線形代数学 暫定版

@k74226197Y126

2023 年 12 月 3 日

はじめに

この.pdf ファイルはもともと一学生が勉強のため, 特に, 自分の言葉で整理するために作成したものです. そのため, 比較的行間は狭めになっております. そこで, 他に私が勉強している内容を勉強している方がある箇所などで悩んだときに, 参考になるかと思い公開させていただきました. そのこともあって, 参考文献を詳細に書き章末にまとめてみました. ぜひ, 参考文献リストもご活用してみるといいかもしれません. また, 公開した他の理由として, 誤植や間違い, 不適切な表現, 紛らわしい表現を自分でも探しておりますが, いかんせん大変なので, あえて公開することで誰かが探してくれるかもしれないというのもございます.

この.pdf ファイルは一学生が勉強のため作成したもので監修を受けたわけではないので, 正確性については保証できなく誤植や間違い, 不適切な表現, 紛らわしい表現があるかもしれません. 誤植も今まで多数見つかってきております. 論理の誤りは, 書籍の定義や定理の主張に気を配っているので, 少なめかもしれませんが, ないとは言い切れません. もし, そのようなものがございましたら, ご連絡していただければ幸いです. また, 記号や言い回しで独特な箇所があり見苦しい箇所もあるかと思います. これも深刻であれば, 可能な限り対応したいと考えております. また, 参考文献に挙げられた書籍などと併読しておくこともお勧めいたします.

この.pdf ファイル, および, そのソースコードの著作権は frmrnthdr(Twitter:@k74226197Y126) にあるものといたします. .pdf ファイルのダウンロード, 印刷, 勉強会での配布などでご利用していただいても問題ございませんし, そのソースコードのダウンロード, 編集, 改造をしていただいても問題ございません. ただ, 自作発言, 二次配布, 商用利用はご遠慮くださいますようお願いいたします.

.pdf ファイルで使用された.png ファイルや.pdf ファイルのベースとなる.tex ファイル, プリアンブルに書くための.tex ファイル (for_preamble.tex) も公開しております. 先ほど述べられた通り自由にダウンロード, 編集をしていただいても問題ございません. ただ, ローカルリポジトリの親フォルダに保存しております本文の.tex ファイルに関しましては, 当面の間, 非公開とさせていただきます. ご了承ください.

線形代数学の内容について, 基底の扱い方で順序を付けられているか否かはその場によるものとしていますので, いくらか読みにくいところもございます. また, 2 次形式の具体的な計算方法についても, そこまで詳しく書かれておりませんので, 参考文献に挙げられた書籍などと併読しておくことをお勧めします.

目次

第 1 部　vector 空間論

ここでは, まず代数的構造を入れたうえで vector 空間を導入し基底や次元の扱いを述べる. できる限り内容が完結するように配慮して実数や複素数などの数を例のみ述べるのみにし本論で使わないようにした. 基底の存在については, 順序集合に関する知識が要求されるが, 不慣れであれば事実を認め先に進まれても問題ないと思われる. 次に, 数学のあらゆる分野であらわれ線形代数学で中心的な役割を果たす線形写像を述べる. 線形写像は行列と深い関係があることが知られておりこのことも述べてゆく. また, 行列の応用としては, 連立 1 次方程式の解法が挙げられるので, これも述べよう.

1.1　vector 空間

1.1.1　群

公理 1.1.1 (群の公理)**.** 空集合でない集合 G に対し算法 $*: G \times G \rightarrow G; (a, b) \mapsto a * b$ が与えられたとする. このとき, 次の条件たちを満たす集合 G と算法 $*$ を合わせて群といい, 集合 G は算法 $*$ に対し群をなすといい, $(G, *)$ と書く. そのような集合 G の元の個数が有限なら, その群 $(G, *)$ は有限群といい, その集合の濃度 $\# G$ をその群 $(G, *)$ の位数といい, $o(G, *)$ と書く. 逆に, その集合 G の元の個数が無限ならば, その群 $(G, *)$ は無限群という. 単位元 e のみからなる群 $(\{e\}, *)$ を単位群という[*1].

- 算法 $*$ について結合的である, 即ち, $\forall a, b, c \in G$ に対し, $(a * b) * c = a * (b * c)$ が成り立つ.
- $\exists b \in G \forall a \in G$ に対し, $a * b = b * a = a$ が成り立つ. この元 b をその群 $(G, *)$ の単位元という.
- $\forall a \in G \exists b \in G$ に対し, $a * b = b * a = e$ が成り立つ. この元 b を a の逆元といい, a^{-1} と書く.

さらに次の条件も満たす群 $(G, *)$ を特に可換群, Abel 群という.

- 算法 $*$ は可換的である, 即ち, $\forall a, b \in G$ に対し, $a * b = b * a$ が成り立つ.

なお, $a * b = b * a$ が成り立つような元々 a, b は可換であるという.

定理 1.1.1. 群 $(G, *)$ について, その単位元 e, その集合 G の任意の元 a の逆元 a^{-1} は一意的に存在する.

これはいずれも背理法によって示される.

証明. 群 $(G, *)$ において, $\forall a \in G$ に対し, $a * e = e * a = a$ なるその集合 G の元 e とは異なる, $\forall a \in G$ に対し, $a * e' = e' * a = a$ なる元 e' がその集合 G に存在するとする. このとき, $e * e' = e$ かつ $e * e' = e'$ が成り立つので, $e = e'$ が成り立つこととなり, 仮定に矛盾する. よって, $\forall a \in G$ に対し, $a * e = e * a = a$ が成り立つようなその単位元 e は一意的に存在する.

同様に, $\forall a \in G$ に対し, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ なるその集合 G の元 a^{-1} とは異なる $a * b = b * a = e$ なる

[*1] 余談ですが, 集合 G の 1 つの部分集合を S, n つの部分集合たちのうち 1 つを S_i, これの元の 1 つを s_i とおき, 写像 $f : \prod_i S_i \rightarrow S; (s_i)_i \mapsto f(s_i)_i$ を考えるとき, 集合 $\left\{ f(s_i)_i \middle| \forall i \left[s_i \in S_i \right] \right\}$ を $f(S_i)_i$ と表記することがある. 例えば, $S_1 * S_2$, $a * S_1$ などといった感じに.

元 b がその集合 G に存在するとする．このとき, 次のようになり,

$$\begin{aligned} a^{-1} &= a^{-1} * e \\ &= a^{-1} * (a * b) \\ &= \left(a^{-1} * a\right) * b \\ &= e * b = b \end{aligned}$$

仮定に矛盾する．よって, $\forall a \in G$ に対し, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ となる元 a^{-1} が一意的に存在する． □

定理 1.1.2 (簡易律)**.** 群 $(G, *)$ において, $\forall a, u, v \in G$ に対し, 次のことが成り立つ．

- $a * u = a * v$ が成り立つなら, $u = v$ が成り立つ．
- $u * a = v * a$ が成り立つなら, $u = v$ が成り立つ．

この性質を簡易律という．

証明. 群 $(G, *)$ が与えられたとする．$\forall a, u, v \in G$ に対し, $a * u = a * v$ が成り立つなら, 次式が成り立つかつ,

$$\begin{aligned} a^{-1} * (a * u) &= \left(a^{-1} * a\right) * u \\ &= e * u = u \end{aligned}$$

次式が成り立つので,

$$\begin{aligned} a^{-1} * (a * u) &= a^{-1} * (a * v) \\ &= \left(a^{-1} * a\right) * v \\ &= e * v = v \end{aligned}$$

$u = v$ が得られる．

同様にして, $u * a = v * a$ が成り立つなら, $u = v$ が成り立つことが示される． □

定理 1.1.3. 群 $(G, *)$ について, $\forall a, b \in G$ に対し, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ が成り立つ．

証明. 群 $(G, *)$ が与えられたとする．$\forall a, b \in G$ に対し, $(a * b) * (a * b)^{-1} = e$ が成り立つかつ, 次式が成り立つので,

$$\begin{aligned} (a * b) * \left(b^{-1} * a^{-1}\right) &= \left(a * \left(b * b^{-1}\right)\right) * a^{-1} \\ &= (a * e) * a^{-1} \\ &= a * a^{-1} = e \end{aligned}$$

$(a * b) * (a * b)^{-1} = (a * b) * \left(b^{-1} * a^{-1}\right)$ が得られ, したがって, 簡易律により $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ が成り立つ． □

定義 1.1.2. 群 $(G, *)$ をなす集合 G の元 a について $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し次式のように記法を定める．

$$\begin{aligned} a^m * a^n &= a^{m+n} \\ (a^m)^n &= a^{mn} \\ (a * b)^n &= a^n * b^n \text{ if } a * b = b * a \end{aligned}$$

定理 1.1.4. 群 $(G, *)$ について, $\forall a \in G \forall n \in \mathbb{N}$ に対し, 次式たちが成り立つ.

$$a^0 = e, \quad a^1 = a, \quad a^{n+1} = a^n * a, \quad e^{-n} = e^n = e, \quad a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$$

証明. 群 $(G, *)$ をなす集合 G について, $\forall a \in G \forall n \in \mathbb{N}$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
a^0 &= e * a^0 \\
&= \left(a^0\right)^{-1} * a^0 * a^0 \\
&= \left(a^0\right)^{-1} * a^{0+0} \\
&= \left(a^0\right)^{-1} * a^0 \\
&= e \\
a^1 &= e * a^1 \\
&= a * a^{-1} * a^1 \\
&= a * a^{-1+1} \\
&= a * a^0 \\
&= a * e = a \\
a^{n+1} &= a^n * a^1 \\
&= a^n * a
\end{aligned}$$

また, 上記の議論より $e^{-1} = e^0 = e^1 = e$ が成り立つ. $n = k$ のとき, $e^k = e$ と仮定しよう. $n = k + 1$ のとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
e^{k+1} &= e^k * e^1 \\
&= e * e \\
&= e
\end{aligned}$$

逆に, $n = k$ のとき, $e^{-k} = e$ と仮定しよう. $n = k + 1$ のとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
e^{-(k+1)} &= e^{-k-1} \\
&= e^{-k} * e^{-1} \\
&= e * e \\
&= e
\end{aligned}$$

以上より数学的帰納法によって $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$e^n = e$$

また, 上記の議論により次のようになる.

$$\begin{aligned}
a^{-n} &= a^{-n} * e \\
&= a^{-n} * \left(a^{-1}\right)^0 \\
&= a^{-n} * \left(a^{-1}\right)^{-n+n} \\
&= a^{-n} * \left(a^{-1}\right)^{-n} * \left(a^{-1}\right)^n \\
&= \left(a * a^{-1}\right)^{-n} * \left(a^{-1}\right)^n \\
&= e^{-n} * \left(a^{-1}\right)^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e * \left(a^{-1}\right)^n \\
&= \left(a^{-1}\right)^n
\end{aligned}
$$

□

1.1.2 環

公理 1.1.3 (環の公理)**.** 空集合でない集合 R に対し 2 つの算法それぞれ加法 $+ : R \times R \to R; (a, b) \mapsto a + b$, 乗法 $\cdot : R \times R \to R; (a, b) \mapsto ab$ が与えられたとする. このとき, 次の条件たちを満たす集合 R を環という.

- 集合 R は加法について可換群 $(R, +)$ をなす.
- $\forall a, b, c \in R$ に対し, $(ab)c = a(bc)$ が成り立つ, 即ち, 乗法について結合的である.
- $\exists e \in R \forall a \in R$ に対し, $ae = ea = a$ が成り立つ, 即ち, 乗法について集合 R の単位元 e が存在する.
- $\forall a, b, c \in R$ に対し, $a(b + c) = ab + ac$ かつ $(a + b)c = ac + bc$ が成り立つ, 即ち, 乗法は加法に対して両側から分配的である.

さらに, 次の条件も満たす環 R を特に可換環という.

- $\forall a, b \in R$ に対し, $ab = ba$ が成り立つ, 即ち, 乗法は可換的である.

定義 1.1.4. 可換群 $(R, +)$ において, その単位元を零元といい 0 と, 逆元 a^{-1} を $-a$ と, $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し, 元 a^n を na と, 乗法についての単位元 e を 1 と書く.

定理 1.1.5. 環 R が与えられたとき, $\forall a \in R$ に対し, $a0 = 0a = 0$ が成り立つ.

証明. 環 R について, $\forall a \in R$ に対し, 次のようになるかつ,

$$
\begin{aligned}
0 &= a0 - a0 \\
&= a(0 + 0) - a0 \\
&= a0 + a0 - a0 = a0
\end{aligned}
$$

次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
0 &= 0a - 0a \\
&= (0 + 0)a - 0a \\
&= 0a + 0a - 0a = 0a
\end{aligned}
$$

$a0 = 0a = 0$ が成り立つ. □

定義 1.1.5. 環 R について, $0 = 1$ が成り立つとき, $\forall a \in R$ に対し, $a = 1a = 0a = 0$ が成り立ち $R = \{0\}$ が得られる. これを零環という. 以下, 環の元が 2 つ以上現れるのであれば, その環は零環でないので, 断りがない場合, そうする.

定義 1.1.6. 環 R について, $\exists a, b \in R$ に対し, $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ が成り立つかつ, $ab = 0$ が成り立つなら, それらの元々 a, b をそれぞれ左零因子, 右零因子といい, あわせて零因子という. これをもたない可換環を, 即ち, その環 R が可換環で, $\forall a, b \in R$ に対し, $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ が成り立つなら, $ab \neq 0$ が成り立つような環を整域という.

定義 1.1.7. 環 R について, $\exists a, b \in R$ に対し, $ab = 1$ が成り立つなら, その元 a を環 R の可逆元, 単元といい, その元 b を逆元といい, 後に示すように a^{-1}, $\dfrac{1}{a}$ などと書くことができる. 以下, その元 a^{-1} はその群 $(R, +)$ における逆元ではなくその可逆元 a の積における逆元を意味するものとする. これにより, 可逆元からなる集合は乗法について群をなし, 0 以外の元全てが可逆元であるような環を斜体といい, 乗法について可換的な斜体を体といい, 可換的でない斜体を非可換体という.

斜体を体, 体を可換体というときもある.

定理 1.1.6. 環 R の可逆元について, 次のことが成り立つ.

- その環 R が零環でなくその環 R の元 a が可逆元なら, これは 0 でない.
- その環 R の元 a が可逆元なら, 一意的に逆元 a^{-1} が定まる.
- その環 R が斜体であるなら, 零因子をもたない.

証明. 環 R について, $a \in R$ が成り立ちその環 R が零環でなくその元 a が可逆元であり $a^{-1} \in R$ なる元 a^{-1} を a の逆元とする. $a = 0$ が成り立つなら, $aa^{-1} = 0a^{-1} = 0 \neq 1$ が成り立つので, 可逆元の定義に矛盾する. よって $a \neq 0$ が成り立つ.

また, その環 R の元 a が可逆元でその元 a^{-1} でないその元 a の逆元 b が与えられたとするとき, 次式が成り立つので,

$$\begin{aligned} a^{-1} &= a^{-1}1 \\ &= a^{-1}(ab) \\ &= \left(a^{-1}a\right)b \\ &= 1b = b \end{aligned}$$

仮定に矛盾する. よって, 一意的に逆元 a^{-1} が定まる.

環 R が斜体であるなら, 0 以外の元全てが可逆元であるので, $\forall a, b \in R$ に対し, $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ が成り立つなら, $a^{-1}, b^{-1} \in R$ が成り立ち, したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} abb^{-1}a^{-1} &= a1a^{-1} \\ &= aa^{-1} = 1 \\ b^{-1}a^{-1}ab &= b^{-1}1b \\ &= b^{-1}b = 1 \end{aligned}$$

したがって, その元 ab は可逆元であることになるので, $ab \neq 0$ が成り立つ. ゆえに, その環 R は零因子をもたない. □

定理 1.1.7. 環 R の性質として, 次のことが成り立つ.

- $\forall a \in R$ に対し, $-(-a) = a$ が成り立つ.
- $\forall a, b \in R$ に対し, $a(-b) = (-a)b = -ab$ が成り立つ.
- $\forall a, b \in R$ に対し, $(-a)(-b) = ab$ が成り立つ.
- $\forall a, b \in R$ に対し, $a = 0$ または $b = 0$ が成り立つなら, $ab = 0$ が成り立つ.
- $\forall a, b \in R$ に対し, $a = 0$ かつ $b = 0$ が成り立つなら, $a^2 + b^2 = 0$ が成り立つ.
- $\forall a \in R$ に対し, その元 a が可逆元なら, その元 $-a$ も可逆元で $(-a)^{-1} = -a^{-1}$ が成り立つ.

- $\forall a \in R$ に対し, それらの元々 a, b が可逆元なら, その元 ab も可逆元で $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ が成り立つ.

証明. 環 R が与えられたとき, $\forall a \in R$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} -(-a) &= 0 - (-a) \\ &= a - a - (-a) \\ &= a + (-a) - (-a) \\ &= a + 0 = a \end{aligned}$$

$\forall a, b \in R$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} a(-b) &= 0 + a(-b) \\ &= -ab + ab + a(-b) \\ &= -ab + a\left(b + (-b)\right) \\ &= -ab + a0 \\ &= -ab + 0 \\ &= -ab \end{aligned}$$

$\forall a, b \in R$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} (-a)b &= (-a)b + 0 \\ &= (-a)b + ab - ab \\ &= \left((-a) + a\right) b - ab \\ &= 0b - ab \\ &= a - ab \\ &= -ab \end{aligned}$$

$\forall a, b \in R$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= (-a)(-b) + 0 \\ &= (-a)(-b) + (-a)b - (-a)b \\ &= (-a)\left((-b) + b\right) - (-ab) \\ &= (-a)0 + ab \\ &= 0 + ab \\ &= ab \end{aligned}$$

$\forall a, b \in R$ に対し, $a = 0$ または $b = 0$ が成り立つなら, 次のようになるので,

$$\begin{aligned} a = 0 \vee b = 0 &\Rightarrow ab = 0 \vee ab = 0 \\ &\Leftrightarrow ab = 0 \end{aligned}$$

$ab = 0$ が成り立つ.

$\forall a, b \in R$ に対し, $a = 0$ かつ $b = 0$ が成り立つなら, 次のようになるので,

$$\begin{aligned} a = 0 \wedge b = 0 &\Rightarrow a^2 = 0 \wedge b^2 = 0 \\ &\Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \end{aligned}$$

$a^2 + b^2 = 0$ が成り立つ.

$\forall a \in R$ に対し, その元 a が可逆元なら, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}\left(-a^{-1}\right)(-a) &= a^{-1}a = 1\\ (-a)\left(-a^{-1}\right) &= aa^{-1} = 1\end{aligned}$$

その元 $-a$ も可逆元で $(-a)^{-1} = -a^{-1}$ が成り立つ.

