in S \setminus O$ に対し、$f(b) = 1$ が成り立つ。

- $\forall b \in S$ に対し、$0 \leq f(b) \leq 1$ が成り立つ。

ここで、$O' = \left\{ a \in S \middle| f(a) < \frac{1}{2} \right\}$ とおくと、その写像 $f$ は連続でありその集合 $O'$ は開集合で $a \in O'$ を満たし $V(f|O') \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right)$ が成り立つので、定理 1.3.4 より次式が成り立つ。

$$V(f|\mathrm{cl}O') \subseteq \mathrm{cl}V(f|O') \subseteq \mathrm{cl}\left[0, \frac{1}{2}\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$V(f|\mathrm{cl}O') \cap V(f|S \setminus O) = \emptyset$ が成り立つので、$\mathrm{cl}O' \cap S \setminus O = \emptyset$ が成り立ち、したがって、$\mathrm{cl}O' \subseteq S \setminus (S \setminus O) = O$ が成り立つ。定理 1.7.12 よりその位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は $\mathrm{T}_3$-空間である。 □

**定義 1.7.12.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a, b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$V_a \cap V_b = \emptyset$ なるそれらの元々 $a$、$b$ の閉集合でもある近傍たちそれぞれ $V_a$、$V_b$ が存在するような位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ を Urysohn 空間という。

**定理 1.7.25.** $\mathrm{T}_3$-空間は Urysohn 空間である。

**証明.** $\mathrm{T}_3$-空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a, b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$b \notin V$ なるその元 $a$ の近傍 $V$ が存在するとしよう。このとき、$a \in \mathrm{int}V$ が成り立つので、その集合 $S \setminus \mathrm{int}V$ は閉集合で $a \notin S \setminus \mathrm{int}V$ かつ $b \in S \setminus \mathrm{int}V$ が成り立つ。したがって、$\exists O, P \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O$ かつ $S \setminus \mathrm{int}V \subseteq P$ かつ $O \cap P = \emptyset$ が成り立つ。このとき、$\mathrm{cl}(O \cap P) = \mathrm{cl}O \cap \mathrm{cl}P = \emptyset$ が成り立つかつ、$a \in \mathrm{int}O = O \subseteq \mathrm{intcl}O$ かつ $b \in \mathrm{int}P = P \subseteq \mathrm{intcl}P$ が成り立つので、それらの閉集合たち $\mathrm{cl}O$、$\mathrm{cl}P$ はそれぞれそれらの元々 $a$、$b$ の近傍である。よって、$\mathrm{T}_3$-空間 $(S, \mathfrak{O})$ は Urysohn 空間である。 □

**定理 1.7.26.** Urysohn 空間は $\mathrm{T}_2$-空間である。

**証明.** 定義より明らかである。 □

**定義 1.7.13.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a, b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f: S \to \mathbb{R}$ で次のことを満たすようなものが存在するとき、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ を完全 $\mathrm{T}_2$-空間、完全 Hausdorff 空間という。

- $f(a) = 0$ が成り立つ。
- $f(b) = 1$ が成り立つ。
- $\forall c \in S$ に対し、$0 \leq f(c) \leq 1$ が成り立つ。

**定理 1.7.27.** 完全 $\mathrm{T}_3$-空間は完全 $\mathrm{T}_2$-空間である。

**証明.** 完全 $\mathrm{T}_3$-空間 $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおき、$\forall a, b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$\{b\} \in \mathfrak{A}$ が成り立つので、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f: S \to \mathbb{R}$ で次のことを満たすようなものが存在する。

- $f(a) = 0$ が成り立つ。
- $f(b) = 1$ が成り立つ。
- $\forall c \in S$ に対し、$0 \leq f(c) \leq 1$ が成り立つ。

これにより、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は完全 $\mathrm{T}_2$-空間である。 □

**定理 1.7.28.** 完全 $\mathrm{T}_2$-空間は Urysohn 空間である。

**証明.** 完全 $\mathrm{T}_2$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおき、$\forall a,b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f:S \to \mathbb{R}$ で次のことを満たすようなものが存在する。

- $f(a)=0$ が成り立つ。
- $f(b)=1$ が成り立つ。
- $\forall c \in S$ に対し、$0 \leq f(c) \leq 1$ が成り立つ。

ここで、$O=\left\{a \in S \middle| f(a)<\dfrac{1}{2}\right\}$ とおくと、その写像 $f$ は連続でありその集合 $O$ は開集合で $a \in O$ を満たし $V(f|O) \subseteq \left[0,\dfrac{1}{2}\right)$ が成り立つので、$O \subseteq V\left(f^{-1}|V(f|O)\right) \subseteq V\left(f^{-1}|\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\right)$ が成り立つ。同様にして、$P=\left\{a \in S \middle| f(a)>\dfrac{1}{2}\right\}$ とおくと、その写像 $f$ は連続でありその集合 $P$ は開集合で $b \in P$ を満たし $V(f|P) \subseteq \left(\dfrac{1}{2},1\right]$ が成り立つので、$P \subseteq V\left(f^{-1}|V(f|P)\right) \subseteq V\left(f^{-1}|\left(\dfrac{1}{2},1\right]\right)$ が成り立つ。ここで、$\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\cap\left(\dfrac{1}{2},1\right]=\emptyset$ が成り立つので、$O\cap P=\emptyset$ が成り立つことになる。このとき、$\mathrm{cl}(O\cap P)=\mathrm{cl}O\cap\mathrm{cl}P=\emptyset$ が成り立つかつ、$a \in \mathrm{int}O=O \subseteq \mathrm{intcl}O$ かつ $b \in \mathrm{int}P=P \subseteq \mathrm{intcl}P$ が成り立つので、それらの閉集合たち $\mathrm{cl}O$、$\mathrm{cl}P$ はそれぞれそれらの元々 $a$、$b$ の近傍である。よって、完全 $\mathrm{T}_2$-空間 $(S,\mathfrak{O})$ は Urysohn 空間である。 □

**定義 1.7.14.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall M,N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$M\cap N=\emptyset$ が成り立つなら、$\exists O,P \in \mathfrak{O}$ に対し、$M \subseteq O$ かつ $N \subseteq P$ かつ $O\cap P=\emptyset$ が成り立つような位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ を全部分正規空間という。

**定義 1.7.15.** $\mathrm{T}_1$-空間であり全部分正規空間でもあるような位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ を $\mathrm{T}_5$-空間、全部分正規 Hausdorff 空間という[*23]。

**定理 1.7.29.** 全部分正規空間は正規空間である。

**証明.** 定義より明らかである。 □

**定義 1.7.16.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおき、$\forall A,B \in \mathfrak{A}$ に対し、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f:S \to \mathbb{R}$ で次のことを満たすようなものが存在するとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ を完全正規空間という。

- $\forall a \in A$ に対し、$f(a)=0$ が成り立つ。
- $\forall b \in B$ に対し、$f(b)=1$ が成り立つ。
- $\forall c \in S$ に対し、$0 \leq f(c) \leq 1$ が成り立つ。

**定義 1.7.17.** $\mathrm{T}_1$-空間であり完全正規空間でもあるような位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ を $\mathrm{T}_6$-空間、完全正規 Hausdorff

[*23] はい、これを全部分正規空間と呼ぶ書籍もあります。

空間という。

**定理 1.7.30.** 完全正規空間は全部分正規空間である。

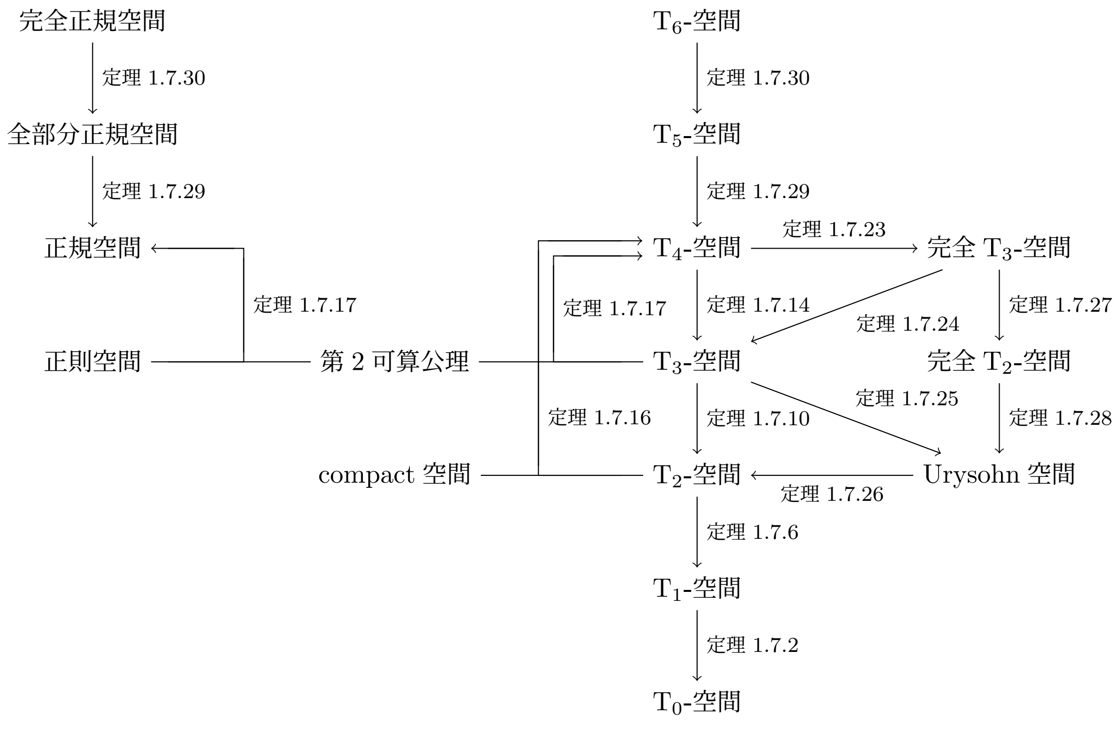
**証明.** 完全正規空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおき、$\forall M,N\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$M\cap N=\emptyset$ が成り立つなら、$\mathrm{cl}M,\mathrm{cl}N\in\mathfrak{A}$ が成り立つかつ、$\mathrm{cl}M\cap\mathrm{cl}N=\emptyset$ が成り立つので、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f:S\rightarrow\mathbb{R}$ で次のことを満たすようなものが存在する。

- $\forall a\in\mathrm{cl}M$ に対し、$f(a)=0$ が成り立つ。
- $\forall b\in\mathrm{cl}N$ に対し、$f(b)=1$ が成り立つ。
- $\forall c\in S$ に対し、$0\leq f(c)\leq 1$ が成り立つ。

ここで、$O=\left\{a\in S\middle|f(a)<\dfrac{1}{2}\right\}$ とおくと、その写像 $f$ は連続でありその集合 $O$ は開集合で $\mathrm{cl}M\subseteq O$ を満たし $V\left(f|O\right)\subseteq\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$ が成り立つので、$\mathrm{cl}M\subseteq O\subseteq V\left(f^{-1}|V\left(f|O\right)\right)\subseteq V\left(f^{-1}|\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\right)$ が成り立つ。同様にして、$P=\left\{a\in S\middle|f(a)>\dfrac{1}{2}\right\}$ とおくと、その写像 $f$ は連続でありその集合 $P$ は開集合で $\mathrm{cl}N\subseteq P$ を満たし $V\left(f|P\right)\subseteq\left(\dfrac{1}{2},1\right]$ が成り立つので、$\mathrm{cl}N\subseteq P\subseteq V\left(f^{-1}|V\left(f|P\right)\right)\subseteq V\left(f^{-1}|\left(\dfrac{1}{2},1\right]\right)$ が成り立つ。ここで、$\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\cap\left(\dfrac{1}{2},1\right]=\emptyset$ が成り立つので、$O\cap P=\emptyset$ が成り立つことになる。よって、完全正規空間は全部分正規空間である。 □

### 1.7.5 分離公理

以上の主張は次のようにまとめられることができる。



# 参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p137-151,223-233 ISBN978-4-00-029871-1

[2] 戸松玲治. "数学 IIB 演習 No. 5 11 月 5 日配布 担当：戸松 玲治 3 分離公理". 東京理科大学. https://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/m2b/M2B10-5.pdf (2021-8-5 14:35 取得)

[3] 加塩朋和. "一般位相 A（２組）". 東京理科大学. https://www.rs.tus.ac.jp/a25594/2018-2019_General_Topology.pdf (2021-8-6 12:15 取得)

[4] 藤岡敦. "§ 8. 正則空間と正規空間". 関西大学. http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~afujioka/2017-2021/2017/st3/171120st3.pdf (2022-14-15 19:56 閲覧)

# 1.8 filter

## 1.8.1 filter

**定義 1.8.1.** 空集合でない集合 $S$ の部分集合系 $\mathfrak{F}$ が次のことを満たすとき、その集合 $\mathfrak{F}$ をその集合 $S$ 上のfilter という。

- $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ が成り立つ。
- $\forall F \in \mathfrak{F} \forall G \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \subseteq G \subseteq S$ が成り立つなら、$G \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。
- $\forall F, G \in \mathfrak{F}$ に対し、$F \cap G \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。

**定理 1.8.1.** 集合 $S$ 上の filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、$S \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。

**証明.** 集合 $S$ 上の filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、$\forall F \in \mathfrak{F}$ に対し、$F \subseteq S \subseteq S$ が成り立つなら、$S \in \mathfrak{F}$ が成り立つことにより自明である。 □

**定理 1.8.2.** 集合 $S$ 上の filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、$\forall F \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \in \mathfrak{F}$ かつ $S \setminus F \in \mathfrak{F}$ が成り立つことはない。

**証明.** その集合 $S$ 上の filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、$\exists F \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \in \mathfrak{F}$ かつ $S \setminus F \in \mathfrak{F}$ が成り立つと仮定すると、filter の定義より $F \cap S \setminus F \in \mathfrak{F}$ が成り立ち、したがって、$\emptyset \in \mathfrak{F}$ が成り立つことになるが、これはfilter の定義に矛盾する。 □

## 1.8.2 filter の収束

**定義 1.8.2.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ とその集合 $S$ 上の filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、その集合 $S$ の元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ が $\mathbf{V}(a) \subseteq \mathfrak{F}$ を満たすとき、その filter$\mathfrak{F}$ はその元 $a$ に収束するといい、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ などと書く。

**定理 1.8.3.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S) \forall a \in S$ に対し、次のことが成り立つ。

- その元 $a$ がその集合 $M$ の内点である、即ち、$a \in \mathrm{int}M$ が成り立つならそのときに限り、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ なるその集合 $S$ 上の任意の filter$\mathfrak{F}$ に対し、$M \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。
- その元 $a$ がその集合 $M$ の触点である、即ち、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ なるその集合 $S$ 上のある filter$\mathfrak{F}$ が存在して、$M \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S) \forall a \in S$ に対し、その元 $a$ がその集合 $M$ の内点である、即ち、$a \in \mathrm{int}M$ が成り立つなら、その元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ を用いて $M \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。ここで、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ なるその集合 $S$ 上の任意の filter$\mathfrak{F}$ に対し、$\mathbf{V}(a) \subseteq \mathfrak{F}$ が成り立つので、$M \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。逆に、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ なるその集合 $S$ 上の任意の filter$\mathfrak{F}$ に対し、$M \in \mathfrak{F}$ が成り立つなら、その全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ について、定理 1.1.24 より次のことが成り立つので、

- $\emptyset \notin \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。
- $\forall V \in \mathbf{V}(a) \forall W \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$V \subseteq W \subseteq S$ が成り立つなら、$W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。
- $\forall V, W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。

- $\mathbf{V}(a) \subseteq \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。

その全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ は $\mathbf{V}(a) \rightarrow a$ なるその集合 $S$ 上の filter でもある。したがって、$M \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つので、$a \in \mathrm{int}M$ が成り立ち、よって、その元 $a$ がその集合 $M$ の内点である。

その元 $a$ がその集合 $M$ の触点である、即ち、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つなら、その元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ を用いて、$\exists V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$M \cap V \subseteq F$ が成り立つような集合 $F$ 全体の集合 $\mathfrak{F}$ について、もちろん $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ が成り立つ。さらに、$\forall F \in \mathfrak{F} \forall G \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \subseteq G \subseteq S$ が成り立つなら、$\exists V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$M \cap V \subseteq F \subseteq G$ が成り立つので、$G \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。$\forall F, G \in \mathfrak{F}$ に対し、その元 $a$ の近傍たち $V$、$W$ が存在して、$M \cap V \subseteq F$ かつ $M \cap W \subseteq G$ が成り立つので、$M \cap (V \cap W) \subseteq F \cap G$ が成り立ち、定理 1.1.24 より $V \cap W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つので、$F \cap G \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、明らかに $M \cap V \subseteq V$ が成り立つので、$V \in \mathfrak{F}$ が成り立つ、即ち、$\mathbf{V}(a) \subseteq \mathfrak{F}$ が成り立つ。以上より、次のことが成り立つので、

- $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ が成り立つ。
- $\forall F \in \mathfrak{F} \forall G \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \subseteq G \subseteq S$ が成り立つなら、$G \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。
- $\forall F, G \in \mathfrak{F}$ に対し、$F \cap G \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。
- $\mathbf{V}(a) \subseteq \mathfrak{F}$ が成り立つ。

その集合 $\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{F} \rightarrow a$ なるその集合 $S$ 上の filter でもある。したがって、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ なるその集合 $S$ 上のある filter$\mathfrak{F}$ が存在して $M \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。逆に、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ なるその集合 $S$ 上のある filter$\mathfrak{F}$ が存在して $M \in \mathfrak{F}$ が成り立つなら、$\mathbf{V}(a) \subseteq \mathfrak{F}$ が成り立つので、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \in \mathfrak{F}$ が成り立ち、filter の定義より $V \cap M \in \mathfrak{F}$ が成り立つかつ、$\emptyset \notin \mathfrak{F}$ が成り立たないので、$V \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。このことはその元 $a$ の基本近傍系の元に対しても同じようなことがいえるので、定理 1.2.17 よりその元 $a$ がその集合 $M$ の触点である、即ち、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つ。 □

**定理 1.8.4.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、その集合 $S$ 上の任意の filter$\mathfrak{F}$ に対し、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ が成り立つなら、$\forall F \in \mathfrak{F}$ に対し、$a \in \mathrm{cl}F$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、その集合 $S$ 上の任意の filter$\mathfrak{F}$ に対し、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ が成り立つなら、その集合 $S$ の元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ が $\mathbf{V}(a) \subseteq \mathfrak{F}$ を満たす。したがって、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \in \mathfrak{F}$ が成り立つので、$\forall F \in \mathfrak{F}$ に対し、filter の定義より $V \cup F \neq \emptyset$ が成り立つ。ここで、基本近傍系の定義に注意すれば、定理 1.2.15 より $a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つ。 □

### 1.8.3 極大 filter

**定義** (定義 1.6.3 の再掲)**.** 集合 $S$ の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が与えられたとき、これの任意の空でない有限集合である部分集合に属する集合同士の共通部分が空でないとき、即ち、$\forall \mathfrak{X}' \in \mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ に対し、$0 < \#\mathfrak{X}' < \aleph_0$ が成り立つなら、$\bigcap \mathfrak{X}' \neq \emptyset$ が成り立つとき、その集合 $\mathfrak{X}$ は有限交叉性を持つという。

**定義 1.8.3.** 集合 $S$ 上の filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、その集合 $S$ の任意の filter$\mathfrak{F}'$ に対し、$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ が成り立つなら、$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ が成り立つとき、その filter$\mathfrak{F}$ をその集合 $S$ 上の極大 filter という。以下、その集合 $S$ 上の極大 filter 全体の集合を $\beta(S)$ とおく。

**定理 1.8.5.** 集合 $S$ 上の filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- その filter$\mathfrak{F}$ はその集合 $S$ 上の極大 filter である、即ち、$\mathfrak{F} \in \beta(S)$ が成り立つ。
- その集合 $S$ の任意の filter$\mathfrak{F}'$ に対し、$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ が成り立つなら、$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ が成り立つ。
- $\forall F \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \in \mathfrak{F}$ または $S \setminus F \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。

**証明.** 集合 $S$ 上の filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、定義よりその filter$\mathfrak{F}$ はその集合 $S$ 上の極大 filter であるならそのときに限り、その集合 $S$ の任意の filter$\mathfrak{F}'$ に対し、$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ が成り立つなら、$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ が成り立つ。

一方で、その集合 $S$ の任意の filter$\mathfrak{F}'$ に対し、$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ が成り立つなら、$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ が成り立つとき、$S \in \mathfrak{F}$ が成り立つので、$\forall F \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、次式のように集合 $\mathfrak{X}$ が定義されれば、

$$\mathfrak{X} = \{X \in \mathfrak{P}(S) | F \cup X \in \mathfrak{F}\}$$

その集合 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性をもつとき、$\emptyset \in \mathfrak{X}$ が成り立つとすれば、その集合 $\{\emptyset\}$ もその集合 $\mathfrak{X}$ の空でない有限集合である部分集合で $\bigcap \{\emptyset\} = \emptyset$ が成り立つが、これはその集合 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性をもつことに矛盾する。したがって、$\emptyset \notin \mathfrak{X}$ が成り立つ。$\forall X \in \mathfrak{X} \forall Y \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$X \subseteq Y \subseteq S$ が成り立つなら、$F \cup X \in \mathfrak{F}$ かつ $F \cup X \subseteq F \cup Y \subseteq S$ が成り立つので、filter の定義より $F \cup Y \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。したがって、$Y \in \mathfrak{X}$ が成り立つ。最後に、$\forall X, Y \in \mathfrak{X}$ に対し、$F \cup X, F \cup Y \in \mathfrak{F}$ が成り立つので、$(F \cup X) \cap (F \cup Y) = F \cup (X \cap Y) \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。したがって、$X \cap Y \in \mathfrak{X}$ が成り立つ。以上より、その集合 $\mathfrak{X}$ はその集合 $S$ 上の filter である。ここで、$\forall G \in \mathfrak{F}$ に対し、$G \subseteq F \cup G \subseteq S$ が成り立つので、filter の定義より $F \cup G \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。ゆえに、$G \in \mathfrak{X}$ が得られ、したがって、$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ が成り立つ。ここで、仮定よりその filter$\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}$ を満たす。このとき、$S \setminus F \cup F = S \in \mathfrak{F}$ が成り立つので、$S \setminus F \in \mathfrak{X} = \mathfrak{F}$ が得られる。

その集合 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性をもたないとき、これの空でない有限集合であるある部分集合 $\mathfrak{X}'$ が存在して、これに属する集合同士の共通部分 $\bigcap \mathfrak{X}'$ が空である。このとき、$\forall X \in \mathfrak{X}'$ に対し、$F \cup X \in \mathfrak{F}$ が成り立つので、filter の定義より次のようになる。

$$\begin{aligned} F &= F \cup \emptyset \\ &= F \cup \bigcap \mathfrak{X}' \\ &= F \cup \bigcap_{X \in \mathfrak{X}'} X \\ &= \bigcap_{X \in \mathfrak{X}'} (F \cup X) \in \mathfrak{F} \end{aligned}$$

以上より、その集合 $S$ の任意の filter$\mathfrak{F}'$ に対し、$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ が成り立つなら、$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ が成り立つなら、$\forall F \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \in \mathfrak{F}$ または $S \setminus F \in \mathfrak{F}$ が成り立つことが示された。

$\forall F \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \in \mathfrak{F}$ または $S \setminus F \in \mathfrak{F}$ が成り立つとき、その集合 $S$ のある filter$\mathfrak{F}'$ が存在して、$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ が成り立つと仮定すると、あるその filter$\mathfrak{F}'$ の元 $F$ が存在して、$F \notin \mathfrak{F}$ が成り立つ。このとき、仮定より $S \setminus F \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ が成り立つことになるが、次のようになることにより、

$$F \cap S \setminus F = \emptyset \in \mathfrak{F}'$$

その集合 $\mathfrak{F}'$ が filter であることに矛盾する。よって、その集合 $S$ の任意の filter$\mathfrak{F}'$ に対し、$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ が成り立つなら、$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ が成り立つ。 □

**定理 1.8.6.** 集合 $S$ の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が与えられたとき、これが有限交叉性をもつなら、これを含むその集合 $S$ 上の極大 filter$\mathfrak{F}$ が存在する。

**証明.** 集合 $S$ の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が与えられたとき、これが有限交叉性をもつとする。このとき、その部分集合系 $\mathfrak{X}$ の空でない有限集合である部分集合 $\mathfrak{X}'$ が存在して、この共通部分 $\bigcap\mathfrak{X}'$ を含むようなその集合 $S$ の部分集合全体の集合 $\mathfrak{F}$ が考えられれば、$\forall X \in \mathfrak{X}$ に対し、$\{X\} \subseteq \mathfrak{X}$ かつ $\bigcap\{X\} = X \subseteq X$ かつ $X \subseteq S$ が成り立つので、$X \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。ゆえに、$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ が成り立つ。

さらに、$\emptyset \in \mathfrak{F}$ が成り立つとすれば、その部分集合系 $\mathfrak{X}$ の空でない有限な部分集合 $\mathfrak{X}'$ が存在して、$\bigcap\mathfrak{X}' \subseteq \emptyset$ が成り立つので、$\bigcap\mathfrak{X}' = \emptyset$ も成り立つ。しかしながら、これはその部分集合系 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性をもつことに矛盾するので、$\emptyset \notin \mathfrak{F}$ が成り立つ。$\forall F \in \mathfrak{F}\forall G \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \subseteq G \subseteq S$ が成り立つなら、その部分集合系 $\mathfrak{X}$ の空でない有限な部分集合 $\mathfrak{X}'$ が存在して、$\bigcap\mathfrak{X}' \subseteq F$ が成り立つので、$\bigcap\mathfrak{X}' \subseteq G$ が成り立つ。したがって、$G \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。$\forall F, G \in \mathfrak{F}$ に対し、その部分集合系 $\mathfrak{X}$ の空でない有限な部分集合たち $\mathfrak{X}'$、$\mathfrak{Y}'$ が存在して、$\bigcap\mathfrak{X}' \subseteq F$ かつ $\bigcap\mathfrak{Y}' \subseteq G$ が成り立つ。このとき、その和集合 $\mathfrak{X}' \cup \mathfrak{Y}'$ はその部分集合系 $\mathfrak{X}$ の空でない有限な部分集合であり、次のようになるので、

$$\begin{aligned}\bigcap(\mathfrak{X}' \cup \mathfrak{Y}') &= \bigcap_{X \in \mathfrak{X}' \cup \mathfrak{Y}'} X\\ &= \bigcap_{X \in \mathfrak{X}'} X \cap \bigcap_{Y \in \mathfrak{Y}'} Y\\ &= \bigcap\mathfrak{X}' \cap \bigcap\mathfrak{Y}'\\ &\subseteq F \cap G\end{aligned}$$

$F \cap G \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。以上より、その集合 $\mathfrak{F}$ はその部分集合系 $\mathfrak{X}$ を含むその集合 $S$ の filter となる。

そこで、その部分集合系 $\mathfrak{X}$ を含むその集合 $S$ の filter 全体の集合 $\varphi$ を用いて順序集合 $(\varphi, \subseteq)$ が考えられれば、その集合 $\varphi$ の空でない全順序集合となるような部分集合が存在する。実際、$\forall\mathfrak{F}' \in \varphi$ に対し、その集合 $\{\mathfrak{F}'\}$ がその集合 $\varphi$ の空でない全順序集合となるような部分集合である。

その集合 $\varphi$ の空でない全順序集合となるような任意の部分集合 $\varphi'$ が与えられたとき、$\forall\mathfrak{F}' \in \varphi'$ に対し、もちろん、$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}' \subseteq \bigcup\varphi'$ が成り立つ。さらに、$\forall\mathfrak{F}' \in \varphi'$ に対し、$\emptyset \notin \mathfrak{F}'$ が成り立つので、$\emptyset \notin \bigcup\varphi'$ が成り立つ。$\forall F \in \bigcup\varphi'\forall G \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \subseteq G \subseteq S$ が成り立つなら、$\exists\mathfrak{F}' \in \varphi'$ に対し、$F \in \mathfrak{F}'$ が成り立つので、filter の定義より $B \in \mathfrak{F}'$ が成り立ち、したがって、$G \in \bigcup\varphi$ が成り立つ。$\forall F, G \in \bigcup\varphi'$ に対し、ある filters$\mathfrak{F}'$、$\mathfrak{G}'$ がその集合 $\varphi'$ に存在して、$F \in \mathfrak{F}'$ かつ $G \in \mathfrak{G}'$ が成り立つ。ここで、その集合 $\varphi'$ が全順序集合なので、$\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{G}'$ または $\mathfrak{G}' \subseteq \mathfrak{F}'$ が成り立つ。ここで、$\mathfrak{G}' \subseteq \mathfrak{F}'$ が成り立つとしてもよく、したがって、$F, G \in \mathfrak{F}'$ が成り立つ。これにより、$F \cap G \in \mathfrak{F}' \subseteq \bigcup\varphi'$ が成り立つ。以上より、その集合 $\bigcup\varphi'$ はその部分集合系 $\mathfrak{X}$ を含むその集合 $S$ 上の filter である。さらに、この集合 $\bigcup\varphi'$ はその集合 $\varphi'$ の上界であるから、その集合 $\varphi'$ は上に有界である。

ここで、いっそうよい Zorn の補題よりその順序集合 $(\varphi, \subseteq)$ は極大元をもつ、即ち、$\exists\mathfrak{F} \in \varphi\forall\mathfrak{F}' \in \varphi$ に対し、$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ が成り立つなら、$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ が成り立つ[*24]。これはその集合 $\mathfrak{X}$ を含むその集合 $S$ 上の極大 filter$\mathfrak{F}$ で

[*24] 次のことを主張する定理である。
順序集合 $(A, O)$ の任意の全順序な部分順序集合 $(A', O)$ が上に有界なら、その集合 A の極大元が存在する。

ある。 □

**定理 1.8.7.** 集合 $S$ 上の極大 filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、$\forall F \in \mathfrak{F}$ に対し、$F \cap M \neq \emptyset$ なるその集合 $S$ の部分集合 $M$ が与えられたらば、$M \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。

**証明.** 集合 $S$ 上の極大 filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、$\forall F \in \mathfrak{F}$ に対し、$F \cap M \neq \emptyset$ なるその集合 $S$ の部分集合 $M$ が与えられたらば、集合 $\mathfrak{F} \cup \{M\}$ の任意の空でない有限集合である部分集合 $\mathfrak{X}'$ に対し、その集合 $\mathfrak{X}'$ の任意の元はその集合 $\mathfrak{F}$ に属するか、その集合 $M$ であることになる。ここで、$M \notin \mathfrak{X}'$ のとき、その集合 $\mathfrak{X}'$ が有限集合であることに注意して filter の定義より $\bigcap \mathfrak{X}' \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。さらに、filter の定義より $\emptyset \neq \bigcap \mathfrak{X}'$ が成り立つ。$M \in \mathfrak{X}'$ のとき、$\forall F \in \mathfrak{X}' \setminus \{M\}$ に対し、$F \cap M \neq \emptyset$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq \bigcap_{F \in \mathfrak{X}' \setminus \{M\}} (F \cap M) \\ &= \bigcap_{F \in \mathfrak{X}' \setminus \{M\}} F \cap M \\ &= \bigcap_{F \in \mathfrak{X}'} F \\ &= \bigcap \mathfrak{X}' \end{aligned}$$

これにより、その集合 $\mathfrak{F} \cup \{M\}$ は有限交叉性をもつ。

定理 1.8.6 よりその集合 $S$ 上の極大 filter$\mathfrak{F}'$ が存在して、$\mathfrak{F} \cup \{M\} \subseteq \mathfrak{F}'$ が成り立つ。ここで、$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \cup \{M\} \subseteq \mathfrak{F}'$ が成り立つかつ、その集合 $\mathfrak{F}$ もまた極大 filter なので、$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ が成り立つ。したがって、$\mathfrak{F} \cup \{M\} \subseteq \mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$ が成り立つので、$M \in \mathfrak{F}$ が得られる。 □

**定理 1.8.8.** 集合 $S$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、次式のような集合 $p_a$ はその集合 $S$ 上の極大 filter である、即ち、$p_a \in \beta(S)$ が成り立つ。

$$p_a = \{F \in \mathfrak{P}(S) | a \in F\}$$

**定義 1.8.4.** 上の集合 $p_a$ をその集合 $S$ 上のその元 $a$ から誘導される単項 filter という。

**証明.** 集合 $S$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、次式のような集合 $p_a$ において、

$$p_a = \{F \in \mathfrak{P}(S) | a \in F\}$$

定義より $\emptyset \notin p_a$ が成り立つかつ、$S \in p_a$ が成り立つ。ここで、$\forall F \in p_a \forall G \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \subseteq G \subseteq S$ が成り立つなら、$a \in G$ が成り立つので、$G \in p_a$ も成り立つ。$\forall F, G \in p_a$ に対し、$a \in F$ かつ $a \in G$ が成り立つので、$a \in F \cap G$ も成り立ち、したがって、$F \cap G \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。ゆえに、その集合 $p_a$ はその集合 $S$ 上の filter である。

さらに、$\exists F \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \notin p_a$ かつ $S \setminus F \notin p_a$ が成り立つと仮定すると、$F \notin p_a$ より $a \notin F$ が成り立つので、$a \in S$ より $a \in S \setminus F$ が成り立ち、したがって、$S \setminus F \in p_a$ が成り立つが、これは $S \setminus F \notin p_a$ が成り立つことに矛盾する。したがって、$\forall F \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$F \in \mathfrak{F}$ または $S \setminus F \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。 □

**定理 1.8.9.** 集合 $S$ が与えられたとき、$\forall a \in S \forall \mathfrak{F} \in \beta(S)$ に対し、その極大 filter$\mathfrak{F}$ がその元 $a$ から誘導される単項 filter$p_a$ に等しいならそのときに限り、その極大 filter$\mathfrak{F}$ はその集合 $\{a\}$ に属される。

**証明.** 集合 $S$ が与えられたとき、$\forall a \in S \forall \mathfrak{F} \in \beta(S)$ に対し、その極大 filter$\mathfrak{F}$ がその元 $a$ から誘導される単項 filter$p_a$ に等しいなら、$a \in \{a\}$ が成り立つことにより $\{a\} \in p_a = \mathfrak{F}$ が成り立つ。逆に、その極大 filter$\mathfrak{F}$ はその集合 $\{a\}$ に属される、即ち、$\{a\} \in \mathfrak{F}$ が成り立つなら、$a \in \{a\}$ より、$\forall F \in \mathfrak{F}$ に対し、$a \notin F$ が成り立つと仮定すると、その集合 $F$ の与え方により $\{a\} \cap F = \emptyset$ が成り立つかつ、filter の定義より $\{a\} \cap F \in \mathfrak{F}$ が成り立つことになるが、これは $\emptyset \in \mathfrak{F}$ が成り立つことになり filter の定義に矛盾する。したがって、$a \in F$ が成り立つので、$\mathfrak{F} \subseteq p_a$ が成り立つことになる。ここで、$\mathfrak{F} \in \beta(S)$ が成り立つので、極大 filter の定義より $\mathfrak{F} = p_a$ が成り立つ。 □

### 1.8.4 極大 filter によって誘導された位相空間

**定義 1.8.5.** 集合 $S$ が与えられたとき、$\forall A \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、次のように集合 $\beta_{A\in}(S)$ を定める。

$$\beta_{A\in}(S) = \{\mathfrak{F} \in \beta(S) | A \in \mathfrak{F}\}$$

**定理 1.8.10.** 集合 $S$ が与えられたとき、$\forall A, B \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、次のことが成り立つ。

- $\beta_{S\in}(S) = \beta(S)$ が成り立つ。
- $\beta_{\emptyset\in}(S) = \emptyset$ が成り立つ。
- $\beta_{A\in}(S) \subseteq \beta_{B\in}(S)$ が成り立つならそのときに限り、$A \subseteq B$ が成り立つ。
- $\beta_{A\in}(S) = \beta_{B\in}(S)$ が成り立つならそのときに限り、$A = B$ が成り立つ。
- $\beta_{A\in}(S) \cup \beta_{B\in}(S) = \beta_{A\cup B\in}(S)$ が成り立つ。
- $\beta_{A\in}(S) \cap \beta_{B\in}(S) = \beta_{A\cap B\in}(S)$ が成り立つ。
- $\beta_{S\setminus A\in}(S) = \beta(S) \setminus \beta_{A\in}(S)$ が成り立つ。

さらに、その集合 $\mathfrak{P}(S)$ の任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ に対し、次のことが成り立つ。

- $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\varLambda} \beta_{A_\lambda\in}(S) \subseteq \beta_{\bigcup_{\lambda\in\varLambda} A_\lambda\in}(S)$ が成り立つ。
- $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\varLambda} \beta_{A_\lambda\in}(S) \supseteq \beta_{\bigcap_{\lambda\in\varLambda} A_\lambda\in}(S)$ が成り立つ。

**証明.** 集合 $S$ が与えられたとき、もちろん、定義より $\beta_{S\in}(S) \subseteq \beta(S)$ が成り立つ。逆に、$\forall \mathfrak{F} \in \beta(S)$ に対し、定理 1.8.1 より $S \in \mathfrak{F}$ が成り立つので、$\mathfrak{F} \in \beta_{S\in}(S)$ が成り立つ。したがって、$\beta(S) \subseteq \beta_{S\in}(S)$ が成り立つので、$\beta_{S\in}(S) = \beta(S)$ が成り立つ。また、$\beta_{\emptyset\in}(S) = \emptyset$ が成り立つことは filter の定義より明らかである。

$\beta_{A\in}(S) \subseteq \beta_{B\in}(S)$ が成り立つなら、$\forall a \in A$ に対し、これから誘導される単項 filter$p_a$ について、$A \in p_a$ が成り立つので、$p_a \in \beta_{A\in}(S)$ が成り立ち、仮定よりしたがって、$p_a \in \beta_{B\in}(S)$ が成り立つ。これにより、$B \in p_a$ が成り立ち、したがって、$a \in B$ が成り立つので、$A \subseteq B$ が成り立つ。逆に、$A \subseteq B$ が成り立つなら、$\forall \mathfrak{F} \in \beta_{A\in}(S)$ に対し、$A \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。ここで、仮定より $A \subseteq B \subseteq S$ が成り立つことから、filter の定義より $B \in \mathfrak{F}$ が成り立つので、$\mathfrak{F} \in \beta_{B\in}(S)$ が成り立つ。したがって、$\beta_{A\in}(S) \subseteq \beta_{B\in}(S)$ が成り立つ。

もちろん、上記の議論により直ちに $\beta_{A\in}(S) = \beta_{B\in}(S)$ が成り立つならそのときに限り、$A = B$ が成り立つ。

$\forall\mathfrak{F}\in\beta_{A\in}(S)\cup\beta_{B\in}(S)$ に対し、$\mathfrak{F}\in\beta_{A\in}(S)$ または $\mathfrak{F}\in\beta_{B\in}(S)$ が成り立つので、$A\in\mathfrak{F}$ または $B\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。そこで、いずれの場合でも、$A\subseteq A\cup B\subseteq S$ かつ $B\subseteq A\cup B\subseteq S$ が成り立つので、filter の定義より $A\cup B\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。したがって、$\mathfrak{F}\in\beta_{A\cup B\in}(S)$ が成り立つ。逆に、$\mathfrak{F}\in\beta_{A\cup B\in}(S)$ が成り立つなら、$A\cup B\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。ここで、$\mathfrak{F}\notin\beta_{A\in}(S)$ かつ $\mathfrak{F}\notin\beta_{B\in}(S)$ が成り立つと仮定すると、$\mathfrak{F}\in\beta(S)$ が成り立つことに注意すれば、定理 1.8.4 より $A\in\mathfrak{F}$ または $S\setminus A\in\mathfrak{F}$ が成り立つかつ、$B\in\mathfrak{F}$ または $S\setminus B$ が成り立つので、$S\setminus A,S\setminus B\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。したがって、filter の定義より $S\setminus A\cap S\setminus B=S\setminus(A\cup B)\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。このとき、定理 1.8.2 より $A\cup B\in\mathfrak{F}$ かつ $S\setminus(A\cup B)\in\mathfrak{F}$ が成り立つことはないのであったので、$A\cup B\notin\mathfrak{F}$ が成り立つことになるが、これは仮定に矛盾する。したがって、$\mathfrak{F}\in\beta_{A\in}(S)\cup\beta_{B\in}(S)$ が成り立つ。以上より、$\beta_{A\in}(S)\cup\beta_{B\in}(S)=\beta_{A\cup B\in}(S)$ が成り立つ。

$\forall\mathfrak{F}\in\beta_{A\in}(S)\cap\beta_{B\in}(S)$ に対し、$\mathfrak{F}\in\beta_{A\in}(S)$ かつ $\mathfrak{F}\in\beta_{B\in}(S)$ が成り立つので、$A\in\mathfrak{F}$ かつ $B\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。filter の定義より $A\cap B\in\mathfrak{F}$ が成り立つので、$\mathfrak{F}\in\beta_{A\cap B\in}(S)$ が成り立つ。逆に、$\forall\mathfrak{F}\in\beta_{A\cap B\in}(S)$ に対し、$A\cap B\in\mathfrak{F}$ が成り立つかつ、$A\notin\mathfrak{F}$ または $B\notin\mathfrak{F}$ が成り立つとすると、$A\notin\mathfrak{F}$ が成り立つとき、定理 1.8.4 より $A\in\mathfrak{F}$ または $S\setminus A\in\mathfrak{F}$ が成り立つので、$S\setminus A\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。したがって、filter の定義より $(S\setminus A)\cap A\cap B\in\mathfrak{F}$ が成り立つことになるが、$(S\setminus A)\cap A\cap B=\emptyset$ が成り立つことにより、$\emptyset\in\mathfrak{F}$ が成り立ちこれは filter の定義に矛盾する。$B\notin\mathfrak{F}$ が成り立つときも同様である。したがって、$A\in\mathfrak{F}$ かつ $B\in\mathfrak{F}$ が成り立つことになり、よって、$\mathfrak{F}\in\beta_{A\in}(S)\cap\beta_{B\in}(S)$ が成り立つ。

$\forall\mathfrak{F}\in\beta_{S\setminus A\in}(S)$ に対し、$S\setminus A\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。ここで、$\mathfrak{F}\in\beta(S)$ が成り立つことに注意すれば、定理 1.8.4 より $A\in\mathfrak{F}$ または $S\setminus A\in\mathfrak{F}$ が成り立つのであった。定理 1.8.2 より $A\in\mathfrak{F}$ かつ $S\setminus A\in\mathfrak{F}$ が成り立つことはないので、$A\notin\mathfrak{F}$ が成り立つことになり、したがって、$\mathfrak{F}\notin\beta_{A\in}(S)$ が成り立つ。よって、$\beta(S)\setminus\beta_{A\in}(S)$ が成り立つ。逆に、$\forall\mathfrak{F}\in\beta(S)\setminus\beta_{A\in}(S)$ が成り立つなら、$\mathfrak{F}\notin\beta_{A\in}(S)$ が成り立つので、$A\notin\mathfrak{F}$ が成り立つ。ここで、定理 1.8.2 より $A\in\mathfrak{F}$ かつ $S\setminus A\in\mathfrak{F}$ が成り立つことはないのであった。$\mathfrak{F}\in\beta(S)$ が成り立つことに注意すれば、定理 1.8.4 より $A\in\mathfrak{F}$ または $S\setminus A\in\mathfrak{F}$ が成り立つので、$S\setminus A\in\mathfrak{F}$ が成り立ち、したがって、$\mathfrak{F}\in\beta_{S\setminus A\in}(S)$ が成り立つ。

さらに、その集合 $\mathfrak{P}(S)$ の任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとき、$\forall\mathfrak{F}\in\bigcup_{\lambda\in\varLambda}\beta_{A_\lambda\in}(S)$ に対し、和集合の定義より、$\exists\lambda\in\varLambda$ に対し、$\mathfrak{F}\in\beta_{A_\lambda\in}(S)$ が成り立つので、$A_\lambda\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。そこで、いずれの場合でも、$A_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\varLambda}A_\lambda\subseteq S$ が成り立つので、filter の定義より $\bigcup_{\lambda\in\varLambda}A_\lambda\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。したがって、$\mathfrak{F}\in\beta_{\bigcup_{\lambda\in\varLambda}A_\lambda\in}(S)$ が成り立つ。

$\forall\mathfrak{F}\in\beta_{\bigcap_{\lambda\in\varLambda}A_\lambda\in}(S)$ に対し、$\bigcap_{\lambda\in\varLambda}A_\lambda\in\mathfrak{F}$ が成り立つかつ、$\exists\lambda\in\varLambda$ に対し、$A_\lambda\notin\mathfrak{F}$ が成り立つとすると、定理 1.8.4 より $A_\lambda\in\mathfrak{F}$ または $S\setminus A_\lambda\in\mathfrak{F}$ が成り立つので、$S\setminus A_\lambda\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。したがって、filter の定義より $(S\setminus A_\lambda)\cap\bigcap_{\lambda\in\varLambda}A_\lambda\in\mathfrak{F}$ が成り立つことになるが、$(S\setminus A_\lambda)\cap\bigcap_{\lambda\in\varLambda}A_\lambda=\emptyset$ が成り立つことにより、$\emptyset\in\mathfrak{F}$ が成り立ちこれは filter の定義に矛盾する。したがって、$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、$A_\lambda\in\mathfrak{F}$ が成り立つことになり、よって、$\mathfrak{F}\in\bigcap_{\lambda\in\varLambda}\beta_{A_\lambda\in}(S)$ が成り立つ。 □

**定理 1.8.11.** 集合 $S$ が与えられたとき、その集合 $S$ 上の極大 filter 全体の集合 $\beta(S)$ と次式のように定義される集合 $\mathfrak{B}$ の族の和集合全体の集合 $\mathfrak{O}_\beta$ との組 $(\beta(S),\mathfrak{O}_\beta)$ は位相空間をなす。

$$\mathfrak{B}=\{\beta_{A\in}(S)\in\mathfrak{P}(\beta(S))|A\subseteq S\}$$

さらに、その集合 $\mathfrak{B}$ がその位相空間 $(\beta(S),\mathfrak{O}_\beta)$ の開基となる。

**定義 1.8.6.** その位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ はその集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間という。

**証明.** 集合 $S$ が与えられたとき、その集合 $S$ 上の極大 filter 全体の集合 $\beta(S)$ と次式のように定義される集合 $\mathfrak{B}$ の族の和集合全体の集合 $\mathfrak{O}_\beta$ との組 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ において、

$$\mathfrak{B} = \{\beta_{A\in}(S) \in \mathfrak{P}(\beta(S)) | A \subseteq S\}$$

filter の定義より $\beta_{\emptyset\in}(S) = \emptyset$ が成り立つので、$\emptyset \in \mathfrak{O}_\beta$ が成り立つ。定理 1.8.10 より $\beta_{S\in}(S) = \beta(S)$ が成り立つので、$\beta(S) \in \mathfrak{O}_\beta$ が成り立つ。

$\forall O, P \in \mathfrak{O}_\beta$ に対し、定義より、あるその集合 $\mathfrak{P}(S)$ の元の族々 $\{A_\mu\}_{\mu\in M}$、$\{B_\nu\}_{\nu\in N}$ が存在して、$O = \bigcup_{\mu\in M} \beta_{A_\mu\in}(S)$ かつ $P = \bigcup_{\nu\in N} \beta_{B_\nu\in}(S)$ が成り立つので、定理 1.8.10 より次のようになる。

$$\begin{aligned} O \cap P &= \bigcup_{\mu\in M} \beta_{A_\mu\in}(S) \cap \bigcup_{\nu\in N} \beta_{B_\nu\in}(S) \\ &= \bigcup_{(\mu,\nu)\in M\times N} \beta_{A_\mu\in}(S) \cap \beta_{B_\nu\in}(S) \\ &= \bigcup_{(\mu,\nu)\in M\times N} \beta_{A_\mu\cap B_\nu\in}(S) \end{aligned}$$

ここで、$A_\mu \cap B_\nu \subseteq S$ が成り立つので、$O \cap P \in \mathfrak{O}_\beta$ が成り立つ。

任意の添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}_\beta$ の元の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき、定義より、$\forall\lambda \in \Lambda$ に対し、あるその集合 $\mathfrak{P}(S)$ の元の族 $\{A_{\mu_\lambda}\}_{\mu_\lambda\in M_\lambda}$ が存在して、$O_\lambda = \bigcup_{\mu_\lambda\in M_\lambda} \beta_{A_{\mu_\lambda}\in}(S)$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcup_{\mu_\lambda\in M_\lambda} \beta_{A_{\mu_\lambda}\in}(S) \\ &= \bigcup_{\forall\lambda\in\Lambda[\mu_\lambda\in M_\lambda]} \beta_{A_{\mu_\lambda}\in}(S) \end{aligned}$$

ここで、$A_{\mu_\lambda} \subseteq S$ が成り立つので、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}_\beta$ が成り立つ。

よって、その組 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ は位相空間をなす。

$$\mathfrak{B} = \{\beta_{A\in}(S) \in \mathfrak{P}(\beta(S)) | A \subseteq S\}$$

さらに、その集合 $\mathfrak{B}$ がその位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ の開基となることは開基の定義より直ちに従う。 □

**定理 1.8.12.** 集合 $S$ が与えられたとき、その集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ は compact 空間である。

**証明.** 集合 $S$ が与えられたとき、その集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ が与えられたとき、その集合 $\beta(S)$ のある開被覆 $\mathfrak{U}$ が存在して、これの任意の有限集合である部分集合 $\mathfrak{U}'$ に対し、$\bigcup \mathfrak{U}' \subset \beta(S)$ が成り立つと仮定すると、$\forall O \in \mathfrak{U}'$ に対し、その位相 $\mathfrak{O}_\beta$ の定義よりあるその集合 $\mathfrak{P}(S)$ の元の族 $\{A_{\mu_O}\}_{\mu_O\in M_O}$ が存在して、$O = \bigcup_{\mu_O\in M_O} \beta_{A_{\mu_O}\in}(S)$ が成り立つので、次のようになる。

$$\bigcup \mathfrak{U}' = \bigcup_{O\in\mathfrak{U}'} O$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{O \in \mathfrak{U}'} \bigcup_{\mu_O \in M_O} \beta_{A_{\mu_O} \in}(S) \\
&= \bigcup_{\forall O \in \mathfrak{U}'[\mu_O \in M_O]} \beta_{A_{\mu_O} \in}(S)
\end{aligned}
$$

ここで、$\exists O \in \mathfrak{U}'$ に対し、$\aleph_0 \leq \# M_O$ が成り立つと仮定すると、その集合 $\beta_{A_{\mu_O} \in}(S)$ 全体の集合 $\left\{ \beta_{A_{\mu_O} \in}(S) \right\}_{\forall O \in \mathfrak{U}'[\mu_O \in M_O]}$ は無限集合であるかつ、$\beta_{A_{\mu_O} \in}(S) \in \mathfrak{O}_\beta$ が成り立つので、集合 $\left\{ \beta_{A_{\mu_O} \in}(S) \right\}_{\forall O \in \mathfrak{U}'[\mu_O \in M_O]}$ はその開被覆 $\mathfrak{U}$ のその部分集合 $\mathfrak{U}'$ に一致する。しかしながら、その集合 $\mathfrak{U}'$ は仮定より有限集合であったので、これにその集合 $\left\{ \beta_{A_{\mu_O} \in}(S) \right\}_{\forall O \in \mathfrak{U}'[\mu_O \in M_O]}$ が無限集合であることが矛盾する。

したがって、その集合 $\left\{ \beta_{A_{\mu_O} \in}(S) \right\}_{\forall O \in \mathfrak{U}'[\mu_O \in M_O]}$ は有限集合であるので、$O \in \mathfrak{U}'$ なる添数 $\mu_O$ を $\mu \in M'$、$O \in \mathfrak{U}$ なる添数 $\mu_O$ を $\mu \in M$ とおきなおすと、定理 1.8.7 と数学的帰納法により次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\bigcup \mathfrak{U}' &= \bigcup_{\mu \in M'} \beta_{A_\mu \in}(S) \\
&= \beta_{\bigcup_{\mu \in M'} A_\mu \in}(S)
\end{aligned}
$$

定理 1.8.10 よりしたがって、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\bigcup \mathfrak{U}' \subset \beta(S) &\Leftrightarrow \beta_{\bigcup_{\mu \in M'} A_\mu \in}(S) \subset \beta(S) \\
&\Leftrightarrow \beta_{\bigcup_{\mu \in M'} A_\mu \in}(S) \neq \beta(S) \\
&\Leftrightarrow \beta_{\bigcup_{\mu \in M'} A_\mu \in}(S) \neq \beta_{S \in}(S) \\
&\Leftrightarrow \bigcup_{\mu \in M'} A_\mu \neq S \\
&\Leftrightarrow S \setminus \bigcup_{\mu \in M'} A_\mu \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \bigcap_{\mu \in M'} S \setminus A_\mu \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

このことは集合 $\{S \setminus A_\mu\}_{\mu \in M}$ を $\mathfrak{X}$ とおいてその集合 $\mathfrak{X}$ の任意の空集合でない有限集合である部分集合 $\mathfrak{X}'$ に対し、$\bigcap \mathfrak{X}' \neq \emptyset$ が成り立つことを意味している。したがって、その集合 $\mathfrak{X}$ は有限交叉性をもつことになる。ここで、定理 1.8.6 よりその集合 $\mathfrak{X}$ を含む極大 filter$\mathfrak{F}$ が存在する。このとき、$\forall \mu \in M$ に対し、$S \setminus A_\mu \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ が成り立つので、$S \setminus A_\mu \in \mathfrak{F}$ が得られる。

このとき、$\mathfrak{F} \in \beta(S)$ が成り立つことに注意すれば、定理 1.8.4 より $A_\mu \in \mathfrak{F}$ または $S \setminus A_\mu \in \mathfrak{F}$ が成り立つのであった。定理 1.8.2 より $A_\mu \in \mathfrak{F}$ かつ $S \setminus A_\mu \in \mathfrak{F}$ が成り立つことはないので、$A_\mu \notin \mathfrak{F}$ が成り立つことになる。

一方で、その集合 $\beta(S)$ の開被覆 $\mathfrak{U}$ の定義より次式が成り立つので、

$$
\begin{aligned}
\beta(S) &= \bigcup \mathfrak{U} \\
&= \bigcup_{O \in \mathfrak{U}} O \\
&= \bigcup_{O \in \mathfrak{U}} \bigcup_{\mu_O \in M_O} \beta_{A_{\mu_O} \in}(S)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{\forall O \in \mathfrak{U}[\mu_O \in M_O]} \beta_{A_{\mu_O} \in}(S) \\
&= \bigcup_{\mu \in M} \beta_{A_\mu \in}(S)
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{F} \in \beta(S) = \bigcup_{\mu \in M} \beta_{A_\mu \in}(S)$ が成り立つ、即ち、$\exists \mu \in M$ に対し、$\mathfrak{F} \in \beta_{A_\mu \in}(S)$ が成り立つ、即ち、$\exists \mu \in M$ に対し、$A_\mu \in \mathfrak{F}$ が成り立つことになる。しかしながら、このことは、$\forall \mu \in M$ に対し、$A_\mu \notin \mathfrak{F}$ が成り立つことに矛盾する。

以上より、極大 filter によって誘導されたその位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ が与えられたとき、その集合 $\beta(S)$ の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ に対し、これのある有限集合である部分集合 $\mathfrak{U}'$ が存在して、$\bigcup \mathfrak{U}' = \beta(S)$ が成り立つことになる。よって、その集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ は compact 空間である。

□

**定理 1.8.13.** 集合 $S$ が与えられたとき、その集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ は Hausdorff 空間である。

**証明.** 集合 $S$ が与えられたとき、その集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ が与えられたとき、$\forall \mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \beta(S)$ に対し、$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$ が成り立つとする[*25]。このとき、$\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{G} \neq \emptyset$ が成り立つとしてもよいので、$F \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{G}$ なる元 $F$ が存在する。このとき、$F \in \mathfrak{F}$ かつ $S \setminus F \in \mathfrak{G}$ が成り立つので、$\mathfrak{F} \in \beta_{F \in}(S)$ かつ $\mathfrak{G} \in \beta_{S \setminus F \in}(S)$ が得られる。ここで、その位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ の定義よりそれらの集合たち $\beta_{F \in}(S)$、$\beta_{S \setminus F \in}(S)$ は開集合なので、$\mathrm{int}\beta_{F \in}(S) = \beta_{F \in}(S)$ かつ $\mathrm{int}\beta_{S \setminus F \in}(S) = \beta_{S \setminus F \in}(S)$ が成り立つ。ゆえに、それらの集合たち $\beta_{F \in}(S)$、$\beta_{S \setminus F \in}(S)$ はそれぞれ極大 filter たち $\mathfrak{F}$、$\mathfrak{G}$ の近傍である。さらに、定理 1.8.10 より次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\beta_{F \in}(S) \cap \beta_{S \setminus F \in}(S) &= \beta_{F \cap S \setminus F}(S) \\
&= \beta_\emptyset(S) = \emptyset
\end{aligned}
$$

よって、その集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ は Hausdorff 空間である。 □

**定理 1.8.14.** 集合 $S$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、その集合 $S$ 上のその元 $a$ から誘導される単項 filter$p_a$ はその集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ で孤立点である。

**証明.** 集合 $S$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、その集合 $S$ 上のその元 $a$ から誘導される単項 filter$p_a$ が与えられたとき、$\forall \mathfrak{F} \in \beta(S)$ に対し、$\mathfrak{F} \in \beta_{\{a\} \in}(S)$ が成り立つならそのときに限り、$\{a\} \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。ここで、これが成り立つならそのときに限り、定理 1.8.9 より $\mathfrak{F} = p_a$ が成り立つ。したがって、$\{p_a\} = \beta_{\{a\} \in}(S)$ が成り立つことになる。ここで、その集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ の定義よりその集合 $\{p_a\}$ は開集合となる。したがって、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
p_a \in \{p_a\} &= \mathrm{int}\,\{p_a\} \\
&= \beta(S) \setminus \mathrm{cl}\,(\beta(S) \setminus \{p_a\})
\end{aligned}
$$

したがって、$p_a \notin \mathrm{cl}\,(\beta(S) \setminus \{p_a\})$ が得られ、よって、その集合 $S$ 上のその元 $a$ から誘導される単項 filter$p_a$ はその集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間 $(\beta(S), \mathfrak{O}_\beta)$ で孤立点である。 □

[*25] このような集合は位相空間の定義より存在する。例えば、台集合と空集合をとればよい。

**定理 1.8.15.** 集合 $S$ が与えられたとき、族 $\{p_a\}_{a\in F}$ は、その集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間 $(\beta(S),\mathfrak{O}_\beta)$ において、その台集合 $\beta(S)$ の中で稠密である。

**証明.** 集合 $S$ が与えられたとき、その集合 $S$ から極大 filter によって誘導された位相空間 $(\beta(S),\mathfrak{O}_\beta)$ において、$\forall F\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、集合 $\beta_{F\in}(S)$ が空集合でないなら、定理 1.8.10 より $F\neq\emptyset$ が成り立つことになる。したがって、$\forall a\in F$ に対し、$F\in p_a$ が成り立つ、即ち、$p_a\in\beta_{F\in}(S)$ が成り立つので、$\beta_{F\in}(S)\cap\{p_a\}_{a\in F}\neq\emptyset$ が成り立つ。ゆえに、その位相空間 $(\beta(S),\mathfrak{O}_\beta)$ の定義より $\forall O\in\mathfrak{O}_\beta$ に対し、$O\cap\{p_a\}_{a\in F}\neq\emptyset$ が成り立つことが直ちに分かる。定理 1.2.17 よりその族 $\{p_a\}_{a\in F}$ はその台集合 $\beta(S)$ の中で稠密である。 □

### 1.8.5 filter と compact 空間

**定理 1.8.16.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ とその集合 $S$ 上の filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、$\mathfrak{F}\to a$ が成り立つなら、$\forall F\in\mathfrak{F}$ に対し、$a\in\mathrm{cl}F$ が成り立つ、即ち、$a\in\bigcap_{F\in\mathfrak{F}}\mathrm{cl}F$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ とその集合 $S$ 上の filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、$\mathfrak{F}\to a$ が成り立つなら、その元 $a$ の任意の近傍 $V$ をとると、その元 $a$ の全近傍系を $\mathbf{V}(a)$ として $V\in\mathbf{V}(a)$ が成り立つ。したがって、その元 $a$ の基本近傍系を $\mathbf{V}^*(a)$ として、$\exists U\in\mathbf{V}^*(a)$ に対し、$U\subseteq V$ が成り立つ。ここで、filter の収束の定義より $\mathbf{V}(a)\subseteq\mathfrak{F}$ が成り立つので、基本近傍系の定義より $\mathbf{V}^*(a)\subseteq\mathbf{V}(a)$ が成り立つことから $U\in\mathfrak{F}$ が成り立つことになる。$\forall F\in\mathfrak{F}$ に対し、filter の定義より $U\cap F\neq\emptyset$ が成り立つので、定理 1.1.26 より $a\in\mathrm{cl}F$ が成り立つ。これが $a\in\bigcap_{F\in\mathfrak{F}}\mathrm{cl}F$ が成り立つことに言い換えられることは明らかであろう。 □

**定理 1.8.17.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ とその集合 $S$ 上の極大 filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- $\mathfrak{F}\to a$ が成り立つ。
- $\forall F\in\mathfrak{F}$ に対し、$a\in\mathrm{cl}F$ が成り立つ。
- $a\in\bigcap_{F\in\mathfrak{F}}\mathrm{cl}F$ が成り立つ。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ とその集合 $S$ 上の極大 filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、定理 1.8.16 より $\mathfrak{F}\to a$ が成り立つなら、$\forall F\in\mathfrak{F}$ に対し、$a\in\mathrm{cl}F$ が成り立つ。これが $a\in\bigcap_{F\in\mathfrak{F}}\mathrm{cl}F$ が成り立つことに言い換えられることは明らかであろう。一方で、$\forall F\in\mathfrak{F}$ に対し、$a\in\mathrm{cl}F$ が成り立つとする。ここで、その元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ が $\mathbf{V}(a)\subseteq\mathfrak{F}$ を満たさないと仮定すると、$\exists V\in\mathbf{V}(a)$ に対し、$V\notin\mathfrak{F}$ が成り立つことになる。ここで、その filter$\mathfrak{F}$ は極大 filter なので、定理 1.8.5 より $V\in\mathfrak{F}$ または $S\setminus V\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。さらに、定理 1.8.2 より $V\in\mathfrak{F}$ かつ $S\setminus V\in\mathfrak{F}$ が成り立つことはないので、$S\setminus V\in\mathfrak{F}$ が成り立つことになる。ここで、仮定より $a\in\mathrm{cl}(S\setminus V)=S\setminus\mathrm{int}V$ が成り立つ。しかしながら、近傍の定義より $a\in\mathrm{int}V$ が成り立つことに矛盾する。よって、$\forall F\in\mathfrak{F}$ に対し、$a\in\mathrm{cl}F$ が成り立つなら、$\mathfrak{F}\to a$ が成り立つ。 □

ここで、次の定理が述べられるまえに、次の定義と定理が述べられよう。

**定義** (定義 1.6.3 の再掲)**.** 集合 $S$ の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が与えられたとき、これの任意の空でない有限集合である部分集合に属する集合同士の共通部分が空でないとき、即ち、$\forall\mathfrak{X}'\in\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ に対し、$0<\#\mathfrak{X}'<\aleph_0$ が成り立つなら、$\bigcap\mathfrak{X}'\neq\emptyset$ が成り立つとき、その集合 $\mathfrak{X}$ は有限交叉性を持つという。

**定理** (定理 1.6.1 の再掲)**.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ について、次のことは同値である。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である。
- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくとき、その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$ かつ有限交叉性を持つなら、$\bigcap \mathfrak{X} \neq \emptyset$ が成り立つ。
- その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性を持つなら、$\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathrm{cl}X \neq \emptyset$ が成り立つ。

さて本題に戻って、次の定理が掲げられよう。

**定理 1.8.18.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるならそのときに限り、その集合 $S$ 上の任意の極大 filter$\mathfrak{F}$ に対し、その極限点は少なくとも 1 つもつ。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるなら、その集合 $S$ 上の任意の極大 filter$\mathfrak{F}$ に対し、定理 1.6.1 よりその台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性を持つなら、$\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathrm{cl}X \neq \emptyset$ が成り立つのであった。このとき、$\exists a \in S$ に対し、$a \in \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathrm{cl}X$ が成り立つので、その集合 $S$ 上の極大 filter$\mathfrak{F}$ が与えられていることに注意すれば、定理 1.8.17 より $\mathfrak{F} \rightarrow a$ が成り立つ。

逆に、その集合 $S$ 上の任意の極大 filter$\mathfrak{F}$ に対し、その極限点は少なくとも 1 つもつとする。その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくとき、その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$ かつ有限交叉性を持つなら、定理 1.8.6 よりその集合 $S$ の部分集合系 $\mathfrak{X}$ を含むその集合 $S$ 上の極大 filter$\mathfrak{F}$ が存在する。ここで、仮定より $\exists a \in S$ に対し、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ が成り立つ。したがって、定理 1.8.17 より $\forall F \in \mathfrak{F}$ に対し、$a \in \mathrm{cl}F$ が成り立つことになる。これにより、$\forall X \in \mathfrak{X}$ に対し、$a \in \mathrm{cl}X = X$ が成り立つ、即ち、$a \in \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X = \bigcap \mathfrak{X}$ が成り立つ。なお、$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$ が成り立つことに注意した。これにより、その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$ かつ有限交叉性を持つなら、$\bigcap \mathfrak{X} \neq \emptyset$ が成り立つことが示され、さらに、定理 1.6.1 よりその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である。 □

### 1.8.6 filter と Hausdorff 空間

**定理 1.8.19.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が Hausdorff 空間であるならそのときに限り、その集合 $S$ 上の任意の filter$\mathfrak{F}$ に対し、その極限点がたかだか 1 つである。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとする。その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が Hausdorff 空間であるなら、その集合 $S$ 上の任意の filter$\mathfrak{F}$ のうちある元に収束するものが考えられれば、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ かつ $\mathfrak{F} \rightarrow b$ が成り立つかつ、$a \neq b$ が成り立つと仮定すると、仮定よりそれらの元々 $a$、$b$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{V}(b)$ を用いて、$\mathbf{V}(a) \subseteq \mathfrak{F}$、$\mathbf{V}(b) \subseteq \mathfrak{F}$ が成り立つかつ、$\exists V \in \mathbf{V}(a) \exists W \in \mathbf{V}(b)$ に対し、$V \cap W = \emptyset$ が成り立つ。このとき、$V, W \in \mathfrak{F}$ が成り立つので、$V \cap W = \emptyset \in \mathfrak{F}$ が成り立つことになるが、これは filter の定義に矛盾する。よって、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ かつ $\mathfrak{F} \rightarrow b$ が成り立つなら、$a = b$ が成り立つ。

逆に、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が Hausdorff 空間でないなら、$\exists a, b \in S$ に対し、それらの元々 $a$、$b$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{V}(b)$ を用いて、$\forall V \in \mathbf{V}(a) \forall W \in \mathbf{V}(b)$ に対し、$V \cap W \neq \emptyset$ が成り立つ。ここで、次式のように集合 $\mathfrak{F}$ が定義されれば、

$$\mathfrak{F} = \{V \cap W \in \mathfrak{P}(S) | V \in \mathbf{V}(a) \wedge W \in \mathbf{V}(b)\}$$

その集合 $\mathfrak{F}$ は filter になる。実際、$\emptyset \in \mathfrak{F}$ が成り立つなら、$\emptyset \in \mathbf{V}(a)$ または $\emptyset \in \mathbf{V}(b)$ が成り立つことになるが、これは全近傍系の定義に矛盾するので、$\emptyset \notin \mathfrak{F}$ が成り立つし、$\forall V \cap W \in \mathfrak{F} \forall A \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$V \cap W \subseteq A$ が成り立つなら、次式が成り立つので、

$$V = (V \cap W) \sqcup (V \setminus W) \subseteq A \cup V \setminus W, \quad W = (V \cap W) \sqcup (W \setminus V) \subseteq A \cup W \setminus V$$

次のようになり、

$$a \in \mathrm{int} V \subseteq \mathrm{int}(A \cup V \setminus W), \quad b \in \mathrm{int} W \subseteq \mathrm{int}(A \cup W \setminus V)$$

したがって、$A \cup V \setminus W \in \mathbf{V}(a)$ かつ $A \cup W \setminus V \in \mathbf{V}(b)$ が成り立ち、このとき、次のようになるので、

$$\begin{aligned}(A \cup V \setminus W) \cap (A \cup W \setminus V) &= A \cup (V \setminus W \cap W \setminus V) \\ &= A \cup \emptyset = A\end{aligned}$$

$A \in \mathfrak{F}$ が得られるし、$\forall V \cap W, V' \cap W' \in \mathfrak{F}$ に対し、$V, V' \in \mathbf{V}(a)$ かつ $W, W' \in \mathbf{V}(b)$ とすれば、$V \cap V' \in \mathbf{V}(a)$ かつ $W \cap W' \in \mathbf{V}(b)$ が成り立つので、$(V \cap W) \cap (V' \cap W') \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。このとき、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V = V \cap S$ かつ $S \in \mathbf{V}(b)$ が成り立つので、$V \in \mathfrak{F}$ が成り立ち、したがって、$\mathbf{V}(a) \subseteq \mathfrak{F}$ が成り立つ。同様にして、$\mathbf{V}(b) \subseteq \mathfrak{F}$ も成り立つので、$\mathfrak{F} \rightarrow a$ かつ $\mathfrak{F} \rightarrow b$ が成り立つかつ、$a \neq b$ が成り立つ。これはその集合 $S$ 上のある filter$\mathfrak{F}$ が存在して、その極限点がたかだか 1 つであるとは限らないことを意味する。よって、対偶律によりその集合 $S$ 上の任意の filter$\mathfrak{F}$ に対し、その極限点がたかだか 1 つであるなら、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が Hausdorff 空間である。 □

# 参考文献


[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p111,247,274 ISBN978-4-00-029871-1

[2] 福井敏純. ”集合と位相空間入門”. 埼玉大学. `http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/Fukui/lectures/Set_Topsp.pdf` (2021-11-16 4:15 取得)

[3] 後藤達哉. ”ウルトラフィルターの空間”. 筑波大学. `https://fujidig.github.io/201905-ultrafilter-stonecech/201905-ultrafilter-stonecech.pdf` (2021-12-8 7:33 取得)

## 1.9 有向点族

### 1.9.1 有向点族

**定義 1.9.1.** 空集合でない集合 $A$ と関係 $P$ が与えられたとする。次のことをみたすとき、その組 $(A,P)$ を有向集合という。

- $\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha P\alpha$ が成り立つ。
- $\forall\alpha,\beta,\gamma\in A$ に対し、$\alpha P\beta$ かつ $\beta P\gamma$ が成り立つなら、$\alpha P\gamma$ が成り立つ。
- $\forall\alpha,\beta\in A\exists\gamma\in A$ に対し、$\alpha P\gamma$ かつ $\beta P\gamma$ が成り立つ。

**定義 1.9.2.** 集合 $S$ と有向集合 $(A,P)$ が与えられたとき、写像 $a:A\to S$ をその有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられたその集合 $S$ の有向点族、net といい、その値 $a(\alpha)$、その写像 $a$ を $a_\alpha$、$\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ と書くことが多い。

例えば、点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n$ が有向集合 $(\mathbb{N},\leq)$ によって添数づけられた $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の有向点族となっている。そこで、後の便利のために次のように定義する。

**定義 1.9.3.** 集合 $S$ が与えられたとき、写像 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to S;n\mapsto a_n$ もその集合 $S$ の点列ということにする。

**定義 1.9.4.** 有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ と有向集合 $(B,Q)$ が与えられたとする。ある写像 $\varphi:B\to A$ が存在して、$\forall\alpha_0\in A\exists\beta_0\in B\forall\beta\in B$ に対し、$\beta_0 Q\beta$ が成り立つなら、$\alpha_0 P\varphi(\beta)$ が成り立つとき、その有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ への合成 $\left(a_{\varphi(\beta)}\right)_{\beta\in B}$ をその有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ の部分有向点族、部分 net という。

この定義は点列に対しても同様にして定義される。

**定義 1.9.5.** 特に、集合 $S$ の点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、ある写像 $\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{N};k\mapsto n_k$ が存在して、$\forall k,l\in\mathbb{N}$ に対し、$k<l$ が成り立つなら、$n_k<n_l$ が成り立つとき、その点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ への合成 $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ をその点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列という。

これは、もちろん、その点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分有向点族でもある。実際、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、集合 $V\left(\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}^{-1}|\varLambda_n\right)$ が考えられれば、次式が成り立つので、

$$V\left(\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}|V\left(\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}^{-1}|\varLambda_n\right)\right)\subseteq\varLambda_n$$

その集合 $V\left(\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}|V\left(\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}^{-1}|\varLambda_n\right)\right)$ は有限集合である。これが空集合なら、任意に自然数 $k_0$ がとられれば、$n<n_{k_0}$ が成り立つ。さらに、これが空集合でないなら、自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の部分集合なので、最大値が存在する[*26]。これを $m$ とおくと、$\exists k_0\in\mathbb{N}$ に対し、$n_{k_0}\leq n$ が成り立つかつ、$m=n_{k_0}$ が成り立つ。そこで、$\forall k\in\mathbb{N}$ に対し、$k_0<k$ が成り立つなら、$m=n_{k_0}<n_k$ なので、$k\notin V\left(\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}^{-1}|\varLambda_n\right)$ が成り立つこ

[*26] これは数学的帰納法によって示すと分かりやすいかもしれない。実際、$\varLambda\subseteq\mathbb{N}$ なる有限集合 $\varLambda$ において、$\#\varLambda$ のときは明らかで、$\#\varLambda=k$ のとき、最大値 $\max\varLambda$ が存在するとすれば、$\#\varLambda=k+1$ のとき、$n\in\varLambda$ な自然数を用いて考えれば、$\max\varLambda=\max\left\{n,\max\varLambda\setminus\{n\}\right\}$ が成り立つので、たしかに従う。

とになり、よって、$n_{k_0} \leq n < n_k$ が成り立つことから従う。

**定義 1.9.6.** 有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。その集合 $S$ の部分集合 $M$ について、$\exists\alpha_0 \in A\forall\alpha \in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$a_\alpha \in M$ が成り立つとき、その有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ はその集合 $M$ にほとんど属するという。

**定義 1.9.7.** 有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。その集合 $S$ の部分集合 $M$ について、$\forall\alpha \in A\exists\alpha_0 \in A$ に対し、$\alpha P\alpha_0$ が成り立つかつ、$a_{\alpha_0} \in M$ が成り立つとき、その有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ はその集合 $M$ にしばしば属するという。

**定理 1.9.1** (有向点族の基本補題)**.** 有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。その集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 $\mathfrak{M}$ について、組 $(\mathfrak{M},\supseteq)$ が有向集合で、$\forall M \in \mathfrak{M}$ に対し、その有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ がその集合 $M$ にしばしば属するなら、ある有向集合 $(B,Q)$ とその有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ のある部分有向点族 $\left(a_{\varphi(\beta)}\right)_{\beta\in B}$ が存在して、$\forall M \in \mathfrak{M}$ に対し、その有向点族 $\left(a_{\varphi(\beta)}\right)_{\beta\in B}$ はその集合 $M$ にほとんど属する。この定理を有向点族の基本補題という。

**証明.** 有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。その集合 $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 $\mathfrak{M}$ について、組 $(\mathfrak{M},\supseteq)$ が有向集合で、$\forall M \in \mathfrak{M}$ に対し、その有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ がその集合 $M$ にしばしば属するなら、次のように集合 $B$ がおかれ、

$$B = \{(\alpha,M) \in A \times \mathfrak{M}|a_\alpha \in M\}$$

さらに、次のように関係 $Q$ が定義されれば、

- $\forall(\alpha,M),(\beta,N) \in B$ に対し、$\alpha P\beta$ かつ $M \supseteq N$ が成り立つことを $(\alpha,M)Q(\beta,N)$ とする。

$\forall(\alpha,M) \in B$ に対し、$\alpha P\alpha$ かつ $M \supseteq M$ が成り立つので、$(\alpha,B)Q(\alpha,B)$ が成り立つかつ、$\forall(\alpha,M),(\beta,N),(\gamma,O) \in B$ に対し、$(\alpha,M)Q(\beta,N)$ かつ $(\beta,N)Q(\gamma,O)$ が成り立つなら、$\alpha P\beta$ かつ $\beta P\gamma$ かつ $M \supseteq N$ かつ $N \supseteq O$ が成り立つので、$\alpha P\gamma$ かつ $M \supseteq O$ が成り立ち、したがって、$(\alpha,M)Q(\gamma,O)$ が成り立つかつ、$\forall(\alpha,M),(\beta,N) \in B\exists\gamma \in A$ に対し、$\alpha P\gamma$ かつ $\beta P\gamma$ が成り立つかつ、$\exists O \in \mathfrak{M}$ に対し、$M \supseteq O$ かつ $N \supseteq O$ が成り立つので、$(\alpha,M)Q(\gamma,O)$ かつ $(\beta,N)Q(\gamma,O)$ が成り立つ。これにより、その組 $(B,Q)$ は有向集合である。

このとき、$\varphi = \mathrm{pr}_A : B \to A; (\alpha,M) \mapsto \alpha$ とおかれれば、$\forall\alpha_0 \in A$ に対し、その集合 $\mathfrak{M}$ の元 $M_0$ を用いて、$\forall\beta \in B$ に対し、$\beta_0 = (\alpha_0,M_0)$、$\beta = (\alpha,M)$ として、$\beta_0 Q\beta$ が成り立つなら、$\alpha_0 P\alpha$ かつ $M_0 \supseteq M$ が成り立ち、$\alpha = \varphi(\alpha,M)$ より $\alpha_0 P\varphi(\beta)$ が成り立つので、その有向点族 $\left(a_{\varphi(\beta)}\right)_{\beta\in B}$ はその有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ の部分有向点族である。

$\forall M_0 \in \mathfrak{M}$ に対し、その集合 $A$ の元 $\alpha$ を用いて、$\beta_0 = (\alpha,M_0)$ とすれば、$\forall\beta \in B$ に対し、$\beta_0 Q\beta$ が成り立つなら、$\beta = (\alpha,M)$ として、$\alpha_0 P\alpha$ かつ $M_0 \supseteq M$ が成り立つので、$a_{\varphi(\beta)} = a_\alpha \in M \subseteq M_0$ が成り立つので、その有向点族 $\left(a_{\varphi(\beta)}\right)_{\beta\in B}$ はその集合 $M_0$ にほとんど属する。 □

## 1.9.2 普遍有向点族

**定義 1.9.8.** 有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ とその集合 $S$ 上の filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、$\forall F \in \mathfrak{F}$ に対し、その有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ がその集合 $F$ にしばしば属するようなその filter$\mathfrak{F}$

をその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ に対する filter という[*27]。

**定理 1.9.2.** 有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ に対する filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、これ全体の集合が $\varphi\left(S,(a_\alpha)_{\alpha\in A}\right)$ とおかれれば、その組 $\left(\varphi\left(S,\ (a_\alpha)_{\alpha\in A}\right),\ \subseteq\right)$ は順序集合で任意の全順序な部分順序集合 $(\varphi',\subseteq)$ は上に有界となる。

**証明.** 有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ に対する filter$\mathfrak{F}$ が与えられたとき、これ全体の集合が $\varphi\left(S,(a_\alpha)_{\alpha\in A}\right)$ とおかれれば、順序集合の定義より明らかにその組 $\left(\varphi\left(S,(a_\alpha)_{\alpha\in A}\right),\subseteq\right)$ は順序集合となる。ここで、その順序集合 $\left(\varphi\left(S,(a_\alpha)_{\alpha\in A}\right),\subseteq\right)$ の任意の全順序な部分順序集合 $(\varphi',\subseteq)$ に対し、その和集合 $\bigcup\varphi'$ について、もちろん、これは空集合でない。$\forall F\in\bigcup\varphi'\forall G\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$F\subseteq G$ が成り立つなら、ある filter$\mathfrak{F}$ がその集合 $\varphi'$ に存在して、$F\in\mathfrak{F}$ が成り立ち、したがって、$G\in\mathfrak{F}\subseteq\bigcup\varphi'$ も成り立つ。$\forall F,G\in\bigcup\varphi'$ に対し、ある filters$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{G}$ がその集合 $\varphi'$ に存在して、$F\in\mathfrak{F}$ かつ $G\in\mathfrak{G}$ が成り立ち、仮定より $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{G}$ が成り立つとしてもよいので、$F,G\in\mathfrak{G}$ が成り立ち、したがって、$F\cap G\in\mathfrak{G}\subseteq\bigcup\varphi'$ が成り立つ。最後に、$\forall F\in\bigcup\varphi'$ に対し、ある filter$\mathfrak{F}$ がその集合 $\varphi'$ に存在して、$F\in\mathfrak{F}$ が成り立ち、$\forall\alpha\in A\exists\alpha_0\in A$ に対し、$\alpha P\alpha_0$ かつ $\alpha_0\in F$ が成り立つので、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ がその集合 $F$ にしばしば属する。これにより、その和集合 $\bigcup\varphi'$ はその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ に対する filter となる。