$\forall a \in R$ に対し, それらの元々 a, b が可逆元なら, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}\left(b^{-1}a^{-1}\right)(ab) &= b^{-1}\left(a^{-1}a\right)b\\ &= b^{-1}1b = b^{-1}b = 1\\ (ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) &= a\left(bb^{-1}\right)a^{-1}\\ &= a1a^{-1} = aa^{-1} = 1\end{aligned}$$

その元 ab も可逆元で $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ が成り立つ. □

1.1.3 vector 空間

公理 1.1.8 (vector 空間の公理)**.** 集合 K を体とする. 空集合でない集合 V に対し加法 $+ : V \times V \rightarrow V; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}$ が与えられたとする. このとき, 次の条件たちを満たす集合 V を体 K 上の vector 空間, 有向量空間, 線形空間, 線型空間という.

- 集合 V は加法について可換群 $(V, +)$ をなす.
- $\forall k \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, scalar 倍 $\cdot : K \times V \rightarrow V; (k, \mathbf{v}) \mapsto k\mathbf{v}$ が定義されている.
- $\forall k \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w}$ が成り立つ.
- $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$ が成り立つ.
- $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $(kl)\mathbf{v} = k(l\mathbf{v})$ が成り立つ.
- $\exists 1 \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ が成り立つ.

体 K 上の vector 空間 V の元を vector, 有向量などといいふつう $\mathbf{v}$ など小文字太字で表される. 特に加法の単位元である vector を零 vector といい, $\mathbf{0}$ と表す. 一方, vector 空間を考えるとき体 K の元を scalar, 無向量などという.

定理 1.1.8. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- $\forall k \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $k(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = k\mathbf{v} - k\mathbf{w}$ が成り立つ.
- $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $(k - l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} - l\mathbf{v}$ が成り立つ.
- $\exists \mathbf{0} \in V \forall k \in K$ に対し, $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ が成り立つ.
- $\exists 0 \in K \exists \mathbf{0} \in V \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ.
- $\forall k \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $(-k)\mathbf{v} = k(-\mathbf{v}) = -k\mathbf{v}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, $\forall k \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}k(\mathbf{v} - \mathbf{w}) &= k(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + k\mathbf{w} - k\mathbf{w}\\ &= k((\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}) - k\mathbf{w}\\ &= k\mathbf{v} - k\mathbf{w}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= k\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right) \\
&= k\mathbf{v} - k\mathbf{w}
\end{aligned}
$$

$\forall k,l \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
(k-l)\mathbf{v} &= (k-l)\mathbf{v} + l\mathbf{v} - l\mathbf{v} \\
&= \left((k-l)+l\right)\mathbf{v} - l\mathbf{v} \\
&= k\mathbf{v} - l\mathbf{v} \\
&= (k-l)\mathbf{v} \\
&= k\mathbf{v} - l\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$\exists \mathbf{0} \in V \forall k \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
k\mathbf{0} &= k\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}\right) \\
&= k\mathbf{v}-k\mathbf{v} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$\exists 0 \in K \exists \mathbf{0} \in V \forall k \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
0\mathbf{v} &= (k-k)\mathbf{v} \\
&= k\mathbf{v} - k\mathbf{v} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$\exists 0 \in K \forall k \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
(-k)\mathbf{v} &= (0-k)\mathbf{v} \\
&= 0\mathbf{v} - k\mathbf{v} \\
&= \mathbf{0} - k\mathbf{v} = -k\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$\exists \mathbf{0} \in V \forall k \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
k\left(-\mathbf{v}\right) &= k\left(\mathbf{0} - \mathbf{v}\right) \\
&= k\mathbf{0} - k\mathbf{v} \\
&= \mathbf{0} - k\mathbf{v} = -k\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

□

1.1.4 部分 vector 空間

定義 1.1.9. 体 K 上の vector 空間 V の部分集合 W も vector 空間となっているものをその vector 空間 V の部分 vector 空間という.

定理 1.1.9. 体 K 上の vector 空間 V の部分集合 W について, 次のことは同値である.

- その部分集合 W は部分 vector 空間である.
- 次のことが成り立つ.
  - $\mathbf{0} \in W$ が成り立つ.
  - $\forall k,l \in K \forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in W$ に対し, $k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \in W$ が成り立つ.
- 次のことが成り立つ.
  - その集合 W は空でない.

- $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $\mathbf{v}+\mathbf{w}\in W$ が成り立つ.
- $\forall k\in K\forall\mathbf{v}\in W$ に対し, $k\mathbf{v}\in W$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分集合 W について, その部分集合 W が部分 vector 空間であるなら, 明らかに次のことが成り立つ.

- $\mathbf{0}\in W$ が成り立つ.
- $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\in W$ が成り立つ.

逆に, 次のことが成り立つなら,

- $\mathbf{0}\in W$ が成り立つ.
- $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\in W$ が成り立つ.

$\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ が成り立つので, $-\mathbf{v}\in W$ が成り立つ. これに注意すれば, 次のようになる.

- $\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ が成り立つ.
- $\exists\mathbf{0}\in W\forall\mathbf{v}\in W$ に対し, $\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{v}$ が成り立つ.
- $\forall\mathbf{v}\in W\exists-\mathbf{v}\in W$ に対し, $\mathbf{v}-\mathbf{v}=-\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$ が成り立つ.
- $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v}$ が成り立つ.

ゆえに, その組 $(W,+)$ は可換群をなす. さらに, 次のことも成り立つ.

- $\forall k\in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $k(\mathbf{v}+\mathbf{w})=k\mathbf{v}+k\mathbf{w}$ が成り立つ.
- $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v}\in W$ に対し, $(k+l)\mathbf{v}=k\mathbf{v}+l\mathbf{v}$ が成り立つ.
- $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v}\in W$ に対し, $(kl)\mathbf{v}=k(l\mathbf{v})$ が成り立つ.
- $\exists 1\in K\forall\mathbf{v}\in W$ に対し, $1\mathbf{v}=\mathbf{v}$ が成り立つ.

よって, その集合 W はその vector 空間 V の部分 vector 空間である.
次の条件たちを満たす体 K 上の vector 空間 V の部分集合 W が与えられたとき,

- $\mathbf{0}\in W$ が成り立つ.
- $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\in W$ が成り立つ.

$\mathbf{0}\in W$ が成り立つなら, 明らかにその集合 W は空でない. $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\in W$ が成り立つことより, $k=l=1$ とすれば, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $\mathbf{v}+\mathbf{w}\in W$ が成り立つ. さらに, $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ とすれば, $\forall k\in K\forall\mathbf{v}\in W$ に対し, $k\mathbf{v}\in W$ が成り立つ. 以上より, 次のことが成り立つ.

- その集合 W は空でない.
- $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $\mathbf{v}+\mathbf{w}\in W$ が成り立つ.
- $\forall k\in K\forall\mathbf{v}\in W$ に対し, $k\mathbf{v}\in W$ が成り立つ.

逆に, これらが成り立つなら, その体 K は加法について群 $(K,+)$ をなしているのであったので, 零元 0 はその体 K に属しその集合 W は空集合でなく, $\forall k\in K\forall\mathbf{v}\in W$ に対し, $k\mathbf{v}\in W$ が成り立つのであったので, 上記の定理より $0\mathbf{v}=\mathbf{0}\in W$ が成り立ち, したがって, $\mathbf{0}\in W$ が成り立つ. また, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し,

$\mathbf{v}+\mathbf{w} \in W$ が成り立つかつ, $\mathbf{v} \in W$ が成り立つなら, $\forall k \in K \forall \mathbf{v} \in W$ に対し, $k\mathbf{v} \in W$ が成り立つのであったので, $\forall k,l \in K \forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in W$ に対し, $k\mathbf{v}, l\mathbf{w} \in W$ が成り立ち, これが成り立つなら, $k\mathbf{v}+l\mathbf{w} \in W$ も成り立つ. 以上より, 次のことが成り立つ.

- $\mathbf{0} \in W$ が成り立つ.
- $\forall k,l \in K \forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in W$ に対し, $k\mathbf{v}+l\mathbf{w} \in W$ が成り立つ.

□

定理 1.1.10. 体 K 上の vector 空間 V の部分集合の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき, この集合 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ もその vector 空間 V の部分 vector 空間である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分集合の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき, この集合 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ において, 定理 1.1.9 より $\forall \lambda \in \Lambda$ に対し, $\mathbf{0} \in W_\lambda$ が成り立つので, $\mathbf{0} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ が成り立つ. さらに, $\forall k,l \in K \forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ に対し, 積集合の定義より $\forall \lambda \in \Lambda$ に対し, $\mathbf{v},\mathbf{w} \in W_\lambda$ が成り立つので, 定理 1.1.9 より $k\mathbf{v}+l\mathbf{w} \in W_\lambda$ が成り立つ. したがって, $k\mathbf{v}+l\mathbf{w} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ が成り立つ. 以上, 定理 1.1.9 よりこの集合 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ もその vector 空間 V の部分 vector 空間である. □

1.1.5 線形結合

定義 1.1.10. 体 K 上の vector 空間 V の任意の部分集合 M が与えられたとき, その vector 空間 V の部分 vector 空間全体の集合 $\mathfrak{S}_V$ を用いた集合 $\bigcap_{M \subseteq W \in \mathfrak{S}_V} W$ も定理 1.1.10 よりその vector 空間 V の部分 vector 空間となるのであった. このとき, その部分 vector 空間をその部分集合 M から生成される部分 vector 空間, その部分集合 M によって張られる部分 vector 空間などといい, $\mathrm{span}M$, $\langle \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{v} \in M}$ などと書く. その部分集合 M の元をこの部分 vector 空間 W の生成元という.

定義 1.1.11. 体 K 上の vector 空間 V の族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, その vector 空間 V の元で $c_i \in K$ なる元 c_i を用いて $\sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i$ と表されるものを族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ の線形結合, 線型結合, 1 次結合という. また, 明らかに $\forall k, c_i, d_i \in K \forall \mathbf{v}_i \in V$ に対し, $\sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i$, $\sum_{i \in \Lambda_n} d_i \mathbf{v}_i$ について, $\sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \Lambda_n} d_i \mathbf{v}_i$, $k \sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i$ も族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ の線形結合である.

定理 1.1.11. 体 K 上の vector 空間 V の任意の部分集合 M が与えられたとき, これが有限集合で $M = \{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ とおくとき, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{span}M = \left\{ \mathbf{v} \in V \middle| \exists k_i \in K \left[\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i \right] \right\}$$

証明. 体 K 上の vector 空間 V の任意の部分集合 M が与えられたとき, これが有限集合で $M = \{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ と

おくとき, 次式のようにおくと,

$$M' = \left\{ \mathbf{v} \in V \middle| \exists k_i \in K \left[\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i \right] \right\}$$

もちろん, $M \subseteq M'$ が成り立つ. そこで, 明らかに $\mathbf{0} \in M'$ が成り立つ. $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in M'$ に対し, その体 K のある元々 k_i, l_i が存在して, 次式が成り立つ.

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_n} l_i \mathbf{v}_i$$

このとき, 次のようになることから,

$$k\mathbf{v} + l\mathbf{w} = k \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i + l \sum_{i \in \varLambda_n} l_i \mathbf{v}_i = \sum_{i \in \varLambda_n} k k_i \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \varLambda_n} l l_i \mathbf{v}_i = \sum_{i \in \varLambda_n} \left(k k_i + l l_i \right) \mathbf{v}_i$$

$k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \in M'$ が成り立つ. ゆえに, 定理 1.1.9 よりその集合 M' はその vector 空間 V の部分 vector 空間である. これにより, $\mathrm{span} M \subseteq M'$ が成り立つ.

逆に, $\forall \mathbf{v} \in M'$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ とおくと, $M \subseteq \mathrm{span} M$ が成り立つので, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i \in \mathrm{span} M$ が成り立つ. そこで, その集合 $\mathrm{span} M$ は部分 vector 空間なので, 定理 1.1.9 と数学的帰納法により $\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i \in \mathrm{span} M$ が成り立つので, $M' \subseteq \mathrm{span} M$ が成り立つ.

よって, $M' = \mathrm{span} M$ が得られる. □

もちろん, 体 K 上の vector 空間 V において, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つなら, vector $\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i$ は零 vector となる. ところが, これの逆はいつでも成り立つとは限らない. 例えば, $\mathbf{v} \in V$ なる vector$\mathbf{v}$ を用いて, $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ を考えればよい.

定義 1.1.12. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, $\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つとき, 族 $\left\{ \mathbf{v}_i \right\}_{i \in \varLambda_n}$ は体 K 上で線形独立, 線型独立, 1 次独立であるという.

一方, この式の否定が成り立つとき, 即ち, $\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つかつ, $\exists i \in \varLambda_n$ に対し, $c_i \neq 0$ が成り立つとき, 族 $\left\{ \mathbf{v}_i \right\}_{i \in \varLambda_n}$ は体 K 上で線形従属, 線型従属, 1 次従属であるという.

定理 1.1.12. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 線形独立な族 $\left\{ \mathbf{v} \right\}_{i \in \varLambda_n}$ に零 vector$\mathbf{0}$ は含まれない.

これは背理法で示される.

証明. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 線形独立な族 $\left\{ \mathbf{v} \right\}_{i \in \varLambda_n}$ に零 vector$\mathbf{0}$ は含まれるとすると, その添数集合 $\varLambda_n$ の部分集合 $\left\{ i \in \varLambda_n \middle| \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \right\}$ は空集合でなく, これを $\varLambda'$ とおけば, $\forall i \in \varLambda'$ に対し, $c_i \neq 0$ が成り立っても, $\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立ち, したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \wedge \exists i \in \varLambda_n \left[c_i \neq 0 \right] &\Leftrightarrow \neg\neg \left(\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \right) \wedge \neg \left(\forall i \in \varLambda_n \left[c_i = 0 \right] \right) \\
&\Leftrightarrow \neg \left(\neg \left(\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \right) \vee \forall i \in \varLambda_n \left[c_i = 0 \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \neg\left(\sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \forall i \in \Lambda_n \left[c_i = 0\right]\right)$$

ゆえに, 族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ が線形独立でないことになるが, これは矛盾している. $\square$

定理 1.1.13. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 線形独立な族 $\{\mathbf{v}\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, その添数集合 Λ_n の空集合でない任意の部分集合 Λ' に対し, 族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda'}$ も再び線形独立である.

これは, 線形独立な族 $\{\mathbf{v}\}_{i \in \Lambda_n}$ のうちどのようにとっても, とられた vectors もまた線形独立であるということを主張している. ここでも, やはり背理法で示した.

証明. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V の族 $\left\{\mathrm{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ が線形独立であるとする. その添数集合 Λ_n の空集合でないある部分集合 Λ' が存在して, その体 K の族々 $\left\{c_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$, $\left\{c_i'\right\}_{i \in \Lambda'}$ を用いて $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda' \subseteq \Lambda_n} c_i' \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つかつ, $c_i' \neq 0$ となるような添数 i がその集合 Λ' に存在すると仮定しよう. このとき, $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つので, やはり, $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda'} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立ち, したがって, 次式が成り立つ.

$$\sum_{i \in \Lambda' \subseteq \Lambda_n} c_i' \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda'} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

ここで, 族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ が線形独立であるので, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $c_i = c_i' = 0$ が成り立つことになる. しかしながら, これは $c_i' \neq 0$ となるような添数 i がその集合 Λ' に存在することに矛盾する. よって, その添数集合 Λ_n の空集合でないある部分集合 Λ' が存在して, $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda' \subseteq \Lambda_n} c_i' \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つかつ, $c_i' \neq 0$ となるような添数 i がその集合 Λ' に存在することが否定され, その添数集合 Λ_n の空集合でない任意の部分集合 Λ' に対し, $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda' \subseteq \Lambda_n} c_i' \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \Lambda'$ に対し, $c_i' = 0$ が成り立つ. $\square$

定理 1.1.14. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 線形独立なその vector 空間 V の族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ のうち異なるどの 2 つ $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$ もその体のある元 k を用いて $\mathbf{v}_i = k\mathbf{v}_j$ が成り立つようなことはない, 即ち, $\forall i, j \in \Lambda_n \forall k \in K$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $\mathbf{v}_i \neq k\mathbf{v}_j$ が成り立つ.

これもやはり背理法で示される.

証明. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V の族 $\left\{\mathrm{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ が線形独立であるとき, $i \neq j$ かつ $\mathbf{v}_i = k\mathbf{v}_j$ が成り立つような vectors$\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$ とその体 K の元 k が存在すると仮定しよう. このとき, $k = 0$ と仮定すると, vector$\mathbf{v}_i$ は零 vector になり定理 1.1.12 の線形独立な vectors に零 vector が含まれないことに矛盾する. したがって, $k \neq 0$ が成り立つことになり, したがって, 次のようなり,

$$\begin{aligned}
\sum_{i' \in \Lambda_n} c_{i'} \mathbf{v}_{i'} &= \sum_{i' \in \Lambda_n \setminus \{i,j\}} c_{i'} \mathbf{v}_{i'} + c_i \mathbf{v}_i + c_j \mathbf{v}_j \\
&= \sum_{i' \in \Lambda_n \setminus \{i,j\}} c_{i'} \mathbf{v}_{i'} + c_i \mathbf{v}_i + kc_j \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{i' \in \Lambda_n \setminus \{i,j\}} c_{i'} \mathbf{v}_{i'} + \left(c_i + kc_j\right) \mathbf{v}_j = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

ここで, 上記の定理 1.1.13 により族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\Lambda_n\setminus\{j\}}$ もまた線形独立であるので, $\forall i\in\Lambda_n\setminus\{i,j\}$ に対し, $c_i=0$ が成り立つかつ, $c_i+kc_j=0$ が成り立つことになる. ここで, $c_i=1$ かつ $c_j=-\dfrac{1}{k}$ とおけば, $c_i\neq 0$ かつ $c_j\neq 0$ が成り立つことになり, したがって, $\displaystyle\sum_{i\in\Lambda_n} c_i\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$ が成り立つかつ, $c_i\neq 0$ かつ $c_j\neq 0$ が成り立つような添数 i, j がその添数集合 Λ_n に存在することになる. しかしながら, これは族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\Lambda_n}$ が線形独立であることに矛盾する. よって, 線形独立な族 $\{\mathbf{v}\}_{i\in\Lambda_n}$ のうちどの 2 つ $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$ もその体のある元 k を用いて $\mathbf{v}_i=k\mathbf{v}_j$ が成り立つようなことはない. □

定理 1.1.15. 体 K 上の vector 空間 V が与えられ, その vector 空間 V の族 $\{\mathrm{v}_i\}_{i\in\Lambda_n}$ が線形独立であるかつ, 族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\Lambda_{n+1}}$ が線形従属であるとき, その vector$\mathbf{v}_{n+1}$ は $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\Lambda_n}$ の線形結合である, 即ち, 次式が成り立つようなその体 K の族 $\{k_i\}_{i\in\Lambda_n}$ が存在する.

$$\mathbf{v}_{n+1}=\sum_{i\in\Lambda_n} k_i\mathbf{v}_i$$

証明. 体 K 上の vector 空間 V が与えられ, その vector 空間 V の族 $\{\mathrm{v}_i\}_{i\in\Lambda_n}$ が線形独立であるかつ, 族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\Lambda_{n+1}}$ が線形従属であるとき, $c_{n+1}=0$ が成り立つなら, $c_i\neq 0$ が成り立つような添数 i が添数集合 Λ_n に存在するかつ, 次のようになり,

$$\sum_{i\in\Lambda_{n+1}} c_i\mathbf{v}_i=\sum_{i\in\Lambda_n} c_i\mathbf{v}_i+c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=\sum_{i\in\Lambda_n} c_i\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$$

族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\Lambda_n}$ が線形独立であるので, $\forall i\in\Lambda_n$ に対し, $c_i=0$ が成り立つことに矛盾する. したがって, $c_{n+1}\neq 0$ が成り立つことになる. このとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\Lambda_{n+1}} c_i\mathbf{v}_i=\mathbf{0} &\Leftrightarrow \sum_{i\in\Lambda_n} c_i\mathbf{v}_i+c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=\mathbf{0}\\ &\Leftrightarrow c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=-\sum_{i\in\Lambda_n} c_i\mathbf{v}_i\\ &\Leftrightarrow \mathbf{v}_{n+1}=-\frac{1}{c_{n+1}}\sum_{i\in\Lambda_n} c_i\mathbf{v}_i\\ &\Leftrightarrow \mathbf{v}_{n+1}=\sum_{i\in\Lambda_n}\left(-\frac{c_i}{c_{n+1}}\right)\mathbf{v}_i\end{aligned}$$

ここで $-\dfrac{c_i}{c_{n+1}}\in K$ が成り立つので, $k_i=-\dfrac{c_i}{c_{n+1}}$ とおくと, その体 K の族 $\{k_i\}_{i\in\Lambda_n}$ が存在して, $\mathbf{v}_{n+1}=\displaystyle\sum_{i\in\Lambda_n} k_i\mathbf{v}_i$ が成り立つ. □

1.1.6 基底

定義 1.1.13. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとする. その vector 空間 V の部分集合 B が次のことを満たすとき, その部分集合 B をその vector 空間 V の基底という.