このとき、$\forall\mathfrak{F}\in\varphi'$ に対し、$\mathfrak{F}\subseteq\bigcup\varphi'$ が成り立つので、その和集合 $\bigcup\varphi'$ はその順序関係 $\subseteq$ におけるその集合 $\varphi'$ の上界であり、よって、その部分順序集合 $(\varphi',\subseteq)$ は上に有界となる。 □

**定義 1.9.9.** 有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。その集合 $S$ の部分集合 $M$ について、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ がその集合 $M$ にほとんど属する、または、その集合 $S\setminus M$ にほとんど属するとき、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ をその集合 $S$ の普遍有向点族、普遍 net という。さらに、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ の部分有向点族で普遍有向点族であるものをその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ の普遍部分有向点族、普遍部分 net という。

**定理 1.9.3.** 有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ が与えられたとき、これの普遍部分有向点族が存在する。

**証明.** 有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。定理 1.9.2 よりその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ に対する filter が与えられたとき、これ全体の集合が $\varphi\left(S,(a_\alpha)_{\alpha\in A}\right)$ とおかれれば、その組 $\left(\varphi\left(S,(a_\alpha)_{\alpha\in A}\right),\subseteq\right)$ は順序集合で任意の全順序な部分順序集合 $(\varphi',\subseteq)$ は上に有界となる。したがって、よりよい Zorn の補題よりその集合 $\varphi\left(S,(a_\alpha)_{\alpha\in A}\right)$ の極大元が存在する。これが $\mathfrak{F}$ とおかれれば、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)\forall F\in\mathfrak{F}$ に対し、その filter$\mathfrak{F}$ の与え方によりその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ はその集合 $F$ にしばしば属する、即ち、$\forall\alpha\in A\exists\alpha_0\in A$ に対し、$\alpha P\alpha_0$ が成り立つかつ、$a_{\alpha_0}\in F$ が成り立つので、$a_{\alpha_0}\in F\cap M$ または $a_{\alpha_0}\in F\setminus M$ が成り立つ。

$a_{\alpha_0}\in F\cap M$ が成り立つとき、次のように集合 $\mathfrak{G}_{F\cap M}$ がおかれると、

$$\mathfrak{G}_{F\cap M}=\{G\in\mathfrak{P}(S)|\exists F\in\mathfrak{F}[F\cap M\subseteq G]\}$$

[*27] 実は $\emptyset\notin\mathfrak{F}$ という条件はなくてもよい。

$\forall F \in \mathfrak{F}$ に対し、もちろん、$F \cap M \subseteq F$ が成り立つので、$F \in \mathfrak{G}_{F \cap M}$ が成り立ち、したがって、$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{F \cap M}$ が成り立つ。さらに、これは空集合でないかつ、$\forall G \in \mathfrak{G}_{F \cap M} \forall H \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$G \subseteq H \subseteq S$ が成り立つなら、$\exists F \in \mathfrak{F}$ に対し、$F \cap M \subseteq G \subseteq H$ が成り立つので、$H \in \mathfrak{G}_{F \cap M}$ が成り立つかつ、$\forall G, H \in \mathfrak{G}_{F \cap M}$ に対し、その集合 $\mathfrak{F}$ の元々 $F_G$、$F_H$ が存在して、$F_G \cap M \subseteq G$ かつ $F_H \cap M \subseteq H$ が成り立ち、filter の定義より $F_G \cap F_H \in \mathfrak{F}$ が成り立つことに注意すれば、$F_G \cap F_H \cap M \subseteq G \cap H$ が成り立つので、$G \cap H \in \mathfrak{G}_{F \cap M}$ が成り立つ。したがって、その集合 $\mathfrak{G}_{F \cap M}$ はその集合 $S$ 上の filter である。さらに、$\forall G \in \mathfrak{G}_{F \cap M} \forall \alpha \in A$ に対し、あるその filter$\mathfrak{F}$ の元 $F$ が存在して、$F \cap M \subseteq G$ が成り立ち、ここで、仮定より $\alpha P \alpha_0$ が成り立つかつ、$a_{\alpha_0} \in F \cap M$ が成り立つので、その有向点族 $\left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A}$ はその集合 $G$ にしばしば属する。以上の議論により、$\mathfrak{G}_{F \cap M} \in \varphi\left( S, \left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A} \right)$ が成り立つ。

ここで、その filter$\mathfrak{F}$ がその集合 $\varphi\left( S, \left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A} \right)$ の極大元であるので、$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{F \cap M}$ が成り立ち、$F \cap M \subseteq M$ より $M \in \mathfrak{G}_{F \cap M}$ が成り立つので、$M \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。そこで、その filter$\mathfrak{F}$ がその有向点族 $\left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A}$ に対する filter であるので、その有向点族 $\left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A}$ がその集合 $M$ にしばしば属する。組 $(\mathfrak{P}(S), \supseteq)$ が有向集合となっていることに注意すれば、有向点族の基本補題によりある有向集合 $(B_{F \cap M}, Q_{F \cap M})$ とその有向点族 $\left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A}$ のある部分有向点族 $\left( a_{\varphi(\beta)} \right)_{\beta \in B_{F \cap M}}$ が存在して、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その有向点族 $\left( a_{\varphi(\beta)} \right)_{\beta \in B_{F \cap M}}$ はその集合 $M$ にほとんど属する。

$a_{\alpha_0} \in F \setminus M$ が成り立つとき、次のように集合 $\mathfrak{G}_{F \setminus M}$ がおかれると、

$$\mathfrak{G}_{F \setminus M} = \{ G \in \mathfrak{P}(S) | \exists F \in \mathfrak{F}[F \setminus M \subseteq G] \}$$

$\forall F \in \mathfrak{F}$ に対し、もちろん、$F \setminus M \subseteq F$ が成り立つので、$F \in \mathfrak{G}_{F \setminus M}$ が成り立ち、したがって、$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{F \setminus M}$ が成り立つ。さらに、これは空集合でないかつ、$\forall G \in \mathfrak{G}_{F \setminus M} \forall H \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$G \subseteq H \subseteq S$ が成り立つなら、$\exists F \in \mathfrak{F}$ に対し、$F \setminus M \subseteq G \subseteq H$ が成り立つので、$H \in \mathfrak{G}_{F \setminus M}$ が成り立つかつ、$\forall G, H \in \mathfrak{G}_{F \setminus M}$ に対し、その集合 $\mathfrak{F}$ の元々 $F_G$、$F_H$ が存在して、$F_G \setminus M \subseteq G$ かつ $F_H \setminus M \subseteq H$ が成り立ち、filter の定義より $F_G \cap F_H \in \mathfrak{F}$ が成り立つことに注意すれば、$(F_G \cap F_H) \setminus M \subseteq G \cap H$ が成り立つので、$G \cap H \in \mathfrak{G}_{F \setminus M}$ が成り立つ。したがって、その集合 $\mathfrak{G}_{F \setminus M}$ はその集合 $S$ 上の filter である。さらに、$\forall G \in \mathfrak{G}_{F \setminus M} \forall \alpha \in A$ に対し、あるその filter$\mathfrak{F}$ の元 $F$ が存在して、$F \setminus M \subseteq G$ が成り立ち、ここで、仮定より $\alpha P \alpha_0$ が成り立つかつ、$a_{\alpha_0} \in F \setminus M$ が成り立つので、その有向点族 $\left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A}$ はその集合 $G$ にしばしば属する。以上の議論により、$\mathfrak{G}_{F \setminus M} \in \varphi\left( S, \left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A} \right)$ が成り立つ。

ここで、その filter$\mathfrak{F}$ がその集合 $\varphi\left( S, \left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A} \right)$ の極大元であるので、$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{F \setminus M}$ が成り立ち、$F \setminus M \subseteq S \setminus M$ より $S \setminus M \in \mathfrak{G}_{F \setminus M}$ が成り立つので、$S \setminus M \in \mathfrak{F}$ が成り立つ。そこで、その filter$\mathfrak{F}$ がその有向点族 $\left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A}$ に対する filter であるので、その有向点族 $\left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A}$ がその集合 $S \setminus M$ にしばしば属する。組 $(\mathfrak{P}(S), \supseteq)$ が有向集合となっていることに注意すれば、有向点族の基本補題によりある有向集合 $\left( B_{F \setminus M}, Q_{F \setminus M} \right)$ とその有向点族 $\left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A}$ のある部分有向点族 $\left( a_{\varphi(\beta)} \right)_{\beta \in B_{F \setminus M}}$ が存在して、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その有向点族 $\left( a_{\varphi(\beta)} \right)_{\beta \in B_{F \setminus M}}$ はその集合 $S \setminus M$ にほとんど属する。

以上の議論により、その集合 $S$ の部分集合 $M$ について、その有向点族 $\left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A}$ の部分有向点族が存在して、その集合 $M$ にほとんど属する、または、その集合 $S \setminus M$ にほとんど属することになるので、その有向点族 $\left( a_\alpha \right)_{\alpha \in A}$ の普遍部分有向点族が存在する。 □

### 1.9.3 有向点族の収束

**定理 1.9.4.** 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$\forall a \in S$ に対し、その元の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ を用いた組 $(\mathbf{V}(a), \supseteq)$ は有向集合である。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall a \in S$ に対し、その元の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ を用いた組 $(\mathbf{V}(a),\supseteq)$ について、もちろん、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \supseteq V$ が成り立つかつ、$\forall U,V,W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$U \supseteq V$ かつ $V \supseteq W$ が成り立つなら、$U \supseteq W$ が成り立つかつ、$\forall V,W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$V \cap W \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つので、$V \supseteq V \cap W$ かつ $W \supseteq V \cap W$ が成り立つ。これにより、その組 $(\mathbf{V}(a),\supseteq)$ は有向集合をなす。 □

**定義 1.9.10.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の全近傍系が $\mathbf{V}(a)$ とおかれれば、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ がその近傍 $V$ にほとんど属することをその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ はその元 $a$ に収束するといいその元 $a$ をその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ の収束点という。この元 $a$ がただ 1 つのみ存在するとき、その元 $a$ を $\lim(a_\alpha)_{\alpha\in A}$、$\lim_{\alpha\in A} a_\alpha$ などと書く。式で書けば次のようになる[*28]。

$$\forall V \in \mathbf{V}(a)\exists\alpha_0 \in A\forall\alpha \in A\left[\alpha_0 P\alpha \Rightarrow a_\alpha \in V\right]$$

この定義の仕方は後に述べる定理 1.9.6 より定義 1.8.2、即ち、filter の収束と矛盾しない。

**定義 1.9.11.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の全近傍系が $\mathbf{V}(a)$ とおかれれば、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ がその近傍 $V$ にしばしば属するようなその元 $a$ をその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ の堆積点という。式で書けば次のようになる。

$$\forall V \in \mathbf{V}(a)\forall\alpha \in A\exists\alpha_0 \in A\left[\alpha P\alpha_0 \wedge a_{\alpha_0} \in V\right]$$

**定理 1.9.5.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- その集合 $S$ の元 $a$ がその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ の堆積点である。
- その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ の部分有向点族でその元 $a$ に収束するものが存在する。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ が与えられたとき、その集合 $S$ の元 $a$ がその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ の堆積点であるなら、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ はその集合 $V$ にしばしば属する。そこで、定理 1.9.4 よりその組 $(\mathbf{V}(a),\supseteq)$ は有向集合をなす。したがって、有向点族の基本補題よりある有向集合 $(B,Q)$ とその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ のある部分有向点族 $\left(a_{\varphi(\beta)}\right)_{\beta\in B}$ が存在して、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、その有向点族 $\left(a_{\varphi(\beta)}\right)_{\beta\in B}$ はその集合 $V$ にほとんど属する。これがまさしくその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ の部分有向点族でその元 $a$ に収束するものである。

逆に、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ の有向集合 $(B,Q)$ によって添数づけられた部分有向点族でその元 $a$ に収束するもの $\left(a_{\varphi(\beta)}\right)_{\beta\in B}$ が存在するなら、$\forall V \in \mathbf{V}(a)\exists\beta_0 \in B\forall\beta \in B$ に対し、$\beta_0 Q\beta$ が成り立つなら、$a_{\varphi(\beta)} \in V$ が成り立つ、即ち、$\exists\alpha_0 \in A\forall\alpha \in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$a_\alpha \in V$ が成り立つ。ここで、$\forall\alpha' \in A\exists\alpha'' \in A$ に対し、$\alpha' P\alpha''$ かつ $\alpha_0 P\alpha''$ が成り立つので、$a_{\alpha''} \in V$ が成り立つ。これにより、$\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ はその集合 $V$ にしばしば属する。これがまさしくその集合 $S$ の元 $a$ がその有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ の堆積点であることになる。 □

**定理 1.9.6.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ が与えられたとき、$\exists\alpha_0 \in A\forall\alpha \in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$a_\alpha \in F \subseteq S$ が成り立つようなその集合 $F$ 全

[*28] 比較として、実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が実数 $a$ に収束する $\Leftrightarrow \forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists n_0 \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}\left[n_0 \leq n \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\right]$

体の集合 $\mathfrak{F}$ はその集合 $S$ 上の filter である。さらに、この filter$\mathfrak{F}$ がその集合 $S$ の元 $a$ に収束するならそのときに限り、その有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ がその元 $a$ に収束する。

この定理によって、定義 1.9.10、即ち、有向点族の収束は定義 1.8.2、即ち、filter の収束と矛盾していないことがわかる。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と有向集合 $(A,P)$ によって添数づけられた集合 $S$ の有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ が与えられたとき、$\exists\alpha_0\in A\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$a_\alpha\in F\subseteq S$ が成り立つようなその集合 $F$ 全体の集合 $\mathfrak{F}$ について、もちろん、$\emptyset\notin\mathfrak{F}$ が成り立つ。$\forall F\in\mathfrak{F}\forall G\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$F\subseteq G$ が成り立つなら、$\exists\alpha_0\in A\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$a_\alpha\in F\subseteq G$ が成り立つので、$G\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。$\forall F,G\in\mathfrak{F}$ に対し、$\exists\alpha_F\in A\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_F P\alpha$ が成り立つなら、$a_\alpha\in F$ が成り立つかつ、$\exists\alpha_G\in A\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_G P\alpha$ が成り立つなら、$a_\alpha\in F\subseteq S$ が成り立つのであった。そこで、有向集合の定義より $\exists\alpha_0\in A$ に対し、$\alpha_F P\alpha_0$ かつ $\alpha_G P\alpha_0$ が成り立つので、$\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$a_\alpha\in F$ かつ $a_\alpha\in G$ が成り立ち、したがって、$a_\alpha\in F\cap G$ が成り立つことにより $F\cap G\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。以上の議論により、その集合 $\mathfrak{F}$ はその集合 $S$ 上の filter である。

さらに、この filter$\mathfrak{F}$ がその集合 $S$ の元 $a$ に収束するならそのときに限り、その元 $a$ の全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ が $\mathbf{V}(a)\subseteq\mathfrak{F}$ を満たす。これが成り立つならそのときに限り、$\forall V\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$V\in\mathbf{V}(a)\Rightarrow V\in\mathfrak{F}$ が成り立つ。これが成り立つならそのときに限り、$\forall V\in\mathbf{V}(a)\exists\alpha_0\in A\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$a_\alpha\in V$ が成り立つ、即ち、その有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ がその元 $a$ に収束する。 □

### 1.9.4 有向点族と位相空間

**定理 1.9.7.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、次のことは同値である。

- $a\in\mathrm{cl}M$ が成り立つ。
- $\forall V\in\mathbf{V}(a)$ に対し、$M\cap V\neq\emptyset$ が成り立つ。
- その集合 $S$ の元 $a$ に収束するその集合 $M$ の有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ が存在する。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$a\in\mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り、$\forall V\in\mathbf{V}(a)$ に対し、$M\cap V\neq\emptyset$ が成り立つことはすでに定理 1.1.26 で示した。

$\forall V\in\mathbf{V}(a)$ に対し、$M\cap V\neq\emptyset$ が成り立つとき、$a_V\in M\cap V$ なる元 $a_V$ がとられる。さらに、定理 1.9.4 よりその組 $(\mathbf{V}(a),\supseteq)$ は有向集合をなす。そこで、次のような写像 $\left(a_V\right)_{V\in\mathbf{V}(a)}$ が考えられれば、

$$\left(a_V\right)_{V\in\mathbf{V}(a)}:\mathbf{V}(a)\rightarrow S;V\mapsto a_V\in M\cap V$$

これは有向点族である。このとき、$\forall V,W\in\mathbf{V}(a)$ に対し、$V\supseteq W$ が成り立つなら、$a_W\in M\cap W\subseteq M\cap V\subseteq V$ が成り立つ。これはまさしくその有向点族 $\left(a_V\right)_{V\in\mathbf{V}(a)}$ がほとんどその近傍 $V$ に属することになる[*29]。よって、その集合 $S$ の元 $a$ に収束するその集合 $M$ の有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ が存在する。

逆に、その集合 $S$ の元 $a$ に収束するその集合 $M$ の有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ が存在するなら、$\forall V\in\mathbf{V}(a)$ に対し、その有向点族 $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ はその近傍 $V$ にほとんど属するので、$\exists\alpha_0\in A\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$a_\alpha\in V$ が成り立つ。ここで、$a_\alpha\in M$ が成り立つので、これにより、$a_\alpha\in M\cap V$ が成り立つ、即ち、$M\cap V\neq\emptyset$ が成り立つ。 □

[*29] つまり、$\forall V\in\mathbf{V}(a)\exists V\in\mathbf{V}(a)\forall W\in\mathbf{V}(a)$ に対し、$V\supseteq W$ が成り立つなら、$a_W\in V$ が成り立つことになる。

**定理 1.9.8.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、次のことは同値である。

- その集合 $M$ は閉集合である。
- その集合 $M$ の有向点族 $\left(a_{\alpha}\right)_{\alpha \in A}$ が収束するなら、その収束点 $a$ は $a \in M$ を満たす。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ は閉集合であるなら、定理 1.1.7 より $\mathrm{cl}M = M$ が成り立つ。そこで、その集合 $M$ の有向点族 $\left(a_{\alpha}\right)_{\alpha \in A}$ が収束するなら、その収束点 $a$ は定理 1.9.7 より $a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つので、その収束点 $a$ は $a \in M$ を満たす。

逆に、その集合 $M$ の有向点族 $\left(a_{\alpha}\right)_{\alpha \in A}$ が収束するなら、その収束点 $a$ が $a \in M$ を満たすとすると、$\forall a \in S$ に対し、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つなら、その集合 $S$ の元 $a$ に収束するその集合 $M$ の有向点族 $\left(a_{\alpha}\right)_{\alpha \in A}$ が存在する。仮定より $a \in M$ が成り立つので、$\mathrm{cl}M \subseteq M$ が成り立つことになり、したがって、$\mathrm{cl}M = M$ が成り立つ。定理 1.1.7 よりその集合 $M$ は閉集合である。 □

**定理 1.9.9.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- 写像 $f: S \rightarrow T$ が連続である。
- 任意のその集合 $S$ の有向点族 $\left(a_{\alpha}\right)_{\alpha \in A}$ に対し、その有向点族 $\left(a_{\alpha}\right)_{\alpha \in A}$ がその元 $a$ に収束するなら、その有向点族 $\left(f\left(a_{\alpha}\right)\right)_{\alpha \in A}$ もその元 $f(a)$ に収束する。

**証明.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ が与えられたとき、写像 $f: S \rightarrow T$ が連続であるとき、$a \in S$、$b \in T$ における全近傍系それぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(b)$ において、任意のその集合 $S$ の有向点族 $\left(a_{\alpha}\right)_{\alpha \in A}$ に対し、その有向点族 $\left(a_{\alpha}\right)_{\alpha \in A}$ がその元 $a$ に収束する、即ち、$\forall V \in \mathbf{V}(a) \exists \alpha_0 \in A \forall \alpha \in A$ に対し、$\alpha_0 P \alpha$ が成り立つなら、$a_{\alpha} \in V$ が成り立つとする。$\forall V \in \mathbf{W}\left(f(a)\right) \exists \alpha_0 \in A \forall \alpha \in A$ に対し、$\alpha_0 P \alpha$ が成り立つなら、定理 1.3.1 より $V\left(f^{-1}|V\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つので、仮定より $a_{\alpha} \in V\left(f^{-1}|V\right)$ が得られる。このとき、$f\left(a_{\alpha}\right) \in V\left(f|V\left(f^{-1}|V\right)\right) = V$ が成り立つので、$\forall V \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ に対し、その有向点族 $\left(f\left(a_{\alpha}\right)\right)_{\alpha \in A}$ はその近傍 $V$ にほとんど属する、即ち、その有向点族 $\left(f\left(a_{\alpha}\right)\right)_{\alpha \in A}$ はその元 $f(a)$ に収束する。

逆に、写像 $f: S \rightarrow T$ が連続でないなら、定理 1.3.1 より $\exists V \in \mathbf{W}\left(f(a)\right)$ に対し、$V\left(f^{-1}|V\right) \notin \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。ここで、定理 8.1.1.22 より $\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$a \in O$ が成り立つなら、$O \setminus V\left(f^{-1}|V\right) \neq \emptyset$ が成り立つので、$\forall W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$\mathrm{int}W \in \mathfrak{O}$ かつ $a \in \mathrm{int}W$ より $\emptyset \neq \mathrm{int}W \setminus V\left(f^{-1}|V\right)$ が成り立ち、$\mathrm{int}W \setminus V\left(f^{-1}|V\right) \subseteq W \setminus V\left(f^{-1}|V\right)$ が成り立つので、$W \setminus V\left(f^{-1}|V\right) \neq \emptyset$ が成り立つことになり $a_W \in W \setminus V\left(f^{-1}|V\right)$ なる元 $a_W$ がとられることができる。定理 1.9.4 よりその組 $(\mathbf{V}(a), \supseteq)$ は有向集合をなすので、次のような写像 $\left(a_V\right)_{V \in \mathbf{V}(a)}$ は有向点族である。

$$\left(a_W\right)_{W \in \mathbf{V}(a)}: \mathbf{V}(a) \rightarrow S; W \mapsto a_W \in W \setminus V\left(f^{-1}|V\right)$$

このとき、$\forall U, W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$U \supseteq W$ が成り立つなら、$a_W \in W \setminus V\left(f^{-1}|V\right) \subseteq W \subseteq U$ が成り立つ。これはまさしくその有向点族 $\left(a_W\right)_{W \in \mathbf{V}(a)}$ がほとんどその近傍 $U$ に属することになる[*30]、即ち、その有向点族 $\left(a_W\right)_{W \in \mathbf{V}(a)}$ がその元 $a$ に収束する。一方で、$\forall W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$a_W \in W \setminus V\left(f^{-1}|V\right)$ より $a_W \notin V\left(f^{-1}|V\right)$ が成り立つので、$f\left(a_W\right) \notin V$ が成り立つ、即ち、$\exists V \in \mathbf{W}\left(f(a)\right) \forall W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$W \supseteq W$ が成り立つかつ、$f\left(a_W\right) \notin V$ が成り立つので、その有向点族 $\left(f\left(a_W\right)\right)_{W \in \mathbf{V}_1(a)}$ がその元 $f(a)$ に収束しない。対偶律により任意のその集合 $S$ の有向点族 $\left(a_{\alpha}\right)_{\alpha \in A}$ に対し、その有向点族 $\left(a_{\alpha}\right)_{\alpha \in A}$ がその元 $a$ に

[*30] つまり、$\forall U \in \mathbf{V}(a) \exists U \in \mathbf{V}(a) \forall W \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$U \supseteq W$ が成り立つなら、$a_W \in U$ が成り立つことになる。

収束するなら、その有向点族 $(f(a_\alpha))_{\alpha\in A}$ もその元 $f(a)$ に収束するなら、その写像 $f:S\rightarrow T$ が連続である。 $\square$

### 1.9.5 有向点族と誘導位相空間

**定理 1.9.10.** 集合 $S$ が与えられたとき、その写像の族 $\{f_\lambda:S\rightarrow S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によるその位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_0$ が考えられれば、その集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ とその集合 $S$ の元 $a$ について、次のことは同値である。

- その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ がその元 $a$ に収束する。
- $\forall\lambda\in\Lambda$ に対し、その有向点族 $(f_\lambda(a_\alpha))_{\alpha\in A}$ がその元 $f_\lambda(a)$ に収束する。

**証明.** 集合 $S$ が与えられたとき、その写像の族 $\{f_\lambda:S\rightarrow S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によるその位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_0$ が考えられれば、その集合 $S$ の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ とその集合 $S$ の元 $a$ について、の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ がその元 $a$ に収束するなら、$\forall\lambda\in\Lambda$ に対し、その写像 $f_\lambda$ は連続なので、定理 1.9.9 よりその有向点族 $(f_\lambda(a_\alpha))_{\alpha\in A}$ がその元 $f_\lambda(a)$ に収束する。

逆に、$\forall\lambda\in\Lambda$ に対し、その有向点族 $(f_\lambda(a_\alpha))_{\alpha\in A}$ がその元 $f_\lambda(a)$ に収束するなら、$\forall V\in\mathbf{V}(a)$ に対し、ある開集合 $O$ がその位相 $\mathfrak{O}_0$ に存在して、$a\in O$ かつ $O\subseteq V$ が成り立ち、定理 1.4.6 よりその位相空間 $(S,\mathfrak{O}_0)$ のある開基 $\mathfrak{B}$ の任意の元 $W$ はその添数集合 $\Lambda$ の有限な部分集合である添数集合 $N$ の添数 $\nu$ に対し、$O_\nu\in\mathfrak{O}_\nu$ なる開集合たち $O_\nu$ を用いて次式のように書かれることができるので、

$$W=\bigcap_{\nu\in N}V\left(f_\nu^{-1}|O_\nu\right)$$

開基の定義より次式が成り立つ。

$$a\in\bigcap_{\nu\in N}V\left(f_\nu^{-1}|O_\nu\right)\subseteq O\subseteq V$$

したがって、$\forall\nu\in N$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}f_\nu(a)\in V\left(f_\nu|\bigcap_{\nu'\in N}V\left(f_{\nu'}^{-1}|O_{\nu'}\right)\right)&\subseteq\bigcap_{\nu'\in N}V\left(f_\nu|V\left(f_{\nu'}^{-1}|O_{\nu'}\right)\right)\\&\subseteq V\left(f_\nu|V\left(f_\nu^{-1}|O_\nu\right)\right)\\&=O_\nu\end{aligned}$$

これにより、位相空間 $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ における $a_\lambda\in S_\lambda$ なる元 $a_\lambda$ の全近傍系が $\mathbf{V}_\lambda(a_\lambda)$ とおかれれば、$O_\nu\in\mathbf{V}_\nu(f_\nu(a))$ が成り立つので、$\exists\alpha_\nu\in A\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_\nu P\alpha$ が成り立つなら、$f_\nu(a_\alpha)\in O_\nu$ が成り立つ。そこで、その組 $(A,P)$ は有向集合なので、$\forall\nu\in N$ に対し、$\alpha_\nu P\alpha_0$ が成り立つようなその集合 $A$ の元 $\alpha_0$ が存在して、$\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$f_\nu(a_\alpha)\in O_\nu$ が成り立つ。したがって、$\exists\alpha_0\in A\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$a_\alpha\in V\left(f_\nu^{-1}|O_\nu\right)$ が成り立つ。ここで、その元 $\alpha_0$ はその添数 $\nu$ によらないことに注意すれば、$\exists\alpha_0\in A\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、次のようになる。

$$a_\alpha\in\bigcap_{\nu\in N}V\left(f_\nu^{-1}|O_\nu\right)\subseteq O\subseteq V$$

これにより、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ はその元 $a$ に収束する。 $\square$

## 1.9.6 有向点族と直積位相空間

**定理 1.9.11.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda,\mathfrak{O}_0\right)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の有向点族 $\left((a_{\lambda,\alpha})_{\lambda\in\varLambda}\right)_{\alpha\in A}$ とその集合 $\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda$ の元 $(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ について、次のことは同値である。

- その有向点族 $\left((a_{\lambda,\alpha})_{\lambda\in\varLambda}\right)_{\alpha\in A}$ がその元 $(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ に収束する。
- $\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、その有向点族 $(a_{\lambda,\alpha})_{\alpha\in A}$ がその元 $a_\lambda$ に収束する。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda,\mathfrak{O}_0\right)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の有向点族 $\left((a_{\lambda,\alpha})_{\lambda\in\varLambda}\right)_{\alpha\in A}$ とその集合 $\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda$ の元 $(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ について、その直積位相 $\mathfrak{O}_0$ はその射影の族 $\left\{\mathrm{pr}_\lambda:\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda\rightarrow S_\lambda\right\}_{\lambda\in\varLambda}$ によるその位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\varLambda}$ からの誘導位相 $\mathfrak{O}_0$ でもあるので、定理 1.9.10 より次のことは同値である。

- その有向点族 $\left((a_{\lambda,\alpha})_{\lambda\in\varLambda}\right)_{\alpha\in A}$ がその元 $(a_\lambda)_{\lambda\in\varLambda}$ に収束する。
- $\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、その有向点族 $(a_{\lambda,\alpha})_{\alpha\in A}$ がその元 $a_\lambda$ に収束する。

□

## 1.9.7 有向点族と compact 空間

ここで、次の定理が述べられるまえに、次の定義と定理が述べられよう。

**定義** (定義 1.6.3 の再掲)**.** 集合 $S$ の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が与えられたとき、これの任意の空でない有限集合である部分集合に属する集合同士の共通部分が空でないとき、即ち、$\forall\mathfrak{X}'\in\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ に対し、$0<\#\mathfrak{X}'<\aleph_0$ が成り立つなら、$\bigcap\mathfrak{X}'\neq\emptyset$ が成り立つとき、その集合 $\mathfrak{X}$ は有限交叉性を持つという。

**定理** (定理 1.6.1 の再掲)**.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ について、次のことは同値である。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である。
- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくとき、その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{A}$ かつ有限交叉性を持つなら、$\bigcap\mathfrak{X}\neq\emptyset$ が成り立つ。
- その台集合 $S$ の任意の部分集合系 $\mathfrak{X}$ が有限交叉性を持つなら、$\bigcap_{X\in\mathfrak{X}}\mathrm{cl}X\neq\emptyset$ が成り立つ。

さて本題に戻って、次の定理が掲げられよう。

**定理 1.9.12.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、次のことは同値である。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である。
- その集合 $S$ の任意の有向点族は堆積点をもつ。
- その集合 $S$ の任意の有向点族に対し、ある部分有向点族が存在して、これが収束する。

- その集合 $S$ の任意の普遍有向点族は収束する。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるなら、その集合 $S$ の任意の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ に対し、次式のように集合 $F_\alpha$ が定義されよう。

$$F_\alpha = \{a_\beta \in S|\alpha P\beta\}$$

$\bigcap_{\alpha\in A} \mathrm{cl}F_\alpha = \emptyset$ が成り立つなら、定理 1.6.1 よりその部分集合系 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が有限交叉性をもたない、即ち、$\exists\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda_n} \in \mathfrak{P}(A)$ に対し、$\bigcap_{i\in\Lambda_n} F_{\alpha_i} = \emptyset$ が成り立つ。ここで、有向集合の定義より $\exists\alpha_0 \in A\forall i \in \Lambda_n$ に対し、$\alpha_i P\alpha_0$ が成り立つので、$\forall i \in \Lambda_n$ に対し、$a_{\alpha_0} \in F_{\alpha_i}$ が成り立ち、したがって、$a_{\alpha_0} \in \bigcap_{i\in\Lambda_n} F_{\alpha_i}$ が成り立つことになるが、これは $\bigcap_{i\in\Lambda_n} F_{\alpha_i} = \emptyset$ が成り立つことに矛盾する。したがって、$\bigcap_{\alpha\in A} \mathrm{cl}F_\alpha \neq \emptyset$ が成り立つ。そこで、その集合 $\bigcap_{\alpha\in A} \mathrm{cl}F_\alpha$ の元 $a$ がとられれば、定理 1.9.7 より $\forall\alpha \in A\forall V \in \mathbf{V}(a)$ に対し、$F_\alpha \cap V \neq \emptyset$ が成り立つ。したがって、$\forall V \in \mathbf{V}(a)\forall\alpha \in A\exists\beta \in A$ に対し、$\alpha P\beta$ かつ $a_\beta \in F_\alpha \cap V \subseteq V$ が成り立つので、その集合 $S$ の任意の有向点族は堆積点をもつ。

逆に、その集合 $S$ の任意の有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ は堆積点をもつとする。その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間でないと仮定しよう。このとき、その集合 $S$ のある開被覆 $\mathfrak{U}$ が存在して、有限集合であるようなこれの任意の部分集合がその集合 $S$ の開被覆でありえない。そこで、その集合 $\mathfrak{U}$ の有限集合であるような部分集合全体の集合が $\mathcal{F}$ とおかれれば、その組 $(\mathcal{F},\subseteq)$ は有向集合となる。実際、その関係 $\subseteq$ は順序関係であり、$\forall\mathfrak{U}',\mathfrak{V}' \in \mathcal{F}$ に対し、$\mathfrak{U}' \cup \mathfrak{V}' \subseteq \mathfrak{U}$ が成り立つかつ、その和集合 $\mathfrak{U}' \cup \mathfrak{V}'$ も有限集合であるので、$\mathfrak{U}' \cup \mathfrak{V}' \in \mathcal{F}$ が成り立つ。このとき、$\forall\mathfrak{U}' \in \mathcal{F}$ に対し、その集合 $\mathfrak{U}'$ がその集合 $S$ の開被覆でなりえないのであったので、$\bigcup\mathfrak{U}' \subset S$ が成り立つ、即ち、その差集合 $S \setminus \bigcup\mathfrak{U}'$ が空集合でないので、次のような写像 $(a_{\mathfrak{U}'})_{\mathfrak{U}'\in\mathcal{F}}$ は有向点族となる。

$$(a_{\mathfrak{U}'})_{\mathfrak{U}'\in\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to S; \mathfrak{U}' \mapsto a_{\mathfrak{U}'} \in S \setminus \bigcup\mathfrak{U}'$$

このとき、仮定よりその有向点族 $(a_{\mathfrak{U}'})_{\mathfrak{U}'\in\mathcal{F}}$ は堆積点 $a$ をもつ、即ち、$\forall V \in \mathbf{V}(a)\forall\mathfrak{U}' \in \mathcal{F}\exists\mathfrak{U}_0 \in \mathcal{F}$ に対し、$\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U}_0$ かつ $a_{\mathfrak{U}_0} \in V$ が成り立つ。ここで、$a \in S = \bigcup\mathfrak{U}$ より $\exists V_a \in \mathfrak{U}$ に対し、$a \in V_a = \mathrm{int}V_a$ が成り立つので、$V_a \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。したがって、$\exists\mathfrak{U}_0 \in \mathcal{F}$ に対し、$\{V_a\} \subseteq \mathfrak{U}_0$ かつ $a_{\mathfrak{U}_0} \in V_a$ が成り立つことになり、$V_a \subseteq \bigcup\mathfrak{U}_0$ より $a_{\mathfrak{U}_0} \in \bigcup\mathfrak{U}_0$ が得られるが、その有向点族 $(a_{\mathfrak{U}'})_{\mathfrak{U}'\in\mathcal{F}}$ の定義より $a_{\mathfrak{U}_0} \in S \setminus \bigcup\mathfrak{U}_0$ が成り立つことに矛盾する。よって、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である。

その集合 $S$ の任意の有向点族が堆積点をもつなら、その集合 $S$ の任意の普遍有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ も堆積点 $a$ をもつ、即ち、$\forall V \in \mathbf{V}(a)\forall\alpha \in A\exists\alpha_0 \in A$ に対し、$\alpha P\alpha_0$ かつ $a_\alpha \in V$ が成り立つ。そこで、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ がその集合 $V$ にほとんど属する、または、その集合 $S \setminus V$ にほとんど属することになり、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ がその集合 $S \setminus V$ にほとんど属すると仮定すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\exists\alpha \in A\forall\alpha_0 \in A\,[\alpha P\alpha_0 \Rightarrow a_{\alpha_0} \in S \setminus V] &\Leftrightarrow \exists\alpha \in A\forall\alpha_0 \in A\,[\neg\alpha P\alpha_0 \vee \neg a_\alpha \in V] \\
&\Leftrightarrow \exists\alpha \in A\forall\alpha_0 \in A\,[\neg(\alpha P\alpha_0 \wedge a_\alpha \in V)] \\
&\Leftrightarrow \neg\forall\alpha \in A\exists\alpha_0 \in A\,[\alpha P\alpha_0 \wedge a_\alpha \in V]
\end{aligned}$$

これは、$\forall\alpha \in A\exists\alpha_0 \in A$ に対し、$\alpha P\alpha_0$ かつ $a_\alpha \in V$ が成り立つことに矛盾しているので、その有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ はその集合 $V$ にほとんど属する。よって、その普遍有向点族 $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ はその元 $a$ に収束する。

その集合 $S$ の任意の普遍有向点族が収束するなら、定理 1.9.3 よりその集合 $S$ の任意の有向点族に対し、ある普遍部分有向点族が存在することになるので、その部分有向点族は収束する。

その集合 $S$ の任意の有向点族に対し、ある部分有向点族が存在して、これが収束するなら、定理 1.9.5 よりその集合 $S$ の任意の有向点族は堆積点をもつ。

以上の議論により、次のことは同値であることが示された。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である。
- その集合 $S$ の任意の有向点族は堆積点をもつ。
- その集合 $S$ の任意の有向点族に対し、ある部分有向点族が存在して、これが収束する。
- その集合 $S$ の任意の普遍有向点族は収束する。

□

**定理 1.9.13.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた集合の族 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとき、その集合 $\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda$ の任意の有向点族 $\left((a_{\lambda,\alpha})_{\lambda\in\varLambda}\right)_{\alpha\in A}$ に対し、これが普遍有向点族であるなら、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、その有向点族 $(a_{\lambda,\alpha})_{\alpha\in A}$ が普遍有向点族である。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた集合の族 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ が与えられたとき、その集合 $\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda$ の任意の有向点族 $\left((a_{\lambda,\alpha})_{\lambda\in\varLambda}\right)_{\alpha\in A}$ に対し、これが普遍有向点族であるとする。$\forall\lambda \in \varLambda\forall M_\lambda \in \mathfrak{P}(S_\lambda)$ に対し、$\prod_{\lambda'\in\varLambda\setminus\{\lambda\}} S_{\lambda'} \times M_\lambda \subseteq \prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda$ が成り立つので、次のようになることに注意すれば、

$$\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda \setminus \left(\prod_{\lambda'\in\varLambda\setminus\{\lambda\}} S_{\lambda'} \times M_\lambda\right) = \prod_{\lambda'\in\varLambda\setminus\{\lambda\}} S_{\lambda'} \times (S_\lambda \setminus M_\lambda)$$

仮定よりその有向点族 $\left((a_{\lambda,\alpha})_{\lambda\in\varLambda}\right)_{\alpha\in A}$ がその集合 $\prod_{\lambda'\in\varLambda\setminus\{\lambda\}} S_{\lambda'} \times M_\lambda$ にほとんど属する、または、その集合 $\prod_{\lambda'\in\varLambda\setminus\{\lambda\}} S_{\lambda'} \times (S_\lambda \setminus M_\lambda)$ にほとんど属する、即ち、$\exists\alpha_0 \in A\forall\alpha \in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$(a_{\lambda,\alpha})_{\lambda\in\varLambda} \in \prod_{\lambda'\in\varLambda\setminus\{\lambda\}} S_{\lambda'} \times M_\lambda$ が成り立つ、または、$\exists\alpha_0 \in A\forall\alpha \in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$(a_{\lambda,\alpha})_{\lambda\in\varLambda} \in \prod_{\lambda'\in\varLambda\setminus\{\lambda\}} S_{\lambda'} \times (S_\lambda \setminus M_\lambda)$ が成り立つ。したがって、$\exists\alpha_0 \in A\forall\alpha \in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$a_{\lambda,\alpha} \in M_\lambda$ が成り立つ、または、$\exists\alpha_0 \in A\forall\alpha \in A$ に対し、$\alpha_0 P\alpha$ が成り立つなら、$a_{\lambda,\alpha} \in S_\lambda \setminus M_\lambda$ が成り立つ、即ち、その有向点族 $(a_{\lambda,\alpha})_{\alpha\in A}$ がその集合 $M_\lambda$ にほとんど属する、または、その集合 $S_\lambda \setminus M_\lambda$ にほとんど属する。よって、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、その有向点族 $(a_{\lambda,\alpha})_{\alpha\in A}$ が普遍有向点族である。 □

**定理 1.9.14** (Tikhonov の定理)**.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\{(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{\lambda\in\varLambda} S_\lambda,\mathfrak{O}\right)$ が compact 空間であるならそのときに限り、$\forall\lambda \in \varLambda$ に対し、それらの位相空間たち $(S_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$ が compact 空間である。

この定理を Tikhonov の定理という。

この定理はすでに定理 1.6.7 として示されているが別の証明も与えておこう。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた位相空間の族 $\left\{ \left( S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda} \right) \right\}_{\lambda\in\varLambda}$ の直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda\in\varLambda} S_{\lambda},\mathfrak{O} \right)$ が compact 空間であるなら、$\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、射影たち $\mathrm{pr}_{\lambda}:\prod_{\lambda\in\varLambda} S_{\lambda}\rightarrow S_{\lambda}$ は定義より明らかに連続写像で、このとき、定理 1.6.5 よりその位相空間 $\left( S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda} \right)$ の部分位相空間 $\left( V\left( \mathrm{pr}_{\lambda} \right),\mathfrak{O}_{V\left( \mathrm{pr}_{\lambda} \right)} \right)$ は compact 空間となるのであった。このとき、それらの射影たち $\mathrm{pr}_{\lambda}$ の定義より明らかに $V\left( \mathrm{pr}_{\lambda} \right) = S_{\lambda}$ が成り立ち、さらに、その直積位相 $\mathfrak{O}$ はその直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda\in\varLambda} S_{\lambda},\mathfrak{O}_{0} \right)$ の初等開集合全体の集合が 1 つの開基となるので、これの和集合に制限されたそれらの射影たち $\mathrm{pr}_{\lambda}$ の値域がそれらの位相空間たち $\left( S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda} \right)$ の開集合 $O_{\lambda}$ となることに注意すれば、やはり $\mathfrak{O}_{V\left( \mathrm{pr}_{\lambda} \right)} = \mathfrak{O}_{\lambda}$ が成り立つ。以上より、その位相空間 $\left( S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda} \right)$ は compact 空間である[*31]。

逆に、それらの位相空間たち $\left( S_{\lambda},\mathfrak{O}_{\lambda} \right)$ が compact 空間であるとき、その集合 $\prod_{\lambda\in\varLambda} S_{\lambda}$ の任意の普遍有向点族 $\left( \left( a_{\lambda,\alpha} \right)_{\lambda\in\varLambda} \right)_{\alpha\in A}$ に対し、定理 1.9.13 より $\forall\lambda\in\varLambda$ に対し、その有向点族 $\left( a_{\lambda,\alpha} \right)_{\alpha\in A}$ も普遍有向点族である。定理 1.9.12 よりその普遍有向点族 $\left( a_{\lambda,\alpha} \right)_{\alpha\in A}$ は収束することになるので、その収束点を $a_{\lambda}$ とおくと、定理 1.9.11 よりその普遍有向点族 $\left( \left( a_{\lambda,\alpha} \right)_{\lambda\in\varLambda} \right)_{\alpha\in A}$ はその元 $\left( a_{\lambda} \right)_{\lambda\in\varLambda}$ に収束する。再び定理 1.9.13 よりその直積位相空間 $\left( \prod_{\lambda\in\varLambda} S_{\lambda},\mathfrak{O} \right)$ は compact 空間である。 □

### 1.9.8 有向点族と Hausdorff 空間

**定理 1.9.15.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、次のことは同値である。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が Hausdorff 空間である。
- その集合 $S$ の任意の有向点族に対し、これが収束するなら、その収束点はただ 1 つ存在する。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ において、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が Hausdorff 空間であるとする。その集合 $S$ の任意の有向点族 $\left( a_{\alpha} \right)_{\alpha\in A}$ に対し、これが収束するとき、その収束点が $a$、$b$ と与えられたとしよう。$a\neq b$ が成り立つと仮定すると、仮定より $\exists W_{a}\in\mathbf{V}(a)\exists W_{b}\in\mathbf{V}(b)$ に対し、$W_{a}\cap W_{b}=\emptyset$ が成り立つ。ここで、$\forall V_{a}\in\mathbf{V}(a)\exists\alpha_{a}\in A\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_{a}P\alpha$ が成り立つなら、$a_{\alpha}\in V_{a}$ が成り立つかつ、$\forall V_{b}\in\mathbf{V}(a)\exists\alpha_{b}\in A\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_{b}P\alpha$ が成り立つなら、$a_{\alpha}\in V_{b}$ が成り立つので、有向集合の定義より $\exists\alpha_{0}\in A$ に対し、$\alpha_{a}P\alpha_{0}$ かつ $\alpha_{b}P\alpha_{0}$ が成り立つことに注意すれば、$\forall\alpha\in A$ に対し、$\alpha_{0}P\alpha$ が成り立つなら、$a_{\alpha}\in W_{a}$ かつ $a_{\alpha}\in W_{b}$ が成り立ち、したがって、$a_{\alpha}\in W_{a}\cap W_{b}$ が成り立つことになる。しかしながら、これは $W_{a}\cap W_{b}=\emptyset$ が成り立つことに矛盾する。よって、$a=b$ が成り立つので、その収束点はただ 1 つ存在する。

逆に、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が Hausdorff 空間でないとする。このとき、$\exists a,b\in S\forall V_{a}\in\mathbf{V}(a)\forall V_{b}\in\mathbf{V}(b)$ に対し、$V_{a}\cap V_{b}\neq\emptyset$ が成り立つので、次のように集合 $B$ が定義されれば、

$$B=\left\{ V_{a}\cap V_{b}\in\mathfrak{P}(S) \middle| \left( V_{a},V_{b} \right)\in\mathbf{V}(a)\times\mathbf{V}(b) \right\}$$

その組 $(B,\supseteq)$ について、もちろん、$\forall V\in B$ に対し、$V\supseteq V$ が成り立つかつ、$\forall U,V,W\in B$ に対し、$U\supseteq V$ かつ $V\supseteq W$ が成り立つなら、$U\supseteq W$ が成り立つかつ、$\forall V,W\in B$ に対し、$V\cap W\in B$ が成り立つので、$V\supseteq V\cap W$ かつ $W\supseteq V\cap W$ が成り立つ。これにより、その組 $(B,\supseteq)$ は有向集合である。$\emptyset\notin B$ が成り立

*31 ここまでは定理 1.6.7 の証明と同様。

つことに注意すれば、次のような写像 $(a_V)_{V \in B}$ は有向点族である。

$$(a_V)_{V \in B} : B \rightarrow S; V \mapsto a_V \in V$$

このとき、$\forall V_a \in \mathbf{V}(a) \exists V_a \cap V_b \in B \forall V \in B$ に対し、$V_a \cap V_b \supseteq V$ が成り立つなら、$a_V \in V \subseteq V_a \cap V_b \subseteq V_a$ が成り立つかつ[*32]、$\forall V_b \in \mathbf{V}(b) \exists V_a \cap V_b \in B \forall V \in B$ に対し、$V_a \cap V_b \supseteq V$ が成り立つなら、$a_V \in V \subseteq V_a \cap V_b \subseteq V_b$ が成り立つので、ある有向点族 $(a_V)_{V \in B}$ が存在して、これは収束するかつ、互いに異なる 2 つの元々 $a$、$b$ いづれも収束する。よって、対偶律によりその集合 $S$ の任意の有向点族に対し、これが収束するなら、その収束点はただ 1 つ存在するなら、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が Hausdorff 空間である。 $\square$

# 参考文献


[1] Mathpedia. "ネットによる位相空間論". Mathpedia. https://math.jp/wiki/%E3%83%8D%E3%83%83%E3%83%88%E3%81%AB%E3%82%88%E3%82%8B%E4%BD%8D%E7%9B%B8%E7%A9%BA%E9%96%93%E8%AB%96 (2022-5-4 1:12 閲覧)


*32 その近傍 $V_b$ は $V_b \in \mathbf{V}(b)$ を満たすならなんでもよい。

## 1.10 第 1 可算公理における点列

### 1.10.1 第 1 可算公理の基本補題

**定義** (定義 1.2.5 の再掲). 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、たかだか可算集合である、即ち、$\#\mathbf{V}^*(a) \leq \aleph_0$ が成り立つようなその元 $a$ の基本近傍系 $\mathbf{V}^*(a)$ が存在することを第 1 可算公理という。

**定義** (定義 1.2.6 の再掲). 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の開基 $\mathfrak{B}$ がたかだか可算集合であること、即ち、$\#\mathfrak{B} \leq \aleph_0$ が成り立つことを第 2 可算公理という。

**定理** (定理 1.2.16 の再掲). 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 2 可算公理を満たすなら、第 1 可算公理も満たす。

**定理** (第 1 可算公理の基本補題 1.2.17 の再掲). 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 1 可算公理を満たすとき、$\forall a \in S$ に対し、その全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ のある元の列 $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して、次のことが成り立つ。

- $\forall V \in \mathbf{V}(a)\exists n \in \mathbb{N}$ に対し、$U_n \subseteq V$ が成り立つ。
- $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$U_{n+1} \subseteq U_n$ が成り立つ。

この定理を第 1 可算公理の基本補題という。

### 1.10.2 第 1 可算公理を満たす位相空間と点列

**定理 1.10.1.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 1 可算公理を満たすとき、その集合 $S$ の元 $a$ と点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ について、次のことは同値である。

- その元 $a$ がその点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の堆積点である。
- その点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列でその元 $a$ に収束するものが存在する。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 1 可算公理を満たすとき、その集合 $S$ の元 $a$ と点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ について、その元 $a$ がその点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の堆積点であるなら、$\forall V \in \mathbf{V}(a)\forall n \in \mathbb{N}\exists n_0 \in \mathbb{N}$ に対し、$n \leq n_0$ が成り立つかつ、$a_{n_0} \in V$ が成り立つ。そこで、定理 1.2.17、即ち、第 1 可算公理の基本補題よりその全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ のある元の列 $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して、次のことが成り立つ。

- $\forall V \in \mathbf{V}(a)\exists n \in \mathbb{N}$ に対し、$U_n \subseteq V$ が成り立つ。
- $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$U_{n+1} \subseteq U_n$ が成り立つ。

そこで、$\exists m' \in \mathbb{N}$ に対し、$1 \leq m'$ かつ $a_{m'} \in U_1$ が成り立つので、このような自然数 $m'$ を $n_1$ とおき、さらに、$\forall k \in \mathbb{N}\exists n_k \in \mathbb{N}$ に対し、$k \leq n_k$ かつ $a_{n_k} \in U_k$ が成り立つことから、$n_k < m'$ なる任意の自然数 $m'$ に対し、ある自然数 $n'$ が存在して、$m' \leq n'$ が成り立つかつ、$a_{n'} \in U_{k+1}$ が成り立つので、このような自然数 $n'$ を $n_{k+1}$ とおけば、その点列 $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ は帰納的に定義されることができてその点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列となっている。このとき、$\forall V \in \mathbf{V}(a)\exists k_0 \in \mathbb{N}\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$k_0 \leq k$ が成り立つなら、$U_{k_0} \subseteq V$ かつ $U_k \subseteq U_{k_0}$ が成り立つかつ、$a_k \in U_k$ が成り立つので、$a_k \in V$ が成り立つ。これにより、その点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ はその元 $a$ に収束する。

その点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列でその元 $a$ に収束するもの $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ が存在するなら、$\forall V \in \mathbf{V}(a)\exists k_0 \in \mathbb{N}\forall k \in$

$\mathbb{N}$ に対し、$k_0 \leq k$ が成り立つなら、$a_{n_k} \in V$ が成り立つ。これにより、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$n \leq n_{k_0}$ が成り立つとき、もちろん、$n \leq n_{k_0}$ かつ $a_{n_{k_0}} \in V$ が成り立つし、$n_{k_0} < n$ が成り立つとき、次式が成り立つので、

$$V\left(\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}|V\left(\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}^{-1}|\varLambda_n\right)\right) \subseteq \varLambda_n$$

その集合 $V\left(\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}|V\left(\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}^{-1}|\varLambda_n\right)\right)$ は有限集合である。しかも、その元 $n_{k_0}$ がこれに属するので、空集合でない。これは自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の部分集合であることから、最大値が存在するので[*33]、これを $m$ とおくと、$\exists k' \in \mathbb{N}$ に対し、$n_{k'} \leq n$ が成り立つかつ、$m = n_{k'}$ が成り立つ。そこで、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$k' < k$ が成り立つなら、$m = n_{k'} < n_k$ なので、$k \notin V\left(\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}^{-1}|\varLambda_n\right)$ が成り立つことになり、よって、$n_{k'} \leq n < n_k$ が成り立つ。このような自然数 $k$ を $k_0'$ と 1 つとれば、$n_{k_0} < n < n_{k_0'}$ が成り立つので、$k_0 < k_0'$ が得られ、したがって、$n < n_{k_0'}$ かつ $a_{n_{k_0}} \in V$ が成り立つ。以上の議論により、その元 $a$ がその点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の堆積点である。 □

**定理 1.10.2.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 1 可算公理を満たすとき、その集合 $S$ の元 $a$ と部分集合 $M$ について、次のことは同値である。

- $a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つ。
- その元 $a$ に収束するその集合 $M$ の点列が存在する。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 1 可算公理を満たすとき、その集合 $S$ の元 $a$ と部分集合 $M$ について、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つとする。定理 1.2.17、即ち、第 1 可算公理の基本補題よりその全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ のある元の列 $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して、次のことが成り立つ。

- $\forall V \in \mathbf{V}(a)\exists n \in \mathbb{N}$ に対し、$U_n \subseteq V$ が成り立つ。
- $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$U_{n+1} \subseteq U_n$ が成り立つ。

定理 1.1.26 より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$M \cap U_n \neq \emptyset$ が成り立つので、これに属する元を $a_n$ とおけば、その集合 $M$ の点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる。このとき、$\forall V \in \mathbf{V}(a)\exists n_0 \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 \leq n$ が成り立つなら、$U_n \subseteq U_{n_0} \subseteq V$ かつ $a_n \in U_n$ が成り立つので、$a_n \in V$ が得られ、よって、その集合 $M$ の点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在してその元 $a$ に収束する。

逆に、その元 $a$ に収束するその集合 $M$ の点列が存在するなら、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つことは定理 1.9.7 そのものである。 □

**定理 1.10.3.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ とこれらの間の写像 $f : S \to T$ が与えられ、さらに、位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 1 可算公理を満たすとき、その集合 $S$ の元 $a$ と部分集合 $M$ について、次のことは同値である。

- その写像 $f$ はその元 $a$ で連続である。
- その集合 $S$ の任意の点列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がその元 $a$ に収束するなら、その集合 $T$ の点列 $\left(f\left(a_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ もその元 $f(a)$ に収束する。

**証明.** 2 つの位相空間たち $(S,\mathfrak{O})$、$(T,\mathfrak{P})$ とこれらの間の写像 $f : S \to T$ が与えられ、さらに、位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 1 可算公理を満たすとき、その集合 $S$ の元 $a$ と部分集合 $M$ について、その写像 $f$ はその元 $a$ で連

[*33] これは数学的帰納法によって示すと分かりやすいかもしれない。

続であるなら、その集合 $S$ の任意の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその元 $a$ に収束するなら、その集合 $T$ の点列 $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ もその元 $f(a)$ に収束することは定理 1.9.9 そのものである。

逆に、その写像 $f$ がその元 $a$ で連続でないなら、それらの元々 $a$、$f(a)$ の全近傍系をそれぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathbf{W}(f(a))$ として、定理 1.3.1 より $\exists V\in\mathbf{W}(f(a))$ に対し、$V\left(f^{-1}|V\right)\in\mathbf{V}(a)$ が成り立たない。ここで、定理 1.1.22 より $\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、$a\in O$ が成り立つなら、$O\setminus V\left(f^{-1}|V\right)\neq\emptyset$ が成り立つ。定理 1.2.17、即ち、第 1 可算公理の基本補題よりその全近傍系 $\mathbf{V}(a)$ のある元の列 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して、次のことが成り立ち、

- $\forall V\in\mathbf{V}(a)\exists n\in\mathbb{N}$ に対し、$U_n\subseteq V$ が成り立つ。
- $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$U_{n+1}\subseteq U_n$ が成り立つ。

したがって、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$\mathrm{int}U_n\in\mathfrak{O}$ かつ $a\in\mathrm{int}U_n$ より $\emptyset\neq\mathrm{int}U_n\setminus V\left(f^{-1}|V\right)$ が成り立ち $\mathrm{int}U_n\setminus V\left(f^{-1}|V\right)\subseteq U_n\setminus V\left(f^{-1}|V\right)$ が成り立つので、$U_n\setminus V\left(f^{-1}|V\right)\neq\emptyset$ が成り立つことになり $a_n\in U_n\setminus V\left(f^{-1}|V\right)$ なる元 $a_n$ がとられることができその集合 $S$ の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる。このとき、$\forall W\in\mathbf{V}(a)\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0\leq n$ が成り立つなら、$U_n\subseteq U_{n_0}\subseteq W$ が成り立つので、$a_n\in W$ が成り立つ。これはまさしくその点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がほとんどその近傍 $U$ に属することになる、即ち、その点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその元 $a$ に収束する。一方で、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$a_n\in U_n\setminus V\left(f^{-1}|V\right)$ より $a_n\notin V\left(f^{-1}|V\right)$ が成り立つので、$f(a_n)\notin V$ が成り立つ、即ち、$\exists V\in\mathbf{W}(f(a))\forall n\in\mathbb{N}\exists n\in\mathbb{N}$ に対し、$n\leq n$ が成り立つかつ、$f(a_n)\notin V$ が成り立つので、その点列 $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ がその元 $f(a)$ に収束しない。対偶律によりその集合 $S$ の任意の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその元 $a$ に収束するなら、その集合 $T$ の点列 $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ もその元 $f(a)$ に収束するなら、その写像 $f:S\to T$ が連続である。 □

### 1.10.3 第 1 可算公理を満たす compact 空間と点列

**定義 1.10.1.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、その台集合 $S$ の任意の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、ある部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、その部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ を点列 compact 空間という。

**定理 1.10.4.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 1 可算公理を満たすとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるなら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ も点列 compact 空間である。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 1 可算公理を満たすとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるなら、その集合 $S$ の任意の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、定理 1.9.11 よりその点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は堆積点をもつので、これを $a$ とおくと、定理 1.10.1 よりその点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列でその元 $a$ に収束するものが存在する。よって、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ も点列 compact 空間である。 □

**定理 1.10.5.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が Lindelöf の性質をもっているとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が点列 compact 空間であるなら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間でもある。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が Lindelöf の性質をもっているとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が点列 compact 空間であるかつ、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間でないと仮定しよう。その集合 $S$ のある開被覆 $\mathfrak{U}$ が存在して、これの有限な部分集合をどのようにとってもその集合 $S$ の開被覆でありえない。しかしながら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は Lindelöf の性質をもっているので、その台集合 $S$ の開被覆 $\mathfrak{U}'$ が存在して、その開被覆 $\mathfrak{U}$ の部分集合でたかだか可算である。これ $\mathfrak{U}'$ が $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とおかれれば、その集合 $S$ の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $a_n\in S\setminus\bigcup_{k\in\Lambda_n}U_k$

が成り立つようにすると、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は点列 compact 空間なので、その点列 $\left( a_{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $\left( a_{n_{k}} \right)_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、これが収束する。したがって、定理 1.10.1 よりその収束点を $a$ とおけば、これはその点列 $\left( a_{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ の堆積点である。したがって、$a \in U_{n_{0}}$ なる開集合 $U_{n_{0}}$ がとられれば、$U_{n_{0}} \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つので、$\exists n_{0}' \in \mathbb{N}$ に対し、$n_{0} \leq n_{0}'$ が成り立つかつ、$a_{n_{0}'} \in U_{n_{0}}$ が成り立つ。したがって、$a_{n_{0}'} \in U_{n_{0}} \subseteq \bigcup U_{k\in\varLambda_{n_{0}'}}$ が成り立つことになるが、これはその点列 $\left( a_{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ のおき方で $a_{n} \in S \setminus \bigcup_{k\in\varLambda_{n}} U_{k}$ が成り立つことに矛盾する。ゆえに、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間でもある。 □

**定理 1.10.6.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 2 可算公理を満たすとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が点列 compact 空間であるならそのときに限り、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 2 可算公理を満たすとき、定理 1.6.16 よりその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は Lindelöf の性質をもっているので、定理 1.10.5 よりその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が点列 compact 空間であるなら、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ も compact 空間である。逆に、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるなら、定理 1.2.16 より位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は第 1 可算公理も満たすので、定理 1.10.4 よりその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ も点列 compact 空間である。 □

**定理 1.10.7.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が Lindelöf の性質をもっており第 1 可算公理を満たすとき、次のことは同値である。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である。
- その集合 $S$ の任意の点列は堆積点をもつ。
- その集合 $S$ の任意の点列に対し、ある部分列が存在して、これが収束する。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が Lindelöf の性質をもっており第 1 可算公理を満たすとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が compact 空間であるなら、その集合 $S$ の任意の点列 $\left( a_{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、定理 1.9.11 よりその点列 $\left( a_{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ は堆積点をもつ。また、これが成り立つなら、定理 1.10.1 よりその集合 $S$ の任意の点列に対し、ある部分列が存在して、これが収束する。これが成り立つなら、定義より明らかにその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は点列 compact 空間であり、さらに、定理 1.10.5 よりその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間でもある。 □

**定理 1.10.8.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 2 可算公理を満たすとき、次のことは同値である。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である。
- その集合 $S$ の任意の点列は堆積点をもつ。
- その集合 $S$ の任意の点列に対し、ある部分列が存在して、これが収束する。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が第 2 可算公理を満たすとき、これは Lindelöf の性質をもっているかつ、第 1 可算公理を満たすことになるので、定理 1.10.7 より次のことは同値である。

- その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は compact 空間である。
- その集合 $S$ の任意の点列は堆積点をもつ。
- その集合 $S$ の任意の点列に対し、ある部分列が存在して、これが収束する。

□

# 参考文献


[1] Mathpedia. "ネットによる位相空間論". Mathpedia. https://math.jp/wiki/%E3%83%8D%E3%83%83%E3%83%88%E3%81%AB%E3%82%88%E3%82%8B%E4%BD%8D%E7%9B%B8%E7%A9%BA%E9%96%93%E8%AB%96 (2022-5-4 1:12 閲覧)

# 第 2 部　距離空間論

ここから、距離空間論について、議論していこう。ただし、実数をふんだんに用いた特殊な条件下では解析学にまわすことにする。位相空間論に関する知識を仮定してある。

## 2.1　距離空間

### 2.1.1　距離空間

**定義 2.1.1.** 空集合でない集合 $S$ と写像 $d:S\times S\rightarrow\mathbb{R}$ が与えられたとき、次のことが成り立つとき、この組 $(S,d)$ を距離空間といい、その集合 $S$ を台集合、その写像 $d$ を距離関数という。さらに、$a,b\in S$ なる元々 $a$、$b$ の組 $(a,b)$ のその距離関数 $d$ による像 $d(a,b)$ をその元々 $a$、$b$ の距離という。

- $\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)\geq 0$ が成り立つ。
- $\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)=0$ が成り立つならそのときに限り、$a=b$ が成り立つ。
- $\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)=d(b,a)$ が成り立つ。
- $\forall a,b,c\in S$ に対し、$d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$ が成り立つ。この不等式を三角不等式という。

例えば、絶対値を用いた写像 $d_E$ を用いた組 $(\mathbb{R},d_E)$ が挙げられる。これは先ほどの定理 1.7.18 によって保証されて定義 1.7.9 として定義された 1 次元 Euclid 空間における位相空間と関係深い。これは解析学から生じた概念で位相空間の源流となっていると考えてもよい。詳しくは後述する。

**定理 2.1.1.** 空集合でない集合 $S$ と写像 $d:S\times S\rightarrow\mathbb{R}$ が与えられたとき、次のことは同値である[*34]。

- 次のことが成り立つ。
  - $\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)\geq 0$ が成り立つ。
  - $\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)=0$ が成り立つならそのときに限り、$a=b$ が成り立つ。
  - $\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)=d(b,a)$ が成り立つ。
  - $\forall a,b,c\in S$ に対し、$d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$ が成り立つ。
- 次のことが成り立つ。
  - $\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)=0$ が成り立つならそのときに限り、$a=b$ が成り立つ。
  - $\forall a,b,c\in S$ に対し、$d(b,c)\leq d(a,b)+d(a,c)$ が成り立つ。

**証明.** 空集合でない集合 $S$ と写像 $d:S\times S\rightarrow\mathbb{R}$ が与えられたとき、次のことが成り立つなら、

- $\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)\geq 0$ が成り立つ。

---

[*34] したがって、距離空間は次のように定義してもよい。
空集合でない集合 $S$ と写像 $d:S\times S\rightarrow\mathbb{R}$ が与えられたとき、次のことが成り立つとき、この組 $(S,d)$ を距離空間といい、その集合 $S$ を台集合、その写像 $d$ を距離関数という。
- $\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)=0$ が成り立つならそのときに限り、$a=b$ が成り立つ。
- $\forall a,b,c\in S$ に対し、$d(b,c)\leq d(a,b)+d(a,c)$ が成り立つ。

- $\forall a,b \in S$ に対し、$d(a,b)=0$ が成り立つならそのときに限り、$a=b$ が成り立つ。
- $\forall a,b \in S$ に対し、$d(a,b)=d(b,a)$ が成り立つ。
- $\forall a,b,c \in S$ に対し、$d(a,c) \leq d(a,b)+d(b,c)$ が成り立つ。

明らかに次のことが成り立つ。

- $\forall a,b \in S$ に対し、$d(a,b)=0$ が成り立つならそのときに限り、$a=b$ が成り立つ。
- $\forall a,b,c \in S$ に対し、$d(b,c) \leq d(a,b)+d(a,c)$ が成り立つ。

逆に、上のことが満たされれば、その 4 つの条件たちがたしかめられればいいが、実際は次のことをみればよく、

- $\forall a,b \in S$ に対し、$d(a,b) \geq 0$ が成り立つ。
- $\forall a,b \in S$ に対し、$d(a,b)=d(b,a)$ が成り立つ。

$\forall a,b \in S$ に対し、次のようになるかつ、

$$0=\frac{1}{2}d(b,b) \leq \frac{1}{2}\left\{d(a,b)+d(a,b)\right\}=d(a,b)$$

$\forall a,b \in S$ に対し、次のようになることから従う。

$$d(a,b) \leq d(b,a)+d(b,b)=d(b,a) \leq d(a,b)+d(a,a)=d(a,b)$$

□

### 2.1.2 距離空間における位相空間

**定義 2.1.2.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式のように定義される集合 $B(a,\varepsilon)$ をその元 $a$ を中心とする半径 $\varepsilon$ の球体という[*35]。

$$B(a,\varepsilon)=\{b \in S | d(a,b)<\varepsilon\}$$

**定理 2.1.2.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その台集合 $S$ の部分集合 $O$ において、$\forall a \in O \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$B(a,\varepsilon) \subseteq O$ が成り立つようなその集合 $O$ と空集合全体の集合が $\mathfrak{O}_d$ とおかれると、組 $(S,\mathfrak{O}_d)$ は位相空間をなす。

**定義 2.1.3.** この集合 $\mathfrak{O}_d$ をその距離空間 $(S,d)$ における位相、これの元をその距離空間 $\mathfrak{O}_d$ における開集合、その位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ をその距離空間 $(S,d)$ における位相空間という。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その台集合 $S$ の部分集合 $O$ において、$\forall a \in O \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$B(a,\varepsilon) \subseteq O$ が成り立つようなその集合 $O$ と空集合全体の集合が $\mathfrak{O}_d$ とおかれると、$\forall a,b \in S$ に対し、$d(a,b)<\varepsilon$ となる正の実数 $\varepsilon$ が存在するので、$S,\emptyset \in \mathfrak{O}_d$ が成り立つ。

ここで、$\forall O,P \in \mathfrak{O}_d$ に対し、積集合 $O \cap P$ が空集合であれば、$O \cap P \in \mathfrak{O}_d$ が成り立つし、空集合でなければ、これの任意の元 $a$ に対し、ある正の実数たち $\delta$、$\varepsilon$ が存在して、$B(a,\delta) \subseteq O$ かつ $B(a,\varepsilon) \subseteq P$ が成り立つことになる。ここで、$\varepsilon'=\min\{\delta,\varepsilon\}$ とおかれれば、$B(a,\varepsilon) \subseteq O$ かつ $B(a,\varepsilon) \subseteq P$ が成り立つので、$B(a,\varepsilon) \subseteq O \cap P$ が成り立ち、したがって、$O \cap P \in \mathfrak{O}_d$ が成り立つ。

*35 定義 1.7.8 と比較するとよいかもしれない。

さらに、添数集合 $\Lambda$ によって添数づけられたその集合 $\mathfrak{O}_d$ の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき、$\forall a \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ に対し、$a \in O_\lambda$ なる開集合 $O_\lambda$ とある正の実数 $\varepsilon$ が存在して $B(a,\varepsilon) \subseteq O_\lambda$ が成り立つことになる。ここで、$O_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ が成り立つので、$B(a,\varepsilon) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ が成り立ち、したがって、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}_d$ が成り立つ。

以上より、その組 $(S,\mathfrak{O}_d)$ は位相空間をなす。 □

**定理 2.1.3.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ を中心とする半径 $\varepsilon$ の球体 $B(a,\varepsilon)$ はその距離空間 $(S,d)$ における開集合である。

これにより、球体を開球、開球体ともいう。

**証明.** 定義より明らかである。 □

**定理 2.1.4.** 距離空間 $(S,d)$ の開基として、開球体全体の集合 $\mathfrak{U}$ が挙げられる。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、これにおける開集合 $O$ の任意の元 $a$ に対し、ある正の実数 $\varepsilon_a$ が存在して $B(a,\varepsilon_a) \subseteq O$ が成り立つので、$\bigcup_{a\in O} B(a,\varepsilon_a) \subseteq O$ が成り立つ。また、上記より $O \subseteq \bigcup_{a\in O} B(a,\varepsilon_a)$ が成り立つので、$O = \bigcup_{a\in O} B(a,\varepsilon_a)$ が成り立つ。これにより、開球体全体の集合 $\mathfrak{U}$ は開基をなす。 □

**定理 2.1.5.** 距離空間 $(S,d)$ の開基として、半径が有理数の開球体全体の集合 $\mathfrak{U}'$ が挙げられる。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、これにおける開集合 $O$ の任意の元 $a$ に対し、ある正の実数 $\varepsilon_a$ が存在して $B(a,\varepsilon_a) \subseteq O$ が成り立つ。ここで、$0 < r_a < \varepsilon_a$ が成り立つような有理数 $r_a$ が存在するので、$B(a,r_a) \subseteq B(a,\varepsilon_a) \subseteq O$ が成り立つ。また、上記より $O \subseteq \bigcup_{a\in O} B(a,r_a)$ が成り立つので、$O = \bigcup_{a\in O} B(a,r_a)$ が成り立つ。これにより、半径が有理数の開球体全体の集合 $\mathfrak{U}'$ は開基をなす。 □

**定理 2.1.6.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の基本近傍系として、その元 $a$ を中心とする開球体全体の集合 $\mathfrak{U}_a$ が挙げられる。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、$a \in O$ なる開集合 $O$ が存在するので、このような任意の開集合たち $O$ に対し、定理 2.1.4 よりその距離空間 $(S,d)$ の開基として、開球体全体の集合 $\mathfrak{U}$ が挙げられるので、その元 $a$ を中心とする開球体全体の集合 $\mathfrak{U}_a$ のある元 $B(a,\varepsilon)$ が存在して、$B(a,\varepsilon) \subseteq O$ が成り立つかつ、$a \in B(a,\varepsilon) = \mathrm{int}B(a,\varepsilon)$ が成り立つので、その集合 $\mathfrak{U}_a$ がその元 $a$ の基本近傍系をなす。 □

**定理 2.1.7.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の基本近傍系として、その元 $a$ を中心とする半径が有理数の開球体全体の集合 $\mathfrak{U}_a'$ が挙げられる。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、定理 2.1.6 より $\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の基本近傍系として、その元 $a$ を中心とする開球体全体の集合 $\mathfrak{U}_a$ が挙げられる。ここで、このような元 $B(a,\varepsilon)$ がとられると、$0 < r < \varepsilon$ なる有理数 $r$ が存在するので、$B(a,r) \subseteq B(a,\varepsilon) \subseteq O$ が成り立つかつ、$a \in B(a,r) = \mathrm{int}B(a,r) \subseteq B(a,\varepsilon)$ が成り立ち、したがって、その元 $a$ を中心とする半径が有理数の開球体全体の集合 $\mathfrak{U}_a'$ がその元 $a$ の基本近傍系をなす。 □

**定理 2.1.8.** 距離空間 $(S,d)$ は第 1 可算公理を満たす。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、定理 2.1.7 のような基本近傍系 $\mathfrak{U}_a'$ がとられれば、次のようになることから、

$$\#\mathfrak{U}_a' \leq \#\mathbb{Q} = \aleph_0$$

任意の距離空間 $(S,d)$ は第 1 可算公理を満たす。 □

**定理 2.1.9.** 距離空間 $(S,d)$ が可分であるならそのときに限り、その距離空間 $(S,d)$ は第 2 可算公理を満たす。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、距離空間 $(S,d)$ が可分であるなら、定義よりあるその集合 $S$ のその集合 $S$ 自身でないたかだか可算な部分集合 $M$ が存在して、$\mathrm{cl}M = S$ が成り立つ。$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ を中心とする半径が有理数の開球体全体の集合 $\mathfrak{U}_a'$ を用いた和集合 $\bigcup_{a \in M} \mathfrak{U}_a'$ について、次のようになることから、

$$\begin{aligned}\#\bigcup_{a \in M} \mathfrak{U}_a' &= \#\bigsqcup_{a \in M} \mathfrak{U}_a' \\ &= \sum_{a \in M} \#\mathfrak{U}_a' \\ &\leq \sum_{a \in M} \#\mathbb{Q} = \aleph_0\end{aligned}$$

その和集合 $\bigcup_{a \in M} \mathfrak{U}_a'$ はたかだか可算である。任意の空集合でない開集合 $O$、任意のこれの元 $a$ に対し、$B(a,\varepsilon) \subseteq O$ なる開球体 $B(a,\varepsilon)$ が存在し、さらに、$\mathrm{cl}M = S$ が成り立つので、$B\left(a, \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq S \setminus M$ とすれば、$B\left(a, \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq \mathrm{int}(S \setminus M) = S \setminus \mathrm{cl}M = \emptyset$ となり矛盾している。したがって、$B\left(a, \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq S \setminus M$ が成り立たない、即ち、$B\left(a, \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。このとき、$a' \in B\left(a, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ なるその集合 $M$ の元 $a'$ が存在して、$d\left(a, a'\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ。ここで、$d\left(a, a'\right) < r < \dfrac{\varepsilon}{2}$ なる有理数 $r$ がとられれば、$B\left(a', r\right) \in \bigcup_{a \in M} \mathfrak{U}_a'$ が成り立つかつ、$a \in B\left(a', r\right) \subseteq B(a,\varepsilon) \subseteq O$ が成り立つ。これにより、その和集合 $\bigcup_{a \in M} \mathfrak{U}_a'$ はその距離空間 $(S,d)$ の開基をなす。以上より、その距離空間 $(S,d)$ は第 2 可算公理を満たす。

逆は定理 1.2.18 より明らかである。 □

**定理 2.1.10.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式のように定義される集合たち $B^*(a,\varepsilon)$、$S(a,\varepsilon)$ はいづれも閉集合である。

$$\begin{aligned}B^*(a,\varepsilon) &= \{b \in S | d(a,b) \leq \varepsilon\} \\ S(a,\varepsilon) &= \{b \in S | d(a,b) = \varepsilon\}\end{aligned}$$

**定義 2.1.4.** $a \in S$、$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ なるこのような集合たち $B^*(a,\varepsilon)$、$S(a,\varepsilon)$ をそれぞれその元 $a$ を中心とする半径 $\varepsilon$ の閉球体、その元 $a$ を中心とする半径 $\varepsilon$ の球面という。

なお、必ずしも $\mathrm{cl}B(a,\varepsilon) = B^*(a,\varepsilon)$、$\partial B(a,\varepsilon) = S(a,\varepsilon)$ が成り立つとは限らない。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式のように定義される集合たち $B^*(a,\varepsilon)$、$S(a,\varepsilon)$ について、

$$B^*(a,\varepsilon) = \{b \in S | d(a,b) \leq \varepsilon\}$$

$$S(a, \varepsilon) = \{b \in S | d(a, b) = \varepsilon\}$$

$S \setminus B^*(a, \varepsilon) = \{b \in S | d(a, b) > \varepsilon\}$ が成り立ち、ここで、$\exists a^* \in S \setminus B^*(a, \varepsilon) \forall \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$S \setminus B^*(a, \varepsilon) \subset B(a^*, \delta)$ が成り立つと仮定すると、$B^*(a, \varepsilon) \cap B(a^*, \delta) \neq \emptyset$ が成り立つことになる。ここで、このような元 $b$ がとられれば、$d(a, b) \leq \varepsilon$ が成り立つかつ、$d(a^*, b) \leq \delta$ が成り立つ。このとき、次のようになり、

$$d(a, a^*) \leq d(a, b) + d(a^*, b) \leq \varepsilon + \delta$$

$0 \leq d(a, a^*)$ が成り立つので、その正の実数 $\varepsilon + \delta$ の任意性より $d(a, a^*) = 0$ が成り立ち、したがって、$a = a^*$ が成り立つ。しかしながら、このことはその元 $a$ がその集合 $B^*(a, \varepsilon)$ の元でもあるかつ、その集合 $S \setminus B^*(a, \varepsilon)$ の元でもあることになるので、矛盾している。したがって、$\forall a^* \in S \setminus B^*(a, \varepsilon) \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$B(a^*, \delta) \subseteq S \setminus B^*(a, \varepsilon)$ が成り立つことになる。ゆえに、その集合 $S \setminus B^*(a, \varepsilon)$ は開集合である、即ち、その集合 $B^*(a, \varepsilon)$ は閉集合であることが示された。

また、次のようになることから、

$$\begin{aligned} S \setminus S(a, \varepsilon) &= \{b \in S | d(a, b) \neq \varepsilon\} \\ &= \{b \in S | d(a, b) < \varepsilon < d(a, b)\} \\ &= \{b \in S | d(a, b) < \varepsilon\} \cap \{b \in S | \varepsilon < d(a, b)\} \\ &= B(a, \varepsilon) \cap S \setminus B^*(a, \varepsilon) \end{aligned}$$

それらの集合たち $B(a, \varepsilon)$、$S \setminus B^*(a, \varepsilon)$ はいづれも開集合であるから、その集合 $S \setminus S(a, \varepsilon)$ も開集合となる。したがって、その集合 $S(a, \varepsilon)$ は閉集合である。 □

### 2.1.3 距離空間における極限

**定義 2.1.5.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ について、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 < n$ が成り立つなら、$d(a_n, a) < \varepsilon$ が成り立つとき、その元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ はその集合 $S$ の元 $a$ に収束するといい、このことを $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ と書く。また、その元 $a$ をその元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限、極限点などという[*36]。

**定理 2.1.11.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限 $a$ が存在すれば、これは一意的である。

**証明.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の 2 つの極限たち $a$、$a'$ が存在すれば、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 < n$ が成り立つなら、$d(a_n, a) < \varepsilon$ が成り立つかつ、$d(a_n, a') < \varepsilon$ が成り立つ。ここで、三角不等式より $d(a, a') \leq d(a_n, a) + d(a_n, a') < 2\varepsilon$ が成り立つので、$d(a, a') = 0$ が成り立ち、したがって、$a = a'$ が成り立つ。よって、その集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限 $a$ が存在すれば、これは一意的である。 □

**定理 2.1.12.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限 $a$ が存在すれば、$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ が成り立つならそのときに限り、$\lim_{n \to \infty} d(a_n, a) = 0$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限 $a$ が存在すれば、定義より $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ が成り立つならそのときに限り、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 < n$ が成り立つなら、

[*36] この定義は定義 1.9.10 と矛盾していないことが後に示される。

$d(a_n,a)<\varepsilon$ が成り立つ。ここで、$d(a_n,a)=|d(a_n,a)-0|<\varepsilon$ が成り立つので、これが成り立つならそのときに限り、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$\delta<n$ が成り立つなら、$|d(a_n,a)-0|<\varepsilon$ が成り立つ。これはまさしく $\varepsilon$-$\delta$ 論法そのものなので[*37]、$\lim_{n\to\infty}a_n=a$ が成り立つならそのときに限り、$\lim_{n\to\infty}d(a_n,a)=0$ が成り立つ。 □

**定理 2.1.13.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a\in S\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、次のことが成り立つ。

- その元 $a$ がその部分集合 $M$ の触点である、即ち、$a\in\mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り、その元 $a$ がその集合 $M$ のある元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在してこれの極限となる[*38]。
- その元 $a$ がその部分集合 $M$ の内点である、即ち、$a\in\mathrm{int}M$ が成り立つならそのときに限り、その元 $a$ が極限であるようなその集合 $S$ の任意の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、ある自然数 $n_0$ が存在して、任意の自然数 $n$ に対し、$n_0<n$ が成り立つなら、$a_n\in M$ が成り立つ。
- その元 $a$ がその部分集合 $M$ の集積点であるならそのときに限り、任意の自然数 $n$ に対し、$a_n\neq a$ なるその集合 $M$ のある元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限がその元 $a$ である。
- その元 $a$ がその部分集合 $M$ の孤立点であるならそのときに限り、その元 $a$ が極限であるようなその集合 $M$ の任意の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、ある自然数 $n_0$ が存在して、任意の自然数 $n$ に対し、$n_0<n$ が成り立つなら、$a_n=a$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a\in S\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、その元 $a$ がその部分集合 $M$ の触点である、即ち、$a\in\mathrm{cl}M$ が成り立つなら、定理 1.2.17 と定理 2.1.6 より $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$B\left(a,\dfrac{1}{n}\right)\cap M\neq\emptyset$ が成り立ち、したがって、その集合 $M$ のある元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$a_n\in B\left(a,\dfrac{1}{n}\right)$ が成り立つ。このとき、$d(a_n,a)<\dfrac{1}{n}$ が成り立つので、$\lim_{n\to\infty}a_n=a\in\mathrm{cl}M$ が成り立つ。

逆に、$\forall a\in S\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、その元 $a$ がその集合 $M$ のある元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在してこれの極限となるなら、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0<n$ が成り立つなら、$d(a_n,a)<\varepsilon$ が成り立つので、$a_n\in B(a,\varepsilon)$ が成り立つ。これにより、$B(a,\varepsilon)\cap M\neq\emptyset$ が成り立つ。定理 1.2.17 と定理 2.1.6 よりよって、$a\in\mathrm{cl}M$ が成り立つ。

$\forall a\in S\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、その元 $a$ がその部分集合 $M$ の内点である、即ち、$a\in\mathrm{int}M$ が成り立つならそのときに限り、その元 $a$ は集合 $\mathrm{cl}(S\setminus M)$ の元でないことになるので、上記の議論によりその元 $a$ がその集合 $M$ の任意の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限とならない。したがって、その元 $a$ が極限であるようなその集合 $S$ の任意の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、任意の自然数 $n$ に対し、ある自然数 $n_0$ が存在して、$a_n\notin M$ が成り立つかつ、$n_0<n$ が成り立つということにならない、即ち、ある自然数 $n_0$ が存在して、任意の自然数 $n$ に対し、$n_0<n$ が成り立つなら、$a_n\in M$ が成り立つことになる。

その元 $a$ がその部分集合 $M$ の集積点であるならそのときに限り、$a\in\mathrm{cl}(M\setminus\{a\})$ が成り立ち、上記の議論により、これが成り立つならそのときに限り、その元 $a$ がその集合 $M\setminus\{a\}$ のある元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在してこれの極限となるのであった。これは任意の自然数 $n$ に対し、$a_n\neq a$ なるその集合 $M$ のある元の列

[*37] 実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ が成り立つとは、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$\delta<n$ が成り立つなら、$|a_n-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つことを指すように定義されているのであった。

[*38] この定理により、距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限全体の集合を $\mathrm{cl}M$ とおき、写像 $\mathrm{cl}:\mathfrak{P}(S)\rightarrow\mathfrak{P}(S);M\mapsto\mathrm{cl}M$ が与えられれば、その写像 $cl$ を閉包作用子とする位相が定理 1.1.14 より構成されることができるようになる。

$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限がその元 $a$ であるということを意味する。

その元 $a$ がその部分集合 $M$ の孤立点であるならそのときに限り、$a\in M$ が成り立つかつ、$a\in\mathrm{cl}\left(M\setminus\{a\}\right)$ が成り立たなく、上記の議論により、これが成り立つならそのときに限り、$a\in M$ が成り立つかつ、その元 $a$ がその集合 $M\setminus\{a\}$ の任意の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限とならないのであった。ゆえに、任意の自然数 $n$ に対し、$a_n\neq a$ が成り立つようなその元 $a$ が極限であるようなその集合 $M$ の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は存在しない、即ち、その元 $a$ が極限であるようなその集合 $M$ の任意の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、ある自然数 $n_0$ が存在して、任意の自然数 $n$ に対し、$n_0<n$ が成り立つなら、$a_n=a$ が成り立つことになる。 □

### 2.1.4 距離空間における連続写像

**定理 2.1.14.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ が与えられたとき、写像 $f:S\rightarrow T$ について、次のことは同値である[39]。

- その写像 $f$ がその集合 $S$ の元 $a$ で連続である。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall b\in S$ に対し、$d(b,a)<\delta$ が成り立つなら、$e\left(f(b),f(a)\right)<\varepsilon$ が成り立つ。
- その集合 $S$ の任意の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、$\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=a$ が成り立つなら、$\lim_{n\rightarrow\infty}f\left(a_n\right)=f(a)$ が成り立つ。

**証明.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ が与えられたとき、写像 $f:S\rightarrow T$ について、その写像 $f$ がその集合 $S$ の元 $a$ で連続であるなら、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+$ に対し、球体 $B\left(f(a),\varepsilon\right)$ は開集合なので、値域 $V\left(f^{-1}|B\left(f(a),\varepsilon\right)\right)$ も開集合であることになる。したがって、$B(a,\delta)\subseteq V\left(f^{-1}|B\left(f(a),\varepsilon\right)\right)$ が成り立つ。これにより、$\forall b\in S$ に対し、$d(b,a)<\delta$ が成り立つなら、$b\in B(a,\delta)$ が成り立ち、したがって、$b\in V\left(f^{-1}|B\left(f(a),\varepsilon\right)\right)$ が成り立つ、即ち、$f(b)\in B\left(f(a),\varepsilon\right)$ が成り立つので、$e\left(f(b),f(a)\right)<\varepsilon$ が成り立つ。

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall b\in S$ に対し、$d(b,a)<\delta$ が成り立つなら、$e\left(f(b),f(a)\right)<\varepsilon$ が成り立つとき、極限がその元 $a$ であるようなその集合 $S$ の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ について、$\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=a$ が成り立つので、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}\forall b\in S$ に対し、$n_0<n$ が成り立つなら、$d\left(a_n,a\right)<\delta$ が成り立つので、$e\left(f\left(a_n\right),f(a)\right)<\varepsilon$ が成り立つ。したがって、その集合 $S$ の任意の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、$\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=a$ が成り立つなら、$\lim_{n\rightarrow\infty}f\left(a_n\right)=f(a)$ が成り立つ。

その集合 $S$ の任意の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、$\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=a$ が成り立つなら、$\lim_{n\rightarrow\infty}f\left(a_n\right)=f(a)$ が成り立つかつ、その写像 $f$ がその集合 $S$ の元 $a$ で連続でないとしよう。このとき、その写像 $f$ がその集合 $S$ の元 $a$ で連続であるならそのときに限り、上記の議論と同様にして、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+$ に対し、$B(a,\delta)\subseteq V\left(f^{-1}|B\left(f(a),\varepsilon\right)\right)$ が成り立つ。したがって、この仮定の下では、$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+\forall\delta\in\mathbb{R}^+$ に対し、$B(a,\delta)\supset V\left(f^{-1}|B\left(f(a),\varepsilon\right)\right)$ が成り立つことになる。これにより、$B(a,\delta)\cap S\setminus V\left(f^{-1}|B\left(f(a),\varepsilon\right)\right)\neq\emptyset$ が成り立ち、特に、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$B\left(a,\frac{1}{n}\right)\cap S\setminus V\left(f^{-1}|B\left(f(a),\varepsilon\right)\right)\neq\emptyset$ が成り立つ。これにより、その集合 $B\left(a,\frac{1}{n}\right)\cap S\setminus V\left(f^{-1}|B\left(f(a),\varepsilon\right)\right)$ は空集合でないので、この集合の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して、$a_n\in B\left(a,\frac{1}{n}\right)$ が成り立つ、即ち、$d\left(a_n,a\right)<\frac{1}{n}$ が成り立つことになるので、$\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=a$ が成り立つ。一方で、$a_n\in S\setminus V\left(f^{-1}|B\left(f(a),\varepsilon\right)\right)$ も成り立つので、$a_n\in V\left(f^{-1}|B\left(f(a),\varepsilon\right)\right)$ が成り立たない、即

[39] この辺りでやっと解析学でお馴染みの概念に近づいてきた感じがしますかね (?)

ち、$f(a_n) \in B(f(a), \varepsilon)$ が成り立たないことになる。したがって、$e(f(a_n), f(a)) \geq \varepsilon$ が成り立ち、これが任意の自然数 $n$ に対して成り立つので、$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立たないことになる。しかしながら、これは仮定に矛盾するので、その集合 $S$ の任意の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ が成り立つなら、$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立つなら、その写像 $f$ がその集合 $S$ の元 $a$ で連続であることが示された。 □

### 2.1.5 位相的な同値

**定義 2.1.6.** 距離空間たち $(S, d)$、$(S, e)$ が与えられたとき、これらの距離空間における位相たち $\mathfrak{O}_d$、$\mathfrak{O}_e$ が $\mathfrak{O}_d = \mathfrak{O}_e$ を満たすとき、これらの距離関数たち $d$、$e$ は位相的に同値であるという。

**定理 2.1.15.** 距離空間たち $(S, d)$、$(S, e)$ が与えられたとき、これらの距離関数たち $d$、$e$ が位相的に同値であるならそのときに限り、恒等写像 $I_S$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ からその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_e)$ への同相写像となる。

**証明.** 距離空間たち $(S, d)$、$(S, e)$ が与えられたとき、これらの距離関数たち $d$、$e$ が位相的に同値であるならそのときに限り、これらの距離空間における位相たち $\mathfrak{O}_d$、$\mathfrak{O}_e$ が $\mathfrak{O}_d = \mathfrak{O}_e$ を満たすのであった。このとき、恒等写像 $I_S$ について、$\forall O \in \mathfrak{O}_e$ に対し、$V\left(I_S^{-1}|O\right) = O \in \mathfrak{O}_e = \mathfrak{O}_d$ が成り立つかつ、このことはその逆写像 $I_S^{-1}$ に対しても同じようにいえるので、その恒等写像 $I_S$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ からその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_e)$ への同相写像となる。

逆に、これが成り立つなら、$\forall O \in \mathfrak{O}_e$ に対し、$V\left(I_S^{-1}|O\right) = O \in \mathfrak{O}_d$ が成り立つので、$\mathfrak{O}_e \subseteq \mathfrak{O}_d$ が成り立つかつ、逆についても同様なことがいえるので、これらの距離空間における位相たち $\mathfrak{O}_d$、$\mathfrak{O}_e$ が $\mathfrak{O}_d = \mathfrak{O}_e$ を満たす、即ち、これらの距離関数たち $d$、$e$ が位相的に同値であることが示された。 □

**定理 2.1.16.** 距離空間たち $(S, d)$、$(S, e)$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- これらの距離関数たち $d$、$e$ が位相的に同値である[*40]。
- 恒等写像 $I_S$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ からその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_e)$ への同相写像となる。
- $\forall a \in S \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$d(b, a) < \delta$ なら $e(b, a) < \varepsilon$ が成り立つかつ、$e(b, a) < \delta$ なら $d(b, a) < \varepsilon$ も成り立つ。
- その集合 $S$ の任意の点列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、その元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限がこれらの距離空間 $(S, d)$、$(S, e)$ いづれにおいてもその集合 $S$ の元 $a$ である。

**証明.** 距離空間たち $(S, d)$、$(S, e)$ が与えられたとき、定理 2.1.15 よりこれらの距離関数たち $d$、$e$ が位相的に同値であるならそのときに限り、恒等写像 $I_S$ がその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ からその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_e)$ への同相写像となるのであった。

このとき、その恒等写像 $I_S$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ からその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_e)$ への連続写像であるかつ、その位相空間 $(S, \mathfrak{O}_e)$ からその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ への連続写像でもあるので、これが成り立つならそのときに限り、定理 2.1.14 より $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall b \in S$ に対し、$d(b, a) < \delta$ なら $e(b, a) < \varepsilon$ が成り立つかつ、$e(b, a) < \delta$ なら $d(b, a) < \varepsilon$ が成り立つ。

また、その恒等写像 $I_S$ はその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ からその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_e)$ への連続写像であるかつ、その位相空間 $(S, \mathfrak{O}_e)$ からその位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ への連続写像でもあるので、これが成り立つならそのときに限り、定理 2.1.14 より $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ が成り立つなら、これらの距離空間 $(S, d)$、$(S, e)$ いづれにおいても次式が成り

[*40] これが定理 2.1.15 の上位互換となる。

立つことから、

$$\lim_{n\rightarrow\infty}a_{n}=\lim_{n\rightarrow\infty}I_{S}\left( a_{n} \right)=I_{S}(a)=a$$

その集合 $S$ の任意の点列 $\left( a_{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ と任意の元 $a$ に対し、その元の列 $\left( a_{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限がその元 $a$ となる。 □

### 2.1.6 部分距離空間

**定理 2.1.17.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$d|M\times M=d_{M}$ とおかれれば、その組 $\left( M,d_{M} \right)$ は距離空間をなす。

**定義 2.1.7.** 上のように構成された距離空間 $\left( M,d_{M} \right)$ をその距離空間 $(S,d)$ の部分距離空間という。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、$d|M\times M=d_{M}$ とおかれれば、$\forall a,b\in M$ に対し、$a,b\in S$ も成り立つから、$d_{M}(a,b)=d(a,b)\geq 0$ が成り立つ。$\forall a,b\in M$ に対し、$a,b\in S$ も成り立つから、$d_{M}(a,b)=d(a,b)$ が成り立つならそのときに限り、$a=b$ が成り立つ。$\forall a,b\in M$ に対し、$a,b\in S$ も成り立つから、$d_{M}(a,b)=d(a,b)=d(b,a)=d_{M}(b,a)$ が成り立つ。$\forall a,b,c\in M$ に対し、$a,b,c\in S$ も成り立つから、$d_{M}(a,c)=d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)=d_{M}(a,b)+d_{M}(b,c)$ が成り立つ。これにより、次のことが成り立つ。

- $\forall a,b\in M$ に対し、$d_{M}(a,b)\geq 0$ が成り立つ。
- $\forall a,b\in M$ に対し、$d_{M}(a,b)=0$ が成り立つならそのときに限り、$a=b$ が成り立つ。
- $\forall a,b\in M$ に対し、$d_{M}(a,b)=d_{M}(b,a)$ が成り立つ。
- $\forall a,b,c\in M$ に対し、$d_{M}(a,c)\leq d_{M}(a,b)+d_{M}(b,c)$ が成り立つ。

以上より、その組 $\left( M,d_{M} \right)$ は距離空間をなす。 □

**定理 2.1.18.** 距離空間 $(S,d)$ とこれの部分距離空間 $\left( M,d_{M} \right)$ が与えられたとき、この部分距離空間 $\left( M,d_{M} \right)$ における位相空間 $\left( M,\mathfrak{O}_{d_{M}} \right)$ はその距離空間 $(S,d)$ における位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の部分位相空間 $\left( M,\left( \mathfrak{O}_{d} \right)_{M} \right)$ に等しい、即ち、$\mathfrak{O}_{d_{M}}=\left( \mathfrak{O}_{d} \right)_{M}$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ とこれの部分距離空間 $\left( M,d_{M} \right)$ が与えられたとき、この部分距離空間 $\left( M,d_{M} \right)$ における位相空間 $\left( M,\mathfrak{O}_{d_{M}} \right)$ において、$\forall O\in\mathfrak{O}_{d_{M}}$ に対し、$O\in\mathfrak{O}_{d_{M}}$ が成り立つならそのときに限り、$\forall a\in O\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$B(a,\varepsilon)\subseteq O$ が成り立つことになる。このとき、$\forall b\in B(a,\varepsilon)$ に対し、$d_{M}(a,b)=d(a,b)<\varepsilon$ が成り立つので、その部分距離空間 $\left( M,d_{M} \right)$ におけるその開球体 $B(a,\varepsilon)$ はその距離空間 $(S,d)$ における開球体でもある。したがって、その開集合 $O$ はその位相空間 $\left( S,\mathfrak{O}_{d} \right)$ における開集合でもある。このとき、$O=O\cap M$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$\mathfrak{O}_{d_{M}}\subseteq\left\{ O'\in\mathfrak{P}(M) \middle| \exists O\in\mathfrak{O}_{d}\left[ O'=O\cap M \right] \right\}$$

　逆に、その集合 $M$ の部分集合 $O'$ で $O'=O\cap M$ なるその距離空間 $(S,d)$ における開集合 $O$ が存在するとき、$\exists a\in O'\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$O'\subset B(a,\varepsilon)$ が成り立つとすれば、その差集合 $B(a,\varepsilon)\setminus O'$ は空集合でなくこれの元 $b$ がとられれば、$0\leq d(a,b)<\varepsilon$ が成り立ち、その正の実数 $\varepsilon$ の任意性より $0=d(a,b)$ が成り立ち、したがって、$a=b$ が成り立つことになる。しかしながら、これはその元 $a$ がその集合 $O'$ の元であるかつ、その集合 $O'$ の元でもないことを意味しており矛盾している。したがって、$\forall a\in O'\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$B(a,\varepsilon)\subseteq O'$

が成り立つ。このことはその部分距離空間 $(M,d_M)$ についても同じことがいえるので、次式が成り立つ。

$$\mathfrak{O}_{d_M} \supseteq \{O' \in \mathfrak{P}(M) | \exists O \in \mathfrak{O}_d [O' = O \cap M]\}$$

以上、定理 1.4.7 より $\mathfrak{O}_{d_M} = \{O' \in \mathfrak{P}(M) | \exists O \in \mathfrak{O}_d [O' = O \cap M]\} = (\mathfrak{O}_d)_M$ が成り立つので、その部分距離空間 $(M,d_M)$ における位相空間 $(M,\mathfrak{O}_{d_M})$ はその距離空間 $(S,d)$ における位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ の部分位相空間 $(M,(\mathfrak{O}_d)_M)$ に等しい。 □

### 2.1.7 直積距離空間

**定理 2.1.19.** 添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i,d_i)\}_{i\in\varLambda_n}$ が与えられたとき、次式のように写像 $d$ が定義されると、

$$d : \prod_{i\in\varLambda_n} S_i \times \prod_{i\in\varLambda_n} S_i \to \mathbb{R}; \left((a_i)_{i\in\varLambda_n}, (b_i)_{i\in\varLambda_n}\right) \mapsto \sqrt{\sum_{i\in\varLambda_n} d_i(a_i,b_i)^2}$$

その組 $\left(\prod_{i\in\varLambda_n} S_i, d\right)$ は距離空間をなす。

**定義 2.1.8.** 上のように構成された距離空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_n} S_i, d\right)$ をその添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i,d_i)\}_{i\in\varLambda_n}$ の直積距離空間という。

**証明.** 添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i,d_i)\}_{i\in\varLambda_n}$ が与えられたとき、次式のように写像 $d$ が定義されると、

$$d : \prod_{i\in\varLambda_n} S_i \times \prod_{i\in\varLambda_n} S_i \to \mathbb{R}; \left((a_i)_{i\in\varLambda_n}, (b_i)_{i\in\varLambda_n}\right) \mapsto \sqrt{\sum_{i\in\varLambda_n} d_i(a_i,b_i)^2}$$

明らかに $\forall (a_i)_{i\in\varLambda_n}, (b_i)_{i\in\varLambda_n} \in \prod_{i\in\varLambda_n} S_i$ に対し、$d\left((a_i)_{i\in\varLambda_n}, (b_i)_{i\in\varLambda_n}\right) \geq 0$ が成り立つ。

$\forall (a_i)_{i\in\varLambda_n}, (b_i)_{i\in\varLambda_n} \in \prod_{i\in\varLambda_n} S_i$ に対し、$d\left((a_i)_{i\in\varLambda_n}, (b_i)_{i\in\varLambda_n}\right) = 0$ が成り立つならそのときに限り、$\sum_{i\in\varLambda_n} d_i(a_i,b_i)^2 = 0$ が成り立ち、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、$0 \leq d_i(a_i,b_i)^2$ が成り立つので、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、$0 = d_i(a_i,b_i)$ が成り立つ。これにより、$a_i = b_i$ が成り立つので、$(a_i)_{i\in\varLambda_n} = (b_i)_{i\in\varLambda_n}$ が成り立つ。

また、明らかに $\forall (a_i)_{i\in\varLambda_n}, (b_i)_{i\in\varLambda_n} \in \prod_{i\in\varLambda_n} S_i$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} d\left((a_i)_{i\in\varLambda_n}, (b_i)_{i\in\varLambda_n}\right) &= \sqrt{\sum_{i\in\varLambda_n} d_i(a_i,b_i)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i\in\varLambda_n} d_i(b_i,a_i)^2} \\ &= d\left((b_i)_{i\in\varLambda_n}, (a_i)_{i\in\varLambda_n}\right) \end{aligned}$$

最後に、$\forall\left(a_i\right)_{i\in\Lambda_n},\left(b_i\right)_{i\in\Lambda_n},\left(c_i\right)_{i\in\Lambda_n}\in\prod_{i\in\Lambda_n}S_i$ に対し、次のようになることから、

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)^2\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(b_i,c_i\right)^2-\left(\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)d_i\left(b_i,c_i\right)\right)^2\\
&=\sum_{i,j\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)^2d_j\left(b_j,c_j\right)^2-\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)^2d_i\left(b_i,c_i\right)^2\\
&\quad-2\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_n\\ i\neq j}}d_i\left(a_i,b_i\right)d_i\left(b_i,c_i\right)d_j\left(a_j,b_j\right)d_j\left(b_j,c_j\right)\\
&=\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)^2d_i\left(b_i,c_i\right)^2+\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_n\\ i\neq j}}d_i\left(a_i,b_i\right)^2d_j\left(b_j,c_j\right)^2-\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)^2d_i\left(b_i,c_i\right)^2\\
&\quad-2\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_n\\ i\neq j}}d_i\left(a_i,b_i\right)d_i\left(b_i,c_i\right)d_j\left(a_j,b_j\right)d_j\left(b_j,c_j\right)\\
&=\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_n\\ i\neq j}}d_i\left(a_i,b_i\right)^2d_j\left(b_j,c_j\right)^2-2\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_n\\ i\neq j}}d_i\left(a_i,b_i\right)d_i\left(b_i,c_i\right)d_j\left(a_j,b_j\right)d_j\left(b_j,c_j\right)\\
&=\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_n\\ i<j}}d_i\left(a_i,b_i\right)^2d_j\left(b_j,c_j\right)^2-2\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_n\\ i<j}}d_i\left(a_i,b_i\right)d_i\left(b_i,c_i\right)d_j\left(a_j,b_j\right)d_j\left(b_j,c_j\right)\\
&\quad+\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_n\\ i<j}}d_j\left(a_j,b_j\right)^2d_i\left(b_i,c_i\right)^2\\
&=\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_n\\ i<j}}\left(d_i\left(a_i,b_i\right)^2d_j\left(b_j,c_j\right)^2-2d_i\left(a_i,b_i\right)d_i\left(b_i,c_i\right)d_j\left(a_j,b_j\right)d_j\left(b_j,c_j\right)+d_j\left(a_j,b_j\right)^2d_i\left(b_i,c_i\right)^2\right)\\
&=\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_n\\ i<j}}\left(d_i\left(a_i,b_i\right)d_j\left(b_j,c_j\right)-d_j\left(a_j,b_j\right)d_i\left(b_i,c_i\right)\right)^2\geq 0
\end{aligned}$$

次式が成り立つ。

$$\sqrt{\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)^2\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(b_i,c_i\right)^2}\geq\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)d_i\left(b_i,c_i\right)$$

これにより、次のようになり、

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,c_i\right)^2&\leq\sum_{i\in\Lambda_n}\left(d_i\left(a_i,b_i\right)+d_i\left(b_i,c_i\right)\right)^2\\
&=\sum_{i\in\Lambda_n}\left(d_i\left(a_i,b_i\right)^2+2d_i\left(a_i,b_i\right)d_i\left(b_i,c_i\right)+d_i\left(b_i,c_i\right)^2\right)\\
&=\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)^2+2\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)d_i\left(b_i,c_i\right)+\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(b_i,c_i\right)^2\\
&\leq\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)^2+2\sqrt{\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)^2\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(b_i,c_i\right)^2}+\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(b_i,c_i\right)^2\\
&=\left(\sqrt{\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(a_i,b_i\right)^2}+\sqrt{\sum_{i\in\Lambda_n}d_i\left(b_i,c_i\right)^2}\right)^2
\end{aligned}$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
d\left((a_i)_{i\in\varLambda_n},(c_i)_{i\in\varLambda_n}\right) &= \sqrt{\sum_{i\in\varLambda_n} d_i\left(a_i,c_i\right)^2}\\
&\leq \sqrt{\sum_{i\in\varLambda_n} d_i\left(a_i,b_i\right)^2}+\sqrt{\sum_{i\in\varLambda_n} d_i\left(b_i,c_i\right)^2}\\
&= d\left((a_i)_{i\in\varLambda_n},(b_i)_{i\in\varLambda_n}\right)+d\left((b_i)_{i\in\varLambda_n},(c_i)_{i\in\varLambda_n}\right)
\end{aligned}$$

以上より、次のことが成り立つので、

- $\forall(a_i)_{i\in\varLambda_n},(b_i)_{i\in\varLambda_n}\in\prod_{i\in\varLambda_n}S_i$ に対し、$d\left((a_i)_{i\in\varLambda_n},(b_i)_{i\in\varLambda_n}\right)\geq 0$ が成り立つ。
- $\forall(a_i)_{i\in\varLambda_n},(b_i)_{i\in\varLambda_n}\in\prod_{i\in\varLambda_n}S_i$ に対し、$d\left((a_i)_{i\in\varLambda_n},(b_i)_{i\in\varLambda_n}\right)=0$ が成り立つならそのときに限り、$(a_i)_{i\in\varLambda_n}=(b_i)_{i\in\varLambda_n}$ が成り立つ。
- $\forall(a_i)_{i\in\varLambda_n},(b_i)_{i\in\varLambda_n}\in\prod_{i\in\varLambda_n}S_i$ に対し、$d\left((a_i)_{i\in\varLambda_n},(b_i)_{i\in\varLambda_n}\right)=d\left((b_i)_{i\in\varLambda_n},(a_i)_{i\in\varLambda_n}\right)$ が成り立つ。
- $\forall(a_i)_{i\in\varLambda_n},(b_i)_{i\in\varLambda_n},(c_i)_{i\in\varLambda_n}\in\prod_{i\in\varLambda_n}S_i$ に対し、$d\left((a_i)_{i\in\varLambda_n},\ (c_i)_{i\in\varLambda_n}\right)\leq d\left((a_i)_{i\in\varLambda_n},\ (b_i)_{i\in\varLambda_n}\right)+d\left((b_i)_{i\in\varLambda_n},\ (c_i)_{i\in\varLambda_n}\right)$ が成り立つ。

その組 $\left(\prod_{i\in\varLambda_n}S_i,d\right)$ は距離空間をなす。 □

**定理 2.1.20.** $\forall(a_i)_{i\in\varLambda_n}\in\prod_{i\in\varLambda_n}S_i$ に対し、添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i,d_i)\}_{i\in\varLambda_n}$ の直積距離空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_n}S_i,d\right)$ における位相空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_n}S_i,\mathfrak{O}_d\right)$ のその元 $(a_i)_{i\in\varLambda_n}$ の基本近傍系として、その元 $(a_i)_{i\in\varLambda_n}$ を中心とする開球体全体の集合が挙げられる。

**証明.** $\forall(a_i)_{i\in\varLambda_n}\in\prod_{i\in\varLambda_n}S_i$ に対し、添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i,d_i)\}_{i\in\varLambda_n}$ の直積距離空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_n}S_i,d\right)$ における位相空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_n}S_i,\mathfrak{O}_d\right)$ のその元 $(a_i)_{i\in\varLambda_n}$ の基本近傍系について、集合 $V$ がその元 $(a_i)_{i\in\varLambda_n}$ の近傍であるなら、$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$B\left((a_i)_{i\in\varLambda_n},\varepsilon\right)\subseteq\mathrm{int}V\subseteq V$ が成り立つので、確かにその元 $(a_i)_{i\in\varLambda_n}$ の基本近傍系として、その元 $(a_i)_{i\in\varLambda_n}$ を中心とする開球体全体の集合が挙げられる。 □

**定理 2.1.21.** $\forall(a_i)_{i\in\varLambda_n}\in\prod_{i\in\varLambda_n}S_i$ に対し、添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i,d_i)\}_{i\in\varLambda_n}$ における位相空間の族 $\{(S_i,\mathfrak{O}_{d_i})\}_{i\in\varLambda_n}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_n}S_i,\mathfrak{O}\right)$ のその元 $(a_i)_{i\in\varLambda_n}$ の基本近傍系として、その元 $a_i$ の開球体 $B\left(a_i,\varepsilon\right)$ を用いた $\prod_{i\in\varLambda_n}B\left(a_i,\varepsilon\right)$ の形で表される集合全体の集合が挙げられる。

**証明.** 定理 1.4.18 と定理 2.1.6 より明らかである。 □

**定理 2.1.22.** 添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i, d_i)\}_{i \in \varLambda_n}$ の直積距離空間 $\left(\prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d\right)$ において、$\forall (a_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} S_i$ に対し、次式が成り立つ。

$$\prod_{i \in \varLambda_n} B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subseteq B\left((a_i)_{i \in \varLambda_n}, \varepsilon\right) \subseteq \prod_{i \in \varLambda_n} B\left(a_i, \varepsilon\right)$$

**証明.** 添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i, d_i)\}_{i \in \varLambda_n}$ の直積距離空間 $\left(\prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d\right)$ において、$\forall (a_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} S_i \forall (b_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$ に対し、$(b_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$ が成り立つなら、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、$b_i \in B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$ が成り立ち、したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\forall i \in \varLambda_n \left[b_i \in B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)\right] &\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_n \left[0 \leq d_i\left(a_i, b_i\right) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right] \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_n \left[d_i\left(a_i, b_i\right)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}\right] \\
&\Rightarrow \sum_{i \in \varLambda_n} d_i\left(a_i, b_i\right)^2 < \sum_{i \in \varLambda_n} \frac{\varepsilon^2}{n} = \frac{\varepsilon^2}{n} \cdot n = \varepsilon^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i \in \varLambda_n} d_i\left(a_i, b_i\right)^2} < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow d\left((a_i)_{i \in \varLambda_n}, (b_i)_{i \in \varLambda_n}\right) < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow (b_i)_{i \in \varLambda_n} \in B\left((a_i)_{i \in \varLambda_n}, \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

以上より、次式が成り立つことが示された。

$$\prod_{i \in \varLambda_n} B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subseteq B\left((a_i)_{i \in \varLambda_n}, \varepsilon\right)$$

また、$\forall (a_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} S_i \forall (b_i)_{i \in \varLambda_n} \in B\left((a_i)_{i \in \varLambda_n}, \varepsilon\right)$ に対し、$(b_i)_{i \in \varLambda_n} \in B\left((a_i)_{i \in \varLambda_n}, \varepsilon\right)$ が成り立つなら、次のようになる。

$$\begin{aligned}
(b_i)_{i \in \varLambda_n} \in B\left((a_i)_{i \in \varLambda_n}, \varepsilon\right) &\Leftrightarrow d\left((a_i)_{i \in \varLambda_n}, (b_i)_{i \in \varLambda_n}\right) < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i \in \varLambda_n} d_i\left(a_i, b_i\right)^2} < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_n} d_i\left(a_i, b_i\right)^2 < \varepsilon^2 \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_n \left[d_i\left(a_i, b_i\right)^2 \leq \sum_{i \in \varLambda_n} d_i\left(a_i, b_i\right)^2 < \varepsilon^2\right] \\
&\Rightarrow \forall i \in \varLambda_n \left[d_i\left(a_i, b_i\right)^2 < \varepsilon^2\right] \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_n \left[d_i\left(a_i, b_i\right) < \varepsilon\right] \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_n \left[b_i \in B\left(a_i, \varepsilon\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (b_i)_{i\in\Lambda_n} \in \prod_{i\in\Lambda_n} B(a_i,\varepsilon)$$

以上より、次式が成り立つことが示された。

$$B\left((a_i)_{i\in\Lambda_n},\varepsilon\right) \subseteq \prod_{i\in\Lambda_n} B(a_i,\varepsilon)$$

これにより、$\forall (a_i)_{i\in\Lambda_n} \in \prod_{i\in\Lambda_n} S_i$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\prod_{i\in\Lambda_n} B\left(a_i,\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) &\subseteq B\left((a_i)_{i\in\Lambda_n},\varepsilon\right)\\ &\subseteq \prod_{i\in\Lambda_n} B(a_i,\varepsilon)\end{aligned}$$

□

**定理 2.1.23.** 添数集合 $\Lambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i,d_i)\}_{i\in\Lambda_n}$ の直積距離空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n} S_i, d\right)$ における位相空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n} S_i, \mathfrak{O}_d\right)$ はその族 $\{(S_i,d_i)\}_{i\in\Lambda_n}$ における位相空間の族 $\{(S_i,\mathfrak{O}_{d_i})\}_{i\in\Lambda_n}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n} S_i, \mathfrak{O}\right)$ に等しい、即ち、$\mathfrak{O}_d = \mathfrak{O}$ が成り立つ。

**証明.** 定理 2.1.20 より $\forall (a_i)_{i\in\Lambda_n} \in \prod_{i\in\Lambda_n} S_i$ に対し、添数集合 $\Lambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i,d_i)\}_{i\in\Lambda_n}$ の直積距離空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n} S_i, d\right)$ における位相空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n} S_i, \mathfrak{O}_d\right)$ のその元 $(a_i)_{i\in\Lambda_n}$ の基本近傍系として、その元 $(a_i)_{i\in\Lambda_n}$ を中心とする開球体全体の集合が挙げられるかつ、定理 2.1.21 よりその族 $\{(S_i,d_i)\}_{i\in\Lambda_n}$ における位相空間の族 $\{(S_i,\mathfrak{O}_{d_i})\}_{i\in\Lambda_n}$ の直積位相空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n} S_i, \mathfrak{O}\right)$ のその元 $(a_i)_{i\in\Lambda_n}$ の基本近傍系として、その元 $a_i$ の開球体 $B(a_i,\varepsilon)$ を用いた $\prod_{i\in\Lambda_n} B(a_i,\varepsilon)$ の形で表される集合全体の集合が挙げられる。

ここで、$\forall O \in \mathfrak{O}_d$ に対し、定理 1.1.23 より $\forall (a_i)_{i\in\Lambda_n} \in O$ に対し、その集合 $O$ 自身がその元 $(a_i)_{i\in\Lambda_n}$ の近傍である。このとき、基本近傍系の定義より $\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$B\left((a_i)_{i\in\Lambda_n},\varepsilon\right) \subseteq O$ が成り立ち、定理 2.1.22 より $\prod_{i\in\Lambda_n} B\left(a_i,\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subseteq B\left((a_i)_{i\in\Lambda_n},\varepsilon\right)$ が成り立つので、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\prod_{i\in\Lambda_n} B\left(a_i,\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subseteq O$ が成り立つ。このとき、定理 1.2.16 よりその開集合 $O$ はその位相空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n} S_i, \mathfrak{O}\right)$ での開集合でもあるので、$\mathfrak{O}_d \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つ。

一方で、$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、定理 1.1.23 より $\forall (a_i)_{i\in\Lambda_n} \in O$ に対し、その集合 $O$ 自身がその元 $(a_i)_{i\in\Lambda_n}$ の近傍である。このとき、基本近傍系の定義より $\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\prod_{i\in\Lambda_n} B(a_i,\varepsilon) \subseteq O$ が成り立ち、定理 2.1.22 より $B\left((a_i)_{i\in\Lambda_n},\varepsilon\right) \subseteq \prod_{i\in\Lambda_n} B(a_i,\varepsilon)$ が成り立つので、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$B\left((a_i)_{i\in\Lambda_n},\varepsilon\right) \subseteq O$ が成り立つ。このとき、定理 1.2.16 よりその開集合 $O$ はその位相空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n} S_i, \mathfrak{O}_d\right)$ での開集合でもあるので、$\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}_d$ が

成り立つ。

以上より、$\mathfrak{O}_d = \mathfrak{O}$ が成り立つので、その族 $\left\{ \left( S_i, d_i \right) \right\}_{i \in \varLambda_n}$ の直積距離空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d \right)$ における位相空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} S_i, \mathfrak{O}_d \right)$ はその族 $\left\{ \left( S_i, d_i \right) \right\}_{i \in \varLambda_n}$ における位相空間の族 $\left\{ \left( S_i, \mathfrak{O}_{d_i} \right) \right\}_{i \in \varLambda_n}$ の直積位相空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} S_i, \mathfrak{O} \right)$ に等しい。 □

### 2.1.8 直積距離空間における極限

**定理 2.1.24.** 添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\left\{ \left( S_i, d_i \right) \right\}_{i \in \varLambda_n}$ の直積距離空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d \right)$ が与えられたとき、その集合 $\prod_{i \in \varLambda_n} S_i$ の元の列 $\left( \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ の極限が存在してこれがその集合 $\prod_{i \in \varLambda_n} S_i$ の元 $\left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n}$ であるとすれば、$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n} = \left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n}$ が成り立つならそのときに限り、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{i,m} = a_i$ が成り立つ。

**証明.** 添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\left\{ \left( S_i, d_i \right) \right\}_{i \in \varLambda_n}$ の直積距離空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d \right)$ が与えられたとき、その集合 $\prod_{i \in \varLambda_n} S_i$ の元の列 $\left( \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ の極限が存在してこれがその集合 $\prod_{i \in \varLambda_n} S_i$ の元 $\left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n}$ であるとすれば、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}$ に対し、$m_0 < m$ が成り立つなら、$d \left( \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n}, \left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n} \right) < \varepsilon \leq \varepsilon \sqrt{n}$ が成り立つことになる。ここで、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、定理 2.1.22 より次のようになるかつ、

$$\begin{aligned} d \left( \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n}, \left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n} \right) < \varepsilon &\Leftrightarrow \left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n} \in B \left( \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n}, \varepsilon \right) \\ &\Rightarrow \left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} B \left( a_{i,m}, \varepsilon \right) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_n \left[ a_i \in B \left( a_{i,m}, \varepsilon \right) \right] \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_n \left[ d_i \left( a_{i,m}, a_i \right) < \varepsilon \right] \end{aligned}$$

2.1.22 より次のようになるので、

$$\begin{aligned} \forall i \in \varLambda_n \left[ d_i \left( a_{i,m}, a_i \right) < \varepsilon \right] &\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_n \left[ a_i \in B \left( a_{i,m}, \varepsilon \right) \right] \\ &\Leftrightarrow \left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} B \left( a_{i,m}, \varepsilon \right) \\ &\Rightarrow \left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n} \in B \left( \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n}, \varepsilon \sqrt{n} \right) \\ &\Leftrightarrow d \left( \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n}, \left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n} \right) < \varepsilon \sqrt{n} \end{aligned}$$

その正の実数 $\varepsilon$ の任意性よりその元の列 $\left( \left( a_{im} \right)_{i \in \varLambda_n} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ の極限が存在してこれがその集合 $\prod_{i \in \varLambda_n} S_i$ の元 $\left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n}$ であるならそのときに限り、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}$ に対し、$m_0 < m$ が成り立つなら、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、$d_i \left( a_{i,m}, a_i \right) < \varepsilon$ が成り立ち、特に、$d_i \left( a_{i,m}, a_i \right) < \varepsilon$ が成り立つ。したがって、これが成り立つならそのときに限り、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{i,m} = a_i$ が成り立つ。 □

**定理 2.1.25.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の元の列たち $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限が存在するとすれば、次式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} d\left(a_n,b_n\right) = d\left(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の元の列たち $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限がそれぞれ $a$、$b$ と存在するとすれば、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0<n$ が成り立つなら、$d\left(a_n,a\right)<\varepsilon$ が成り立つかつ、$d\left(b_n,b\right)<\varepsilon$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned}
-d\left(a_n,a\right)-d\left(b_n,b\right) &= -d\left(a_n,a\right)-d\left(b_n,b\right)+d(a,b)-d(a,b)\\
&\leq -d\left(a_n,a\right)-d\left(b_n,b\right)+d\left(a,b_n\right)+d\left(b_n,b\right)-d(a,b)\\
&= -d\left(a_n,a\right)+d\left(a,b_n\right)-d(a,b)\\
&\leq -d\left(a_n,a\right)+d\left(a_n,b_n\right)+d\left(a_n,a\right)-d(a,b)\\
&= d\left(a_n,b_n\right)-d(a,b)\\
&\leq d\left(a_n,a\right)+d\left(a,b_n\right)-d(a,b)\\
&\leq d\left(a_n,a\right)+d\left(b_n,b\right)+d(a,b)-d(a,b)\\
&\leq d\left(a_n,a\right)+d\left(b_n,b\right)
\end{aligned}$$

したがって、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\left|d\left(a_n,b_n\right)-d\left(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\right)\right| &= \left|d\left(a_n,b_n\right)-d(a,b)\right|\\
&\leq d\left(a_n,a\right)+d\left(b_n,b\right)<2\varepsilon
\end{aligned}$$

以上より、次式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} d\left(a_n,b_n\right) = d\left(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

□

# 参考文献


[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p234-247 ISBN978-4-00-029871-1

[2] 明治大学理工学部 2023 年度幾何学 3 第 2 回講義資料

## 2.2 Euclid 空間

### 2.2.1 Euclid 空間

**定理 2.2.1.** 次式のように写像 $d_E$ が定義されるとき、

$$d_E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (a,b) \mapsto |a-b|$$

その組 $(\mathbb{R}, d_E)$ は距離空間をなす。

**証明.** 次式のように写像 $d_E$ が定義されるとき、

$$d_E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (a,b) \mapsto |a-b|$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対し、$d(a,b) = |a-b| \geq 0$ が成り立つかつ、$d(a,b) = |a-b| = 0$ が成り立つならそのときに限り、$a = b$ が成り立つかつ、$d(a,b) = |a-b| = |b-a| = d(b,a)$ が成り立つことは明らかである。また、三角不等式より $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ に対し、$d(a,c) = |a-c| \leq |a-b| + |b-c| = d(a,b) + d(b,c)$ が成り立つ。以上より、その組 $(\mathbb{R}, d_E)$ は距離空間をなす。 □

**定義 2.2.1.** 定理 2.2.1 のような $n$ つの距離空間 $(\mathbb{R}, d_E)$ の直積距離空間を $n$ 次元 Euclid 空間といい、これを $E^n$ と書く。さらに、その距離関数を $n$ 次元 Euclid 距離関数といい、ここでは、$d_{E^n}$ と書くことにする。

**定理 2.2.2.** $n$ 次元 Euclid 距離関数 $d_{E^n}$ は $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \Lambda_n}$、$\mathbf{b} = (b_i)_{i \in \Lambda_n}$ として次式のように与えられる。

$$d_{E^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \sqrt{\sum_{i \in \Lambda_n} |a_i - b_i|^2}$$

**証明.** 直積距離空間の定義より明らかである。 □

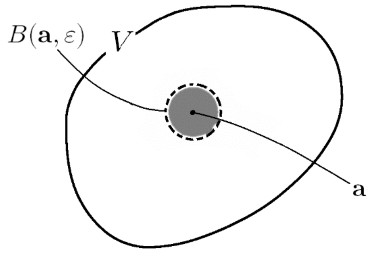
### 2.2.2 Euclid 空間における位相空間の開基

$n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ の開基、基本近傍系について次の定理たちが有用であろう。

**定理** (定理 2.1.4 の再掲)**.** 距離空間 $(S,d)$ の開基として、開球体全体の集合 $\mathfrak{U}$ が挙げられる。

**定理** (定理 2.1.6 の再掲)**.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、その元 $a$ の基本近傍系として、その元 $a$ を中心とする開球体全体の集合 $\mathfrak{U}_a$ が挙げられる。

これにより、$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \forall V \in \mathbf{V}(\mathbf{a}) \exists B(\mathbf{a}, \varepsilon) \in \mathfrak{U}_{\mathbf{a}}$ に対し、次の図のように与えられる。



ここで、特筆すべき $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ の開基として次の定理たちのようなものがある。

**定理 2.2.3.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ について、$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ なる開球体 $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ 全体の集合 $\mathfrak{B}$ と、$\forall i \in \Lambda_n$ に対し、$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ が成り立つとき、直積 $\prod_{i \in \Lambda_n} (a_i, b_i)$ 全体の集合 $\mathcal{I}$ はどちらもその位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開基となる。

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ について、$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ なる開球 $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ 全体の集合 $\mathfrak{B}$ と、$\forall i \in \Lambda_n$ に対し、$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ が成り立つとき、直積 $\prod_{i \in \Lambda_n} (a_i, b_i)$ 全体の集合 $\mathcal{I}$ が与えられたとする。

このとき、$\forall O \in \mathfrak{O}_{d_{E^n}} \forall \mathbf{a} \in O$ に対し、$\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \Lambda_n}$ とおくと、定義より明らかに $\mathbf{a} \in B(\mathbf{a}, \varepsilon) \subseteq O$ が成り立つような開球体 $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ がその集合 $\mathfrak{B}$ に存在する。したがって、その集合 $\mathfrak{B}$ はその位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開基となる。

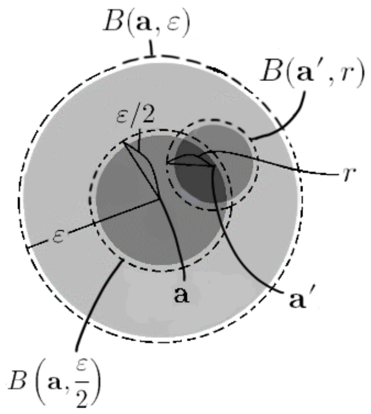
また、$\forall O \in \mathfrak{O}_{d_{E^n}} \forall \mathbf{a} \in O$ に対し、定義より $\mathbf{a} \in B(\mathbf{a}, \varepsilon) \subseteq O$ が成り立つような開球体 $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ が存在する。ここで、定理 2.1.22 より次式が成り立つので、

$$\begin{aligned}
\prod_{i \in \Lambda_n} B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) &= \prod_{i \in \Lambda_n} \left\{b_i \in \mathbb{R} \middle| d_E(a_i, b_i) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right\} \\
&= \prod_{i \in \Lambda_n} \left\{b_i \in \mathbb{R} \middle| |a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right\} \\
&= \prod_{i \in \Lambda_n} \left\{b_i \in \mathbb{R} \middle| -\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} < a_i - b_i < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right\} \\
&= \prod_{i \in \Lambda_n} \left\{b_i \in \mathbb{R} \middle| a_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} < b_i < a_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right\} \\
&= \prod_{i \in \Lambda_n} \left(a_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, a_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subseteq B(\mathbf{a}, \varepsilon)
\end{aligned}$$

$\forall O \in \mathfrak{O}_{d_{E^n}} \forall \mathbf{a} \in O \exists \prod_{i \in \Lambda_n} \left(a_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, a_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \in \mathcal{I}$ に対し、$\mathbf{a} \in \prod_{i \in \Lambda_n} \left(a_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, a_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subseteq O$ が成り立ち、したがって、その集合 $\mathcal{I}$ はその位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開基となる。 □

**定理 2.2.4.** さらに、$n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ について、$\mathbf{a}' \in \mathbb{R}^n$ なる開球体 $B(\mathbf{a}', r)$ のうち、$\mathbf{a}' \in \mathbb{Q}^n$ かつ $r \in \mathbb{Q}$ を満たすもの全体の集合 $\mathfrak{B}'$ もまたその位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開基となる。

これは次の図のように考えられることで示される。




**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ について、$\mathbf{a}'\in\mathbb{R}^n$ なる開球 $B(\mathbf{a}',r)$ のうち、$\mathbf{a}'\in\mathbb{Q}^n$ かつ $r\in\mathbb{Q}$ を満たすもの全体の集合 $\mathfrak{B}'$ が与えられたとする。

$\forall O\in\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\forall\mathbf{a}\in O$ に対し、定義より明らかに $\mathbf{a}\in B(\mathbf{a},\varepsilon)\subseteq O$ が成り立つような開球体 $B(\mathbf{a},\varepsilon)$ がその集合 $\mathfrak{B}$ に存在する。ここで、開球体 $B\left(\mathbf{a},\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ の $\mathbf{a}'\in\mathbb{Q}^n$ なる元 $\mathbf{a}'$ がとられ、さらに、有理数の稠密性より $d_{E^n}(\mathbf{a},\mathbf{a}')<r<\dfrac{\varepsilon}{2}$ なる有理数 $r$ もとられることができるで、$B(\mathbf{a}',r)\subseteq B(\mathbf{a},\varepsilon)$ が成り立つ。これにより、$\forall O\in\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\forall\mathbf{a}\in O\exists B(\mathbf{a}',\varepsilon)\in\mathfrak{B}'$ に対し、$\mathbf{a}\in B(\mathbf{a}',r)\subseteq O$ が成り立ち、したがって、その集合 $\mathfrak{B}'$ はその位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開基となる。 □

**定理 2.2.5.** その位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ は第 2 可算公理を満たす。

**証明.** 定理 2.2.4 での開基 $\mathfrak{B}'$ を用いて $\#\mathfrak{B}'=\#(\mathbb{Q}^n\times\mathbb{Q})=\aleph_0$ が成り立つことによる。 □

### 2.2.3 Euclid 空間における位相空間の連続写像

**定義 2.2.2.** ここで、詳しくは解析学のほうに参照してもらいたいが、1 つの位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられ写像 $f:S\to\mathbb{R}^n$ がその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ への連続写像であるとき、その写像 $f$ は実連続関数であるともいう。

**定理 2.2.6.** ここで、1 つの位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられ写像 $f:S\to\mathbb{R}$ について、次のことは同値である。

- その写像 $f$ がその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像である。
- $\forall a,b\in\mathbb{R}$ に対し、開区間 $(a,b)$ に制限されたその逆対応 $f^{-1}$ の値域 $V\left(f^{-1}|(a,b)\right)$ がその位相 $\mathfrak{O}$ に属する。
- $\forall c\in\mathbb{R}$ に対し、開区間たち $(c,\infty)$、$(-\infty,c)$ に制限されたその逆対応 $f^{-1}$ の値域たち $V\left(f^{-1}|(c,\infty)\right)$、$V\left(f^{-1}|(-\infty,c)\right)$ がその位相 $\mathfrak{O}$ に属する。

**証明.** 1 つの位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられ写像 $f:S\to\mathbb{R}$ について、その写像 $f$ がその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像であるとする。このとき、開区間 $(a,b)$ 全体の集合 $\mathcal{I}$ は定理 2.2.3 よりその位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ の開基となり、したがって、準開基でもあるのであった。定理 1.3.2 よりその写像 $f:S\to\mathbb{R}$ が連続であるならそのときに限り、$\forall I\in\mathcal{I}$ に対し、$V\left(f^{-1}|I\right)\in\mathfrak{O}$ が成り

立つことになる、即ち、$\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対し、開区間 $(a, b)$ に制限されたその逆対応 $f^{-1}$ の値域 $V\left(f^{-1}|(a, b)\right)$ がその位相 $\mathfrak{O}$ に属することになる。

さらに、その集合 $\mathfrak{U}$ の任意の元は開区間で任意の開区間 $(a, b)$ は $(a, b) = (a, \infty) \cap (-\infty, b)$ のように書き換えられることができるので、定義より明らかに $c \in \mathbb{R}$ なる開区間たち $(c, \infty)$、$(-\infty, c)$ 全体の集合 $\mathcal{I}'$ はその位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ の開基となり、したがって、準開基でもある。ここで、定理 1.3.2 よりその写像 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ が連続であるならそのときに限り、$\forall I \in \mathcal{I}'$ に対し、$V\left(f^{-1}\middle|I\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つことになる、即ち、$\forall c \in D$ に対し、開区間たち $(c, \infty)$、$(-\infty, c)$ に制限されたその逆対応 $f^{-1}$ の値域たち $V\left(f^{-1}|(c, \infty)\right)$、$V\left(f^{-1}|(-\infty, c)\right)$ がその位相 $\mathfrak{O}$ に属することになる。 □

**定理 2.2.7.** 1 つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ と $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ が与えられたとき、写像 $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ が連続であるならそのときに限り、$\forall a \in S \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、これのある近傍 $V$ をとれば、$\forall b \in V$ に対し、$d_{E^n}(f(a), f(b)) < \varepsilon$ が成り立つ。

特に、その位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が $m$ 次元 Euclid 空間 $E^m$ における位相空間であるなら、定理 2.1.14 より $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall b \in \mathbb{R}^m$ に対し、$d_{E^m}(a, b) < \delta$ なら $d_{E^n}(f(a), f(b)) < \varepsilon$ が成り立つ。この式はいわゆる $\varepsilon$-$\delta$ 論法の式である。

**証明.** 1 つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ と $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ が与えられたとき、$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し、その元を中心とする開球体全体の集合 $\mathfrak{U}_{\mathbf{a}}$ は定理 2.1.6 よりその元 $\mathbf{a}$ のその $n$ 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ における基本近傍系となり、したがって、全近傍系となるのであった。

ここで、定理 1.3.1 より写像 $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ が連続であるならそのときに限り、$a \in S$ かつ $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ なる元々 $a$、$\mathbf{a}$ のそれらの位相空間たち $(S, \mathfrak{O})$、$(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の全近傍系たちがそれぞれ $\mathbf{V}(a)$、$\mathfrak{U}_{\mathbf{a}}$ とおかれると、$B(f(a), \varepsilon) \in \mathfrak{U}_{f(a)}$ なら $V\left(f^{-1}|B(f(a), \varepsilon)\right) \in \mathbf{V}(a)$ が成り立つ。ここで、$V\left(f^{-1}|B(f(a), \varepsilon)\right) \in \mathbf{V}(a)$ について、$B(f(a), \varepsilon) \in \mathfrak{U}_{f(a)}$ が成り立つかつ、その写像 $f$ が連続であるので、$V\left(f^{-1}|B(f(a), \varepsilon)\right) \in \mathfrak{O}$ が成り立つことに注意すれば、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
V\left(f^{-1}|B(f(a), \varepsilon)\right) \in \mathbf{V}(a) &\Leftrightarrow a \in \mathrm{int} V\left(f^{-1}|B(f(a), \varepsilon)\right) \\
&\Leftrightarrow a \in V\left(f^{-1}|B(f(a), \varepsilon)\right) \\
&\Leftrightarrow a \in \{b \in S | \exists a' \in B(f(a), \varepsilon)\,[f(b) = a']\} \\
&\Leftrightarrow a \in \{b \in S | f(b) \in B(f(a), \varepsilon)\} \\
&\Leftrightarrow a \in \{b \in S | d_{E^n}(f(a), f(b)) < \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

ここで、その値域 $V\left(f^{-1}|B(f(a), \varepsilon)\right)$ を $V$ とおくと、$\forall b \in V$ に対し、次式が成り立つ。

$$
d_{E^n}(f(a), f(b)) < \varepsilon
$$

以上より、その写像 $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ が連続であるならそのときに限り、$\forall a \in S \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、これのある近傍 $V$ をとれば、$\forall b \in V$ に対し、$d_{E^n}(f(a), f(b)) < \varepsilon$ が成り立つ。 □

**定理 2.2.8.** 1 つの位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ と $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ が与えられたとき、写像たち $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$、$g: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ が連続であるなら、$\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対し、その写像 $af + bg$ も連続で、特に、$n = 1$ のとき、写像たち $fg$、$\dfrac{f}{g}$ も連続である[*41]。

[*41] 実いうと、$n = 2$ のとき、$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ と考えれば、複素数の積の定義より複素数同士の積や商はそれぞれ実数の和積、和積と商で書

**証明.** 1 つの位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ と $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ が与えられたとき、写像たち $f:S\rightarrow\mathbb{R}^n$、$g:S\rightarrow\mathbb{R}^n$ が連続であるなら、$\forall s\in S\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、これのある近傍たち $V$、$W$ をとれば、$\forall v\in V\forall w\in W$ に対し、次式が成り立つ。

$$d_{E^n}\left(f(s),f(v)\right)<\varepsilon,\quad d_{E^n}\left(g(s),g(w)\right)<\varepsilon$$

特に、$\forall v\in V\cap W$ に対し、次式が成り立つ。

$$d_{E^n}\left(f(s),f(v)\right)<\varepsilon,\quad d_{E^n}\left(g(s),g(v)\right)<\varepsilon$$

ここで、$\forall a,b\in\mathbb{R}$ に対し、$a=b=0$ のときは明らかであるから、$a\neq 0$ または $b\neq 0$ のとき、次のようになる。

$$\begin{aligned}
d_{E^n}\left((af+bg)(s),(af+bg)(v)\right)&=d_{E^n}\left(af(s)+bg(s),af(v)+bg(v)\right)\\
&=d_{E^n}\left(af(s)-af(v),bg(s)-bg(v)\right)\\
&\leq d_{E^n}\left(af(s)-af(v),0\right)+d_{E^n}\left(bg(s)-bg(v),0\right)\\
&=d_{E^n}\left(af(s),af(v)\right)+d_{E^n}\left(bg(s),bg(v)\right)\\
&=|a|d_{E^n}\left(f(s),f(v)\right)+|b|d_{E^n}\left(g(s),g(v)\right)\\
&<|a|\varepsilon+|b|\varepsilon=\left(|a|+|b|\right)\varepsilon
\end{aligned}$$

定理 2.2.7 よりその写像 $af+bg$ も連続である。

特に、$n=1$ のとき、次のようになる。

$$\begin{aligned}
d_E\left(fg(s),fg(v)\right)&=d_E\left(f(s)g(s),f(v)g(v)\right)\\
&=d_E\left(f(s)g(s)+f(s)g(v)-f(s)g(v),f(v)g(v)\right)\\
&=d_E\left(f(s)g(s)-f(s)g(v),-f(s)g(v)+f(v)g(v)\right)\\
&=d_E\left(f(s)\left(g(s)-g(v)\right),-g(v)\left(f(s)-f(v)\right)\right)\\
&\leq d_E\left(f(s)\left(g(s)-g(v)\right),0\right)+d_E\left(-g(v)\left(f(s)-f(v)\right),0\right)\\
&=d_E\left(f(s),0\right)d_E\left(g(s)-g(v),0\right)+d_E\left(g(v),0\right)d_E\left(f(s)-f(v),0\right)\\
&=d_E\left(f(s),0\right)d_E\left(g(s),g(v)\right)+d_E\left(g(v),0\right)d_E\left(f(s),f(v)\right)\\
&\leq\left(d_E\left(f(s),f(v)\right)+d_E\left(f(v),0\right)\right)d_E\left(g(s),g(v)\right)+d_E\left(g(v),0\right)d_E\left(f(s),f(v)\right)\\
&<\left(\varepsilon+d_E\left(f(v),0\right)\right)\varepsilon+d_E\left(g(v),0\right)\varepsilon\\
&=\left(\varepsilon+d_E\left(f(v),0\right)+d_E\left(g(v),0\right)\right)\varepsilon
\end{aligned}$$

定理 2.2.7 よりその写像 $fg$ も連続である。

また、$0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}d_E\left(g(v),0\right)$ とおかれれば、$d_E\left(g(s),g(v)\right)<\varepsilon<\dfrac{1}{2}d_E\left(g(v),0\right)$ が成り立ち、したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}d_E\left(g(v),0\right)&=d_E\left(g(v),0\right)-\frac{1}{2}d_E\left(g(v),0\right)\\
&<d_E\left(g(v),0\right)-\varepsilon\\
&=d_E\left(g(v),0\right)-d_E\left(g(s),0\right)+d_E\left(g(s),0\right)-\varepsilon\\
&\leq d_E\left(g(v),g(s)\right)+d_E\left(g(s),0\right)-d_E\left(g(s),0\right)+d_E\left(g(s),0\right)-\varepsilon\\
&=d_E\left(g(v),g(s)\right)+d_E\left(g(s),0\right)-\varepsilon
\end{aligned}$$

---

かれることができるので、$n=2$ のときでも写像たち $fg$、$\dfrac{f}{g}$ も連続となる。

$$
\begin{aligned}
&< \varepsilon + d_E\left(g(s), 0\right) - \varepsilon \\
&= d_E\left(g(s), 0\right)
\end{aligned}
$$

これにより、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
d_E\left(\frac{1}{g(s)}, \frac{1}{g(v)}\right) &= d_E\left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{g(v)}, 0\right) \\
&= d_E\left(\frac{g(v) - g(s)}{g(s)g(v)}, 0\right) \\
&= \frac{d_E\left(g(v) - g(s), 0\right)}{d_E\left(g(s), 0\right) d_E\left(g(v), 0\right)} \\
&= \frac{d_E\left(g(s), g(v)\right)}{d_E\left(g(s), 0\right) d_E\left(g(v), 0\right)} \\
&< \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2} d_E\left(g(v), 0\right)^2}
\end{aligned}
$$

定理 2.2.7 よりその写像 $\dfrac{f}{g}$ も連続である。 □

**定理 2.2.9.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その距離関数 $d$ がその距離空間 $(S,d)$ の直積距離空間 $(S \times S, d')$ における位相空間 $(S \times S, \mathfrak{O}_{d'})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像である。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、直積 $S \times S$ の元の列 $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が極限をもつとすれば、定理 2.1.25 より次式が成り立つので、

$$
\lim_{n \to \infty} d\left(a_n, b_n\right) = d\left(\lim_{n \to \infty} a_n, \lim_{n \to \infty} b_n\right)
$$

定理 2.1.14 よりその距離関数 $d$ がその距離空間 $(S,d)$ の直積距離空間 $(S \times S, d')$ における位相空間 $(S \times S, \mathfrak{O}_{d'})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像である。 □

**定理 2.2.10.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ は、$\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対し、開区間 $(a,b)$ を台集合とする部分位相空間 $\left((a,b), (\mathfrak{O}_{d_E})_{(a,b)}\right)$ と同相である。

**証明.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ について、$\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対し、開区間 $(a,b)$ を台集合とする部分位相空間 $\left((a,b), (\mathfrak{O}_{d_E})_{(a,b)}\right)$ が与えられたとき、次のような写像 $f$ が考えられれば、

$$
\begin{aligned}
&f : (-1,1) \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{1 - x^2} \\
&g : (a,b) \to (-1,1); x \mapsto \frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}
$$

その合成写像 $f \circ g$ がこれらの位相空間たち $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$、$\left((a,b), (\mathfrak{O}_{d_E})_{(a,b)}\right)$ の間の同相写像となる。 □

### 2.2.4 Euclid 空間における位相空間の連結

**定理 2.2.11.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ について、$\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対し、次の集合たちを台集合とする部分位相空間はいづれも連結である。

$$
\mathbb{R}, \quad (a,b), \quad [a,b], \quad (a,b], \quad [a,b),
$$

$$(a,\infty),\quad [a,\infty),\quad (-\infty,b),\quad (-\infty,b]$$

**証明.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ について、空集合でない 2 つの閉集合たち $A$、$B$ を用いて $\mathbb{R}=A\sqcup B$ が成り立つと仮定しよう。これらの閉集合たちの実数たちそれぞれ $a$、$b$ がとられれば、$a\neq b$ が成り立つので、$a<b$ としても一般性は失われなくそうする。このとき、$a\in A\cap(-\infty,b)$ が成り立つので、$A\cap(-\infty,b)\neq\emptyset$ が成り立つ。また、その実数 $b$ がその集合 $A\cap(-\infty,b)$ の 1 つの上界であるから、その集合 $A\cap(-\infty,b)$ の上限 $c$ が存在して $c=\sup(A\cap(-\infty,b))\leq b$ が成り立ち、したがって、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$c-\varepsilon<a'\leq c$ なる実数 $a'$ がその集合 $A\cap(-\infty,b)$ に、したがって、その集合 $A$ に存在するので、$(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ が成り立つ、即ち、$B(c,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ が成り立つ。ここで、定理 1.2.17 と定理 2.1.9 より $c\in\mathrm{cl}A=A$ が成り立つ。これにより、$c<b$ が成り立つ。一方で、$c=\sup(A\cap(-\infty,b))<d\leq b$ なる実数 $d$ が $d\in A$ を満たすとすれば、$d\neq b$ が成り立つので、$d\in A\cap(-\infty,b)$ が成り立つことになるが、これは上限の定義に矛盾している。したがって、$d\in\mathbb{R}\setminus A=B$ が成り立つ。このとき、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$d\in(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ が成り立つので、$(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\cap B\neq\emptyset$ が成り立つ、即ち、$B(c,\varepsilon)\cap B\neq\emptyset$ が成り立つ。ここで、定理 1.2.17 と定理 2.1.9 より $c\in\mathrm{cl}B=B$ が成り立つ。これにより、$c\in A\cap B$ が成り立つことになるが、これは仮定に矛盾している。したがって、空集合でない任意の 2 つの閉集合たち $A$、$B$ は $\mathbb{R}=A\sqcup B$ を満たせない。したがって、定理 1.5.1 より 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ は連結である。

また、$\forall a,b\in\mathbb{R}$ に対し、その部分位相空間 $\left((a,b),(\mathfrak{O}_{d_E})_{(a,b)}\right)$ は定理 2.2.10 より連結である。さらに、定理 1.5.5 より $\forall a,b\in\mathbb{R}$ に対し、次の集合たちを台集合とする部分位相空間はいづれも連結である。

$$[a,b],\quad (a,b],\quad [a,b)$$

最後に、定理 1.5.7 より $\forall a,b\in\mathbb{R}$ に対し、次式のようにおかれれば、

$$\begin{gathered}(a,\infty)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a,a+n),\quad [a,\infty)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a,a+n),\\ (-\infty,b)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(b-n,b),\quad (-\infty,b]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(b-n,b]\end{gathered}$$

次の集合たちを台集合とする部分位相空間はいづれも連結である。

$$(a,\infty),\quad [a,\infty),\quad (-\infty,b),\quad (-\infty,b]$$

以上、$\forall a,b\in\mathbb{R}$ に対し、上記の集合たちを台集合とする部分位相空間はいづれも連結であることが示された。 □

**定理 2.2.12.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ は連結である。

**証明.** 定理 1.5.11 と定理 2.2.11 より明らかである。 □

**定理 2.2.13.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ の連結な部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が与えられたとき、$\forall a,b\in M$ に対し、$a<b$ が成り立つなら、$[a,b]\subseteq M$ が成り立つ。

**証明.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ の連結な部分位相空間 $(M,\mathfrak{O}_M)$ が与えられたとする。$M=\{a\}$ が成り立つなら、$M=[a,a]$ が成り立つので、その部分集合 $M$ はこれの元を 2 つ以上もつとしてもよい。ここで、$\exists a,b\in M$ に対し、$a<b$ が成り立つかつ、$[a,b]\subseteq M$ が成り立たないと仮定する。このとき、$\exists c\in[a,b]$ に対し、$c\notin M$ が成り立ち、したがって、次式が成り立つ。

$$M=M\setminus\{c\}\subseteq\mathbb{R}\setminus\{c\}=(-\infty,c)\cup(c,\infty),\quad (-\infty,c)\cap(c,\infty)\cap M\subseteq(-\infty,c)\cap(c,\infty)=\emptyset$$

さらに、$a,b \in M$ かつ $a \in (-\infty,c)$ かつ $b \in (c,\infty)$ が成り立つので、$(-\infty,c) \cap M \neq \emptyset$ かつ $(c,\infty) \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。このとき、集合たち $(-\infty,c)$、$(c,\infty)$ はいづれも開集合であり、次式が成り立つ。

$$\begin{gathered} M \subseteq (-\infty,c) \cup (c,\infty), \quad (-\infty,c) \cap (c,\infty) \cap M = \emptyset, \\ (-\infty,c) \cap M \neq \emptyset, \quad (c,\infty) \cap M \neq \emptyset \end{gathered}$$

ここで、定理 1.5.2 よりその位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ が連結でないことになるが、これは仮定に矛盾している。したがって、$\forall a,b \in M$ に対し、$a < b$ が成り立つなら、$[a,b] \subseteq M$ が成り立つ。 □

**定理 2.2.14.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ について、$\forall a,b \in \mathbb{R}$ に対し、次の集合たちを台集合とする部分位相空間以外で連結な部分位相空間は存在しない。

$$\begin{gathered} \mathbb{R}, \quad (a,b), \quad [a,b], \quad (a,b], \quad [a,b), \\ (a,\infty), \quad [a,\infty), \quad (-\infty,b), \quad (-\infty,b] \end{gathered}$$

**証明.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ の連結な部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ が与えられたとする。定理 2.2.13 より $\forall a,b \in M$ に対し、$a < b$ が成り立つなら、$[a,b] \subseteq M$ が成り立つ。

ここで、その部分集合が有界であるなら、上限性質より下限 $\inf M$、上限 $\sup M$ が存在して、$M \subseteq [\inf M, \sup M]$ が成り立つ。ここで、$\forall a \in (\inf M, \sup M)$ に対し、$a \notin M$ が成り立つとすれば、$\forall b \in M$ に対し、$a < b$ または $b < a$ が成り立ち、したがって、$a \leq \inf M \leq b$ または $b \leq \sup M \leq a$ が成り立つことになるが、これは $\inf M < a < \sup M$ が成り立つことに矛盾する。したがって、$(\inf M, \sup M) \subseteq M$ が成り立つことになる。これにより、その部分集合 $M$ は次のうちいづれかである。

$$(\inf M, \sup M), \quad [\inf M, \sup M], \quad (\inf M, \sup M], \quad [\inf M, \sup M)$$

その部分集合 $M$ が有限でなければ、その部分集合 $M$ は次のうちいづれかである。

$$\mathbb{R}, \quad (\inf M, \infty), \quad [\inf M, \infty), \quad (-\infty, \sup M), \quad (-\infty, \sup M]$$

以上、$\forall a,b \in \mathbb{R}$ に対し、上記の集合たちを台集合とする部分位相空間以外で連結な部分位相空間は存在しないことが示された。 □

**定理 2.2.15.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ について、$\forall a,b \in \mathbb{R}$ に対し、次の集合たちを台集合とする部分位相空間以外で同相な部分位相空間は存在しない。

$$\mathbb{R}, \quad (a,b), \quad (a,\infty), \quad (-\infty,b)$$

**証明.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ からこれの部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ への同相写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ が与えられたとき、その写像 $f$ はその位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ からその部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ へ連続写像でもあるから、定理 1.5.3 よりその部分位相空間 $(M, \mathfrak{O}_M)$ は連結であり、定理 2.2.14 より $\forall a,b \in \mathbb{R}$ に対し、次の集合たちを台集合とする部分位相空間以外で連結な部分位相空間は存在しないのであった。

$$\begin{gathered} \mathbb{R}, \quad (a,b), \quad [a,b], \quad (a,b], \quad [a,b), \\ (a,\infty), \quad [a,\infty), \quad (-\infty,b), \quad (-\infty,b] \end{gathered}$$

ここで、その写像 $f$ は同相写像なので、$V(f) = M$ が成り立ち、開写像でもあるから、その部分集合 $M$ が開集合である。したがって、$\forall a,b \in \mathbb{R}$ に対し、次の集合たちを台集合とする部分位相空間以外で同相な部分位相空間は存在しない。

$$\mathbb{R}, \quad (a,b), \quad (a,\infty), \quad (-\infty,b)$$

□

**定理 2.2.16** (中間値の定理の拡張)**.** 連結な位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f:S\rightarrow\mathbb{R}$ について、$\forall a,b\in S$ に対し、$f(a)<f(b)$ が成り立つなら、$\forall\gamma\in[f(a),f(b)]$ に対し、$f(c)=\gamma$ なるその集合 $S$ の元 $c$ が存在する。この定理を一般化された中間値の定理、中間値の定理の拡張ということにする。

**証明.** 連結な位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f:S\rightarrow\mathbb{R}$ について、定理 1.5.3 よりその部分位相空間 $\left(V(f),\mathfrak{O}_{V(f)}\right)$ も連結であり、したがって、定理 2.2.13 より $\forall\alpha,\beta\in V(f)$ に対し、$\alpha<\beta$ が成り立つなら、$[\alpha,\beta]\subseteq V(f)$ が成り立つので、$\forall a,b\in S$ に対し、$f(a)<f(b)$ が成り立つなら、$[f(a),f(b)]\subseteq V(f)$ も成り立つ。したがって、$\forall\gamma\in[f(a),f(b)]$ に対し、$\gamma\in V(f)$ が成り立つので、$f(c)=\gamma$ なるその集合 $S$ の元 $c$ が存在する。 □

### 2.2.5 弧状連結

**定義 2.2.3.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ の部分位相空間 $\left([0,1],\left(\mathfrak{O}_{d_E}\right)_{[0,1]}\right)$ から位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ への連続写像 $f:[0,1]\rightarrow S$ が与えられたとき、その写像 $f$ の値域 $V(f)$ をその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ におけるその写像 $f$ による弧といい、その弧はその元 $f(0)$ とその元 $f(1)$ とを結ぶという。

**定理 2.2.17.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における弧 $A$ を台集合とするその部分位相空間 $(A,\mathfrak{O}_A)$ は連結である。

**証明.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における弧 $A$ を台集合とするその部分位相空間 $(A,\mathfrak{O}_A)$ が与えられたとき、1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ の部分位相空間 $\left([0,1],\left(\mathfrak{O}_{d_E}\right)_{[0,1]}\right)$ から位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ へのある連続写像 $f:[0,1]\rightarrow S$ が存在して $A=V(f)$ が成り立つ。ここで、定理 2.2.11 よりその部分位相空間 $\left([0,1],\left(\mathfrak{O}_{d_E}\right)_{[0,1]}\right)$ は連結であり、定理 1.5.3 よりその部分位相空間 $(A,\mathfrak{O}_A)$ も連結である。 □

**定理 2.2.18.** $i\in\varLambda_n$ なる位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における連続写像たち $f_i$ による弧々 $A_i$ が、$\forall i\in\varLambda_{n-1}$ に対し、$f_i(1)=f_{i+1}(0)$ を満たすなら、その和集合 $\bigcup_{i\in\varLambda_n}A_i$ もその元 $f_1(0)$ からその元 $f_n(1)$ への弧となる。

**証明.** $i\in\varLambda_n$ なる位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における写像たち $f_i$ による弧々 $A_i$ が、$\forall i\in\varLambda_{n-1}$ に対し、$f_i(1)=f_{i+1}(0)$ を満たすとするなら、1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ の部分位相空間 $\left([0,1],\left(\mathfrak{O}_{d_E}\right)_{[0,1]}\right)$ からその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ への写像 $f:[0,1]\rightarrow S$ が、$\bigcup_{i\in\varLambda_n}\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]=[0,1]$ が成り立つことにより、$\forall i\in\varLambda_n$ に対し、$t\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ が成り立つなら、$f(t)=f_i(nt-i+1)$ が成り立つように定義されればよい。その写像 $f$ が連続であることは定理 2.1.14 から直ちに分かる。 □

**定義 2.2.4.** 位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a,b\in S$ に対し、その元 $a$ とその元 $b$ を結ぶ弧 $A$ が存在するとき、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は弧状連結であるという。

**定理 2.2.19.** 弧状連結な位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は連結である。
　ただし、逆は必ずしも成り立つとは限らないことに注意されたい。

**証明.** 弧状連結な位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall a,b\in S$ に対し、その元 $a$ とその元 $b$ を結ぶ弧 $A_b$ が存在することになり、定理 2.2.17 より、位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ における弧 $A_b$ を台集合とするその部分位相空

間 $(A_b,\mathfrak{O}_{A_b})$ は連結である。さらに、$\forall b\in S$ に対し、$a\in A_b$ が成り立つので、定理 1.5.7 よりその部分位相空間 $\left(\bigcup_{b\in S}A_b,\mathfrak{O}_{\bigcup_{b\in S}A_b}\right)$ も連結である。ここで、明らかに $\bigcup_{b\in S}A_b\subseteq S$ が成り立ち、$\forall b\in S$ に対し、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ が弧状連結であるから、その元 $a$ とその元 $b$ とを結ぶ弧 $A_b$ が存在して $b\in A_b$ が成り立ち、したがって、$b\in\bigcup_{b\in S}A_b$ が成り立つので、$\bigcup_{b\in S}A_b=S$ が成り立つ。これにより、連結なその部分位相空間 $\left(\bigcup_{b\in S}A_b,\mathfrak{O}_{\bigcup_{b\in S}A_b}\right)$ はその位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ でもあるので、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は連結である。 □

### 2.2.6 凸集合

**定義 2.2.5.** $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の 2 点 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ に対し、次式のように定義される集合 $l(\mathbf{a},\mathbf{b})$ をこれらの 2 点 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ を結ぶ線分という。

$$l(\mathbf{a},\mathbf{b})=\{\mathbf{l}\in\mathbb{R}^n|\mathbf{l}=(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b},\quad t\in[0,1]\}$$

**定理 2.2.20.** $\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ に対し、次式のように定義される写像 $f$ は 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ の部分位相空間 $\left([0,1],(\mathfrak{O}_{d_E})_{[0,1]}\right)$ から $n$ 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ への連続写像 $f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ で、

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}^n;t\mapsto(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$$

さらに、これらの 2 点 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ を結ぶ線分 $l(\mathbf{a},\mathbf{b})$ はその写像 $f$ によるこれらの 2 点 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ を結ぶ弧である。

**証明.** 定理 2.1.14 より明らかである。 □

**定義 2.2.6.** $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $M$ が与えられたとき、$\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in M$ に対し、これらの線分 $l(\mathbf{a},\mathbf{b})$ が $l(\mathbf{a},\mathbf{b})\subseteq M$ を満たすとき、その集合 $M$ は凸集合であるという。もちろん、$n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ 自身も凸集合である。また、空集合も凸集合であるとする。

**定理 2.2.21.** $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の凸集合である部分集合 $M$ が与えられたとき、$n$ 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の部分位相空間 $\left(M,(\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_M\right)$ は弧状連結である。

**証明.** $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の凸集合である部分集合 $M$ が与えられたとき、$n$ 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の部分位相空間 $\left(M,(\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_M\right)$ について、$\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in M$ に対し、これらの線分 $l(\mathbf{a},\mathbf{b})$ は定理 2.1.18、定理 2.2.20 よりこれらの 2 点 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ を結ぶ弧である。ゆえに、その部分位相空間 $\left(M,(\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_M\right)$ は弧状連結である。 □

**定理 2.2.22.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の任意の元 $\mathbf{a}$ における任意の開球体 $B(\mathbf{a},\varepsilon)$ は凸集合である。

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の任意の元 $\mathbf{a}$ における任意の開球体 $B(\mathbf{a},\varepsilon)$ において、$\forall\mathbf{b},\mathbf{c}\in B(\mathbf{a},\varepsilon)$ に対し、次式が成り立つ。

$$d_{E^n}(\mathbf{a},\mathbf{b})<\varepsilon,\quad d_{E^n}(\mathbf{a},\mathbf{c})<\varepsilon$$