- その集合 B の任意の有限な部分集合 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\Lambda_n}$ が線形独立である.
- その集合 B がその vector 空間 V を生成する, 即ち, $\mathrm{span}B=V$ が成り立つ.

特に, $\mathrm{card}B < \aleph_0$ のとき, この vector 空間 V は有限生成であるといい, $\mathrm{card}B = n$ とおいて組 $(\mathbf{v}_i)_{i \in \varLambda_n}$ のほうをその vector 空間 V の基底というときがあり, さらに, このような意味でその組が $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ と書かれることがある. なお, $V = \{\mathbf{0}\}$ のときの基底は空集合である.

定理 1.1.16 (基底の存在性)**.** 体 K 上の任意の vector 空間 V は基底をもつ. これは次のようにして示される.

1. $V = \{\mathbf{0}\}$ のときは明らかである.
2. その vector 空間 V は明らかに任意の有限の個数の vectors が線形独立な部分集合をもつ.
3. その vector 空間 V の部分集合の任意の有限の個数の元々が線形独立であることは有限的な性質となる[*2].
4. Tukey の補題より[*3]3. の性質をもつ部分集合のうち順序関係 $\subseteq$ の意味で極大となるもの B が存在する.
5. $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \in B$ が成り立つなら, これは明らかである.
6. $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \notin B$ が成り立つなら, その部分集合 $B \cup \{\mathbf{v}\}$ は 3. の性質をもたない.
7. これにより, 集合 $B \cup \{\mathbf{v}\}$ のある有限の個数のその vector$\mathbf{v}$ が含まれる元々が存在して, 線形従属であることになる.
8. さらに, このような vectors が $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}}$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ とおかれると, $\exists i \in \varLambda_n \cup \{0\}$ に対し, $c_i \neq 0$ なるその体 K の元々 c_i を用いて次式のように表されることができるかつ, $c_0 \neq 0$ が成り立つ.
$$\sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$
9. これにより, 結論が得られる.

証明. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, $V = \{\mathbf{0}\}$ のときは明らかであるから, その vector 空間 V が $\{\mathbf{0}\}$ でないとしよう. このとき, その vector 空間 V は任意の有限の個数の vectors が線形独立な部分集合をもつ. 例えば, 零 vector でない vector$\mathbf{v}$ を用いた集合 $\{\mathbf{v}\}$ が挙げられる.

ここで, その vector 空間 V の部分集合 V' の任意の有限の個数の元々は線形独立であるなら, その集合 V' の任意の有限な部分集合の任意の有限の個数の元々も線形独立となる. 逆に, その集合 V' の任意の有限な部分集合の任意の有限の個数の元々も線形独立であるなら, その部分集合 V' の任意の有限の個数の元々はその部分集合 V' の有限な部分集合をなすので, これらは線形独立である. 以上より, その vector 空間 V の部分集合の任意の有限の個数の元々が線形独立であるならそのときに限り, その集合 V' の任意の有限な部分集合の任意の有限の個数の元々も線形独立である, 即ち, その vector 空間 V の部分集合の任意の有限の個数の元々が線形独立であることは有限的な性質である.

したがって, Tukey の補題よりその vector 空間 V の部分集合の任意の有限の個数の元々が線形独立であるようなその部分集合のうち順序関係 $\subseteq$ の意味で極大となるものが存在する. これのうち 1 つを B とすると, その部分集合 B の任意の有限の個数の元々は線形独立である.

[*2] ある集合 A の部分集合 A' に関する命題 $P\left(A'\right)$ があって, その集合 A の部分集合 A'' について $P\left(A''\right)$ が成り立つこととその集合 A'' の全ての有限な部分集合たち A''' について $P\left(A'''\right)$ が成り立つことが同値であるとき, その命題 P を有限的な性質, 有限的な条件などといったりする.

[*3] これは次のことを主張する定理である.
集合 A の部分集合に関する有限的な性質 P を満たすようなその集合 A の部分集合が少なくとも 1 つ存在するのであれば, その命題 P を満たすようなその集合 A の部分集合全体の集合を $\mathfrak{M}$ とおくとき, 順序集合 $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ で極大な部分集合が存在する.

$\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \in B$ が成り立つなら, その vector$\mathbf{v}$ はその部分集合 B をなす vector のうちどれかであるから, その部分集合 B のある 1 つの元の線形結合である. $\mathbf{v} \notin B$ が成り立つなら, その部分集合 B がこれの任意の有限の個数の元々が線形独立であるようなその部分集合のうち順序関係 $\subseteq$ の意味で極大であったので, 集合 $B \cup \{\mathbf{v}\}$ のある有限の個数の元々が線形従属であることになる. ここで, このように線形従属な vectors のうちその vector$\mathbf{v}$ が含まれていなければ, これらの vectors 全体の集合はその集合 B の部分集合であるので, 定理 1.1.15 よりこれらの vectors は線形独立であることになり矛盾する. したがって, 集合 $B \cup \{\mathbf{v}\}$ のある有限の個数の元々が線形従属であるなら, これらの元々, 即ち, vectors のうちその vector$\mathbf{v}$ が含まれることになる. このような vectors が $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}}$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ とおかれると, $\exists i \in \varLambda_n \cup \{0\}$ に対し, $c_i \neq 0$ なるその体 K の元々 c_i を用いて次式のように表されることができる.

$$\sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

ここで, $c_0 = 0$ が成り立つとすれば, 次式のようになり,

$$\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

$\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i \in B$ が成り立つことになり, 定理 1.1.15 よりこれらの vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立であるので, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つことになり, したがって, $\forall i \in \varLambda_n \cup \{0\}$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ. しかしながら, これは仮定に矛盾する. ゆえに, $c_0 \neq 0$ が成り立つ. したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} &\Leftrightarrow c_0 \mathbf{v}_0 + \sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow c_0 \mathbf{v}_0 = -\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v}_0 = \sum_{i \in \varLambda_n} \left(-\frac{c_i}{c_0} \right) \mathbf{v}_i\end{aligned}$$

以上より, この vector 空間 V の任意の元が有限な個数の vectors$\mathbf{v}_i$ の線形結合によって表されることができた. さらに, これらの vectors$\mathbf{v}_i$ はいづれもその集合 B に含まれるので, これらの vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立である. よって, 体 K 上の任意の vector 空間 V は基底をもつ. □

1.1.7 次元

定理 1.1.17. $(a_{ij})_{i \in \varLambda_m} \in K^m$ なる組 $(a_{ij})_{i \in \varLambda_m}$ が与えられたとする. $m < n$ が成り立つなら, $\forall i \in \varLambda_m$ に対し, $\sum_{j \in \varLambda_n} c_j a_{ij} = 0$ が成り立つかつ, $\exists j \in \varLambda_n$ に対し, $c_j \neq 0$ が成り立つ.

このことは以下のようにして示される.

1. $m = 1$ のとき, $\forall j \in \varLambda_n$ に対し, $a_{1j} = 0$ が成り立つときとそうでないときで場合分けする.
2. $m = k < n - 1$ のとき, $(a_{ij})_{i \in \varLambda_k} \in K^k$ なる組 $(a_{ij})_{i \in \varLambda_k}$ が与えられたら, $\forall i \in \varLambda_k$ に対し, $\sum_{j \in \varLambda_{n-1}} c_j a_{ij} = 0$ が成り立つかつ, $\exists j \in \varLambda_{n-1}$ に対し, $c_j \neq 0$ が成り立つと仮定する.
3. $m = k + 1 < n$ のとき, $\forall i \in \varLambda_{k+1} \forall j \in \varLambda_n$ に対し, $a_{ij} = 0$ が成り立つなら, 明らかである.
4. そうでないなら, 和 $-\frac{a_{i'j}}{a_{ij}} \sum_{j' \in \varLambda_n} c_{j'} a_{ij'} + \sum_{j' \in \varLambda_n} c_{j'} a_{i'j'}$ を考えることで 3.. の状況に帰着させる.

5. 以上より数学的帰納法で示す.

証明. $\left(a_{ij}\right)_{i\in\varLambda_m}\in K^m$ なる組 $\left(a_{ij}\right)_{i\in\varLambda_m}$ が与えられ $m<n$ が成り立つとし, $\forall i\in\varLambda_m$ に対し, $\sum_{j\in\varLambda_n}c_ja_{ij}=0$ が成り立つとする.

$m=1$ のとき, $a_{1j}=a_j$ とおくと, $\forall j\in\varLambda_n$ に対し, $a_j=0$ が成り立つなら, $\forall j\in\varLambda_n$ に対し, $c_j=1$ とすればよいし, $\exists j\in\varLambda_n$ に対し, $a_j\neq 0$ が成り立つなら, $\forall j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}$ に対し, $c_{j'}=1$ とし, さらに, 次のようにすれば,

$$c_j=-\frac{1}{a_j}\sum_{j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}}a_{j'}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}\sum_{j'\in\varLambda_n}c_{j'}a_{j'}&=\sum_{j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}}c_{j'}a_{j'}+c_ja_j\\&=\sum_{j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}}a_{j'}+\left(-\frac{1}{a_j}\sum_{j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}}a_{j'}\right)a_j\\&=\sum_{j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}}a_{j'}-\sum_{j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}}a_{j'}=0\end{aligned}$$

$m=k<n-1$ のとき, $\left(a_{ij}\right)_{i\in\varLambda_k}\in K^k$ なる組 $\left(a_{ij}\right)_{i\in\varLambda_k}$ が与えられたら, $\forall i\in\varLambda_k$ に対し, $\sum_{j\in\varLambda_{n-1}}c_ja_{ij}=0$ が成り立つかつ, $\exists j\in\varLambda_{n-1}$ に対し, $c_j\neq 0$ が成り立つと仮定すると, $m=k+1<n$ のとき, $\forall i\in\varLambda_{k+1}\forall j\in\varLambda_n$ に対し, $a_{ij}=0$ が成り立つなら, $\forall j\in\varLambda_n$ に対し, $c_j=1$ とすればよいので, $\exists i\in\varLambda_{k+1}\exists j\in\varLambda_n$ に対し, $a_{ij}\neq 0$ が成り立つとする. このとき, $\forall i'\in\varLambda_{k+1}$ に対し, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}0&=-\frac{a_{i'j}}{a_{ij}}\sum_{j'\in\varLambda_n}c_{j'}a_{ij'}+\sum_{j'\in\varLambda_n}c_{j'}a_{i'j'}\\&=\sum_{j'\in\varLambda_n}c_{j'}\left(a_{i'j'}-\frac{a_{i'j}a_{ij'}}{a_{ij}}\right)\\&=\sum_{j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}}c_{j'}\left(a_{i'j'}-\frac{a_{i'j}a_{ij'}}{a_{ij}}\right)+c_{j'}\left(a_{i'j}-\frac{a_{i'j}a_{ij}}{a_{ij}}\right)\\&=\sum_{j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}}c_{j'}\left(a_{i'j'}-\frac{a_{i'j}a_{ij'}}{a_{ij}}\right)+c_{j'}\left(a_{i'j}-a_{i'j}\right)\\&=\sum_{j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}}c_{j'}\left(a_{i'j'}-\frac{a_{i'j}a_{ij'}}{a_{ij}}\right)\end{aligned}$$

ここで, $a_{i'j'}-\dfrac{a_{i'j}a_{ij'}}{a_{ij}}=b_{i'j'}$ とすれば, $i'=i$ のときは自明なので, $\forall i'\in\varLambda_{k+1}\setminus\{i\}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$0=\sum_{j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}}c_{j'}b_{i'j'}$$

ここで, 仮定より $\exists j'\in\varLambda_n\setminus\{j\}$ に対し, $c_{j'}\neq 0$ が成り立つので, $\exists j'\in\varLambda_n$ に対し, $c_{j'}\neq 0$ が成り立つ.

以上より数学的帰納法で示すべきことは示された. □

定理 1.1.18. 体 K 上の vector 空間 V の基底をなす vectors の個数が有限で, $\forall(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \in V$ なる vectors$\mathbf{v}_i$, $\mathbf{w}_j$ が与えられたとし, それらの vectors$\mathbf{w}_j$ はいずれもそれらの vectors$\mathbf{v}_i$ の線形結合であるとする. このとき, $m < n$ が成り立つなら, それらの vectors$\mathbf{w}_j$ は線形従属である. このことは以下のようにして示される.

1. 仮定より $\forall j \in \Lambda_n$ に対し, $\mathbf{w}_j = \sum_{i \in \Lambda_m} k_{ij}\mathbf{v}_i$ が成り立つ.
2. $l_j \in K$ を用いて $\sum_{j \in \Lambda_n} l_j\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ を考え, 1.. の式を代入する.
3. 定理 1.1.17 に注意すれば, $\exists j \in \Lambda_n$ に対し, $l_j \neq 0$ が成り立つ.
4. 以上の議論により, それらの vectors$\mathbf{w}_j$ は線形従属であることが示される.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の基底をなす vectors の個数が有限で, $\forall(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \in V$ なる vectors$\mathbf{v}_i$, $\mathbf{w}_j$ が与えられたとし, それらの vectors$\mathbf{w}_j$ はいずれもそれらの vectors$\mathbf{v}_i$ の線形結合であるとする. このとき, $k_{ij} \in K$ を用いて $\forall j \in \Lambda_n$ に対し, $\mathbf{w}_j = \sum_{i \in \Lambda_m} k_{ij}\mathbf{v}_i$ が成り立つことになる. $m < n$ が成り立つなら, $\forall j \in \Lambda_n$ に対し, その体 K の元 l_j を用いて $\sum_{j \in \Lambda_n} l_j\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ を考えると, 次のようになる.

$$\sum_{j \in \Lambda_n} l_j\mathbf{w}_j = \sum_{j \in \Lambda_n} l_j \sum_{i \in \Lambda_m} k_{ij}\mathbf{v}_i = \sum_{i \in \Lambda_m}\sum_{j \in \Lambda_n} k_{ij}l_j\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

ここで, 定理 1.1.17 より, $\forall i \in \Lambda_m$ に対し, $\sum_{j \in \Lambda_n} l_jk_{ij} = 0$ が成り立つかつ, $\exists j \in \Lambda_n$ に対し, $l_j \neq 0$ が成り立つ. これにより, $\sum_{j \in \Lambda_n} l_j\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ が成り立つかつ, $\exists j \in \Lambda_n$ に対し, $l_j \neq 0$ が成り立つ. よって, vectors$\mathbf{w}_j$ は線形従属であることが示された. □

定理 1.1.19 (有限次元の一意性)**.** $\{\mathbf{0}\}$ でない体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, vectors の組々 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i \in \Lambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_i\rangle_{i \in \Lambda_n}$ がともにその vector 空間 V の基底であるなら, $m = n$ が成り立つ.

このことは以下のようにして示される.

1. 基底の定義より vectors$\mathbf{w}_j$ はどれも vectors$\mathbf{v}_i$ の線形結合であるかつ, 線形独立であるということに注意する.
2. 上記の定理 1.1.18 の対偶をとることで $m \geq n$ を得る.
3. vectors$\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j$ を逆にして 1.. から 2.. の議論に適用させる.
4. 2.. , 3.. より $m = n$ が得られる.

証明. $\{\mathbf{0}\}$ でない体 K 上の vector 空間 V が与えられ vectors の組々 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i \in \Lambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_i\rangle_{i \in \Lambda_n}$ がともにその vector 空間 V の基底であるとき, 基底の定義よりそれらの vectors$\mathbf{w}_j$ はどれも族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_m}$ の線形従属であるかつ, それらの vectors$\mathbf{w}_j$ は線形独立である. このとき, 定理 1.1.18 の対偶をとれば, それらの vectors$\mathbf{w}_j$ は線形独立であるなら, $m \geq n$ が成り立つ. vectors$\mathbf{v}_i$, $\mathbf{w}_j$ を逆にしても, 同様にして $m \leq n$ が得られる. したがって, $m = n$ が成り立つ. □

定義 1.1.14. $\{\mathbf{0}\}$ でない体 K 上の vector 空間 V の基底に含まれる vectors の個数は上記の定理より一意的であることが分かった. この個数を vector 空間 V の体 K 上の次元といい, $\dim_K V$, または単に $\dim V$ と書く. 体 K 上の vector 空間 $\{\mathbf{0}\}$ の次元 $\dim\{\mathbf{0}\}$ は, 基底が空集合 $\emptyset$ であると考え, 0 とする. 次元が有限なら

ば, その vector 空間は有限次元であるといい, 次元が無限ならば, その vector 空間は無限次元であるという. より詳しくいえば, $\dim V = n$ なる vector 空間を n 次元 vector 空間という.

定理 1.1.20. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V の族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_r}$ が線形独立であるとする. $r = n$ なら, これらの vectors$\mathbf{v}_i$ はこの vector 空間 V の基底であり, $r < n$ なら, これらの vectors$\mathbf{v}_i$ に適切な $n - r$ つの元を加えることでこの vector 空間 V の基底をつくることができる.

これは $r = n$ の場合, 背理法で示され, $r < n$ の場合, 定義に従って示される.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V の族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_r}$ が線形独立であるとし, vectors$\mathbf{v}_i$ によって生成される vector 空間 V の部分 vector 空間を W とおく.

まず, $r = n$ のときを考えよう. $V \neq W$ と仮定すると, $\mathbf{v} \in V \setminus W$ なる vector$\mathbf{v}$ が存在して, その部分 vector 空間 W は vector$\mathbf{v}$ を生成することができないことになる. ここで, $\sum_{i \in \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i + c_{r+1} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow$ が成り立つかつ, $\exists i \in \Lambda_{r+1}$ に対し, $c_i \neq 0$ が成り立つと仮定すると, $c_{r+1} = 0$ のとき, $\sum_{i \in \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ となるような $c_i = 0$ でない添数 i が存在することになりこれは仮定に矛盾するので, $c_{r+1} \neq 0$ が得られる. このとき, $\sum_{i \in \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i + c_{r+1} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_r} \left(-\frac{c_i}{c_{r+1}} \mathbf{v}_i \right)$ が成り立ち, これはその部分 vector 空間 W が vector$\mathbf{v}$ を生成することができないことに矛盾する. 以上より, $\sum_{i \in \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i + c_{r+1} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \Lambda_{r+1}$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ. このとき, 族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_r}$ が $n+1$ つ存在し, これは仮定に矛盾する. よって, $V = W$ が成り立ちその族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_r}$ はその vector 空間 V の基底である.

次に, $r < n$ のときを考えよう. その族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_r}$ では, その vector 空間の任意の元が線形結合されるとは限らなく, その族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_r}$ はその vector 空間 V の基底でないので, $V \neq W$ が成り立つ. そこで, $\mathbf{v}_{r+1} \in V \setminus W$ なる vector$\mathbf{v}_{r+1}$ をとれば, $i \in \Lambda_{r+1}$ に対し vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立である. その部分 vector 空間 $\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_{r+1}}$ に対しても同じ議論を繰り返すことで, その族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_r}$ に適切な $n - r$ つの元を加えることでこの vector 空間 V の基底をつくることができる. □

定理 1.1.21. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられこれの基底 $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられているとき, その vector 空間 V は族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ によって張られているので, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その体 K のある元々 k_i を用いて $\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ のように表されるのであった. このときの組 $\left(k_i\right)_{i \in \Lambda_n}$ は一意的である.

これは背理法によって示される.

定義 1.1.15. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられこれの基底 $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられているとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ なる組 $\left(k_i\right)_{i \in \Lambda_i}$ をその基底 $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ でのその vector$\mathbf{v}$ の成分, 座標といい, その元 k_i をその vector$\mathbf{v}$ のその基底 $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ での第 i 成分, 第 i 座標という.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられこれの基底 $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられているとき, その vector 空間 V は族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ によって張られているので, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その体 K のある元々 k_i を用いて $\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ のように表されるのであった. このときの組 $\left(k_i\right)_{i \in \Lambda_n}$ のほかに異なる組 $\left(l_i\right)_{i \in \Lambda_n}$ が存在して, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} l_i \mathbf{v}_i$ が成り立つなら, $\exists i \in \Lambda_n$ に対し, $k_i \neq l_i$ が成り立つ, 即ち, $k_i - l_i \neq 0$ が成り立つかつ, 次のよ

うになる.

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i - \sum_{i \in \Lambda_n} l_i \mathbf{v}_i = \sum_{i \in \Lambda_n} (k_i - l_i) \mathbf{v}_i$$

ゆえに, その族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ は線形従属であるが, これはその族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ がその vector 空間 V の基底をなすので, その族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ は線形独立であることに矛盾する. □

定理 1.1.22. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の r 次元部分 vector 空間 W が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- $\dim W \leq \dim V$ が成り立ちその部分 vector 空間 W の次元が有限である.
- $\dim W = \dim V$ が成り立つならそのときに限り, $W = V$ が成り立つ.
- その部分 vector 空間 W の任意の基底 $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_r}$ に対し, これを拡大したその vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が存在する.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の r 次元部分 vector 空間 W が与えられたとき, その部分 vector 空間 W の基底 $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_r}$ について, $\dim W > \dim V$ が成り立つなら, その部分 vector 空間 W の基底 $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_r}$ をなす vectors$\mathbf{w}_i$ のうち $\mathbf{w}_i \in W$ かつ $\mathbf{w}_i \notin V$ が成り立つようなものが存在する. これのうち 1 つを $\mathbf{w}'$ とおくと, $\mathbf{w}' \notin V$ が成り立つので, $W \subseteq V$ が成り立たないことになるが, その集合 W はその vector 空間の部分集合であることに矛盾する. よって, $\dim W \leq \dim V$ が成り立ちその部分 vector 空間 W の次元は有限である.

その部分 vector 空間 W の基底 $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_r}$ をなす vectors$\mathbf{w}_i$ は vector 空間 V の線形独立な元でもある. $\dim W = \dim V$ が成り立つなら, これらの vectors$\mathbf{w}_i$ はこの vector 空間 V の基底であり, $\dim W < \dim V$ が成り立つなら, これらの vectors$\mathbf{w}_i$ に適切な $n - r$ つの元を加えることでこの vector 空間 V の基底をつくることができるのであった. これにより, $\dim W = \dim V$ が成り立つならそのときに限り, $W = V$ が成り立ち, $\dim W < \dim V$ が成り立つなら, その部分 vector 空間 W の任意の基底 $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_r}$ に対し, これを拡大したその vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が存在する. □

1.1.8 基底の取りかえ

定理 1.1.23. 体 K 上の n 次元の vector 空間 V が与えられたとき, これの基底を $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおく. その vector 空間はそれらの vectors$\mathbf{v}_i$ によって生成されるので, $\forall \mathbf{w} \in V$ に対し, その vector$\mathbf{w}$ は $\mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ とおくことができる. ここで, $\exists i' \in \Lambda_n$ に対し, $k_{i'} \neq 0$ が成り立てば, その vector$\mathbf{v}_{i'}$ をその vector$\mathbf{w}$ に置きかえた組 $\left\langle \begin{cases} \mathbf{v}_i & \text{if} \quad i \neq i' \\ \mathbf{w} & \text{if} \quad i = i' \end{cases} \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ もその vector 空間 V の基底である.

証明. 体 K 上の n 次元の vector 空間 V が与えられたとき, これの基底を $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおく. その vector 空間はそれらの vectors$\mathbf{v}_i$ によって生成されるので, $\forall \mathbf{w} \in V$ に対し, その vector$\mathbf{w}$ は $\mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ とおくことができるのであった. ここで, $\exists i' \in \Lambda_n$ に対し, $k_{i'} \neq 0$ が成り立てば, vector$\mathbf{v}_{i'}$ を vector$\mathbf{w}$ で置きかえた組 $\left\langle \begin{cases} \mathbf{v}_i & \text{if} \quad i \neq i' \\ \mathbf{w} & \text{if} \quad i = i' \end{cases} \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ について, 次のことから,

$$\mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i = \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} k_i \mathbf{v}_i + k_{i'} \mathbf{v}_{i'} \Leftrightarrow k_{i'} \mathbf{v}_{i'} = \mathbf{w} - \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} k_i \mathbf{v}_i$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{v}_{i'} = \frac{1}{k_{i'}}\mathbf{w} - \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} \frac{k_i}{k_{i'}}\mathbf{v}_i$$

その組 $\left\langle \begin{cases} \mathbf{v}_i & \text{if} \quad i \neq i' \\ \mathbf{w} & \text{if} \quad i = i' \end{cases} \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ からその vector 空間 V が生成される.

さらに, 次のようになり,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \varLambda_n} c_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} c_i\mathbf{v}_i + c_{i'}\mathbf{v}_{i'} = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} c_i\mathbf{v}_i + c_{i'}\left(\frac{1}{k_{i'}}\mathbf{w} - \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} \frac{k_i}{k_{i'}}\mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} c_i\mathbf{v}_i + \frac{c_{i'}}{k_{i'}}\mathbf{w} - \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} \frac{c_{i'}k_i}{k_{i'}}\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} \left(c_i - \frac{c_{i'}k_i}{k_{i'}}\right)\mathbf{v}_i + \frac{c_{i'}}{k_{i'}}\mathbf{w} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

ここで, その組 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ は線形独立なので, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ. これにより, $\forall i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}$ に対し, $c_i - \frac{c_{i'}k_i}{k_{i'}} = 0$ が成り立つかつ, $\frac{c_{i'}}{k_{i'}} = 0$ が成り立つので, その組 $\left\langle \begin{cases} \mathbf{v}_i & \text{if} \quad i \neq i' \\ \mathbf{w} & \text{if} \quad i = i' \end{cases} \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ も線形独立である.

よって, その vector$\mathbf{v}_{i'}$ をその vector$\mathbf{w}$ に置きかえた組 $\left\langle \begin{cases} \mathbf{v}_i & \text{if} \quad i \neq i' \\ \mathbf{w} & \text{if} \quad i = i' \end{cases} \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ もその vector 空間 V の基底である. □

定理 1.1.24. 体 K 上の n 次元の vector 空間 V が与えられたとき, これの基底を $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおく. その vector 空間はそれらの vectors$\mathbf{v}_i$ によって生成されるので, $\forall \mathbf{w} \in V$ に対し, その vector$\mathbf{w}$ は $\mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_n} k_i\mathbf{v}_i$ とおくことができる. ここで, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ でのこれの座標が $(l_i)_{i \in \varLambda_n}$ と与えられたとすると, その基底 $\left\langle \begin{cases} \mathbf{v}_i & \text{if} \quad i \neq i' \\ \mathbf{w} & \text{if} \quad i = i' \end{cases} \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ でのその vector$\mathbf{v}$ の座標は $\left(\begin{cases} l_i - \frac{k_i l_{i'}}{k_{i'}} & \text{if} \quad i \neq i' \\ \frac{l_{i'}}{k_{i'}} & \text{if} \quad i = i' \end{cases}\right)_{i \in \varLambda_n}$ となる.

証明. 体 K 上の n 次元の vector 空間 V が与えられたとき, これの基底を $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおく. その vector 空間はそれらの vectors$\mathbf{v}_i$ によって生成されるので, $\forall \mathbf{w} \in V$ に対し, その vector$\mathbf{w}$ は $\mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_n} k_i\mathbf{v}_i$ とおくことができる. ここで, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ でのこれの座標が $(l_i)_{i \in \varLambda_n}$ と与えられたとすると, 定義より次式が成り立つ.

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} l_i\mathbf{v}_i = \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} l_i\mathbf{v}_i + l_{i'}\mathbf{v}_{i'}$$

ここで, その vector$\mathbf{v}_{i'}$ は $\frac{1}{k_{i'}}\mathbf{w} - \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} \frac{k_i}{k_{i'}}\mathbf{v}_i$ と書きかえられることができたので, 次のようになる.

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} l_i\mathbf{v}_i + l_{i'}\left(\frac{1}{k_{i'}}\mathbf{w} - \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} \frac{k_i}{k_{i'}}\mathbf{v}_i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} l_i \mathbf{v}_i + \frac{l_{i'}}{k_{i'}} \mathbf{w} + \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \left(-\frac{k_i l_{i'}}{k_{i'}} \right) \mathbf{v}_i \\
&= \frac{l_{i'}}{k_{i'}} \mathbf{w} + \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \left(l_i - \frac{k_i l_{i'}}{k_{i'}} \right) \mathbf{v}_i
\end{aligned}
$$

以上の議論により, よって, その基底 $\left\langle \begin{cases} \mathbf{v}_i & \text{if} \quad i \neq i' \\ \mathbf{w} & \text{if} \quad i = i' \end{cases} \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ でのその vector$\mathbf{v}$ の座標は $\left(\begin{cases} l_i - \dfrac{k_i l_{i'}}{k_{i'}} & \text{if} \quad i \neq i' \\ \dfrac{l_{i'}}{k_{i'}} & \text{if} \quad i = i' \end{cases} \right)_{i \in \Lambda_n}$ となる. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p111,132-136 ISBN978-4-00-029871-1

[2] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p41-73 ISBN978-4-00-029872-8

[3] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 1976. 新装版第 2 刷 p45-51,107-112,170-199 ISBN978-4-00-029873-5

[4] 中西敏浩. ”数学基礎 IV (線形代数学) 講義ノート”. 島根大学. `http://www.math.shimane-u.ac.jp/~tosihiro/skks4main.pdf` (2020-9-7 取得)

1.2 線形写像

1.2.1 線形写像

定義 1.2.1. 体 K 上の vector 空間 V, W において写像 $f : V \rightarrow W$ が, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \forall k, l \in K$ に対し, $f(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}) = kf(\mathbf{v}) + lf(\mathbf{w})$ を満たすとき, この写像を体 K 上の vector 空間として準同型写像, 体 K 上の vector 空間 V から W への線形写像, K-線形変換, 体 K 上で線形的な写像などという. 体 K は vector 空間が満たすべき条件が揃っているので, 体 K 上の vector 空間 V から体 K への線形写像を特に vector 空間 V の線形形式, 1 次形式という.

定理 1.2.1. 体 K 上の vector 空間 V から W への任意の線形写像 f に対し, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V から W への線形写像 f について, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{0}) &= f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) \\
&= f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) \\
&= f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

□

定理 1.2.2. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, W において, その vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられておりその vector 空間 W の任意の族 $\{\mathbf{w}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ が成り立つような線形写像 $f : V \rightarrow W$ がただ 1 つ存在し, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ が成り立つならそのときに限り, 次式が成り立つ.

$$f\left(\sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{w}_i$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, W において, その vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられておりその vector 空間 W の任意の族 $\{\mathbf{w}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $f(\mathbf{v}_i) = f'(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ が成り立つような線形写像たち $f : V \rightarrow W$, $f' : V \rightarrow W$ を考えよう. それらの写像たちは線形写像であり, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ とおかれれば, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{v}) &= f\left(\sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} k_i f(\mathbf{v}_i) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{w}_i \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} k_i f'(\mathbf{v}_i) \\
&= f'\left(\sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i\right) = f'(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

$f=f'$ が成り立つ．これが成り立つなら, もちろん, その体 K の任意の族 $\{k_i\}_{i\in\Lambda_n}$ に対し, 次式が成り立つ．

$$f\left(\sum_{i\in\Lambda_n}k_i\mathbf{v}_i\right)=\sum_{i\in\Lambda_n}k_i\mathbf{w}_i$$

逆に, 次式が成り立つなら,

$$f\left(\sum_{i\in\Lambda_n}k_i\mathbf{v}_i\right)=\sum_{i\in\Lambda_n}k_i\mathbf{w}_i$$

$\forall i\in\Lambda_n$ に対し, $k_{i'}=\begin{cases}1 & \text{if} \quad i=i'\\ 0 & \text{if} \quad i\neq i'\end{cases}$ とおかれれば, 次式が成り立つので,

$$\begin{aligned}f\left(\mathbf{v}_i\right)&=f\left(\sum_{i'\in\Lambda_n\setminus\{i\}}0\mathbf{v}_{i'}+1\mathbf{v}_i\right)\\&=f\left(\sum_{i'\in\Lambda_n}k_{i'}\mathbf{v}_{i'}\right)\\&=\sum_{i'\in\Lambda_n}k_{i'}\mathbf{w}_{i'}\\&=\sum_{i'\in\Lambda_n\setminus\{i\}}0\mathbf{w}_{i'}+1\mathbf{w}_i=\mathbf{w}_i\end{aligned}$$

次式のようになり

$$f\left(\sum_{i\in\Lambda_n}k_i\mathbf{v}_i\right)=\sum_{i\in\Lambda_m}k_i\mathbf{w}_i=\sum_{i\in\Lambda_m}k_if\left(\mathbf{v}_i\right)$$

$\forall i\in\Lambda_n$ に対し, $f\left(\mathbf{v}_i\right)=\mathbf{w}_i$ が成り立つ．それが一意的であることは上で述べられた． □

定理 1.2.3. 体 K 上の vector 空間 U, V, W が与えられたとき, 2 つの線形写像 $f:U\rightarrow V$, $g:V\rightarrow W$ において, その合成写像 $g\circ f:U\rightarrow W$ もその体 K 上で線形的である．

証明. 体 K 上の vector 空間 U, V, W, 2 つの線形写像 $f:U\rightarrow V$, $g:V\rightarrow W$ において $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in U$ に対するその合成写像 $g\circ f:U\rightarrow W$ を考えよう．したがって, 次のようになる．

$$\begin{aligned}g\circ f\left(k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\right)&=g\left(f\left(k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\right)\right)\\&=g\left(kf\left(\mathbf{v}\right)+lf\left(\mathbf{w}\right)\right)\\&=kg\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right)+lg\left(f\left(\mathbf{w}\right)\right)\\&=kg\circ f\left(\mathbf{v}\right)+lg\circ f\left(\mathbf{w}\right)\end{aligned}$$

よって, その合成写像 $g\circ f:U\rightarrow W$ もその体 K 上で線形的である． □

1.2.2 線形同型写像

定義 1.2.2. 体 K 上の 2 つの vector 空間たち V, W が与えられたとする．線形写像 $f:V\rightarrow W$ が全単射であるとき, この写像 f をその体 K 上のその vector 空間 V からその vector 空間 W への線形同型写像, 同型写

像などといい, その体 K 上のその vector 空間 V からその vector 空間 W への線形同型写像が存在するとき, その vector 空間 V とその vector 空間 W は線形同型であるなどといい $V \cong W$ などと書く. 特に, 体 K 上のその vector 空間 V からその vector 空間 V 自身への線形同型写像 $f: V \xrightarrow{\sim} V$ を体 K 上の V の正則な線形変換, 可逆な線形変換, 線形自己同型写像, 自己同型写像などという.

もちろん, その vector 空間 V の恒等写像 I_V も V の線形自己同型写像である.

定理 1.2.4. 体 K 上の 3 つの vector 空間たち U, V, W が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- 任意の体 K 上の vector 空間たち U, V, W に対し, 2 つのその体 K 上の線形同型写像たち $f: U \xrightarrow{\sim} V$, $g: V \xrightarrow{\sim} W$ の合成写像 $g \circ f: U \rightarrow W$ もその体 K 上の線形同型写像 $g \circ f: U \xrightarrow{\sim} W$ である.
- 任意の体 K 上の vector 空間たち V, W に対し, その体 K 上の線形同型写像 $f: V \xrightarrow{\sim} W$ の逆写像 $f^{-1}: W \rightarrow V$ も体 K 上の線形同型写像 $f^{-1}: W \xrightarrow{\sim} V$ である.