ここで、これらの線分 $l(\mathbf{b},\mathbf{c})$ の任意の元 $\mathbf{l}$ は、$\exists t\in[0,1]$ に対し、$\mathbf{l}=(1-t)\mathbf{b}+t\mathbf{c}$ を満たすので、次のようになる。

$$d_{E^n}(\mathbf{a},\mathbf{l})=d_{E^n}(\mathbf{a},(1-t)\mathbf{b}+t\mathbf{c})$$

$$
\begin{aligned}
&= d_{E^n}\left((1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{a},(1-t)\mathbf{b}+t\mathbf{c}\right)\\
&= d_{E^n}\left((1-t)\mathbf{a}-(1-t)\mathbf{b},t\mathbf{a}-t\mathbf{c}\right)\\
&\leq d_{E^n}\left((1-t)\mathbf{a}-(1-t)\mathbf{b},\mathbf{0}\right)+d_{E^n}\left(t\mathbf{a}-t\mathbf{c},\mathbf{0}\right)\\
&= (1-t)d_{E^n}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)+td_{E^n}\left(\mathbf{a},\mathbf{c}\right)\\
&< (1-t)\varepsilon+t\varepsilon=\varepsilon
\end{aligned}
$$

これにより、$\mathbf{l}\in B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right)$ が成り立つので、$l\left(\mathbf{b},\mathbf{c}\right)\subseteq B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right)$ が成り立ち、したがって、その開球体 $B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right)$ は凸集合である。 □

### 2.2.7 連結と弧状連結

**定義 2.2.7.** 定理 2.2.20 より $i\in\Lambda_{m+1}$ なる $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の点々 $\mathbf{a}_i$ が与えられたとき、これらの点々を結ぶ線分 $l\left(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_{i+1}\right)$ が $n$ 次元 Euclid 空間における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ における連続写像 $f_i$ による弧 $L_i$ とみなされることができるので、そうするとき、1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $\left(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E}\right)$ の部分位相空間 $\left([0,1],\left(\mathfrak{O}_{d_E}\right)_{[0,1]}\right)$ からその位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ への写像 $f:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}^n$ が、$\forall i\in\Lambda_n$ に対し、$t\in\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right]$ が成り立つなら、$f(t)=f_i(nt-i+1)$ が成り立つように定義されたとき、その写像 $f$ によるこれらの点々 $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_{m+1}$ を結ぶ弧 $L$ をこれらの点々 $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_{m+1}$ を結ぶ折線という。

**定理 2.2.23.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ の開集合 $O$ を台集合とする部分位相空間 $\left(O,\left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_O\right)$ が連結であるなら、$\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in O$ に対し、これらの点々とを結ぶ折線が存在する。

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ の開集合 $O$ を台集合とする部分位相空間 $\left(O,\left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_O\right)$ が連結であるとする。$\forall\mathbf{a}\in O$ に対し、これと折線で結べるその開集合 $O$ の元々全体を $A$、これと折線で結べないその開集合 $O$ の元々全体を $B$ とおくと、$\mathbf{a}\in A$ が成り立つので、$A\neq\emptyset$ が成り立つ。また、もちろん $O=A\sqcup B$ が成り立つ。

$\forall\mathbf{c}\in A$ に対し、これらの点々 $\mathbf{a}$、$\mathbf{c}$ を結ぶ折線 $L$ が存在する。ここで、その集合 $O$ は開集合なので、ある開球体 $B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)$ が存在して $B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)\subseteq O$ が成り立つ。$\forall\mathbf{c}'\in B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)$ に対し、定理 2.2.22 よりこれらの点々 $\mathbf{c}$、$\mathbf{c}'$ を結ぶ線分 $l\left(\mathbf{c},\mathbf{c}'\right)$ が $l\left(\mathbf{c},\mathbf{c}'\right)\subseteq B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)$ を満たすので、その線分 $l\left(\mathbf{c},\mathbf{c}'\right)$ が $M$ とおかれると、定理 2.2.18 より集合 $L\cup M$ はこれらの点々 $\mathbf{a}$、$\mathbf{c}'$ を結ぶ折線となる。したがって、$\mathbf{c}'\in A$ が成り立つので、$B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)\subseteq A$ が成り立ち、したがって、その集合 $A$ は開集合である。

$\forall\mathbf{c}\in B$ に対し、その集合 $O$ は開集合なので、ある開球体 $B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)$ が存在して $B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)\subseteq O$ が成り立つ。$\forall\mathbf{c}'\in B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)$ に対し、定理 2.2.22 よりこれらの点々 $\mathbf{c}$、$\mathbf{c}'$ を結ぶ線分 $l\left(\mathbf{c},\mathbf{c}'\right)$ が $l\left(\mathbf{c},\mathbf{c}'\right)\subseteq B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)$ を満たすので、その線分 $l\left(\mathbf{c},\mathbf{c}'\right)$ が $M$ とおかれるとする。ここで、その元 $\mathbf{c}'$ とその元 $\mathbf{a}$ とを結ぶ折線 $L$ が存在するとすれば、定理 2.2.18 より集合 $L\cup M$ はこれらの点々 $\mathbf{a}$、$\mathbf{c}$ を結ぶ折線となるが、これは $\mathbf{c}\in B$ が成り立つことに矛盾する。したがって、$\mathbf{c}'\in B$ が成り立つので、$B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)\subseteq B$ が成り立ち、したがって、その集合 $B$ も開集合である。

以上の議論により、$O=A\sqcup B$ かつ $A\neq\emptyset$ かつこれらの集合たち $A$、$B$ が開集合であり、その部分位相空間 $\left(O,\left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_O\right)$ が連結であるので、定理 1.5.2 より $B=\emptyset$ が成り立つ。よって、その部分位相空間 $\left(O,\left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_O\right)$ が連結であるなら、$\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in O$ に対し、これらの点々を結ぶ折線が存在する。 □

**定理 2.2.24.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ の開集合 $O$ を台集合とする部分位相空間 $\left(O,\left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_O\right)$ について、次のことは同値である。

- その部分位相空間 $\left(O, \left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_O\right)$ が連結である。
- $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in O$ に対し、これらの点々を結ぶ折線が存在する。
- $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in O$ に対し、これらの点々を結ぶ弧が存在する。

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ の開集合 $O$ を台集合とする部分位相空間 $\left(O, \left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_O\right)$ について、その部分位相空間 $\left(O, \left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_O\right)$ が連結であるなら、定理 2.2.23 より $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in O$ に対し、これらの点々とを結ぶ折線が存在する。これが成り立つなら、明らかに $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in O$ に対し、これらの点々を結ぶ弧が存在する。これが成り立つなら、定理 2.2.19 よりその部分位相空間 $\left(O, \left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_O\right)$ は連結である。

以上で示すべきことが示された。 □

**定理 2.2.25.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の凸集合である部分集合の族 $\left\{M_\lambda\right\}_{\lambda \in \varLambda}$ が与えられたとき、これの共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \varLambda} M_\lambda$ も凸集合である。

**証明.** 添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられた $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の凸集合である部分集合の族 $\left\{M_\lambda\right\}_{\lambda \in \varLambda}$ が与えられたとき、これの共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \varLambda} M_\lambda$ について、$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \bigcap_{\lambda \in \varLambda} M_\lambda$ に対し、$\bigcap_{\lambda \in \varLambda} M_\lambda \subseteq M_\lambda$ が成り立つので、$l\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) \subseteq M_\lambda$ が成り立つ。このことが全ての添数 $\lambda$ に対し成り立つので、$l\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \varLambda} M_\lambda$ が成り立つ。ゆえに、その共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \varLambda} M_\lambda$ は凸集合である。 □

### 2.2.8 凸包

**定理 2.2.26.** $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合 $A$ が与えられたとき、$A \subseteq C$ なるその $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の凸集合 $C$ のうち順序関係 $\subseteq$ の意味で最小なものが一意的に存在する。この集合をその集合 $A$ の凸包といい $\mathrm{conv}A$ と書く。

**証明.** $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合 $A$ が与えられたとき、$A \subseteq C$ なるその $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の凸集合 $C$ は明らかに存在する。例えば、その $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ が挙げられる。ここで、その $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の凸集合全体を $\mathfrak{C}$ とおくと、その共通部分 $\bigcap_{\substack{C \in \mathfrak{C} \\ A \subseteq C}} C$ が求める最小なものである。 □

**定義 2.2.8.** $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の元の族 $\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j \in \varLambda_m}$ が与えられたとき、$A = \left(\mathbf{a}_j\right)_{j \in \varLambda_m}$ とおくと、次式のよう

な集合 $V\left(L_A|\varDelta_C^m\right)$ をその $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の単体という[*42]。

$$\begin{aligned}
V\left(L_A|\varDelta_C^m\right) &= \left\{\sum_{j\in\varLambda_m} t_j\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n \middle| \mathbf{t} = \left(t_j\right)_{j\in\varLambda_m} \in \varDelta_C^n\right\},\\
\varDelta_C^m &= \left\{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m \middle| \mathbf{t} = \left(t_j\right)_{j\in\varLambda_m},\quad \forall j \in \varLambda_m\left[0 \leq t_j\right],\quad \sum_{j\in\varLambda_m} t_j = 1\right\}
\end{aligned}$$

**定理 2.2.27.** $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の元の族 $\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_m}$ が与えられたとき、$A = \left(\mathbf{a}_j\right)_{j\in\varLambda_m}$ とおくと、その $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の単体 $V\left(L_A|\varDelta_C^m\right)$ は凸集合である。

**証明.** $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の元の族 $\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_m}$ が与えられたとき、$A = \left(\mathbf{a}_j\right)_{j\in\varLambda_m}$ とおくと、その $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の単体 $V\left(L_A|\varDelta_C^m\right)$ について、$\forall\mathbf{a},\mathbf{b} \in V\left(L_A|\varDelta_C^m\right)$ に対し、定義より $\exists\mathbf{s},\mathbf{t} \in \varDelta_C^m$ に対し、$\mathbf{s} = \left(s_j\right)_{j\in\varLambda_m}$、$\mathbf{t} = \left(t_j\right)_{j\in\varLambda_m}$ とおくと、次式が成り立つ。

$$\mathbf{a} = \sum_{j\in\varLambda_m} s_j\mathbf{a}_j,\quad \mathbf{b} = \sum_{j\in\varLambda_m} t_j\mathbf{a}_j$$

そこで、$\forall\mathbf{c} \in l\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)$ に対し、定義より $\exists t \in R$ に対し、$0 \leq t \leq 1$ かつ次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} &= (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}\\
&= (1-t)\sum_{j\in\varLambda_m} s_j\mathbf{a}_j + t\sum_{j\in\varLambda_m} t_j\mathbf{a}_j\\
&= \sum_{j\in\varLambda_m}\left((1-t)s_j + tt_j\right)\mathbf{a}_j
\end{aligned}$$

ここで、次のようになるかつ、

$$\begin{aligned}
\forall j \in \varLambda_m\left[0 \leq s_j \wedge 0 \leq t_j\right] \wedge 0 \leq t \leq 1 &\Leftrightarrow \forall j \in \varLambda_m\left[0 \leq s_j \wedge 0 \leq t_j \wedge 0 \leq t \wedge 0 \leq 1-t\right]\\
&\Rightarrow \forall j \in \varLambda_m\left[0 \leq (1-t)s_j \wedge 0 \leq tt_j\right]\\
&\Rightarrow \forall j \in \varLambda_m\left[0 \leq (1-t)s_j + tt_j\right]
\end{aligned}$$

次式が成り立つので、

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\varLambda_m}\left((1-t)s_j + tt_j\right) &= (1-t)\sum_{j\in\varLambda_m} s_j + t\sum_{j\in\varLambda_m} t_j\\
&= 1 - t + t = 1
\end{aligned}$$

したがって、$\mathbf{c} \in V\left(L_A|\varDelta_C^m\right)$ が成り立つ。ゆえに、$l\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right) \subseteq V\left(L_A|\varDelta_C^m\right)$ が成り立つので、その $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の単体 $V\left(L_A|\varDelta_C^m\right)$ は凸集合である。 □

[*42] この記号の由来としては、線形写像 $L_A:\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n;\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ を考えたとき、$\mathbf{t} = \left(t_j\right)_{j\in\varLambda_m}$ とすれば、$A\mathbf{t} = \sum_{j\in\varLambda_m} t_j\mathbf{a}_j$ と与えられているので、次のようになることからきている。

$$\begin{aligned}
V\left(L_A|\varDelta_C^m\right) &= \left\{L_A\left(\mathbf{t}\right) \in \mathbb{R}^n|\mathbf{t} \in \varDelta_C^m\right\}\\
&= \left\{A\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n|\mathbf{t} \in \varDelta_C^m\right\}\\
&= \left\{\sum_{j\in\varLambda_m} t_j\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n \middle| \mathbf{t} = \left(t_j\right)_{j\in\varLambda_m} \in \varDelta_C^m\right\}
\end{aligned}$$

**定理 2.2.28.** $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の元の族 $\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_m}$ が与えられたとき、$A=\left(\mathbf{a}_j\right)_{j\in\varLambda_m}$ とおくと、$V\left(L_A|\varDelta_C^m\right)=\operatorname{conv}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_m}$ が成り立つ。

**証明.** $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の元の族 $\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_m}$ が与えられたとき、$A=\left(\mathbf{a}_j\right)_{j\in\varLambda_m}$ とおくと、$m=1$ のとき、$V\left(L_A|\varDelta_C^1\right)=\left\{\mathbf{a}_1\right\}$ が成り立つので、定理 2.2.27 より次式が成り立つ。

$$V\left(L_A|\varDelta_C^1\right)=\left\{\mathbf{a}_1\right\}=\operatorname{conv}\left\{\mathbf{a}_1\right\}$$

$m=k$ のとき、示すべきことが成り立つと仮定すると、$m=k+1$ のとき、凸包の定義より $V\left(L_A|\varDelta_C^{k+1}\right)\supseteq\operatorname{conv}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_{k+1}}$ が成り立つ。一方で、$\forall\mathbf{a}\in V\left(L_A|\varDelta_C^{k+1}\right)$ に対し、定義より $\exists\mathbf{t}\in\varDelta_C^{k+1}$ に対し、$\mathbf{t}=\left(t_j\right)_{j\in\varLambda_{k+1}}$ とおくと、次式が成り立つ。

$$\mathbf{a}=\sum_{j\in\varLambda_{k+1}}t_j\mathbf{a}_j=\sum_{j\in\varLambda_k}t_j\mathbf{a}_j+t_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}$$

$t_{k+1}=1$ のとき、$\mathbf{a}=\mathbf{a}_{k+1}\in\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_{k+1}}\subseteq\operatorname{conv}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_{k+1}}$ が成り立つ。$t_{k+1}<1$ のとき、次のようになり、

$$\begin{aligned}\mathbf{a}&=\sum_{j\in\varLambda_{k+1}}t_j\mathbf{a}_j\\&=\sum_{j\in\varLambda_k}t_j\mathbf{a}_j+t_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}\\&=\left(1-t_{k+1}\right)\sum_{j\in\varLambda_k}\frac{t_j}{1-t_{k+1}}\mathbf{a}_j+t_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}\end{aligned}$$

ここで、次式のようにおかれれば、

$$\mathbf{b}=\sum_{j\in\varLambda_k}\frac{t_j}{1-t_{k+1}}\mathbf{a}_j$$

$\forall j\in\varLambda_k$ に対し、$0\leq\dfrac{t_j}{1-t_{k+1}}$ が成り立つかつ、次のようになることから、

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\varLambda_k}\frac{t_j}{1-t_{k+1}}&=\frac{1}{1-t_{k+1}}\sum_{j\in\varLambda_k}t_j\\&=\frac{1}{1-t_{k+1}}\left(\sum_{j\in\varLambda_{k+}}t_j-t_{k+1}\right)\\&=\frac{1}{1-t_{k+1}}\cdot\left(1-t_{k+1}\right)=1\end{aligned}$$

数学的帰納法の仮定により $A'=\left(\mathbf{a}_j\right)_{j\in\varLambda_k}$ とおくと、次式が成り立つ。

$$\mathbf{b}=\sum_{j\in\varLambda_k}\frac{t_j}{1-t_{k+1}}\mathbf{a}_j\in V\left(L_{A'}|\varDelta_C^k\right)=\operatorname{conv}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_k}\subseteq\operatorname{conv}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_{k+1}}$$

ここで、その集合 $\operatorname{conv}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_{k+1}}$ は凸集合であるので、次式が成り立つ。

$$\mathbf{a}\in l\left(\mathbf{a}_{k+1},\mathbf{b}\right)\subseteq\operatorname{conv}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_{k+1}}$$

以上より、いづれの場合でも $V\left(L_A|\varDelta_C^{k+1}\right) \subseteq \mathrm{conv}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_{k+1}}$ が成り立つので、$V\left(L_A|\varDelta_C^{k+1}\right) = \mathrm{conv}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_{k+1}}$ が成り立つ。

よって、数学的帰納法によって、$n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の元の族 $\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_m}$ が与えられたとき、$V\left(L_A|\varDelta_C^m\right) = \mathrm{conv}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_m}$ が成り立つことが示された。 □

### 2.2.9 Euclid 空間における位相空間と凸集合

**定理 2.2.29.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ とその凸集合 $M$ が与えられたとき、これの閉包 $\mathrm{cl}M$ も凸集合である。

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ とその凸集合 $M$ が与えられたとき、$\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathrm{cl}M\forall\mathbf{c}\in l\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)$ に対し、定理 1.2.15、定理 2.1.6 より $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\mathbf{a}',\mathbf{b}'\in M$ に対し、$\mathbf{a}'\in B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right)$ かつ $\mathbf{b}'\in B\left(\mathbf{b},\varepsilon\right)$ が成り立つ。ここで、$\forall t\in\mathbb{R}$ に対し、$0\leq t\leq 1$ かつ $\mathbf{c}=(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ が成り立つとき、その集合 $M$ が凸集合であることにより、$(1-t)\mathbf{a}'+t\mathbf{b}'\in l\left(\mathbf{a}',\mathbf{b}'\right)\subseteq M$ が成り立ち、この元が $\mathbf{c}'$ とおかれるとき、次のようになる。

$$\begin{aligned}
d_{E^n}\left(\mathbf{c},\mathbf{c}'\right) &= d_{E^n}\left((1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b},(1-t)\mathbf{a}'+t\mathbf{b}'\right)\\
&= d_{E^n}\left((1-t)\left(\mathbf{a}-\mathbf{a}'\right)+t\left(\mathbf{b}-\mathbf{b}'\right),\mathbf{0}\right)\\
&\leq |1-t|d_{E^n}\left(\mathbf{a}-\mathbf{a}',\mathbf{0}\right)+|t|d_{E^n}\left(\mathbf{b}-\mathbf{b}',\mathbf{0}\right)\\
&= |1-t|d_{E^n}\left(\mathbf{a},\mathbf{a}'\right)+|t|d_{E^n}\left(\mathbf{b},\mathbf{b}'\right)\\
&< (1-t)\varepsilon+t\varepsilon=\varepsilon
\end{aligned}$$

したがって、$\mathbf{c}'\in B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)$ が成り立つ、即ち、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$B\left(\mathbf{c},\varepsilon\right)\cap M\neq\emptyset$ が成り立ち、定理 1.2.15、定理 2.1.6 よりしたがって、$\mathbf{c}\in\mathrm{cl}M$ が成り立つ。これにより、$\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathrm{cl}M$ に対し、$l\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)\subseteq\mathrm{cl}M$ が成り立つので、これの閉包 $\mathrm{cl}M$ も凸集合である。 □

**定理 2.2.30.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ とその凸集合 $M$ が与えられたとき、$\forall\mathbf{a}\in\mathrm{int}M\forall\mathbf{b}\in\mathrm{cl}M$ に対し、これらの元々を結ぶ線分 $l\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)$ のその元 $\mathbf{b}$ 以外の任意の元はすべてこれの開核 $\mathrm{int}M$ に属する。

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ とその凸集合 $M$ が与えられたとき、$\forall\mathbf{a}\in\mathrm{int}M\forall\mathbf{b}\in\mathrm{cl}M$ に対し、これらの元々を結ぶ線分 $l\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)$ の両端を除く任意の元 $\mathbf{c}$ が考えられれば、$\mathbf{a}\in\mathrm{int}M$ が成り立つので、定理 1.2.15、定理 2.1.6 より $\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right)\subseteq M$ が成り立つ。ここで、$0<t<1$ なる実数 $t$ を用いて $\mathbf{c}=(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ とおかれるとき、$\forall\mathbf{c}'\in B\left(\mathbf{c},\dfrac{(1-t)\varepsilon}{2}\right)$ に対し、$\mathbf{b}\in\mathrm{cl}M$ が成り立つので、定理 1.2.15、定理 2.1.6 より $B\left(\mathbf{b},\dfrac{(1-t)\varepsilon}{2t}\right)\cap M\neq\emptyset$ が成り立つので、これの元 $\mathbf{b}'$ を用いて $\mathbf{c}'=(1-t)\mathbf{a}'+t\mathbf{b}'$ のように元 $\mathbf{a}'$ が定義されれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}
d_{E^n}\left(\mathbf{a},\mathbf{a}'\right) &= d_{E^n}\left(\frac{1}{1-t}\mathbf{c}-\frac{t}{1-t}\mathbf{b},\frac{1}{1-t}\mathbf{c}'-\frac{t}{1-t}\mathbf{b}'\right)\\
&= d_{E^n}\left(\frac{1}{1-t}\left(\mathbf{c}-\mathbf{c}'\right)-\frac{t}{1-t}\left(\mathbf{b}-\mathbf{b}'\right),\mathbf{0}\right)\\
&\leq \left|\frac{1}{1-t}\right|d_{E^n}\left(\mathbf{c}-\mathbf{c}',\mathbf{0}\right)+\left|-\frac{t}{1-t}\right|d_{E^n}\left(\mathbf{b}-\mathbf{b}',\mathbf{0}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-t} d_{E^n}\left(\mathbf{c}, \mathbf{c}'\right) + \frac{t}{1-t} d_{E^n}\left(\mathbf{b}, \mathbf{b}'\right) \\
&< \frac{1}{1-t}\frac{(1-t)\varepsilon}{2} + \frac{t}{1-t}\frac{(1-t)\varepsilon}{2t} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

これにより、$\mathbf{a}' \in B\left(\mathbf{a}, \varepsilon\right) \subseteq M$ が成り立つ。ここで、その集合 $M$ は凸集合であるから、$l\left(\mathbf{a}', \mathbf{b}'\right) \subseteq M$ が成り立つことにより、$\mathbf{c}' \in l\left(\mathbf{a}', \mathbf{b}'\right) \subseteq M$ が成り立つので、$B\left(\mathbf{c}, \frac{(1-t)\varepsilon}{2}\right) \subseteq M$ が得られる。したがって、定理 1.2.15、定理 2.1.6 より $\mathbf{c} \in \mathrm{int}M$ が成り立つ。もちろん、$\mathbf{a} \in \mathrm{int}M$ も成り立つので、その線分 $l\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$ のその元 $\mathbf{b}$ 以外の任意の元はすべてこれの開核 $\mathrm{int}M$ に属する。 $\square$

**定理 2.2.31.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ とその凸集合 $M$ が与えられたとき、これの開核 $\mathrm{int}M$ も凸集合である。

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ とその凸集合 $M$ が与えられたとき、$\forall\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{int}M$ に対し、$\mathbf{b} \in \mathrm{cl}M$ が成り立つので、定理 2.2.30 よりこれらの元々を結ぶ線分 $l\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$ のその元 $\mathbf{b}$ 以外の任意の元はすべてこれの開核 $\mathrm{int}M$ に属するかつ、$\mathbf{b} \in \mathrm{int}M$ が成り立つので、$l\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) \subseteq \mathrm{int}M$ が成り立ち、よって、その開核 $\mathrm{int}M$ も凸集合である。 $\square$

# 参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p200-208,223-233 ISBN978-4-00-029871-1

## 2.3 集合間の距離

### 2.3.1 集合の直径

**定義 2.3.1.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でないなら、その直積 $M \times M$ に制限されたその距離関数 $d$ の値域 $V(d|M \times M)$ の上限をその集合 $M$ の直径といい、$\delta(M)$ と書く、即ち、次式のように定義される。

$$\delta(M) = \sup V(d|M \times M) = \sup \{d(a,b) \in \mathbb{R} | a,b \in M\}$$

ここで、その集合 $M$ の直径は無限大となるときがあることに注意されたい。例えば、1 次元 Euclid 空間 $E$ でのその集合 $\mathbb{R}$ の直径などが挙げられる。

**定理 2.3.1.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$\delta(M) = 0$ が成り立つならそのときに限り、$\#M = 1$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$\delta(M) = 0$ が成り立つかつ、$\#M > 1$ が成り立つと仮定すると、$\exists a,b \in M$ に対し、$a \neq b$ が成り立つ。一方で、$\delta(M) = 0$ が成り立つことにより、$\forall a,b \in M$ に対し、$d(a,b) = 0$ が成り立つので、$a = b$ が成り立つことになる。しかしながら、このことは矛盾している。よって、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$\delta(M) = 0$ が成り立つなら、$\#M = 1$ が成り立つ。逆は明らかである。 □

**定理 2.3.2.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M,N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$\emptyset \subset M \subseteq N$ が成り立つなら、$\delta(M) \leq \delta(N)$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M,N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$\emptyset \subset M \subseteq N$ が成り立つなら、当然ながら $M \times M \subseteq N \times N$ が成り立つので、$V(d|M \times M) \subseteq V(d|N \times N)$ も成り立つ。したがって、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \delta(M) &= \sup V(d|M \times M) \\ &\leq \sup V(d|N \times N) \\ &= \delta(N) \end{aligned}$$

□

**定義 2.3.2.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でなく、$\delta(M) < \infty$ が成り立つなら、その集合 $M$ は有界であるという。

例えば、その集合 $S$ の元 $a$ を中心とする半径 $\varepsilon$ の開球体 $B(a,\varepsilon)$ の直径は $2\varepsilon$ 以下であるから、その集合 $B(a,\varepsilon)$ は有界である。

**定理 2.3.3.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が有界であるならそのときに限り、$\forall a \in S \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$M \subseteq B(a,\varepsilon)$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が有界であるなら、$\forall b \in M \forall a \in S$

に対し、その集合のある元 $b'$ を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d\left(a,b'\right)+d\left(b,b'\right) \\ &\leq d\left(a,b'\right)+\delta(M) \end{aligned}$$

ここで、$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$d\left(a,b'\right)\in\mathbb{R}$ が成り立つので、$d(a,b)\leq d\left(a,b'\right)+\delta(M)<\varepsilon$ が成り立つ。したがって、$b\in B(a,\varepsilon)$ が成り立つので、$\forall a\in S\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$M\subseteq B(a,\varepsilon)$ が成り立つ。

逆に、$\forall a\in S\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$M\subseteq B(a,\varepsilon)$ が成り立つなら、定理 2.3.2 より $\delta(M)\leq\delta\left(B(a,\varepsilon)\right)$ が成り立ち、ここで、$\forall b,c\in B(a,\varepsilon)$ に対し、次のようになることから、

$$\begin{aligned} d(b,c) &\leq d(a,b)+d(b,c) \\ &< \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon \end{aligned}$$

$\delta(M)\leq\delta\left(B(a,\varepsilon)\right)\leq 2\varepsilon$ が成り立つ。よって、その集合 $M$ が有界である。 □

## 2.3.2 集合間の距離

**定義 2.3.3.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M,N\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、それらの集合たち $M$、$N$ が空集合でないなら、その直積 $M\times N$ に制限された距離関数 $d$ による値域 $V\left(d|M\times N\right)$ は下に有界であるので、その値域の下限が存在してこれをそれらの集合たち $M$、$N$ の間の距離といい、$\mathrm{dist}(M,N)$ と書くことにする、即ち、次式のように定義される。

$$\mathrm{dist}(M,N)=\inf V\left(d|M\times N\right)$$

**定理 2.3.4.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、次のことが成り立つ。

- $\forall M,N\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、それらの集合たち $M$、$N$ が空集合でないなら、$0\leq\mathrm{dist}(M,N)<\infty$ が成り立つ。
- $\forall M,N\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、それらの集合たち $M$、$N$ が空集合でないなら、$\mathrm{dist}(M,N)=\mathrm{dist}(N,M)$ が成り立つ。
- $\forall a,b\in S$ に対し、$\mathrm{dist}\left(\{a\},\ \{b\}\right)=d(a,b)$ が成り立つ。
- $\forall M,N\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、それらの集合たち $M$、$N$ が空集合でなく $M\cap N\neq\emptyset$ が成り立つなら、$\mathrm{dist}(M,N)=0$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M,N\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、それらの集合たち $M$、$N$ が空集合でないなら、$\forall d(a,b)\in V\left(d|M\times N\right)$ に対し、$0\leq d(a,b)<\infty$ が成り立つので、$0\leq\mathrm{dist}(M,N)\leq d(a,b)<\infty$ が成り立つ。

$\forall M,N\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、それらの集合たち $M$、$N$ が空集合でないなら、$V\left(d|M\times N\right)=V\left(d|N\times M\right)$ が成り立つことにより、$\mathrm{dist}(M,N)=\mathrm{dist}(N,M)$ が成り立つ。

$\forall a,b\in S$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}\left(\{a\},\{b\}\right) &= \inf V\left(d|\left\{a\right\}\times\{b\}\right) \\ &= \inf\left\{d(a,b)\right\} \\ &= d(a,b) \end{aligned}$$

$\forall M,N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、それらの集合たち $M$、$N$ が空集合でなく $M \cap N \neq \emptyset$ が成り立つなら、$\exists a \in M \cap N$ に対し、$a \in M$ が成り立つかつ、$a \in N$ が成り立つので、$d(a,a) = 0 \in V(d|M \times N)$ が成り立つ。したがって、$\mathrm{dist}(M,N) = 0$ が成り立つ。 □

**定理 2.3.5.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S \forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でないなら、次のことが成り立つ。

- その元 $a$ がその集合 $M$ の触点である、即ち、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り、$\mathrm{dist}(\{a\},M) = 0$ が成り立つ。
- その元 $a$ がその集合 $M$ の内点である、即ち、$a \in \mathrm{int}M$ が成り立つならそのときに限り、$\mathrm{dist}(\{a\},S \setminus M) > 0$ が成り立つ。
- その元 $a$ がその集合 $M$ の外点である、即ち、$a \in \mathrm{ext}M$ が成り立つならそのときに限り、$\mathrm{dist}(\{a\},M) > 0$ が成り立つ。
- その元 $a$ がその集合 $M$ の境界点である、即ち、$a \in \partial M$ が成り立つならそのときに限り、$\mathrm{dist}(\{a\},M) = 0$ が成り立つかつ、$\mathrm{dist}(\{a\},S \setminus M) = 0$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S \forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でないとする。このとき、$\mathrm{dist}(\{a\},M) = 0$ が成り立つならそのときに限り、$\exists b \in M$ に対し、$d(a,b) = 0$ が成り立ち、これが成り立つならそのときに限り、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$0 \leq d(a,b) < \varepsilon$ が成り立つ、即ち、$b \in B(a,\varepsilon) \cap M$ が成り立つので、$B(a,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ が成り立ち、これが成り立つならそのときに限り、定理 1.2.17、定理 2.1.6 より $a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つ。

その元 $a$ がその集合 $M$ の内点である、即ち、$a \in \mathrm{int}M$ が成り立つならそのときに限り、$a \notin \mathrm{cl}(S \setminus M)$ が成り立つので、これが成り立つならそのときに限り、上記の議論により、$\mathrm{dist}(\{a\},S \setminus M) \neq 0$ が成り立つ、即ち、$\mathrm{dist}(\{a\},S \setminus M) > 0$ が成り立つ。

その元 $a$ がその集合 $M$ の外点である、即ち、$a \in \mathrm{ext}M$ が成り立つならそのときに限り、$a \in \mathrm{int}(S \setminus M)$ が成り立つので、これが成り立つならそのときに限り、上記の議論により、$\mathrm{dist}(\{a\},M) > 0$ が成り立つ。

その元 $a$ がその集合 $M$ の境界点である、即ち、$a \in \partial M$ が成り立つならそのときに限り、$a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つかつ、$a \in \mathrm{int}M$ が成り立たないことになり、これが成り立つならそのときに限り、上記の議論により、$\mathrm{dist}(\{a\},M) = 0$ が成り立つかつ、$\mathrm{dist}(\{a\},S \setminus M) > 0$ が成り立たない、即ち、$\mathrm{dist}(\{a\},M) = 0$ が成り立つかつ、$\mathrm{dist}(\{a\},S \setminus M) = 0$ が成り立つことになる。 □

**定理 2.3.6.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a,b \in S \forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でないなら、次式が成り立つ。

$$|\mathrm{dist}(\{a\},M) - \mathrm{dist}(\{b\},M)| \leq d(a,b)$$

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a,b \in S \forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でないなら、$\forall c \in M$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(\{a\},M) - d(a,b) &\leq d(a,c) - d(a,b)\\ &\leq d(a,b) + d(b,c) - d(a,b)\\ &= d(b,c)\end{aligned}$$

これにより、$\mathrm{dist}(\{a\},M) - d(a,b) \leq \inf V(d|\{b\} \times M) = \mathrm{dist}(\{b\},M)$ が成り立つ。これにより、$\mathrm{dist}(\{a\},M) - \mathrm{dist}(\{b\},M) \leq d(a,b)$ が得られる。同様にして、$\mathrm{dist}(\{b\},M) - \mathrm{dist}(\{a\},M) \leq d(a,b)$

が得られるので、次式が成り立つ。

$$\left|\operatorname{dist}\left(\{a\}, M\right)-\operatorname{dist}\left(\{b\}, M\right)\right| \leq d(a, b)$$

$\square$

**定理 2.3.7.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M,N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、それらの集合たち $M$、$N$ が空集合でないなら、次式が成り立つ。

$$\delta(M \cup N) \leq \operatorname{dist}(M,N)+\delta(M)+\delta(N)$$

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M,N \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、それらの集合たち $M$、$N$ が空集合でないなら、$\forall a,b \in M \cup N \forall a' \in M \forall b' \in N$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}
d(a,b) &\leq d\left(a,a'\right)+d\left(b,b'\right)+d\left(a',b'\right)\\
&= d\left(a',b'\right)+d\left(a,a'\right)+d\left(b,b'\right)\\
&\leq d\left(a',b'\right)+\delta(M)+\delta(N)
\end{aligned}$$

したがって、両辺に下限がとられれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta(M \cup N) &\leq \inf V\left(d|M \times N\right)+\delta(M)+\delta(N)\\
&= \operatorname{dist}(M,N)+\delta(M)+\delta(N)
\end{aligned}$$

$\square$

**定理 2.3.8.** 距離空間 $(S,d)$ について、添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられたその集合 $S$ の有界な部分集合の族 $\left\{M_i\right\}_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき、これらの和集合 $\bigcup_{i \in \varLambda_n} M_i$ も有界である。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ について、添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられたその集合 $S$ の有界な部分集合の族 $\left\{M_i\right\}_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、$\delta\left(M_i\right)<\infty$ が成り立つので、$n=1$ のときは明らかであるから、$n=k$ のとき、$\delta\left(\bigcup_{i \in \varLambda_k} M_i\right)<\infty$ が成り立つと仮定すると、$n=k+1$ のとき、定理 2.3.4、定理 2.3.7 より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta\left(\bigcup_{i \in \varLambda_{k+1}} M_i\right) &= \delta\left(\bigcup_{i \in \varLambda_k} M_i \cup M_{k+1}\right)\\
&\leq \operatorname{dist}\left(\bigcup_{i \in \varLambda_k} M_i, M_{k+1}\right)+\delta\left(\bigcup_{i \in \varLambda_k} M_i\right)+\delta\left(M_{k+1}\right)\\
&< \infty+\infty+\infty=\infty
\end{aligned}$$

よって、数学的帰納法によりその集合 $S$ の有界な部分集合のその族 $\left\{M_i\right\}_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき、これらの和集合 $\bigcup_{i \in \varLambda_n} M_i$ も有界であることが示された。 $\square$

**定理 2.3.9.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でないなら、$\delta(M)=\delta\left(\mathrm{cl} M\right)$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でないなら、定理 2.3.2 より $\delta(M) \leq \delta(\mathrm{cl}M)$ が成り立つ。$\delta(M) = \infty$ のときは明らかであるから、$\delta(M) < \infty$ のとき、$0 \leq \delta(\mathrm{cl}M) - \delta(M)$ が成り立つ。$\forall a,b \in \mathrm{cl}M$ に対し、定理 2.3.5 より $\mathrm{dist}(\{a\},M) = \mathrm{dist}(\{b\},M) = 0$ が成り立つので、$\exists a',b' \in M$ に対し、$d(a,a') = d(b,b') = 0$ が成り立つ。これにより、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$d(a,a') < \varepsilon$ かつ $d(b,b') < \varepsilon$ が成り立ち、したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a,a') + d(a',b') + d(b',b) \\ &\leq \delta(M) + d(a,a') + d(b,b') \\ &< \delta(M) + \varepsilon + \varepsilon \\ &= \delta(M) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

したがって、$\delta(\mathrm{cl}M) < \delta(M) + 2\varepsilon$ が成り立つので、$0 \leq \delta(\mathrm{cl}M) - \delta(M) < 2\varepsilon$ が成り立つ。ここで、その正の実数 $\varepsilon$ の任意性より $\delta(\mathrm{cl}M) = \delta(M)$ が成り立つ。 □

**定理 2.3.10.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でなく有界であるなら、その開核 $\mathrm{int}M$、その閉包 $\mathrm{cl}M$ も有界である。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でなく有界であるなら、その集合 $M$ の開核 $\mathrm{int}M$ は $\mathrm{int}M \subseteq M$ を満たすので、定理 2.3.3 より $\forall a \in S\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\mathrm{int}M \subseteq M \subseteq B(a,\varepsilon)$ が成り立つ。したがって、再び定理 2.3.3 よりその集合 $M$ の開核 $\mathrm{int}M$ も有界である。一方で、その集合 $M$ の閉包 $\mathrm{cl}M$ は定理 2.3.9 より $\delta(M) = \delta(\mathrm{cl}M)$ を満たすので、その集合 $M$ が有界であることにより $\delta(M) = \delta(\mathrm{cl}M) < \infty$ が成り立つ。したがって、その閉包 $\mathrm{cl}M$ も有界である。 □

### 2.3.3 距離空間と $\mathrm{T}_4$-空間

**定理 2.3.11.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でないなら、次式のように写像 $f_M$ が定義されると、

$$f_M : S \to \mathbb{R}; a \mapsto \mathrm{dist}(\{a\},M)$$

その写像 $f_M$ はその集合 $S$ 上で連続である。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でないなら、次式のように写像 $f_M$ が定義されると、

$$f_M : S \to \mathbb{R}; a \mapsto \mathrm{dist}(\{a\},M)$$

$\forall a,b \in S\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\delta = \varepsilon$ とすれば、$\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、定理 2.3.6 より次のようになる。

$$\begin{aligned} d(a,b) < \delta &\Leftrightarrow d(a,b) < \varepsilon = \delta \\ &\Leftrightarrow |\mathrm{dist}(\{a\},M) - \mathrm{dist}(\{b\},M)| \leq d(a,b) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |f_M(a) - f_M(b)| \leq d(a,b) < \varepsilon \\ &\Rightarrow |f_M(a) - f_M(b)| < \varepsilon \end{aligned}$$

定理 2.1.14 よりよって、その写像 $f_M$ はその集合 $S$ 上で連続である。 □

**定理 2.3.12.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、この距離空間における位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ は $\mathrm{T}_4$-空間である。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、この距離空間における位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ において、$\forall a\in S$ に対し、定理 2.3.4、定理 2.3.5 より次のようになる。

$$\begin{aligned} a'\in\{a\} &\Leftrightarrow a=a'\\ &\Leftrightarrow d(a,a')=0\\ &\Leftrightarrow \mathrm{dist}\left(\{a\},\{a'\}\right)=0\\ &\Leftrightarrow a'\in\mathrm{cl}\,\{a\} \end{aligned}$$

したがって、$\{a\}=\mathrm{cl}\,\{a\}$ が成り立つので、その集合 $\{a\}$ は閉集合となり、したがって、その位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ は定理 1.7.3 より $\mathrm{T}_1$-空間である。

ここで、閉集合たち $A$、$B$ が $A\cap B=\emptyset$ を満たすなら、次のような写像 $g_{(A,B)}$ が定義されれば、

$$g_{(A,B)}:S\to\mathbb{R};a\mapsto\mathrm{dist}\left(\{a\},A\right)-\mathrm{dist}\left(\{a\},B\right)$$

定理 2.3.11 よりその写像 $g_{(A,B)}$ はその集合 $S$ 上で連続である。したがって、次のように集合たち $O$、$P$ がおかれれば、

$$O=V\left(g_{(A,B)}^{-1}|(-\infty,0)\right),\quad P=V\left(g_{(A,B)}^{-1}|(0,\infty)\right)$$

集合たち $(-\infty,0)$、$(0,\infty)$ はいづれも開集合なので、その写像 $g_{(A,B)}$ は連続であることから、それらの集合たち $O$、$P$ は開集合である。このとき、次のようになる。

$$\begin{aligned} O&=V\left(g_{(A,B)}^{-1}|(-\infty,0)\right)\\ &=\left\{a\in S\middle|g_{(A,B)}(a)\in(-\infty,0)\right\}\\ &=\left\{a\in S\middle|g_{(A,B)}(a)<0\right\}\\ P&=V\left(g_{(A,B)}^{-1}|(0,\infty)\right)\\ &=\left\{a\in S\middle|g_{(A,B)}(a)\in(0,\infty)\right\}\\ &=\left\{a\in S\middle|0<g_{(A,B)}(a)\right\} \end{aligned}$$

ここで、次のようになる。

$$\begin{aligned} O\cap P&=\left\{a\in S\middle|g_{(A,B)}(a)<0\right\}\cap\left\{a\in S\middle|0<g_{(A,B)}(a)\right\}\\ &=\left\{a\in S\middle|g_{(A,B)}(a)<0\land 0<g_{(A,B)}(a)\right\}\\ &=\{a\in S|\bot\}=\emptyset \end{aligned}$$

さらに、$\forall a\in A$ に対し、$\{a\}\cap A\neq\emptyset$ が成り立つので、定理 2.3.4 より $\mathrm{dist}\left(\{a\},A\right)=0$ が成り立つ。このとき、仮定より $a\notin B=\mathrm{cl}B$ が成り立ち、定理 2.3.5 より $\mathrm{dist}\left(\{a\},B\right)\neq 0$ が成り立つ、即ち、$\mathrm{dist}\left(\{a\},B\right)>0$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned} g_{(A,B)}(a)&=\mathrm{dist}\left(\{a\},A\right)-\mathrm{dist}\left(\{a\},B\right)\\ &=-\mathrm{dist}\left(\{a\},B\right)<0 \end{aligned}$$

したがって、$a\in O$ が成り立つので、$A\subseteq O$ が成り立つ。同様にして、$B\subseteq P$ も成り立つ。

以上より、任意の閉集合たち $A$、$B$ に対し、$A\cap B=\emptyset$ が成り立つなら、$A\subseteq O$ かつ $B\subseteq P$ かつ $O\cap P=\emptyset$ が成り立つような開集合たち $O$、$P$ が存在するので、その位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ は正規空間である。よって、位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ は $\mathrm{T}_4$-空間である。 □

**定理 2.3.13.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、この距離空間における任意の閉集合たち $A$、$B$ に対し、$A\cap B=\emptyset$ が成り立つなら、その距離空間 $(S,d)$ における位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f:S\rightarrow\mathbb{R}$ で次のことを満たすようなものが存在する。

- $\forall a\in A$ に対し、$f(a)=0$ が成り立つ。
- $\forall b\in B$ に対し、$f(b)=1$ が成り立つ。
- $\forall c\in S$ に対し、$0\leq f(c)\leq 1$ が成り立つ。

**証明.** Urysohn の補題より明らかである。 □

**定理 2.3.14.** 連結な位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への写像について、$\forall a\in S$ に対し、これのある近傍 $V$ が存在して、$\forall b\in V$ に対し、$f(b)=f(a)$ が成り立つなら、$\forall a,b\in S$ に対し、$f(a)=f(b)$ が成り立つ。

**証明.** 連結な位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への写像について、$\forall a\in S$ に対し、これのある近傍 $V$ が存在して、$\forall b\in V$ に対し、$f(b)=f(a)$ が成り立つなら、その実数 $f(a)$ の任意の近傍 $V'$ に対し、$\{f(a)\}=\{f(b)\}\subseteq\mathrm{int}V'\subseteq V'$ が成り立つので、次のようになり、

$$\begin{aligned}V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)&=V\left(f^{-1}|\{f(b)\}\right)\\&\subseteq V\left(f^{-1}|\mathrm{int}V'\right)\\&\subseteq V\left(f^{-1}|V'\right)\end{aligned}$$

したがって、$a,b\in V\left(f^{-1}|V'\right)$ が成り立つ。したがって、$V\subseteq V\left(f^{-1}|V'\right)$ が成り立つので、$a\in\mathrm{int}V\subseteq\mathrm{int}V\left(f^{-1}|V'\right)$ となり、したがって、その値域 $V\left(f^{-1}|V'\right)$ もその元 $a$ の近傍となる。ゆえに、その写像 $f$ は連続である。

ここで、$\forall a\in S$ に対し、値域 $V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)$ が与えられたとき、定理 2.3.11 よりその位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ は $T_4$-空間であるから、定理 1.7.6、定理 1.7.10、定理 1.7.14 よりその位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ は $T_1$-空間でもある。ここで、定理 1.7.3 よりその集合 $\{f(a)\}$ は閉集合であるから、その写像 $f$ が連続であることにより、その値域 $V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)$ も閉集合である。

また、$a\in V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)$ が成り立つことにより、その値域 $V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)$ は空集合でなく、$\forall b\in V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)$ に対し、$f(b)=f(a)$ が成り立つので、この元 $b$ のある近傍 $V$ が存在して、$\forall c\in V$ に対し、$f(c)=f(a)$ が成り立ち、したがって、$c\in V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)$ が成り立つ。これにより、$V\subseteq V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)$ が成り立つので、その値域 $V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)$ は $b\in\mathrm{int}V\subseteq\mathrm{int}V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)$ を満たすことから、その元 $b$ の近傍であり、定理 1.1.23 よりその値域 $V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)$ は開集合でもある。

ここで、その位相空間 $(S,\mathfrak{O})$ は連結であるので、これの閉集合系を $\mathfrak{A}$ とおくと、$\mathfrak{O}\cap\mathfrak{A}=\{S,\emptyset\}$ が成り立つかつ、その値域 $V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)$ は空集合ではないので、$V\left(f^{-1}|\{f(a)\}\right)=S$ が成り立つ。これにより、$\forall b\in S$ に対し、$f(a)=f(b)$ が成り立つ。 □

# 参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p247 ISBN978-4-00-029871-1

## 2.4 一様連続

### 2.4.1 一様連続

**定義 2.4.1.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ とこれらの間の写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとする。$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)<\delta$ が成り立つなら、$e\left(f(a),f(b)\right)<\varepsilon$ が成り立つとき、その写像 $f$ はその距離空間 $(S,d)$ からその距離空間 $(T,e)$ へ一様連続であるといいこのような写像を一様連続写像という。

そこで、定理 2.1.14 の主張によれば、その写像 $f$ がその集合 $S$ で連続であることと、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\forall a\in S\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}\forall b\in S$ に対し、$d(a,b)<\delta$ が成り立つなら、$e\left(f(a),f(b)\right)<\varepsilon$ が成り立つことと同値であった。これに対し、その写像 $f$ が一様連続のときでは、$\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}$ のあとに $\forall a\in S$ がきていることとなっている。このことから、次に述べるようにその写像 $f$ が一様連続であることはその写像 $f$ が連続であることより強い主張となっている。

**定理 2.4.1.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ とこれらの間の写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとする。その写像 $f$ が一様連続であるなら、その写像はその集合 $S$ 上で連続である。

**証明.** 定理 2.1.14 と先ほどの議論よりわかる。 □

距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M\in\mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 $M$ が空集合でないなら、次式のように写像 $f_{M}$ が定義されると、

$$f_{M}:S\rightarrow\mathbb{R};a\mapsto\operatorname{dist}\left(\{a\},M\right)$$

その写像 $f_{M}$ はその集合 $S$ 上で一様連続である。これは定理 2.3.11 の証明を追えばすぐ分かるであろう。ここで、逆は成り立たないことに注意されたい。たとえば、1 次元 Euclid 空間 $E$ の部分距離空間から 1 次元 Euclid 空間 $E$ への関数 $f:\mathbb{R}^{+}\rightarrow\mathbb{R};x\mapsto\dfrac{1}{x}$ が与えられたとき、これは明らかに連続であるが、一様連続ではない。実際、$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\forall\delta\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$0<x<\min\left\{\delta,\dfrac{1}{2\varepsilon}\right\}$ なる実数 $x$ がとられれば、確かに $d_{E}(2x,x)=|2x-x|=x<\delta$ が成り立つが、$d_{E}\left(f(2x),f(x)\right)=\left|\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{1}{2x}>\varepsilon$ が成り立つことから、そうでないと分かる。

**定理 2.4.2.** 3 つの距離空間たち $(S,c)$、$(T,d)$、$(U,e)$ と写像たち $f:S\rightarrow T$、$g:T\rightarrow U$ が与えられたとき、それらの写像たち $f:S\rightarrow T$、$g:T\rightarrow U$ がどちらも一様連続写像であるなら、その合成写像 $g\circ f$ も一様連続写像である。

**証明.** 3 つの距離空間たち $(S,c)$、$(T,d)$、$(U,e)$ と写像たち $f:S\rightarrow T$、$g:T\rightarrow U$ が与えられたとする。それらの写像たち $f:S\rightarrow T$、$g:T\rightarrow U$ がどちらも一様連続写像であるなら、定義より $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\gamma,\delta\in\mathbb{R}^{+}\forall a,b\in S$ に対し、$c(a,b)<\delta$ が成り立つなら、$d\left(f(a),f(b)\right)<\gamma$ が成り立ち、さらに、$d\left(f(a),f(b)\right)<\delta$ が成り立つなら、$e\left(g\left(f(a)\right),g\left(f(b)\right)\right)<\varepsilon$ が成り立つので、その合成写像 $g\circ f$ も一様連続写像である。 □

**定理 2.4.3.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ とこれらの間の任意の写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとする。その距離空間 $(S,d)$ における位相空間 $(S,\mathfrak{O}_{d})$ が compact 空間であるとき、その写像 $f$ が連続であるなら、

その写像 $f$ は一様連続である。

**証明.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ とこれらの間の任意の写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとする。その距離空間 $(S,d)$ における位相空間 $\left(S,\mathfrak{O}_d\right)$ が compact 空間であるとき、その写像 $f$ が連続であるなら、定理 1.3.3 より $\forall a\in S$ に対し、その元 $a$ においてその写像 $f$ は連続である。したがって、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta_a\in\mathbb{R}^+\forall b\in S$ に対し、$d(b,a)<\delta_a$ が成り立つなら、$e\left(f(b),f(a)\right)<\varepsilon$ が成り立つ。ここで、次式のようにその位相 $\mathfrak{O}_d$ の部分集合 $\mathfrak{U}$ が与えられたとき、

$$\mathfrak{U}=\left\{B\left(a,\frac{\delta_a}{2}\right)\right\}_{a\in S}$$

これはその集合 $S$ の開被覆となるが、仮定よりその集合 $S$ の有限な部分集合 $\left\{a_i\right\}_{i\in\varLambda_n}$ が存在して次式のようにその位相 $\mathfrak{O}_d$ の部分集合 $\mathfrak{U}'$ が与えられたとき、

$$\mathfrak{U}'=\left\{B\left(a,\frac{\delta_a}{2}\right)\right\}_{a\in\left\{a_i\right\}_{i\in\varLambda_n}}=\left\{B\left(a_i,\frac{\delta_{a_i}}{2}\right)\right\}_{i\in\varLambda_n}$$

これもその集合 $S$ の開被覆であることになる。ここで、$\delta=\min\left\{\delta_{a_i}\right\}_{i\in\varLambda_n}$ のように正の実数 $\delta$ が定義されれば、$\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)<\delta$ が成り立つなら、$S=\bigcup\mathfrak{U}'$ が成り立つことにより、$\exists i\in\varLambda_n$ に対し、$a\in B\left(a_i,\dfrac{\delta_{a_i}}{2}\right)$ が成り立つ、即ち、$d\left(a_i,a\right)<\dfrac{\delta_{a_i}}{2}<\delta_{a_i}$ が成り立つ。このとき、次のようになることから、

$$\begin{aligned}
d\left(a_i,b\right)&\leq d\left(a_i,a\right)+d(a,b)\\
&<\frac{\delta_{a_i}}{2}+\delta\\
&\leq\frac{\delta_{a_i}}{2}+\frac{\delta_{a_i}}{2}=\delta_{a_i}
\end{aligned}$$

$d\left(a_i,a\right)<\delta_{a_i}$ かつ $d\left(a_i,b\right)<\delta_{a_i}$ が得られる。ここで、仮定より $e\left(f\left(a_i\right),f(a)\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ かつ $e\left(f\left(a_i\right),f(b)\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned}
e\left(f(b),f(a)\right)&\leq e\left(f\left(a_i\right),f(a)\right)+e\left(f\left(a_i\right),f(b)\right)\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

以上より、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)<\delta$ なら $e\left(f(a),f(b)\right)<\varepsilon$ が成り立つので、その写像 $f$ は一様連続である。 □

## 2.4.2 一様同相写像

**定義 2.4.2.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ とこれらの間の写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとする。この写像 $f$ が全単射であるかつ、それらの写像たち $f$、$f^{-1}$ がどちらも一様連続であるとき、その写像 $f$ をその距離空間 $(S,d)$ からその距離空間 $(T,e)$ への一様同相写像、一様位相写像などという。

**定理 2.4.4.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ とこれらの間の写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとき、その写像 $f$ が一様同相写像であるならそのときに限り、これの逆写像 $f^{-1}$ は一様同相写像である。

**証明.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ とこれらの間の写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとき、その写像 $f$ が一様同相写像であるならそのときに限り、定義より写像 $f:S\rightarrow T$ が全単射であるかつ、その写像 $f$ が一様連続であるかつ、これの逆写像 $f^{-1}$ も一様連続であることになる。ここで、その逆写像 $f^{-1}$ も全単射で $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$ が成り立つので、その写像 $f$ が一様同相写像であるならそのときに限り、これの逆写像 $f^{-1}$ も一様同相写像である。 $\square$

**定義 2.4.3.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ が与えられたとき、これらの間に一様同相写像が存在するとき、これらの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ は一様同相である、一様同位相であるなどといい、ここでは、$(S,d)\approx_U(T,e)$ と書くことにする。

**定理 2.4.5.** その関係 $\approx_U$ は同値関係である、即ち、次のことが成り立つ。

- その関係 $\approx_U$ は反射的である、即ち、$(S,d)\approx_U(S,d)$ が成り立つ。
- その関係 $\approx_U$ は対称的である、即ち、$(S,d)\approx_U(T,e)$ が成り立つなら、$(T,e)\approx_U(S,d)$ が成り立つ。
- その関係 $\approx_U$ は推移的である、即ち、$(S,c)\approx_U(T,d)$ が成り立つかつ、$(T,d)\approx_U(U,e)$ が成り立つなら、$(S,c)\approx_U(U,e)$ が成り立つ。

**証明.** 1 つの距離空間 $(S,d)$ が与えられたとする。このとき、恒等写像 $I_S:S\rightarrow S$ は明らかに一様同相写像であるので、$(S,d)\approx_U(S,d)$ が成り立つ。

2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ が与えられたとする。$(S,d)\approx_U(T,e)$ が成り立つなら、これらの間に一様同相写像 $f:S\rightarrow T$ が存在することになる。ここで、その写像 $f$ の逆写像 $f^{-1}:T\rightarrow S$ もまた一様同相写像となるのであったので、$(T,e)\approx_U(S,d)$ が成り立つ。

3 つの距離空間たち $(S,c)$、$(T,d)$、$(U,e)$ が与えられたとする。$(S,c)\approx_U(T,d)$ が成り立つかつ、$(T,d)\approx_U(U,e)$ が成り立つなら、一様同相写像たち $f:S\rightarrow T$、$g:T\rightarrow U$ が存在することになる。ここで、その合成写像 $g\circ f:S\rightarrow U$ もまた一様同相写像となるのであったので、$(S,d)\approx_U(U,e)$ が成り立つ。 $\square$

**定理 2.4.6.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ が与えられたとする。その距離空間 $(S,d)$ における位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ が compact 空間であるとき、$(S,\mathfrak{O}_d)\approx(T,\mathfrak{O}_e)$ が成り立つならそのときに限り、$(S,d)\approx_U(T,e)$ が成り立つ。

**証明.** 2 つの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ が与えられたとする。その距離空間 $(S,d)$ における位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ が compact 空間であるとき、$(S,\mathfrak{O}_d)\approx(T,\mathfrak{O}_e)$ が成り立つならそのときに限り、これらの距離空間たち $(S,d)$、$(T,e)$ の間の連続な写像 $f:S\rightarrow T$ が存在する。定理 2.4.3 よりその写像 $f$ は一様連続でもあったので、これが成り立つならそのときに限り、$(S,d)\approx_U(T,e)$ が成り立つ。 $\square$

## 2.4.3 完備距離空間

**定義 2.4.4.** 距離空間 $(S,d)$ とその集合 $S$ の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0<m$ かつ $n_0<n$ が成り立つなら、$d\left(a_m,a_n\right)<\varepsilon$ が成り立つようなその元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ をその距離空間 $(S,d)$ における Cauchy 列、基本点列などという。

**定理 2.4.7.** 距離空間 $(S,d)$ におけるその集合 $S$ の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、その元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。

ここで、任意の Cauchy 列は収束するとは限らないことに注意されたい。例えば、距離空間 $(\mathbb{Q}, (x,y) \mapsto |x-y|)$ を考えたとき、床関数 $\lfloor \bullet \rfloor$ を用いた有理数列 $\left( \frac{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるが、これは有理数に収束しない。これ以外にも、距離空間 $((0,1), (x,y) \mapsto |x-y|)$ を考えたとき、実数列 $\left( \frac{1}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ は確かに Cauchy 列となっているものの、距離空間 $(\mathbb{R}, (x,y) \mapsto |x-y|)$ でいえば 0 に収束していて、その距離空間 $((0,1), (x,y) \mapsto |x-y|)$ では収束しないことになってしまう。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ におけるその集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m,n \in \mathbb{N}$ に対し、$m < n_0$ かつ $n < n_0$ が成り立つなら、定義より $d\left(a_m, \lim_{n\to\infty} a_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\left(a_n, \lim_{n\to\infty} a_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ。このとき、次のようになることから、

$$\begin{aligned} d(a_m, a_n) &\leq d\left(a_m, \lim_{n\to\infty} a_n\right) + d\left(a_n, \lim_{n\to\infty} a_n\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

その元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。 □

**定義 2.4.5.** 距離空間 $(S,d)$ において任意の Cauchy 列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、その距離空間 $(S,d)$ は完備であるといい、そのような距離空間 $(S,d)$ を完備距離空間という。

**定理 2.4.8.** 完備距離空間 $(S^*, d^*)$ に一様同相な距離空間 $(S,d)$ は完備である。

ここで、同相であるのみの場合では、成り立たない場合があることに注意されたい。例えば、距離空間たち $([0,1), (x,y) \mapsto |x-y|)$、$([0,\infty), (x,y) \mapsto |x-y|)$ について、写像 $f$ を次のように定義されると、

$$f : [0,1) \to [0,\infty); x \mapsto \frac{x}{1-x}$$

その写像 $f$ の逆写像 $f^{-1}$ が次のように存在しており

$$f^{-1} : [0,\infty) \to [0,1); x \mapsto \frac{x}{1+x}$$

これらの写像たちはそれらの距離空間たち $([0,1), (x,y) \mapsto |x-y|)$、$([0,\infty), (x,y) \mapsto |x-y|)$ における位相空間の間で同相写像である。しかしながら、その距離空間 $([0,1), (x,y) \mapsto |x-y|)$ は実数列 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるが距離空間 $(\mathbb{R}, (x,y) \mapsto |x-y|)$ でいえば 1 に収束していて、その距離空間 $([0,1), (x,y) \mapsto |x-y|)$ では収束しないといった例が挙げられるように完備ではなく、一方で、その距離空間 $([0,\infty), (x,y) \mapsto |x-y|)$ は完備である。

**証明.** 完備距離空間 $(S^*, d^*)$ に一様同相な距離空間 $(S,d)$ において、その距離空間 $(S,d)$ におけるその集合 $S$ の任意の Cauchy 列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、$\forall\varepsilon' \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m,n \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 < m$ かつ $n_0 < n$ が成り立つなら、$d(a_m, a_n) < \varepsilon'$ が成り立つ。ここで、その距離空間 $(S,d)$ からその距離空間 $(S^*, d^*)$ への一様同相写像 $f : S \to S^*$ が存在するので、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ に対し、$d(a_m, a_n) < \varepsilon'$ が成り立つなら、$d^*(f(a_m), f(a_n)) < \varepsilon$ が成り立つので、その集合 $S^*$ の元の列 $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。ここで、その距離空間 $(S^*, d^*)$ は完備であるから、$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = a^* \in S^*$ が成り立つ。このとき、$\forall\varepsilon' \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 < n$ が成り立つなら、$d^*(f(a_n), a^*) < \varepsilon'$ が成り立つことになる。ここで、その逆写像 $f^{-1}$ も一様連続であるから、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ に対し、$d^*(f(a_n), a^*) < \varepsilon'$ が成り立つな

ら、$d\left(a_{n},f^{-1}\left(a^{*}\right)\right)<\varepsilon$ が成り立つ。これにより、$\lim_{n\rightarrow\infty}f\left(a_{n}\right)=f^{-1}\left(a^{*}\right)$ が成り立つので、その距離空間 $(S,d)$ は完備である。 □

**定理 2.4.9.** 完備距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その部分距離空間 $\left(M,d_{M}\right)$ が完備であるならそのときに限り、その集合 $M$ がその距離空間 $(S,d)$ における位相空間 $\left(S,\mathfrak{O}_{d}\right)$ での閉集合である。

**証明.** 完備距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の部分集合 $M$ がその距離空間 $(S,d)$ における位相空間 $\left(S,\mathfrak{O}_{d}\right)$ での閉集合であるなら、その部分距離空間 $\left(M,d_{M}\right)$ における任意の Cauchy 列 $\left(a_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ において、この元の列はその完備距離空間 $(S,d)$ における元の列でもあるので、$\lim_{n\rightarrow\infty}a_{n}=a\in S$ が成り立つ。これにより、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists n_{0}\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$n_{0}<n$ が成り立つなら、$d\left(a_{n},a\right)<\varepsilon$ が成り立つことになる。このとき、$a_{n}\in B(a,\varepsilon)$ が成り立つことになり、定理 1.2.15、定理 2.1.6 より $a\in\mathrm{cl}M=M$ が成り立つ。ゆえに、その Cauchy 列 $\left(a_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はその部分距離空間 $\left(M,d_{M}\right)$ で収束するので、その部分距離空間 $\left(M,d_{M}\right)$ は完備である。

逆に、その集合 $M$ が閉集合でなければ、$\mathrm{cl}M\setminus M\neq\emptyset$ が成り立つので、$\forall a\in\mathrm{cl}M\setminus M$ に対し、その元 $a$ はその集合 $M$ の触点であるから、定理 2.1.13 よりその元 $a$ がその集合 $M$ のある元の列 $\left(a_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在してこれの極限となる。定理 2.4.7 よりその部分距離空間 $\left(M,d_{M}\right)$ のその元の列 $\left(a_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるかつ、その元の列 $\left(a_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はその部分距離空間 $\left(M,d_{M}\right)$ で収束しないことになるので、その部分距離空間 $\left(M,d_{M}\right)$ は完備でない。 □

**定理 2.4.10.** 添数集合 $\varLambda_{n}$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\left\{\left(S_{i},d_{i}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{n}}$ が与えられたとき、これの直積距離空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_{n}}S_{i},d\right)$ について、次のことが成り立つ。

- その直積距離空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_{n}}S_{i},d\right)$ における元の列 $\left(\left(a_{i,m}\right)_{i\in\varLambda_{n}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるならそのときに限り、$\forall i\in\varLambda_{n}$ に対し、その距離空間 $\left(S_{i},d_{i}\right)$ における元の列 $\left(a_{i,m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。
- その直積距離空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_{n}}S_{i},d\right)$ が完備であるならそのときに限り、$\forall i\in\varLambda_{n}$ に対し、その距離空間 $\left(S_{i},d_{i}\right)$ は完備である。

**証明.** 添数集合 $\varLambda_{n}$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\left\{\left(S_{i},d_{i}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{n}}$ が与えられたとき、これの直積距離空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_{n}}S_{i},d\right)$ における元の列 $\left(\left(a_{i,m}\right)_{i\in\varLambda_{n}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるなら、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists n_{0}\in\mathbb{N}\forall l,m\in\mathbb{N}$ に対し、$n_{0}<m$ かつ $n_{0}<n$ が成り立つなら、$d\left(\left(a_{i,l}\right)_{i\in\varLambda_{n}},\ \left(a_{i,m}\right)_{i\in\varLambda_{n}}\right)<\varepsilon$ が成り立つ。ここで、$\forall i\in\varLambda_{n}$ に対し、$d_{i}\left(a_{i,l},a_{i,m}\right)\leq d\left(\left(a_{i,l}\right)_{i\in\varLambda_{n}},\left(a_{i,m}\right)_{i\in\varLambda_{n}}\right)<\varepsilon$ が成り立つので、その距離空間 $\left(S_{i},d_{i}\right)$ における元の列 $\left(a_{i,m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。逆に、$\forall i\in\varLambda_{n}$ に対し、その距離空間 $\left(S_{i},d_{i}\right)$ における元の列 $\left(a_{i,m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるなら、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists n_{0}\in\mathbb{N}\forall l,m\in\mathbb{N}$ に対し、$n_{0}<m$ かつ $n_{0}<n$ が成り立つなら、$d_{i}\left(a_{i,l},a_{i,m}\right)<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ が成り立つ。そのとき、次のようになるので、

$$d\left(\left(a_{i,l}\right)_{i\in\varLambda_{n}},\left(a_{i,m}\right)_{i\in\varLambda_{n}}\right)=\sqrt{\sum_{i\in\varLambda_{n}}d_{i}\left(a_{i,l},a_{i,m}\right)^{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&< \sqrt{\sum_{i \in \varLambda_n} \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right)^2} \\
&= \sqrt{n \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right)^2} \\
&= \sqrt{n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

その直積距離空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d \right)$ における元の列 $\left( \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。

その直積距離空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d \right)$ が完備であるなら、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、その距離空間 $\left( S_i, d_i \right)$ の任意の Cauchy 列 $\left( a_{i,m} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、直積 $\prod_{i' \in \varLambda_n \setminus \{i\}} S_{i'}$ の元 $\left( a_{i'} \right)_{i' \in \varLambda_n \setminus \{i\}}$ を用いて $\left( a_{i'} \right)_{i' \in \varLambda_n \setminus \{i\}} = \left( a_{i',m} \right)_{i' \in \varLambda_n \setminus \{i\}}$ とおかれると、$\forall i' \in \varLambda_n \setminus \{i\}$ に対し、その距離空間 $\left( S_{i'}, d_{i'} \right)$ における元の列 $\left( a_{i',m} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ は明らかに Cauchy 列であるから、上記の議論により、その直積距離空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d \right)$ の元の列 $\left( \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。したがって、仮定よりこれは収束し $\lim_{m \to \infty} \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n} = \left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} S_i$ が成り立つ。あとは、定理 2.1.24 より $\lim_{m \to \infty} a_{i,m} = a_i \in S_i$ が成り立つので、その距離空間 $\left( S_i, d_i \right)$ は完備である。逆に、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、その距離空間 $\left( S_i, d_i \right)$ は完備であるなら、その直積距離空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d \right)$ の任意の Cauchy 列 $\left( \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、上記に議論によりその距離空間 $\left( S_i, d_i \right)$ における元の列 $\left( a_{i,m} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。したがって、仮定よりこれは収束し、$\lim_{m \to \infty} a_{i,m} = a_i$ とおかれると、定理 2.1.24 より $\lim_{m \to \infty} \left( a_{i,m} \right)_{i \in \varLambda_n} = \left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} S_i$ が成り立つので、その直積距離空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d \right)$ は完備である。 □

## 2.4.4 全有界距離空間

**定義 2.4.6.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、ある正の実数 $\varepsilon$ が存在してその集合 $S$ の被覆 $\mathfrak{U}$ の任意の元 $U$ に対し、これの直径 $\delta(U)$ がその正の実数 $\varepsilon$ 未満である、即ち、$\delta(U) < \varepsilon$ が成り立つとき、その被覆 $\mathfrak{U}$ をその距離空間 $(S, d)$ の $\varepsilon$ 被覆という。

**定義 2.4.7.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し、その集合 $S$ の有限な $\varepsilon$ 被覆が存在するとき、その距離空間 $(S, d)$ は全有界であるといい、そのような距離空間を全有界距離空間、pre-compact 空間などという[*43]。

**定義 2.4.8.** 距離空間 $(S, d)$ のその集合 $S$ の部分集合 $M$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、$\operatorname{dist}\left( \{a\}, M \right) < \varepsilon$ が成り立つとき、その部分集合 $M$ はその距離空間 $(S, d)$ で $\varepsilon$ 網であるという。

[*43] その pre-compact 空間という語句は書籍によって別の意味で用いられている場合があることに注意しよう。

**定理 2.4.11.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その部分集合 $M$ がその距離空間 $(S,d)$ で $\varepsilon$ 網であるならそのときに限り、$\bigcup_{a \in M} B(a,\varepsilon) = S$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\exists M \in \mathfrak{P}(S) \exists a \in S \forall b \in M$ に対し、$\mathrm{dist}\left(\{a\}, M\right) < \varepsilon$ かつ $\varepsilon \leq d(a,b)$ が成り立つとすれば、次のようになるが、

$$\mathrm{dist}\left(\{a\}, M\right) < \varepsilon \leq \inf V\left(d|\{a\} \times M\right) = \mathrm{dist}\left(\{a\}, M\right) \leq d(a,b)$$

これは矛盾している。ゆえに、$\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その部分集合 $M$ がその距離空間 $(S,d)$ で $\varepsilon$ 網であるなら、$\forall a \in S$ に対し、$\mathrm{dist}\left(\{a\}, M\right) < \varepsilon$ が成り立って、$\exists b \in M$ に対し、$d(a,b) < \varepsilon$ が成り立つ。これにより、$a \in \bigcup_{b \in M} B(b,\varepsilon)$ が成り立つので、$\bigcup_{a \in M} B(a,\varepsilon) \supseteq S$ が成り立つ。$\bigcup_{a \in M} B(a,\varepsilon) \subseteq S$ が成り立つことは定義より明らかであるので、$\bigcup_{a \in M} B(a,\varepsilon) = S$ が成り立つ。

逆に、$\bigcup_{a \in M} B(a,\varepsilon) = S$ が成り立つなら、$\forall a \in S$ に対し、$a \in \bigcup_{b \in M} B(b,\varepsilon)$ が成り立つので、$\exists b \in M$ に対し、$d(a,b) < \varepsilon$ が成り立って、$\mathrm{dist}\left(\{a\}, M\right) = \inf V\left(d|\{a\} \times M\right) \leq d(a,b)$ より $\mathrm{dist}\left(\{a\}, M\right) < \varepsilon$ が成り立ち、したがって、その部分集合 $M$ はその距離空間 $(S,d)$ で $\varepsilon$ 網である。 □

**定理 2.4.12.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- その距離空間 $(S,d)$ は全有界である。
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $S$ の有限な部分集合 $M$ が存在して、これがその距離空間 $(S,d)$ で $\varepsilon$ 網である。
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $S$ の有限な部分集合 $M$ が存在して、$\bigcup_{a \in M} B(a,\varepsilon) = S$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その距離空間 $(S,d)$ が全有界であるなら、任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し、その集合 $S$ の有限な $\varepsilon$ 被覆 $\mathfrak{U}'$ が存在する、即ち、$\bigcup \mathfrak{U}' = S$ が成り立って、$\forall U \in \mathfrak{U}'$ に対し、$\delta(U) < \varepsilon$ が成り立つ。ここで、その $\varepsilon$ 被覆 $\mathfrak{U}'$ の各元 $U$ に対し、定義よりその集合 $U$ が空集合でないとしてもよくそうすると、その集合 $U$ の元 $a_U$ が存在して族 $\{a_U\}_{U \in \mathfrak{U}'}$ が考えられれば、$\forall a \in S$ に対し、$a \in \bigcup \mathfrak{U}'$ が成り立つので、$\exists U \in \mathfrak{U}'$ に対し、$a \in U$ が成り立つかつ、$\varepsilon$ 被覆の定義より $\delta(U) < \varepsilon$ が成り立つ。したがって、$d\left(a, a_U\right) \leq \delta(U) < \varepsilon$ が成り立つので、$\mathrm{dist}\left(\{a\}, \{a_U\}\right) < \varepsilon$ が成り立つので、$\mathrm{dist}\left(\{a\}, \{a_U\}_{U \in \mathfrak{U}'}\right) \leq \mathrm{dist}\left(\{a\}, \{a_U\}\right) < \varepsilon$ が成り立つ。ゆえに、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その部分集合 $\{a_U\}_{U \in \mathfrak{U}'}$ は有限でその距離空間 $(S,d)$ で $\varepsilon$ 網である。

定理 2.4.11 より明らかに、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $S$ の有限な部分集合 $M$ が存在してこれがその距離空間 $(S,d)$ で $\varepsilon$ 網であるなら、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $S$ の有限な部分集合 $M$ が存在して $\bigcup_{a \in M} B(a,\varepsilon) = S$ が成り立つ。

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $S$ の有限な部分集合 $M$ が存在して $\bigcup_{a \in M} B(a,\varepsilon) = S$ が成り立つなら、その正の実数 $\varepsilon$ の任意性よりその集合 $S$ の有限な部分集合 $M$ が存在して $\bigcup_{a \in M} B\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right) = S$ が成り立つとしてもよい。このとき、$\forall b, c \in B\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ に対し、$d(b,c) \leq d(a,b) + d(a,c) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ が成り立つので、$\delta\left(B\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) < \varepsilon$ が成り立つ。これにより、族 $\left\{B\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}_{a \in M}$ がその集合 $S$ の有限な $\varepsilon$ 被覆となるので、

その距離空間 $(S,d)$ は全有界である。 □

**定理 2.4.13.** 全有界距離空間 $(S,d)$ の部分距離空間 $(M,d_M)$ も全有界である。

**証明.** 全有界距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し、その集合 $S$ の有限な $\varepsilon$ 被覆 $\mathfrak{U}'$ が存在する。ここで、その被覆 $\mathfrak{U}'$ はその集合 $M$ の $\varepsilon$ 被覆でもあるので、その部分距離空間 $(M,d_M)$ も全有界である。 □

**定理 2.4.14.** 全有界距離空間 $(S,d)$ でのその集合 $S$ は有界である。

**証明.** 全有界距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、1 つの正の実数 $\varepsilon$ を用いてその集合 $S$ の有限な $\varepsilon$ 被覆 $\mathfrak{U}'$ が存在する。このとき、$S=\bigcup\mathfrak{U}'$ が成り立ち、$\forall U\in\mathfrak{U}'$ に対し、$\delta(U)<\varepsilon<\infty$ が成り立つので、定理 2.3.8 よりその集合 $S$ は有界である。 □

ただし、距離空間 $(S,d)$ のその集合 $S$ が有界であるとき、その距離空間 $(S,d)$ は全有界であるとは限らないことに注意されたい。例えば、次のような写像 $\rho$ をもつ組 $(\mathbb{N},\rho)$ は距離空間となっている。

$$\rho:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R};(m,n)\mapsto\rho(m,n)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad m=n\\ 1 & \text{if} \quad m\neq n\end{cases}$$

さらに、$V(\rho)=\{0,1\}$ なので、$\delta(\mathbb{N})=1$ よりその集合 $\mathbb{N}$ はその距離空間 $(\mathbb{N},\rho)$ で有界である。しかしながら、その集合 $\mathbb{N}$ のどの有限な部分集合 $\{k_i\}_{i=1}^n$ に対し、$\bigcup_{i=1}^n B(k_i,1)=\{k_i\}_{i=1}^n\neq\mathbb{N}$ となるので、その距離空間 $(\mathbb{N},\rho)$ は全有界でない。

**定理 2.4.15.** 全有界距離空間 $(S^*,d^*)$ に一様同相な距離空間 $(S,d)$ は全有界である。

ここでも、同相であるのみの場合では、成り立たない場合があることに注意されたい。例えば、距離空間たち $([0,1),(x,y)\mapsto|x-y|)$、$([0,\infty),(x,y)\mapsto|x-y|)$ について、次のような写像 $f$ は上記の通りそれらの距離空間たちにおける位相空間の間で同相写像である。

$$f:[0,1)\to[0,\infty);x\mapsto\frac{x}{1-x}$$

ここで、距離空間 $([0,1],(x,y)\mapsto|x-y|)$ は全有界であるので、定理 2.4.13 よりその距離空間 $([0,1),(x,y)\mapsto|x-y|)$ も全有界である。しかしながら、その距離空間 $([0,\infty),(x,y)\mapsto|x-y|)$ は定理 2.4.14 より全有界でない。

**証明.** 全有界距離空間 $(S^*,d^*)$ に一様同相な距離空間 $(S,d)$ において、任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し、その集合 $S^*$ の有限な $\varepsilon$ 被覆 $\mathfrak{U}'$ が存在する、即ち、$S=\bigcup\mathfrak{U}'$ が成り立ち $\delta(U)<\varepsilon$ が成り立つ。ここで、その距離空間 $(S,d)$ からその距離空間 $(S^*,d^*)$ への一様同相写像 $f:S\to S^*$ が存在するので、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall a,b\in S^*$ に対し、$d^*(a,b)<\delta$ なら $d\left(f^{-1}(a),f^{-1}(b)\right)<\varepsilon$ が成り立つ。ここで、その距離空間 $(S^*,d^*)$ は全有界であるから、その集合 $S^*$ の有限な部分集合 $\{a_i\}_{i\in\varLambda_n}$ が存在して $\bigcup_{i\in\varLambda_n}B(a_i,\delta)=S$ が成り立つ。このとき、$\forall a,b\in S^*$ に対し、$d^*(a,b)<\delta\Rightarrow d\left(f^{-1}(a),f^{-1}(b)\right)<\varepsilon$ が成り立つことから、$\forall i\in\varLambda_n$ に対し、$B(a_i,\delta)\subseteq V\left(f|B\left(f^{-1}(a_i),\varepsilon\right)\right)$ が成り立ち、したがって、次のようになる。

$$V\left(f^{-1}|B(a_i,\delta)\right)\subseteq V\left(f^{-1}|V\left(f|B\left(f^{-1}(a_i),\varepsilon\right)\right)\right)$$

$$= B\left(f^{-1}(a_i), \varepsilon\right)$$

ここで、その写像 $f$ が全単射であるから、$\forall c \in S \exists c' \in S^*$ に対し、$c = f^{-1}(c')$ が成り立つかつ、$\bigcup_{i \in \varLambda_n} B(a_i, \delta) = S$ が成り立つので、$\exists i \in \varLambda_n$ に対し、$c' \in B(a_i, \delta)$ が成り立つ。したがって、次のようになるので、

$$\begin{aligned} c = f^{-1}(c') &\in V\left(f^{-1} | B(a_i, \delta)\right) \subseteq B\left(f^{-1}(a_i), \varepsilon\right) \\ &\subseteq \bigcup_{i \in \varLambda_n} B\left(f^{-1}(a_i), \varepsilon\right) \end{aligned}$$

$S \subseteq \bigcup_{i \in \varLambda_n} B\left(f^{-1}(a_i), \varepsilon\right)$ が成り立つ。もちろん、これは $S = \bigcup_{i \in \varLambda_n} B\left(f^{-1}(a_i), \varepsilon\right)$ が成り立つことを意味する。よって、定理 2.4.12 よりその距離空間 $(S, d)$ は全有界である。 □

**定理 2.4.16.** 全有界距離空間 $(S, d)$ における位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ は第 2 可算公理を満たす。

**証明.** 全有界距離空間 $(S, d)$ における位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ が与えられたとき、定理 2.4.12 より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、その集合 $S$ の有限な部分集合 $M_{\frac{1}{n}}$ が存在してこれがその距離空間 $(S, d)$ で $\frac{1}{n}$ 網である、即ち、$\forall a \in S$ に対し、$\mathrm{dist}\left(\{a\}, M_{\frac{1}{n}}\right) < \frac{1}{n}$ が成り立つ。

ここで、$\forall a \in S$ に対し、$M_{\frac{1}{n}} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\frac{1}{n}}$ が成り立つことにより、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathrm{dist}\left(\{a\}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\frac{1}{n}}\right) \\ &\leq \mathrm{dist}\left(\{a\}, M_{\frac{1}{n}}\right) < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

したがって、$0 = \mathrm{dist}\left(\{a\}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\frac{1}{n}}\right)$ が成り立つ。ここで、定理 2.3.5 より $a \in \mathrm{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\frac{1}{n}}$ が成り立つことから、$S \subseteq \mathrm{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\frac{1}{n}}$ が成り立つ。また、明らかに $\mathrm{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\frac{1}{n}} \subseteq S$ が成り立つので、$S = \mathrm{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\frac{1}{n}}$ が得られる。これにより、その集合 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\frac{1}{n}}$ はその集合 $S$ で稠密である。

以上の議論と、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、その集合 $M_{\frac{1}{n}}$ は有限集合であるので、その和集合 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\frac{1}{n}}$ もたかだか可算であることに注意すれば、その位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ は可分である。よって、定理 2.1.9 より全有界距離空間 $(S, d)$ における位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ は第 2 可算公理を満たす。 □

**定理 2.4.17.** 添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i, d_i)\}_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき、これの直積距離空間 $\left(\prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d\right)$ が全有界であるならそのときに限り、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、その距離空間 $(S_i, d_i)$ は全有界である。

**証明.** 添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた距離空間たちの族 $\{(S_i, d_i)\}_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき、これの直積距離空間 $\left(\prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d\right)$ が全有界であるなら、定理 2.4.12 より $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $\prod_{i \in \varLambda_n} S_i$ の有限な部分集合 $M$ が存在してこれがその距離空間 $\left(\prod_{i \in \varLambda_n} S_i, d\right)$ で $\varepsilon$ 網である、即ち、$\forall (a_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} S_i$

に対し、$\mathrm{dist}\left(\left\{(a_i)_{i\in\Lambda_n}\right\},M\right)<\varepsilon$ が成り立つ。ゆえに、その集合が有限集合であることに注意すれば、$\exists(b_i)_{i\in\Lambda_n}\in M$ に対し、$d\left((a_i)_{i\in\Lambda_n},(b_i)_{i\in\Lambda_n}\right)<\varepsilon$ が成り立つので、$\forall i\in\Lambda_n$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} d_i(a_i,b_i) &\leq \sqrt{\sum_{i\in\Lambda_n} d_i(a_i,b_i)^2} \\ &= d\left((a_i)_{i\in\Lambda_n},(b_i)_{i\in\Lambda_n}\right)<\varepsilon \end{aligned}$$

これにより、$\forall a_i\in S_i\exists b_i\in V(\mathrm{pr}_i|M)$ に対し、$d_i(a_i,b_i)<\varepsilon$ が成り立ち、したがって、$\mathrm{dist}(\{a_i\},\ V(\mathrm{pr}_i|M))<\varepsilon$ が成り立つので、その射影 $V(\mathrm{pr}_i|M)$ がその距離空間 $(S_i,d_i)$ で $\varepsilon$ 網である。また、その射影 $V(\mathrm{pr}_i|M)$ も有限集合であることに注意すれば、その距離空間 $(S_i,d_i)$ も全有界である。

$\forall i\in\Lambda_n$ に対し、その距離空間 $(S_i,d_i)$ は全有界であるなら、定理 2.4.12 より $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $S_i$ の有限な部分集合 $M_i$ が存在してこれがその距離空間 $(S_i,d_i)$ で $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ 網である、即ち、$\forall a_i\in S_i$ に対し、$\mathrm{dist}(\{a_i\},M_i)<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ が成り立つ。これにより、$\exists b_i\in M_i$ に対し、即ち、$\exists(b_i)_{i\in\Lambda_n}\in\prod_{i\in\Lambda_n}M_i$ に対し、$d(a_i,b_i)<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned} d\left((a_i)_{i\in\Lambda_n},(b_i)_{i\in\Lambda_n}\right) &= \sqrt{\sum_{i\in\Lambda_n} d_i(a_i,b_i)^2} \\ &< \sqrt{\sum_{i\in\Lambda_n}\frac{\varepsilon^2}{n}} \\ &= \varepsilon\sqrt{\sum_{i\in\Lambda_n}\frac{1}{n}} \\ &= \varepsilon\sqrt{\frac{1}{n}\cdot n}=\varepsilon \end{aligned}$$

したがって、$\mathrm{dist}\left(\left\{(a_i)_{i\in\Lambda_n}\right\},\prod_{i\in\Lambda_n}M_i\right)<\varepsilon$ が成り立つ。以上より、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $\prod_{i\in\Lambda_n}S_i$ の有限な部分集合 $\prod_{i\in\Lambda_n}M_i$ が存在してこれがその距離空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n}S_i,d\right)$ で $\varepsilon$ 網である、即ち、$\forall(a_i)_{i\in\Lambda_n}\in\prod_{i\in\Lambda_n}S_i$ に対し、$\mathrm{dist}\left(\left\{(a_i)_{i\in\Lambda_n}\right\},\prod_{i\in\Lambda_n}M_i\right)<\varepsilon$ が成り立つので、定理 2.4.12 よりその直積距離空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n}S_i,d\right)$ が全有界である。 □

## 2.4.5 部分列

**定義** (定義 1.9.5 の再掲)**.** 集合 $A$ の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、集合 $\mathbb{N}$ の元の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を用いた元の列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$、即ち、合成写像 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\circ(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ をその元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列という。

もちろん、その元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 自身もその元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列である。

**定理 2.4.18.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、次のことが成り立つ。

- その集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がある元 $\alpha$ に収束するなら、その元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ もその元 $\alpha$ に収束する。

- その集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるなら、その元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である。

しかしながら、その元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が収束する、あるいは、Cauchy 列であっても、もとの元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も収束する、あるいは、Cauchy 列であるとは限らないことに注意されたい。例えば、1 次元 Euclid 空間 $E$ における点列 $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が挙げられる。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がある元 $\alpha$ に収束するなら、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{R}^+\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0<n$ が成り立つなら、$d(a_n,\alpha)<\varepsilon$ が成り立つ。ここで、その元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ について、$\exists k_0\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0<n_{k_0}$ が成り立ち、$\forall k\in\mathbb{N}$ に対し、$k_0<k$ が成り立つなら、$n_0<n_k$ が成り立ち、$d(a_{n_k},\alpha)<\varepsilon$ が成り立つので、その部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ もその元 $\alpha$ に収束する。

その集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるなら、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0<m$ かつ $n_0<n$ が成り立つなら、$d(a_m,a_n)<\varepsilon$ が成り立つ。ここで、その元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ について、$\exists k_0,l_0\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0<n_{k_0}$ かつ $n_0<n_{l_0}$ が成り立ち、$\forall k,l\in\mathbb{N}$ に対し、$k_0<k$、$l_0<l$ が成り立つなら、$n_0<n_k$ かつ $n_0<n_l$ が成り立ち、$d(a_{n_k},a_{n_l})<\varepsilon$ が成り立つので、その部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である。 □

**定理 2.4.19.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、Cauchy 列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列が存在してこれがある元 $\alpha$ に収束するなら、その Cauchy 列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ もその元 $\alpha$ に収束する。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、Cauchy 列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ が存在してこれがある元 $\alpha$ に収束するとき、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0<m$ かつ $n_0<n$ が成り立つなら、$d(a_m,a_n)<\varepsilon$ が成り立つかつ、$\exists k_0\in\mathbb{N}\forall k\in\mathbb{N}$ に対し、$k_0<k$ が成り立つなら、$d(a_{n_k},\alpha)<\varepsilon$ が成り立つ。ここで、$\exists k_0'\in\mathbb{N}\forall k\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0<n_{k_0'}$ が成り立つかつ、$k_0<k_0'<k$ が成り立つなら、$d(a_{n_k},\alpha)<\varepsilon$ が成り立つことに注意すれば、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}\exists k_0'\in\mathbb{N}\forall k\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0<n$ かつ $k_0<k_0'<k$ が成り立つなら、$n_0<n_k$ が成り立ち、したがって、次のようになるので、

$$\begin{aligned}d(a_n,\alpha)&\leq d(a_n,a_{n_k})+d(a_{n_k},\alpha)\\&<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

その Cauchy 列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ もその元 $\alpha$ に収束する。 □

**定義 2.4.9.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その集合 $S$ の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が、$\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$d(a_m,a_n)<\varepsilon$ が成り立つとき、その元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\varepsilon$ 列という。

**定理 2.4.20.** 全有界距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、任意の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し、その元の列の部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、これが $\varepsilon$ 列であるものが存在する。

**証明.** 全有界距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し、その集合 $S$ の有限な $\varepsilon$ 被覆が存在するので、これを $\mathfrak{U}'$ とおく。このとき、任意の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のどの項 $a_n$ に対し、$S=\bigcup\mathfrak{U}'$ が成り立つので、その $\varepsilon$ 被覆 $\mathfrak{U}'$ のある集合 $U$ が存在して $a_n\in U$ が成り立つ。ここで、その $\varepsilon$ 被覆のある元 $U$ に対し、次のように集合 $N_U$ が定義されると、

$$N_U=\{n\in\mathbb{N}|a_n\in U\}$$

先ほどの議論により $\mathbb{N} = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}'} N_U$ が成り立つ。ここで、全ての集合たち $N_U$ が有限集合であるなら、その集合 $\mathbb{N}$ も有限集合であることになり矛盾する。ゆえに、$\exists U' \in \mathfrak{U}'$ に対し、集合 $N_{U'}$ は無限集合である、詳しくいえば、$\# N_{U'} = \aleph_0$ が成り立つ。これにより、その集合 $N_{U'}$ と集合 $\mathbb{N}$ との間に全単射が存在するので、その全単射が順序同型写像となるように定義されれば、順序同型写像 $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow N_{U'}; k \mapsto n_k$ が存在して、$N_{U'} = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が成り立つ。このとき、その元の列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ はその集合 $N_{U'}$ の元の列でありその元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列である。しかも、$\forall k, l \in \mathbb{N}$ に対し、$a_{n_k}, a_{n_l} \in U'$ が成り立つので、次のようになる。

$$d\left(a_{n_k}, a_{n_l}\right) \leq \delta\left(U'\right) < \varepsilon$$

これにより、その元の列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ は $\varepsilon$ 列でもある。 □

**定理 2.4.21.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、その距離空間 $(S, d)$ が全有界であるならそのときに限り、その集合 $S$ の任意の元の列に対し、ある部分列が存在して、これが Cauchy 列となる。

**証明.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、その距離空間 $(S, d)$ が全有界であるなら、定理 2.4.20 より任意の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し、その元の列の部分列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ で $\varepsilon$ 列であるものが存在する。ここで、元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と正の実数 $\varepsilon$ に対し、これの $\varepsilon$ 列であるような部分列を $\varPhi\left((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \varepsilon\right)$ と書くことにして、次式のように元の列たち $\left(a'_{np}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が定義されると、

$$\left(a'_{n1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \varPhi\left((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, 1\right), \quad \left(a'_{n,p+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \varPhi\left(\left(a'_{np}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \frac{1}{p+1}\right)$$

元の列 $\left(a'_{nn}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ はその元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列である。

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ が成り立つように自然数 $n_0$ をとると、$\forall p, q \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 < p$ かつ $n_0 < q$ が成り立つなら、元の列たち $\left(a'_{np}\right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(a'_{nq}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ はいづれも元の列 $\left(a'_{nn_0}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列であり元々 $a'_{pp}$、$a'_{qq}$ いづれもその元の列 $\left(a'_{nn_0}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ の項である。ここで、その元の列 $\left(a'_{nn_0}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ は $\frac{1}{n_0}$ 列であるので、$d\left(a'_{np}, a'_{nq}\right) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ が得られる。ゆえに、その元の列 $\left(a'_{nn}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。

逆に、その距離空間 $(S, d)$ が全有界でないなら、ある正の実数 $\varepsilon$ が存在して、その集合 $S$ の有限な $\varepsilon$ 被覆が存在しないことになる。したがって、正の実数 $\varepsilon_0$ が $2\varepsilon_0 < \varepsilon$ を満たすようにとられれば、その集合 $S$ の任意の有限な部分集合 $M$ に対し、集合 $\{B(b, \varepsilon_0)\}_{b \in M}$ は有限集合であり、$\forall b \in M$ に対し、$\delta\left(B(b, \varepsilon_0)\right) \leq 2\varepsilon_0 < \varepsilon$ が成り立つので、その集合 $\{B(b, \varepsilon_0)\}_{b \in M}$ はその集合 $S$ の被覆となることができない。このとき、明らかに $\bigcup_{b \in M} B(b, \varepsilon_0) \subseteq S$ が成り立つので、差集合 $S \setminus \bigcup_{b \in M} B(b, \varepsilon_0)$ は空集合でない。

そこで、その集合 $S$ の有限な各部分集合 $M$ に対し、その差集合 $S \setminus \bigcup_{b \in M} B(b, \varepsilon_0)$ の元 1 つが $\varphi_M$ とおかれると、$\varphi_M \notin \bigcup_{b \in M} B(b, \varepsilon_0)$ が成り立つので、$\forall b \in M$ に対し、$d(\varphi_M, b) < \varepsilon_0$ が成り立たない、即ち、$d(\varphi_M, b) \geq \varepsilon_0$ が成り立つ。

そこで、その集合 $S$ の任意の元 $a$ を用いて次式のように元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が定義されるとする。

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \varphi_{\{a_i\}_{i \in \varLambda_n}}$$

このとき、$\forall i, j \in \mathbb{N}$ に対し、$i \neq j$ が成り立つなら、$i < j$ が成り立つとしても一般性は失われずそうするとき、$a_j = \varphi_{\{a_{i'}\}_{i' \in \varLambda_j}}$ が成り立つかつ、$a_i \in \{a_{i'}\}_{i' \in \varLambda_j}$ が成り立つので、上記の議論により $d(a_i, a_j) \geq \varepsilon_0$ が成り立つ。

そこで、その元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、ある部分列 $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、これが Cauchy 列となると仮定すると、$\forall\varepsilon' \in \mathbb{R}^+\exists n_0 \in \mathbb{N}\forall k,l \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 < k$ かつ $n_0 < l$ が成り立つなら、$d\left(a_{n_k}, a_{n_l}\right) < \varepsilon'$ が成り立つ。ここで、$\varepsilon' = \varepsilon_0$ とおかれると、$\exists n_0 \in \mathbb{N}\forall k,l \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 < k$ かつ $n_0 < l$ が成り立つなら、$d\left(a_{n_k}, a_{n_l}\right) < \varepsilon_0$ が成り立つ。これにより、$\exists n_k, n_l \in \mathbb{N}$ に対し、$n_k \neq n_l$ が成り立つかつ、$d\left(a_{n_k}, a_{n_l}\right) < \varepsilon_0$ が成り立つことになるが、これは仮定の、$\forall i,j \in \mathbb{N}$ に対し、$i \neq j$ が成り立つなら、$d\left(a_i, a_j\right) \geq \varepsilon_0$ が成り立つことに矛盾する。

ゆえに、その元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ に対し、これが Cauchy 列とならない。あとは、対偶律によりその集合 $S$ の任意の元の列に対し、ある部分列が存在して、これが Cauchy 列となるなら、その距離空間 $(S,d)$ は全有界である。 $\square$

# 参考文献


[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p247-263 ISBN978-4-00-029871-1

## 2.5 compact 距離空間

### 2.5.1 Euclid 空間における compact 空間

**定理 2.5.1.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ が与えられたとき、$\forall a,b\in\mathbb{R}$ に対し、その部分位相空間 $\left([a,b],(\mathfrak{O}_{d_E})_{[a,b]}\right)$ は compact 空間である。

**証明.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ が与えられたとき、$\forall a,b\in\mathbb{R}$ に対し、その部分位相空間 $\left([a,b],(\mathfrak{O}_{d_E})_{[a,b]}\right)$ の台集合 $[a,b]$ のその位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ における任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ は、$\forall c\in[a,b]$ に対し、もちろん閉区間 $[a,c]$ の開被覆でもある。ここで、その開被覆 $\mathfrak{U}$ がその閉区間 $[a,c]$ の有限な被覆を含むようなその実数 $c$ 全体を $I$ とすると、明らかに $a\in I$ が成り立つので、その集合 $I$ は空集合でない。また、その実数 $b$ はその集合 $I$ の上界であるから、実数 $\sup I$ が存在して、$\sup I\leq b$ が成り立つ。

そこで、$\sup I\in[a,b]$ が成り立つので、$\exists U\in\mathfrak{U}$ に対し、$\sup I\in U$ が成り立つかつ、その集合 $U$ は開集合である。したがって、$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$[\sup I-\varepsilon,\sup I+\varepsilon]\subseteq U$ が成り立つ。ここで、$\sup I-\varepsilon\in I$ が成り立たないとすれば、上限の定義に矛盾するので、$\sup I-\varepsilon\in I$ が成り立つ。これにより、閉区間 $[a,\sup I-\varepsilon]$ はその集合 $\mathfrak{U}$ の有限な部分集合 $\mathfrak{U}'$ が存在して、これがその閉区間 $[a,\sup I-\varepsilon]$ の開被覆となる。ここで、次式が成り立つことにより、

$$[a,\sup I]\subseteq[a,\sup I+\varepsilon]=[a,\sup I-\varepsilon]\cup[\sup I-\varepsilon,\sup I+\varepsilon]\subseteq\bigcup\mathfrak{U}'\cup U$$

$\sup I\in I$ が成り立つ。なお、この時点では、$\sup I+\varepsilon\in[a,b]$ が成り立つと述べられていないので、上限の定義に矛盾しているわけではないことに注意されたい。

ここで、$\sup I<b$ が成り立つなら、$\sup I+\varepsilon<b$ なる正の実数 $\varepsilon$ が存在するが、上記の議論と同様にしてその集合 $\mathfrak{U}$ の有限な部分集合 $\mathfrak{U}''$ が存在して、次式が成り立つことが示されるので、

$$[a,\sup I+\varepsilon]\subseteq\bigcup\mathfrak{U}''$$

$\sup I+\varepsilon\in I$ が成り立つ。ここで、この仮定 $\sup I<b$ のもとでは、$\sup I+\varepsilon\in[a,b]$ が成り立つことになり、上限の定義に矛盾している。したがって、$\sup I=b$ が成り立つ。よって、$b\in I$ が成り立つので、その閉区間 $[a,b]$ について、その集合 $\mathfrak{U}$ の有限な部分集合 $\mathfrak{U}'''$ が存在して、次式が成り立つ、

$$[a,b]\subseteq\bigcup\mathfrak{U}'''$$

即ち、その部分位相空間 $\left([a,b],(\mathfrak{O}_{d_E})_{[a,b]}\right)$ は compact 空間である。 □

**定理 2.5.2.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ が与えられたとき、これの部分位相空間 $\left(M,(\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_M\right)$ が compact 空間であるならそのときに限り、その集合 $M$ がその位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ における有界な閉集合である。

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ が与えられたとき、これの部分位相空間 $\left(M,(\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_M\right)$ が compact 空間であるなら、定理 2.3.12 よりその位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ は $\mathrm{T}_4$-空間であるから、もちろん Hausdorff 空間でもある。定理 1.6.10 よりその集合 $M$ がその位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ における閉集合となる。

　また、その集合 $\mathbb{R}^n$ の 1 つの元 $\mathbf{a}$ に対し、これを中心とするあらゆる半径の開球体全体 $\left\{ B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right) \right\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}$ が考えられれば、この和集合は明らかにその集合 $\mathbb{R}^n$ の部分集合であり、さらに、$\forall\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ に対し、正の実数 $\varepsilon'$ を用いれば、$d\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)+\varepsilon'\in\mathbb{R}^+$ が成り立つので、これを $\varepsilon''$ とすれば、$\mathbf{b}\in B\left(\mathbf{a},\varepsilon''\right)$ が成り立つので、その集合 $\left\{ B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right) \right\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}$ の和集合はその集合 $\mathbb{R}^n$ に一致するので、その集合 $\left\{ B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right) \right\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}$ はその部分集合 $M$ の開被覆である。そこで、その部分位相空間 $\left( M,\left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_M \right)$ が compact 空間であるので、その集合 $\mathbb{R}^+$ のある有限な部分集合 $\left\{ \rho_i \right\}_{i\in\varLambda_m}$ が存在して、$M\subseteq\bigcup_{j\in\varLambda_m} B\left(\mathbf{a},\rho_j\right)$ が成り立つ。ここで、$\rho=\max\left\{ \rho_i \right\}_{i\in\varLambda_m}$ とおかれると、$B\left(\mathbf{a},\rho_j\right)\subseteq B\left(\mathbf{a},\rho\right)$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$M\subseteq\bigcup_{j\in\varLambda_m} B\left(\mathbf{a},\rho_j\right)\subseteq B\left(\mathbf{a},\rho\right)$$

ゆえに、その集合 $M$ は有界である。

　逆に、その集合 $M$ がその位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ における有界な閉集合であるなら、定理 2.1.22、定理 2.3.3 よりある開球体 $B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right)$ が存在して、$\mathbf{a}=\left(a_i\right)_{i\in\varLambda_n}$ とおくと、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} M&\subseteq B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right)\\ &\subseteq\prod_{i\in\varLambda_n} B\left(a_i,\varepsilon\right)\\ &=\prod_{i\in\varLambda_n}\left(a_i-\varepsilon,a_i+\varepsilon\right)\\ &\subseteq\prod_{i\in\varLambda_n}\left[a_i-\varepsilon,a_i+\varepsilon\right] \end{aligned}$$

Tikhonov の定理と定理 2.5.1 よりその集合 $\prod_{i\in\varLambda_n}\left[a_i-\varepsilon,a_i+\varepsilon\right]$ を台集合とするその位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ の部分位相空間は compact 空間となるので、定理これの部分位相空間 $\left( M,\left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_M \right)$ も compact 空間である。
□

**定理 2.5.3.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $\left(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E}\right)$ が与えられたとき、これの部分位相空間 $\left(M,\left(\mathfrak{O}_{d_E}\right)_M\right)$ が compact 空間であるなら、それらの最大値 $\max M$、最小値 $\min M$ が存在する。

**証明.** 定理 2.5.2 より 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $\left(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E}\right)$ が与えられたとき、これの部分位相空間 $\left(M,\left(\mathfrak{O}_{d_E}\right)_M\right)$ が compact 空間であるなら、その集合 $M$ がその位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ における有界な閉集合であるので、それらの上限 $\sup M$ と下限 $\inf M$ が存在する。ここで、ある正の実数 $\varepsilon$ が存在して、$\sup M-\varepsilon\in M$ が成り立つので、任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し、$\left(\sup M-\varepsilon,\sup M+\varepsilon\right)\subseteq\mathbb{R}\setminus M$ が成り立たないかつ、$\forall a\in\mathbb{R}\setminus M$ に対し、ある正の実数 $\varepsilon$ が存在して、$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subseteq M$ が成り立つので、$\sup M\notin\mathbb{R}\setminus M$ が成り立つ。下限 $\inf M$ についても同様にして示される。よって、それらの最大値 $\max M$、最小値 $\min M$ が存在する。 □

**定理 2.5.4** (最大値最小値の定理の拡張)**.** compact 空間 $(S,\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $\left(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E}\right)$ への連続写像 $f:S\rightarrow\mathbb{R}$ が与えられたとき、その値域 $V(f)$ の最大値と最小値が存在する。これを最大値最小値の定理の拡張という。

**証明.** 定理 1.6.5 と定理 2.5.3 より明らかである。 □

**定理 2.5.5.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_E}\right)$ は局所 compact 空間である。

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_E})$ において、その $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の点 $\mathbf{a}$ を中心とする開球体全体の集合 $\mathfrak{U}_{\mathbf{a}}$ の任意の元 $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ に対し、定理 2.1.6、定理 2.3.9 よりその集合 $\mathrm{cl}B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ は有界な閉集合であるので、これを $B$ とおくと、Heine-Borel の被覆定理よりその部分位相空間 $(B, \mathfrak{O}_{d_E B})$ は compact 空間である[*44]。よって、その位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_E})$ は局所 compact 空間である。 □

### 2.5.2 compact 距離空間

**定義 2.5.1.** 距離空間 $(S, d)$ における位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が compact 空間であるとき、その距離空間 $(S, d)$ は compact 距離空間という。

**定理 2.5.6.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、これにおける位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ の compact 空間である部分位相空間 $(A, (\mathfrak{O}_d)_A)$ において、その台集合 $A$ は有界で、$\exists a, b \in A$ に対し、$\delta(A) = d(a, b)$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、これにおける位相空間 $(S, \mathfrak{O}_d)$ の compact 空間である部分位相空間 $(A, (\mathfrak{O}_d)_A)$ において、その部分距離空間 $\left(A \times A, d'_{A \times A}\right)$ は Tikhonov の定理より compact 距離空間である。定理 2.2.9 よりその距離関数 $d$ はその直積距離空間 $(S \times S, d')$ における位相空間 $(S \times S, \mathfrak{O}_{d'})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像であるので、定理 1.4.14、定理 2.1.18 よりその写像 $d|A \times A$ はその部分距離空間 $\left(A \times A, d'_{A \times A}\right)$ における位相空間 $\left(A \times A, \mathfrak{O}_{d'_{A \times A}}\right)$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像である。したがって、最大値最小値の定理の拡張よりその値域 $V(d|A \times A)$ の最大値が存在するので、$\exists a, b \in A$ に対し、次式が成り立ち、

$$\begin{aligned}\delta(A) &= \sup V(d|A \times A) \\ &= \max V(d|A \times A) \\ &= d(a, b) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

よって、その台集合 $A$ は有界で、$\exists a, b \in A$ に対し、$\delta(A) = d(a, b)$ が成り立つ。 □

**定理 2.5.7.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、これの compact 距離空間である部分距離空間 $(A, d_A)$ において、$\forall B \in \mathfrak{P}(S) \exists a \in A$ に対し、$\mathrm{dist}(A, B) = \mathrm{dist}(\{a\}, B)$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、これの compact 距離空間である部分距離空間 $(A, d_A)$ において、$\forall B \in \mathfrak{P}(S) \exists a \in A$ に対し、次式のように写像 $f_B$ が定義されれば、

$$f_B : A \to \mathbb{R}; a \mapsto \mathrm{dist}(\{a\}, B)$$

定理 2.1.18、定理 2.3.11 よりその写像 $f_B$ はその集合 $A$ 上で連続である。あとは、最大値最小値の定理より、$\exists a \in A$ に対し、次式のようになる。

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(A, B) &= \inf V(d|A \times B) \\ &= \inf V(f_B)\end{aligned}$$

---

[*44] Heine-Borel の被覆定理とは次のことを主張する定理である。解析学でおなじみであるものの証明はやや長いので、ここでは、紹介するだけでとどめる。

$K \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ なる集合 $K$ が compact であるならそのときに限り、その集合 $K$ は点列 compact で次のことも成り立つ。

- その集合 $A$ が全有界であるならそのときに限り、その集合 $A$ は有界である。
- その集合 $A$ が点列 compact であるならそのときに限り、その集合 $A$ は有界な閉集合である。

$$
\begin{aligned}
&= \min V\left(f_B\right) \\
&= f_B(a) \\
&= \mathrm{dist}\left(\{a\}, B\right)
\end{aligned}
$$

□

**定理 2.5.8.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、これの compact 距離空間である部分距離空間 $(A,d_A)$ において、その位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ における任意の閉集合 $B$ に対し、$A\cap B=\emptyset$ が成り立つなら、$d(A,B)>0$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、これの compact 距離空間である部分距離空間 $(A,d_A)$ において、その位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ における任意の閉集合 $B$ に対し、$A\cap B=\emptyset$ が成り立つなら、定理 2.5.7 より $\exists a\in A$ に対し、$\mathrm{dist}(A,B)=\mathrm{dist}\left(\{a\},B\right)$ が成り立つ。ここで、$a\notin B=\mathrm{cl}B$ が成り立つので、定理 2.3.5 より $d(A,B)>0$ が成り立つ。 □

### 2.5.3 Euclid 空間の完備

**定理 2.5.9.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ は完備である。

**証明.** 1 次元 Euclid 空間 $E$ の任意の Cauchy 列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、ある自然数 $n_0$ が存在して、任意の自然数たち $m$、$n$ に対し、$n_0<m$ かつ $n_0<n$ が成り立つなら、$\left|a_m-a_n\right|<1$ が成り立つ。特に、$\left|a_n-a_{n_0+1}\right|<1$ が成り立つ。したがって、次のようになるので、

$$
\begin{aligned}
\left|a_n\right| &= \left|a_n-a_{n_0+1}+a_{n_0+1}\right| \\
&\leq \left|a_n-a_{n_0+1}\right|+\left|a_{n_0+1}\right| \\
&\leq \left|a_{n_0+1}\right|+1 \\
&< \max\left(\left\{\left|a_i\right|\right\}_{i\in\Lambda_{n_0}}\cup\left\{\left|a_{n_0+1}+1\right|\right\}\right)
\end{aligned}
$$

その実数 $\max\left(\left\{\left|a_i\right|\right\}_{i\in\Lambda_{n_0}}\cup\left\{\left|a_{n_0+1}+1\right|\right\}\right)$ が $\alpha$ とおかれれば、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$\left|a_n\right|<\alpha$ が成り立つ。

ここで、実数 $a$ に対し、次式のように集合 $N(a)$ が定義され、

$$
N(a)=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|a_n\leq a\right\}
$$

さらに、次式のように集合 $M$ が定義される。

$$
M=\left\{a\in\mathbb{R}\middle|\#N(a)<\aleph_0\right\}
$$

ここで、上記の議論により $N(-\alpha)=\emptyset$ が成り立つので、$-\alpha\in M$ が成り立ち、したがって、$M\neq\emptyset$ が成り立つ。また、$\forall a,b\in\mathbb{R}$ に対し、$a<b$ が成り立つなら、$N(a)\subseteq N(b)$ が成り立つ。一方で、上記の議論により $N(\alpha)=\mathbb{N}$ が成り立つので、$\alpha\notin M$ が成り立つ。したがって、$\forall a\in M$ に対し、$N(\alpha)\subseteq N(a)$ が成り立たなく、したがって、$\alpha<a$ も成り立たない、即ち、$a\leq\alpha$ が成り立つので、その実数 $\alpha$ はその集合 $M$ の上界であるから、実数の公理での上限性質よりその集合 $M$ の上限 $\sup M$ がその実数全体 $\mathbb{R}$ に存在する。

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0'\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、その元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるので、$n_0'<m$ かつ $n_0'<n$ が成り立つなら、$\left|a_m-a_n\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立ち、さらに、$\sup M-\dfrac{\varepsilon}{2}\in M$ かつ $\sup M+\dfrac{\varepsilon}{2}\notin M$ が成り立つので、それらの集合たち $N\left(\sup M-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$、$N\left(\sup M+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ はそれぞれ有限集合、無限集合である。したがっ

て、その差集合 $N\left(\sup M+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\setminus N\left(\sup M-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ も無限集合であるから、その差集合に属しその自然数 $n_0'$ より大きいものが存在する。このような自然数が $n'$ とおかれれば、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$n'<n$ が成り立つなら、

$$\begin{aligned}
\begin{cases}
|a_n-\sup M|\leq|a_n-a_{n'}|+|a_{n'}-\sup M|\\
n'\in N\left(\sup M+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\setminus N\left(\sup M-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\\
n_0'<n'<n
\end{cases}
&\Rightarrow\begin{cases}
|a_n-\sup M|\leq|a_n-a_{n'}|+|a_{n'}-\sup M|\\
n'\in N\left(\sup M+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\wedge n'\notin N\left(\sup M-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\\
|a_n-a_{n'}|<\dfrac{\varepsilon}{2}
\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}
|a_n-\sup M|\leq|a_n-a_{n'}|+|a_{n'}-\sup M|\\
a_{n'}\leq\sup M+\dfrac{\varepsilon}{2}\wedge\sup M-\dfrac{\varepsilon}{2}<a_{n'}\\
|a_n-a_{n'}|<\dfrac{\varepsilon}{2}
\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}
|a_n-\sup M|\leq|a_n-a_{n'}|+|a_{n'}-\sup M|\\
\sup M-\dfrac{\varepsilon}{2}<a_{n'}\leq\sup M+\dfrac{\varepsilon}{2}\\
|a_n-a_{n'}|<\dfrac{\varepsilon}{2}
\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}
|a_n-\sup M|\leq|a_n-a_{n'}|+|a_{n'}-\sup M|\\
-\dfrac{\varepsilon}{2}<a_{n'}-\sup M\leq\dfrac{\varepsilon}{2}\\
|a_n-a_{n'}|<\dfrac{\varepsilon}{2}
\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}
|a_n-\sup M|\leq|a_n-a_{n'}|+|a_{n'}-\sup M|\\
|a_{n'}-\sup M|<\dfrac{\varepsilon}{2}\\
|a_n-a_{n'}|<\dfrac{\varepsilon}{2}
\end{cases}\\
&\Rightarrow|a_n-\sup M|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

これは $\varepsilon$-$\delta$ 論法そのものなので、$\lim_{n\to\infty}a_n=\sup M$ が成り立つ。

よって、任意の Cauchy 列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するので、1 次元 Euclid 空間 $E$ は完備である。 □

**定理 2.5.10.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ は完備である。

**証明.** 定理 2.4.10 より明らかである。 □

**定理 2.5.11.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ の部分距離空間が与えられたとき、これの台集合が有界なら、これを台集合とする $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ の部分距離空間は全有界である。

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ の部分距離空間 $(M,d_{E^n M})$ が与えられたとき、これの台集合 $M$ が有界なら、定理 2.3.3 より $\forall\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$M\subseteq B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right)$ が成り立つ。したがて、$\mathrm{cl}M\subseteq\mathrm{cl}B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right)$ が成り立つ。ここで、$\forall\varepsilon'\in\mathbb{R}^+\forall\mathbf{b}\in\mathrm{cl}B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right)$ に対し、$d_{E^n}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)\leq\varepsilon<\varepsilon+\varepsilon'$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
M&\subseteq\mathrm{cl}M\\
&\subseteq\mathrm{cl}B\left(\mathbf{a},\varepsilon\right)\\
&\subseteq B\left(\mathbf{a},\varepsilon+\varepsilon'\right)
\end{aligned}$$

以上、定理 2.3.3 よりその集合 $\mathrm{cl}M$ は有界な閉集合である。定理 2.5.2 よりその集合 $\mathrm{cl}M$ を台集合とするその位相空間 $\left(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)$ の部分位相空間は compact 空間となるので、定理 1.6.2 よりその集合 $\mathrm{cl}M$ の任意の開被覆 $\mathfrak{U}_M$ が与えられたとき、これの有限な部分集合 $\mathfrak{U}_M'$ が存在してこれがその集合 $\mathrm{cl}M$ の開被覆となる。あとは、開被覆の任意性に注意すれば、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $S$ の有限な部分集合 $M$ が存在して

$\bigcup_{a \in M} B(a,\varepsilon) = S$ が成り立つので、定理 2.4.12 よりその集合 $M$ を台集合とする $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ の部分距離空間は全有界である。 □

### 2.5.4 Fréchet の意味での compact 距離空間

**定義 2.5.2.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その台集合 $S$ の任意の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、ある部分列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して、その部分列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ がその距離空間 $(S,d)$ の意味で収束するとき、その距離空間 $(S,d)$ を Fréchet の意味での compact 距離空間、点列 compact 距離空間という。

**定理 2.5.12.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その距離空間 $(S,d)$ が Fréchet の意味での compact 距離空間であるならそのときに限り、その距離空間 $(S,d)$ が完備であるかつ、全有界である。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その距離空間 $(S,d)$ が Fréchet の意味での compact 距離空間であるなら、その台集合 $S$ の任意の Cauchy 列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は仮定より収束する部分列をもつので、定理 2.4.19 よりその Cauchy 列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ もその部分列と同じ極限に収束する。したがって、その距離空間 $(S,d)$ は完備である。また、その台集合 $S$ の任意の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、ある部分列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して、その部分列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ がその距離空間 $(S,d)$ 上で収束する。ここで、定理 2.4.7 よりその元の列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるから、定理 2.4.21 よりその距離空間 $(S,d)$ は全有界である。以上より、その距離空間 $(S,d)$ が Fréchet の意味での compact 距離空間であるなら、その距離空間 $(S,d)$ が完備であるかつ、全有界である。

逆に、その距離空間 $(S,d)$ が完備であるかつ、全有界であるとすると、定理 2.4.21 よりその台集合 $S$ の任意の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、ある部分列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して、これが Cauchy 列となる。そこで、完備の定義より任意の Cauchy 列は収束するので、その部分列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ももちろん収束する。よって、その距離空間 $(S,d)$ は Fréchet の意味での compact 距離空間である。 □

**定理 2.5.13.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その距離空間 $(S,d)$ が Fréchet の意味での compact 距離空間であるならそのときに限り、その台集合 $S$ は有限集合であるか、その台集合 $S$ の任意の無限集合である部分集合の集積点が存在する。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、その距離空間 $(S,d)$ が Fréchet の意味での compact 距離空間であるとする。その台集合 $S$ が有限集合でないとき、その台集合 $S$ の無限集合である部分集合 $M$ は存在する。例えば、その台集合 $S$ 自身がそうである。ここで、$\aleph_0 \leq \# M$ が成り立つので、単射 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow M; n \mapsto a_n$ が存在してこれのある部分列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ がその距離空間 $(S,d)$ の意味で収束する。これは定理 2.1.12 より $\lim_{k \rightarrow \infty} d\left( a_{n_k}, \ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \right) = 0$ が成り立つことを意味する、即ち、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 < n$ が成り立つなら、$d\left( a_{n_k}, \ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \right) < \varepsilon$ が成り立つ。ここで、正の実数 $\varepsilon$ の任意性と定理 2.3.5 より次のようになる。

$$\begin{aligned} d\left( a_{n_k}, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \right) = 0 &\Leftrightarrow \inf V \left( d| \left( M \setminus \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \right\} \right) \times \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \right\} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{dist} \left( M \setminus \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \right\}, \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \right\} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \in \mathrm{cl} \left( M \setminus \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \right\} \right) \end{aligned}$$

したがって、その極限 $\lim_{k \to \infty} a_{n_k}$ はその部分集合 $M$ の集積点である。

逆に、その台集合 $S$ の任意の元の列 $\left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の値域 $\left\{ a_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ はもちろんその台集合 $S$ の部分集合であるので、これが $M$ とおかれると、その集合 $M$ が有限集合であるとき、その元の列 $\left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は単射でないので、$\exists m, n \in \mathbb{N}$ に対し、$a_m = a_n$ が成り立つ。ここで、$S = \left\{ a_i \right\}_{i \in \varLambda_{\# S}}$ とおかれることにして、$\forall i \in \varLambda_{\# S}$ に対し、値域 $V\left( \left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}^{-1} | \left\{ a_i \right\} \right)$ が有限集合であると仮定すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= D\left( \left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) \\ &= V\left( \left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}^{-1} \right) \\ &= \bigcup_{a_i \in S} V\left( \left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}^{-1} | \left\{ a_i \right\} \right) \\ &= \bigsqcup_{i \in \varLambda_{\# S}} V\left( \left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}^{-1} | \left\{ a_i \right\} \right) \end{aligned}$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= \# \mathbb{N} \\ &= \# \bigsqcup_{i \in \varLambda_{\# S}} V\left( \left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}^{-1} | \left\{ a_i \right\} \right) \\ &= \sum_{i \in \varLambda_{\# S}} \# V\left( \left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}^{-1} | \left\{ a_i \right\} \right) \\ &< \sum_{i \in \varLambda_{\# S}} \aleph_0 = \aleph_0 \end{aligned}$$

これは矛盾している。したがって、$\exists i \in \varLambda_{\# S}$ に対し、値域 $V\left( \left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}^{-1} | \left\{ a_i \right\} \right)$ が無限集合であることになるので、全単射 $\left( n_k \right)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow V\left( \left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}^{-1} | \left\{ a_i \right\} \right); k \mapsto n_k$ が存在して、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$a_{n_k} = a_i$ が成り立つことができる。このとき、ある部分列 $\left( a_{n_k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して、その部分列 $\left( a_{n_k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ がその距離空間 $(S, d)$ の意味で収束する。その台集合 $S$ が有限集合であるときも上記の議論に従う。

その集合 $M$ が無限集合であるとき、仮定よりその台集合 $S$ のその部分集合 $M$ の集積点 $a$ が存在する。このとき、定理 2.1.13 より任意の自然数 $k$ に対し、$a_{n_k} \neq a$ なるその集合 $M$ のある元の列 $\left( a_{n_k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ の極限がその元 $a$ である、即ち、$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a$ が成り立つ。

いづれにせよ、その台集合 $S$ の任意の元の列 $\left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、ある部分列 $\left( a_{n_k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して、その部分列 $\left( a_{n_k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ がその距離空間 $(S, d)$ の意味で収束するので、その距離空間 $(S, d)$ は Fréchet の意味での compact 距離空間となる。 □

**定理 2.5.14.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、その距離空間 $(S, d)$ における位相空間 $\left( S, \mathfrak{O}_d \right)$ は compact 空間であるならそのときに限り、その位相空間 $\left( S, \mathfrak{O}_d \right)$ は Fréchet の意味での compact 空間である。

**証明.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、その距離空間 $(S, d)$ における位相空間 $\left( S, \mathfrak{O}_d \right)$ は compact 空間であるなら、その台集合 $S$ の任意の元の列 $\left( a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ とその台集合 $S$ の任意の元 $a$ に対し、ある正の実数 $\varepsilon_a$ が存在して、集合 $\left\{ n \in \mathbb{N} | a_n \in B\left( a, \varepsilon_a \right) \right\}$ が有限集合であると仮定する。このとき、族 $\left\{ B\left( a, \varepsilon_a \right) \right\}_{a \in S}$ はその台集合 $S$ の開被覆でその位相空間 $\left( S, \mathfrak{O}_d \right)$ は compact 空間であるから、その台集合 $S$ の有限な部分集合 $S'$ が存在して、族 $\left\{ B\left( a, \varepsilon_a \right) \right\}_{a \in S'}$ もその台集合 $S$ の開被覆となる。このとき、$\forall n \in \mathbb{N} \exists a \in S'$ に対し、$a_n \in B\left( a, \varepsilon_a \right)$

が成り立つので、次式が得られる。

$$\mathbb{N} = \bigcup_{a \in S'} \left\{ n \in \mathbb{N} | a_n \in B\left(a, \varepsilon_a\right) \right\}$$

このとき、次のようになるが、

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= \#\mathbb{N} \\ &= \# \bigcup_{a \in S'} \left\{ n \in \mathbb{N} | a_n \in B\left(a, \varepsilon_a\right) \right\} \\ &\leq \sum_{a \in S'} \# \left\{ n \in \mathbb{N} | a_n \in B\left(a, \varepsilon_a\right) \right\} \\ &< \sum_{a \in S'} \aleph_0 = \aleph_0 \end{aligned}$$

これは矛盾している。したがって、その台集合 $S$ のある元 $a$ が存在して、任意の正の実数 $\varepsilon_a$ に対し、集合 $\left\{ n \in \mathbb{N} | a_n \in B\left(a, \varepsilon_a\right) \right\}$ が無限集合である。

そこで、任意の正の実数 $\varepsilon_a$ に対し、集合 $\left\{ n \in \mathbb{N} | a_n \in B\left(a, \varepsilon_a\right) \right\}$ が無限集合であるようなその台集合 $S$ の元が $a'$ とおかれると、任意の自然数 $k$ と任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し、次式のような集合について、

$$N(k, \varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N} | k < n \wedge a_n \in B\left(a', \varepsilon\right) \right\}$$

次のようになることから、

$$\begin{aligned} \#N(k, \varepsilon) &= \# \left\{ n \in \mathbb{N} | k < n \wedge a_n \in B\left(a', \varepsilon\right) \right\} \\ &= \# \left\{ n \in \mathbb{N} | \neg n \leq k \wedge a_n \in B\left(a', \varepsilon\right) \right\} \\ &= \#\left\{ n \in \mathbb{N} | a_n \in B\left(a', \varepsilon\right) \right\} \setminus \left\{ n \in \mathbb{N} | n \leq k \right\} \\ &= \#\left\{ n \in \mathbb{N} | a_n \in B\left(a', \varepsilon\right) \right\} \setminus \varLambda_k \\ &= \# \left\{ n \in \mathbb{N} | a_n \in B\left(a', \varepsilon\right) \right\} - \#\varLambda_k \\ &= \aleph_0 - k = \aleph_0 \end{aligned}$$

その集合 $N(k, \varepsilon)$ は無限集合である。

そこで、その集合 $N(k, \varepsilon)$ の元が 1 つ選ばれておき、これが $\varPhi(k, \varepsilon)$ とおかれるとする。ここで、元の列 $\left(i_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が次式のように定義されれば、

$$i_1 = \varPhi(1, 1), \quad i_{n+1} = \varPhi\left(i_n, \frac{1}{n+1}\right)$$

その集合 $N(k, \varepsilon)$ の定義より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$i_n < i_{n+1}$ が成り立つ。ここで、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\frac{1}{\varepsilon} < n_0$ なる自然数 $n_0$ が存在して、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 < n$ が成り立つなら、$i_0 = 1$ として $i_n \in N\left(i_{n-1}, \frac{1}{n}\right)$ が成り立つので、次のようになることから、

$$\begin{aligned} i_n \in N\left(i_{n-1}, \frac{1}{n}\right) &\Leftrightarrow a_{i_n} \in B\left(a', \frac{1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow d\left(a', a_{i_n}\right) < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} a_{i_n} = a'$ が成り立つ。これにより、その台集合 $S$ の任意の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、ある部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、その部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ がその距離空間 $(S,d)$ の意味で収束するので、その位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ は Fréchet の意味での compact 空間である。

逆に、その位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ は Fréchet の意味での compact 空間であるなら、その台集合 $S$ の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ に対し、定理 2.5.12 よりその距離空間 $(S,d)$ は全有界で定理 2.4.16 より第 2 可算公理を満たす。したがって、定理 1.6.16 よりその距離空間 $(S,d)$ における位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ は Lindelöf の性質をもっているので、その台集合 $S$ の開被覆 $\mathfrak{U}'$ が存在して、その開被覆 $\mathfrak{U}$ の部分集合でたかだか可算である。

このとき、$\mathfrak{U}' = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とおかれれば、その集合 $\mathfrak{U}'$ がその台集合 $S$ の有限な開被覆を含まないと仮定すると、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、次式のように集合 $A_n$ が定義されると、

$$A_n = S \setminus \bigcup_{i\in\Lambda_n} U_i$$

これは仮定より空集合ではなく閉集合である。さらに、明らかに $A_{n+1} \subseteq A_n$ が成り立つ。そこで、各集合 $A_n$ の元 $a_n$ がとられれば、元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる。そこで、仮定よりこれの部分列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、これが収束するなら、$\forall j \in \mathbb{N}$ に対し、ある自然数 $k_0$ が存在して、$j < n_{k_0}$ が成り立つ。したがって、$a_{n_{k_0}} \in A_{n_{k_0}} \subseteq A_j$ が成り立つので、$a_{n_{k_0}} \in A_j$ が成り立ち、定理 2.1.13 よりその極限 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ がその集合 $A_j$ の触点であるかつ、その集合 $A_j$ が閉集合であることから、$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in \mathrm{cl}A_j = A_j$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\forall j \in \mathbb{N}\left[\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in A_j\right] \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j &= \bigcap_{j\in\mathbb{N}}\left(S \setminus \bigcup_{i\in\Lambda_j} U_i\right)\\
&= S \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\bigcup_{i\in\Lambda_j} U_i\\
&= S \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n
\end{aligned}$$

これにより、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset S$ が成り立つことになるが、これはその集合 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がその台集合 $S$ の開被覆であることに矛盾する。

よって、その集合 $\mathfrak{U}'$ がその台集合 $S$ の有限な開被覆を含むので、その位相空間 $(S,\mathfrak{O}_d)$ は compact 空間である。 □

# 参考文献


[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p252,257-268 ISBN978-4-00-029871-1

## 2.6 完備化

### 2.6.1 完備化

**定理 2.6.1.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、この距離空間 $(S,d)$ における Cauchy 列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 全体の集合が $C(S,d)$ とおかれると、$\forall\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\in C(S,d)$ に対し、実数列 $\left(d\left(a_n,b_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、この距離空間 $(S,d)$ における Cauchy 列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 全体の集合が $C(S,d)$ とおかれると、$\forall\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\in C(S,d)$ に対し、実数列 $\left(d\left(a_n,b_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が考えられれば、$\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} d\left(a_m,b_m\right)-d\left(a_n,b_n\right) &\leq d\left(a_m,a_n\right)+d\left(a_n,b_n\right)+d\left(b_n,b_m\right)-d\left(a_n,b_n\right)\\ &= d\left(a_m,a_n\right)+d\left(b_m,b_n\right)\end{aligned}$$

同様にして、次式が成り立つので、

$$d\left(a_n,b_n\right)-d\left(a_m,b_m\right)\leq d\left(a_m,a_n\right)+d\left(b_m,b_n\right)$$

したがって、次式が得られる。

$$\left|d\left(a_n,b_n\right)-d\left(a_m,b_m\right)\right|\leq d\left(a_m,a_n\right)+d\left(b_m,b_n\right)$$

ここで、それらの元の列たち $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はいづれも Cauchy 列であるから、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、ある自然数 $n_0$ が存在して、任意の自然数たち $m$、$n$ に対し、$n_0<m$、$n_0<n$ が成り立つなら、$d\left(a_m,a_n\right)<\varepsilon$ かつ $d\left(b_m,b_n\right)<\varepsilon$ が成り立つので、次式のようになる。

$$\begin{aligned}\left|d\left(a_n,b_n\right)-d\left(a_m,b_m\right)\right| &\leq d\left(a_m,a_n\right)+d\left(b_m,b_n\right)\\ &<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

これにより、その実数列 $\left(d\left(a_n,b_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるから、定理 2.5.9 よりその実数列 $\left(d\left(a_n,b_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。 □

**定理 2.6.2.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、この距離空間 $(S,d)$ における Cauchy 列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 全体の集合 $C(S,d)$ の元々 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、$\lim_{n\to\infty}d\left(a_n,b_n\right)=0$ が成り立つことを $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}R_{C(S,d)}\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ とおかれると、その関係 $R_{C(S,d)}$ はその集合 $C(S,d)$ における同値関係となる。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、この距離空間 $(S,d)$ における Cauchy 列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 全体の集合 $C(S,d)$ の元々 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、$\lim_{n\to\infty}d\left(a_n,b_n\right)=0$ が成り立つことを $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}R_{C(S,d)}\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ とおかれるとする。

$\forall\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\in C(S,d)$ に対し、その元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるから、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$n_0<n$ が成り立つなら、$d\left(a_n,a_n\right)<\varepsilon$ が成り立つので、$\lim_{n\to\infty}d\left(a_n,a_n\right)=0$ が成り立つ。ゆえに、$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}R_{C(S,d)}\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つ。

$\forall\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\in C(S,d)$ に対し、$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}R_{C(S,d)}\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つなら、$\lim_{n\to\infty}d\left(a_n,\ b_n\right)=0$ が成り立つ。ここで、距離空間の定義より $\lim_{n\to\infty}d\left(b_n,a_n\right)=0$ が成り立つので、$\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}R_{C(S,d)}\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つ。

$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(S,d)$ に対し、$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} R_{C(S,d)} (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ かつ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} R_{C(S,d)} (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つなら、$\lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n) = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} d(b_n,c_n) = 0$ が成り立つ、即ち、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$n_0 < n$ が成り立つなら、$d(a_n,b_n) < \varepsilon$ かつ $d(b_n,c_n) < \varepsilon$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$d(a_n,c_n) \leq d(a_n,b_n) + d(b_n,c_n) < 2\varepsilon$$

これにより、$\lim_{n\to\infty} d(a_n,c_n) = 0$ が成り立つので、$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} R_{C(S,d)} (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つ。

以上より、その関係 $R_{C(S,d)}$ はその集合 $C(S,d)$ における同値関係となる。 □

**定理 2.6.3.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、上で定義された集合 $C(S,d)$ とこれにおける同値関係 $R_{C(S,d)}$ において、その商集合 $C(S,d)/R_{C(S,d)}$ が $S^*$ と、その集合 $C(S,d)$ からその商集合 $S^*$ への自然な写像 $C_{R_{C(R,d)}}$ が $\pi$ とおかれると、$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(S,d)$ に対し、次式が成り立つなら、

$$\pi(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \pi(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \pi(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \pi(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

次式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n) = \lim_{n\to\infty} d(a'_n,b'_n)$$

これにより、次式のような写像 $d^*$ が定義されることができる。

$$d^* : S^* \times S^* \to \mathbb{R}; \left(\pi(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \pi(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \mapsto \lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n)$$

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、上で定義された集合 $C(S,d)$ とこれにおける同値関係 $R_{C(S,d)}$ において、その商集合 $C(S,d)/R_{C(S,d)}$ が $S^*$ と、その集合 $C(S,d)$ からその商集合 $S^*$ への自然な写像 $C_{R_{C(R,d)}}$ が $\pi$ とおかれると、$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(S,d)$ に対し、次式が成り立つなら、

$$\pi(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \pi(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \pi(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \pi(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

定義よりもちろん次式が成り立つ、

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} R_{C(S,d)} (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} R_{C(S,d)} (b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

即ち、次式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n,a'_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} d(b_n,b'_n) = 0$$

ここで、次のようになることから、

$$d(a_n,b_n) \leq d(a_n,a'_n) + d(a'_n,b'_n) + d(b'_n,b_n)$$

したがって、次のようになる[*45]。

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n) &\leq \lim_{n\to\infty} \left(d(a_n,a'_n) + d(a'_n,b'_n) + d(b'_n,b_n)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} d(a_n,a'_n) + \lim_{n\to\infty} d(a'_n,b'_n) + \lim_{n\to\infty} d(b'_n,b_n)\\
&= 0 + \lim_{n\to\infty} d(a'_n,b'_n) + 0\\
&= \lim_{n\to\infty} d(a'_n,b'_n)
\end{aligned}$$

[*45] ここで、いま考えている元の列は実数列なことに注意しよう。

同様にして $\lim_{n\to\infty} d\left(a_n', b_n'\right) \leq \lim_{n\to\infty} d\left(a_n, b_n\right)$ が成り立つので、次式が成り立つなら、

$$\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \pi\left(a_n'\right)_{n\in\mathbb{N}},\quad \pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \pi\left(b_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

次式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} d\left(a_n, b_n\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(a_n', b_n'\right)$$

ことが示された。 □

**定理 2.6.4.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、上で次式のように定義された写像 $d^*$ を用いた組 $(S^*, d^*)$ は距離空間をなす。

$$d^* : S^* \times S^* \to \mathbb{R}; \left(\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) \mapsto \lim_{n\to\infty} d\left(a_n, b_n\right)$$

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、定理 2.6.3 で次式のように定義された写像 $d^*$ を用いた組 $(S^*, d^*)$ について、

$$d^* : S^* \times S^* \to \mathbb{R}; \left(\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) \mapsto \lim_{n\to\infty} d\left(a_n, b_n\right)$$

$\forall\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in S^*$ に対し、$d^*\left(\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) = 0$ が成り立つならそのときに限り、$\lim_{n\to\infty} d\left(a_n, b_n\right) = 0$ が成り立つ。これにより、$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} R_{C(S,d)} \left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つので、$\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる。逆も同様にして示される。

$\forall\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in S^*$ に対し、$\lim_{n\to\infty} d\left(a_n, b_n\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(b_n, a_n\right)$ が成り立つので、$d^*\left(\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) = d^*\left(\pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ が成り立つ。

$\forall\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(c_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in S^*$ に対し、次のようになることから、

$$d\left(a_n, c_n\right) \leq d\left(a_n, b_n\right) + d\left(b_n, c_n\right)$$

両辺に $n \to \infty$ とすれば、次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty} d\left(a_n, c_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} d\left(a_n, b_n\right) + \lim_{n\to\infty} d\left(b_n, c_n\right)$$

よって、次式が成り立つ。

$$d^*\left(\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(c_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) \leq d^*\left(\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) + d^*\left(\pi\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \pi\left(c_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

以上より、その組 $(S^*, d^*)$ は距離空間をなす。 □

**定理 2.6.5.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、元の列 $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ は明らかに $(a)_{n\in\mathbb{N}} \in C(S,d)$ を満たす。これにより、上で定義された写像 $\pi$ を用いて次式のように写像 $\varphi$ が定義されれば、

$$\varphi : S \to S^*; a \mapsto \pi(a)_{n\in\mathbb{N}}$$

次のことが成り立つ。

- その距離空間 $(S^*, d^*)$ は完備である。
- $\forall a, b \in S$ に対し、$d(a,b) = d^*\left(\varphi(a), \varphi(b)\right)$ が成り立つ。
- その写像 $\varphi$ の値域 $V(\varphi)$ はその台集合 $S^*$ において密である、即ち、$\mathrm{cl}V(\varphi) = S^*$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、$\forall a \in S$ に対し、元の列 $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ は明らかに $(a)_{n\in\mathbb{N}} \in C(S,d)$ を満たす。これにより、上で定義された写像 $\pi$ を用いて次式のように写像 $\varphi$ が定義されれば、

$$\varphi : S \to S^*; a \mapsto \pi(a)_{n\in\mathbb{N}}$$

$\forall a,b \in S$ に対し、明らかに次のようになる。

$$\begin{aligned} d(a,b) &= \lim_{n\to\infty} d(a,b) \\ &= d^*\left(\pi(a)_{n\in\mathbb{N}}, \pi(b)_{n\in\mathbb{N}}\right) \\ &= d^*\left(\varphi(a), \varphi(b)\right) \end{aligned}$$

また、$\forall\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in S^*$ に対し、距離空間 $(S^*,d^*)$ において、次のようになる。

$$d^*\left(\pi\left(a_m\right)_{m\in\mathbb{N}}, \varphi\left(a_n\right)\right) = d^*\left(\pi\left(a_m\right)_{m\in\mathbb{N}}, \pi\left(a_n\right)_{m\in\mathbb{N}}\right) = \lim_{m\to\infty} d\left(a_m, a_n\right)$$

ここで、$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in C(S,d)$ が成り立つので、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{N}\forall m,n \in \mathbb{N}$ に対し、$\delta \leq m$ かつ $\delta \leq n$ が成り立つなら、$d\left(a_m,a_n\right) < \varepsilon$ が成り立つ。したがって、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$\delta \leq n$ が成り立つなら、$\lim_{m\to\infty} d\left(a_m,a_n\right) < \varepsilon$ が成り立つので、次式が得られる。

$$\lim_{n\to\infty} d^*\left(\pi\left(a_m\right)_{m\in\mathbb{N}}, \varphi\left(a_n\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} d\left(a_m,a_n\right) = 0$$

定理 2.1.12 より $\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \pi\left(a_m\right)_{m\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}\varphi\left(a_n\right)$ が成り立つ。

さらに、定理 2.1.13 よりその距離空間 $(S^*,d^*)$ における位相空間 $(S^*,\mathfrak{O}_{d^*})$ において、$\pi\left(a_m\right)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathrm{cl}V(\varphi)$ が成り立つ。以上より、$S^* = \mathrm{cl}V(\varphi)$ が得られたので、その写像 $\varphi$ の値域 $V(\varphi)$ はその台集合 $S^*$ において密である。

これにより、その距離空間 $(S^*,d^*)$ の任意の Cauchy 列 $\left(a_n^*\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がとられれば、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$a_n^* \in S^* = \mathrm{cl}V(\varphi)$ が成り立つので、定理 2.1.13 よりあるその集合 $S$ の元の列 $\left(a_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して $a_n^* = \lim_{n\to\infty}\varphi\left(a_n'\right)$ が成り立つ。したがって、$\exists\delta \in \mathbb{N}\forall m \in \mathbb{N}$ に対し、$\delta \leq m$ が成り立つなら、$d^*\left(a_n^*, \varphi\left(a_m'\right)\right) < \dfrac{1}{n}$ が成り立つので、$a_\delta' = a_n$ とおくと、$\exists a_n \in S$ に対し、$d^*\left(a_n^*, \varphi\left(a_n\right)\right) < \dfrac{1}{n}$ が成り立つ。このとき、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{N}\forall m,n \in \mathbb{N}$ に対し、$\delta \leq m$ かつ $\delta \leq n$ が成り立つなら、その元の列 $\left(a_n^*\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は仮定より Cauchy 列であるから、$d^*\left(a_m^*,a_n^*\right) < \varepsilon$ が成り立つ。さらに、$0 < \dfrac{1}{m} < \varepsilon$ かつ $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ が成り立つようにとられればよいので、したがって、上記の議論により次式が成り立つことから、

$$\begin{aligned} d\left(a_m,a_n\right) &= d^*\left(\varphi\left(a_m\right), \varphi\left(a_n\right)\right) \\ &\leq d^*\left(\varphi\left(a_m\right), a_m^*\right) + d^*\left(a_m^*,a_n^*\right) + d^*\left(a_n^*, \varphi\left(a_n\right)\right) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

その元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である、即ち、$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in C(S,d)$ が成り立つ。したがって、上記の議論により $\pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}\varphi\left(a_n\right)$ が成り立つ、即ち、定理 2.1.12 より $\lim_{n\to\infty} d^*\left(\pi\left(a_m\right)_{m\in\mathbb{N}}, \varphi\left(a_n\right)\right) = 0$ が成り立つ。したがって、次式が成り立つことから、

$$\begin{aligned} 0 &\leq d^*\left(a_n^*, \pi\left(a_m\right)_{m\in\mathbb{N}}\right) \\ &\leq d^*\left(\varphi\left(a_n\right), a_n^*\right) + d^*\left(\pi\left(a_m\right)_{m\in\mathbb{N}}, \varphi\left(a_n\right)\right) \end{aligned}$$

$n \to \infty$ とすれば、はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} d^*\left(a_n^*, \pi\left(a_m\right)_{m\in\mathbb{N}}\right) = 0$ が成り立つ、即ち、定理 2.1.12 より $\lim_{n\to\infty} a_n^* = \pi\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つ、即ち、その元の列 $\left(a_n^*\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するので、その距離空間 $(S^*,d^*)$ は完備である。 □

**定理 2.6.6.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、次のことを満たす距離空間 $(S^*,d^*)$ と写像 $\varphi:S\rightarrow S^*$ が存在するのであった。

- その距離空間 $(S^*,d^*)$ は完備である。
- $\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)=d^*\left(\varphi(a),\varphi(b)\right)$ が成り立つ。
- その写像 $\varphi$ の値域 $V(\varphi)$ はその台集合 $S^*$ において密である、即ち、$\mathrm{cl}V(\varphi)=S^*$ が成り立つ。

このとき、そのような距離空間 $(S^*,d^*)$ と写像 $\varphi$ の組が $\left(\left(S^*,d^*\right),\varphi\right)$、$\left(\left(T^*,e^*\right),\chi\right)$ と 2 つ与えられたとき、ある全単射 $f:S^*\rightarrow T^*$ が存在して、次のことを満たす。

- $f\circ\varphi=\chi$ が成り立つ。
- $\forall a,b\in S^*$ に対し、$d^*(a,b)=e^*\left(f(a),f(b)\right)$ が成り立つ。

**証明.** 距離空間 $(S,d)$ が与えられたとき、次のことを満たす距離空間 $(S^*,d^*)$ と写像 $\varphi:S\rightarrow S^*$ が存在するのであった。

- その距離空間 $(S^*,d^*)$ は完備である。
- $\forall a,b\in S$ に対し、$d(a,b)=d^*\left(\varphi(a),\varphi(b)\right)$ が成り立つ。
- その写像 $\varphi$ の値域 $V(\varphi)$ はその台集合 $S^*$ において密である、即ち、$\mathrm{cl}V(\varphi)=S^*$ が成り立つ。

このとき、そのような距離空間 $(S^*,d^*)$ と写像 $\varphi$ の組が $\left(\left(S^*,d^*\right),\varphi\right)$、$\left(\left(T^*,e^*\right),\chi\right)$ と 2 つ与えられたとき、$\forall a^*\in S^*$ に対し、$a^*\in\mathrm{cl}V(\varphi)$ が成り立つので、定理 2.1.13 よりあるその集合 $S$ の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して、$a^*=\lim_{n\rightarrow\infty}\varphi\left(a_n\right)$ が成り立つ。ここで、その集合 $T^*$ における元の列 $\left(\chi\left(a_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ において、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$\delta\leq m$ かつ $\delta\leq n$ が成り立つなら、定理 2.4.7 よりその元の列 $\left(\varphi\left(a_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列となり、したがって、$d^*\left(\varphi\left(a_m\right),\varphi\left(a_n\right)\right)<\varepsilon$ が成り立つ。ここで、上記の議論により次のようになる。

$$\begin{aligned}e^*\left(\chi\left(a_m\right),\chi\left(a_n\right)\right)&=d\left(a_m,a_n\right)\\&=d^*\left(\varphi\left(a_m\right),\varphi\left(a_n\right)\right)<\varepsilon\end{aligned}$$

ゆえに、その元の列 $\left(\chi\left(a_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。ここで、その距離空間 $(T^*,e^*)$ は完備であるので、その元の列 $\left(\chi\left(a_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束することになり、その極限点を $b^*$ とおく。ここで、このような元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ と 2 つと与えられたとき、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$\delta\leq n$ が成り立つなら、$e^*\left(\chi\left(a_n\right),b^*\right)<\varepsilon$ が成り立つ。したがって、次のようになるので、

$$\begin{aligned}e^*\left(\chi\left(b_n\right),b^*\right)&\leq e^*\left(\chi\left(a_n\right),\chi\left(b_n\right)\right)+e^*\left(\chi\left(a_n\right),b^*\right)\\&=d\left(a_n,b_n\right)+e^*\left(\chi\left(a_n\right),b^*\right)\\&=d^*\left(\varphi\left(a_n\right),\varphi\left(b_n\right)\right)+e^*\left(\chi\left(a_n\right),b^*\right)\\&=d^*\left(\varphi\left(a_n\right),\varphi\left(b_n\right)\right)+e^*\left(\chi\left(a_n\right),b^*\right)\\&\leq d^*\left(\varphi\left(a_n\right),a^*\right)+d^*\left(\varphi\left(b_n\right),a^*\right)+e^*\left(\chi\left(a_n\right),b^*\right)\\&<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon\end{aligned}$$

その極限点 $b^*$ はその元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ に依らないことが示された。

以上より、次のような写像 $f$ が定義される。

$$f:S^*\rightarrow T^*;a^*\mapsto b^*$$

このとき、先ほどの元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を用いて $b^* = \lim_{n\to\infty} \chi(a_n)$ が成り立つので、その元の列 $(\varphi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は極限点としてその元 $a^*$ に収束することになる。したがって、上記の議論と同様にして次のような写像 $g$ が定義されれば、

$$g : T^* \to S^*; b^* \mapsto a^*$$

$g \circ f = I_{S^*}$ が成り立つ。同様にして、$f \circ g = I_{T^*}$ が成り立つことが示されるので、その写像 $f$ は全単射である。

$\forall a \in S$ に対し、明らかに $\varphi(a) = \lim_{n\to\infty} \varphi(a)$ が成り立つので、その写像 $f$ の定義よりその元の列 $(\chi(a))_{n\in\mathbb{N}}$ は収束することになり、その極限点を $b^*$ とおくと、$\chi(a) = b^* = f \circ \varphi(a)$ が成り立つ。よって、$f \circ \varphi = \chi$ が成り立つ。

$\forall a, b \in S^*$ に対し、$a, b \in \mathrm{cl}V(\varphi)$ が成り立つので、定理 2.1.13 よりあるその集合 $S$ の元の列々 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して、$a = \lim_{n\to\infty} \varphi(a_n)$、$b = \lim_{n\to\infty} \varphi(b_n)$ が成り立つ。このとき、定理 2.1.25 より次のようになる。

$$\begin{aligned}
d^*(a, b) &= d^*\left(\lim_{n\to\infty} \varphi(a_n), \lim_{n\to\infty} \varphi(b_n)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} d^*(\varphi(a_n), \varphi(b_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^*(\chi(a_n), \chi(b_n)) \\
&= e^*\left(\lim_{n\to\infty} \chi(a_n), \lim_{n\to\infty} \chi(b_n)\right) \\
&= e^*(f(a), f(b))
\end{aligned}$$

□

**定理 2.6.7.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、定理 2.6.6 における写像 $\varphi$ は単射である。

**証明.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、定理 2.6.6 における距離空間 $(S^*, d^*)$ と写像 $\varphi : S \to S^*$ において、$\forall a, b \in S$ に対し、$a \neq b$ が成り立つなら、$0 < d(a, b)$ が成り立つ。ここで、$d(a, b) = d^*(\varphi(a), \varphi(b))$ が成り立つことにより $0 < d^*(\varphi(a), \varphi(b))$ が成り立つので、$\varphi(a) \neq \varphi(b)$ が成り立つ。よって、その写像 $\varphi$ は単射である。 □

**定義 2.6.1.** 距離空間 $(S, d)$ が与えられたとき、定理 2.6.6 より次のことを満たす距離空間 $(S^*, d^*)$ と写像 $\varphi : S \to S^*$ が存在し、

- その距離空間 $(S^*, d^*)$ は完備である。
- $\forall a, b \in S$ に対し、$d(a, b) = d^*(\varphi(a), \varphi(b))$ が成り立つ。
- その写像 $\varphi$ の値域 $V(\varphi)$ はその台集合 $S^*$ において密である、即ち、$\mathrm{cl}V(\varphi) = S^*$ が成り立つ。

さらに、そのような距離空間 $(S^*, d^*)$ と写像 $\varphi$ の組が $((S^*, d^*), \varphi)$、$((T^*, e^*), \chi)$ と 2 つ与えられたとき、ある全単射 $f : S^* \to T^*$ が存在して、次のことを満たすのであった。

- $f \circ \varphi = \chi$ が成り立つ。
- $\forall a, b \in S^*$ に対し、$d^*(a, b) = e^*(f(a), f(b))$ が成り立つ。

このときの距離空間 $(S^*, d^*)$ をその距離空間 $(S, d)$ の完備化、完備拡大という。

なお、定理 2.6.7 に注意すれば、$\forall a \in S$ に対し、$a = \varphi(a)$ とみなすことで、$S \subseteq S^*$ が成り立つとみなせることができる。例えば、距離空間 $(\mathbb{Q}, d_E|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ の完備拡大が距離空間 $(\mathbb{R}, d_E)$、即ち、1 次元 Euclid 空間 $E$ である。このことは解析学の実数論における Cauchy 列による実数の構成そのものであるので、他の解析学の書籍と併せて読まれるとおもしろいかもしれない。

# 参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p111,268-274 ISBN978-4-00-029871-1

# 第 3 部　多様体論

## 3.1　多様体

### 3.1.1　位相多様体

**定義 3.1.1.** Hausdorff 空間 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、$U\in\mathbf{V}(p)\cap\mathfrak{O}$ なるある開近傍 $U$ と[*46] $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開集合 $E$ が存在して、$(U,\mathfrak{O}_U)\approx\left(E,(\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_E\right)$ が成り立つとき、その Hausdorff 空間 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ を $n$ 次元位相多様体、$n$-topological manifold という。

**定義 3.1.2.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ において、上の定義における開近傍 $U$ と $(U,\mathfrak{O}_U)\approx\left(E,(\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_E\right)$ な $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開集合 $E$ との間の同相写像 $\psi$ との組 $(U,\psi)$ をその位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の座標近傍、coordinate neighborhood、chart という。

**定義 3.1.3.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の座標近傍 $(U,\psi)$ が与えられたとき、$\forall p\in U$ に対し、点 $\psi(p)$ を実数の組としてみなしたとき、その組をその点 $p$ のその座標近傍 $(U,\psi)$ における局所座標、local coordinate といい、その同相写像 $\psi$ を写像の組とみなしてその座標近傍 $(U,\psi)$ における局所座標系、local coordinate system という。

**定理 3.1.1.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の座標近傍 $(U,\psi)$ が与えられたとする。$\psi=(\psi_i)_{i\in\Lambda_n}$ とおくとき[*47]、$\forall p,q\in U\forall i\in\Lambda_n$ に対し、$\psi_i(p)=\psi_i(q)$ が成り立つなら、$p=q$ が成り立つ。

**証明.** 定義よりその写像 $\psi$ が全単射であることから明らかである。実際、$n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の座標近傍 $(U,\psi)$ が与えられたとする。$\psi=(\psi_i)_{i\in\Lambda_n}$ とおくとき、$\forall p,q\in U\forall i\in\Lambda_n$ に対し、$\psi_i(p)=\psi_i(q)$ が成り立つなら、$\psi(p)=\psi(q)$ が成り立ち、そこで、その写像 $\psi$ は定義より同相写像であるので、全単射である、特に、単射であるので、$p=q$ が成り立つ。 □

**定理 3.1.2.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ について、ある局所座標系 $\psi$ が存在して、組 $(\mathcal{M},\psi)$ が局所座標をなすならそのときに限り、$n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開集合 $E$ が存在して、$(\mathcal{M},\mathfrak{O})\approx\left(E,(\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_E\right)$ が成り立つ。

**証明.** 局所座標の定義そのものから明らかである。実際、$n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ について、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、台集合 $\mathcal{M}$ 自身がその点 $p$ の開近傍でもあることに注意すれば、ある局所座標系 $\psi$ が存在して、組 $(\mathcal{M},\psi)$ が局所座標をなすなら、$n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開集合 $E$ が存在して、$(\mathcal{M},\mathfrak{O})\approx\left(E,(\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_E\right)$ が成り立つ。逆に、これが成り立つなら、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、台集合 $\mathcal{M}$ 自身がその点 $p$ の開近傍でもあるので、これらの位相空間たちの間の同相写像 $\psi$ が存在するので、その組 $(\mathcal{M},\psi)$ が局所座標となっている。 □

**定理 3.1.3.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ について、ある局所座標の族 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が存在して、次式が成り

[*46] 開集合でもあるような近傍のこと。
[*47] つまり、$\forall q\in U$ に対し、点 $\psi(q)$ の第 $i$ 成分を $\psi_i(q)$ と書くことにしましょうということ。

立つ。

$$\mathcal{M}=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$$

**定義 3.1.4.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ について、$\mathcal{M}=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ が成り立つような局所座標の族 $\left\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\right\}_{\alpha\in A}$ をその $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の座標近傍系、coordinate neighborhood system、atlas という。

**証明.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ について、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、ある局所座標 $(U_p,\psi_p)$ が存在して、$p\in U_p$ が成り立つので、$\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{p\in\mathcal{M}}U_p$ が成り立つ。そこで、$U_p\subseteq\mathcal{M}$ なので、$\bigcup_{p\in\mathcal{M}}U_p\subseteq\mathcal{M}$ も成り立つ。よって、ある局所座標の族 $\left\{(U_p,\psi_p)\right\}_{p\in\mathcal{M}}$ が存在して、次式が成り立つ。

$$\mathcal{M}=\bigcup_{p\in\mathcal{M}}U_p$$

□

**定理 3.1.4.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ ともう 1 つの位相空間 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ が与えられたとき、$(\mathcal{M},\mathfrak{O})\approx(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ が成り立つなら、その位相空間 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ も $n$ 次元位相多様体である。

この定理は $n$ 次元位相多様体であるという性質が位相的性質である、即ち、同相写像によって保たれる性質であるということを主張している。

**証明.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ ともう 1 つの位相空間 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ が与えられたとき、$(\mathcal{M},\mathfrak{O})\approx(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ が成り立つなら、これらの位相空間たちの間に同相写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が存在することになる。そこで、その位相空間 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ が Hausdorff 空間であることを示そう。$\forall p,q\in\mathcal{N}$ に対し、$p\neq q$ が成り立つなら、その逆写像 $\varphi^{-1}$ が特に単射でもあるので、$\varphi^{-1}(p)\neq\varphi^{-1}(q)$ が成り立つ。その位相空間 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ が Hausdorff 空間であるので、それらの点々 $\varphi^{-1}(p)$、$\varphi^{-1}(q)$ の近傍たち $V$、$W$ が存在して、$V\cap W=\emptyset$ が成り立つ。そこで、その写像 $\varphi^{-1}$ が同相写像であるので、$V\in\mathbf{V}\left(\varphi^{-1}(p)\right)$ かつ $W\in\mathbf{V}\left(\varphi^{-1}(q)\right)$ より $V\left(\varphi|V\right)\in\mathbf{V}(p)$ かつ $V\left(\varphi|W\right)\in\mathbf{V}(q)$ が成り立つかつ、その写像 $\varphi$ が全単射であることから $V\left(\varphi|V\cap W\right)=V\left(\varphi|V\right)\cap V\left(\varphi|W\right)$ より $V\left(\varphi|V\right)\cap V\left(\varphi|W\right)=\emptyset$ が成り立つ。ゆえに、その位相空間 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ は Hausdorff 空間である。

$\forall p\in\mathcal{N}$ に対し、$\varphi^{-1}(p)\in\mathcal{M}$ なので、$U\in\mathbf{V}\left(\varphi^{-1}(p)\right)\cap\mathfrak{O}$ なるある開近傍 $U$ と $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開集合 $E$ が存在して、$(U,\mathfrak{O}_U)\approx\left(E,\left(\mathfrak{O}_{d_{E^n}}\right)_E\right)$ が成り立つ。その写像 $\varphi^{-1}$ が同相写像であるので、$U\in\mathbf{V}\left(\varphi^{-1}(p)\right)$ かつ $U\in\mathfrak{O}$ より $V\left(\varphi|U\right)\in\mathbf{V}(p)$ かつ $V\left(\varphi|U\right)\in\mathfrak{P}$ が成り立つ。ゆえに、その集合 $V\left(\varphi|U\right)$ はその元 $p$ の開近傍でもある。そこで、その写像 $\varphi|U:U\rightarrow V\left(\varphi|U\right)$ はその部分位相空間 $(U,\mathfrak{O}_U)$ からその部分位相空間 $\left(V\left(\varphi|U\right),\ \mathfrak{P}_{V(\varphi|U)}\right)$ への同相写像であることを示そう。$\forall P\in\mathfrak{P}_{V(\varphi|U)}$ に対し、その集合 $V\left(\varphi|U\right)$ も開集合なので、その集合 $P$ はその位相空間 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ での開集合でもある。したがって、$V\left(\varphi^{-1}|P\right)\in\mathfrak{O}$ が成り立つ。また、$P\subseteq V\left(\varphi|U\right)$ なので、その写像が全単射であることから $V\left(\varphi^{-1}|P\right)\subseteq U$ よりその開集合 $V\left(\varphi^{-1}|P\right)$ はその部分位相空間 $(U,\mathfrak{O}_U)$ における開集合でもある、即ち、$V\left(\varphi^{-1}|P\right)\in\mathfrak{O}_U$ が成り立つ。これにより、その写像 $\varphi|U$ は連続写像である。同様にして考えれば、その写像 $(\varphi|U)^{-1}$ も連続写像であることも分かる。実際、$\forall O\in\mathfrak{O}_U$ に対し、その集合 $U$ も開集合なので、その集合 $O$ はその位相空間 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ での開集合でもある。したがって、$V\left(\varphi|O\right)\in\mathfrak{P}$ が成り立つ。また、$O\subseteq U$ なので、$V\left(\varphi|O\right)\subseteq V\left(\varphi|U\right)$ よりその開集合 $V\left(\varphi|O\right)$ はその部分位相空間 $\left(V\left(\varphi|U\right),\ \mathfrak{P}_{V(\varphi|U)}\right)$ に

おける開集合でもある、即ち、$V\left(\varphi|O\right) \in \mathfrak{P}_{V(\varphi|U)}$ が成り立つ。$(\varphi|U)^{-1} = \varphi^{-1}|V\left(\varphi|U\right)$ に注意すれば、その写像 $(\varphi|U)^{-1}$ も連続写像である。以上の議論により、その写像 $\varphi|U : U \rightarrow V\left(\varphi|U\right)$ はその部分位相空間 $(U, \mathfrak{O}_U)$ からその部分位相空間 $\left(V\left(\varphi|U\right),\ \mathfrak{P}_{V(\varphi|U)}\right)$ への同相写像である。