証明. 任意の体 K 上の vector 空間たち U, V, W に対し, 2 つのその体 K 上の線形同型写像たち $f: U \xrightarrow{\sim} V$, $g: V \xrightarrow{\sim} W$ の合成写像 $g \circ f: U \rightarrow W$ において 2 つのその体 K 上の線形同型写像たち $f: U \xrightarrow{\sim} V$, $g: V \xrightarrow{\sim} W$ は線形的であるなら, その合成写像 $g \circ f: U \rightarrow W$ も線形的であり, 2 つの体 K 上の線形同型写像たち $f: U \xrightarrow{\sim} V$, $g: V \xrightarrow{\sim} W$ がいずれも全単射であるので, その合成写像 $g \circ f: U \xrightarrow{\sim} W$ も全単射であり線形同型写像の定義よりその合成写像 $g \circ f: U \rightarrow W$ もその体 K 上の線形同型写像 $g \circ f: U \xrightarrow{\sim} W$ である.

また, 任意の体 K 上の vector 空間たち V, W に対し, 1 つの体 K 上の線形同型写像 $f: V \xrightarrow{\sim} W$ において $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}) &= f^{-1}\left(kf \circ f^{-1}(\mathbf{v}) + lf \circ f^{-1}(\mathbf{w})\right) \\
&= f^{-1}\left(kf\left(f^{-1}(\mathbf{v})\right) + lf\left(f^{-1}(\mathbf{w})\right)\right) \\
&= f^{-1}\left(f\left(kf^{-1}(\mathbf{v}) + lf^{-1}(\mathbf{w})\right)\right) \\
&= f^{-1} \circ f\left(kf^{-1}(\mathbf{v}) + lf^{-1}(\mathbf{w})\right) \\
&= kf^{-1}(\mathbf{v}) + lf^{-1}(\mathbf{w})
\end{aligned}$$

したがって, その逆写像 $f^{-1}: W \rightarrow V$ も線形的であり, その逆写像 $f^{-1}: W \rightarrow V$ も全単射であるので, 線形同型写像の定義よりその逆写像 $f^{-1}: W \xrightarrow{\sim} V$ もその体 K 上の線形同型写像である. □

定理 1.2.5. その関係 $\cong$ は同値関係となる, 即ち, 次のことが成り立つ.

- 任意の体 K 上の vector 空間たち V に対し, $V \cong V$ が成り立つ.
- 任意の体 K 上の vector 空間たち V, W に対し, $V \cong W$ が成り立つなら, $W \cong V$ が成り立つ.
- 任意の体 K 上の vector 空間たち U, V, W に対し, $U \cong V$ かつ $V \cong W$ が成り立つなら, $U \cong W$ が成り立つ.

証明. 定理 1.2.4 より明らかである. □

定理 1.2.6 (線形同型定理)**.** 体 K 上の $\dim V = n$ なる 2 つの任意の vector 空間たち V, W に対し, 次のことが成り立つ.

- $V \cong W$ が成り立つなら, ある線形同型写像 $f: V \xrightarrow{\sim} W$ が存在して, その vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ を用いた組 $\langle f(\mathbf{v}_i) \rangle_{i \in \Lambda_n}$ がその vector 空間 W の基底をなし, さらに, $\dim V = \dim W$ が成

り立つ.

- $\dim V = \dim W$ が成り立つなら, それらの vector 空間たち V, W の基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ を用いて, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ なる線形写像 $f: V \rightarrow W$ が定義されれば, その線形写像 f は線形同型写像で, さらに, $V \cong W$ が成り立つ.

この定理を線形同型定理という.

これにより, 体 K 上の任意の n 次元の vector 空間 V において $V \cong K^n$ が成り立つので, その体 K 上の任意の m 次元の vector 空間 V から任意の n 次元 vector 空間 W への任意の線形写像 $f: V \rightarrow W$ は全て線形写像 $f': K^m \rightarrow K^n$ へ帰着できる.

証明. 体 K 上の $\dim V = n$ なる 2 つの任意の vector 空間たち V, W に対し, その vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, $V \cong W$ が成り立つならば, ある線形同型写像 $f: V \xrightarrow{\sim} W$ が存在し, 定理 1.2.1 より $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その体 K の族 $\{k_i\}_{i \in \varLambda_n}$ を用いて $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} v_i \mathbf{v}_i$ とおかれれば, 次式が成り立つ.

$$f\left(\sum_{i \in \varLambda_n} v_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i \in \varLambda_n} v_i f(\mathbf{v}_i)$$

この線形写像 f は全射であるから, その vector 空間 W はそれらの vectors$f(\mathbf{v}_i)$ によって生成されることができる. したがって定理 1.1.16 より, その vector 空間 W の基底が存在し, $\forall i \in \varLambda_n$ に対しそれらの vectors$f(\mathbf{v}_i)$ のうちどれかであるから, $\dim W \leq \dim V = n$ が成り立つ.

また, その体 K の元 $\{c_i\}_{i \in \varLambda_n}$ を用いて $\sum_{i \in \varLambda_n} c_i f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ が成り立つなら, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i &= \sum_{i \in \varLambda_n} c_i f^{-1} \circ f(\mathbf{v}_i) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} c_i f^{-1}(f(\mathbf{v}_i)) \\
&= f^{-1}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} c_i f(\mathbf{v}_i)\right) \\
&= f^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$\forall i \in \varLambda_n$ に対し, それらの vectors$\mathbf{v}_i$ が線形独立であるので, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ. 以上より, その vector 空間 W は, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, それらの vectors$f(\mathbf{v}_i)$ によって生成されることができるかつ, $\forall i \in \varLambda_n$ に対しそれらの vectors$f(\mathbf{v}_i)$ が線形独立であるので, その組 $\langle f(\mathbf{v}_i) \rangle_{i \in \varLambda_n}$ がその vector 空間 W の基底である. よって, $V \cong W$ が成り立つなら, $\dim V = \dim W$ が成り立つ.

逆に, $\dim V = \dim W = n$ が成り立つなら, その vector 空間 W の基底 $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ が成り立つような線形写像 $f: V \rightarrow W$ を考えよう. このとき, $g(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$ が成り立つような線形写像 $g: W \rightarrow V$ が考えられれば, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ とおいて, 次のようになるかつ,

$$g \circ f(\mathbf{v}) = g \circ f\left(\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= g\left(\sum_{i\in\varLambda_n} k_i f\left(\mathbf{v}_i\right)\right)\\
&= g\left(\sum_{i\in\varLambda_n} k_i \mathbf{w}_i\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_n} k_i g\left(\mathbf{w}_i\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, $\mathbf{w} = \sum_{i\in\varLambda_n} l_i\mathbf{w}_i$ とおいて, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
f \circ g\left(\mathbf{w}\right) &= f \circ g\left(\sum_{i\in\varLambda_n} l_i\mathbf{w}_i\right)\\
&= f\left(\sum_{i\in\varLambda_n} l_i g\left(\mathbf{w}_i\right)\right)\\
&= f\left(\sum_{i\in\varLambda_n} l_i \mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_n} l_i f\left(\mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_n} l_i \mathbf{w}_i = \mathbf{w}
\end{aligned}
$$

その線形写像 f の逆写像がまさしくその線形写像 g であることになり V から W への線形同型写像が存在するので, $V \cong W$ である. □

1.2.3 線形写像全体の集合

定義 1.2.3. 体 K 上の任意の 2 つの vector 空間 V, W が与えられたとき, その vector 空間 V からその vector 空間 W への線形写像全体の集合を $L(V,W)$ とおき, ここで, $\forall k,l \in K\forall\mathbf{v} \in V\forall f,g \in L(V,W)$ に対し, 次のように定義する.

$$
\left(kf + lg\right)\left(\mathbf{v}\right) = kf\left(\mathbf{v}\right) + lg\left(\mathbf{v}\right)
$$

定理 1.2.7. 体 K 上の任意の 2 つの vector 空間 V, W が与えられたとき, $\forall k,l \in K\forall\mathbf{v} \in V\forall f,g \in L(V,W)$ に対し, 写像 $kf + lg$ は線形的である.

証明. 体 K 上の任意の 2 つの vector 空間 V, W が与えられたとき, $\forall k,l,k',l' \in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in V\forall f,g \in L(V,W)$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\left(kf + lg\right)\left(k'\mathbf{v} + l'\mathbf{w}\right) &= kf\left(k'\mathbf{v} + l'\mathbf{w}\right) + lg\left(k'\mathbf{v} + l'\mathbf{w}\right)\\
&= kk'f\left(\mathbf{v}\right) + kl'f\left(\mathbf{w}\right) + lk'g\left(\mathbf{v}\right) + ll'g\left(\mathbf{w}\right)\\
&= k'kf\left(\mathbf{v}\right) + k'lg\left(\mathbf{v}\right) + l'kg\left(\mathbf{w}\right) + l'lg\left(\mathbf{w}\right)\\
&= k'\left(kf\left(\mathbf{v}\right) + lg\left(\mathbf{v}\right)\right) + l'\left(kf\left(\mathbf{w}\right) + lg\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&= k'\left(kf + lg\right)\left(\mathbf{v}\right) + l'\left(kf + lg\right)\left(\mathbf{w}\right)
\end{aligned}
$$

□

定理 1.2.8. 体 K 上の任意の 2 つの vector 空間 V, W が与えられたとき, その集合 $L(V,W)$ はその体 K 上の vector 空間である.

証明. 体 K 上の任意の 2 つの vector 空間 V, W が与えられたとき, その vector 空間 V からその vector 空間 W への線形写像全体の集合を $L(V,W)$ とおくと, $0 : V \rightarrow W; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{0}$ とおかれれば, $0 \in L(V,W)$ が成り立ち, $\forall f, g \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}(f+g)(\mathbf{v}) &= f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}) \\ &= g(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}) \\ &= (g+f)(\mathbf{v}) \quad \because \ f(\mathbf{v}), g(\mathbf{v}) \in W\end{aligned}$$

$\forall f, g, h \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(\mathbf{v}) &= (f+g)(\mathbf{v}) + h(\mathbf{v}) \\ &= (f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})) + h(\mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{v}) + (g(\mathbf{v}) + h(\mathbf{v})) \\ &= f(\mathbf{v}) + (g+h)(\mathbf{v}) \\ &= (f+(g+h))(\mathbf{v}) \quad \because \ f(\mathbf{v}), g(\mathbf{v}), h(\mathbf{v}) \in W\end{aligned}$$

$\exists 0 \in L(V,W) \forall f \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}(f+0)(\mathbf{v}) &= f(\mathbf{v}) + 0(\mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{v}) + \mathbf{0} = f(\mathbf{v})\end{aligned}$$

$\forall f \in L(V,W) \exists -f \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}(f+(-f))(\mathbf{v}) &= f(\mathbf{v}) + (-f)(\mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

$\forall k \in K \forall f, g \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}(k(f+g))(\mathbf{v}) &= k(f+g)(\mathbf{v}) \\ &= k(f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})) \\ &= kf(\mathbf{v}) + kg(\mathbf{v}) \\ &= (kf)(\mathbf{v}) + (kg)(\mathbf{v})\end{aligned}$$

$\forall k, l \in K \forall f \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}((k+l)f)(\mathbf{v}) &= (k+l)f(\mathbf{v}) \\ &= kf(\mathbf{v}) + lf(\mathbf{v}) \\ &= (kf)(\mathbf{v}) + (lf)(\mathbf{v})\end{aligned}$$

$\forall k, l \in K \forall f \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}((kl)f)(\mathbf{v}) &= (kl)f(\mathbf{v}) \\ &= k(lf(\mathbf{v}))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= k\left(\left(lf\right)\left(\mathbf{v}\right)\right)\\
&= \left(k(lf)\right)\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}
$$

$\exists 1 \in K \forall f \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\left(1f\right)\left(\mathbf{v}\right) = 1f\left(\mathbf{v}\right) = f\left(\mathbf{v}\right)$$

□

定理 1.2.9. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\dim L(V,W) = mn$ が成り立つ.

さらにいえば, これらの vector 空間たち V, W の基底として $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \Lambda_m}$, $\left\langle \mathbf{w}_j \right\rangle_{j \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, 組 $\left\langle \varphi_{ij} : V \to W; \sum_{i' \in \Lambda_m} k_{i'} \mathbf{v}_{i'} \mapsto k_i \mathbf{w}_j \right\rangle_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n}$ がその vector 空間 $L(V,W)$ の基底をなす.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, その vector 空間 V からその vector 空間 W への線形写像全体の集合 $L(V,W)$ は vector 空間をなすのであった. ここで, これらの vector 空間たち V, W の基底として $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \Lambda_m}$, $\left\langle \mathbf{w}_j \right\rangle_{j \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, 組 $\left\langle \varphi_{ij} : V \to W; \sum_{i' \in \Lambda_m} k_{i'} \mathbf{v}_{i'} \mapsto k_i \mathbf{w}_j \right\rangle_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n}$ について考えよう.

$\forall f \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_m} k_i \mathbf{v}_i$, $f\left(\mathbf{v}_i\right) = \sum_{j \in \Lambda_n} l_{ij} \mathbf{w}_j$ とおくと, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
f\left(\mathbf{v}\right) &= f\left(\sum_{i \in \Lambda_m} k_i \mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{i \in \Lambda_m} k_i f\left(\mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{i \in \Lambda_m} k_i \sum_{j \in \Lambda_n} l_{ij} \mathbf{w}_j\\
&= \sum_{i \in \Lambda_m} \sum_{j \in \Lambda_n} k_i l_{ij} \mathbf{w}_j\\
&= \sum_{j \in \Lambda_n} l_{ij} \sum_{i \in \Lambda_m} k_i \mathbf{w}_j\\
&= \sum_{j \in \Lambda_n} l_{ij} \sum_{i \in \Lambda_m} \varphi_{ij}\left(\sum_{i' \in \Lambda_m} k_{i'} \mathbf{v}_{i'}\right)\\
&= \sum_{j \in \Lambda_n} l_{ij} \sum_{i \in \Lambda_m} \varphi_{ij}\left(\mathbf{v}\right)\\
&= \sum_{i \in \Lambda_m} \sum_{j \in \Lambda_n} l_{ij} \varphi_{ij}\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}
$$

$f = \sum_{i \in \Lambda_m} \sum_{j \in \Lambda_n} l_{ij} \varphi_{ij}$ が成り立つ. これにより, その vector 空間 $L(V,W)$ はその組 $\left\langle \varphi_{ij} \right\rangle_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n}$ によって生成される.

さらに, $0 : V \to W; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{0}$ が次のようにおかれれば,

$$0 = \sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} c_{ij} \varphi_{ij}$$

$\forall i \in \Lambda_m$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = 0\left(\mathbf{v}_i\right) &= \sum_{(i',j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} c_{i'j} \varphi_{i'j}\left(\mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{i' \in \Lambda_m} \sum_{j \in \Lambda_n} c_{i'j} \varphi_{i'j}\left(\mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{j \in \Lambda_n} \sum_{i' \in \Lambda_m} c_{i'j} \varphi_{i'j}\left(\mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{j \in \Lambda_n} c_{ij} \mathbf{w}_j
\end{aligned}$$

ここで, それらの vectors$\mathbf{w}_j$ は線形独立なので, $\forall j \in \Lambda_n$ に対し, $c_{ij} = 0$ が成り立つ. 以上より, $\forall (i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n$ に対し, $c_{ij} = 0$ が成り立つので, それらの線形写像たち φ_{ij} は線形独立である.

以上の議論により, その組 $\left\langle \varphi_{ij} \right\rangle_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n}$ がその vector 空間 $L(V,W)$ の基底をなすので, $\dim L(V,W) = mn$ が成り立つ. □

定理 1.2.10. 体 K 上の 3 つの vector 空間たち U, V, W が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- $\forall f,g \in L(U,V) \forall h \in L(V,W)$ に対し, $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$ が成り立つ.
- $\forall f \in L(U,V) \forall g,h \in L(V,W)$ に対し, $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$ が成り立つ.
- $\forall k \in K \forall f \in L(U,V) \forall g \in L(V,W)$ に対し, $g \circ (kf) = (kg) \circ f = k(g \circ f)$ が成り立つ.
- $\exists I_V \in L(V,V) \exists I_W \in L(W,W) \forall f \in L(V,W)$ に対し, $I_W \circ f = f \circ I_V = f$ が成り立つ.

これにより, 写像の乗法 $\cdot$ を写像の合成 $\circ$ とするとき, 集合 $L(V,V)$ は環をなす.

証明. 体 K 上の 3 つの vector 空間たち U, V, W において, $\forall f,g \in L(U,V) \forall h \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in U$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
h \circ (f+g)\left(\mathbf{v}\right) &= h\left((f+g)\left(\mathbf{v}\right)\right)\\
&= h\left(f\left(\mathbf{v}\right) + g\left(\mathbf{v}\right)\right)\\
&= h\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right) + h\left(g\left(\mathbf{v}\right)\right)\\
&= h \circ f\left(\mathbf{v}\right) + h \circ g\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}$$

$\forall f \in L(U,V) \forall g,h \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in U$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
(g+h) \circ f\left(\mathbf{v}\right) &= (g+h)\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right)\\
&= g\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right) + h\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right)\\
&= g \circ f\left(\mathbf{v}\right) + h \circ f\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}$$

$\forall k \in K \forall f \in L(U,V) \forall g \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in U$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
g \circ (kf)\left(\mathbf{v}\right) = g\left(kf\left(\mathbf{v}\right)\right) = kg\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right) = k(g \circ f)\left(\mathbf{v}\right)\\
(kg) \circ f\left(\mathbf{v}\right) = (kg)\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right) = kg\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right) = k(g \circ f)\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}$$

また, $I_V \in L(V,V)$, $I_W \in L(W,W)$ なる写像たち I_V, I_W をそれぞれ $I_V\left(\mathbf{v}\right) = \mathbf{v}$, $I_W\left(\mathbf{w}\right) = \mathbf{w}$ と定義すると, $\forall f \in L(V,W) \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$I_W \circ f\left(\mathbf{v}\right) = I_W\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right) = f\left(\mathbf{v}\right)$$

$$f \circ I_V(\mathbf{v}) = f(I_V(\mathbf{v})) = f(\mathbf{v})$$

□

1.2.4 線形写像の像と核

定義 1.2.4. 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いて線形写像 $f: V \rightarrow W$ が与えられたとき, 次式のような集合 $V(f)$ をその写像 f の値域, 像といい $f(V)$, $\mathrm{Im} f$ などと書く.

$$V(f) = \{f(\mathbf{v}) \in W | \mathbf{v} \in V\} \subseteq W$$

また, 次式のような集合, 即ち, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ となるような vector 空間 V の元 $\mathbf{v}$ 全体の集合で写像 f を対応とみなしたときの逆対応 f^{-1} に $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ とした像をその写像 f の核といい, $\ker_K f$, $\ker f$ などと書く.

その写像 f を用いた vector$\mathbf{v}$ の式 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が与えられたとき, その式 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ を方程式とみなせば, このような $\mathbf{v}$ はその方程式 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ の解にあたることから, その写像 f の核 $\ker f$ はその方程式 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ の解空間ともいう.

$$\ker f = \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \subseteq V$$

定理 1.2.11. 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いて線形写像 $f: V \rightarrow W$ が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- その値域 $V(f)$ はその vector 空間 W の部分 vector 空間である.
- その核 $\ker f$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間である.

定義 1.2.5. 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いて線形写像 $f: V \rightarrow W$ が与えられたとき, その写像 f の値域 $V(f)$ の次元 $\dim V(f)$ をその写像 f の階数, その核 $\ker f$ の次元 $\dim \ker f$ をその写像 f の退化次数といいそれぞれ $\mathrm{rank} f$, $\mathrm{nullity} f$ と書く.

証明. 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いて線形写像 $f: V \rightarrow W$ が与えられたとき, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より vector 空間 W の零 vector$\mathbf{0}$ はその値域 $V(f)$ に含まれる. また, $\forall k, l \in K \forall f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \in V(f)$ に対し, その写像 f は線形的であるから, $kf(\mathbf{v}) + lf(\mathbf{w}) = f(k\mathbf{v} + l\mathbf{w})$ が成り立つ. したがって, $kf(\mathbf{v}) + lf(\mathbf{w}) \in V(f)$ が成り立ち, その値域 $V(f)$ はその vector 空間 W の部分 vector 空間である.

前述したとおり, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が成り立つので, vector 空間 V の零 vector$\mathbf{0}$ はその核 $\ker f$ に含まれる. また, $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ker f$ に対し, $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ が成り立つかつ, その写像 f は線形的であるから, 次のようになる.

$$\begin{aligned} f(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}) &= kf(\mathbf{v}) + lf(\mathbf{w}) \\ &= k\mathbf{0} + l\mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

したがって, $k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \in \ker f$ が成り立つので, その核 $\ker f$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間である. □

定理 1.2.12. 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いて線形写像 $f: V \rightarrow W$ が与えられたとき, その写像 f が単射であるならそのときに限り, $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いて線形写像 $f:V \rightarrow W$ が与えられたとき, その写像は線形的であるから, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が成り立つ. その写像 f が単射 $f:V \rightarrowtail W$ であるなら, その核 $\ker f$ の元が $\mathbf{0}$ 以外あるとし, これを $\mathbf{v}$ とすれば, $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ でありその写像 f が単射 $f:V \rightarrowtail W$ であることより $\mathbf{0} = \mathbf{v}$ となり仮定に矛盾する. ゆえに, その核 $\ker f$ の元が $\mathbf{0}$ のみとなる.

また, $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w})$ が成り立つとき, その写像 f は線形的であるから, $f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ が成り立つ. ここで, $\ker f = \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つので, $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ が成り立つ. ゆえに, $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ が得られる. したがって, その写像 f が単射 $f:V \rightarrowtail W$ である. □

定理 1.2.13. 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いた線形写像 $f:V \rightarrow W$ が与えられたとき, $\dim V = n$, $\mathrm{nullity} f = r$ とおくと, その線形写像の核 $\ker f$ の基底が $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_r}$ とおかれれば, その核 $\ker f$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間であるので, その vector 空間 V の基底をなす vectors$\mathbf{v}_i$ が存在するのであった. このとき, vector の組 $\langle f(\mathbf{v}_i) \rangle_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r}$ はその値域 $V(f)$ の基底となる.

このことは次のようにして示される.

1. その写像 f が零写像であれば, $\ker f = V$ かつ $V(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つから, 明らかに成り立つ.
2. その写像 f が零写像でないとしその核 $\ker f$ の基底を考える.
3. その核 $\ker f$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間でありその vector 空間 V の基底がその核 $\ker f$ の基底を含むことができる.
4. $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, これはその vector 空間 V の基底をなす vectors の線形結合で表される. したがって, その像 $V(f)$ の任意の元 $f(\mathbf{v})$ はそれらの vectors$f(\mathbf{v}_i)$ の線形結合で表されることができる.
5. $c_i \in K$ として $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} c_i f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ が成り立つときを考えると, このような元に写すその vector 空間 V の元はその核 $\ker f$ に属され, その vector 空間 V のこの元をその核 $\ker f$ の基底をなす vectors の線形結合で表す.
6. その vector 空間 V の基底をなす vectors に注意すると, 基底の定義より線形独立性が得られる.
7. その組 $\langle f(\mathbf{v}_i) \rangle_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r}$ はその像 $V(f)$ の基底をなす.

証明. 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いて線形写像 $f:V \rightarrow W$ が与えられたとき, $f = 0$ が成り立つなら, $\ker f = V$ が成り立つかつ, $V(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つので, 明らかである. ゆえに, $f \neq 0$ が成り立つとし $\dim V = n$, $\mathrm{nullity} f = \dim \ker f = r$ とおきその核 $\ker f$ の基底を $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_r}$ とすれば, その核 $\ker f$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間であり定理 1.1.22 よりその vector 空間 V の基底をなす vectors$\mathbf{v}_i$ が存在する.

$\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その組 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその vector 空間 V の基底をなすので, $\exists v_i \in K$ に対し, $\mathbf{v} = \displaystyle\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ が成り立つ. また, その組 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_r}$ はその核 $\ker f$ の基底をなし, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $\mathbf{v}_i \in \ker f$ が成り立つことにより $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ が成り立つ. したがって次のようになる.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= f\left(\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i\right) \\ &= \sum_{i \in \varLambda_n} k_i f(\mathbf{v}_i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \varLambda_r} k_i f(\mathbf{v}_i) + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} k_i f(\mathbf{v}_i) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_r} k_i \mathbf{0} + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} k_i f(\mathbf{v}_i) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} k_i f(\mathbf{v}_i)
\end{aligned}
$$

これにより, その値域 $V(f)$ の任意の元 $f(\mathbf{v})$ はその族 $\{f(\mathbf{v}_i)\}_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r}$ はの線形結合で表されることができるので, その族 $\{f(\mathbf{v}_i)\}_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r}$ はその像 $V(f)$ を生成する.

次に, $c_i \in K$ として $\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} c_i f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ が成り立つときを考えよう. その写像 f は線形的であるから, 次のようになるので,

$$
\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} c_i f(\mathbf{v}_i) = f\left(\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} c_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0}
$$

$\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} c_i \mathbf{v}_i \in \ker f$ が成り立ち, $\exists - c_i \in K$ に対し, その核 $\ker f$ の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_r}$ を用いて $\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} c_i \mathbf{v}_i = \sum_{i \in \varLambda_r} (-c_i) \mathbf{v}_i$ が成り立つ. したがって, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i &= \sum_{i \in \varLambda_r} c_i \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} c_i \mathbf{v}_i \\
&= - \sum_{i \in \varLambda_r} (-c_i) \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} c_i \mathbf{v}_i \\
&= - \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} c_i \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

ここで, その族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \varLambda_n}$ はその vector 空間 V の基底をなすので, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ. これにより, その族 $\{f(\mathbf{v}_i)\}_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r}$ は線形独立である. 以上の議論により, その族 $\{f(\mathbf{v}_i)\}_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r}$ はその像 $V(f)$ の基底をなす. □

定理 1.2.14 (次元公式)**.** 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いた線形写像 $f: V \rightarrow W$ が与えられ, その vector 空間 V が有限次元であるとき, 次式が成り立つ.

$$
\mathrm{rank} f + \mathrm{nullity} f = \dim V(f) + \dim \ker f = \dim V
$$

この式, または, この定理を次元公式という.

このことは次のようにして示される.

1. その写像 f が零写像であれば, $\ker f = V$ かつ $V(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つから, 明らかである.
2. その写像 f が零写像でないとしその核 $\ker f$ の基底を考える.
3. その核 $\ker f$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間であり定理 1.1.22 よりその vector 空間 V の基底がその核 $\ker f$ の基底を含む.
4. その vector 空間 V の基底をなす vectors のうちその核 $\ker f$ の基底をなさないものを $\mathbf{v}_i$ とする.
5. このとき, vector の組 $\langle f(\mathbf{v}_i) \rangle$ はその値域 $V(f)$ の基底となる.

6. このような vectors$f\left(\mathbf{v}_i\right)$ は全て $\dim V-\dim\ker f$ つあることに注意すると, 示すべきことは示される.

証明. 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いて線形写像 $f:V\rightarrow W$ が与えられ, その vector 空間 V が有限次元であるとき, $f=0$ が成り立つなら, $\ker f=V$ が成り立つかつ, $V(f)=\{\mathbf{0}\}$ が成り立つので, $\dim\ker f=\dim V$ が成り立つかつ, $\dim V(f)=0$ が成り立つので, 明らかである. ゆえに, 以下, $f\neq 0$ が成り立つとする.

次に, $\dim V=n$, $\dim\ker f=r$ としてその核 $\ker f$ の基底を $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_r}$ とすれば, その核 $\ker f$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間であり定理 1.1.22 よりその vector 空間 V の基底をなす族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\Lambda_n}$ が存在する. このとき, 定理 1.2.13 よりその族 $\{f\left(\mathbf{v}_i\right)\}_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_r}$ はその像 $V(f)$ の基底をなすのであった. このような vectors$f\left(\mathbf{v}_j'\right)$ は全て $n-r$ つあるので, 次式が成り立つ.

$$\dim V(f)=\dim V-\dim\ker f$$

よって, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{rank}f+\mathrm{nullity}f=\dim V(f)+\dim\ker f=\dim V$$

□

定理 1.2.15. 体 K 上の $\dim V=\dim W$ なる 2 つの vector 空間 V, W を用いた線形写像 $f:V\rightarrow W$ が与えられたとき, 次のことは同値である.

- その写像 f は線形同型写像である.
- その写像 f は全射 $f:V\twoheadrightarrow W$ である.
- その写像 f は単射 $f:V\rightarrowtail W$ である.
- $\dim V=\mathrm{rank}f=\dim V(f)$ が成り立つ.
- $\mathrm{nullity}f=\dim\ker f=0$ が成り立つ.

また, 写像 $f:V\rightarrow W$ において, 次のことが成り立つという主張とも関係づけられる.

- その写像 f が全射であるならそのときに限り, $f\circ g=I_W$ が成り立つような写像 $g:W\rightarrow V$ が存在する.
- その写像 f が単射であるならそのときに限り, $g\circ f=I_V$ が成り立つような写像 $g:W\rightarrow V$ が存在する.

証明. 体 K 上の $\dim V=\dim W$ なる 2 つの vector 空間 V, W を用いた線形写像 $f:V\rightarrow W$ が与えられたとき, 定理 1.2.12 より次のことは同値である.

- その写像 f は単射 $f:V\rightarrowtail W$ である.
- $\mathrm{nullity}f=\dim\ker f=0$ が成り立つ.

このとき, 次元公式より次のことは同値である.

- $\mathrm{nullity}f=\dim\ker f=0$ が成り立つ.
- $\dim V=\mathrm{rank}f=\dim V(f)$ が成り立つ.

このとき, その値域 $V(f)$ はその vector 空間 W の部分 vector 空間で $\dim W=\dim V=\dim V(f)$ が成り立

つので, $W = V(f)$ が成り立つ. ゆえに, その写像 f は全射 $f : V \twoheadrightarrow W$ である. 逆に, これが成り立つなら, $W = V(f)$ が成り立つので, $\dim V(f) = \dim W = \dim V$ が成り立つ. 以上の議論により, 次のことは同値である.

- $\dim V = \mathrm{rank} f = \dim V(f)$ が成り立つ.
- その写像 f は全射 $f : V \twoheadrightarrow W$ である.

このとき, 明らかに次のことも同値である.

- その写像 f は線形同型写像である.
- その写像 f は全射 $f : V \twoheadrightarrow W$ である.
- その写像 f は単射 $f : V \rightarrowtail W$ である.

□

定理 1.2.16. 体 K 上の 3 つの任意の有限次元な vector 空間 U, V, W における 2 つの線形写像たち $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{rank} g \circ f \leq \mathrm{rank} f, \quad \mathrm{rank} g \circ f \leq \mathrm{rank} g$$

証明. 体 K 上の 3 つの任意の有限次元な vector 空間 U, V, W における 2 つの線形写像たち $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ が与えられたとき, 写像 $g|V(f) : V(f) \rightarrow W$ において, $\forall \mathbf{w} \in W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in V\left(g|V(f)\right) &\Leftrightarrow \mathbf{w} \in W \wedge \exists \mathbf{v} \in V(f) \left[\mathbf{w} = g|V(f)\left(\mathbf{v}\right)\right] \\ &\Leftrightarrow \mathbf{w} \in W \wedge \exists \mathbf{u} \in U \left[\mathbf{w} = g \circ f\left(\mathbf{u}\right)\right] \\ &\Leftrightarrow \mathbf{w} \in V(g \circ f) \end{aligned}$$

したがって, $V\left(g|V(f)\right) = V(g \circ f)$ が得られる. また, $V\left(g|V(f)\right) \subseteq V(g)$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathrm{rank} g \circ f &= \dim V(g \circ f) \\ &= \dim V\left(g|V(f)\right) \\ &\leq \dim V(g) \\ &= \mathrm{rank} g \end{aligned}$$

また, その値域 $V(f)$ がその vector 空間 V の部分 vector 空間をなすことから, その写像 $g|V(f)$ も線形的であるので, 次元公式より次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathrm{rank} g \circ f &= \dim V(g \circ f) \\ &= \dim V\left(g|V(f)\right) \\ &= \mathrm{rank} g|V(f) \\ &\leq \mathrm{rank} g|V(f) + \mathrm{nullity} g|V(f) \\ &= \dim V(f) \\ &= \mathrm{rank} f \end{aligned}$$

□

定理 1.2.17. 体 K 上の 3 つの任意の有限次元な vector 空間 U, V, W における 2 つの線形写像たち $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ が与えられたとき, $g \circ f = 0$ が成り立つなら, $\mathrm{rank} f + \mathrm{rank} g \leq \dim V$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の 3 つの任意の有限次元な vector 空間 U, V, W における 2 つの線形写像たち $f:U \rightarrow V$, $g:V \rightarrow W$ が与えられたとき, $g \circ f = 0$ が成り立つとする. $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \in V(f)$ が成り立つなら, $\exists \mathbf{u} \in U$ に対し, $\mathbf{v} = f(\mathbf{u})$ が成り立つ. このとき, 次のようになるので,

$$g(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{u})) = g \circ f(\mathbf{u}) = 0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{v} \in \ker g$ が成り立つ. これにより, $V(f) \subseteq \ker g$ が成り立つので, 次元公式よりしたがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank} f + \mathrm{rank} g &= \dim V(f) + \dim V - \mathrm{nullity} g \\
&\leq \dim \ker g + \dim V - \dim \ker g \\
&= \dim V
\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p74-113 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 1976. 新装版第 2 刷 p182-199 ISBN978-4-00-029873-5

[3] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007. 改訂版 8 刷 p146-155 ISBN978-4-320-11097-7

1.3 行列

1.3.1 行列

定義 1.3.1. 1 つの可換環を R と, 2 つの空集合でない集合たちを I, J とおくとき, その 2 つの集合たち I, J の直積 $I \times J$ からその可換環 R への写像 $a : I \times J \rightarrow R; (i,j) \mapsto a_{ij}$ によって得られるその可換環 R の元 a_{ij} 全体の順序付けられた組をその可換環 R における (I,J) 型の行列といい, $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in I\times J}$, または単に, $\left(a_{ij}\right)$ と表される. その 2 つの集合たち I, J がそれぞれ $\#I$ つ, $\#J$ つの元からなる有限集合であるとき, (I,J) 型の行列を $(\#I,\#J)$ 型の行列, $\#I \times \#J$ 型の行列などという. これに対比してその可換環 R の元を scalar, 無向量などという. 特に, その 2 つの集合たち I, J は, 写像 f を適切に定めれば, 体 K の元 a_{ij} を定めるのに任意性があるので, 自然数 m, n を用いてその 2 つの集合たち I, J を次式のようにおいても一般性が失われることはない.

$$\begin{cases} \varLambda_m = \{i \in \mathbb{N} | 1 \leq i \leq m\} = I \\ \varLambda_n = \{j \in \mathbb{N} | 1 \leq j \leq m\} = J \end{cases}$$

このとき, $(\varLambda_m, \varLambda_n)$ 型の行列は (m,n) 型の行列, $m \times n$ 型の行列にあたり, $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in \varLambda_m\times \varLambda_n}$ を次式のようにも書き, その元 a_{ij} が明示的に書かれているものを成分表示された行列などといい, その元 a_{ij} はその可換環 R に属し, これを (i,j) 成分という. また, これが属する集合を $\mathrm{M}\left(m,n,R\right)$, $M_{mn}(R)$, $\mathrm{Mat}(m,n,R)$, $R^{m\times n}$ と書き, 特に $m=n$ ならば単に $M_n(R)$ とも書く.

$$\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in \varLambda_m\times \varLambda_n} = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

また, 行列 $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in \varLambda_m\times \varLambda_n}$ が与えられたとき, 行列たち $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in \{i\}\times \varLambda_n}$, $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in \varLambda_n\times \{j\}}$ をそれぞれその行列 $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in \varLambda_m\times \varLambda_n}$ の第 i 行, 第 j 列という.

$\forall A, B \in \mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, それらの行列たち A, B がそれぞれ $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in \varLambda_m\times \varLambda_n}$, $\left(b_{ij}\right)_{(i,j)\in \varLambda_m\times \varLambda_n}$ と成分表示されるとき, $A=B$ が成り立つことは, $\forall (i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n$ に対し, $a_{ij} = b_{ij}$ が成り立つことと同値であることに注意されたい.

定義 1.3.2. 可換環 R 上の任意の 2 つの (m,n) 型の行列たち A, B がそれぞれ $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in \varLambda_m\times \varLambda_n}$, $\left(b_{ij}\right)_{(i,j)\in \varLambda_m\times \varLambda_n}$ と成分表示されるとき, その環 R の元 k を用いて行列 $A+B$ を次式のように

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{(i,j)\in \varLambda_m\times \varLambda_n}$$

行列 kA を次式のように定義する.

$$kA = \left(ka_{ij}\right)_{(i,j)\in \varLambda_m\times \varLambda_n}$$

定理 1.3.1. 体 K 上の集合 $\mathrm{M}(m,n,K)$ は体 K 上の vector 空間であり行列が vector となる.