最後に、その Hausdorff 空間 $(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$ が $n$ 次元位相多様体であることを示そう。$\forall p \in \mathcal{N}$ に対し、$U \in \mathbf{V}\left(\varphi^{-1}(p)\right) \cap \mathfrak{O}$ なるある開近傍 $U$ と $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開集合 $E$ が存在して、$(U, \mathfrak{O}_U) \approx \left(E, (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_E\right)$ が成り立つかつ、その集合 $V\left(\varphi|U\right)$ はその元 $p$ の開近傍でもあった。そこで上記の議論により、$(U, \mathfrak{O}_U) \approx \left(V\left(\varphi|U\right),\ \mathfrak{P}_{V(\varphi|U)}\right)$ が成り立つので、その関係 $\approx$ が同値関係となっていることから、$\left(V\left(\varphi|U\right),\ \mathfrak{P}_{V(\varphi|U)}\right) \approx \left(E, (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_E\right)$ が成り立つ。よって、その Hausdorff 空間 $(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$ は $n$ 次元位相多様体である。 □

**定理 3.1.5.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の局所座標 $(U, \psi)$ が与えられたとする。$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \subseteq U$ かつ $O \neq \emptyset$ が成り立つなら、写像 $\psi|O : O \rightarrow V\left(\psi|O\right)$ はその部分位相空間 $(O, \mathfrak{O}_O)$ からその部分位相空間 $\left(V\left(\psi|O\right), (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_{V(\psi|O)}\right)$ への同相写像である。

**証明.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の局所座標 $(U, \psi)$ が与えられたとする。$\forall O \in \mathfrak{O}$ に対し、$O \subseteq U$ かつ $O \neq \emptyset$ が成り立つとする。

$n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の部分位相空間 $\left(V\left(\psi|O\right), (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_{V(\psi|O)}\right)$ が与えられたとき、写像 $\psi|O : O \rightarrow V\left(\psi|O\right)$ について、その位相空間 $\left(V\left(\psi|O\right), (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_{V(\psi|O)}\right)$ における任意の開集合 $E$ に対し、その集合 $O$ が開集合であることその座標近傍系 $\psi$ が同相写像であることによりその集合 $V\left(\psi|O\right)$ も開集合となり、したがって、その集合 $E$ もその位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ における開集合でもあるので、その値域 $V\left(\psi^{-1}|E\right)$ もその位相空間 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ における開集合となる。さらに、$E \subseteq V\left(\psi|O\right)$ が成り立つので、その座標近傍系 $\psi$ が全単射であることに注意すれば、$V\left(\psi^{-1}|E\right) \subseteq V\left(\psi^{-1}|V\left(\psi|O\right)\right) = O$ が得られ、その値域 $V\left(\psi^{-1}|E\right)$ はその集合 $O$ の部分集合であるかつ、その位相空間 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ における開集合でもあるので、その位相空間 $(O, \mathfrak{O}_O)$ における開集合でもある。ゆえに、その写像 $\psi|O$ はその位相空間 $(O, \mathfrak{O}_O)$ からその位相空間 $\left(V\left(\psi|O\right),\ (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_{V(\psi|O)}\right)$ への連続写像である。そこで、その座標近傍系 $\psi$ が全単射なので、その写像 $\psi|O$ も単射で、その値域に注意すれば、全単射でもある。

以上の議論により、逆写像 $(\psi|O)^{-1}$ も存在することになり、同様にして考えれば、その逆写像も連続であることが示される。実際、その位相空間 $(O, \mathfrak{O}_O)$ における任意の開集合 $O'$ に対し、その集合 $O$ も開集合であることにより、その集合 $O'$ もその位相空間 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ における開集合でもあるので、その値域 $V\left(\psi|O'\right)$ もその位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ における開集合となる。さらに、$O' \subseteq O$ が成り立つので、$V\left(\psi|O'\right) \subseteq V\left(\psi|O\right)$ が得られ、その値域 $V\left(\psi|O'\right)$ はその位相空間 $\left(V\left(\psi|O\right),\ (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_{V(\psi|O)}\right)$ における開集合でもある。ゆえに、その逆写像 $(\psi|O)^{-1}$ はその位相空間 $\left(V\left(\psi|O\right), (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_{V(\psi|O)}\right)$ からその位相空間 $(O, \mathfrak{O}_O)$ への連続写像である。

よって、その写像 $\psi|O$ は同相写像である。 □

**定理 3.1.6** (座標変換)**.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の局所座標たち $(U_\alpha, \psi_\alpha)$、$(U_\beta, \psi_\beta)$ が与えられたとする。$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ が成り立つなら、次式のように定義される関数 $f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)}$ は同相写像であり

$$f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)} = \psi_\beta|U_\alpha \cap U_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}|V\left(\psi_\alpha|U_\alpha \cap U_\beta\right); V\left(\psi_\alpha|U_\alpha \cap U_\beta\right) \rightarrow V\left(\psi_\beta|U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

その逆関数 $f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)}^{-1}$ は $f_{(U_\beta,\psi_\beta)\rightarrow(U_\alpha,\psi_\alpha)}$ である。ここでは、その関数 $f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)}$ をその局所座標 $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ からその局所座標 $(U_\beta, \psi_\beta)$ への座標変換、変換関数ということにする。

**証明.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の局所座標たち $(U_\alpha, \psi_\alpha)$、$(U_\beta, \psi_\beta)$ が与えられたとし、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ が成り立

つとする。その集合 $U_\alpha \cap U_\beta$ が開集合であるので、定理 3.1.5 より写像たち $\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta$、$\psi_\beta | U_\alpha \cap U_\beta$ は同相写像であり、その逆写像 $(\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta)^{-1}$ も同相写像である。そこで、$(\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta)^{-1} = \psi_\alpha^{-1} | V(\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta)$ が成り立つことに注意すれば、次のようになるので、

$$\begin{aligned} f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)} &= \psi_\beta \left| U_\alpha \cap U_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \right| V(\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta) \\ &= \psi_\beta | U_\alpha \cap U_\beta \circ (\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta)^{-1} \end{aligned}$$

その写像 $f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)}$ も同相写像であり、特に、連続写像である。

最後に、その逆関数 $f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)}^{-1}$ は $f_{(U_\beta,\psi_\beta)\rightarrow(U_\alpha,\psi_\alpha)}$ であることも示そう。実際、次のようになることから

$$\begin{aligned} f_{(U_\beta,\psi_\beta)\rightarrow(U_\alpha,\psi_\alpha)} \circ f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)} &= \psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta \circ \psi_\beta^{-1} | V(\psi_\beta | U_\alpha \cap U_\beta) \circ \psi_\beta | U_\alpha \cap U_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} | V(\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta) \\ &= \psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} | V(\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta) \\ &= I_{V(\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta)} \end{aligned}$$

$f_{(U_\beta,\psi_\beta)\rightarrow(U_\alpha,\psi_\alpha)} \circ f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)} = I_{V(\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta)}$ が得られる。同様にして、$f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)} \circ f_{(U_\beta,\psi_\beta)\rightarrow(U_\alpha,\psi_\alpha)} = I_{V(\psi_\beta | U_\alpha \cap U_\beta)}$ も得られる。よって、$f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)}^{-1} = f_{(U_\beta,\psi_\beta)\rightarrow(U_\alpha,\psi_\alpha)}$ が成り立つ。

□

**定理 3.1.7.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の局所座標たち $(U_\alpha, \psi_\alpha)$、$(U_\beta, \psi_\beta)$ が与えられたとする。$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ が成り立つなら、その局所座標 $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ からその局所座標 $(U_\beta, \psi_\beta)$ への座標変換 $f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)}$ を用いれば次式が成り立つ。

$$\psi_\beta | U_\alpha \cap U_\beta = f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)} \circ \psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta$$

これは名の通り 2 つの局所座標たち $(U_\alpha, \psi_\alpha)$、$(U_\beta, \psi_\beta)$ の間を変換する式になっている。詳しくいえば、$\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し、$\psi_\alpha = (\psi_{\alpha i})_{i \in \varLambda_n}$、$\psi_\beta = (\psi_{\beta i})_{i \in \varLambda_n}$ とおかれれば、次のようになっている。

$$\begin{pmatrix} \psi_{\beta 1}(p) \\ \psi_{\beta 2}(p) \\ \vdots \\ \psi_{\beta n}(p) \end{pmatrix} = f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)} \begin{pmatrix} \psi_{\alpha 1}(p) \\ \psi_{\alpha 2}(p) \\ \vdots \\ \psi_{\alpha n}(p) \end{pmatrix}$$

**証明.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の局所座標たち $(U_\alpha, \psi_\alpha)$、$(U_\beta, \psi_\beta)$ が与えられたとする。$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ が成り立つなら、$(\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta)^{-1} = \psi_\alpha^{-1} | V(\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta)$ が成り立つことに注意すれば、その局所座標 $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ からその局所座標 $(U_\beta, \psi_\beta)$ への座標変換 $f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)}$ を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned} f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)} \circ \psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta &= \psi_\beta | U_\alpha \cap U_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} | V(\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta) \circ \psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta \\ &= \psi_\beta | U_\alpha \cap U_\beta \circ (\psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta)^{-1} \circ \psi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta \\ &= \psi_\beta | U_\alpha \cap U_\beta \circ I_{U_\alpha \cap U_\beta} \\ &= \psi_\beta | U_\alpha \cap U_\beta \end{aligned}$$

□

### 3.1.2 可微分多様体

**定義 3.1.5.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ について、これのある座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が存在して、$\forall\alpha,\beta\in A$ に対し、$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ が成り立つなら、座標変換たち $f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)}$、$f_{(U_\beta,\psi_\beta)\to(U_\alpha,\psi_\alpha)}$ がそれらの定義域で $C^r$ 級関数であるとき、その $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ を $n$ 次元 $C^r$ 級可微分多様体、$n$ 次元 $C^r$ 多様体といい、その座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ をその $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系という。また、そのような関係を導入することをその座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ がその $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ に $C^r$ 級可微分構造を入れるという。

なお、位相多様体はまさしく $C^0$ 多様体であることに注意されたい。

**定義 3.1.6.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ について、これのある座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が存在して、$\forall\alpha,\beta\in A$ に対し、$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ が成り立つなら、座標変換たち $f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)}$、$f_{(U_\beta,\psi_\beta)\to(U_\alpha,\psi_\alpha)}$ がそれらの定義域で $C^\infty$ 級関数であるとき、その $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ を $n$ 次元 $C^\infty$ 級可微分多様体、$n$ 次元 $C^\infty$ 多様体といい、その座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ をその $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の $C^\infty$ 級座標近傍系という。また、そのような関係を導入することをその座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ がその $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ に $C^\infty$ 級可微分構造を入れるという。以下、微分幾何学の流儀に則り $n$ 次元 $C^\infty$ 級可微分多様体を単に $n$ 次元多様体ということにする。

**定義 3.1.7.** $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ について、これのある座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が存在して、$\forall\alpha,\beta\in A$ に対し、$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ が成り立つなら、座標変換たち $f_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)}$、$f_{(U_\beta,\psi_\beta)\to(U_\alpha,\psi_\alpha)}$ がそれらの定義域で解析的であるとき、即ち、定義域上の任意の点のまわりで Taylor 展開できるとき、その $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ を $n$ 次元解析多様体、$n$ 次元 $C^\omega$ 級可微分多様体、$n$ 次元 $C^\omega$ 多様体といい、その座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ をその $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の解析的座標近傍系、$C^\omega$ 級座標近傍系という。また、そのような関係を導入することをその座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ がその $n$ 次元位相多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ に解析構造を入れる、$C^\omega$ 級可微分構造を入れるという。

以下、特に断りがなければ、$C^r$ を $r$ を 0 以上の整数としたものか $C^\infty$ か $C^\omega$ であるとする。

### 3.1.3 開部分多様体

**定理 3.1.8.** $n$ 次元 $C^r$ 多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、これの $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとき、$\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、その部分位相空間 $(O,\mathfrak{O}_O)$ はその族 $\{(U_\alpha\cap O,\psi_\alpha|U_\alpha\cap O)\}_{\alpha\in A}$ をこれの $C^r$ 級座標近傍系とする $n$ 次元 $C^r$ 多様体となる。

**定義 3.1.8.** $n$ 次元 $C^r$ 多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、これの $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとき、$\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、その族 $\{(U_\alpha\cap O,\psi_\alpha|U_\alpha\cap O)\}_{\alpha\in A}$ を $C^r$ 級座標近傍系とする $n$ 次元 $C^r$ 多様体 $(O,\mathfrak{O}_O)$ をその $C^r$ 多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の開部分多様体という。

**証明.** $n$ 次元 $C^r$ 多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、これの $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとき、$\forall O\in\mathfrak{O}$ に対し、その部分位相空間 $(O,\mathfrak{O}_O)$ は定理 1.6.9 より Hausdorff 空間となる。次に、その部分位相空間 $(O,\mathfrak{O}_O)$ が $n$ 次元位相多様体でその座標近傍系が $\{(U_\alpha\cap O,\ \ \psi_\alpha|U_\alpha\cap O)\}_{\alpha\in A}$ と与えられることを示そう。仮定より $\forall p\in O$ に対し、$p\in\mathcal{M}$ よりその点 $p$ のその位相空間 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の意味でのある開近傍 $U$ と $n$ 次元

Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ の開集合 $E$ が存在して、$(U, \mathfrak{O}_U) \approx \left(E, (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_E\right)$ が成り立つ。その集合 $U \cap O$ について、その集合 $O$ がその位相空間 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ における開集合なので、その集合 $U \cap O$ もその部分位相空間 $(O, \mathfrak{O}_O)$ における開集合でもある。さらに、$p \in \mathrm{int}U = U$ かつ $p \in O$ より $p \in U \cap O$ もその部分位相空間 $(O, \mathfrak{O}_O)$ におけるその点 $p$ の近傍でもある。また、$(U, \mathfrak{O}_U) \approx \left(E, (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_E\right)$ よりある同相写像 $\psi : U \rightarrow E$ が存在しその組 $(U, \psi)$ が局所座標となるのであった。$U \cap O \subseteq U$ かつ $p \in U \cap O$ に注意すれば、定理 3.1.5 より写像 $\psi|U \cap O : U \cap O \rightarrow V(\psi|U \cap O)$ はその部分位相空間 $(U \cap O, \mathfrak{O}_{U \cap O})$ からその部分位相空間 $\left(V(\psi|U \cap O),\ (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_{V(\psi|U \cap O)}\right)$ への同相写像となるので、$(U \cap O, \mathfrak{O}_{U \cap O}) \approx \left(V(\psi|U \cap O),\ (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_{V(\psi|U \cap O)}\right)$ が成り立つ。ゆえに、その部分位相空間 $(O, \mathfrak{O}_O)$ が $n$ 次元位相多様体であることが分かり局所座標としてその組 $(U \cap O, \psi|U \cap O)$ が挙げられる。さらに、次式が成り立つことから、

$$\bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap O) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \cap O = \mathcal{M} \cap O = O$$

その座標近傍系が $\{(U_\alpha \cap O,\ \psi_\alpha|U_\alpha \cap O)\}_{\alpha \in A}$ と与えられる。

最後に、その部分位相空間 $(O, \mathfrak{O}_O)$ が $n$ 次元 $C^r$ 多様体でその $C^r$ 級座標近傍系が $\{(U_\alpha \cap O,\ \psi_\alpha|U_\alpha \cap O)\}_{\alpha \in A}$ と与えられることを示そう。$\forall \alpha, \beta \in A$ に対し、$(U_\alpha \cap O) \cap (U_\beta \cap O) \neq \emptyset$ が成り立つなら、もちろん、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ が成り立つので、仮定よりそれらの座標変換たち $f_{(U_\alpha, \psi_\alpha) \rightarrow (U_\beta, \psi_\beta)}$、$f_{(U_\beta, \psi_\beta) \rightarrow (U_\alpha, \psi_\alpha)}$ がそれらの定義域で $C^r$ 級関数である。このとき、それらの写像たち $f_{(U_\alpha, \psi_\alpha) \rightarrow (U_\beta, \psi_\beta)}|V(\psi_\alpha|U_\alpha \cap U_\beta \cap O)$、$f_{(U_\beta, \psi_\beta) \rightarrow (U_\alpha, \psi_\alpha)}|V(\psi_\beta|U_\alpha \cap U_\beta \cap O)$ もそれらの定義域で $C^r$ 級関数である。したがって、次のようになることから、

$$\begin{aligned} f_{(U_\alpha \cap O, \psi_\alpha|U_\alpha \cap O) \rightarrow (U_\beta \cap O, \psi_\beta|U_\beta \cap O)} &= (\psi_\beta|U_\beta \cap O)\,|U_\alpha \cap U_\beta \cap O \circ (\psi_\alpha|U_\alpha \cap O)^{-1}\,|V(\psi_\alpha|U_\alpha \cap U_\beta \cap O) \\ &= \psi_\beta|U_\beta \cap O \circ (\psi_\alpha|U_\alpha \cap O)^{-1}\,|V(\psi_\alpha|U_\alpha \cap U_\beta \cap O) \\ &= f_{(U_\alpha, \psi_\alpha) \rightarrow (U_\beta, \psi_\beta)}|V(\psi_\alpha|U_\alpha \cap U_\beta \cap O) \end{aligned}$$

その関数 $f_{(U_\alpha \cap O, \psi_\alpha|U_\alpha \cap O) \rightarrow (U_\beta \cap O, \psi_\beta|U_\beta \cap O)}$ も $C^r$ 級関数である。同様にして、その関数 $f_{(U_\beta \cap O, \psi_\beta|U_\beta \cap O) \rightarrow (U_\alpha \cap O, \psi_\alpha|U_\alpha \cap O)}$ も $C^r$ 級関数であることが示される。よって、その部分位相空間 $(O, \mathfrak{O}_O)$ が $n$ 次元 $C^r$ 多様体でその $C^r$ 級座標近傍系が $\{(U_\alpha \cap O,\ \psi_\alpha|U_\alpha \cap O)\}_{\alpha \in A}$ と与えられる。 □

### 3.1.4 積多様体

**定理 3.1.9.** 添数集合 $\Lambda_n$ によって添数づけられた $n_i$ 次元 $C^r$ 多様体 $(\mathcal{M}_i, \mathfrak{O}_i)$ の族 $\{(\mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_i)\}_{i \in \Lambda_n}$、これの座標近傍系 $\{(U_{\alpha_i},\ \psi_{\alpha_i})\}_{\alpha_i \in A_i}$ が与えられたとき、次のような写像 $\prod_{i \in \Lambda_n} \psi_{\alpha_i}$ が考えられれば、

$$\prod_{i \in \Lambda_n} \psi_{\alpha_i} : \prod_{i \in \Lambda_n} U_{\alpha_i} \rightarrow \prod_{i \in \Lambda_n} V(\psi_{\alpha_i}|U_{\alpha_i}); (p_i)_{i \in \Lambda_n} \mapsto (\psi_{\alpha_i}(p_i))_{i \in \Lambda_n}$$

その直積位相空間 $\left(\prod_{i \in \Lambda_n} \mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_0\right)$ はその族 $\left\{\left(\prod_{i \in \Lambda_n} U_{\alpha_i},\ \prod_{i \in \Lambda_n} \psi_{\alpha_i}\right)\right\}_{\forall i \in \Lambda_n[\alpha_i \in A_i]}$ をこれの $C^r$ 級座標近傍系とする $\sum_{i \in \Lambda_n} n_i$ 次元 $C^r$ 多様体となる。

**定義 3.1.9.** $n_i$ 次元 $C^r$ 多様体 $(\mathcal{M}_i, \mathfrak{O}_i)$ の族 $\{(\mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_i)\}_{i\in\Lambda_n}$、これの座標近傍系 $\{(U_{\alpha_i},\ \psi_{\alpha_i})\}_{\alpha_i\in A_i}$ が与えられ次のような写像 $\prod_{i\in\Lambda_n}\psi_{\alpha_i}$ が考えられたとき、

$$\prod_{i\in\Lambda_n}\psi_{\alpha_i}:\prod_{i\in\Lambda_n}U_{\alpha_i}\to\prod_{i\in\Lambda_n}V\left(\psi_{\alpha_i}|U_{\alpha_i}\right);(p_i)_{i\in\Lambda_n}\mapsto\left(\psi_{\alpha_i}\left(p_i\right)\right)_{i\in\Lambda_n}$$

その族 $\left\{\left(\prod_{i\in\Lambda_n}U_{\alpha_i},\ \prod_{i\in\Lambda_n}\psi_{\alpha_i}\right)\right\}_{\forall i\in\Lambda_n[\alpha_i\in A_i]}$ をこれの $C^r$ 級座標近傍系とする $\sum_{i\in\Lambda_n}n_i$ 次元 $C^r$ 多様体 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n}\mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_0\right)$ をその族 $\{(\mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_i)\}_{i\in\Lambda_n}$ の積多様体という。

**証明.** 添数集合 $\Lambda_n$ によって添数づけられた $n_i$ 次元 $C^r$ 多様体 $(\mathcal{M}_i, \mathfrak{O}_i)$ の族 $\{(\mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_i)\}_{i\in\Lambda_n}$、これの座標近傍系 $\{(U_{\alpha_i},\ \psi_{\alpha_i})\}_{\alpha_i\in A_i}$ が与えられたとし次のような写像 $\prod_{i\in\Lambda_n}\psi_{\alpha_i}$ が考えられよう。

$$\prod_{i\in\Lambda_n}\psi_{\alpha_i}:\prod_{i\in\Lambda_n}U_{\alpha_i}\to\prod_{i\in\Lambda_n}V\left(\psi_{\alpha_i}|U_{\alpha_i}\right);(p_i)_{i\in\Lambda_n}\mapsto\left(\psi_{\alpha_i}\left(p_i\right)\right)_{i\in\Lambda_n}$$

まず、定理 1.6.13 よりその直積位相空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n}\mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_0\right)$ も Hausdorff 空間となる。次に、その直積位相空間 $\left(\prod_{i\in\Lambda_n}\mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_0\right)$ が $\sum_{i\in\Lambda_n}n_i$ 次元位相多様体でその座標近傍系が $\left\{\left(\prod_{i\in\Lambda_n}U_{\alpha_i},\ \prod_{i\in\Lambda_n}\psi_{\alpha_i}\right)\right\}_{\forall i\in\Lambda_n[\alpha_i\in A_i]}$ と与えられることを示そう。仮定より $\forall(p_i)_{i\in\Lambda_n}\in\prod_{i\in\Lambda_n}\mathcal{M}_i\forall i\in\Lambda_n$ に対し、$p_i\in\mathcal{M}_i$ よりその点 $p_i$ のその位相空間 $(\mathcal{M}_i, \mathfrak{O}_i)$ の意味でのある開近傍 $U_i$ と $n_i$ 次元 Euclid 空間 $E^{n_i}$ における位相空間 $\left(\mathbb{R}^{n_i}, \mathfrak{O}_{d_{E^{n_i}}}\right)$ の開集合 $E_i$ が存在して、$(U_i, \mathfrak{O}_{U_i})\approx\left(E_i, \left(\mathfrak{O}_{d_{E^{n_i}}}\right)_{E_i}\right)$ が成り立つ。これにより、ある同相写像 $\psi_i:U_i\to E_i$ が存在しその組 $(U_i, \psi_i)$ が局所座標となるのであった。このとき、次式のような写像 $\prod_{i\in\Lambda_n}\psi_i$ が考えられることにし、

$$\prod_{i\in\Lambda_n}\psi_i:\prod_{i\in\Lambda_n}U_i\to\prod_{i\in\Lambda_n}V\left(\psi_i|U_i\right);(p_i)_{i\in\Lambda_n}\mapsto\left(\psi_i\left(p_i\right)\right)_{i\in\Lambda_n}$$

以下、次のようにおくことにする。

$$N=\sum_{i\in\Lambda_n}n_i,\ \ \psi=\prod_{i\in\Lambda_n}\psi_i,\ \ U=\prod_{i\in\Lambda_n}U_i$$

その部分位相空間 $\left(V\left(\psi|U\right),\ \left(\mathfrak{O}_{d_{E^N}}\right)_{V(\psi|U)}\right)$ における初等開集合とその値域 $V\left(\psi|U\right)$ の積集合全体の集合がその位相 $\left(\mathfrak{O}_{d_{E^N}}\right)_{V(\psi|U)}$ の 1 つの開基となるので、$\forall E\in\left(\mathfrak{O}_{d_{E^N}}\right)_{V(\psi|U)}$ に対し、任意の添数集合 $M$ によって添数づけられたある初等開集合とその値域 $V\left(\psi|U\right)$ の積集合たちの族 $\left\{\prod_{i\in\Lambda_n}E_{\mu i}\cap V\left(\psi|U\right)\right\}_{\mu\in M}$ を用いて $E=\bigcup_{\mu\in M}\left(\prod_{i\in\Lambda_n}E_{\mu i}\cap V\left(\psi|U\right)\right)$ が成り立つ。その写像 $\psi_i$ が全単射であることに注意すれば、次のようになることから、

$$V\left(\psi^{-1}|E\right)=V\left(\psi^{-1}|E\right)$$

$$\begin{aligned}
&= V\left(\psi^{-1}|\bigcup_{\mu\in M}\left(\prod_{i\in\varLambda_n} E_{\mu i}\cap V\left(\psi|U\right)\right)\right)\\
&= V\left(\psi^{-1}|\bigcup_{\mu\in M}\left(\prod_{i\in\varLambda_n} E_{\mu i}\cap \prod_{i\in\varLambda_n} V\left(\psi_i|U_i\right)\right)\right)\\
&= \bigcup_{\mu\in M} V\left(\left(\prod_{i\in\varLambda_n}\psi_i\right)^{-1}|\prod_{i\in\varLambda_n}\left(E_{\mu i}\cap V\left(\psi_i|U_i\right)\right)\right)\\
&= \bigcup_{\mu\in M}\prod_{i\in\varLambda_n} V\left(\psi_i^{-1}|E_{\mu i}\cap V\left(\psi_i|U_i\right)\right)\\
&= \bigcup_{\mu\in M}\prod_{i\in\varLambda_n}\left(V\left(\psi_i^{-1}|E_{\mu i}\right)\cap V\left(\psi_i^{-1}|V\left(\psi_i|U_i\right)\right)\right)\\
&= \bigcup_{\mu\in M}\prod_{i\in\varLambda_n}\left(V\left(\psi_i^{-1}|E_{\mu i}\right)\cap U_i\right)\\
&= \bigcup_{\mu\in M}\left(\prod_{i\in\varLambda_n} V\left(\psi_i^{-1}|E_{\mu i}\right)\cap\prod_{i\in\varLambda_n} U_i\right)\\
&= \bigcup_{\mu\in M}\left(\prod_{i\in\varLambda_n} V\left(\psi_i^{-1}|E_{\mu i}\right)\cap U\right)\\
&= \bigcup_{\mu\in M}\prod_{i\in\varLambda_n} V\left(\psi_i^{-1}|E_{\mu i}\right)\cap U
\end{aligned}$$

$V\left(\psi_i^{-1}|E_{\mu i}\right)\in\mathfrak{O}_i$ に注意すれば、その直積集合 $\prod_{i\in\varLambda_n} V\left(\psi_i^{-1}|E_{\mu i}\right)$ がその直積位相空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_n}\mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_0\right)$ における初等開集合でもあるので、次式が成り立つ。

$$V\left(\psi^{-1}|E\right)=\bigcup_{\mu\in M}\prod_{i\in\varLambda_n} V\left(\psi_i^{-1}|E_{\mu i}\right)\cap U\in\left(\mathfrak{O}_0\right)_U$$

よって、その写像 $\psi$ は連続である。次に、次のような写像 $\psi'$ が考えられよう。

$$\psi' : V\left(\psi|U\right)\to U;\left(a_i\right)_{i\in\varLambda_n}\mapsto\left(\psi_i^{-1}\left(a_i\right)\right)_{i\in\varLambda_n}$$

このとき、$\forall\left(p_i\right)_{i\in\varLambda_n}\in U$ に対し、次のようになるかつ、

$$\begin{aligned}
\psi'\circ\psi\left(p_i\right)_{i\in\varLambda_n}&=\psi'\left(\prod_{i\in\varLambda_n}\psi_i\left(p_i\right)_{i\in\varLambda_n}\right)\\
&=\psi'\left(\left(\psi_i\left(p_i\right)\right)_{i\in\varLambda_n}\right)\\
&=\left(\psi_i^{-1}\left(\psi_i\left(p_i\right)\right)\right)_{i\in\varLambda_n}\\
&=\left(\psi_i^{-1}\circ\psi_i\left(p_i\right)\right)_{i\in\varLambda_n}\\
&=\left(p_i\right)_{i\in\varLambda_n}
\end{aligned}$$

$\forall\left(a_i\right)_{i\in\varLambda_n}\in V\left(\psi|U\right)$ に対し、次のようになることから、

$$\psi\circ\psi'\left(a_i\right)_{i\in\varLambda_n}=\prod_{i\in\varLambda_n}\psi_i\left(\psi'\left(a_i\right)_{i\in\varLambda_n}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i \in \varLambda_n} \psi_i \left( \psi_i^{-1} \left( a_i \right) \right)_{i \in \varLambda_n} \\
&= \left( \psi_i \left( \psi_i^{-1} \left( a_i \right) \right) \right)_{i \in \varLambda_n} \\
&= \left( \psi_i \circ \psi_i^{-1} \left( a_i \right) \right)_{i \in \varLambda_n} \\
&= \left( a_i \right)_{i \in \varLambda_n}
\end{aligned}$$

$\psi' = \psi^{-1}$ が得られる。ゆえに、その写像 $\psi$ は全単射である。もちろん、その写像 $\psi$ の逆写像 $\psi^{-1}$ が存在する。先ほどと同様にして考えれば、その逆写像 $\psi^{-1}$ も連続であることが示される。実際、その直積位相空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} \mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_0 \right)$ における初等開集合とその集合 $U$ の積集合全体の集合がその位相 $\left( \mathfrak{O}_0 \right)_U$ の 1 つの開基となるので、$\forall O \in \left( \mathfrak{O}_0 \right)_U$ に対し、任意の添数集合 $\varLambda$ によって添数づけられたある初等開集合とその集合 $U$ の積集合たちの族 $\left\{ \prod_{i \in \varLambda_n} O_{\lambda i} \cap U \right\}_{\lambda \in \varLambda}$ を用いて $O = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \left( \prod_{i \in \varLambda_n} O_{\lambda i} \cap U \right)$ が成り立つ。これにより、次のようになることから、

$$\begin{aligned}
V \left( \psi | O \right) &= V \left( \psi | O \right) \\
&= V \left( \psi | \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \left( \prod_{i \in \varLambda_n} O_{\lambda i} \cap U \right) \right) \\
&= V \left( \psi | \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \prod_{i \in \varLambda_n} O_{\lambda i} \cap U \right) \\
&= V \left( \psi | \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \prod_{i \in \varLambda_n} O_{\lambda i} \right) \cap V \left( \psi | U \right) \\
&= \bigcup_{\lambda \in \varLambda} V \left( \prod_{i \in \varLambda_n} \psi_i | \prod_{i \in \varLambda_n} O_{\lambda i} \right) \cap V \left( \psi | U \right) \\
&= \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \prod_{i \in \varLambda_n} V \left( \psi_i | O_{\lambda i} \right) \cap V \left( \psi | U \right)
\end{aligned}$$

$V \left( \psi_i | O_{\lambda i} \right) \in \mathfrak{O}_{d_{E^{n_i}}}$ に注意すれば、その直積集合 $\prod_{i \in \varLambda_n} V \left( \psi_i | O_{\lambda i} \right)$ がその位相空間 $\left( \mathbb{R}^N,\ \mathfrak{O}_{d_{E^N}} \right)$ における初等開集合でもあるので、次式が成り立つ。

$$V \left( \psi | O \right) = \bigcup_{\lambda \in \varLambda} \prod_{i \in \varLambda_n} V \left( \psi_i | O_{\lambda i} \right) \cap V \left( \psi | U \right) \in \left( \mathfrak{O}_{d_{E^N}} \right)_{V(\psi|U)}$$

よって、その逆写像 $\psi^{-1}$ も連続である。以上の議論により、その写像 $\psi$ がその部分位相空間 $\left( U, \left( \mathfrak{O}_0 \right)_U \right)$ からその部分位相空間 $\left( V \left( \psi | U \right),\ \left( \mathfrak{O}_{d_{E^N}} \right)_{V(\psi|U)} \right)$ への同相写像となるので、$\left( U, \left( \mathfrak{O}_0 \right)_U \right) \approx \left( V \left( \psi | U \right),\ \left( \mathfrak{O}_{d_{E^N}} \right)_{V(\psi|U)} \right)$ が成り立つ。ゆえに、その直積位相空間 $\left( \prod_{i \in \varLambda_n} \mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_0 \right)$ が $N$ 次元位相多様体であることが分かり局所座標としてその組 $(U, \psi)$ が挙げられる。さらに、次式が成り立つことから、

$$\bigcup_{\forall i \in \varLambda_n [\alpha_i \in A_i]} \prod_{i \in \varLambda_n} U_{\alpha_i} = \prod_{i \in \varLambda_n} \bigcup_{\alpha_i \in A_i} U_{\alpha_i} = \prod_{i \in \varLambda_n} \mathcal{M}_i$$

その座標近傍系が $\left\{ \left( \prod_{i \in \varLambda_n} U_{\alpha_i},\ \prod_{i \in \varLambda_n} \psi_{\alpha_i} \right) \right\}_{\forall i \in \varLambda_n [\alpha_i \in A_i]}$ と与えられる。

最後に、その直積位相空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_n}\mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_0\right)$ が $N$ 次元 $C^r$ 多様体でその $C^r$ 級座標近傍系が $\left\{\left(\prod_{i\in\varLambda_n}U_{\alpha_i},\ \prod_{i\in\varLambda_n}\psi_{\alpha_i}\right)\right\}_{\forall i\in\varLambda_n[\alpha_i\in A_i]}$ と与えられることを示そう。$\forall i\in\varLambda_n\forall\alpha_i,\beta_i\in A_i$ に対し、$\prod_{i\in\varLambda_n}U_{\alpha_i}\cap\prod_{i\in\varLambda_n}U_{\beta_i}\neq\emptyset$ が成り立つなら、次のようになることから、

$$\emptyset\neq\prod_{i\in\varLambda_n}U_{\alpha_i}\cap\prod_{i\in\varLambda_n}U_{\beta_i}=\prod_{i\in\varLambda_n}\left(U_{\alpha_i}\cap U_{\beta_i}\right)$$

$\forall i\in\varLambda_n$ に対し、$U_{\alpha_i}\cap U_{\beta_i}\neq\emptyset$ が成り立つので、仮定よりそれらの座標変換たち $f_{\left(U_{\alpha_i},\psi_{\alpha_i}\right)\rightarrow\left(U_{\beta_i},\psi_{\beta_i}\right)}$ がそれらの定義域で $C^r$ 級関数である。このとき、以下、次のようにおくことにすると、

$$\psi_\alpha=\prod_{i\in\varLambda_n}\psi_{\alpha_i},\ \ \psi_\beta=\prod_{i\in\varLambda_n}\psi_{\beta_i},\ \ U_\alpha=\prod_{i\in\varLambda_n}U_{\alpha_i},\ \ U_\beta=\prod_{i\in\varLambda_n}U_{\beta_i}$$

上記の議論と同様にして、次のようになることから、

$$\psi_\alpha^{-1}|V\left(\psi_\alpha|U_\alpha\cap U_\beta\right):V\left(\psi_\alpha|U_\alpha\cap U_\beta\right)\rightarrow U_\alpha\cap U_\beta;\left(\mathbf{p}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\mapsto\left(\psi_{\alpha_i}^{-1}\left(\mathbf{p}_i\right)\right)_{i\in\varLambda_n}$$

$\forall\left(\mathbf{p}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\in V\left(\psi_\alpha|U_\alpha\cap U_\beta\right)$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}
f_{\left(U_\alpha,\psi_\alpha\right)\rightarrow\left(U_\beta,\psi_\beta\right)}\left(\mathbf{p}_i\right)_{i\in\varLambda_n}&=\psi_\beta|U_\alpha\cap U_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}|V\left(\psi_\alpha|U_\alpha\cap U_\beta\right)\left(\mathbf{p}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\\
&=\psi_\beta|U_\alpha\cap U_\beta\left(\psi_\alpha^{-1}|V\left(\psi_\alpha|U_\alpha\cap U_\beta\right)\left(\mathbf{p}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\right)\\
&=\psi_\beta|U_\alpha\cap U_\beta\left(\psi_{\alpha_i}^{-1}\left(\mathbf{p}_i\right)\right)_{i\in\varLambda_n}\\
&=\left(\psi_{\beta_i}\circ\psi_{\alpha_i}^{-1}\left(\mathbf{p}_i\right)\right)_{i\in\varLambda_n}\\
&=\left(\psi_{\beta_i}|U_{\alpha_i}\cap U_{\beta_i}\left(\psi_{\alpha_i}^{-1}\left(\mathbf{p}_i\right)\right)\right)_{i\in\varLambda_n}\\
&=\left(\psi_{\beta_i}|U_{\alpha_i}\cap U_{\beta_i}\left(\psi_{\alpha_i}^{-1}|V\left(\psi_{\alpha_i}|U_{\alpha_i}\cap U_{\beta_i}\right)\left(\mathbf{p}_i\right)\right)\right)_{i\in\varLambda_n}\\
&=\left(\psi_{\beta_i}|U_{\alpha_i}\cap U_{\beta_i}\circ\psi_{\alpha_i}^{-1}|V\left(\psi_{\alpha_i}|U_{\alpha_i}\cap U_{\beta_i}\right)\left(\mathbf{p}_i\right)\right)_{i\in\varLambda_n}\\
&=\left(f_{\left(U_{\alpha_i},\psi_{\alpha_i}\right)\rightarrow\left(U_{\beta_i},\psi_{\beta_i}\right)}\left(\mathbf{p}_i\right)\right)_{i\in\varLambda_n}
\end{aligned}$$

したがって、その関数 $f_{\left(U_\alpha,\psi_\alpha\right)\rightarrow\left(U_\beta,\psi_\beta\right)}$ も $C^r$ 級関数である。同様にして、その関数 $f_{\left(U_\beta,\psi_\beta\right)\rightarrow\left(U_\alpha,\psi_\alpha\right)}$ も $C^r$ 級関数であることが示される。よって、その直積位相空間 $\left(\prod_{i\in\varLambda_n}\mathcal{M}_i,\ \mathfrak{O}_0\right)$ が $N$ 次元 $C^r$ 多様体でその $C^r$ 級座標近傍系が $\left\{\left(\prod_{i\in\varLambda_n}U_{\alpha_i},\ \prod_{i\in\varLambda_n}\psi_{\alpha_i}\right)\right\}_{\forall i\in\varLambda_n[\alpha_i\in A_i]}$ と与えられる。 □

# 参考文献


[1] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965. 第 36 刷 p24-31 ISBN978-4-7853-1305-0

[2] 松本幸夫, 多様体の基礎, 東京大学出版会, 1988. 第 16 刷 p37-53 ISBN4-13-062103-3

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 第 14 刷 p51 ISBN978-4-00-029871-1

[4] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980. 第 5 刷 p128-130 ISBN4-13-062005-3

## 3.2 $C^s$ 級写像

### 3.2.1 $C^s$ 級写像

**定義 3.2.1.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$U \in \mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f: U \to \mathbb{R}$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとき、$\forall p \in U \exists \alpha \in A$ に対し、$p \in U_\alpha$ が成り立つのであった。さらに、$\exists V \in \mathbf{V}(p) \cap \mathfrak{O}$ に対し、$V \subseteq U \cap U_\alpha$ も成り立つのであった。このとき、関数 $f \circ \psi_\alpha^{-1} | V(\psi_\alpha | V) : V(\psi_\alpha | V) \to \mathbb{R}$ が $s \leq r$ として $C^s$ 級であるとき、その写像 $f$ はその元 $p$ で $C^s$ 級であるといいこのような写像全体の集合を $C_p^s(V)$ と書く。さらに、$\forall p \in U$ に対し、その写像 $f$ がその元 $p$ で $C^s$ 級であるとき、その写像 $f$ をその開集合 $U$ で $C^s$ 級であるといいこのような写像全体の集合を $C^s(U)$ と書く[*48]。

このことは次のように表される。

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{M} & & \\
\mathbb{R} & U \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dl, "f"'] & & U_\alpha \arrow[ul, phantom, sloped, "\supseteq"] \arrow[dr, "\psi_\alpha"] & \mathbb{R}^n \\
V(f) \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & & U \cap U_\alpha \arrow[ul, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & V(\psi_\alpha) \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
V(f|V) \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & & V \arrow[ll, "f|V"'] \arrow[rr, "\psi_\alpha|V"] \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & & V(\psi_\alpha|V) \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[llll, bend left, "f|V \circ \psi_\alpha^{-1}|V(\psi_\alpha|V)"]
\end{tikzcd}$$

**定理 3.2.1.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in A$ に対し、その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \varLambda_n}$ とおかれれば、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、その写像 $\psi_\alpha^i$ はその開集合 $U_\alpha$ で $C^r$ 級である。

**証明.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in A$ に対し、その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \varLambda_n}$ とおかれれば、$\forall i \in \varLambda_n \forall p \in U_\alpha$ に対し、定理 3.1.3 より $\exists \beta \in A$ に対し[*49]、$p \in U_\alpha \cap U_\beta$ で、$\exists V \in \mathfrak{O}$ に対し、$p \in V \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ となるので、関数 $\psi_\alpha^i \circ \psi_\beta^{-1} | V(\psi_\beta | V) : V(\psi_\beta | V) \to \mathbb{R}$ について、$C^r$ 級多様体の定義より座標変換 $f_{(U_\beta, \psi_\beta) \to (U_\alpha, \psi_\alpha)}$ がその定義域で $C^r$ 級関数であるから、その関数 $\psi_\alpha^i \circ \psi_\beta^{-1} | V(\psi_\beta | V)$ も $C^r$ 級関数である。よって、その写像 $\psi_\alpha^i$ はその開集合 $U_\alpha$ で $C^r$ 級である。 $\square$

**定理 3.2.2.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in A$ に対し、$C^s$ 級関数 $f: V(\psi_\alpha) \to \mathbb{R}$ を用いた関数 $f \circ \psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ はその開集合 $U_\alpha$ で $C^s$ 級である。

**証明.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたと

[*48] 定理 3.2.3 より実は座標近傍系の取り方に依らずに定義できることも注目すべき点。

[*49] 例えば、$\beta = \alpha$ が挙げられる。

き、$\forall\alpha \in A$ に対し、$C^s$ 級関数 $f: V\left(\psi_\alpha\right) \rightarrow \mathbb{R}$ を用いた関数 $f \circ \psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ について、次のようになることから、

$$f \circ \psi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1}|V\left(\psi_\alpha\right) = f \circ \psi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1} = f$$

定義よりその関数 $f \circ \psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ はその開集合 $U_\alpha$ で $C^s$ 級である。 □

### 3.2.2 写像の偏導関数

**定義 3.2.2.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$U \in \mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\left\{\left(U_\alpha, \psi_\alpha\right)\right\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \varLambda_n}$ とおかれれば、$\forall p \in \mathcal{M} \exists \alpha \in A$ に対し、$p \in U_\alpha$ が成り立ちその写像 $f$ が $1 \leq s \leq r$ としてその元 $p$ で $C^s$ 級であるとき、$i \in \varLambda_n$ として次のように書くことにする。

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_\alpha^i}(p) = \partial_i\left(f \circ \psi_\alpha^{-1}\right) \circ \psi_\alpha(p)$$

特に、$\exists V \in \mathfrak{O}$ に対し、$V \subseteq U \cap U_\alpha$ も成り立つのであったことに注意すれば、その写像 $f$ が $1 \leq s \leq r$ としてその開集合 $U$ で $C^s$ 級であるとき、$i \in \varLambda_n$ として次のように写像 $\dfrac{\partial f}{\partial \psi_\alpha^i}$ が定義される[*50]。その写像 $\dfrac{\partial f}{\partial \psi_\alpha^i}$ をその写像 $f$ のその座標近傍 $\left(U_\alpha, \psi_\alpha\right)$ における第 $i$ 偏導関数という。

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_\alpha^i} = \partial_i\left(f \circ \psi_\alpha^{-1}\right) \circ \psi_\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}; p \mapsto \partial_i\left(f \circ \psi_\alpha^{-1}\right) \circ \psi_\alpha(p)$$

このことは次のように表される。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M} & \\
 & V \arrow[u, phantom, "\cup\!|"] \arrow[dl, "f|V"'] \arrow[dr, "\psi_\alpha|V"] \arrow[dd, "\frac{\partial f}{\partial \psi_\alpha^i}"] & \mathbb{R}^n \\
V(f|V) \arrow[dr, phantom, "\subsetneq"] & & V(\psi_\alpha|V) \arrow[u, phantom, "\cup\!|"] \arrow[dl, "\partial_i f \circ \psi_\alpha^{-1}"] \\
 & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

**定理 3.2.3.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$U \in \mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\left\{\left(U_\alpha, \psi_\alpha\right)\right\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \varLambda_n}$ とおかれ、さらに、その写像 $f$ が、$1 \leq s \leq r$ としてその開集合 $U$ で $C^s$ 級であるとき、$\exists V \in \mathfrak{O}$ に対し、$V \subseteq U \cap U_\alpha \cap U_\beta$ が成り立つのであったことに注意すれば、$k \in \varLambda_n$ として次式が成り立つ。

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_\alpha^i} = \frac{\partial f}{\partial \psi_\beta^k} \frac{\partial \psi_\beta^k}{\partial \psi_\alpha^i}: V \rightarrow \mathbb{R}$$

この定理から計算方法が分かっただけではなく定義 3.2.1 でわざわざ局所座標系を述べる必要がなかったこともわかる。

---

[*50] 写像 $f: A \rightarrow B$ が与えられたとき、$A' \subseteq A$ なる空集合でない集合 $A'$ に制限された写像 $f|A': A' \rightarrow B$ も記法の煩雑さを避けるために $f: A' \rightarrow B$ と書くことにし、また、同じ添字が 2 回現れたときに Einstein 縮約記法も用いることにする。

**証明.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$U\in\mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への連続写像 $f:U\to\mathbb{R}$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\left\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\right\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha=\left(\psi_\alpha^i\right)_{i\in\varLambda_n}$ とおかれ、さらに、その写像 $f$ が、$1\leq s\leq r$ としてその開集合 $U$ で $C^s$ 級であるとき、$\exists V\in\mathfrak{O}$ に対し、$V\subseteq U\cap U_\alpha\cap U_\beta$ が成り立つのであったことに注意すれば、$k\in\varLambda_n$ として次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\psi_\alpha^i}&=\partial_i\left(f\circ\psi_\alpha^{-1}\right)\circ\psi_\alpha\\&=\partial_i\left(f\circ\psi_\beta^{-1}\circ\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}\right)\circ\psi_\alpha\\&=\left(\partial_k\left(f\circ\psi_\beta^{-1}\right)\circ\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}\partial_i\left(\psi_\beta^k\circ\psi_\alpha^{-1}\right)\right)\circ\psi_\alpha\\&=\left(\partial_k\left(f\circ\psi_\beta^{-1}\right)\circ\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}\circ\psi_\alpha\right)\left(\partial_i\left(\psi_\beta^k\circ\psi_\alpha^{-1}\right)\circ\psi_\alpha\right)\\&=\left(\partial_k\left(f\circ\psi_\beta^{-1}\right)\circ\psi_\beta\right)\left(\partial_i\left(\psi_\beta^k\circ\psi_\alpha^{-1}\right)\circ\psi_\alpha\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial\psi_\beta^k}\frac{\partial\psi_\beta^k}{\partial\psi_\alpha^i}\end{aligned}$$

□

**定理 3.2.4.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\left\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\right\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha=\left(\psi_\alpha^i\right)_{i\in\varLambda_n}$ とおかれるとき、$\exists V\in\mathfrak{O}$ に対し、$V\subseteq U_\alpha\cap U_\beta$ が成り立つのであったことに注意すれば、$k\in\varLambda_n$ として次式が成り立つ。

$$\delta_{ij}=\frac{\partial\psi_\alpha^j}{\partial\psi_\beta^k}\frac{\partial\psi_\beta^k}{\partial\psi_\alpha^i}:V\to\mathbb{R}$$

さらに、次のように行列 $A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)}$ がおかれれば、

$$A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_\alpha^1}{\partial\psi_\beta^1}&\frac{\partial\psi_\alpha^2}{\partial\psi_\beta^1}&\cdots&\frac{\partial\psi_\alpha^n}{\partial\psi_\beta^1}\\\frac{\partial\psi_\alpha^1}{\partial\psi_\beta^2}&\frac{\partial\psi_\alpha^2}{\partial\psi_\beta^2}&\cdots&\frac{\partial\psi_\alpha^n}{\partial\psi_\beta^2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{\partial\psi_\alpha^1}{\partial\psi_\beta^n}&\frac{\partial\psi_\alpha^2}{\partial\psi_\beta^n}&\cdots&\frac{\partial\psi_\alpha^n}{\partial\psi_\beta^n}\end{pmatrix}:U_\alpha\cap U_\beta\to\mathbb{R}$$

$\det A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)}\neq 0$ で $A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)}^{-1}=A_{(U_\beta,\psi_\beta)\to(U_\alpha,\psi_\alpha)}$ が成り立つ。

**証明.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\left\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\right\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha=\left(\psi_\alpha^i\right)_{i\in\varLambda_n}$ とおかれるとき、$\exists V\in\mathfrak{O}$ に対し、$V\subseteq U_\alpha\cap U_\beta$ が成り立つのであったことに注意すれば、$k\in\varLambda_n$ として定理 3.2.1、定理 3.2.3 より次のようになる。

$$\frac{\partial\psi_\alpha^j}{\partial\psi_\alpha^i}=\frac{\partial\psi_\alpha^j}{\partial\psi_\beta^k}\frac{\partial\psi_\beta^k}{\partial\psi_\alpha^i}:V\to\mathbb{R}$$

ここで、次のようになることから、

$$\frac{\partial\psi_\alpha^j}{\partial\psi_\alpha^i}=\partial_i\left(\psi_\alpha^j\circ\psi_\alpha^{-1}\right)\circ\psi_\alpha$$

$$= \partial_i \mathrm{pr}_j \circ \psi_\alpha = \delta_{ij}$$

次式が成り立つ。

$$\delta_{ij} = \frac{\partial \psi_\alpha^j}{\partial \psi_\beta^k} \frac{\partial \psi_\beta^k}{\partial \psi_\alpha^i} : V \to \mathbb{R}$$

さらに、次のように行列 $A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)}$ がおかれよう。

$$A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_\alpha^1}{\partial \psi_\beta^1} & \dfrac{\partial \psi_\alpha^2}{\partial \psi_\beta^1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_\alpha^n}{\partial \psi_\beta^1} \\ \dfrac{\partial \psi_\alpha^1}{\partial \psi_\beta^2} & \dfrac{\partial \psi_\alpha^2}{\partial \psi_\beta^2} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_\alpha^n}{\partial \psi_\beta^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi_\alpha^1}{\partial \psi_\beta^n} & \dfrac{\partial \psi_\alpha^2}{\partial \psi_\beta^n} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_\alpha^n}{\partial \psi_\beta^n} \end{pmatrix} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{R}$$

このとき、上記の議論により次のようになる、

$$\delta_{ij} = \frac{\partial \psi_\alpha^j}{\partial \psi_\beta^k} \frac{\partial \psi_\beta^k}{\partial \psi_\alpha^i} : V \to \mathbb{R}, \quad \delta_{ij} = \frac{\partial \psi_\beta^j}{\partial \psi_\alpha^k} \frac{\partial \psi_\alpha^k}{\partial \psi_\beta^i} : V \to \mathbb{R}$$

即ち、次式が成り立つ。

$$A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)} A_{(U_\beta,\psi_\beta)\to(U_\alpha,\psi_\alpha)} = A_{(U_\beta,\psi_\beta)\to(U_\alpha,\psi_\alpha)} A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)} = I_n$$

よって、$\det A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)} \neq 0$ で $A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\to(U_\beta,\psi_\beta)}^{-1} = A_{(U_\beta,\psi_\beta)\to(U_\alpha,\psi_\alpha)}$ が成り立つ。 □

### 3.2.3 関数行列式

**定義 3.2.3.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$U \in \mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への $1 \leq s \leq r$ としてその開集合 $U$ で $C^s$ 級な写像の族 $\{f_i : U \to \mathbb{R}\}_{i \in \Lambda_n}$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。写像 $(f_i)_{i \in \Lambda_n} : U \to \mathbb{R}^n$ が $f : U \to \mathbb{R}^n$[*51]、その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおかれ、$U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ のとき[*52]、次のように写像 $\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}$ が定義される。その写像 $\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}$ をその写像 $f$ のその座標近傍 $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ におけるその開集合 $U$ での関数行列式という。

$$\frac{Df}{D\psi_\alpha} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial \psi_\alpha^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial \psi_\alpha^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial \psi_\alpha^n} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial \psi_\alpha^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial \psi_\alpha^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^2}{\partial \psi_\alpha^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial \psi_\alpha^1} & \dfrac{\partial f^n}{\partial \psi_\alpha^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial \psi_\alpha^n} \end{vmatrix} : U \cap U_\alpha \to \mathbb{R}$$

---

[*51] もちろん、その写像 $f$ がその開集合 $U$ で微分可能で Jacobi 行列をもつのであれば、その族 $\{f_i\}_{i \in \Lambda_n}$ のどの元はその開集合 $U$ で $C^1$ 級である。

[*52] 定理 3.1.3 より $\exists \alpha \in A$ に対し、$U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ が成り立つ。

**定理 3.2.5.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$U\in\mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への $1\leq s\leq r$ としてその開集合 $U$ で $C^s$ 級な写像の族 $\left\{f_i:U\rightarrow\mathbb{R}\right\}_{i\in\varLambda_n}$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\left\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\right\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。写像 $(f_i)_{i\in\varLambda_n}:U\rightarrow\mathbb{R}^n$ が $f:U\rightarrow\mathbb{R}^n$、その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha=\left(\psi_\alpha^i\right)_{i\in\varLambda_n}$ とおかれ、$U\cap U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ のとき、次式が成り立つ。

$$\frac{Df}{D\psi_\beta}=\det A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)}\frac{Df}{D\psi_\alpha}:U\cap U_\alpha\cap U_\beta\rightarrow\mathbb{R}$$

特に、$\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}|U\cap U_\alpha\cap U_\beta\neq 0$ が成り立つのであれば、$\dfrac{Df}{D\psi_\beta}|U\cap U_\alpha\cap U_\beta\neq 0$ も成り立つことになる。

**証明.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$U\in\mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{d_E})$ への $1\leq s\leq r$ としてその開集合 $U$ で $C^s$ 級な写像の族 $\left\{f_i:U\rightarrow\mathbb{R}\right\}_{i\in\varLambda_n}$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\left\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\right\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。写像 $(f_i)_{i\in\varLambda_n}:U\rightarrow\mathbb{R}^n$ が $f:U\rightarrow\mathbb{R}^n$、その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha=\left(\psi_\alpha^i\right)_{i\in\varLambda_n}$ とおかれ、$U\cap U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ のとき、$\forall i,j\in\varLambda_n$ に対し、定理 3.2.3 より次式が成り立つ。

$$\frac{\partial f^i}{\partial\psi_\beta^j}=\frac{\partial f^i}{\partial\psi_\alpha^k}\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^j}$$

したがって、次式が成り立つので、

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial f^1}{\partial\psi_\beta^1} & \frac{\partial f^1}{\partial\psi_\beta^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial\psi_\beta^n}\\
\frac{\partial f^2}{\partial\psi_\beta^1} & \frac{\partial f^2}{\partial\psi_\beta^2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial\psi_\beta^n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial f^n}{\partial\psi_\beta^1} & \frac{\partial f^n}{\partial\psi_\beta^2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial\psi_\beta^n}
\end{vmatrix}
&=\begin{vmatrix}
\frac{\partial f^1}{\partial\psi_\alpha^k}\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^1} & \frac{\partial f^1}{\partial\psi_\alpha^k}\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial\psi_\alpha^k}\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^n}\\
\frac{\partial f^2}{\partial\psi_\alpha^k}\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^1} & \frac{\partial f^2}{\partial\psi_\alpha^k}\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial\psi_\alpha^k}\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial f^n}{\partial\psi_\alpha^k}\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^1} & \frac{\partial f^n}{\partial\psi_\alpha^k}\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial\psi_\alpha^k}\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^n}
\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}
\frac{\partial f^1}{\partial\psi_\alpha^1} & \frac{\partial f^1}{\partial\psi_\alpha^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial\psi_\alpha^n}\\
\frac{\partial f^2}{\partial\psi_\alpha^1} & \frac{\partial f^2}{\partial\psi_\alpha^2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial\psi_\alpha^n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial f^n}{\partial\psi_\alpha^1} & \frac{\partial f^n}{\partial\psi_\alpha^2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial\psi_\alpha^n}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial\psi_\alpha^1}{\partial\psi_\beta^1} & \frac{\partial\psi_\alpha^1}{\partial\psi_\beta^2} & \cdots & \frac{\partial\psi_\alpha^1}{\partial\psi_\beta^n}\\
\frac{\partial\psi_\alpha^2}{\partial\psi_\beta^1} & \frac{\partial\psi_\alpha^2}{\partial\psi_\beta^2} & \cdots & \frac{\partial\psi_\alpha^2}{\partial\psi_\beta^n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial\psi_\alpha^n}{\partial\psi_\beta^1} & \frac{\partial\psi_\alpha^n}{\partial\psi_\beta^2} & \cdots & \frac{\partial\psi_\alpha^n}{\partial\psi_\beta^n}
\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}
\frac{\partial\psi_\alpha^1}{\partial\psi_\beta^1} & \frac{\partial\psi_\alpha^2}{\partial\psi_\beta^1} & \cdots & \frac{\partial\psi_\alpha^n}{\partial\psi_\beta^1}\\
\frac{\partial\psi_\alpha^1}{\partial\psi_\beta^2} & \frac{\partial\psi_\alpha^2}{\partial\psi_\beta^2} & \cdots & \frac{\partial\psi_\alpha^n}{\partial\psi_\beta^2}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial\psi_\alpha^1}{\partial\psi_\beta^n} & \frac{\partial\psi_\alpha^2}{\partial\psi_\beta^n} & \cdots & \frac{\partial\psi_\alpha^n}{\partial\psi_\beta^n}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial f^1}{\partial\psi_\alpha^1} & \frac{\partial f^1}{\partial\psi_\alpha^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial\psi_\alpha^n}\\
\frac{\partial f^2}{\partial\psi_\alpha^1} & \frac{\partial f^2}{\partial\psi_\alpha^2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial\psi_\alpha^n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial f^n}{\partial\psi_\alpha^1} & \frac{\partial f^n}{\partial\psi_\alpha^2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial\psi_\alpha^n}
\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

次式が成り立つ。

$$\frac{Df}{D\psi_\beta}=\det A_{(U_\alpha,\psi_\alpha)\rightarrow(U_\beta,\psi_\beta)}\frac{Df}{D\psi_\alpha}$$

特に、$\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}|U \cap U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ が成り立つのであれば、定理 3.2.4 より $\dfrac{Df}{D\psi_\beta}|U \cap U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ も成り立つことになる。 □

**定理 3.2.6.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおかれたとき、$\dfrac{D\psi_\alpha}{D\psi_\alpha} = 1$ が成り立つ。

**証明.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおかれたとき、定理 3.2.1 に注意すれば、$\forall i, j \in \Lambda_n$ に対し、$\dfrac{\partial \psi_\alpha^i}{\partial \psi_\alpha^j}$ が定義できて次のようになるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_\alpha^i}{\partial \psi_\alpha^j} &= \partial_j \left(\psi_\alpha^i \circ \psi_\alpha^{-1}\right) \circ \psi_\alpha \\ &= \partial_j \mathrm{pr}_i \circ \psi_\alpha = \delta_{ij} \end{aligned}$$

$\dfrac{D\psi_\alpha}{D\psi_\alpha} = 1$ が成り立つ。 □

**定義 3.2.4.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$U \in \mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への $1 \leq s \leq r$ としてその開集合 $U$ で $C^s$ 級な写像の族 $\{f_i : U \to \mathbb{R}\}_{i \in \Lambda_n}$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。写像 $(f_i)_{i \in \Lambda_n} : U \to \mathbb{R}^n$ が $f : U \to \mathbb{R}^n$、その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおかれ、$U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ のとき、その写像 $f$ のその座標近傍 $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ におけるその開集合 $U$ での関数行列式 $\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}$ が $p \in U \cap U_\alpha$ なる元 $p$ で $\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}(p) \neq 0$ を満たすとき、その写像 $f$ をその元 $p$ のまわりの $C^s$ 級局所座標系という。

**定理 3.2.7.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$U \in \mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への $1 \leq s \leq r$ としてその開集合 $U$ で $C^s$ 級な写像の族 $\{f_i : U \to \mathbb{R}\}_{i \in \Lambda_n}$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。写像 $(f_i)_{i \in \Lambda_n} : U \to \mathbb{R}^n$ が $f : U \to \mathbb{R}^n$、その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおかれ、$U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ のとき、その写像 $f$ のその座標近傍 $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ におけるその開集合 $U$ での関数行列式 $\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}$ が $p \in U \cap U_\alpha$ なる元 $p$ で $\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}(p) \neq 0$ を満たすとき、その部分位相空間 $(U \cap U_\alpha, \mathfrak{O}_{U \cap U_\alpha})$ におけるその元 $p$ のある開近傍 $V$ が存在して、$\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}|V \neq 0$ が成り立つ。

このことから、その写像 $f$ がその元 $p$ のまわりの $C^s$ 級局所座標系であれば、その元 $p$ の開近傍 $V$ をうまくとったときのその開近傍 $V$ の各点のまわりの $C^s$ 級局所座標系となる。

**証明.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$U \in \mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への $1 \leq s \leq r$ としてその開集合 $U$ で $C^s$ 級な写像の族 $\{f_i : U \to \mathbb{R}\}_{i \in \Lambda_n}$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。写像 $(f_i)_{i \in \Lambda_n} : U \to \mathbb{R}^n$ が $f : U \to \mathbb{R}^n$、その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおかれ、$U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ のとき、その写像 $f$ のその座標近傍 $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ におけるその開集合 $U$ での関数行列式 $\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}$ が $p \in U \cap U_\alpha$ なる元 $p$ で $\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}(p) \neq 0$ を満たすとき、次式が成り立つことから、

$$\frac{Df}{D\psi_\alpha} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\sigma \prod_{i \in \Lambda_n} \frac{\partial f^i}{\partial \psi_\alpha^{\sigma(i)}} : U \cap U_\alpha \to \mathbb{R}$$

その関数行列式 $\frac{Df}{D\psi_\alpha}$ はその開集合 $U \cap U_\alpha$ で連続である。したがって、定理 1.3.1 よりその元 $\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p)$ の 1 次元 Euclid 空間における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ におけるどの近傍 $W$ をとってもその値域 $V\left(\frac{Df}{D\psi_\alpha}^{-1}|W\right)$ はその元 $p$ の近傍となる。ここで、1 次元 Euclid 空間は距離空間なので、定理 2.1.6 より $\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$B\left(\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p), \delta\right) \subseteq W$ が成り立つので、その値域 $V\left(\frac{Df}{D\psi_\alpha}^{-1}|B\left(\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p), \delta\right)\right)$ もその元 $p$ の開近傍となる。ここで、次のように正の実数 $\varepsilon$ が定義されれば、

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{2}\left|\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p)\right|, \delta\right\}$$

$B\left(\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p), \varepsilon\right) \subseteq B\left(\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p), \delta\right)$ が成り立つので、その値域 $V\left(\frac{Df}{D\psi_\alpha}^{-1}|B\left(\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p), \varepsilon\right)\right)$ もその元 $p$ の開近傍となる。ここで、この開近傍を $V$ とおくと、$\forall q \in V$ に対し、$\frac{Df}{D\psi_\alpha}(q) \in B\left(\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p), \varepsilon\right)$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned}
q \in V &\Leftrightarrow \frac{Df}{D\psi_\alpha}(q) \in B\left(\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p), \varepsilon\right)\\
&\Leftrightarrow \left|\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p) - \frac{Df}{D\psi_\alpha}(q)\right| < \varepsilon \leq \frac{1}{2}\left|\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p)\right|\\
&\Rightarrow -\frac{1}{2}\left|\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p)\right| < \left|\frac{Df}{D\psi_\alpha}(q)\right| - \left|\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p)\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p)\right|\\
&\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}\left|\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p)\right| < \left|\frac{Df}{D\psi_\alpha}(q)\right|
\end{aligned}$$

よって、その部分位相空間 $(U \cap U_\alpha, \mathfrak{O}_{U \cap U_\alpha})$ におけるその元 $p$ のある開近傍 $V$ が存在して、$\frac{Df}{D\psi_\alpha}|V \neq 0$ が成り立つ。 □

**定理 3.2.8.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$U \in \mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への $1 \leq s \leq r$ としてその開集合 $U$ で $C^s$ 級な写像の族 $\{f_i : U \to \mathbb{R}\}_{i \in \Lambda_n}$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。写像 $(f_i)_{i \in \Lambda_n} : U \to \mathbb{R}^n$ が $f : U \to \mathbb{R}^n$、その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおかれ、$U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ でその写像 $f$ のその座標近傍 $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ におけるその開集合 $U$ での関数行列式 $\frac{Df}{D\psi_\alpha}$ が $p \in U \cap U_\alpha$ なる元 $p$ で $\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p) \neq 0$ を満たすとき、即ち、その元 $p$ がその写像 $f$ の $C^s$ 級局所座標系であるとき、その位相空間 $(U \cap U_\alpha, \mathfrak{O}_{U \cap U_\alpha})$ におけるその元 $p$ のある開近傍 $U'$ が存在して、その組 $(U', f)$ がその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の座標近傍となる。

**証明.** $n$ 次元 $C^r$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$U \in \mathfrak{O}$ なるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $E$ における位相空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{O}_{d_E})$ への $1 \leq s \leq r$ としてその開集合 $U$ で $C^s$ 級な写像の族 $\{f_i : U \to \mathbb{R}\}_{i \in \Lambda_n}$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の $C^r$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。写像 $(f_i)_{i \in \Lambda_n} : U \to \mathbb{R}^n$ が $f : U \to \mathbb{R}^n$、その局所座標系 $\psi_\alpha$ が $\psi_\alpha = \left(\psi_\alpha^i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおかれ、$U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ でその写像 $f$ のその座標近傍 $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ におけるその開集合 $U$ での関数行列式 $\frac{Df}{D\psi_\alpha}$ が $p \in U \cap U_\alpha$ なる元 $p$ で $\frac{Df}{D\psi_\alpha}(p) \neq 0$ を満たすとき、即ち、その元 $p$ がその写像 $f$ の $C^s$ 級局所座標系であるとき、$\forall i, j \in \Lambda_n$ に対し、次式が成り立つので、

$$\frac{\partial f^i}{\partial \psi_\alpha^j} = \partial_j\left(f^i \circ \psi_\alpha^{-1}\right) \circ \psi_\alpha$$

次式が成り立つ。

$$\frac{Df}{D\psi_\alpha} = \det J_{f \circ \psi_\alpha^{-1}} \circ \psi_\alpha : U \cap U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$$

関数行列式 $\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}$ が $p \in U \cap U_\alpha$ なる元 $p$ で $\dfrac{Df}{D\psi_\alpha}(p) \neq 0$ を満たすので、$\det J_{f \circ \psi_\alpha^{-1}} \neq 0$ が成り立つ、即ち、$J_{f \circ \psi_\alpha^{-1}} : U \cap U_\alpha \rightarrow M_{nn}(\mathbb{R})$ の逆行列が存在することになる。また、それらの写像たち $f_i$ いずれも $C^s$ 級である、即ち、それらの関数たち $f_i \circ \psi_\alpha^{-1}$ いずれも $C^s$ 級であるので、これが成り立つならそのときに限り、その関数 $f \circ \psi_\alpha^{-1}$ も $C^s$ 級である。そこで、逆関数定理より $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $\left( \mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}} \right)$ でのある開近傍たち $V$、$W$ が存在して、$f \circ \psi_\alpha^{-1}|V : V \rightarrow W$ の逆関数が存在するようにすることができる。さらに、その逆関数 $\left( f \circ \psi_\alpha^{-1} \right)^{-1}$ も $C^s$ 級である。特に、その関数 $f \circ \psi_\alpha^{-1}$ は連続でその逆関数 $\left( f \circ \psi_\alpha^{-1} \right)^{-1}$ も連続であるので、その関数 $f \circ \psi_\alpha^{-1}$ は $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における部分位相空間間の同相写像となっている。そこで、$U' = V\left( \psi_\alpha^{-1}|V \right)$ とすれば、その写像 $\psi_\alpha$ が連続なのでこれは開集合で次のようになることから、

$$\begin{aligned} f|U' &= f \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha|V\left( \psi_\alpha^{-1}|V \right) \\ &= f \circ \psi_\alpha^{-1}|V \circ \psi_\alpha|V\left( \psi_\alpha^{-1}|V \right) \end{aligned}$$

その写像 $f|U'$ はその部分位相空間 $\left( V\left( \psi_\alpha^{-1}|V \right), \mathfrak{O}_{V\left( \psi_\alpha^{-1}|V \right)} \right)$ からその部分位相空間 $\left( V, \left( \mathfrak{O}_{d_{E^n}} \right)_V \right)$ への同相写像 $\psi_\alpha|V\left( \psi_\alpha^{-1}|V \right)$ とその部分位相空間 $\left( V, \left( \mathfrak{O}_{d_{E^n}} \right)_V \right)$ からその部分位相空間 $\left( W, \left( \mathfrak{O}_{d_{E^n}} \right)_W \right)$ への同相写像の合成写像となっているので、その写像 $f|U'$ も同相写像である。よって、その位相空間 $\left( U \cap U_\alpha, \mathfrak{O}_{U \cap U_\alpha} \right)$ におけるその元 $p$ のある開近傍 $U'$ が存在して、その組 $(U', f)$ がその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の座標近傍となる。 $\square$

# 参考文献


[1] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965. 第 36 刷 p31-35 ISBN978-4-7853-1305-0

[2] 新井朝雄, 相対性理論の数理, 日本評論会, 2021. 第 1 版第 1 刷 p164-166 ISBN978-4-535-78928-9

## 3.3 接 vector 空間

### 3.3.1 $p$-同値

**定義 3.3.1.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $M$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ の開近傍 $V$ を用いた $C^{\infty}$ 級写像 $f:V\rightarrow\mathbb{R}$ 全体の集合 $C_p^{\infty}(V)$ について、その和集合 $\bigsqcup_{V\in\mathbf{V}(p)\cap\mathfrak{O}} C_p^{\infty}(V)$ を $C_p^{\infty}\mathcal{M}$ と書き、さらに、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ 上の $C^{\infty}$ 級関数全体、即ち、和集合 $\bigsqcup_{U\in\mathfrak{O}} C^{\infty}(U)$ を $C^{\infty}\mathcal{M}$ と書く。

**定理 3.3.1.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $M$ の元 $p$ が与えられたとき、$\forall a,b\in\mathbb{R}\forall f,g\in C_p^{\infty}\mathcal{M}$ に対し、$af+bg,fg\in C_p^{\infty}\mathcal{M}$ が成り立つ。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $M$ の元 $p$ が与えられたとき、$\forall a,b\in\mathbb{R}\forall f,g\in C_p^{\infty}\mathcal{M}$ に対し、それらの写像たち $f$、$g$ の定義域をそれぞれ $V$、$W$ とすれば、$V\cap W\in\mathbf{V}(p)\cap\mathfrak{O}$ より適切に座標近傍系 $(U,\psi)$ がとられれば、次の関数たちは $C^{\infty}$ 級関数であり

$$\begin{aligned}
f\circ\psi^{-1}|V(\psi|U\cap V\cap W) &: V(\psi|U\cap V\cap W)\rightarrow\mathbb{R},\\
g\circ\psi^{-1}|V(\psi|U\cap V\cap W) &: V(\psi|U\cap V\cap W)\rightarrow\mathbb{R}
\end{aligned}$$

次の関数たちも $C^{\infty}$ 級関数である。

$$\begin{aligned}
&af\circ\psi^{-1}+bg\circ\psi^{-1}|V(\psi|U\cap V\cap W):V(\psi|U\cap V\cap W)\rightarrow\mathbb{R};\psi(p)\mapsto af(p)+bg(p),\\
&\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(g\circ\psi^{-1}\right)|V(\psi|U\cap V\cap W):V(\psi|U\cap V\cap W)\rightarrow\mathbb{R};\psi(p)\mapsto f(p)g(p)
\end{aligned}$$

ここで、次のことが成り立つことに注意すれば、

$$\begin{aligned}
af\circ\psi^{-1}+bg\circ\psi^{-1}|V(\psi|U\cap V\cap W)&=(af+bg)\circ\psi^{-1}|V(\psi|U\cap V\cap W),\\
\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(g\circ\psi^{-1}\right)|V(\psi|U\cap V\cap W)&=fg\circ\psi^{-1}|V(\psi|U\cap V\cap W)
\end{aligned}$$

よって、これらの写像たち $af+bg$、$fg$ はその元 $p$ の開近傍で定義される写像で $C^{\infty}$ 級であり $af+bg,fg\in C_p^{\infty}\mathcal{M}$ が成り立つ。 □

**定理 3.3.2.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $M$ の元 $p$ が与えられたとき、その集合 $C_p^{\infty}\mathcal{M}$ は vector 空間になりえない[*53]。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $M$ の元 $p$ が与えられたとき、その集合 $C_p^{\infty}\mathcal{M}$ が vector 空間であると仮定しよう。vector 空間の公理より零 vector$\mathbf{0}$ が存在する。このとき、$\forall f\in C_p^{\infty}\mathcal{M}$ に対し、$f+\mathbf{0}=f$ が成り立つ。そこで、その集合 $C_p^{\infty}\mathcal{M}$ の元の定義域の和集合を $\mathcal{U}$ としその写像 $\mathbf{0}$ の定義域がその集合 $\mathcal{U}$ でないとすれば、その定義域を $D(\mathbf{0})$ として $D(\mathbf{0})\subset\mathcal{U}$ が成り立つ。このとき、その集合 $\mathcal{U}$ はその元 $p$ の開近傍であるので、$q\in\mathcal{U}\setminus D(\mathbf{0})$ とすれば、その集合 $\mathcal{U}$ の定義よりその元 $q$ が属するような定義域 $V$ をもつその集合

---

[*53] なお、終集合が $\mathbb{R}$ かこれの部分集合となっているような 2 つの写像たち $f$、$g$ の実数たち $a$、$b$ を用いた写像 $af+bg$ を次のように定義するものとしている。

$$af+bg:D(f)\cap D(g)\rightarrow\mathbb{R};q\mapsto af(q)+bg(q)$$

$C_p^\infty \mathcal{M}$ の元 $g$ が存在する。このとき、$V \cap D(\mathbf{0}) \neq V$ なので、$g + \mathbf{0} = g$ が成り立たない。ゆえに、その写像 $\mathbf{0}$ の定義域はその集合 $\mathcal{U}$ である。

次に、その関数 $f$ のその可換群 $\left(C_p^\infty \mathcal{M}, +\right)$ における逆元を $-f$ とおくと、$f + (-f) = \mathbf{0}$ が成り立つので、その関数 $f + (-f)$ の定義域はその集合 $\mathcal{U}$ である。ゆえに、その関数 $f$ の定義域は $\mathcal{U}$ となる。

ここで、ある座標近傍 $(U, \psi)$ を用いれば、その集合 $V(\psi)$ は $n$ 次元 Euclid 空間における位相空間での開集合であり異なる 2 点 $\psi(q)$、$\psi(r)$ がとられることができる。このとき、その写像 $\psi$ は同相写像なので、$q \neq r$ が成り立つ。そこで、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ が Haudorff 空間であることから、それらの元々 $p$、$q$、$r$ の互いに素な開近傍たち $V_p$、$V_q$、$V_r$ がとられることができる。このとき、それらの関数たち $f|V_p \sqcup V_q$、$f|V_p \sqcup V_r$ もその集合 $C_p^\infty \mathcal{M}$ の元々である。しかしながら、それらの関数たちの定義域は $\mathcal{U}$ でありえない。このことは上記の議論に矛盾する。よって、その集合 $C_p^\infty \mathcal{M}$ は vector 空間になりえない。 □

**定義 3.3.2.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとする。その集合 $C_p^\infty \mathcal{M}$ の元々 $f$、$g$ において、$\exists V \in \mathbf{V}(p) \cap \mathfrak{O}$ に対し、$f|V = g|V$ が成り立つとき、それらの写像たち $f$、$g$ は $p$-同値であるといい、$f \sim_p g$ と書く。

**定理 3.3.3.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その関係 $\sim_p$ は同値関係となる。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、$\forall f \in C_p^\infty \mathcal{M}$ に対し、その写像 $f$ の定義域を $V$ とすれば、もちろん $V \in \mathbf{V}(p) \cap \mathfrak{O}$ で $f|V = f|V$ が成り立つ。$\forall f, g \in C_p^\infty \mathcal{M}$ に対し、$f \sim_p g$ が成り立つなら、$\exists V \in \mathbf{V}(p) \cap \mathfrak{O}$ に対し、$f|V = g|V$ が成り立つので、$g \sim_p f$ が成り立つ。最後に、$\forall f, g, h \in C_p^\infty \mathcal{M}$ に対し、$f \sim_p g$ かつ $g \sim_p f$ が成り立つなら、$\exists V, W \in \mathbf{V}(p) \cap \mathfrak{O}$ に対し、$f|V = g|V$ かつ $g|W = h|W$ が成り立つ。そこで、$V \cap W \in \mathbf{V}(p) \cap \mathfrak{O}$ で $f|V \cap W = g|V \cap W$ かつ $g|V \cap W = h|V \cap W$ が成り立っているので、$f|V \cap W = h|V \cap W$ が成り立つ。これにより、$f \sim_p h$ が得られた。 □

**定理 3.3.4.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、次のように和と scalar 倍が定義されれば、

$$\begin{aligned} + &: C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p \times C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p \rightarrow C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p ; \left(C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g)\right) \mapsto C_{\sim_p}(f+g) \\ \cdot &: \mathbb{R} \times C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p \rightarrow C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p ; \left(a, C_{\sim_p}(f)\right) \mapsto C_{\sim_p}(af) \end{aligned}$$

その商集合 $C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ は体 $\mathbb{R}$ 上の vector 空間をなす。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとする。次のように和と scalar 倍が定義されたとき、

$$\begin{aligned} + &: C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p \times C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p \rightarrow C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p ; \left(C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g)\right) \mapsto C_{\sim_p}(f+g) \\ \cdot &: \mathbb{R} \times C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p \rightarrow C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p ; \left(a, C_{\sim_p}(f)\right) \mapsto C_{\sim_p}(af) \end{aligned}$$

その scalar 倍はうまく定義されているので、その和がうまく定義されていることを示そう。$\forall f, f', g, g' \in C_p^\infty \mathcal{M}$ に対し、$f \sim_p f'$ かつ $g \sim_p g'$ が成り立つとすれば、即ち、$C_{\sim_p}(f) = C_{\sim_p}(f')$ かつ $C_{\sim_p}(g) = C_{\sim_p}(g')$ が成り立つとすれば、$\exists V, W \in \mathbf{V}(p) \cap \mathfrak{O}$ に対し、$f|V = f'|V$ かつ $g|W = g'|W$ が成り立っているので、$V \cap W \in \mathbf{V}(p) \cap \mathfrak{O}$ に注意すれば、$(f+g)|V \cap W = (f'+g')|V \cap W$ が成り立つので、$f + g \sim_p f' + g'$ が成り立つ、即ち、$C_{\sim_p}(f+g) = C_{\sim_p}(f'+g')$ が成り立つ。

次に、$0 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}; q \mapsto 0$ は定数関数なので、その元 $p$ で $C^\infty$ 級である。このとき、組 $\left(C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p, +\right)$ が

可換群をなすことを示そう。$\forall C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g), C_{\sim_p}(h) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、次のようになるかつ、

$$\begin{aligned}\left(C_{\sim_p}(f) + C_{\sim_p}(g)\right) + C_{\sim_p}(h) &= C_{\sim_p}(f+g) + C_{\sim_p}(h)\\ &= C_{\sim_p}((f+g)+h)\\ &= C_{\sim_p}(f+(g+h))\\ &= C_{\sim_p}(f) + C_{\sim_p}(g+h)\\ &= C_{\sim_p}(f) + \left(C_{\sim_p}(g) + C_{\sim_p}(h)\right)\end{aligned}$$