証明. vector 空間の定義で挙げられている条件を満たしているかどうか確かめればよい. □

定義 1.3.3. 体 K 上でその 2 つの集合たち $\varLambda_m$, $\varLambda_n$ どちらかまたは両方とも元の個数が 1 なときでも, 当然ながら, その集合 $\mathrm{M}(m,n,K)$ の元 $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ は vector であり, $(1,n)$ 型の行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$, $(m,1)$ 型の行列 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ をそれぞれ n-行 vector, m-列 vector という.

定義 1.3.4. 次式のように定義される行列 O を (m,n) 型の零行列, $m\times n$ 型の零行列といい, 特に $m=n$ ならば n 次零行列といい, O_n とも表す.

$$O=(0)_{(i,j)\in\varLambda_n\times\varLambda_n}$$

定理 1.3.2. 可換環 R 上で次のことが成り立つ.

- $\forall A\in\mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, $1A=A$ が成り立つ.
- $\forall A\in\mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, $0A=O$ が成り立つ.
- $\forall A\in\mathrm{M}(m,n,R)\forall k,l\in R$ に対し, $(k+l)A=kA+lA$ が成り立つ.
- $\forall A,B\in\mathrm{M}(m,n,R)\forall k\in R$ に対し, $k\left(A+B\right)=kA+kB$ が成り立つ.
- $\forall A\in\mathrm{M}(m,n,R)\forall k,l\in R$ に対し, $k\left(lA\right)=(kl)A$ が成り立つ.
- $\forall A,B\in\mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, $A+B=B+A$ が成り立つ.
- $\forall A,B,C\in\mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, $(A+B)+C=A+(B+C)$ が成り立つ.
- $\forall A\in\mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, $A+O=A$ が成り立つ.
- $\forall A\in\mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, $A-A=O$ が成り立つ.

証明. 定義より成分ごとで考えていけばよい. □

定義 1.3.5. $A\in\mathrm{M}(l,m,R)$, $B\in\mathrm{M}(m,n,R)$ なる 2 つの行列 A, B に対して, それらの行列たち A, B がそれぞれ $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$, $\left(b_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ と成分表示されるとき, 次式のように行列 AB を定義する.

$$AB=\left(\sum_{h\in\varLambda_m}a_{ih}b_{hj}\right)_{(i,j)\in\varLambda_l\times\varLambda_n}$$

即ち, 行列 AB を第 (i,j) 成分が $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{m1}b_{mj}$ な行列として定義する. この行列 AB をそれらの行列たち A, B の積という.

定理 1.3.3. 可換環 R 上で次のことが成り立つ.

- $\forall A\in\mathrm{M}(l,m,R)\forall B\in\mathrm{M}(m,n,R)\forall C\in\mathrm{M}(n,o,R)$ に対し, $A\left(BC\right)=\left(AB\right)C$ が成り立つ.
- $\forall A\in\mathrm{M}(l,m,R)\forall B,C\in\mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, $A\left(B+C\right)=AB+AC$ が成り立つ.
- $\forall A,B\in\mathrm{M}(l,m,R)\forall C\in\mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, $\left(A+B\right)C=AC+AC$ が成り立つ.
- $\forall A\in\mathrm{M}(l,m,R)\forall B\in\mathrm{M}(m,n,R)\forall k\in R$ に対し, $A\left(kB\right)=\left(kA\right)B=k\left(AB\right)$ が成り立つ.

以上より, 3 つの行列同士の積, 2 つの行列同士の積の k 倍は結合的であり, 行列同士では積が和に対して右からも左からも分配的であるが, 2 つの行列同士の積は可換的でないことに注意されたい.

証明. 定義より成分ごとで考えていけばよい. □

1.3.2 さまざまな行列

定義 1.3.6. (m,n) 型の行列のうち次式のように $m=n$ であるようなものを n 次正方行列という.

$$A = (a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_n^2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

この行列の成分たち a_{ij} のうち添数 i と j が等しい成分たち, 即ち, 成分 a_{ii} のことを対角成分という.

定義 1.3.7. 次式で定義される写像 δ の組 (i,j) による像 $\delta(i,j)$ を Kronecker の delta といい δ_{ij} と書く.

$$\delta : \Lambda_m \times \Lambda_n \to R; (i,j) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i=j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

定義 1.3.8. n 次正方行列 $(a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_n^2}$ のうち次式のように対角成分 a_{ij} 以外の成分たちが全て 0 であるようなもの $(a_{ij}\delta_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_n^2}$ を n 次対角行列といいこの行列 $(a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_n^2}$ を $\mathrm{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ と書くこともある.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定義 1.3.9. n 次正方行列 $(a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_n^2}$ のうち次式のように $i \geq j$ なるもの以外の成分たちが全て 0 であるようなものを n 次上三角行列という.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

同様に, n 次正方行列 $(a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_n^2}$ のうち次式のように $i \leq j$ なるもの以外の成分たちが全て 0 であるようなものを n 次下三角行列という.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定義 1.3.10. Kronecker の deltaδ_{ij} を用いて次式のように表される n 次対角行列のうち対角成分たちが全て 1 であるような行列を n 次単位行列といい I_n, I, $\mathbb{1}$ などと書く.

$$I_n = (\delta_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_n^2} = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

定理 1.3.4. (m,n) 型の行列 A, m 次単位行列 I_m, n 次単位行列 I_n において, 次式が成り立つ.

$$I_m A = A I_n = A$$

証明. その行列 A が $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ と成分表示されるとき, 次式が成り立つことに注意すれば,

$$\sum_{k\in\varLambda_n}\delta_{ik}a_{kj}=a_{ij},\quad \sum_{k\in\varLambda_m}a_{ik}\delta_{kj}=a_{ij}$$

成分ごとで考えればよい. □

定義 1.3.11. n 次正方行列 A が与えられたとき, 次式を満たすような行列 X がその集合 $\mathrm{M}(n,n,R)$ に存在するとき,

$$XA=AX=I_n$$

その行列 A を可逆行列といい, その行列 X をその行列 A の逆行列という. また, 可逆行列 A 全体の集合を $\mathrm{GL}(n,R)$, $\mathrm{GL}\,(n,R)$ などと書く. とくに, 体 K 上での可逆行列を正則行列ともいう. なお, 後に述べるように存在するならこれは一意的なので, その行列 A の逆行列を A^{-1} と書く.

定理 1.3.5. 1 つの n 次可逆行列 A の逆行列は一意的に存在する.

このことは背理法によって示される. これにより集合 $\mathrm{GL}(n,R)$ に属する 1 つの n 次正方行列 A の逆行列を A^{-1} と書くことができる.

証明. 集合 $\mathrm{GL}(n,R)$ に属する 1 つの n 次可逆行列 A の互いの異なる 2 つの逆行列があると仮定しこれらを X, Y とおこう. したがって, 次のようになる.

$$X=XI_n=X\,(AY)=(XA)\,Y=I_nY=Y$$

これは仮定に矛盾する. よって, 集合 $\mathrm{GL}(n,R)$ に属する 1 つの n 次可逆行列 A の逆行列が存在するなら, それは一意的に存在する. □

定理 1.3.6. 集合 $\mathrm{GL}(n,R)$ に属する 2 つの n 次正方行列たち A, B において次のことが成り立つ.

- n 次可逆行列 A の逆行列 A^{-1} も可逆行列であり, $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$ が成り立つ.
- 2 つの n 次可逆行列たち A, B の積 AB も可逆行列であり, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ が成り立つ.

証明. 集合 $\mathrm{GL}(n,K)$ に属する 2 つの n 次正方行列たち A, B において, 逆行列の定義より明らかに, その n 次正方行列 A の逆行列 A^{-1} も可逆行列であり, $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$ である.

また, $B^{-1}A^{-1}$ が存在し, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB)&=\left(B^{-1}\left(A^{-1}A\right)\right)B\\&=\left(B^{-1}I_n\right)B\\&=B^{-1}B=I_n\\(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)&=\left(A\left(BB^{-1}\right)\right)A^{-1}\\&=(AI_n)\,A^{-1}A^{-1}\\&=AA^{-1}=I_n\end{aligned}$$

逆行列の定義より 2 つの n 次可逆行列たち A, B の積 AB も可逆行列であり, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ である. □

1.3.3 行列の跡

定義 1.3.12. $A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる可換環 R 上の行列 A が $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_n^2}$ と与えられたとするとき, 次式のような写像 tr によるその行列 A の像 tr$A$ をその行列 A の跡, trace という.

$$\mathrm{tr} : \mathrm{M}(n,n,R) \to R; A = (a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_n^2} \mapsto \sum_{i\in\Lambda_n} a_{ii}$$

定理 1.3.7. 上記の写像 tr について次のことが成り立つ.

- $\forall k,l \in R \forall A,B \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, $\mathrm{tr}\,(kA+lB) = k\mathrm{tr}A + l\mathrm{tr}B$ が成り立つ.
- $\forall A,B \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$ が成り立つ.
- $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,R)\forall P \in \mathrm{GL}(n,R)$ に対し, $\mathrm{tr}P^{-1}AP = \mathrm{tr}A$ が成り立つ.

証明. 可換環 R 上の行列の跡 tr について, 上 2 つの主張は成分表示して計算すれば示される. 3 つ目の主張について, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,R)\forall P \in \mathrm{GL}(n,R)$ に対し, n 次単位行列 I_n を用いれば次のようになることから従う.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}P^{-1}AP &= \mathrm{tr}P^{-1}PA\\ &= \mathrm{tr}I_nA = \mathrm{tr}A\end{aligned}$$

□

1.3.4 転置行列

定義 1.3.13. $A \in \mathrm{M}(m,n,R)$ なる可換環 R 上の行列 A が $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}$ と与えられたとするとき, 次式のような写像 ${}^t\bullet$ によるその行列 A の像 ${}^tA$ をその行列 A の転置行列といい A^{T}, A^{tr} などとも書く.

$${}^t\bullet : \mathrm{M}(m,n,R) \to \mathrm{M}(n,m,R); (a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n} \mapsto (a_{ji})_{(i,j)\in\Lambda_n\times\Lambda_m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

定理 1.3.8. 上記の写像 ${}^t\bullet$ について, 次のことが成り立つ.

- $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, ${}^{tt}A = A$ が成り立つ.
- $\forall k,l \in R\forall A,B \in \mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, ${}^t(kA+lB) = k\,{}^tA + l\,{}^tB$ が成り立つ.
- $\forall A \in \mathrm{M}(l,m,R)\forall B \in \mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ が成り立つ.

証明. 成分ごとで考えていけば示される. □

定義 1.3.14. $A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列 A の転置行列 ${}^tA$ が元のその行列 A に等しいとき, 即ち, ${}^tA = A$ が成り立つとき, その行列 A を対称行列という. 可換環 R 上の n 次正方行列のうち対称行列であるもの全体の集合を $\mathrm{Sym}_n(R)$, $\mathrm{Sym}(n,R)$ などと書く.

定義 1.3.15. $A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列 A の転置行列 ${}^tA$ が元のその行列 $-A$ に等しいとき, 即ち, ${}^tA = -A$ が成り立つとき, その行列 A を交代行列, 歪対称行列, 反対称行列などという. 可換環 R 上の n 次正方行列のうち交代行列全体の集合を $\mathrm{skewSym}_n(R)$, $\mathrm{skewSym}(n,R)$ などと書く.

定義 1.3.16. $A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列 A の転置行列 ${}^tA$ が元のその行列 A の逆行列 A^{-1} に等しいとき, 即ち, ${}^tA = A^{-1}$ が成り立つとき, その行列 A を直交行列という. 可換環 R 上の n 次正方行列のうち直交行列全体の集合を $\mathrm{O}(n,R)$ などと書く.

1.3.5 随伴行列

定義 1.3.17. $A \in \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right)$ なる体 K 上の行列 A が $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}$ と与えられたとするとき, 次式のような写像 $\overline{\bullet}$ によるその行列 A の像 $\overline{A}$ をその行列 A の複素共役行列という.

$$\overline{\bullet} : \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right) \to \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right); \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n} \mapsto \left(\overline{a_{ij}}\right)_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}$$

定理 1.3.9. 上記の写像 $\overline{\bullet}$ について, 次のことが成り立つ.

- $\forall A \in \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right)$ に対し, $\overline{\overline{A}} = A$ が成り立つ.
- $\forall k,l \in \mathbb{C}\forall A,B \in \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right)$ に対し, $\overline{kA+lB} = \overline{k}\ \overline{A} + \overline{l}\ \overline{B}$ が成り立つ.
- $\forall A \in \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right)\forall B \in \mathrm{M}\left(n,o,\mathbb{C}\right)$ に対し, $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$ が成り立つ.

証明. 成分表示して成分ごとで考えればよい. □

定義 1.3.18. $A \in \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right)$ なる体 K 上の行列 A が $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}$ と与えられたとするとき, 次式のような写像 $\bullet^*$ によるその行列 A の像 A^* をその行列 A の随伴行列, Hermite 転置行列, Hermite 共軛行列, Hermite 随伴行列などといい $A^\dagger$, A^{H} などと書く.

$$\bullet^* : \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right) \to \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right); \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n} \mapsto \left(\overline{a_{ji}}\right)_{(i,j)\in\Lambda_n\times\Lambda_m}$$

定理 1.3.10. 上記の写像 $\bullet^*$ について, 次のことが成り立つ.

- $\forall A \in \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right)$ に対し, $A^{**} = A$ が成り立つ.
- $\forall k,l \in \mathbb{C}\forall A,B \in \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right)$ に対し, $\left(kA+lB\right)^* = \overline{k}A^* + \overline{l}B^*$ が成り立つ.
- $\forall A \in \mathrm{M}\left(l,m,\mathbb{C}\right)\forall B \in \mathrm{M}\left(m,n,\mathbb{C}\right)$ に対し, $\left(AB\right)^* = B^*A^*$ が成り立つ.

証明. 成分表示して成分ごとで考えればよい. □

定義 1.3.19. $A \in \mathrm{M}\left(n,n,\mathbb{C}\right)$ なる行列 A の随伴行列 A^* が元のその行列 A に等しいとき, 即ち, $A^* = A$ が成り立つとき, その行列 A を自己随伴行列, Hermite 行列という. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列のうち自己随伴行列であるもの全体の集合を $\mathrm{H}(n)$, H_n などと書く.

定義 1.3.20. $A \in \mathrm{M}\left(n,n,\mathbb{C}\right)$ なる行列 A の随伴行列 A^* が元のその行列 $-A$ に等しいとき, 即ち, $A^* = -A$ が成り立つとき, その行列 A を歪自己随伴行列, 歪 Hermite 行列などという. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列のうち歪自己随伴行列全体の集合を $\mathrm{skewH}(n)$, $\mathrm{skew}H_n$ などと書く.

定義 1.3.21. $A \in \mathrm{GL}\left(n,\mathbb{C}\right)$ なる行列 A の転置行列 A^* が元のその行列 A の逆行列 A^{-1} に等しいとき, 即ち, $A^* = A^{-1}$ が成り立つとき, その行列 A を unitary 行列という. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列のうち unitary 行列全体の集合を $\mathrm{U}(n)$, U_n などと書く.

定理 1.3.11. 可換環 R 上で次のことが成り立つ.

- $\forall A \in \mathrm{GL}(n,R)$ に対し, ${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}$ が成り立つ.

証明. 成分表示して成分ごとで考えればよい. $\square$

定理 1.3.12. 次のことが成り立つ.

- $\forall A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$ に対し, $\overline{\left(A^{-1}\right)} = \left(\overline{A}\right)^{-1}$ が成り立つ.
- $\forall A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$ に対し, $\left(A^{-1}\right)^{*} = \left(A^{*}\right)^{-1}$ が成り立つ.
- $\forall A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$ に対し, $\overline{\left({}^{t}A\right)} = {}^{t}\left(\overline{A}\right)$ が成り立つ.
- $\forall A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$ に対し, $\left({}^{t}A\right)^{*} = {}^{t}\left(A^{*}\right)$ が成り立つ.
- $\forall A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$ に対し, $\left(\overline{A}\right)^{*} = \overline{\left(A^{*}\right)}$ が成り立つ.

証明. 成分表示して成分ごとで考えればよい. $\square$

定理 1.3.13. 次のことが成り立つ.

- $\forall A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$ に対し, $A^{*} = {}^{t}\left(\overline{A}\right)$ が成り立つ.

証明. 成分表示して成分ごとで考えればよい. $\square$

1.3.6 行列の代数学的な構造

定理 1.3.14. 可換環 R 上の組 $(\mathrm{M}(m, n, R), +)$ は可換群をなす. なお, このときの単位元は零行列 O, 行列 A の逆元は $-A$ である.

証明. 可換環 R 上の組 $(\mathrm{M}(m, n, R), +)$ について, このときの単位元を零行列 O, 行列 A の逆元を $-A$ とおくと, 定理 1.3.2 より明らかにその組 $(\mathrm{M}(m, n, R), +)$ は可換群をなす. $\square$

定理 1.3.15. 換環 R 上の組 $(\mathrm{GL}(n, R), \cdot)$ は群をなす. なお, $\cdot$ は行列の積で, このときの単位元は単位行列 I_n, 行列 A の逆元は逆行列 A^{-1} である.

証明. 可換環 R 上の組 $(\mathrm{GL}(n, R), \cdot)$ について, このときの単位元を単位行列 I_n, 行列 A の逆元を逆行列 A^{-1} とおくと, 定理 1.3.3 より明らかにその組 $(\mathrm{GL}(n, R), \cdot)$ は可換群をなす. $\square$

定理 1.3.16. 可換環 R が与えられたとき, その集合 $\mathrm{GL}(n, R) \cup \{O\}$ は斜体をなす. なお, このときの単位元は単位行列 I_n, 零元は零行列 O, 行列 A の逆元は A^{-1} である.

証明. 可換環 R が与えられたとき, その集合 $\mathrm{GL}(n, R)$ について, このときの単位元を単位行列 I_n, 零元を零行列 O, 行列 A の逆元を A^{-1} とおくと, 定理 1.3.2, 定理 1.3.3 より明らかにその集合 $\mathrm{GL}(n, R) \cup \{O\}$ は環をなす. $\square$

1.3.7 block 行列

可換環 R 上に

$$S = \sum_{I \in \Lambda_M} m_I, \quad T = \sum_{J \in \Lambda_N} n_J$$

として $A=\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_S\times\varLambda_T}\in\mathrm{M}(S,T,R)$ なる行列 A が与えられたとき, 次のようにおくと,

$$A_{IJ}=\left(a_{\sum_{I'\in\varLambda_{I-1}}m_{I'}+i,\sum_{J'\in\varLambda_{J-1}}n_{J'}+j}\right)_{(i,j)\in\varLambda_{m_I}\times\varLambda_{n_J}}\in\mathrm{M}(m_I,n_J,R)$$

次のように書かれることもできる.

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1N}\\\vdots&\ddots&\vdots\\A_{M1}&\cdots&A_{MN}\end{pmatrix}$$

定義 1.3.22. その右辺の形をした行列を block 行列などといい, 行列をその block 行列に書き換えることをその行列を block 化するなどという. また, 行列たち A_{IJ} のことをその行列 A の小行列たちという.