$\forall C_{\sim_p}(f) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、その写像 $f$ の定義域を $V$ とすれば、$0|V \sim_p 0$ より次のようになるかつ、

$$\begin{aligned}C_{\sim_p}(f) + C_{\sim_p}(0) &= C_{\sim_p}(f) + C_{\sim_p}(0|V)\\ &= C_{\sim_p}(f+0|V)\\ &= C_{\sim_p}(f)\end{aligned}$$

さらに、$\forall C_{\sim_p}(f) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、その写像 $f$ の定義域を $V$ とすれば、$0|V \sim_p 0$ より次のようになるかつ、

$$\begin{aligned}C_{\sim_p}(f) + C_{\sim_p}(-f) &= C_{\sim_p}(f-f)\\ &= C_{\sim_p}(0|V)\\ &= C_{\sim_p}(0)\end{aligned}$$

$\forall C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}C_{\sim_p}(f) + C_{\sim_p}(g) &= C_{\sim_p}(f+g)\\ &= C_{\sim_p}(g+f)\\ &= C_{\sim_p}(g) + C_{\sim_p}(f)\end{aligned}$$

以上の議論よりその組 $\left(C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p, +\right)$ は可換群をなす。あとは、次のことがただちに示される。

- $\forall a \in \mathbb{R} \forall C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、$a\left(C_{\sim_p}(f) + C_{\sim_p}(g)\right) = aC_{\sim_p}(f) + aC_{\sim_p}(g)$ が成り立つ。
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall C_{\sim_p}(f) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、$(a+b)C_{\sim_p}(f) = aC_{\sim_p}(f) + bC_{\sim_p}(f)$ が成り立つ。
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall C_{\sim_p}(f) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、$(ab)C_{\sim_p}(f) = a\left(bC_{\sim_p}(f)\right)$ が成り立つ。
- $\forall C_{\sim_p}(f) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、$1C_{\sim_p}(f) = C_{\sim_p}(f)$ が成り立つ。

よって、その商集合 $C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ は体 $\mathbb{R}$ 上の vector 空間をなす。 □

**定理 3.3.5.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、次のように積が定義されれば、

$$\cdot : C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p \times C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p \rightarrow C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p; \left(C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g)\right) \mapsto C_{\sim_p}(fg)$$

その商集合 $C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ は可換環をなす。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとする。次のように積が定義されれば、

$$\cdot : C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p \times C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p \rightarrow C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p; \left(C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g)\right) \mapsto C_{\sim_p}(fg)$$

その積がうまく定義されていることを示そう。$\forall f, f', g, g' \in C_p^\infty \mathcal{M}$ に対し、$f \sim_p f'$ かつ $g \sim_p g'$ が成り立つとすれば、即ち、$C_{\sim_p}(f) = C_{\sim_p}(f')$ かつ $C_{\sim_p}(g) = C_{\sim_p}(g')$ が成り立つとすれば、$\exists V, W \in \mathbf{V}(p) \cap \mathfrak{O}$

に対し、$f|V = f'|V$ かつ $g|W = g'|W$ が成り立っているので、$V \cap W \in \mathbf{V}(p) \cap \mathfrak{O}$ に注意すれば、$(fg)|V \cap W = (f'g')|V \cap W$ が成り立つので、$fg \sim_p f'g'$ が成り立つ、即ち、$C_{\sim_p}(fg) = C_{\sim_p}(f'g')$ が成り立つ。

定理 3.3.4 の証明と同様にすれば、その組 $\left(C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p\right)$ は可換群をなす。さらに、$1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}; q \mapsto 1$ は定数関数なので、その元 $p$ で $C^\infty$ 級である。これにより、$\forall C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g), C_{\sim_p}(h) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、次のようになるかつ、

$$\begin{aligned}\left(C_{\sim_p}(f) C_{\sim_p}(g)\right) C_{\sim_p}(h) &= C_{\sim_p}(fg) C_{\sim_p}(h)\\ &= C_{\sim_p}((fg) h)\\ &= C_{\sim_p}(f(gh))\\ &= C_{\sim_p}(f) C_{\sim_p}(gh)\\ &= C_{\sim_p}(f)\left(C_{\sim_p}(g) C_{\sim_p}(h)\right)\end{aligned}$$

$\forall C_{\sim_p}(f) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、次のようになるかつ、

$$\begin{aligned}C_{\sim_p}(1) C_{\sim_p}(f) &= C_{\sim_p}(1f)\\ &= C_{\sim_p}(f)\end{aligned}$$

$\forall C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g), C_{\sim_p}(h) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、次のようになるかつ、

$$\begin{aligned}C_{\sim_p}(f)\left(C_{\sim_p}(g) + C_{\sim_p}(h)\right) &= C_{\sim_p}(f) C_{\sim_p}(g+h)\\ &= C_{\sim_p}(f(g+h))\\ &= C_{\sim_p}(fg+fh)\\ &= C_{\sim_p}(fg) + C_{\sim_p}(fh)\\ &= C_{\sim_p}(f) C_{\sim_p}(g) + C_{\sim_p}(f) C_{\sim_p}(h)\end{aligned}$$

$\forall C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、次のようになる[*54]。

$$\begin{aligned}C_{\sim_p}(f) C_{\sim_p}(g) &= C_{\sim_p}(fg)\\ &= C_{\sim_p}(gf)\\ &= C_{\sim_p}(g) C_{\sim_p}(f)\end{aligned}$$

これにより、その商集合 $C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ は可換環をなす。 □

### 3.3.2 接 vector 空間

**公理 3.3.3** (接 vector 空間の公理). $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、写像 $\widetilde{v} : C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p \rightarrow \mathbb{R}$ のうち次のことを満たすものの合成写像 $\widetilde{v} \circ C_{\sim_p}$ をその元 $p$ におけるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の接 vector といい、さらに、これ全体の集合をその元 $p$ におけるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の接 vector 空間といい $T_p\mathcal{M}$ などと書く。

- その写像 $\widetilde{v}$ はその vector 空間 $C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ から vector 空間 $\mathbb{R}$ への線形写像である、即ち、$\forall a, b \in \mathbb{R} \forall C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g) \in C_p^\infty \mathcal{M}/\sim_p$ に対し、次式が成り立つ。このことを線形性という。

$$\widetilde{v}\left(aC_{\sim_p}(f) + bC_{\sim_p}(g)\right) = a\widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(f)\right) + b\widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(g)\right)$$

[*54] これがあるので、積の順序を逆にしたものは示さなくても済む。

- $\forall C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g) \in C_p^\infty\mathcal{M}/\sim_p$ に対し、次式が成り立つ。このことを Leibniz 則という。

$$\widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(f)\,C_{\sim_p}(g)\right) = \widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(f)\right)g(p) + f(p)\,\widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(g)\right)$$

**定理 3.3.6.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、写像 $v: C_p^\infty\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ がその元 $p$ における接 vector であるならそのときに限り、次のことを満たす。

- $\forall a, b \in \mathbb{R}\forall f, g \in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。このことも線形性という。

$$v(af + bg) = av(f) + bv(g)$$

- $\forall f, g \in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。このことも Leibniz 則という。

$$v(fg) = v(f)\,g(p) + f(p)\,v(g)$$

- $\forall f, g \in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、$f \sim_p g$ が成り立つなら、$v(f) = v(g)$ が成り立つ。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、写像 $v: C_p^\infty\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ がその元 $p$ における接 vector であるなら、公理より $v = \widetilde{v} \circ C_{\sim_p}$ な写像 $\widetilde{v}: C_p^\infty\mathcal{M}/\sim_p \to \mathbb{R}$ が存在して、次のようになる。

- $\forall a, b \in \mathbb{R}\forall f, g \in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} v(af + bg) &= \widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(af + bg)\right) \\ &= \widetilde{v}\left(aC_{\sim_p}(f) + bC_{\sim_p}(g)\right) \\ &= a\widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(f)\right) + b\widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(g)\right) \\ &= av(f) + bv(g) \end{aligned}$$

- $\forall f, g \in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} v(fg) &= \widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(fg)\right) \\ &= \widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(f)\,C_{\sim_p}(g)\right) \\ &= \widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(f)\right)g(p) + f(p)\,\widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(g)\right) \\ &= v(f)\,g(p) + f(p)\,v(g) \end{aligned}$$

- $\forall f, g \in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、$f \sim_p g$ が成り立つなら、$C_{\sim_p}(f) = C_{\sim_p}(g)$ より $v(f) = \widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(f)\right) = \widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(g)\right) = v(g)$ が成り立つ。

一方で、その商集合 $C_p^\infty\mathcal{M}/\sim_p$ の元 $C_{\sim_p}f$ から $g \in C_{\sim_p}(f)$ な写像 $g$ をとって実数 $v(g)$ へうつす写像 $\widetilde{v}: C_p^\infty\mathcal{M}/\sim_p \to \mathbb{R}$ が考えられよう。これはうまく定義されている。実際、$\forall C_{\sim_p}(f) \in C_p^\infty\mathcal{M}/\sim_p$ に対し、その同値類 $C_{\sim_p}(f)$ の元々 $g$、$h$ がとられれば、$f \sim_p g \sim_p h$ より $v(f) = v(g) = v(h)$ が成り立つ。このとき、次のようになる。

- $\forall a, b \in \mathbb{R}\forall C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g) \in C_p^\infty\mathcal{M}/\sim_p$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} \widetilde{v}\left(aC_{\sim_p}(f) + bC_{\sim_p}(g)\right) &= \widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(af + bg)\right) \\ &= v(af + bg) \\ &= av(f) + bv(g) \\ &= a\widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(f)\right) + b\widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(g)\right) \end{aligned}$$

- $\forall C_{\sim_p}(f), C_{\sim_p}(g) \in C_p^\infty\mathcal{M}/\sim_p$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}\widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(f)\,C_{\sim_p}(g)\right) &= \widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(fg)\right)\\ &= v(fg)\\ &= v(f)\,g(p) + f(p)\,v(g)\\ &= \widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(f)\right)g(p) + f(p)\,\widetilde{v}\left(C_{\sim_p}(g)\right)\end{aligned}$$

□

**定理 3.3.7.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ におけるその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の接 vector 空間 $T_p\mathcal{M}$ において、次のように和と scalar 倍が定義されれば、

$$\begin{aligned}&+ : T_p\mathcal{M}\times T_p\mathcal{M}\to T_p\mathcal{M}; (v,w)\mapsto v+w : C_p^\infty\mathcal{M}\to\mathbb{R}; f\mapsto v(f)+w(f)\\ &\cdot : \mathbb{R}\times T_p\mathcal{M}\to T_p\mathcal{M}; (\xi,v)\mapsto \xi v : C_p^\infty\mathcal{M}\to\mathbb{R}; f\mapsto \xi v(f)\end{aligned}$$

その接 vector 空間 $T_p\mathcal{M}$ は体 $\mathbb{R}$ 上の vector 空間をなす。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ におけるその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の接 vector 空間 $T_p\mathcal{M}$ において、次のように和と scalar 倍が定義されれば、

$$\begin{aligned}&+ : T_p\mathcal{M}\times T_p\mathcal{M}\to T_p\mathcal{M}; (v,w)\mapsto v+w : C_p^\infty\mathcal{M}\to\mathbb{R}; f\mapsto v(f)+w(f)\\ &\cdot : \mathbb{R}\times T_p\mathcal{M}\to T_p\mathcal{M}; (\xi,v)\mapsto \xi v : C_p^\infty\mathcal{M}\to\mathbb{R}; f\mapsto \xi v(f)\end{aligned}$$

これがうまく定義されていることを示そう。このとき、$\forall v,w\in T_p\mathcal{M}$ に対し、和 $v+w$ が定義されれば、次のようになる。

- $\forall a,b\in\mathbb{R}\forall f,g\in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}(v+w)(af+bg) &= v(af+bg)+w(af+bg)\\ &= av(f)+bv(g)+aw(f)+bw(g)\\ &= a(v+w)(f)+b(v+w)(g)\end{aligned}$$

- $\forall f,g\in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}(v+w)(fg) &= v(fg)+w(fg)\\ &= v(f)\,g(p)+f(p)\,v(g)+w(f)\,g(p)+f(p)\,w(g)\\ &= (v+w)(f)\,g(p)+f(p)\,(v+w)(g)\end{aligned}$$

- $\forall f,g\in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、$f\sim_p g$ が成り立つなら、次のようになる。

$$\begin{aligned}(v+w)(f) &= v(f)+w(f)\\ &= v(g)+w(g)\\ &= (v+w)(g)\end{aligned}$$

ゆえに、定理 3.3.6 より $v+w\in T_p\mathcal{M}$ が成り立つ。

また、$\forall\xi\in\mathbb{R}\forall v\in T_p\mathcal{M}$ に対し、scalar 倍 $\xi v$ が定義されれば、次のようになる。

- $\forall a,b \in \mathbb{R}\forall f,g \in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}\xi v\left(af+bg\right) &= \xi\left(av\left(f\right)+bv\left(g\right)\right)\\ &= a\xi v\left(f\right)+b\xi v\left(g\right)\end{aligned}$$

- $\forall f,g \in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}\xi v\left(fg\right) &= \xi\left(v\left(f\right)g\left(p\right)+f\left(p\right)v\left(g\right)\right)\\ &= \xi v\left(f\right)g\left(p\right)+f\left(p\right)\xi v\left(g\right)\end{aligned}$$

- $\forall f,g \in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、$f \sim_p g$ が成り立つなら、$\xi v\left(f\right) = \xi v\left(g\right)$ が成り立つ。

ゆえに、定理 3.3.6 より $\xi v \in T_p\mathcal{M}$ が成り立つ。

あとは、次のように写像 0 が定義されれば、

$$0 : C_p^\infty\mathcal{M} \to \mathbb{R}; f \mapsto 0$$

次のことがただちに示される。

- その集合 $T_p\mathcal{M}$ を用いた組 $\left(T_p\mathcal{M},+\right)$ は可換群をなす。
- $\forall\xi \in \mathbb{R}\forall v,w \in T_p\mathcal{M}$ に対し、$\xi\left(v+w\right) = \xi v+\xi w$ が成り立つ。
- $\forall\xi,\eta \in \mathbb{R}\forall v \in T_p\mathcal{M}$ に対し、$\left(\xi+\eta\right)v = \xi v+\eta v$ が成り立つ。
- $\forall\xi,\eta \in \mathbb{R}\forall v \in T_p\mathcal{M}$ に対し、$\left(\xi\eta\right)v = \xi\left(\eta v\right)$ が成り立つ。
- $\forall v \in T_p\mathcal{M}$ に対し、$1v = v$ が成り立つ。

□

**定理 3.3.8.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、$\forall v \in T_p\mathcal{M}\exists V \in \mathbf{V}(p)\cap\mathfrak{O}\forall f \in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、その写像 $f|V : V \to \mathbb{R}$ が定数関数となっているとき、$v\left(f\right) = 0$ が成り立つ。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、$\forall v \in T_p\mathcal{M}\exists V \in \mathbf{V}(p)\cap\mathfrak{O}\forall f \in C_p^\infty\mathcal{M}$ に対し、その写像 $f|V : V \to \mathbb{R}$ が定数関数となっているとき、$\forall q \in V$ に対し、$C = f\left(q\right)$ とおき、さらに、$\forall c \in \mathbb{R}$ に対し、写像 $c$ を次のように定義すると、

$$c : \mathcal{M} \to \mathbb{R}; q \mapsto c$$

$f \sim_p C$ となっており、したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}v\left(C\right) &= v\left(C\cdot 1\right)\\ &= v\left(C\right)\cdot 1+C\cdot v\left(1\right)\\ &= v\left(C\right)+v\left(C\right)\end{aligned}$$

これにより、$v\left(f\right) = v\left(C\right) = 0$ が得られる。 □

**定義 3.3.4.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、$p \in U$、$\psi = \left(\psi^i\right)_{i\in\Lambda_n}$ なる座標近傍 $(U,\psi)$ を用いて次の写像 $\left.\dfrac{\partial}{\partial\psi^i}\right|_p$ が定義される。

$$\left.\frac{\partial}{\partial\psi^i}\right|_p : C_p^\infty\mathcal{M} \to \mathbb{R}; f \mapsto \frac{\partial f}{\partial\psi^i}\left(p\right)$$

その写像 $\left.\dfrac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}$ をその元 $p$ におけるその座標近傍 $(U, \psi)$ での第 $i$ 偏微分作用素という。

**定理 3.3.9.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における $\psi=\left(\psi^{i}\right)_{i \in \Lambda_{n}}$ なる座標近傍 $(U, \psi)$ での第 $i$ 偏微分作用素 $\left.\dfrac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}$ はその元 $p$ における接 vector である。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における $\psi=\left(\psi^{i}\right)_{i \in \Lambda_{n}}$ なる座標近傍 $(U, \psi)$ での第 $i$ 偏微分作用素 $\left.\dfrac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}$ について、次のようになる。

- $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall f, g \in C_{p}^{\infty} \mathcal{M}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}(a f+b g) &= \frac{\partial}{\partial \psi^{i}}(a f+b g)(p) \\
&= a \frac{\partial f}{\partial \psi^{i}}(p)+b \frac{\partial g}{\partial \psi^{i}}(p) \\
&= a\left.\frac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}(f)+b\left.\frac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}(g)
\end{aligned}$$

- $\forall f, g \in C_{p}^{\infty} \mathcal{M}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}(f g) &= \frac{\partial}{\partial \psi^{i}}(f g)(p) \\
&= \partial_{i}\left(f g \circ \psi^{-1}\right) \circ \psi(p) \\
&= \partial_{i}\left(\left(f \circ \psi^{-1}\right)\left(g \circ \psi^{-1}\right)\right) \circ \psi(p) \\
&= \left(\partial_{i}\left(f \circ \psi^{-1}\right) g \circ \psi^{-1}+f \circ \psi^{-1} \partial_{i}\left(g \circ \psi^{-1}\right)\right) \circ \psi(p) \\
&= \partial_{i}\left(f \circ \psi^{-1}\right) \circ \psi(p)\, g(p)+f(p)\, \partial_{i}\left(g \circ \psi^{-1}\right) \circ \psi(p) \\
&= \frac{\partial f}{\partial \psi^{i}}(p)\, g(p)+f(p) \frac{\partial g}{\partial \psi^{i}}(p) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}(f)\, g(p)+f(p)\left.\frac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}(g)
\end{aligned}$$

- $\forall f, g \in C_{p}^{\infty} \mathcal{M}$ に対し、$f \sim_{p} g$ が成り立つなら、$\exists V \in \mathbf{V}(p) \cap \mathfrak{O}$ に対し、$f|V=g| V$ が成り立つので、次のようになる。

$$\left.\frac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}(f)=\frac{\partial f}{\partial \psi^{i}}(p)=\frac{\partial f | V}{\partial \psi^{i}}(p)=\frac{\partial g | V}{\partial \psi^{i}}(p)=\frac{\partial g}{\partial \psi^{i}}(p)=\left.\frac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}(g)$$

以上、定理 3.3.6 より $\left.\dfrac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p} \in T_{p} \mathcal{M}$ が成り立つ。 □

**定理 3.3.10.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における $\psi=\left(\psi^{i}\right)_{i \in \Lambda_{n}}$ なる座標近傍 $(U, \psi)$ での第 $i$ 偏微分作用素 $\left.\dfrac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}$ からなる組 $\left\langle\left.\dfrac{\partial}{\partial \psi^{i}}\right|_{p}\right\rangle_{i \in \Lambda_{n}}$ はその接 vector 空間 $T_{p} \mathcal{M}$ の基底で $k \in \Lambda_{n}$ として、$\forall v \in T_{p} \mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。

$$v=v\left(\psi^{k}\right)\left.\frac{\partial}{\partial \psi^{k}}\right|_{p}$$

特に、$\dim T_{p} \mathcal{M}=n$ が成り立つ。

**定義 3.3.5.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における $\psi = \left( \psi^i \right)_{i \in \varLambda_n}$ なる座標近傍 $(U, \psi)$ での第 $i$ 偏微分作用素 $\left. \dfrac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_p$ からなる基底 $\left\langle \left. \dfrac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_p \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ をその元 $p$ における座標近傍 $(U, \psi)$ での自然標構、自然基底という。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における $\psi = \left( \psi^i \right)_{i \in \varLambda_n}$ なる座標近傍 $(U, \psi)$ での第 $i$ 偏微分作用素 $\left. \dfrac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_p$ からなる組 $\left\langle \left. \dfrac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_p \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき、$k \in \varLambda_n$、$c_k \in \mathbb{R}$ として $c_k \left. \dfrac{\partial}{\partial \psi^k} \right|_p = 0$ が成り立つなら、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、$\psi^i \in C_p^\infty \mathcal{M}$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= c_k \left. \frac{\partial}{\partial \psi^k} \right|_p \left( \psi^i \right) \\ &= c_k \frac{\partial \psi^i}{\partial \psi^k} (p) \\ &= c_k \partial_k \left( \psi^i \circ \psi^{-1} \right) \circ \psi (p) \\ &= c_k \delta_{ik} = c_i \end{aligned}$$

これにより、その組 $\left\langle \left. \dfrac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_p \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ は線形独立である。

一方で、その集合 $V(\psi)$ は開集合であるので、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\psi(p), \varepsilon) \subseteq V(\psi)$ が成り立つ[*55]。そこで、その関数 $f \circ \psi^{-1}$ は $C^2$ 級でもあるので、Taylor の定理より $h = \left( h^i \right)_{i \in \varLambda_n} : V\left( \psi^{-1} | U(\psi(p), \varepsilon) \right) \to \mathbb{R}; q \mapsto \psi(q) - \psi(p)$ とすれば、$\forall q \in V\left( \psi^{-1} | U(\psi(p), \varepsilon) \right) \exists c \in (0,1)$ に対し、次式が成り立つ、

$$\begin{aligned} f \circ \psi^{-1} (\psi(q)) = f \circ \psi^{-1} (\psi(p)) &+ \partial_k \left( f \circ \psi^{-1} \right) (\psi(p)) h^k(q) \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{kl} \left( f \circ \psi^{-1} \right) (\psi(p) + ch(q)) h^k(q) h^l(q) \end{aligned}$$

即ち、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} f(q) &= f(p) + \partial_k \left( f \circ \psi^{-1} \right) \circ \psi(p) h^k(q) + \frac{1}{2} \partial_{kl} \left( f \circ \psi^{-1} \right) (\psi(p) + ch(q)) h^k(q) h^l(q) \\ &= f(p) + \frac{\partial f}{\partial \psi^k}(p) h^k(q) + \frac{1}{2} \partial_{kl} \left( f \circ \psi^{-1} \right) (\psi(p) + ch(q)) h^k(q) h^l(q) \end{aligned}$$

これを写像とみれば、次のようになる。

$$f | V\left( \psi^{-1} | U(\psi(p), \varepsilon) \right) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial \psi^k}(p) h^k + \frac{1}{2} \partial_{kl} \left( f \circ \psi^{-1} \right) (\psi(p) + ch) h^k h^l$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} v(f) &= v\left( f(p) + \frac{\partial f}{\partial \psi^k}(p) h^k + \frac{1}{2} \partial_{kl} \left( f \circ \psi^{-1} \right) (\psi(p) + ch) h^k h^l \right) \\ &= v(f(p)) + \frac{\partial f}{\partial \psi^k}(p) v\left( h^k \right) + \frac{1}{2} v\left( \partial_{kl} \left( f \circ \psi^{-1} \right) (\psi(p) + ch) h^k h^l \right) \\ &= v(f(p)) + \frac{\partial f}{\partial \psi^k}(p) v\left( h^k \right) \end{aligned}$$

[*55] $U(\psi(p), \varepsilon)$ は中心 $\psi(p)$、半径 $\varepsilon$ の開球のこと。

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}v\left(\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\right)\right)h^{k}\left(p\right)h^{l}\left(p\right)\\
&+\frac{1}{2}\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\left(p\right)\right)v\left(h^{k}\right)h^{l}\left(p\right)\\
&+\frac{1}{2}\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\left(p\right)\right)h^{k}\left(p\right)v\left(h^{l}\right)\\
=&\,v\left(f\left(p\right)\right)+\frac{\partial f}{\partial\psi^{k}}\left(p\right)v\left(\psi^{k}-\psi^{k}\left(p\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}v\left(\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\right)\right)\left(\psi^{k}\left(p\right)-\psi^{k}\left(p\right)\right)\left(\psi^{l}\left(p\right)-\psi^{l}\left(p\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\left(p\right)\right)v\left(\psi^{k}-\psi^{k}\left(p\right)\right)\left(\psi^{l}\left(p\right)-\psi^{l}\left(p\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\left(p\right)\right)\left(\psi^{k}\left(p\right)-\psi^{k}\left(p\right)\right)v\left(\psi^{l}-\psi^{l}\left(p\right)\right)\\
=&\,v\left(f\left(p\right)\right)+\frac{\partial f}{\partial\psi^{k}}\left(p\right)\left(v\left(\psi^{k}\right)-v\left(\psi^{k}\left(p\right)\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}v\left(\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\right)\right)\left(\psi^{k}\left(p\right)-\psi^{k}\left(p\right)\right)\left(\psi^{l}\left(p\right)-\psi^{l}\left(p\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\left(p\right)\right)\left(v\left(\psi^{k}\right)-v\left(\psi^{k}\left(p\right)\right)\right)\left(\psi^{l}\left(p\right)-\psi^{l}\left(p\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\left(p\right)\right)\left(\psi^{k}\left(p\right)-\psi^{k}\left(p\right)\right)\left(v\left(\psi^{l}\right)-v\left(\psi^{l}\left(p\right)\right)\right)\\
=&\,0+\frac{\partial f}{\partial\psi^{k}}\left(p\right)\left(v\left(\psi^{k}\right)-0\right)\\
&+\frac{1}{2}v\left(\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\right)\right)\cdot 0\cdot 0\\
&+\frac{1}{2}\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\left(p\right)\right)\left(v\left(\psi^{k}\right)-v\left(\psi^{k}\left(p\right)\right)\right)\cdot 0\\
&+\frac{1}{2}\partial_{kl}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)+ch\left(p\right)\right)\cdot 0\cdot\left(v\left(\psi^{l}\right)-v\left(\psi^{l}\left(p\right)\right)\right)\\
=&\,v\left(\psi^{k}\right)\frac{\partial f}{\partial\psi^{k}}\left(p\right)=v\left(\psi^{k}\right)\left.\frac{\partial}{\partial\psi^{k}}\right|_{p}\left(f\right)
\end{aligned}
$$

これにより、次式が成り立つので、

$$v=v\left(\psi^{k}\right)\left.\frac{\partial}{\partial\psi^{k}}\right|_{p}$$

その接 vector 空間 $T_{p}\mathcal{M}$ はそれらの接 vector たち $\left.\frac{\partial}{\partial\psi^{i}}\right|_{p}$ によって張られている。

よって、その組 $\left\langle\left.\frac{\partial}{\partial\psi^{i}}\right|_{p}\right\rangle_{i\in\varLambda_{n}}$ はその接 vector 空間 $T_{p}\mathcal{M}$ の基底で $k\in\varLambda_{n}$ として、$\forall v\in T_{p}\mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。

$$v=v\left(\psi^{k}\right)\left.\frac{\partial}{\partial\psi^{k}}\right|_{p}$$

特に、$\dim T_{p}\mathcal{M}=n$ が成り立つ。 □

**定理 3.3.11.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における座標近傍 $\left(U_{\alpha},\psi_{\alpha}\right)$ での自然標構 $\left\langle\left.\frac{\partial}{\partial\psi_{\alpha}^{i}}\right|_{p}\right\rangle_{i\in\varLambda_{n}}$ 、その元 $p$ における座標近傍 $\left(U_{\beta},\psi_{\beta}\right)$ での自然標構 $\left\langle\left.\frac{\partial}{\partial\psi_{\beta}^{i}}\right|_{p}\right\rangle_{i\in\varLambda_{n}}$

について、$\forall v \in T_p\mathcal{M}\forall i \in \varLambda_n$ に対し、次式が成り立つ。

$$v\left(\psi_\beta^i\right) = \frac{\partial \psi_\beta^i}{\partial \psi_\alpha^k}(p)\, v\left(\psi_\alpha^k\right)$$

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における座標近傍 $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ での自然標構 $\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha^i}\right|_p \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ 、その元 $p$ における座標近傍 $(U_\beta, \psi_\beta)$ での自然標構 $\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial \psi_\beta^i}\right|_p \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ について、$\forall v \in T_p\mathcal{M}\forall i \in \varLambda_n$ に対し、定理 3.3.10 より次のようになる。

$$v = v\left(\psi_\beta^l\right) \left.\frac{\partial}{\partial \psi_\beta^l}\right|_p$$

一方で、$\forall f \in C_p^\infty \mathcal{M}$ に対し、定理 3.2.2 より次のようになるので、

$$\begin{aligned}
v(f) &= v\left(\psi_\alpha^k\right) \left.\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha^k}\right|_p (f) \\
&= v\left(\psi_\alpha^k\right) \frac{\partial f}{\partial \psi_\alpha^k}(p) \\
&= v\left(\psi_\alpha^k\right) \frac{\partial \psi_\beta^l}{\partial \psi_\alpha^k}(p) \frac{\partial f}{\partial \psi_\beta^l}(p) \\
&= v\left(\psi_\alpha^k\right) \frac{\partial \psi_\beta^l}{\partial \psi_\alpha^k}(p) \left.\frac{\partial}{\partial \psi_\beta^l}\right|_p (f)
\end{aligned}$$

したがって、次式が成り立つ。

$$v = v\left(\psi_\alpha^k\right) \frac{\partial \psi_\beta^l}{\partial \psi_\alpha^k}(p) \left.\frac{\partial}{\partial \psi_\beta^l}\right|_p = \frac{\partial \psi_\beta^l}{\partial \psi_\alpha^k}(p)\, v\left(\psi_\alpha^k\right) \left.\frac{\partial}{\partial \psi_\beta^l}\right|_p$$

定理 3.3.10 より成分を比較して、よって、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、次式が成り立つ。

$$v\left(\psi_\beta^i\right) = \frac{\partial \psi_\beta^i}{\partial \psi_\alpha^k}(p)\, v\left(\psi_\alpha^k\right)$$

□

### 3.3.3 自然な線形同型写像 $\iota : T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

**定理 3.3.12.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ は $n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体である。

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ が与えられたとき、これはもちろん $n$ 次元位相多様体である。そこで、例えば、$\varepsilon = \langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$、$\mathbf{e}_j = (\delta_{ij})_{i \in \varLambda_n}$ なるその $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の基底 $\varepsilon$ を用いた次のような座標近傍系 $\{(\mathbb{R}^n, 1_\varepsilon)\}$ はその位相多様体 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ に $C^\infty$ 可微分構造を入れている。

$$1_\varepsilon = \left(1_\varepsilon^i\right)_{i \in \varLambda_n}, \quad 1_\varepsilon^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; a_k \mathbf{e}_k \mapsto a_i$$

□

**定理 3.3.13.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ は $n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体であった。そこで、$\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ に対し、$\varepsilon = \langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の基底 $\varepsilon$ を用いた次のような写像 $\iota$ は自然な線形同型写像である[*56]。

$$\begin{aligned} \iota : T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; v \mapsto v\left(1_\varepsilon^k\right)\mathbf{e}_k, \\ 1_\varepsilon = \left(1_\varepsilon^i\right)_{i \in \varLambda_n}, \quad 1_\varepsilon^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; a_k \mathbf{e}_k \mapsto a_i \end{aligned}$$

このことから、しばしば $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ と同一視することもある。このとき、$\forall v \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ に対し、次のようになる。

$$v = v\left(1_\varepsilon^k\right) \left.\frac{\partial}{\partial 1_\varepsilon^k}\right|_{\mathbf{p}} = v\left(1_\varepsilon^k\right)\mathbf{e}_k$$

**証明.** $n$ 次元 Euclid 空間 $E^n$ における位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{O}_{d_{E^n}})$ は $n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体であった。そこで、$\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ に対し、$\varepsilon = \langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の基底 $\varepsilon$ を用いた次のような写像 $\iota$ について、

$$\begin{aligned} \iota : T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; v \mapsto v\left(1_\varepsilon^l\right)\mathbf{e}_l, \\ 1_\varepsilon = \left(1_\varepsilon^i\right)_{i \in \varLambda_n}, \quad 1_\varepsilon^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; b_l \mathbf{e}_l \mapsto b_i \end{aligned}$$

その組 $(\mathbb{R}^n, 1_\varepsilon)$ はその点 $\mathbf{p}$ における座標近傍で $1_\varepsilon^i \in C_p^\infty \mathbb{R}^n$ が成り立つ。ゆえに、$\forall v \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ に対し、定理 3.3.10 より次式が成り立つ。

$$v = v\left(1_\varepsilon^l\right) \left.\frac{\partial}{\partial 1_\varepsilon^l}\right|_{\mathbf{p}}$$

$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R} \forall v, w \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ に対し、次のようになるので、

$$\begin{aligned} \iota(\xi v + \eta w) &= (\xi v + \eta w)\left(1_\varepsilon^l\right)\mathbf{e}_l \\ &= \xi v\left(1_\varepsilon^l\right)\mathbf{e}_l + \eta w\left(1_\varepsilon^l\right)\mathbf{e}_l \\ &= \xi \iota(v) + \eta \iota(w) \end{aligned}$$

その写像 $\iota$ は線形写像である。

さらに、定理 3.3.10 より $\dim T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n = n$ が成り立つので、その線形写像 $\iota$ が線形同型写像であることを示すにはその線形写像 $\iota$ が単射であることを示せばよい。$\forall v, w \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ に対し、$v \neq w$ が成り立つなら、定理 3.3.10 より次式が成り立つので、

$$v = v\left(1_\varepsilon^l\right) \left.\frac{\partial}{\partial 1_\varepsilon^l}\right|_{\mathbf{p}}, \quad w = w\left(1_\varepsilon^l\right) \left.\frac{\partial}{\partial 1_\varepsilon^l}\right|_{\mathbf{p}}$$

$\exists i \in \varLambda_n$ に対し、$v\left(1_\varepsilon^i\right) \neq w\left(1_\varepsilon^i\right)$ が成り立つ。これにより、次のようになるので、

$$\iota(v) = v\left(1_\varepsilon^l\right)\mathbf{e}_l \neq w\left(1_\varepsilon^l\right)\mathbf{e}_l = \iota(w)$$

その線形写像 $\iota$ は単射である。よって、その線形写像 $\iota$ は線形同型写像である。

[*56] 線形代数学で線形同型写像を特徴づけるのに基底を予め決めておく必要がないようなものを自然な線形同型写像などといったりする。

さらに、その $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の $\delta = \langle \mathbf{d}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なる基底 $\delta$ を用いて、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、$\mathbf{d}_i = P_{ik}\mathbf{e}_k$ とおくと、その行列 $\left( P_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$ の逆行列 $\left( Q_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$ が存在して、次式が成り立つ。

$$\mathbf{e}_i = Q_{ik}\mathbf{d}_k, \quad P_{ik}Q_{kj} = Q_{il}P_{lj} = \delta_{ij}$$

ここで、次のように写像 $1_\delta$ が定義されれば、

$$1_\delta = \left( 1_\delta^i \right)_{i \in \varLambda_n}, \quad 1_\delta^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; a_k\mathbf{d}_k \mapsto a_i$$

その組 $(\mathbb{R}^n, 1_\delta)$ はその点 $\mathbf{p}$ における座標近傍で $1_\delta^i \in C_p^\infty \mathbb{R}^n$ が成り立つ。$\forall a_k\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^n$ に対し、$1_\delta^i \left( a_k\mathbf{d}_k \right) = a_i$ に注意すれば、次のようになる。

$$1_\varepsilon^i \left( a_k\mathbf{d}_k \right) = 1_\varepsilon^i \left( a_k P_{kl}\mathbf{e}_l \right) = a_k P_{ki} = 1_\delta^k \left( a_k\mathbf{d}_k \right) P_{ki}$$

したがって、$1_\varepsilon^i = 1_\delta^k P_{ki}$ が成り立つ。このとき、次のようになるので、

$$\begin{aligned} \iota(v) &= v\left( 1_\varepsilon^l \right) \mathbf{e}^l \\ &= v\left( 1_\delta^k P_{kl} \right) Q_{lm}\mathbf{d}_m \\ &= v\left( 1_\delta^k \right) P_{kl}Q_{lm}\mathbf{d}_m \\ &= v\left( 1_\delta^k \right) \delta_{km}\mathbf{d}_m \\ &= v\left( 1_\delta^k \right) \mathbf{d}_k \end{aligned}$$

よって、その線形同型写像 $\iota$ は自然な線形同型写像でもある。 □

### 3.3.4 余接 vector 空間

**定義 3.3.6.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における接 vector 空間 $T_p\mathcal{M}$ の双対空間 $T_p^*\mathcal{M}$ をその元 $p$ におけるその多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の余接 vector 空間といい[57]、その元をその元 $p$ の余接 vector などという。

**定義 3.3.7.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、$\forall f \in C_p^\infty \mathcal{M}$ に対し、次のように写像 $df_p$ が定義されよう。

$$df_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}; v \mapsto v(f)$$

その写像 $df_p$ をその写像 $f$ のその元 $p$ における微分という。

**定理 3.3.14.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、$\forall f \in C_p^\infty \mathcal{M}$ に対し、その写像 $f$ のその元 $p$ における微分 $df_p$ はその元 $p$ における余接 vector である。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、$\forall f \in C_p^\infty \mathcal{M}$ に対し、その写像 $f$ のその元 $p$ における微分 $df_p$ はその接 vector 空間 $T_p\mathcal{M}$ からその係数体 $\mathbb{R}$ への写像なので、あとは、これが線形写像であることを示せばよく、$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R} \forall v, w \in T_p\mathcal{M}$ に対し、次のようになることから従う。

$$\begin{aligned} df_p(\xi v + \eta w) &= (\xi v + \eta w)(f) \\ &= \xi v(f) + \eta w(f) \end{aligned}$$

[57] 定理 3.3.7 に注意しよう。

$$= \xi df_p(v) + \eta df_p(w)$$

□

**定理 3.3.15.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における $\psi = \left( \psi^i \right)_{i \in \varLambda_n}$ なる座標近傍 $(U, \psi)$ を用いた組 $\left\langle d\psi_p^i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその接 vector 空間 $T_p\mathcal{M}$ のその自然標構 $\left\langle \left. \frac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_p \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ の双対基底となる。したがって、その組 $\left\langle d\psi_p^i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその余接 vector 空間 $T_p^*\mathcal{M}$ の基底で $k \in \varLambda_n$ として、$\forall \eta \in T_p^*\mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\eta = \eta \left( \left. \frac{\partial}{\partial \psi^k} \right|_p \right) d\psi_p^k$$

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における $\psi = \left( \psi^i \right)_{i \in \varLambda_n}$ なる座標近傍 $(U, \psi)$ を用いた組 $\left\langle d\psi_p^i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき、その接 vector 空間 $T_p\mathcal{M}$ のその自然標構 $\left\langle \left. \frac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_p \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ を用いれば、$\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し、次のようになることから、

$$\begin{aligned} d\psi_p^i \left( \left. \frac{\partial}{\partial \psi^j} \right|_p \right) &= \left. \frac{\partial}{\partial \psi^j} \right|_p \left( \psi^i \right) = \frac{\partial \psi^i}{\partial \psi^j} \\ &= \partial_j \left( \psi^i \circ \psi^{-1} \right) \circ \psi \\ &= \partial_j \mathrm{pr}_i \circ \psi = \delta_{ij} \end{aligned}$$

その組 $\left\langle d\psi_p^i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその自然標構の双対基底となる。

これにより、$\forall \eta \in T_p^*\mathcal{M}$ に対し、$\eta = \eta_k d\psi_p^k$ とおかれれば、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、$k \in \varLambda_n$ として次のようになることから、

$$\eta \left( \left. \frac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_p \right) = \eta_k d\psi_p^k \left( \left. \frac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_p \right) = \eta_k \delta_{ik} = \eta_i$$

次式が成り立つ。

$$\eta = \eta \left( \left. \frac{\partial}{\partial \psi^k} \right|_p \right) d\psi_p^k$$

□

**定理 3.3.16.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、$\forall f \in C_p^\infty \mathcal{M}$ に対し、その写像 $f$ のその元 $p$ における微分 $df_p$ はその元 $p$ における $\psi = \left( \psi^i \right)_{i \in \varLambda_n}$ なる座標近傍 $(U, \psi)$ を用いた次式を満たす。

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial \psi^k}(p) d\psi_p^k$$

**証明.** 定理 3.3.15 と $df_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial \psi^k} \right|_p \right) = \frac{\partial f}{\partial \psi^k}(p)$ より直ちに従う。 □

**定理 3.3.17.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における座標近傍 $(U_\alpha,\psi_\alpha)$ での自然標構の双対基底 $\left\langle d{\psi_\alpha^i}_p\right\rangle_{i\in\Lambda_n}$、その元 $p$ における座標近傍 $(U_\beta,\psi_\beta)$ での自然標構の双対基底 $\left\langle d{\psi_\beta^i}_p\right\rangle_{i\in\Lambda_n}$ について、$\forall\eta\in T_p^*\mathcal{M}\forall i\in\Lambda_n$ に対し、次式が成り立つ。

$$\eta\left(\left.\frac{\partial}{\partial\psi_\beta^i}\right|_p\right)=\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^i}(p)\eta\left(\left.\frac{\partial}{\partial\psi_\alpha^k}\right|_p\right)$$

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、その元 $p$ における座標近傍 $(U_\alpha,\psi_\alpha)$ での自然標構の双対基底 $\left\langle d{\psi_\alpha^i}_p\right\rangle_{i\in\Lambda_n}$、その元 $p$ における座標近傍 $(U_\beta,\psi_\beta)$ での自然標構の双対基底 $\left\langle d{\psi_\beta^i}_p\right\rangle_{i\in\Lambda_n}$ について、$\forall\eta\in T_p^*\mathcal{M}\forall i\in\Lambda_n$ に対し、定理 3.3.10、定理 3.3.15 より次のようになることから従う。

$$\begin{aligned}\eta\left(\left.\frac{\partial}{\partial\psi_\beta^i}\right|_p\right)&=\eta\left(\left.\frac{\partial}{\partial\psi_\beta^i}\right|_p\left(\psi_\alpha^k\right)\left.\frac{\partial}{\partial\psi_\alpha^k}\right|_p\right)\\&=\eta\left(\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^i}(p)\left.\frac{\partial}{\partial\psi_\alpha^k}\right|_p\right)\\&=\frac{\partial\psi_\alpha^k}{\partial\psi_\beta^i}(p)\eta\left(\left.\frac{\partial}{\partial\psi_\alpha^k}\right|_p\right)\end{aligned}$$

□

**定理 3.3.18.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、$U\in\mathbf{V}(p)\cap\mathfrak{O}$、$f=\left(f^i\right)_{i\in\Lambda_n}$、$f^i\in C_p^\infty\mathcal{M}$ なる任意の写像 $f:V\rightarrow\mathbb{R}^n$ に対し、$i\in\Lambda_n$ に対する微分たち $df_p^i$ が線形独立であるならそのときに限り、$\exists U'\in\mathbf{V}(p)\cap\mathfrak{O}$ に対し、その組 $(U',f)$ がその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ のその元 $p$ まわりの座標近傍である。

**証明.** $n$ 次元多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ の台集合 $\mathcal{M}$ の元 $p$ が与えられたとき、$U\in\mathbf{V}(p)\cap\mathfrak{O}$、$f=\left(f^i\right)_{i\in\Lambda_n}$、$f^i\in C_p^\infty\mathcal{M}$ なる任意の写像 $f:V\rightarrow\mathbb{R}^n$ に対し、$i\in\Lambda_n$ に対する微分たち $df_p^i$ が線形独立であるなら、$\psi=\left(\psi^i\right)_{i\in\Lambda_n}$ なるその元 $p$ のまわりの座標近傍 $(U,\psi)$ を用いた連立一次方程式 $\frac{\partial f^k}{\partial\psi^i}(p)c_k=0$ が考えられると、定理 3.3.17 より次のようになることから、

$$0=\frac{\partial f^k}{\partial\psi^i}(p)c_kd\psi_p^l=c_k\frac{\partial f^k}{\partial\psi^i}(p)d\psi_p^l=c_kdf_p^k$$

仮定より $\forall i\in\Lambda_n$ に対し、$c_i=0$ が成り立つ、即ち、その連立一次方程式 $\frac{\partial f^k}{\partial\psi^i}(p)c_k=0$ は自明な解しかもたない。これにより、その行列 $\left(\frac{\partial f^j}{\partial\psi^i}(p)\right)_{(i,j)\in\Lambda_n^2}$ は正則行列でこれの転置行列も正則行列となるので、$\frac{Df}{D\psi}(p)\neq 0$ が成り立つ。定理 3.2.8 よりよって、$\exists U'\in\mathbf{V}(p)\cap\mathfrak{O}$ に対し、その組 $(U',f)$ がその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ のその元 $p$ まわりの座標近傍となる。

逆に、$\exists U'\in\mathbf{V}(p)\cap\mathfrak{O}$ に対し、その組 $(U',f)$ がその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ のその元 $p$ まわりの座標近傍であるなら、定理 3.2.6 より $1=\frac{Df}{Df}$ かつ定理 3.2.5 より $\frac{Df}{Df}=\det A_{(U,\psi)\rightarrow(U',f)}\frac{Df}{D\psi}$ が成り立つので、次のようになる。

$$1=\frac{Df}{Df}=\det A_{(U,\psi)\rightarrow(U',f)}\frac{Df}{D\psi}$$

これにより、$\dfrac{Df}{D\psi}(p) \neq 0$ でその行列 $\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial \psi^j}(p)\right)_{(i,j)\in \varLambda_n^2}$ は正則行列となりこれの転置行列も正則行列となる。ここで、$c_k df_p^k = 0$ のとき、定理 3.3.17 より次のようになることから、

$$0 = c_k df_p^k = c_k \frac{\partial f^k}{\partial \psi^l} d\psi_p^l$$

定理 3.3.15 より連立一次方程式 $\dfrac{\partial f^k}{\partial \psi^l} c_k = 0$ が得られるが、先ほどの議論よりその行列 $\left(\dfrac{\partial f^j}{\partial \psi^i}(p)\right)_{(i,j)\in \varLambda_n^2}$ は正則行列なので、その連立一次方程式は自明な解しかもたない。これにより、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、$c_i = 0$ が成り立つので、$i \in \varLambda_n$ に対する微分たち $df_p^i$ は線形独立である。 □

# 参考文献


[1] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965. 第 36 刷 p38-40, 43-44 ISBN978-4-7853-1305-0

[2] 新井朝雄, 相対性理論の数理, 日本評論会, 2021. 第 1 版第 1 刷 p164-166, 175-183, 201-203 ISBN978-4-535-78928-9

[3] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016. 初版 2 刷 p277-303 ISBN978-4-320-11160-8

## 3.4 多様体間の写像

### 3.4.1 可微分写像

**定義 3.4.1.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への連続写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、$\forall g\in C_{\varphi(p)}^\infty\mathcal{N}$ に対し、その写像 $g$ も連続であることから、その合成写像 $g\circ\varphi$ も連続となる。これにより、写像 $\varphi^*$ が次のように定義されよう。

$$\varphi^*=\bullet\circ\varphi=C_{\varphi(p)}^\infty\mathcal{N}\rightarrow C_p\mathcal{M};g\mapsto g\circ\varphi$$

このとき、写像 $\varphi^*g$ をその写像 $\varphi$ による写像 $g$ の引き戻し、pull-back という。

**定義 3.4.2.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への連続写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$p\in\mathcal{M}$ なる元 $\varphi(p)$ のその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ における開近傍 $V$ で定義された任意の $C^r$ 級写像 $f:V\rightarrow\mathbb{R}$ に対し、その写像 $\varphi$ が連続なので、定理 1.3.1 よりその値域 $V\left(\varphi^{-1}|V\right)$ もその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ におけるその元 $p$ の開近傍となる。このときの引き戻し $\varphi^*f:V\left(\varphi^{-1}|V\right)\rightarrow\mathbb{R}$ も、その写像たち $\varphi$、$f$ が連続なので、連続である。これに加えて、その写像 $\varphi^*f$ がその元 $p$ の開近傍で $C^r$ 級であるとき、その写像 $\varphi$ はその元 $p$ で $C^r$ 級であるといい、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、その元 $p$ でその写像 $\varphi$ が $C^r$ 級であるとき、その写像 $\varphi$ はその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への $C^r$ 級写像であるという。特に、その写像 $\varphi$ がその元 $p$ で $C^\infty$ 級である、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への $C^\infty$ 級写像であるとき、それぞれその写像 $\varphi$ がその元 $p$ で可微分である、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像であるという。

**定理 3.4.1.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への連続写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、$p\in U$、$\varphi(p)\in V$、$\chi=(\chi_i)_{i\in\varLambda_n}$ なるそれらの多様体たち $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ におけるある座標近傍系たち $(U,\psi)$、$(V,\chi)$ を用いて、その写像 $\varphi$ がその元 $p$ で $C^r$ 級であるなら、そのときに限り、$i\in\varLambda_n$ なる関数たち $\varphi^*\chi_i\circ\psi^{-1}$ がその元 $p$ で $C^r$ 級である。このとき、これらの座標近傍系たち $(U,\psi)$、$(V,\chi)$ の取り方に依らない。

なお、上の主張での関係は次のように与えられる。

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{M} & & & \mathcal{N} \\
 & U \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[rrr, "\varphi"] \arrow[ddd, "\psi"] & & & V \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & \\
p \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rrr, mapsto, "\varphi"] \arrow[ddd, mapsto, "\psi"] & & & \varphi(p) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & & \\
 & & \mathbb{R}^m & & & \mathbb{R}^n \\
 & V(\psi) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[rrr, "\varphi^*\chi\circ\psi^{-1}"] & & & V(\chi) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[uuu, "\chi"] & \\
\psi(p) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rrr, mapsto, "\varphi^*\chi\circ\psi^{-1}"] & & & \varphi^*\chi(p) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[uuu, mapsto, "\chi"] & &
\end{tikzcd}$$

**証明.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への連続写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、$p\in U$、$\varphi(p)\in V$、$\chi=(\chi_i)_{i\in\varLambda_n}$ なるそれらの多様体たち $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ におけるある座標近傍系たち $(U,\psi)$、$(V,\chi)$ を用いて、その写像 $\varphi$ がその元 $p$ で $C^r$ 級であるなら、その元 $\varphi(p)$ のその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ における開近傍 $W$ で定義された任意の $C^r$ 級写像 $g:W\rightarrow\mathbb{R}$ に対し、その写像 $\varphi^*g$ がその元 $p$ の開近傍で $C^r$ 級となる、即ち、その関数 $\varphi^*g\circ\psi^{-1}$ がその元 $\psi(p)$ の開近傍で $C^r$ 級となる。特に、定理 3.2.1 より $\forall i\in\varLambda_n$ に対し、その関数 $\chi_i\circ\varphi\circ\psi^{-1}$ がその元 $\psi(p)$ の開近傍で $C^r$ 級となる。

逆に、$i\in\varLambda_n$ なる関数たち $\chi_i\circ\varphi\circ\psi^{-1}$ がその元 $p$ で $C^r$ 級であるなら、その元 $\varphi(p)$ のその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ における開近傍 $W$ で定義された任意の $C^r$ 級写像 $g:W\rightarrow\mathbb{R}$ に対し、定義 3.2.1 よりその関数 $g\circ\chi^{-1}$ もその元 $\varphi(p)$ の開近傍で $C^r$ 級であるので、その合成関数 $\left(g\circ\chi^{-1}\right)\circ\left(\chi\circ\varphi\circ\psi^{-1}\right)$ もその点 $\psi^{-1}(p)$ で $C^r$ 級となる、即ち、その写像 $\varphi^*f$ もその元 $p$ で $C^r$ 級となる。これはその写像 $\varphi$ がその元 $p$ で $C^r$ 級となることを意味する。

このとき、これらの座標近傍系たち $(U,\psi)$、$(V,\chi)$ とは別に座標近傍系 $(U',\psi')$、$(V',\chi')$ をとったとき、仮定よりそれらの合成関数たち $\psi\circ\psi'^{-1}$、$\chi'\circ\chi^{-1}$ も $C^{\infty}$ 級となるので、その合成関数 $\left(\chi'\circ\chi^{-1}\right)\circ\left(\chi\circ\varphi\circ\psi^{-1}\right)\circ(\psi\circ\psi')$ も $C^r$ 級となる、即ち、その関数 $\chi'\circ\varphi\circ\psi'$ も $C^r$ 級となることから、これで示すべきことがすべて示された。 $\square$

**定義 3.4.3.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への連続写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、次のことを満たすようなもの $\varphi$ をその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への微分同相写像、微分同型写像、diffeomorphism などという。

- その写像 $\varphi$ は全単射である。
- その写像 $\varphi$ はその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像である。
- その逆写像 $\varphi^{-1}$ はその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ からその多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ への可微分写像である。

さらに、多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ から多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への微分同相写像が存在するとき、その 2 つの多様体たち $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ は微分同相である、微分同型である、diffeomorphic であるなどといい、ここでは、$(\mathcal{M},\mathfrak{O})\simeq_{\mathrm{diffeo}}(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ と書くことにする[*58]。

**定理 3.4.2.** 上で述べられた関係 $\simeq_{\mathrm{diffeo}}$ は同値関係である、即ち、次のことが成り立つ。

- その関係 $\simeq_{\mathrm{diffeo}}$ は反射的である、即ち、$(\mathcal{M},\mathfrak{O})\simeq_{\mathrm{diffeo}}(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ が成り立つ。
- その関係 $\simeq_{\mathrm{diffeo}}$ は対称的である、即ち、$(\mathcal{M},\mathfrak{O})\simeq_{\mathrm{diffeo}}(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ が成り立つなら、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})\simeq_{\mathrm{diffeo}}(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ が成り立つ。
- その関係 $\simeq_{\mathrm{diffeo}}$ は推移的である、即ち、$(\mathcal{M},\mathfrak{O})\simeq_{\mathrm{diffeo}}(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ かつ $(\mathcal{N},\mathfrak{P})\simeq_{\mathrm{diffeo}}(\mathcal{O},\mathfrak{Q})$ が成り立つなら、$(\mathcal{M},\mathfrak{O})\simeq_{\mathrm{diffeo}}(\mathcal{O},\mathfrak{Q})$ が成り立つ。

**証明.** 上で述べられた関係 $\simeq_{\mathrm{diffeo}}$ について、連続写像 $I_{\mathcal{M}}:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{M};p\mapsto p$ が考えられれば、その関係 $\simeq_{\mathrm{diffeo}}$ は反射的であることが分かる。微分同相写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ の逆写像も微分同相写像となっていることから、その関係 $\simeq_{\mathrm{diffeo}}$ は対称的であることが分かる。微分同相写像たち $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$、$\chi:\mathcal{N}\rightarrow\mathcal{O}$ が与えられたとき、その合成写像 $\chi\circ\varphi$ も全単射であるかつ、可微分同相写像でその逆写像も可微分同相写像であるこ

[*58] 多くの場合は $\mathcal{M}\simeq\mathcal{N}$ と書くらしい。

とから、その関係 $\simeq_{\mathrm{diffeo}}$ は推移的であることが分かる。 $\square$

### 3.4.2 可微分写像の微分

**定理 3.4.3.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}\forall f\in C_{\varphi(p)}^{\infty}\mathcal{N}\forall v\in T_{p}\mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。

$$v\circ\varphi^{*}=\begin{matrix}C_{\varphi(p)}^{\infty}\mathcal{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$}\\ g & \longmapsto & v\left(\varphi^{*}g\right)\end{matrix}\in T_{\varphi(p)}\mathcal{N}$$

しかもその式はちゃんと定義されている。

**証明.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}\forall g:W\rightarrow\mathbb{R}\in C_{\varphi(p)}^{\infty}\mathcal{N}\forall v\in T_{p}\mathcal{M}$ に対し、その写像 $\varphi$ が可微分写像なので、その引き戻し $\varphi^{*}g:V\left(\varphi^{-1}|W\right)\rightarrow\mathbb{R}$ も $C^{\infty}$ 級写像となる。ここで、その写像 $\varphi$ は連続なので、定理 1.3.1、定理 1.3.3 よりその値域 $V\left(\varphi^{-1}|W\right)$ はその元 $p$ の開近傍である。これにより、$\varphi^{*}g\in C_{p}^{\infty}\mathcal{M}$ が成り立つ。これにより、実数 $v\left(\varphi^{*}g\right)$ が定義されることができる。

このとき、$\forall a,b\in\mathbb{R}\forall f,g\in C_{\varphi(p)}^{\infty}\mathcal{N}$ に対し、次のようになることから、

$$\begin{aligned}v\circ\varphi^{*}\left(af+bg\right)&=v\left(\varphi^{*}\left(af+bg\right)\right)\\&=v\left(\left(af+bg\right)\circ\varphi\right)\\&=v\left(af\circ\varphi+bg\circ\varphi\right)\\&=av\left(f\circ\varphi\right)+bv\left(g\circ\varphi\right)\\&=av\left(\varphi^{*}f\right)+bv\left(\varphi^{*}g\right)\\&=av\circ\varphi^{*}(f)+bv\circ\varphi^{*}(g)\end{aligned}$$

その写像 $v\circ\varphi^{*}$ は線形性をもつ。さらに、$\forall f,g\in C_{\varphi(p)}^{\infty}\mathcal{N}$ に対し、次のようになることから、

$$\begin{aligned}v\circ\varphi^{*}\left(fg\right)&=v\left(\varphi^{*}\left(fg\right)\right)\\&=v\left(fg\circ\varphi\right)\\&=v\left(f\circ\varphi g\circ\varphi\right)\\&=v\left(\varphi^{*}f\varphi^{*}g\right)\\&=v\left(\varphi^{*}f\right)\varphi^{*}g(p)+\varphi^{*}f(p)v\left(\varphi^{*}g\right)\\&=v\left(\varphi^{*}f\right)g\left(\varphi(p)\right)+f\left(\varphi(p)\right)v\left(\varphi^{*}g\right)\\&=v\circ\varphi^{*}(f)g\left(\varphi(p)\right)+f\left(\varphi(p)\right)v\circ\varphi^{*}(g)\end{aligned}$$

その写像 $v\circ\varphi^{*}$ は Leibniz 則を満たす。$\forall f,g\in C_{\varphi(p)}^{\infty}\mathcal{N}$ に対し、$f\sim_{\varphi(p)}g$ が成り立つなら、その元 $\varphi(p)$ のある開近傍 $W$ が存在して $f|W=g|W$ が成り立つ。このとき、その引き戻したち $\varphi^{*}\left(f|W\right)$、$\varphi^{*}\left(g|W\right)$ の定義域がどちらも $V\left(\varphi^{-1}|W\right)$ と考えられるので、$\varphi^{*}f\sim_{p}\varphi^{*}f|V\left(\varphi^{-1}|W\right)$、$\varphi^{*}g\sim_{p}\varphi^{*}g|V\left(\varphi^{-1}|W\right)$ より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}v\circ\varphi^{*}\left(f\right)&=v\left(\varphi^{*}f|V\left(\varphi^{-1}|W\right)\right)\\&=v\left(\varphi^{*}\left(f|W\right)\right)\\&=v\left(\varphi^{*}\left(g|W\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= v\left(\varphi^* g|V\left(\varphi^{-1}|W\right)\right) \\
&= v \circ \varphi^*(g)
\end{aligned}
$$

以上の議論と定理 3.3.6 よりその写像 $v \circ \varphi^*$ は $v \circ \varphi^* \in T_{\varphi(p)}\mathcal{N}$ を満たす。 □

**定義 3.4.4.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p \in \mathcal{M}$ に対し、次式のように定義される写像 $\left.\varphi_*\right|_p$ をその可微分写像 $\varphi$ のその元 $p$ における微分という。

$$
\left.\varphi_*\right|_p = \begin{array}{ccc} T_p\mathcal{M} & \rightarrow & T_{\varphi(p)}\mathcal{N} \\ \Psi & & \Psi \\ v & \longmapsto & v \circ \varphi^* \end{array}, \quad v \circ \varphi^* = \begin{array}{ccc} C^\infty_{\varphi(p)}\mathcal{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ g & \longmapsto & v\left(\varphi^* g\right) \end{array}
$$

**定理 3.4.4.** $m$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall p \in \mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。

$$
\left.I_{\mathcal{M}*}\right|_p = I_{T_p\mathcal{M}}
$$

**証明.** $m$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ が与えられたとき、$\forall p \in \mathcal{M}\forall v \in T_p\mathcal{M}\forall f \in C^\infty_p\mathcal{M}$ に対し、次のようになることから従う。

$$
\left.I_{\mathcal{M}*}\right|_p v(f) = v \circ I^*_{\mathcal{M}}(f) = v\left(f \circ I_{\mathcal{M}}\right) = v(f)
$$

□

**定理 3.4.5.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p \in \mathcal{M}$ に対し、それらの元 $p$、$\varphi(p)$ のまわりの座標近傍の 1 つをそれぞれ $(U, \psi)$、$(V, \chi)$ とし、さらに、$\psi = \left(\psi^i\right)_{i \in \Lambda_m}$、$\chi = \left(\chi^i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおく。このとき、$\forall v \in T_p\mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。

$$
\left.\varphi_*\right|_p v = v\left(\psi^k\right) \frac{\partial}{\partial \psi^k}\left(\chi^l \circ \varphi\right)(p) \left.\frac{\partial}{\partial \chi^l}\right|_{\varphi(p)} : C^\infty_{\varphi(p)}\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}
$$

特に、それらの自然標構たち $\left\langle \left.\dfrac{\partial}{\partial \psi^i}\right|_p \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$、$\left\langle \left.\dfrac{\partial}{\partial \chi^i}\right|_{\varphi(p)} \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ をそれぞれ $\alpha$、$\beta$ とおくと、その基底 $\alpha$ からその基底 $\beta$ へのその微分 $\left.\varphi_*\right|_p$ の表現行列 $\left[\left.\varphi_*\right|_p\right]^\beta_\alpha$ は次のように与えられる。

$$
\left[\left.\varphi_*\right|_p\right]^\beta_\alpha = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial}{\partial \psi^1}\left(\chi^1 \circ \varphi\right)(p) & \dfrac{\partial}{\partial \psi^1}\left(\chi^2 \circ \varphi\right)(p) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial \psi^1}\left(\chi^n \circ \varphi\right)(p) \\
\dfrac{\partial}{\partial \psi^2}\left(\chi^1 \circ \varphi\right)(p) & \dfrac{\partial}{\partial \psi^2}\left(\chi^2 \circ \varphi\right)(p) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial \psi^2}\left(\chi^n \circ \varphi\right)(p) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{\partial}{\partial \psi^n}\left(\chi^1 \circ \varphi\right)(p) & \dfrac{\partial}{\partial \psi^n}\left(\chi^2 \circ \varphi\right)(p) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial \psi^n}\left(\chi^n \circ \varphi\right)(p)
\end{pmatrix}
$$

**証明.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p \in \mathcal{M}$ に対し、それらの元 $p$、$\varphi(p)$ のまわりの座標近傍の 1 つをそれぞれ $(U, \psi)$、$(V, \chi)$ とし、さらに、$\psi = \left(\psi^i\right)_{i \in \Lambda_m}$、$\chi = \left(\chi^i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおく。このとき、$\forall v \in T_p\mathcal{M}\forall g \in C^\infty_{\varphi(p)}\mathcal{N}$ に対し、その写像 $g$ の定義域を $W$ とおくと、 定理 3.3.10 より次のようになる。

$$
\left.\varphi_*\right|_p v(g) = v \circ \varphi^*(g) = v\left(\varphi^* g\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= v\left(\psi^k\right) \left.\frac{\partial}{\partial \psi^k}\right|_p \left(\varphi^* g\right) \\
&= v\left(\psi^k\right) \frac{\partial}{\partial \psi^k} \left(g \circ \varphi\right)(p) \\
&= v\left(\psi^k\right) \partial_k \left(g \circ \varphi \circ \psi^{-1}\right) \circ \psi(p) \\
&= v\left(\psi^k\right) \partial_k \left(g \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ \varphi \circ \psi^{-1}\right) \circ \psi(p) \\
&= v\left(\psi^k\right) \left(\left(\partial_l \left(g \circ \chi^{-1}\right) \circ \left(\chi \circ \varphi \circ \psi^{-1}\right)\right) \partial_k \left(\chi^l \circ \varphi \circ \psi^{-1}\right)\right) \circ \psi(p) \\
&= v\left(\psi^k\right) \left(\partial_l \left(g \circ \chi^{-1}\right) \circ \chi \circ \varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi(p)\right) \left(\partial_k \left(\chi^l \circ \varphi \circ \psi^{-1}\right) \circ \psi(p)\right) \\
&= v\left(\psi^k\right) \left(\partial_l \left(g \circ \chi^{-1}\right) \circ \chi\left(\varphi(p)\right)\right) \left(\partial_k \left(\chi^l \circ \varphi \circ \psi^{-1}\right) \circ \psi(p)\right) \\
&= v\left(\psi^k\right) \frac{\partial g}{\partial \chi^l} \left(\varphi(p)\right) \frac{\partial}{\partial \psi^k} \left(\chi^l \circ \varphi\right)(p) \\
&= v\left(\psi^k\right) \frac{\partial}{\partial \psi^k} \left(\chi^l \circ \varphi\right)(p) \left.\frac{\partial f}{\partial \chi^l}\right|_{\varphi(p)} (g)
\end{aligned}
$$

よって、$\forall v \in T_p\mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。

$$
\left.\varphi_*\right|_p v = v\left(\psi^k\right) \frac{\partial}{\partial \psi^k} \left(\chi^l \circ \varphi\right)(p) \left.\frac{\partial}{\partial \chi^l}\right|_{\varphi(p)} : C^\infty_{\varphi(p)}\mathcal{N} \to \mathbb{R}
$$

特に、それらの自然標構たち $\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial \psi^i}\right|_p \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$、$\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial \chi^i}\right|_{\varphi(p)} \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ をそれぞれ $\alpha$、$\beta$ とおくと、その基底 $\alpha$ からその基底 $\beta$ へのその微分 $\left.\varphi_*\right|_p$ の表現行列 $\left[\left.\varphi_*\right|_p\right]_\alpha^\beta$ はそれらの基底たち $\alpha$、$\beta$ の基底変換の線形同型写像をそれぞれ $\varphi_\alpha$、$\varphi_\beta$ とすれば、次のようになることから、

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_\beta^{-1} \circ \left.\varphi_*\right|_p \circ \varphi_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\varphi_\beta"] \\
T_p\mathcal{M} \arrow[r, "\left.\varphi_*\right|_p"] & T_{\varphi(p)}\mathcal{N}
\end{tikzcd}
$$

線形写像 $\varphi_\beta^{-1} \circ \left.\varphi_*\right|_p \circ \varphi_\alpha$ に対応する行列と与えられる。これにより、$\mathbf{e}_j = \left(\delta_{ij}\right)_{i \in \Lambda_n}$ とすれば、次のようになることから、

$$
\begin{aligned}
\varphi_\beta^{-1} \circ \left.\varphi_*\right|_p \circ \varphi_\alpha\left(\mathbf{e}_j\right) &= \varphi_\beta^{-1} \circ \left.\varphi_*\right|_p \left( \left.\frac{\partial}{\partial \psi^j}\right|_p \right) \\
&= \varphi_\beta^{-1} \left( \left.\frac{\partial}{\partial \psi^j}\right|_p \left(\psi^k\right) \frac{\partial}{\partial \psi^k} \left(\chi^l \circ \varphi\right)(p) \left.\frac{\partial}{\partial \chi^l}\right|_{\varphi(p)} \right) \\
&= \varphi_\beta^{-1} \left( \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \left(\chi^l \circ \varphi\right)(p) \left.\frac{\partial}{\partial \chi^l}\right|_{\varphi(p)} \right) \\
&= \varphi_\beta^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial \psi^j} \left(\chi^k \circ \varphi\right)(p) \left.\frac{\partial}{\partial \chi^k}\right|_{\varphi(p)} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \psi^j}\left(\chi^k \circ \varphi\right)(p)\varphi_\beta^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial \chi^k}\right|_{\varphi(p)}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \psi^j}\left(\chi^k \circ \varphi\right)(p)\mathbf{e}_k
\end{aligned}
$$

その微分 $\left.\varphi_*\right|_p$ の表現行列 $\left[\left.\varphi_*\right|_p\right]_\alpha^\beta$ は次のように与えられる。

$$
\left[\left.\varphi_*\right|_p\right]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix}
\frac{\partial}{\partial \psi^1}\left(\chi^1 \circ \varphi\right)(p) & \frac{\partial}{\partial \psi^1}\left(\chi^2 \circ \varphi\right)(p) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \psi^1}\left(\chi^n \circ \varphi\right)(p) \\
\frac{\partial}{\partial \psi^2}\left(\chi^1 \circ \varphi\right)(p) & \frac{\partial}{\partial \psi^2}\left(\chi^2 \circ \varphi\right)(p) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \psi^2}\left(\chi^n \circ \varphi\right)(p) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial}{\partial \psi^n}\left(\chi^1 \circ \varphi\right)(p) & \frac{\partial}{\partial \psi^n}\left(\chi^2 \circ \varphi\right)(p) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \psi^n}\left(\chi^n \circ \varphi\right)(p)
\end{pmatrix}
$$

□

**定理 3.4.6.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p \in \mathcal{M}$ に対し、その可微分写像 $\varphi$ のその元 $p$ における微分 $\left.\varphi_*\right|_p$ は線形写像である。

**証明.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p \in \mathcal{M}$ に対し、その可微分写像 $\varphi$ のその元 $p$ における微分 $\left.\varphi_*\right|_p$ について、$\forall a.b \in \mathbb{R}\forall v, w \in T_p\mathcal{M}$ に対し、定理 3.3.7 に注意すれば、次のようになることから従う。

$$
\begin{aligned}
\left.\varphi_*\right|_p (av + bw) &= (av + bw) \circ \varphi^* \\
&= av \circ \varphi^* + bw \circ \varphi^* \\
&= a \left.\varphi_*\right|_p v + b \left.\varphi_*\right|_p w
\end{aligned}
$$

□

**定理 3.4.7.** $m$ 次元、$n$ 次元、$o$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$、$(\mathcal{O}, \mathfrak{Q})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$、その多様体 $(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$ からその多様体 $(\mathcal{O}, \mathfrak{Q})$ への可微分写像 $\chi : \mathcal{N} \to \mathcal{O}$ が与えられたとき、$\forall p \in \mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。

$$
\left.(\chi \circ \varphi)_*\right|_p = \left.\chi_*\right|_{\varphi(p)} \circ \left.\varphi_*\right|_p
$$

**証明.** $m$ 次元、$n$ 次元、$o$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$、$(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$、$(\mathcal{O}, \mathfrak{Q})$、その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$、その多様体 $(\mathcal{N}, \mathfrak{P})$ からその多様体 $(\mathcal{O}, \mathfrak{Q})$ への可微分写像 $\chi : \mathcal{N} \to \mathcal{O}$ が与えられたとき、$\forall p \in \mathcal{M}\forall h \in C_p^\infty\mathcal{O}$ に対し、次のようになることから従う。

$$
\begin{aligned}
\left.(\chi \circ \varphi)_*\right|_p v(h) &= v \circ (\chi \circ \varphi)^* (h) \\
&= v\left((\chi \circ \varphi)^* h\right) \\
&= v (h \circ \chi \circ \varphi) \\
&= v (\varphi^* \chi^* h) \\
&= v \circ \varphi^* (\chi^* h) \\
&= \left.\varphi_*\right|_p v (\chi^* h)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left.\varphi_*\right|_p v \circ \chi^*(h) \\
&= \left.\chi_*\right|_{\varphi(p)} \left(\left.\varphi_*\right|_p v\right)(h) \\
&= \left(\left.\chi_*\right|_{\varphi(p)} \circ \left.\varphi_*\right|_p\right) v(h)
\end{aligned}
$$

□

**定理 3.4.8** (微分同相による次元の不変性). $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への微分同相写像 $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、その微分 $\left.\varphi_*\right|_p$ はその接 vector 空間 $T_p\mathcal{M}$ からその接 vector 空間 $T_{\varphi(p)}\mathcal{N}$ への線形同型写像である。さらに、次式が成り立ち

$$
\left.\varphi_*\right|_p^{-1} = \left.\varphi_*^{-1}\right|_{\varphi(p)}
$$

$m=n$ も成り立つ。

**証明.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への微分同相写像 $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、定理 3.4.4 より $\left.I_{\mathcal{M}*}\right|_p = I_{T_p\mathcal{M}}$ が成り立ち、さらに、その微分 $\left.\varphi_*\right|_p$ は定理 3.4.6 より線形写像で定理 3.4.7 より次のようになることから、

$$
\begin{aligned}
\left.\varphi_*^{-1}\right|_{\varphi(p)} \circ \left.\varphi_*\right|_p &= \left.\left(\varphi^{-1}\circ\varphi\right)_*\right|_p = \left.I_{\mathcal{M}*}\right|_p = I_{T_p\mathcal{M}} \\
\left.\varphi_*\right|_p \circ \left.\varphi_*^{-1}\right|_{\varphi(p)} &= \left.\left(\varphi\circ\varphi^{-1}\right)_*\right|_{\varphi(p)} = \left.I_{\mathcal{N}*}\right|_{\varphi(p)} = I_{T_{\varphi(p)}\mathcal{N}}
\end{aligned}
$$

その微分 $\left.\varphi_*\right|_p$ は全単射であり、よって、その微分 $\left.\varphi_*\right|_p$ はその接 vector 空間 $T_p\mathcal{M}$ からその接 vector 空間 $T_{\varphi(p)}\mathcal{N}$ への線形同型写像である。さらに、先ほどの議論より次式が成り立ち、

$$
\left.\varphi_*\right|_p^{-1} = \left.\varphi_*^{-1}\right|_{\varphi(p)}
$$

定理 3.3.7、定理 3.3.10 より $m=n$ も成り立つ。 □

## 3.4.3 可微分写像の双対微分

**定義 3.4.5.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、次のように定義されるその可微分写像 $\varphi$ のその元 $p$ における微分 $\left.\varphi_*\right|_p$ の双対写像 $\left.\varphi^*\right|_p$ をその可微分写像 $\varphi$ のその元 $p$ における双対微分という[*59]。

$$
\left.\varphi^*\right|_p = \begin{array}{ccc}
T_{\varphi(p)}^*\mathcal{N} & \to & T_p^*\mathcal{M} \\
\Psi & & \Psi \\
\theta & \longmapsto & \theta\circ\left.\varphi_*\right|_p
\end{array}
$$

**定理 3.4.9.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}\forall g\in C_{\varphi(p)}^\infty\mathcal{N}$ に対し、次式が成り立つ。

$$
\left.\varphi^*\right|_p dg_{\varphi(p)} = d\varphi^* g_p
$$

[*59] 線形代数学の議論の通り、これはもちろん線形写像である。

**証明.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}\forall g\in C^\infty_{\varphi(p)}\mathcal{N}\forall v\in T_p\mathcal{M}$ に対し、次のようになることから従う。

$$\begin{aligned}
\left.\varphi^*\right|_p dg_{\varphi(p)}(v) &= dg_{\varphi(p)}\circ\left.\varphi_*\right|_p(v)\\
&= dg_{\varphi(p)}\left(\left.\varphi_*\right|_p v\right)\\
&= \left.\varphi_*\right|_p v(g)\\
&= v\circ\varphi^*(g)\\
&= v\left(\varphi^*g\right)\\
&= d\varphi^*g_p(v)
\end{aligned}$$

□

**定理 3.4.10.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、それらの元 $p$、$\varphi(p)$ のまわりの座標近傍の 1 つをそれぞれ $(U,\psi)$、$(V,\chi)$ とし、さらに、$\psi=\left(\psi^i\right)_{i\in\varLambda_m}$、$\chi=\left(\chi^i\right)_{i\in\varLambda_n}$ とおく。このとき、$\forall\theta\in T^*_{\varphi(p)}\mathcal{N}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\left.\varphi^*\right|_p\theta=\theta\left(\left.\frac{\partial}{\partial\chi^k}\right|_{\varphi(p)}\right)\frac{\partial}{\partial\psi^l}\left(\chi^k\circ\varphi\right)(p)d\psi^l_p:T_p\mathcal{M}\to\mathbb{R}$$

特に、それらの基底たち $\left\langle d\psi^i_p\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$、$\left\langle d\chi^i_{\varphi(p)}\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ をそれぞれ $\alpha$、$\beta$ とおくと、その基底 $\beta$ からその基底 $\alpha$ へのその微分 $\left.\varphi^*\right|_p$ の表現行列 $\left[\left.\varphi^*\right|_p\right]^\alpha_\beta$ は次のように与えられる。

$$\left[\left.\varphi^*\right|_p\right]^\alpha_\beta=\begin{pmatrix}
\frac{\partial}{\partial\psi^1}\left(\chi^1\circ\varphi\right)(p) & \frac{\partial}{\partial\psi^2}\left(\chi^1\circ\varphi\right)(p) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\psi^n}\left(\chi^1\circ\varphi\right)(p)\\
\frac{\partial}{\partial\psi^1}\left(\chi^2\circ\varphi\right)(p) & \frac{\partial}{\partial\psi^2}\left(\chi^2\circ\varphi\right)(p) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\psi^n}\left(\chi^2\circ\varphi\right)(p)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial}{\partial\psi^1}\left(\chi^n\circ\varphi\right)(p) & \frac{\partial}{\partial\psi^2}\left(\chi^n\circ\varphi\right)(p) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\psi^n}\left(\chi^n\circ\varphi\right)(p)
\end{pmatrix}$$

**証明.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、その元 $\varphi(p)$ のまわりの座標近傍の 1 つを $(V,\chi)$ とし、さらに、$\chi=\left(\chi^i\right)_{i\in\varLambda_n}$ とおく。このとき、$\forall\theta\in T^*_{\varphi(p)}\mathcal{N}\forall v\in T_p\mathcal{M}$ に対し、定理 3.3.15、定理 3.4.9 より次のようになることから従う。

$$\begin{aligned}
\left.\varphi^*\right|_p\theta(v) &= \left.\varphi^*\right|_p\left(\theta\left(\left.\frac{\partial}{\partial\chi^k}\right|_{\varphi(p)}\right)d\chi^k_{\varphi(p)}\right)(v)\\
&= \theta\left(\left.\frac{\partial}{\partial\chi^k}\right|_{\varphi(p)}\right)\left.\varphi^*\right|_p d\chi^k_{\varphi(p)}(v)\\
&= \theta\left(\left.\frac{\partial}{\partial\chi^k}\right|_{\varphi(p)}\right)d\varphi^*{\chi^k}_p(v)\\
&= \theta\left(\left.\frac{\partial}{\partial\chi^k}\right|_{\varphi(p)}\right)v\left(\varphi^*\chi^k\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta\left(\left.\frac{\partial}{\partial \chi^k}\right|_{\varphi(p)}\right) v\left(\chi^k \circ \varphi\right)\\
&= \theta\left(\left.\frac{\partial}{\partial \chi^k}\right|_{\varphi(p)}\right) v\left(\psi^l\right) \left.\frac{\partial}{\partial \psi^l}\right|_p \left(\chi^k \circ \varphi\right)\\
&= \theta\left(\left.\frac{\partial}{\partial \chi^k}\right|_{\varphi(p)}\right) \frac{\partial}{\partial \psi^l} \left(\chi^k \circ \varphi\right)(p) d\psi_p^l(v)
\end{aligned}$$

特に、それらの基底たち $\left\langle d\psi_p^i \right\rangle_{i\in\Lambda_n}$、$\left\langle d\chi_{\varphi(p)}^i \right\rangle_{i\in\Lambda_n}$ をそれぞれ $\alpha$、$\beta$ とおくと、その基底 $\beta$ からその基底 $\alpha$ へのその微分 $\left.\varphi^*\right|_p$ の表現行列 $\left[\left.\varphi^*\right|_p\right]_\beta^\alpha$ はそれらの基底たち $\alpha$、$\beta$ の基底変換の線形同型写像をそれぞれ $\varphi_\alpha$、$\varphi_\beta$ とすれば、次のようになることから、

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_\alpha^{-1} \circ \left.\varphi^*\right|_p \circ \varphi_\beta"] \arrow[d, "\varphi_\beta"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\varphi_\alpha"] \\
T_{\varphi(p)}^*\mathcal{N} \arrow[r, "\left.\varphi^*\right|_p"] & T_p^*\mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

線形写像 $\varphi_\alpha^{-1} \circ \left.\varphi^*\right|_p \circ \varphi_\beta$ に対応する行列と与えられる。これにより、$\mathbf{e}_j = \left(\delta_{ij}\right)_{i\in\Lambda_n}$ とすれば、次のようになることから、

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha^{-1} \circ \left.\varphi^*\right|_p \circ \varphi_\beta\left(\mathbf{e}_j\right) &= \varphi_\alpha^{-1} \circ \left.\varphi^*\right|_p d\chi_{\varphi(p)}^j\\
&= \varphi_\alpha^{-1}\left(d\chi_{\varphi(p)}^j\left(\left.\frac{\partial}{\partial \chi^k}\right|_{\varphi(p)}\right)\frac{\partial}{\partial \psi^l}\left(\chi^k \circ \varphi\right)(p) d\psi_p^l\right)\\
&= \varphi_\alpha^{-1}\left(\delta_{jk}\frac{\partial}{\partial \psi^l}\left(\chi^k \circ \varphi\right)(p) d\psi_p^l\right)\\
&= \varphi_\alpha^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \psi^k}\left(\chi^j \circ \varphi\right)(p) d\psi_p^k\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \psi^k}\left(\chi^j \circ \varphi\right)(p)\varphi_\alpha^{-1}\left(d\psi_p^k\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \psi^k}\left(\chi^j \circ \varphi\right)(p)\mathbf{e}_k
\end{aligned}$$

その微分 $\left.\varphi^*\right|_p$ の表現行列 $\left[\left.\varphi^*\right|_p\right]_\beta^\alpha$ は次のように与えられる。

$$\left[\left.\varphi^*\right|_p\right]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix}
\frac{\partial}{\partial \psi^1}\left(\chi^1 \circ \varphi\right)(p) & \frac{\partial}{\partial \psi^2}\left(\chi^1 \circ \varphi\right)(p) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \psi^n}\left(\chi^1 \circ \varphi\right)(p)\\
\frac{\partial}{\partial \psi^1}\left(\chi^2 \circ \varphi\right)(p) & \frac{\partial}{\partial \psi^2}\left(\chi^2 \circ \varphi\right)(p) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \psi^n}\left(\chi^2 \circ \varphi\right)(p)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial}{\partial \psi^1}\left(\chi^n \circ \varphi\right)(p) & \frac{\partial}{\partial \psi^2}\left(\chi^n \circ \varphi\right)(p) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \psi^n}\left(\chi^n \circ \varphi\right)(p)
\end{pmatrix}$$

$\square$

**定理 3.4.11.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、その元 $\varphi(p)$ のまわりの座標近傍の 1 つを $(V,\chi)$ とし、さらに、$\chi=\left(\chi^{i}\right)_{i\in\Lambda_{n}}$ とおく。このとき、$\forall g\in C_{\varphi(p)}^{\infty}\mathcal{N}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\left.\varphi^{*}\right|_{p}dg_{\varphi(p)}=\frac{\partial g}{\partial\chi^{k}}\circ\varphi(p)\frac{\partial}{\partial\psi^{l}}\left(\chi^{k}\circ\varphi\right)(p)d\psi_{p}^{l}:T_{p}\mathcal{M}\rightarrow\mathbb{R}$$

**証明.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、その元 $\varphi(p)$ のまわりの座標近傍の 1 つを $(V,\chi)$ とし、さらに、$\chi=\left(\chi^{i}\right)_{i\in\Lambda_{n}}$ とおく。このとき、$\forall g\in C_{\varphi(p)}^{\infty}\mathcal{N}$ に対し、定理 3.4.10 より次のようになることから従う。

$$\begin{aligned}\left.\varphi^{*}\right|_{p}dg_{\varphi(p)}&=dg_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial\chi^{k}}\right|_{\varphi(p)}\right)\frac{\partial}{\partial\psi^{l}}\left(\chi^{k}\circ\varphi\right)(p)d\psi_{p}^{l}\\&=\frac{\partial g}{\partial\chi^{k}}\left(\varphi(p)\right)\frac{\partial}{\partial\psi^{l}}\left(\chi^{k}\circ\varphi\right)(p)d\psi_{p}^{l}\\&=\frac{\partial g}{\partial\chi^{k}}\circ\varphi(p)\frac{\partial}{\partial\psi^{l}}\left(\chi^{k}\circ\varphi\right)(p)d\psi_{p}^{l}\end{aligned}$$

□

**定理 3.4.12.** $m$ 次元、$n$ 次元、$o$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、$(\mathcal{O},\mathfrak{Q})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$、その多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ からその多様体 $(\mathcal{O},\mathfrak{Q})$ への可微分写像 $\chi:\mathcal{N}\rightarrow\mathcal{O}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\left.(\chi\circ\varphi)^{*}\right|_{p}=\left.\varphi^{*}\right|_{p}\circ\left.\chi^{*}\right|_{\varphi(p)}$$

**証明.** $m$ 次元、$n$ 次元、$o$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、$(\mathcal{O},\mathfrak{Q})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$、その多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ からその多様体 $(\mathcal{O},\mathfrak{Q})$ への可微分写像 $\chi:\mathcal{N}\rightarrow\mathcal{O}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}\forall\iota\in T_{\chi\circ\varphi(p)}^{*}\mathcal{O}$ に対し、定理 3.4.7 より次のようになることから従う。

$$\begin{aligned}\left.(\chi\circ\varphi)^{*}\right|_{p}\iota&=\iota\circ\left.(\chi\circ\varphi)_{*}\right|_{p}\\&=\iota\circ\left.\chi_{*}\right|_{\varphi(p)}\circ\left.\varphi_{*}\right|_{p}\\&=\left.\chi^{*}\right|_{\varphi(p)}\iota\circ\left.\varphi_{*}\right|_{p}\\&=\left(\left.\varphi^{*}\right|_{p}\circ\left.\chi^{*}\right|_{\varphi(p)}\right)\iota\end{aligned}$$

□

**定理 3.4.13.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への微分同相写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\left.\varphi^{*}\right|_{p}^{-1}=\left.\varphi^{-1*}\right|_{\varphi(p)}$$

**証明.** $m$ 次元、$n$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への微分同相写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、定理 3.4.8 より $\left.I_{\mathcal{M}*}\right|_{p}=I_{T_{p}\mathcal{M}}$ が成り立つ。このとき、$\forall\eta\in T_{p}^{*}\mathcal{M}$ に対し、$\left.I_{\mathcal{M}}^{*}\right|_{p}\eta=\eta\circ\left.I_{\mathcal{M}*}\right|_{p}=\eta$ なので、$\left.I_{\mathcal{M}}^{*}\right|_{p}=T_{T_{p}^{*}\mathcal{M}}$ が成り立つ。このとき、定理 3.4.12 より次のようになることから、

$$\left.\varphi^{*}\right|_{p}\circ\left.\varphi^{-1*}\right|_{\varphi(p)}=\left.\left(\varphi^{-1}\circ\varphi\right)^{*}\right|_{p}=\left.I_{\mathcal{M}}^{*}\right|_{p}=I_{T_{p}^{*}\mathcal{M}}$$

$$\left.\varphi^{-1*}\right|_{\varphi(p)} \circ \left.\varphi^*\right|_p = \left.\left(\varphi \circ \varphi^{-1}\right)^*\right|_{\varphi(p)} = \left.I_{\mathcal{N}}^*\right|_p = I_{T^*_{\varphi(p)}\mathcal{N}}$$

よって、次式が成り立つ。

$$\left.\varphi^*\right|_p^{-1} = \left.\varphi^{-1*}\right|_{\varphi(p)}$$

□

# 参考文献


[1] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965. 第 36 刷 p35-36, 48-51 ISBN978-4-7853-1305-0

[2] 松本幸夫, 多様体の基礎, 東京大学出版会, 1988. 第 16 刷 p93-106 ISBN4-13-062103-3

[3] 新井朝雄, 相対性理論の数理, 日本評論会, 2021. 第 1 版第 1 刷 p188-191 ISBN978-4-535-78928-9

## 3.5 写像の局所的な性質

### 3.5.1 有限増分の定理

**定理 3.5.1** (有限増分の定理)**.** 開集合 $U$ を用いた $U \subseteq \mathbb{R}^m$ なる関数 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ がその集合 $U$ で微分可能であるとする。$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ に対し、次式のように定義される線分 $L$ が $L \subseteq U$ を満たすとき、

$$L = \left\{ \mathbf{a} + t \left( \mathbf{b} - \mathbf{a} \right) \in \mathbb{R}^m \middle| t \in [0,1] \right\}$$

次式が成り立つ。

$$\left\| f \left( \mathbf{b} \right) - f \left( \mathbf{a} \right) \right\| \leq \sqrt{n} \sup_{\mathbf{x} \in L} \left\| J_f \left( \mathbf{x} \right) \right\| \left\| \mathbf{b} - \mathbf{a} \right\|$$

この定理を有限増分の定理などという。

**証明.** 開集合 $U$ を用いた $U \subseteq \mathbb{R}^m$ なる関数 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ がその集合 $U$ で微分可能であるとする。$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ に対し、次式のように定義される線分 $L$ が $L \subseteq U$ を満たすとき、

$$L = \left\{ \mathbf{a} + t \left( \mathbf{b} - \mathbf{a} \right) \in \mathbb{R}^m \middle| t \in [0,1] \right\}$$

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ のときは明らかに示すべきことが成り立つので、$\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ とする。

次式のように定義される関数 $g$ を用いたその合成関数 $f \circ g$ は連鎖律よりその区間 $[0,1]$ で微分可能で

$$g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^m; t \mapsto \mathbf{a} + t \left( \mathbf{b} - \mathbf{a} \right)$$

$\forall t \in [0,1]$ に対し、次のようになる。

$$J_{f \circ g}(t) = \left( J_f \circ g \right) J_g(t) = J_f \left( \mathbf{a} + t \left( \mathbf{b} - \mathbf{a} \right) \right) \left( \mathbf{b} - \mathbf{a} \right)$$

ここで、$f = \left( f_i \right)_{i \in \varLambda_n}$ とおくと、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、平均値の定理より次式を満たすような実数 $c$ がその区間 $(0,1)$ に存在する。

$$\frac{f_i \circ g(1) - f_i \circ g(0)}{1 - 0} = \partial \left( f_i \circ g \right)(c)$$

したがって、連鎖律より次のようになる。

$$\begin{aligned} f_i \left( \mathbf{b} \right) - f_i \left( \mathbf{a} \right) &= f_i \circ g(1) - f_i \circ g(0) \\ &= \partial \left( f_i \circ g \right)(c) = J_{f_i \circ g}(c) \\ &= J_{f_i} \circ g(c) J_g(c) \\ &= J_{f_i} \circ g(c) \left( \mathbf{b} - \mathbf{a} \right) \end{aligned}$$

ここで、次式が成り立つことにより、

$$J_{f_i} \circ g(c) \left( \mathbf{b} - \mathbf{a} \right) \leq \left\| J_{f_i} \circ g(c) \right\| \left\| \mathbf{b} - \mathbf{a} \right\|, \quad \left\| J_{f_i} \circ g(c) \right\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in L} \left\| J_f \left( \mathbf{x} \right) \right\|$$

次のようになる。

$$\left| f_i \left( \mathbf{b} \right) - f_i \left( \mathbf{a} \right) \right| = \left| J_{f_i} \circ g(c) \left( \mathbf{b} - \mathbf{a} \right) \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\|J_{f_i} \circ g(c)\right\| \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| \\
&\leq \sup_{\mathbf{x}\in L} \left\|J_f(\mathbf{x})\right\| \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|
\end{aligned}
$$

したがって、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\| &= \left(\sum_{i\in\Lambda_n} |f_i(\mathbf{b})-f_i(\mathbf{a})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{i\in\Lambda_n} \left(\sup_{\mathbf{x}\in L}\|J_f(\mathbf{x})\|\right)^2 \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= n^{\frac{1}{2}} \left(\left(\sup_{\mathbf{x}\in L}\|J_f(\mathbf{x})\|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{n}\sup_{\mathbf{x}\in L}\|J_f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|
\end{aligned}
$$

□

### 3.5.2 逆関数定理

**定理 3.5.2** (逆関数定理)**.** 開集合たち $U$、$V$ を用いた $U \subseteq \mathbb{R}^n$ かつ $V \subseteq \mathbb{R}^n$ なる関数 $f : U \to V$ がその集合 $U$ で $C^1$ 級であるかつ、行列 $J_f$ の逆行列が存在するかつ、その関数 $f$ が全単射であるとき、次のことが成り立つ。

- 次式が成り立つ*60。

$$
J_{f^{-1}} = \left(J_f \circ f^{-1}\right)^{-1} : V \to U
$$

- その逆関数 $f^{-1}$ はその集合 $V$ 上で $C^1$ 級である。

この定理を逆関数定理などという。

**証明.** 開集合たち $U$、$V$ を用いた $U \subseteq \mathbb{R}^n$ かつ $V \subseteq \mathbb{R}^n$ なる関数 $f : U \to V$ がその集合 $U$ で $C^1$ 級であるかつ、行列 $J_f$ の逆行列が存在するかつ、その関数 $f$ は全単射であるとき、$\forall\mathbf{a} \in U$ に対し、正の実数 $\left\|J_f(\mathbf{a})^{-1}\right\|^{-1}$ を $\rho$ とおくと、$\forall\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し、次のようになることから、

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\| &= \left\|J_f(\mathbf{a})^{-1} J_f(\mathbf{a})\mathbf{x}\right\| \\
&\leq \left\|J_f(\mathbf{a})^{-1}\right\| \|J_f(\mathbf{a})\mathbf{x}\| \\
&= \frac{1}{\rho}\|J_f(\mathbf{a})\mathbf{x}\|
\end{aligned}
$$

$\|J_f(\mathbf{a})\mathbf{x}\| \geq \rho\|\mathbf{x}\|$ が成り立つ。ここで、仮定よりその関数 $J_f$ はその集合 $U$ で連続でもあったので、$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} J_f(\mathbf{x}) = J_f(\mathbf{a})$ が成り立つ、即ち、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta$ なら $\|J_f(\mathbf{x}) - J_f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$

*60 $J_{f^{-1}} = \left(J_f \circ f^{-1}\right)^{-1}$ での $-1$ について、1 つ目と 2 つ目が逆関数を表す $-1$ で 3 つ目が逆行列を表す $-1$ となっていることに注意しよう。

が成り立つ。ここで、$0 < \varepsilon < \dfrac{\rho}{\sqrt{n}}$ が成り立っても、$\left\| J_f(\mathbf{x}) - J_f(\mathbf{a}) \right\| < \varepsilon$ がやはり成り立つ。さらに、次式のように関数 $g$ が定義されると、

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^n ; \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) - J_f(\mathbf{a}) I_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x})$$

$n$ 次単位行列 $I_n$ を用いた次式が成り立つかつ、

$$\begin{aligned} J_g(\mathbf{x}) &= J_f(\mathbf{x}) - J_f(\mathbf{a}) J_{I_{\mathbb{R}^n}}(\mathbf{x}) \\ &= J_f(\mathbf{x}) - J_f(\mathbf{a}) I_n \\ &= J_f(\mathbf{x}) - J_f(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

その集合 $U$ が開集合でその点 $\mathbf{a}$ の十分に小さい $\delta'$ 近傍 $U(\mathbf{a}, \delta')$ がとられることができ、$\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}, \delta')$ に対し、次式のように定義される線分 $L$ が $L \subseteq U$ を満たすので、

$$L = \{ \mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m | t \in [0, 1] \}$$

有限増分の定理 3.5.1 より次式が成り立つ。

$$\left\| g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{a}) \right\| \leq \sqrt{n} \sup_{\mathbf{x} \in L} \left\| J_g(\mathbf{x}) \right\| \left\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \right\|$$

ここで、$J_g(\mathbf{x}) = J_f(\mathbf{x}) - J_f(\mathbf{a})$ が成り立つかつ、$\left\| J_f(\mathbf{x}) - J_f(\mathbf{a}) \right\| < \varepsilon$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$\left\| g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{a}) \right\| \leq \sqrt{n} \varepsilon \left\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \right\|$$

ここで、上記の議論により $\rho \left\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \right\| \leq \left\| J_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right\|$ が成り立ち、したがって、次式が成り立つ。

$$\rho \left\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \right\| - \left\| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \right\| \leq \left\| J_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right\| - \left\| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \right\|$$

また、三角不等式とその関数 $g$ の定義より次のようになる。

$$\begin{aligned} \rho \left\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \right\| - \left\| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \right\| &\leq \left\| J_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})) \right\| \\ &= \left\| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - J_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right\| \\ &= \left\| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - J_f(\mathbf{a}) \mathbf{x} + J_f(\mathbf{a}) \mathbf{a} \right\| \\ &= \left\| (f(\mathbf{x}) - J_f(\mathbf{a}) \mathbf{x}) - (f(\mathbf{a}) - J_f(\mathbf{a}) \mathbf{a}) \right\| \\ &= \left\| g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{a}) \right\| \end{aligned}$$

ここで、上記の議論により $\left\| g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{a}) \right\| \leq \sqrt{n} \varepsilon \left\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \right\|$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$\rho \left\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \right\| - \left\| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \right\| \leq \left\| g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{a}) \right\| \leq \sqrt{n} \varepsilon \left\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \right\|$$

ここで、その関数 $f$ が全単射であることに注意すれば、$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$、$\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ として次のようになる。

$$\begin{aligned} & \rho \left\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \right\| - \left\| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \right\| \leq \sqrt{n} \varepsilon \left\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \right\| \\ \Leftrightarrow & \rho \left\| f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{b}) \right\| - \left\| \mathbf{y} - \mathbf{b} \right\| \leq \sqrt{n} \varepsilon \left\| f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{b}) \right\| \\ \Leftrightarrow & \rho \left\| f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{b}) \right\| - \sqrt{n} \varepsilon \left\| f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{b}) \right\| \leq \left\| \mathbf{y} - \mathbf{b} \right\| \\ \Leftrightarrow & \left( \rho - \sqrt{n} \varepsilon \right) \left\| f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{b}) \right\| \leq \left\| \mathbf{y} - \mathbf{b} \right\| \end{aligned}$$

ここで、$0 < \varepsilon < \dfrac{\rho}{\sqrt{n}}$ が成り立つのであったので、$0 < \rho - \sqrt{n} \varepsilon$ が成り立ち、したがって、次式が成り立つ。

$$\left\| f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{b}) \right\| \leq \frac{1}{\rho - \sqrt{n} \varepsilon} \left\| \mathbf{y} - \mathbf{b} \right\|$$

$\varepsilon' = \dfrac{1}{\rho - \sqrt{n}\varepsilon} \|\mathbf{y} - \mathbf{b}\|$ とすれば、$\mathbf{x} \in U(\mathbf{a}, \delta')$ は $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta'$ と書き換えられることができその関数 $f$ はその集合 $U$ で連続であるので、$\forall\varepsilon' \in \mathbb{R}^+ \exists\varepsilon'' \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つ。

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{b}\| < \varepsilon'' \Rightarrow \left\|f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{b})\right\| \leq \varepsilon'$$

これにより、その関数 $f^{-1}$ はその点 $\mathbf{b}$ で連続であることが示され、したがって、その集合 $V$ で連続である。

次に、$\forall\mathbf{a} \in U$ に対し、その関数 $f$ はその点 $\mathbf{a}$ で微分可能であるので、$\lim_{\mathbf{k} \to \mathbf{0}} \dfrac{r(\mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|} = \mathbf{0}$ なる関数 $r : U \to \mathbb{R}^n$ を用いた次式が成り立つ。

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{k}) - f(\mathbf{a}) = J_f(\mathbf{a})\mathbf{k} + r(\mathbf{k})$$

ここで、その集合 $V$ は開集合で、$\forall\mathbf{b} = f(\mathbf{a}) \in V$ に対し、その点 $\mathbf{b}$ のある近傍 $U(\mathbf{b}, \varepsilon_{\mathbf{b}})$ がその集合 $V$ に含まれ $\mathbf{b}+\mathbf{l} \in V$ が成り立つようにすることができるので、$f^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{l})$ が存在できる。ここで、$f^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{l}) = \mathbf{a}+\mathbf{k}$ とすると、それらの関数たち $f$、$f^{-1}$ は全単射で連続であるので、その点 $\mathbf{l}$ が $\mathbf{0}$ に近づくならそのときに限り、その点 $\mathbf{k}$ が $\mathbf{0}$ に近づくかつ、$\mathbf{l} = \mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り、$\mathbf{k} = \mathbf{0}$ が成り立つ。

また、$\forall\mathbf{x} \in U$ に対し、その行列 $J_f(\mathbf{x})$ の逆行列 $J_f(\mathbf{x})^{-1}$ が存在するので、次式が成り立つ。

$$J_f(\mathbf{a})^{-1}(f(\mathbf{a} + \mathbf{k}) - f(\mathbf{a})) = J_f(\mathbf{a})^{-1}(J_f(\mathbf{a})\mathbf{k} + r(\mathbf{k})) = \mathbf{k} + J_f(\mathbf{a})^{-1} r(\mathbf{k})$$

ここで、その関数 $f$ は全単射であるかつ、$f^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{l}) = \mathbf{a} + \mathbf{k}$ が成り立つので、$f^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{l}) - f^{-1}(\mathbf{b}) = \mathbf{k}$ かつ $f(\mathbf{a} + \mathbf{k}) - f(\mathbf{a}) = \mathbf{l}$ が成り立ち、したがって、次式が成り立つ。

$$J_f(\mathbf{a})^{-1}\mathbf{l} = f^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{l}) - f^{-1}(\mathbf{b}) + J_f(\mathbf{a})^{-1} r(\mathbf{k})$$

ここで、$\left(\rho - \sqrt{n}\varepsilon\right)\left\|f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{b})\right\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{b}\|$ が成り立つので、$\dfrac{\|\mathbf{k}\|}{\|f(\mathbf{a} + \mathbf{k}) - f(\mathbf{a})\|} \leq \dfrac{1}{\rho - \sqrt{n}\varepsilon}$ が成り立ち、したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\left\|-J_f(\mathbf{a})^{-1} r(\mathbf{k})\right\|}{\|\mathbf{l}\|} &\leq \frac{\left\|J_f(\mathbf{a})^{-1}\right\| \|r(\mathbf{k})\|}{\|\mathbf{l}\|} \\
&= \frac{\left\|J_f(\mathbf{a})^{-1}\right\| \|r(\mathbf{k})\| \|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{k}\| \|f(\mathbf{a} + \mathbf{k}) - f(\mathbf{a})\|} \\
&= \left\|J_f(\mathbf{a})^{-1}\right\| \frac{\|r(\mathbf{k})\|}{\|\mathbf{k}\|} \frac{\|\mathbf{k}\|}{\|f(\mathbf{a} + \mathbf{k}) - f(\mathbf{a})\|} \\
&\leq \left\|J_f(\mathbf{a})^{-1}\right\| \frac{\|r(\mathbf{k})\|}{\|\mathbf{k}\|} \frac{1}{\rho - \sqrt{n}\varepsilon} \\
&= \frac{\left\|J_f(\mathbf{a})^{-1}\right\|}{\rho - \sqrt{n}\varepsilon} \left\|\frac{r(\mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|}\right\|
\end{aligned}$$

ここで、$\mathbf{l} \to \mathbf{0}$ のとき、$\lim_{\mathbf{k} \to \mathbf{0}} \dfrac{r(\mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|} = \mathbf{0}$ が成り立つことに注意すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{l} \to \mathbf{0}} \frac{\left\|-J_f(\mathbf{a})^{-1} r(\mathbf{k})\right\|}{\|\mathbf{l}\|} &= \lim_{\mathbf{k} \to \mathbf{0}} \frac{\left\|J_f(\mathbf{a})^{-1}\right\|}{\rho - \sqrt{n}\varepsilon} \left\|\frac{r(\mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|}\right\| \\
&= \frac{\left\|J_f(\mathbf{a})^{-1}\right\|}{\rho - \sqrt{n}\varepsilon} \lim_{\mathbf{k} \to \mathbf{0}} \left\|\frac{r(\mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|}\right\|
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left\| J_f(\mathbf{a})^{-1} \right\|}{\rho - \sqrt{n}\varepsilon} \left\| \lim_{\mathbf{k} \to \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|} \right\|$$
$$= \frac{\left\| J_f(\mathbf{a})^{-1} \right\|}{\rho - \sqrt{n}\varepsilon} \cdot 0 = 0$$

これにより、$\lim_{\mathbf{l} \to \mathbf{0}} \frac{-J_f(\mathbf{a})^{-1} r(\mathbf{k})}{\|\mathbf{l}\|} = \mathbf{0}$ が成り立ち、次式のように関数 $s$ が定義されると、

$$s : V \to \mathbb{R}^n; \mathbf{l} \mapsto -J_f(\mathbf{a})^{-1} r(\mathbf{k})$$

$\lim_{\mathbf{l} \to \mathbf{0}} \frac{s(\mathbf{l})}{\|\mathbf{l}\|} = \mathbf{0}$ が成り立つことになるので、次式が得られ

$$f^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{l}) - f^{-1}(\mathbf{b}) = J_f(\mathbf{a})^{-1} \mathbf{l} - J_f(\mathbf{a})^{-1} r(\mathbf{k}) = J_f(\mathbf{a})^{-1} \mathbf{l} + s(l)$$

Jacobi 行列の定義より $\forall \mathbf{b} \in V$ に対し、次式が成り立つ。

$$J_{f^{-1}}(\mathbf{b}) = J_f(\mathbf{a})^{-1} = J_f\left(f^{-1}(\mathbf{b})\right)^{-1} = \left(J_f \circ f^{-1}\right)^{-1}(\mathbf{b})$$

したがって、次式が得られた。

$$J_{f^{-1}} = \left(J_f \circ f^{-1}\right)^{-1} : V \to U$$

また、その行列 $J_f(\mathbf{x})$ の $(j, i)$ 余因子行列を $\widetilde{J_f}(\mathbf{x})$ とおくと、次式が成り立つので、

$$J_{f^{-1}}(\mathbf{y}) = J_f(\mathbf{x})^{-1} = \frac{\widetilde{J_f}(\mathbf{x})}{\det J_f(\mathbf{x})}$$

連続な関数 $J_{f^{-1}} \circ f : U \to \mathbb{R}^n; \mathbf{x} \mapsto \frac{\widetilde{J_f}(\mathbf{x})}{\det J_f(\mathbf{x})}$ が得られているが、その関数 $f^{-1}$ もその集合 $V$ で連続であったので、$J_{f^{-1}} \circ f \circ f^{-1} = J_{f^{-1}}$ よりその関数 $J_{f^{-1}}$ もその集合 $V$ で連続でありその関数 $f^{-1}$ はその集合 $V$ 上で $C^1$ 級である。 □

### 3.5.3 陰関数定理

**定義 3.5.1.** 関数 $f : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、$\exists(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ に対し、$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ が成り立つとする。このとき、その点 $\mathbf{a}$ のある開近傍 $U$ と関数 $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ が存在して、$\forall \mathbf{x} \in U$ に対し、$f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ g(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ が成り立つとき、その関数 $g$ をその関数 $f$ によって陰に定められた関数、陰関数という。

これはただ 1 つ決まるとは限らない。例えば、関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ から定まる陰関数 $g$ は $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \pm\sqrt{1 - x^2}$ と 2 通り決まる。

**定理 3.5.3** (陰関数定理). $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ なる開集合 $U$ を用いた $C^1$ 級関数 $f : U \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix}$ が、$\exists \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ に対し、$f\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} = 0$ かつ $\partial_{n+1} f\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} \neq 0$ が成り立つとき、$V \times W \subseteq U$ かつ $V \subseteq \mathbb{R}^n$ かつ $W \subseteq \mathbb{R}$ なるそれらの点々 $\mathbf{a}$、$b$ の開近傍たちそれぞれ $V$、$W$ と関数 $g : V \to W$ が存在して、$g_\downarrow : V \to \mathbb{R}^n \times W; \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ g(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ とすれば、次のことが成り立つ。

- その開近傍 $V$ 上で次式が成り立つ。

$$\partial_{n+1} f \circ g_{\downarrow} : V \rightarrow \mathbb{R} \neq 0$$

- $g(\mathbf{a}) = b$ が成り立つ。
- その関数 $g$ はその開近傍 $V$ で連続である。
- $\forall \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} \in V \times W$ に対し、$f \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} = 0$ が成り立つならそのときに限り、$y = g(\mathbf{x})$ が成り立つ。

また、その陰関数 $g$ について、次のことが成り立つ。

- その陰関数 $g$ はその開近傍 $V$ 上で $C^1$ 級である。
- その開近傍 $V$ 上で次式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} {}^t J_g \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{{}^t J_f}{\partial_{n+1} f} \circ g_{\downarrow}$$

- その開近傍 $V$ 上で、$\forall i \in \varLambda_n$ に対し、次式が成り立つ。

$$\partial_i g = -\frac{\partial_i f}{\partial_{n+1} f} \circ g_{\downarrow}$$

さらに、$U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ なる開集合 $U$ を用いた $C^r$ 級関数 $f : U \rightarrow \mathbb{R}; \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} \mapsto f \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix}$ が、$\exists \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ に対し、$f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} = 0$ かつ $\partial_{n+1} f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} \neq 0$ が成り立つとき、その陰関数 $g : V \rightarrow W$ もその開近傍 $V$ 上で $C^r$ 級である。

**証明.** $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ なる開集合 $U$ を用いた $C^1$ 級関数 $f : U \rightarrow \mathbb{R}; \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} \mapsto f \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix}$ が、$\exists \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ に対し、$f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} = 0$ かつ $\partial_{n+1} f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} \neq 0$ が成り立つとき、関数 $-f$ も考えることで $\partial_{n+1} f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} > 0$ が成り立つとしてもよい。その関数 $f$ は $C^1$ 級であることから偏導関数 $\partial_{n+1} f$ も連続であるので、$\forall \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} \in U \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} \right\| < \delta$ なら $\left\| \partial_{n+1} f \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} - \partial_{n+1} f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$ が成り立つ。定理 1.4.18 より $V_0 \times W \subseteq U$ かつ $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ かつ $W \subseteq \mathbb{R}$ なるそれらの点々 $\mathbf{a}$、$b$ の開近傍たちそれぞれ $V_0$、$W$ が存在して、$\forall \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} \in V_0 \times W$ に対し、$\partial_{n+1} f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} - \varepsilon < \partial_{n+1} f \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} < \partial_{n+1} f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} + \varepsilon$ が成り立つ。ここで、その正の実数 $\varepsilon$ を十分小さくとれば、$0 < \partial_{n+1} f \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix}$ が成り立つこともできる。

ここで、$\mathbf{x} = \mathbf{a}$ として、関数 $f^{\mathbf{a}} : W \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ y \end{pmatrix}$ が考えられると、その関数 $f^{\mathbf{a}}$ は上記の議論により狭義単調増加するので、$\forall y \in W$ に対し、次のことが成り立つ。

$$b < y \Rightarrow 0 = f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} = f^{\mathbf{a}}(b) < f^{\mathbf{a}}(y) = f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ y \end{pmatrix}, \quad y < b \Rightarrow f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ y \end{pmatrix} = f^{\mathbf{a}}(y) < f^{\mathbf{a}}(b) = f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} = 0$$

そこで、$\forall y_-, y_+ \in W$ に対し、$y_- < b < y_+$ が成り立つなら、$f\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ y_- \end{pmatrix} < 0 < f\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ y_+ \end{pmatrix}$ が成り立ち、その関数 $f$ は $C^1$ 級であることから連続であり $\forall \mathbf{x} \in V_0 \forall y \in W \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ y \end{pmatrix} \right\| < \delta$ なら $\left\| f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ y \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$ が成り立つ。定理 1.4.18 より $V \times W \subseteq U$ かつ $V \subseteq V_0$ かつ $W \subseteq \mathbb{R}$ なるそれらの点々 $\mathbf{a}$、$b$ の開近傍たちそれぞれ $V$、$W$ が存在して、$\forall \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} \in V \times W$ に対し、$f\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ y \end{pmatrix} - \varepsilon < f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} < f\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon$ が成り立つ。これにより、その正の実数 $\varepsilon$ を十分小さくとれば、実数の性質より $f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y_- \end{pmatrix} < 0 < f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y_+ \end{pmatrix}$ が成り立つこともできる。

ここで、$V \subseteq V_0$ が成り立つことから、もちろん、$\forall \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} \in V \times W$ に対し、$0 < \partial_{n+1} f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix}$ が成り立つので、関数 $f^{\mathbf{x}} : W \to \mathbb{R}; y \mapsto f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix}$ が考えられると、その関数 $f^{\mathbf{x}}$ は狭義単調増加するので、$f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y_- \end{pmatrix} < 0 < f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y_+ \end{pmatrix}$ が成り立つことによって中間値の定理より、$\forall \mathbf{x} \in V \exists ! y \in (y_-, y_+) \subseteq W$ に対し、$f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} = 0$ が成り立つ。その点 $x$ からこのような点 $y$ へ写す関数 $g : V \to W$ と関数 $g_\downarrow : V \to \mathbb{R}^n \times W; \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ g(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ が考えられれば、上記の議論により、$\forall \mathbf{x} \in V$ に対し、$g_\downarrow(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ g(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in V_0 \times W$ が成り立つので、$\partial_{n+1} f \circ g_\downarrow(\mathbf{x}) = \partial_{n+1} f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ g(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \neq 0$ が成り立ち、したがって、その開近傍 $V$ 上で次式が成り立つ。

$$\partial_{n+1} f \circ g_\downarrow : V \to \mathbb{R} \neq 0$$

また、定義より $f\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} = 0$ が成り立つので、$g(\mathbf{a}) = b$ が成り立ち、さらに、$\forall \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} \in V \times W$ に対し、$y = g(\mathbf{x})$ が成り立つなら、$f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} = 0$ が成り立つ。逆に、$f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} = 0$ が成り立つなら、先ほどの議論でその点 $y$ が一意的に存在することにより、$y = g(\mathbf{x})$ が成り立つ。

上記の開近傍 $V$ に属する任意の点 $\alpha$ に収束するその開近傍 $V$ の任意の点列 $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、$V(g) \subseteq (y_-, y_+)$ が成り立つので、その開近傍 $W$ の元の列 $(g(\mathbf{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である。ここで、Bolzano-Weierstrass の定理の定理よりその元の列 $(g(\mathbf{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ には収束する部分列 $(g(\mathbf{a}_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して、これの極限を $\eta$ とおく。もちろん、$\eta \in \mathrm{cl}(y_-, y_+) = [y_-, y_+]$ が成り立つ。ここで、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{n_k} \\ g(\mathbf{a}_{n_k}) \end{pmatrix} = 0$ が成り立ち、$k \to \infty$ とすれば、定理 2.4.19 より $f\begin{pmatrix} \alpha \\ \eta \end{pmatrix} = 0$ が得られるので、その関数 $g$ の定義より $\eta = g(\alpha)$ が成り立つ。ここで、$\lim_{n \to \infty} g(\mathbf{a}_n) = g(\alpha)$ が成り立たないと仮定すると、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}$ に対し、$\delta \leq n$ が成り立つかつ、$\|g(\mathbf{a}_n) - g(\alpha)\| \geq \varepsilon$ が成り立つので、このような自然数たち $n$ を取り出すことで、$\{g(\mathbf{a}_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq U(g(\alpha), \varepsilon)$ が成り立たないようなその元の列 $(g(\mathbf{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列が存在す

る。ここで、$V(g) \subseteq [y_-, y_+]$ が成り立つので、その部分列は Bolzano-Weierstrass の定理の定理よりその元の列 $(g(\mathbf{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ には収束する部分列 $(g(\mathbf{a}_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ をもち、上記の議論により、これは点 $g(\alpha)$ に収束する。一方で、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、仮定より $\varepsilon \leq \|g(\mathbf{a}_{n_k}) - g(\alpha)\|$ が成り立つので、$k \rightarrow \infty$ とすれば、$0 < \varepsilon \leq \|g(\alpha) - g(\alpha)\| = 0$ が成り立つことになるが、これは矛盾している。よって、$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\mathbf{a}_n) = g(\alpha)$ が成り立ちその関数 $g$ はその開近傍 $V$ で連続であることが示された。

さらに、上の陰関数 $g : V \rightarrow W$ について、その vector 空間 $\mathbb{R}^n$ の標準直交基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ がとられて、絶対値が十分小さい任意の 0 でない実数 $h$ を用いて次式のようにおく。

$$k = g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x})$$

さらに、関数 $\varphi_i$ が次式のように定義されれば、

$$\varphi_i = (\varphi_{ij})_{j \in \Lambda_{n+1}} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; t \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} + th\mathbf{e}_i \\ g(\mathbf{x}) + tk \end{pmatrix}$$

次のようになる。

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_i(0) &= f \begin{pmatrix} \mathbf{x} + 0h\mathbf{e}_i \\ g(\mathbf{x}) + 0k \end{pmatrix} \\ &= f \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ g(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0 \\ f \circ \varphi_i(1) &= f \begin{pmatrix} \mathbf{x} + h\mathbf{e}_i \\ g(\mathbf{x}) + k \end{pmatrix} \\ &= f \begin{pmatrix} \mathbf{x} + h\mathbf{e}_i \\ g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &= f \begin{pmatrix} \mathbf{x} + h\mathbf{e}_i \\ g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

ここで、Rolle の定理よりその関数 $f \circ \varphi_i$ が有界閉区間 $[0,1]$ で連続であるかつ、その開区間 $(0,1)$ で微分可能であり、さらに、$f \circ \varphi_i(0) = f \circ \varphi_i(1)$ が成り立つので、次式のようになる実数 $\theta$ がその開区間 $(0,1)$ で存在する。

$$\partial(f \circ \varphi_i)(\theta) = 0$$

したがって、$\mathbf{x} = (x_j)_{j \in \Lambda_n}$、$\mathbf{e}_i = (\delta_{ij})_{j \in \Lambda_n}$ とすれば、$\partial\varphi_{ij} = h\delta_{ij}$、$\partial\varphi_{i,n+1} = k$ に注意して $j \in \Lambda_n$ として次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= \partial(f \circ \varphi_i) \\ &= (\partial_j f \circ \varphi_i) \partial\varphi_{ij} + (\partial_{n+1} f \circ \varphi_i) \partial\varphi_{i,n+1} \\ &= (\partial_j f \circ \varphi_i) h\delta_{ij} + (\partial_{n+1} f \circ \varphi_i) k \\ &= h(\partial_i f \circ \varphi_i) + k(\partial_{n+1} f \circ \varphi_i) \end{aligned}$$

ここで、$h \neq 0$ に注意すれば、次のようになる。

$$-\frac{\partial_i f \circ \varphi_i}{\partial_{n+1} f \circ \varphi_i}(\theta) = \frac{k}{h} = \frac{g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x})}{h}$$

ここで、上で述べられているようにその関数 $g$ はその開近傍 $V$ で連続であるから、次のようになり、

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} (g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x}))$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} g\left(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i\right) - g\left(\mathbf{x}\right)\\
&= g\left(\lim_{h\to 0}\left(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i\right)\right) - g\left(\mathbf{x}\right)\\
&= g\left(\mathbf{x}\right) - g\left(\mathbf{x}\right) = 0
\end{aligned}$$

したがって、その関数 $f$ が $C^1$ 級であることから、$\partial_{n+1} f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} > 0$ に注意して、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left(-\frac{\partial_i f \circ \varphi_i}{\partial_{n+1} f \circ \varphi_i}(\theta)\right) &= -\lim_{h\to 0}\frac{\partial_i f}{\partial_{n+1} f} \circ \varphi_i(\theta)\\
&= -\frac{\partial_i f}{\partial_{n+1} f}\left(\lim_{h\to 0}\varphi_i(\theta)\right)\\
&= -\frac{\partial_i f}{\partial_{n+1} f}\begin{pmatrix} \lim_{h\to 0}\left(\mathbf{x}+\theta h\mathbf{e}_i\right) \\ \lim_{h\to 0}\left(g\left(\mathbf{x}\right)+\theta k\right) \end{pmatrix}\\
&= -\frac{\partial_i f}{\partial_{n+1} f}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ g\left(\mathbf{x}\right) \end{pmatrix}\\
&= -\frac{\partial_i f}{\partial_{n+1} f}\left(g_{\downarrow}\left(\mathbf{x}\right)\right)\\
&= -\frac{\partial_i f}{\partial_{n+1} f} \circ g_{\downarrow}\left(\mathbf{x}\right)
\end{aligned}$$

一方で、次のようになるので、

$$\lim_{h\to 0}\frac{g\left(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i\right) - g\left(\mathbf{x}\right)}{h} = \partial_i g\left(\mathbf{x}\right)$$

次式が得られる。

$$\partial_i g\left(\mathbf{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{k}{h} = -\frac{\partial_i f}{\partial_{n+1} f} \circ g_{\downarrow}\left(\mathbf{x}\right)$$

　ここで、その関数 $g$ が連続であるので、上の式の右辺も連続となり、したがって、偏導関数 $\partial_i g$ もその開近傍 $V$ 上で連続である。ゆえに、その関数 $g$ は $C^1$ 級であるから、次のことに注意すれば、

$$-\frac{\partial_{n+1} f}{\partial_{n+1} f} \circ g_{\downarrow}\left(\mathbf{x}\right) = -\frac{\partial_{n+1} f \circ g_{\downarrow}\left(\mathbf{x}\right)}{\partial_{n+1} f \circ g_{\downarrow}\left(\mathbf{x}\right)} = -1$$

よって、次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \mathrm{grad} g\left(\mathbf{x}\right) \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{grad} f}{\partial_{n+1} f} \circ g_{\downarrow}\left(\mathbf{x}\right)$$

　あとは明らかであろう。

　最後に、$U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ なる開集合 $U$ を用いた $C^r$ 級関数 $f : U \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix}$ が、$\exists \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ に対し、$f\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} = 0$ かつ $\partial_{n+1} f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ b \end{pmatrix} \neq 0$ が成り立つとき、その陰関数 $g : V \to W$ もその開近傍 $V$ 上で $C^r$ 級であることは先ほどの議論と数学的帰納法により直ちに示される。実際、$r = 1$ のときでは、先ほどの議論

そのものであるから、$r=k$ のとき、仮定が成り立つものとすれば、$r=k+1$ のとき、その関数 $f$ は $C^k$ 級であるから、その陰関数 $g$ はその開近傍 $V$ 上で $C^k$ 級であり、先ほどの議論の次の式から

$$\partial_i g = -\frac{\partial_i f}{\partial_{n+1} f} \circ g_{\downarrow}$$

その関数 $\partial_i g$ も $C^{k-1}$ 級で、ゆえに、その陰関数 $g$ もその開近傍 $V$ 上で $C^{k+1}$ 級である。 □

### 3.5.4 よりよい陰関数定理

**定理 3.5.4** (よりよい陰関数定理)**.** $U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ なる開集合 $U$ を用いた $C^1$ 級関数 $f : U \to \mathbb{R}^n; \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \mapsto f \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ が、$\exists \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ に対し、$f \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ かつ $f = (f_i)_{i \in \varLambda_n}$、$\nabla^* = (\partial_i)_{i \in \varLambda_m}$、$\nabla_* = (\partial_i)_{i \in \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m}$ とおいて次式が成り立つとき[*61]、

$$\det {}^t \left( \nabla_* {}^t f \right) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \neq 0$$

$V \times W \subseteq U$ かつ $V \subseteq \mathbb{R}^m$ かつ $W \subseteq \mathbb{R}^n$ なるそれらの点々 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ の開近傍たちそれぞれ $V$、$W$ と関数 $g : V \to W$ が存在して、$g_{\downarrow} : V \to \mathbb{R}^n \times W; \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ g(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ とすれば、次のことが成り立つ。

- その開近傍 $V$ 上で次式が成り立つ[*62]。

$$\left( \det {}^t \left( \nabla_* {}^t f \right) \circ g_{\downarrow} : V \to \mathbb{R} \right) \neq 0$$

- $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ が成り立つ。
- その関数 $g$ はその開近傍 $V$ で連続である。
- $\forall \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in V \times W$ に対し、$f \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り、$\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ が成り立つ。

また、その陰関数 $g$ について、次のことが成り立つ。

- その陰関数 $g$ はその開近傍 $V$ 上で $C^1$ 級である。

---

[*61] つまり次式が成り立つときである。

$$\begin{vmatrix} \partial_{m+1} f_1 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \partial_{m+2} f_1 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n} f_1 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \\ \partial_{m+1} f_2 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \partial_{m+2} f_2 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n} f_2 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1} f_n \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \partial_{m+2} f_n \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n} f_n \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \end{vmatrix} \neq 0$$

[*62] つまり、次式が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} \partial_{m+1} f_1 \circ g_{\downarrow} & \partial_{m+2} f_1 \circ g_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_1 \circ g_{\downarrow} \\ \partial_{m+1} f_2 \circ g_{\downarrow} & \partial_{m+2} f_2 \circ g_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_2 \circ g_{\downarrow} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1} f_n \circ g_{\downarrow} & \partial_{m+2} f_n \circ g_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_n \circ g_{\downarrow} \end{vmatrix} \neq 0$$

- その開近傍 $V$ 上で次式が成り立つ[*63]。

$$J_g = -\left({}^t\left(\nabla_*{}^t f\right)^{-1}{}^t\left(\nabla^{*t} f\right)\right)\circ g_\downarrow$$

さらに、$U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ なる開集合 $U$ を用いた $C^r$ 級関数 $f: U \to \mathbb{R}^n; \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ が、$\exists \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ に対し、$f\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ かつ次式が成り立つとき、

$$\det{}^t\left(\nabla_*{}^t f\right)\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_{m+1} f_1 & \partial_{m+2} f_1 & \cdots & \partial_{m+n} f_1 \\ \partial_{m+1} f_2 & \partial_{m+2} f_2 & \cdots & \partial_{m+n} f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1} f_n & \partial_{m+2} f_n & \cdots & \partial_{m+n} f_n \end{vmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \neq 0$$

定理**??**での陰関数 $g: V \to W$ もその開近傍 $V$ 上で $C^r$ 級である。

**証明.** $U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ なる開集合 $U$ を用いた $C^1$ 級関数 $f: U \to \mathbb{R}^n; \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ が、$\exists \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ に対し、$f\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ かつ $f = (f_i)_{i \in \Lambda_n}$、$\nabla^* = (\partial_i)_{i \in \Lambda_m}$、$\nabla_* = (\partial_i)_{i \in \Lambda_{m+n} \setminus \Lambda_m}$ とおいて次式が成り立つとき、

$$\det{}^t\left(\nabla_*{}^t f\right)\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_{m+1} f_1 & \partial_{m+2} f_1 & \cdots & \partial_{m+n} f_1 \\ \partial_{m+1} f_2 & \partial_{m+2} f_2 & \cdots & \partial_{m+n} f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1} f_n & \partial_{m+2} f_n & \cdots & \partial_{m+n} f_n \end{vmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \neq 0$$

$n = 1$ のときはまさしく陰関数定理そのものであるから、$n = k$ のとき、示すべきことが成り立つと仮定すると、行列 ${}^t\left(\nabla_*{}^t f\right)\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ の第 $n$ 行の成分はすべて $0$ であることはないので、添数を付け替えて $\partial_{m+n} f_n\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \neq 0$ が成り立つとしてもよい。ここで、陰関数定理より $\mathbf{b} = (b_i)_{i \in \Lambda_n}$、$\mathbf{b}^* = (b_i)_{i \in \Lambda_{n-1}}$ とおかれれば、$V_1 \times W_1 \subseteq U$ かつ $V_1 \subseteq \mathbb{R}^{m+n-1}$ かつ $W_1 \subseteq \mathbb{R}$ なるそれらの点々 $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix}$、$b_n$ の開近傍たちそれぞれ $V_1$、$W_1$ と関数 $h: V_1 \to W_1$ が存在して、$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^* \\ y_n \end{pmatrix}$ として、$h_\downarrow: V_1 \to \mathbb{R}^{m+n-1} \times W_1; \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^* \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^* \end{pmatrix} \\ h\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^* \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ とすれば、次のことが成り立つ。

---

[*63] つまり、次式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \partial_2 g_1 & \cdots & \partial_m g_1 \\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 & \cdots & \partial_m g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_n & \partial_2 g_n & \cdots & \partial_m g_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \partial_{m+1} f_1 \circ g_\downarrow & \partial_{m+2} f_1 \circ g_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n} f_1 \circ g_\downarrow \\ \partial_{m+1} f_2 \circ g_\downarrow & \partial_{m+2} f_2 \circ g_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n} f_2 \circ g_\downarrow \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1} f_n \circ g_\downarrow & \partial_{m+2} f_n \circ g_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n} f_n \circ g_\downarrow \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \circ g_\downarrow & \partial_2 f_1 \circ g_\downarrow & \cdots & \partial_m f_1 \circ g_\downarrow \\ \partial_1 f_2 \circ g_\downarrow & \partial_2 f_2 \circ g_\downarrow & \cdots & \partial_m f_2 \circ g_\downarrow \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n \circ g_\downarrow & \partial_2 f_n \circ g_\downarrow & \cdots & \partial_m f_n \circ g_\downarrow \end{pmatrix}$$

- $h\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^{*} \end{pmatrix} = b_{n}$ が成り立つ。
- その関数 $h$ はその開近傍 $V_{1}$ で連続である。
- $\forall\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in V_{1} \times W_{1}$ に対し、$f_{n}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = 0$ が成り立つならそのときに限り、$y_{n} = h\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix}$ が成り立つ。
- その開近傍 $V_{1}$ 上で、$\forall i \in \varLambda_{n-1}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\partial_{m+i}h = -\frac{\partial_{m+i}f_{n}}{\partial_{m+n}f_{n}} \circ h_{\downarrow}$$

ここで、$f^{*} = \left( f_{i} \right)_{i \in \varLambda_{n-1}}$、$h_{\downarrow} = \left( h_{i}^{\downarrow} \right)_{i \in \varLambda_{m+n}}$ とし関数 $F = \left( F_{i} \right)_{i \in \varLambda_{n-1}} = f^{*} \circ h_{\downarrow} : V_{1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ が定義されると、その関数 $f$ とその陰関数 $h$ は $C^{1}$ 級であるから、その関数 $F$ も $C^{1}$ 級であり、$h\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^{*} \end{pmatrix} = b_{n}$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned}
h_{\downarrow}\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^{*} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^{*} \\ h\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^{*} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^{*} \\ b_{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \\
F\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^{*} \end{pmatrix} &= f^{*} \circ h_{\downarrow}\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^{*} \end{pmatrix} = f^{*}\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0 \\
\partial_{m+i}h\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} &= -\frac{\partial_{m+i}f_{n}}{\partial_{m+n}f_{n}}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \\ h\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{\partial_{m+i}f_{n}}{\partial_{m+n}f_{n}} \circ h_{\downarrow}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

さらに、関数 $\det{}^{t}\left( \nabla_{*}{}^{t}F \right) : V_{1} \rightarrow \mathbb{R}$ が次のように定義されると、

$$\det{}^{t}\left( \nabla_{*}{}^{t}F \right) : V_{1} \rightarrow \mathbb{R}; \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} \partial_{m+1}F_{1}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} & \partial_{m+2}F_{1}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n-1}F_{1}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} \\ \partial_{m+1}F_{2}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} & \partial_{m+2}F_{2}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n-1}F_{2}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1}F_{n-1}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} & \partial_{m+2}F_{n-1}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n-1}F_{n-1}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$\det{}^{t}\left( \nabla_{*}{}^{t}F \right)\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^{*} \end{pmatrix} \neq 0$ が成り立つ。実際、その関数 $F$ の定義より、次のようにおいて、$\forall(i,j) \in \varLambda_{n-1}^{2}$ に対し、$k \in \varLambda_{m+n-1}$ として $\forall i,j \in \varLambda_{n-1}$ に対し、$\partial_{m+j}h_{k}^{\downarrow} = \delta_{m+j,k}$、$\partial_{m+n}h_{m+n}^{\downarrow} = \partial_{m+n}h$ に注意すれば、連鎖律より次のようになるので、

$$\begin{aligned}
\partial_{m+j}F_{i} &= \partial_{m+j}\left( f_{i} \circ h_{\downarrow} \right) \\
&= \left( \partial_{k}f_{i} \circ h_{\downarrow} \right)\partial_{m+j}h_{k}^{\downarrow} + \left( \partial_{m+n}f_{i} \circ h_{\downarrow} \right)\partial_{m+j}h_{m+n}^{\downarrow} \\
&= \left( \partial_{k}f_{i} \circ h_{\downarrow} \right)\delta_{m+j,k} + \left( \partial_{m+n}f_{i} \circ h_{\downarrow} \right)\partial_{m+n}h \\
&= \partial_{m+j}f_{i} \circ h_{\downarrow} + \left( \partial_{m+n}f_{i} \circ h_{\downarrow} \right)\partial_{m+n}h
\end{aligned}$$

したがって、行列 $A$ の第 $j$ 列 vector を $\mathbf{a}$ と置き換えたものを $\mathfrak{s}_{j,\mathbf{a}}(A)$ とおくことにすると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\det{}^t\left(\nabla_*{}^tF\right) &= \begin{vmatrix} \partial_{m+1}F_1 & \partial_{m+2}F_1 & \cdots & \partial_{m+n-1}F_1 \\ \partial_{m+1}F_2 & \partial_{m+2}F_2 & \cdots & \partial_{m+n-1}F_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1}F_{n-1} & \partial_{m+2}F_{n-1} & \cdots & \partial_{m+n-1}F_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \left| \begin{matrix} \partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow + \left(\partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow\right)\partial_{m+1}h \\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow + \left(\partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow\right)\partial_{m+1}h \\ \vdots \\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ h_\downarrow + \left(\partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow\right)\partial_{m+1}h \end{matrix} \right. \\
&\qquad \begin{matrix} \partial_{m+2}f_1\circ h_\downarrow + \left(\partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow\right)\partial_{m+2}h \\ \partial_{m+2}f_2\circ h_\downarrow + \left(\partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow\right)\partial_{m+2}h \\ \vdots \\ \partial_{m+2}f_{n-1}\circ h_\downarrow + \left(\partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow\right)\partial_{m+2}h \end{matrix} \\
&\qquad \left. \begin{matrix} \cdots & \partial_{m+n-1}f_1\circ h_\downarrow + \left(\partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow\right)\partial_{m+n-1}h \\ \cdots & \partial_{m+n-1}f_2\circ h_\downarrow + \left(\partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow\right)\partial_{m+n-1}h \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & \partial_{m+n-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow + \left(\partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow\right)\partial_{m+n-1}h \end{matrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} \partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_1\circ h_\downarrow \\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_2\circ h_\downarrow \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow \end{vmatrix} \\
&\quad + \partial_{m+1}h \begin{vmatrix} \partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_1\circ h_\downarrow \\ \partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_2\circ h_\downarrow \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow \end{vmatrix} \\
&\quad + \partial_{m+2}h \begin{vmatrix} \partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow & \partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_1\circ h_\downarrow \\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow & \partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_2\circ h_\downarrow \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow \end{vmatrix} \\
&\quad + \cdots + \partial_{m+n-1}h \begin{vmatrix} \partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow \\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow \end{vmatrix} \\
&\quad + \partial_{m+1}h\partial_{m+2}h\cdots\partial_{m+n-1}h \begin{vmatrix} \partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow & \partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow \\ \partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow & \partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_1\circ h_\downarrow \\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_2\circ h_\downarrow \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$
+\sum_{j\in\Lambda_{n-1}}\partial_{m+j}h\begin{vmatrix}\partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_1\circ h_\downarrow\\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_2\circ h_\downarrow\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow\end{vmatrix}
$$

ここで、上により次式が成り立つので、

$$
\partial_{m+i}h=-\frac{\partial_{m+i}f_n}{\partial_{m+n}f_n}\circ h_\downarrow
$$

余因子展開に気を付ければ、次のようになり、

$$
\det{}^t\left(\nabla_*{}^tF\right)=\begin{vmatrix}\partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_1\circ h_\downarrow\\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_2\circ h_\downarrow\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ u & \partial_{m+2}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow\end{vmatrix}
$$

$$
-\sum_{j\in\Lambda_{n-1}}\left(\frac{\partial_{m+j}f_n}{\partial_{m+n}f_n}\circ h_\downarrow\right)\begin{vmatrix}\partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_1\circ h_\downarrow\\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_2\circ h_\downarrow\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow\end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{\partial_{m+n}f_n\circ h_\downarrow}\left(\partial_{m+n}f_n\circ h_\downarrow\begin{vmatrix}\partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_1\circ h_\downarrow\\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_2\circ h_\downarrow\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ u & \partial_{m+2}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow\end{vmatrix}\right.
$$

$$
\left.-\sum_{j\in\Lambda_{n-1}}\partial_{m+j}f_n\circ h_\downarrow\begin{vmatrix}\partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_1\circ h_\downarrow\\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_2\circ h_\downarrow\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow\end{vmatrix}\right)
$$

$$
=\frac{1}{\partial_{m+n}f_n\circ h_\downarrow}\left(\partial_{m+n}f_n\circ h_\downarrow\begin{vmatrix}\partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_1\circ h_\downarrow\\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow & \partial_{m+2}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_2\circ h_\downarrow\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ u & \partial_{m+2}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+n-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow\end{vmatrix}\right.
$$

$$
+\sum_{j\in\Lambda_{n-1}}(-1)^{n+j}\,\partial_{m+j}f_n\circ h_\downarrow\begin{vmatrix}\partial_{m+1}f_1\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+j-1}f_1\circ h_\downarrow\\ \partial_{m+1}f_2\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+j-1}f_2\circ h_\downarrow\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{m+1}f_{n-1}\circ h_\downarrow & \cdots & \partial_{m+j-1}f_{n-1}\circ h_\downarrow\end{vmatrix}
$$

$$\left.\begin{matrix} \partial_{m+j+1} f_1 \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_1 \circ h_{\downarrow} \\ \partial_{m+j+1} f_2 \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_2 \circ h_{\downarrow} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+j+1} f_{n-1} \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_{n-1} \circ h_{\downarrow} \end{matrix}\right|\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\partial_{m+n} f_n \circ h_{\downarrow}} \left( \sum_{j \in \varLambda_n} (-1)^{n+j} \partial_{m+j} f_n \circ h_{\downarrow} \left| \begin{matrix} \partial_{m+1} f_1 \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+j-1} f_1 \circ h_{\downarrow} \\ \partial_{m+1} f_2 \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+j-1} f_2 \circ h_{\downarrow} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1} f_{n-1} \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+j-1} f_{n-1} \circ h_{\downarrow} \end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \partial_{m+j+1} f_1 \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_1 \circ h_{\downarrow} \\ \partial_{m+j+1} f_2 \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_2 \circ h_{\downarrow} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+j+1} f_{n-1} \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_{n-1} \circ h_{\downarrow} \end{matrix}\right|\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right)$$

$$= \frac{1}{\partial_{m+n} f_n \circ h_{\downarrow}} \begin{vmatrix} \partial_{m+1} f_1 \circ h_{\downarrow} & \partial_{m+2} f_1 \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_1 \circ h_{\downarrow} \\ \partial_{m+1} f_2 \circ h_{\downarrow} & \partial_{m+2} f_2 \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_2 \circ h_{\downarrow} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1} f_n \circ h_{\downarrow} & \partial_{m+2} f_n \circ h_{\downarrow} & \cdots & \partial_{m+n} f_n \circ h_{\downarrow} \end{vmatrix}$$

したがって、$h_{\downarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ より次のようになる。

$$\begin{aligned} \det{}^t \left( \nabla_* {}^t F \right) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} &= \frac{1}{\partial_{m+n} f_n \circ h_{\downarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix}} \begin{vmatrix} \partial_{m+1} f_1 \circ h_{\downarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} & \partial_{m+2} f_1 \circ h_{\downarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n} f_1 \circ h_{\downarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} \\ \partial_{m+1} f_2 \circ h_{\downarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} & \partial_{m+2} f_2 \circ h_{\downarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n} f_2 \circ h_{\downarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1} f_n \circ h_{\downarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} & \partial_{m+2} f_n \circ h_{\downarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n} f_n \circ h_{\downarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\partial_{m+n} f_n \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}} \begin{vmatrix} \partial_{m+1} f_1 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \partial_{m+2} f_1 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n} f_1 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \\ \partial_{m+1} f_2 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \partial_{m+2} f_2 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n} f_2 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m+1} f_n \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \partial_{m+2} f_n \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & \cdots & \partial_{m+n} f_n \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ここで、仮定より $\det{}^t \left( \nabla_* {}^t F \right) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} \neq 0$ が得られる。

これにより、数学的帰納法の仮定より、$\exists \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1}$ に対し、$F \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} = 0$ かつ $\det{}^t \left( \nabla_* {}^t F \right) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* \end{pmatrix} \neq 0$ が成り立つので、$V \times W_0 \subseteq V_1$ かつ $V \subseteq \mathbb{R}^m$ かつ $W_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ なるそれらの点々 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}^*$ の開近傍たちそれぞれ $V$、$W_0$ と関数 $k : V \rightarrow W_0$ が存在して、次のことが成り立つ。

- $k(\mathbf{a}) = \mathbf{b}^*$ が成り立つ。
- その関数 $k$ はその開近傍 $V$ で連続である。

- $\forall\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} \in V \times W_{0}$ に対し、$F\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} = 0$ が成り立つならそのときに限り、$\mathbf{y}^{*} = k\left( \mathbf{x} \right)$ が成り立つ。

このとき、$W = W_{0} \times W_{1}$ とおけば、その集合 $W$ はその元 $\mathbf{b}$ の開近傍である。さらに、次式のように関数 $g$ が定義されれば、

$$g = \left( g_{i} \right)_{i \in \varLambda_{n}}:V \rightarrow W;\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} k\left( \mathbf{x} \right) \\ h\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ k\left( \mathbf{x} \right) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

これが求める陰関数となる。実際、点 $g\left( \mathbf{a} \right)$ について、次のようになる。

$$g\left( \mathbf{a} \right) = \begin{pmatrix} k\left( \mathbf{a} \right) \\ h\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ k\left( \mathbf{a} \right) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{*} \\ h\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^{*} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{*} \\ b_{n} \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

さらに、その関数 $h$ はその開近傍 $V_{1}$ で連続であるかつ、その関数 $k$ はその開近傍 $V$ で連続であるので、その関数 $g$ もその開近傍 $V$ で連続である。

$\forall\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in V \times W$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \\ y_{n} \end{pmatrix} = 0 \\ f_{n}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \right.\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \\ h\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0 \\ y_{n} = h\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} \end{aligned} \right.\\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} F\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} = 0 \\ y_{n} = h\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} \end{aligned} \right.\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{y}^{*} = k\left( \mathbf{x} \right) \\ y_{n} = h\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} \end{aligned} \right.\\ &\Leftrightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} k\left( \mathbf{x} \right) \\ h\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{*} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = g\left( \mathbf{x} \right) \end{aligned}$$

それらの関数たち $h$、$k$ は陰関数定理より $C^{1}$ 級であるから、その関数 $g$ も $C^{1}$ 級であり、$\forall\mathbf{x} \in V$ に対し、$f\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ g\left( \mathbf{x} \right) \end{pmatrix} = 0$ が成り立つので、関数 $g_{\downarrow}$ が次のように定義されると、

$$g_{\downarrow} = \left( g_{i}^{\downarrow} \right)_{i \in \varLambda_{m + n}}:V \rightarrow \mathbb{R}^{m + n};\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ g\left( \mathbf{x} \right) \end{pmatrix}$$

$f \circ g_{\downarrow} = 0$ で、$\forall i \in \varLambda_{n}\forall j \in \varLambda_{m}$ に対し、$k^{*} \in \varLambda_{m}$、$k_{*} \in \varLambda_{m + n} \setminus \varLambda_{m}$、$k \in \varLambda_{n}$ として次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{j}\left( f_{i} \circ g_{\downarrow} \right)\\ &= \left( \partial_{k^{*}}f_{i} \circ g_{\downarrow} \right)\partial_{j}g_{k^{*}}^{\downarrow} + \left( \partial_{k_{*}}f_{i} \circ g_{\downarrow} \right)\partial_{j}g_{k_{*}}^{\downarrow}\\ &= \left( \partial_{k^{*}}f_{i} \circ g_{\downarrow} \right)\delta_{jk^{*}} + \left( \partial_{k_{*}}f_{i} \circ g_{\downarrow} \right)\partial_{j}g_{k_{*} - m}\\ &= \partial_{j}f_{i} \circ g_{\downarrow} + \left( \partial_{m + k}f_{i} \circ g_{\downarrow} \right)\partial_{j}g_{k}\\ &= \left( \partial_{m + k}f_{i} \circ g_{\downarrow} \right)\partial_{j}g_{k} + \partial_{j}f_{i} \circ g_{\downarrow} \end{aligned}$$

ゆえに、次のようになる。

$$O={}^{t}\left(\nabla^{*t}f\right)\circ g_{\downarrow}+\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)J_{g}$$

ここで、仮定より $\det{}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{pmatrix}\neq 0$ が成り立つので、その関数 $f$ が $C^1$ 級であることとその関数 $g$ が連続であることから、その点 $\mathbf{a}$ のある開近傍 $V$ が存在して、$\forall\mathbf{x}\in V$ に対し、次式が成り立つ。

$$\det\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)(\mathbf{x})=\det{}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}(\mathbf{x})=\det{}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\g(\mathbf{x})\end{pmatrix}\neq 0$$

ゆえに、その行列 $\partial_{*}f\circ g_{\downarrow}$ は正則行列でこれの逆行列 $\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)^{-1}$ が存在する。よって、次のようになる。

$$\begin{aligned}J_{g}&=\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)^{-1}\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)J_{g}\\&=\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)^{-1}\left({}^{t}\left(\nabla^{*t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right.\\&\quad\left.+\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)J_{g}-{}^{t}\left(\nabla^{*t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)\\&=\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)^{-1}\left({}^{t}\left(\nabla^{*t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right.\\&\quad\left.+\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)J_{g}\right)-\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)^{-1}\left({}^{t}\left(\nabla^{*t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)\\&=\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)^{-1}O-\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)^{-1}\left({}^{t}\left(\nabla^{*t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)\\&=-\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)^{-1}\left({}^{t}\left(\nabla^{*t}f\right)\circ g_{\downarrow}\right)\\&=-\left({}^{t}\left(\nabla_{*}{}^{t}f\right)^{-1}{}^{t}\left(\nabla^{*t}f\right)\right)\circ g_{\downarrow}\end{aligned}$$

残りは陰関数定理のと同様にして示される。 □

### 3.5.5 よりよい逆関数定理

ここでは、先ほど挙げられた逆関数定理の一般化を述べていこう。

**定理 3.5.5** (よりよい逆関数定理)**.** $U\subseteq\mathbb{R}^n$ なる開集合 $U$ を用いた関数 $f:U\rightarrow\mathbb{R}^n$ がその開集合 $U$ で $C^1$ 級であるかつ、$\exists\mathbf{a}\in U$ に対し、行列 $J_f(\mathbf{a})$ の逆行列が存在する、即ち、$\det J_f(\mathbf{a})\neq 0$ が成り立つとき、次のことが成り立つ。

- $V\subseteq U$ なるそれらの点々 $\mathbf{a}$、$f(\mathbf{a})$ の開近傍 $V$、$W$ が存在して、関数 $f|V:V\rightarrow W$ は全単射である。
- その逆関数 $(f|V)^{-1}$ はその開集合 $W$ で $C^1$ 級であり次式が成り立つ。

$$J_{(f|V)^{-1}}=\left(J_f\circ(f|V)^{-1}\right)^{-1}:W\rightarrow V$$

- その関数 $f$ がその開集合 $V$ で $C^r$ 級なら逆関数 $(f|V)^{-1}$ もその開集合 $W$ で $C^r$ 級である。

この定理をここではよりよい逆関数定理ということにする。

なお、上の 1 つ目の主張から、その逆関数 $(f|V)^{-1}$ がその開集合 $W$ で $C^1$ 級であることが実は 2 つ目、3 つ目の主張がなくても分かる。実際、関数 $f|V$ は全単射であり、もちろん、その関数 $f|V$ はその開近傍 $V$ で $C^1$ 級であるかつ、行列 $J_{f|V}(\mathbf{x})$ の逆行列が存在するかつ、その関数 $f|V$ は全単射であるので、逆関数定理よりその逆関数 $(f|V)^{-1}$ はその開集合 $W$ で $C^1$ 級である。

**証明.** $U \subseteq \mathbb{R}^n$ なる開集合 $U$ を用いた関数 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n; \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ がその集合 $U$ で $C^1$ 級であるかつ、$\exists \mathbf{a} \in U$ に対し、行列 $J_f(\mathbf{a})$ の逆行列が存在する、即ち、$\det J_f(\mathbf{a}) \neq 0$ が成り立つとき、関数 $F$ が次式のように定義されれば、

$$F = (F_i)_{i \in \varLambda_n} : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n; \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \mapsto f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$$

この関数 $F$ は明らかに $C^1$ 級である。また、次のことが成り立つかつ、

$$F \begin{pmatrix} f(\mathbf{a}) \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

$f = (f_i)_{i \in \varLambda_n}$、$\nabla^* = (\partial_i)_{i \in \varLambda_n}$、$\nabla_* = (\partial_i)_{i \in \varLambda_{2n} \setminus \varLambda_n}$ としたとき、${}^t \left(\nabla^{*t} F\right) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = J_f(\mathbf{x})$ のようになることから、$\det {}^t \left(\nabla^{*t} F\right) \neq 0$ が成り立つので、$\det {}^t \left(\nabla^{*t} F\right) \begin{pmatrix} f(\mathbf{a}) \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \neq 0$ が成り立つ。これにより、よりよい陰関数定理より、$V \subseteq U$ なるそれらの点々 $\mathbf{a}$、$f(\mathbf{a})$ の開近傍 $V$、$W$ と関数 $g : W \rightarrow V$ が存在して、次のことが成り立つ。

- $g \circ f(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ が成り立つ。
- $\forall \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in W \times V$ に対し、$F \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = 0$ が成り立つならそのときに限り、$\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$ が成り立つ。

ここで、$F \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = 0$ が成り立つならそのときに限り、$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ が成り立つので、$g \circ f = I_V$ かつ $f \circ g = I_W$ が成り立ちその関数 $g$ はその関数 $f|V$ の逆関数である。

また、その開集合 $W$ で $f \circ g = f \circ (f|V)^{-1} = I_W$ が成り立つので、この式 $f \circ (f|V)^{-1} = I_W$ の両辺に微分すれば、次のようになる。

$$I_n = J_{I_W} = J_{f \circ (f|V)^{-1}} = \left(J_f \circ (f|V)^{-1}\right) J_{(f|V)^{-1}}$$

$\forall \mathbf{y} \in W$ に対し、$\mathbf{x} = (f|V)^{-1}(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y})$ とおかれれば、その逆関数 $(f|V)^{-1}$ は $C^1$ 級で次式が成り立つ。

$$J_{(f|V)^{-1}} = \left(J_f \circ (f|V)^{-1}\right)^{-1} : W \rightarrow V$$

$r = 1$ のときはすでに示されている。$r = k$ のとき、その関数 $f$ が $C^k$ 級なら逆関数 $(f|V)^{-1}$ も $C^k$ 級であると仮定すると、$r = k + 1$ のとき、その関数 $f$ が $C^{k+1}$ 級なら、次のようになることから、

$$J_{(f|V)^{-1}} = \left(J_f \circ (f|V)^{-1}\right)^{-1} = \frac{\widetilde{J_f \circ (f|V)^{-1}}}{\det \left(J_f \circ (f|V)^{-1}\right)} = \frac{\widetilde{J_f}}{\det J_f} \circ (f|V)^{-1}$$

その行列 $J_{(f|V)^{-1}}$ の各成分は $\mathbf{x}$ の関数とみたときその開近傍 $V$ で $C^k$ 級である。ここで、数学的帰納法の仮定よりその逆関数 $(f|V)^{-1}$ は $C^k$ 級であるから、その関数 $J_{(f|V)^{-1}}$ は $C^k$ 級の関数たちの合成関数であり、したがって、$C^k$ 級である。よって、逆関数 $(f|V)^{-1}$ も $C^{k+1}$ 級である。以上より、その関数 $f$ が $C^r$ 級なら逆関数 $(f|V)^{-1}$ も $C^r$ 級であることが示された。 □

### 3.5.6 多様体における逆関数定理

**定理 3.5.6** (多様体における逆関数定理)**.** $n$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、その元 $p$ における微分 $\left.\varphi_{*}\right|_{p}$ が線形同型写像であるなら[*64]、これらの元々 $p$、$\varphi(p)$ のある開近傍 $V^{*}$、$W^{*}$ が存在して、その写像 $\varphi|V^{*}:V^{*}\rightarrow W^{*}$ がその開部分多様体 $(V^{*},\mathfrak{O}_{V^{*}})$ からその開部分多様体 $(W^{*},\mathfrak{P}_{W^{*}})$ への微分同相写像となる。

**証明.** $n$ 次元 $C^{\infty}$ 級多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$、$(\mathcal{N},\mathfrak{P})$、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ からその多様体 $(\mathcal{N},\mathfrak{P})$ への可微分写像 $\varphi:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{N}$ が与えられたとき、$\forall p\in\mathcal{M}$ に対し、その元 $p$ における微分 $\left.\varphi_{*}\right|_{p}$ が線形同型写像であるなら、それらの元 $p$、$\varphi(p)$ の座標近傍をそれぞれ $(V,\psi)$、$(W,\chi)$ とし、その写像 $\varphi$ は連続であるから、次のようにおけば、

$$V'=V\cap V\left(\varphi^{-1}|W\right),\quad W'=W\cap V\left(\varphi|V\right)$$
$$E'=V\left(\psi|V'\right),\quad F'=V\left(\chi|W'\right)$$

これらの集合たち $V'$、$W'$ はそれらの元 $p$、$\varphi(p)$ の開近傍となっている。そこで、次のようにおけば、

$$\psi':V'\rightarrow E';p\mapsto\psi(p),\quad \chi':W'\rightarrow F';q\mapsto\chi(q)$$

それらの写像たち $\psi'$、$\chi'$ も同相写像となる。さらに、その多様体 $(\mathcal{M},\mathfrak{O})$ が $C^{\infty}$ 級であることから、それらの写像たち ${\psi'}^{-1}:E'\rightarrow V'$、$\chi':W'\rightarrow F'$ はいずれもそれぞれその開部分多様体 $\left(E',\left(\mathfrak{O}_{d_{E^{n}}}\right)_{E'}\right)$ からその開部分多様体 $(V',\mathfrak{O}_{V'})$ への、その開部分多様体 $(W',\mathfrak{P}_{W'})$ からその開部分多様体 $\left(F',\left(\mathfrak{O}_{d_{E^{n}}}\right)_{F'}\right)$ への微分同相写像であるとみなせる。したがって、定理 3.4.8 よりそれらの微分たち $\left.{\psi'}^{-1}_{*}\right|_{\psi(p)}$、$\left.\chi'_{*}\right|_{\chi\circ\varphi(p)}$ は線形同型写像となる。そこで、次のように関数 $f$ がおかれれば、

$$f=\chi'\circ\varphi\circ{\psi'}^{-1}:E'\rightarrow F',\quad f=\left(f^{i}\right)_{i\in\varLambda_{n}}$$

その関数 $f$ もその開部分多様体 $\left(E',\left(\mathfrak{O}_{d_{E^{n}}}\right)_{E'}\right)$ からその開部分多様体 $\left(F',\left(\mathfrak{O}_{d_{E^{n}}}\right)_{F'}\right)$ への可微分写像である。仮定よりその微分 $\left.\varphi_{*}\right|_{p}$ も線形同型写像なので、$\mathbf{a}=\psi(p)$ とすれば、定理 3.4.7 よりその微分 $\left.f_{*}\right|_{\mathbf{a}}$ も線形同型写像となる。

そこで、$\varepsilon=\left\langle\mathbf{e}_{i}\right\rangle_{i\in\varLambda_{n}}$、$\mathbf{e}_{j}=\left(\delta_{ij}\right)_{i\in\varLambda_{n}}$ なるその $n$ 次元数空間 $\mathbb{R}^{n}$ の基底 $\varepsilon$ を用いて次のように関数 $1_{\varepsilon}$ を定義しておき

$$1_{\varepsilon}=\left(1_{\varepsilon}^{i}\right)_{i\in\varLambda_{n}},\quad 1_{\varepsilon}^{i}:a_{k}\mathbf{e}_{k}\mapsto a_{i}$$

これらの多様体たち $\left(E',\left(\mathfrak{O}_{d_{E^{n}}}\right)_{E'}\right)$、$\left(F',\left(\mathfrak{O}_{d_{E^{n}}}\right)_{F'}\right)$ にそれぞれ座標近傍系 $\{(E',1_{\varepsilon})\}$、$\{(F',1_{\varepsilon})\}$ を入れれば、それらの座標近傍におけるそれらの接 vector 空間たち $T_{\mathbf{a}}E'$、$T_{f(\mathbf{a})}F'$ の自然標構をそれぞれ $\alpha$、$\beta$ としてその表現行列 $\left[\left.f_{*}\right|_{\mathbf{a}}\right]_{\alpha}^{\beta}$ の第 $(i,j)$ 成分が定理 3.4.5 より $\dfrac{\partial}{\partial 1_{\varepsilon}^{i}}\left(1_{\varepsilon}^{j}\circ f\right)(\mathbf{a})$ と与えられる。したがって、次のようになることから、

$$\frac{\partial}{\partial 1_{\varepsilon}^{i}}\left(1_{\varepsilon}^{j}\circ f\right)(\mathbf{a})=\partial_{i}\left(1_{\varepsilon}^{j}\circ f\circ 1_{\varepsilon}^{-1}\right)\circ 1_{\varepsilon}(\mathbf{a})=\partial_{i}f^{j}(\mathbf{a})$$

[*64] 定理 3.3.10 よりそれらの多様体たちの次元は等しいとしかありえないことに注意しよう。

その表現行列 $\left[f_*|_{\mathbf{a}}\right]_\alpha^\beta$ は Jacobi 行列の転置行列 ${}^tJ_f\left(\mathbf{a}\right)$ に等しい。そこで、その微分 $f_*|_{\mathbf{a}}$ は線形同型写像であったので、その表現行列 $\left[f_*|_{\mathbf{a}}\right]_\alpha^\beta$ は正則行列でその Jacobi 行列 $J_f\left(\mathbf{a}\right)$ も正則行列となる。

以上の議論より、その関数 $f$ は $C^\infty$ 級であるかつ、$\exists\mathbf{a} \in E'$ に対し、その行列 $J_f\left(\mathbf{a}\right)$ の逆行列が存在するので、よりよい逆関数定理より $E \subseteq E'$ なるそれらの点々 $\mathbf{a}$、$f\left(\mathbf{a}\right)$ の開近傍たち $E$、$F$ が存在して、その関数 $f|E : E \to F$ は全単射でその逆関数 $(f|E)^{-1}$ はその開集合 $F$ で $C^\infty$ 級となる。あとは、次のように値域 $V^*$、$W^*$ がおかれれば、

$$V^* = V\left(\psi^{-1}|E\right) = V\left({\psi'}^{-1}|E\right), \quad W^* = V\left(\chi^{-1}|F\right) = V\left({\chi'}^{-1}|F\right)$$

その多様体 $(\mathcal{M}, \mathfrak{O})$ が $C^\infty$ 級であることから、それらの写像たち $\psi|V^* : V^* \to E$、$\chi|W^* : W^* \to F$ はいずれもそれぞれその開部分多様体 $(V^*, \mathfrak{O}_{V^*})$ からその開部分多様体 $\left(E, (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_E\right)$ への、その開部分多様体 $(W^*, \mathfrak{P}_{W^*})$ からその開部分多様体 $\left(F, (\mathfrak{O}_{d_{E^n}})_F\right)$ への微分同相写像であるとみなせるので、$\varphi|V^* = (\chi|W^*)^{-1} \circ f|E \circ \psi|V^*$ よりその写像 $\varphi|V^* : V^* \to W^*$ はその開部分多様体 $(V^*, \mathfrak{O}_{V^*})$ からその開部分多様体 $(W^*, \mathfrak{P}_{W^*})$ への微分同相写像となる。 $\square$

# 参考文献


[1] 松本幸夫, 多様体の基礎, 東京大学出版会, 1988. 第 16 刷 p106-128 ISBN4-13-062103-3

[2] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1985. 第 34 刷 p138-141 ISBN978-4-13-062005-5

[3] 杉浦光夫, 解析入門 II, 東京大学出版社, 1985. 第 22 刷 p3-19 ISBN978-4-13-062006-2