定理 1.3.17. 可換環 R 上に

$$S=\sum_{I\in\varLambda_M}m_I,\quad T=\sum_{J\in\varLambda_N}n_J$$

として $\forall\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_S\times\varLambda_T},\left(b_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_S\times\varLambda_T}\in\mathrm{M}(S,T,R)\ \forall k,l\in R$ に対し, 次のようにおくと,

$$A_{IJ}=\left(a_{\sum_{I'\in\varLambda_{I-1}}m_{I'}+i,\sum_{J'\in\varLambda_{J-1}}n_{J'}+j}\right)_{(i,j)\in\varLambda_{m_I}\times\varLambda_{n_J}}\in\mathrm{M}(m_I,n_J,R)$$
$$B_{IJ}=\left(b_{\sum_{I'\in\varLambda_{I-1}}m_{I'}+i,\sum_{J'\in\varLambda_{J-1}}n_{J'}+j}\right)_{(i,j)\in\varLambda_{m_I}\times\varLambda_{n_J}}\in\mathrm{M}(m_I,n_J,R)$$

次式が成り立つ.

$$k\left(A_{IJ}\right)_{(I,J)\in\varLambda_M\times\varLambda_N}+l\left(B_{IJ}\right)_{(I,J)\in\varLambda_M\times\varLambda_N}=\left(kA_{IJ}+lB_{IJ}\right)_{(I,J)\in\varLambda_M\times\varLambda_N}$$

なお, その条件は上に述べた通り 2 つの行列たち $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_S\times\varLambda_T}$, $\left(b_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_S\times\varLambda_T}$ の行数と列数が等しく分割の仕方も等しいこととなっている[*4].

証明. 上の block 行列の議論に注意すれば, これは単に成分ごとで計算しているだけにすぎない. □

定理 1.3.18. 可換環 R 上に

$$S=\sum_{I\in\varLambda_M}m_I,\quad T=\sum_{J\in\varLambda_N}n_J,\quad U=\sum_{K\in\varLambda_O}o_K$$

として $\forall\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_S\times\varLambda_T}\in\mathrm{M}(S,T,R)\ \forall\left(b_{jk}\right)_{(j,k)\in\varLambda_T\times\varLambda_U}\in\mathrm{M}(T,U,R)$ に対し, 次のようにおくと,

$$A_{IJ}=\left(a_{\sum_{I'\in\varLambda_{I-1}}m_{I'}+i,\sum_{J'\in\varLambda_{J-1}}n_{J'}+j}\right)_{(i,j)\in\varLambda_{m_I}\times\varLambda_{n_J}}\in\mathrm{M}(m_I,n_J,R)$$
$$B_{JK}=\left(b_{\sum_{J'\in\varLambda_{J-1}}n_{J'}+j,\sum_{K'\in\varLambda_{K-1}}o_{K'}+k}\right)_{(j,k)\in\varLambda_{n_J}\times\varLambda_{o_K}}\in\mathrm{M}(n_J,o_K,R)$$

次式が成り立つ.

$$\left(A_{IJ}\right)_{(I,J)\in\varLambda_M\times\varLambda_N}\left(B_{JK}\right)_{(J,K)\in\varLambda_N\times\varLambda_O}=\left(\sum_{J\in\varLambda_N}A_{IJ}B_{JK}\right)_{(I,K)\in\varLambda_M\times\varLambda_O}$$

[*4] もっと分かりやすく説明できそうな気もしなくもない…?

なお, その条件は上に述べた通りその行列 $(a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_S\times\Lambda_T}$ の列数とその行列 $(b_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_T\times\Lambda_U}$ の行数が等しくその行列 $(a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_S\times\Lambda_T}$ の分割された列のかたまりの個数とその行列 $(b_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_T\times\Lambda_U}$ の分割された行のかたまりの個数も等しく, $\forall I\in\Lambda_M\forall J\in\Lambda_N\forall K\in\Lambda_O$ に対し, その小行列 A_{IJ} の列数とその小行列 B_{JK} の行数も等しいこととなっている*5.

証明. 成分の区切り方に注意して計算して示される. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p41-73 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007. 改訂版 8 刷 p33-38,53-58,94-104 ISBN978-4-320-11097-7

[3] おぐえもん. "行列のブロック分割". OGUEMON.com. https://oguemon.com/study/linear-algebra/matrix-block/ (2021-2-13 0:05 閲覧)

[4] 中西敏浩. "数学基礎 IV (線形代数学) 講義ノート". 島根大学. http://www.math.shimane-u.ac.jp/~tosihiro/skks4main.pdf (2020-9-7 取得)

*5 ここももっと分かりやすく説明できそう…?

1.4 n-vector

1.4.1 n-vector

定義 1.4.1. 体 K の n つの積 K^n の元はその体 K の元 a_i の順序付けられた組 $(a_i)_{i\in\Lambda_n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ にあたるのであった. そこで, その集合 K^n について, $\forall (a_i)_{i\in\Lambda_n}, (b_i)_{i\in\Lambda_n} \in K^n$ に対し, 元 $(a_i)_{i\in\Lambda_n} + (b_i)_{i\in\Lambda_n}$ を次式のように

$$(a_i)_{i\in\Lambda_n} + (b_i)_{i\in\Lambda_n} = (a_i + b_i)_{i\in\Lambda_n}$$

$\forall k \in K \forall (a_i)_{i\in\Lambda_n} \in K^n$ に対し, 元 $k(a_i)_{i\in\Lambda_n}$ を次式のように定義する.

$$k(a_i)_{i\in\Lambda_n} = (ka_i)_{i\in\Lambda_n}$$

また, その集合 K^n の元はしばしば n-行 vector と同一視されることもある, 即ち, $K^n = \mathrm{M}(n, 1, K)$ とみなすこともあることに注意しておこう.

定理 1.4.1. 集合 K^n は vector 空間である.

定義 1.4.2. 体 K 上の vector 空間 K^n の元 $(a_i)_{i\in\Lambda_n}$ はその体 K 上の n-vector といい, a_i をこの vector の第 i 成分, 第 i 座標という.

証明. vector 空間の定義で挙げられている条件を満たすかどうかを成分ごとで考えていけばよい. □

定理 1.4.2. $j \in \Lambda_n$ なる添数 j を用いて $\mathbf{a}_j \in K^m$ なる vectors$\mathbf{a}_j$ が与えられたとする. $m < n$ が成り立つなら, 族 $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\Lambda_n}$ は体 K 上の vector 空間 K^m で線形従属である.

証明. $j \in \Lambda_n$ なる添数 j を用いて $\mathbf{a}_j \in K^m$ なる vectors$\mathbf{a}_j$ が与えられ, $m < n$ が成り立つとする. このとき, $\sum_{j\in\Lambda_n} c_j\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ の成分を比較すれば, $\forall i \in \Lambda_m$ に対し, $\sum_{j\in\Lambda_n} c_j a_{ij} = 0$ が成り立つことになる. 定理 1.1.17 より $\exists j \in \Lambda_n$ に対し, $c_j \neq 0$ が成り立つので, 示すべきことは示された. □

1.4.2 標準直交基底

定義 1.4.3. 次式で定義される写像 δ の組 (i, j) による像 $\delta(i, j)$ を Kronecker の delta といい δ_{ij} と書く.

$$\delta : \Lambda_m \times \Lambda_n \to R; (i, j) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

定理 1.4.3. 体 K 上の vector 空間 K^n において, vectors$\mathbf{e}_i$ を $\mathbf{e}_i = (\delta_{ij})_{j\in\Lambda_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (i のようにおく. この

とき, 次のことが成り立つ.

- $\forall \mathbf{v} = (a_i)_{i \in \varLambda_n} \in K^n$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{e}_i$ が成り立つ.
- 組 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその vector 空間 K^n の基底である.
- $\dim K^n = n$ が成り立つ.

定義 1.4.4. 体 K 上の vector 空間 K^n の vector$\mathbf{v}$ が $\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{e}_i$ と書かれることができるとき, その vector$\mathbf{v}$ をその vector$(a_i)_{i \in \varLambda_n}$ に書きかえることをその vector$\mathbf{v}$ をその vector$(a_i)_{i \in \varLambda_n}$ と成分表示するといい, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, それらの vectors$\mathbf{e}_i$ からなる基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ を標準基底, 標準直交基底などという. 基底を言及せずに単に座標といわれたら, 多くの場合, その基底は標準直交基底を指す. 以下ここでは, 標準直交基底を ε とおくことにする.

証明. 体 K 上の vector 空間 K^n において, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し vectors$\mathbf{e}_i$ を $\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (i のようにおく. このとき, $\forall \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a_n \mathbf{e}_n
\end{aligned}$$

次に, $c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + c_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ について考えよう. このとき, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ とおくと, 上と同様にして次のようになるので,

$$\mathbf{0} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + c_n \mathbf{e}_n = \mathbf{c}$$

$\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ. また, 上記より $\forall \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ に対し, $\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$ が成り立つのであったので, $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し vector$\mathbf{v}$ はその族 $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in\Lambda_n}$ の線形結合である. 以上より, $\forall i \in \Lambda_n$ に対しそれらの vectors$\mathbf{e}_i$ は線形独立で, $\forall \mathbf{a} \in K^n$ に対し, その族 $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in\Lambda_n}$ の線形結合で表されその vector 空間 K^n は, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, それらの vectors$\mathbf{e}_i$ によって生成されるので, vectors$\mathbf{e}_i$ は体 K 上の vector 空間 K^n の基底である.

このとき, $\forall i \in \Lambda_n$ に対しそれらの vectors$\mathbf{e}_j$ は全て n つあるので, 次元の定義より $\dim K^n = n$ が成り立つ. □

1.4.3 形式的な内積

定義 1.4.5. 体 K 上で $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in K^n$ に対し, $\mathbf{v} = (a_i)_{i\in\Lambda_n}$, $\mathbf{w} = (b_i)_{i\in\Lambda_n}$ として次式のような写像を考えよう.

$$K^n \times K^n \to K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \sum_{i\in\Lambda_n} a_i b_i = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

この写像を形式的な内積, または単に, 内積, $\sum_{i\in\Lambda_n} a_i b_i$ を 2 つの vectors$\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ との形式的な内積, または単に, 内積といい, ${}^t\mathbf{v}\mathbf{w}$, $(\mathbf{v}|\mathbf{w})$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ などとかく.

定理 1.4.4. 形式的な内積について, 体 K 上で次のことが成り立つ.

- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in K^n$ に対し, ${}^t\mathbf{v}\mathbf{w} = {}^t\mathbf{w}\mathbf{v}$ が成り立つ.
- $\forall k, l \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in K^n$ に対し, ${}^t(k\mathbf{u} + l\mathbf{v})\,\mathbf{w} = k{}^t\mathbf{u}\mathbf{w} + l{}^t\mathbf{v}\mathbf{w}$ が成り立つ.

証明. 成分表示して成分ごとで考えていけばよい. あるいは n-vector を行列だと思って考えてもよい. □

定義 1.4.6. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(m, n, K) \forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}$, $\mathbf{v} = (x_i)_{i\in\Lambda_n}$ として, 次式のように積 $A\mathbf{v}$ を定義する.

$$\mathrm{M}(m, n, K) \times K^n \to K^m; (A, \mathbf{v}) \mapsto A\mathbf{v} = \left(\sum_{k\in\Lambda_n} a_{ik}x_k\right)_{i\in\Lambda_m}$$

即ち, その行列 A が次のようにおかれれば,

$$A = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \\ {}^t\mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

次式が成り立つことを意味する.

$$\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \\ {}^t\mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}_m \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1\mathbf{v} \\ {}^t\mathbf{a}_2\mathbf{v} \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}_m\mathbf{v} \end{pmatrix}$$

定理 1.4.5. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K) \forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とすれば, 次式が成り立つ.

$$A\mathbf{v} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

即ち, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

証明. 体 K 上で, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, vectorse$_i$ を $\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (i のようにおき, $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K) \forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とすれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
A\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}'_1\mathbf{v} \\ {}^t\mathbf{a}'_2\mathbf{v} \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_n\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{v}\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{v}\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{v}\mathbf{a}'_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^t\left(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n\right)\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\left(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n\right)\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\left(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n\right)\mathbf{a}'_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{a}'_1 + x_2{}^t\mathbf{e}_2\mathbf{a}'_1 + \cdots + x_n{}^t\mathbf{e}_n\mathbf{a}'_1 \\ x_1{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{a}'_2 + x_2{}^t\mathbf{e}_2\mathbf{a}'_2 + \cdots + x_n{}^t\mathbf{e}_n\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ x_1{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{a}'_n + x_2{}^t\mathbf{e}_2\mathbf{a}'_n + \cdots + x_n{}^t\mathbf{e}_n\mathbf{a}'_n \end{pmatrix} \\
&= x_1\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{e}_1\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{e}_1\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_1\mathbf{a}'_n \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{e}_2\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{e}_2\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_2\mathbf{a}'_n \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{e}_n\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{e}_n\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n\mathbf{a}'_n \end{pmatrix} \\
&= x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

□

定理 1.4.6. 体 K 上で $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in K^n \forall A \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, 次式が成り立つ.

$$A\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}\right) = \left(kA\right)\mathbf{v} + \left(lA\right)\mathbf{w} = k\left(A\mathbf{v}\right) + l\left(A\mathbf{w}\right)$$

これにより, $A\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}\right) = kA\mathbf{v} + lA\mathbf{w}$ と書かれることができるようになる.

証明. 成分表示して成分ごとで考えれば示される. □

1.4.4 行列と線形写像

定理 1.4.7. 体 K 上で $\forall \mathbf{v} \in K^n \forall A \in \mathrm{M}(m, n, K)$ を用いて次式のような写像 L_A について考えよう.

$$L_A : K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$$

このとき, 次のことが成り立つ.

- その写像 L_A は線形的である.
- $\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $(j$, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とおかれると, 次式が成り立つ,

$$L_A\left(\mathbf{e}_j\right) = \mathbf{a}_j$$

　即ち, 次式が成り立つ.

$$A = \begin{pmatrix} L_A\left(\mathbf{e}_1\right) & L_A\left(\mathbf{e}_2\right) & \cdots & L_A\left(\mathbf{e}_n\right) \end{pmatrix}$$

- 任意の線形写像 $L : K^n \to K^m$ は, $\exists A \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, 次式のように表される.

$$L : K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$$

定義 1.4.7. ここで, この行列 A をその線形写像 L_A の行列, 対応する行列という.

証明. 体 K 上で $\forall \mathbf{v} \in K^n \forall A \in \mathrm{M}(m, n, K)$ を用いて次式のような写像 L_A について考えよう.

$$L_A : K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$$

$\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in K^n$ に対し, 定理 1.4.6 より次のようになる.

$$\begin{aligned} L_A\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}\right) &= A\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}\right) \\ &= kA\mathbf{v} + lA\mathbf{w} \\ &= kL_A\left(\mathbf{v}\right) + lL_A\left(\mathbf{w}\right) \end{aligned}$$

ゆえに, その写像 L_A は線形的である.

$\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (j$, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とおかれると, 定理 1.4.5 より次のようになる.

$$\begin{aligned} L_A(\mathbf{e}_j) &= A\mathbf{e}_j \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (j \\ &= 0\mathbf{a}_1 + \cdots + 1\mathbf{a}_j + \cdots + 0\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_j \end{aligned}$$

これにより, 次式が得られる.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_A(\mathbf{e}_1) & L_A(\mathbf{e}_2) & \cdots & L_A(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

任意の線形写像 $L : K^n \to K^m$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $\mathbf{v} = (x_i)_{i \in \varLambda_n}$ のようにおかれれば, 次式が成り立つ.

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

したがって, 次のようになるので,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) &= L(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1L(\mathbf{e}_1) + x_2L(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nL(\mathbf{e}_n) \end{aligned}$$

定理 1.4.7 より次のようになる.

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) &= x_1L(\mathbf{e}_1) + x_2L(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nL(\mathbf{e}_n) \\ &= \begin{pmatrix} L(\mathbf{e}_1) & L(\mathbf{e}_2) & \cdots & L(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L(\mathbf{e}_1) & L(\mathbf{e}_2) & \cdots & L(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \mathbf{v} \end{aligned}$$

あとは, 次式のようにおかれれば,

$$A = \begin{pmatrix} L(\mathbf{e}_1) & L(\mathbf{e}_2) & \cdots & L(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

$\exists A \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, 次式のように表される.

$$L : K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$$

□

定理 1.4.8. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(l,m,K)\forall B \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, 2 つの線形写像 $L_A : K^m \to K^l$, $L_B : K^n \to K^m$ が与えられたとき, その合成写像 $L_A \circ L_B : K^n \to K^l$ も線形写像であり, さらに, 定理 1.4.7 より対応する行列 C が存在する. このとき, $C = AB$ が成り立つ.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(l,m,K)\forall B \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, 2 つの線形写像 $L_A : K^m \to K^l$, $L_B : K^n \to K^m$ が与えられたとき, その合成写像 $L_A \circ L_B : K^n \to K^l$ も線形写像であり, さらに, 定理 1.4.7 より対応する行列 C が存在する.

ここで, $\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $(j$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_l \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$ とおくと, 定理 1.4.7 より次式が成り立つので,

$$L_B(\mathbf{e}_j) = \mathbf{b}_j, \quad L_C(\mathbf{e}_j) = \mathbf{c}_j$$

したがって, 次のようになり,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_j &= L_C(\mathbf{e}_j) \\ &= L_A \circ L_B(\mathbf{e}_j) \\ &= L_A(L_B(\mathbf{e}_j)) \\ &= L_A(\mathbf{b}_j) \\ &= A\mathbf{b}_j \end{aligned}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}'_1\mathbf{b}_1 & {}^t\mathbf{a}'_1\mathbf{b}_2 & \cdots & {}^t\mathbf{a}'_1\mathbf{b}_n \\ {}^t\mathbf{a}'_2\mathbf{b}_1 & {}^t\mathbf{a}'_2\mathbf{b}_2 & \cdots & {}^t\mathbf{a}'_2\mathbf{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_l\mathbf{b}_1 & {}^t\mathbf{a}'_l\mathbf{b}_2 & \cdots & {}^t\mathbf{a}'_l\mathbf{b}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1m}b_{m1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1m}b_{m2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1m}b_{mn} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2m}b_{m2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + \cdots + a_{2m}b_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1}b_{11} + \cdots + a_{lm}b_{m1} & a_{l1}b_{12} + \cdots + a_{lm}b_{m2} & \cdots & a_{l1}b_{1n} + \cdots + a_{lm}b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= AB \end{aligned}$$

□

定理 1.4.9. 体 K 上で次式のような写像 $L_\bullet$ は線形同型写像である.

$$L_\bullet : \mathrm{M}(m,n,K) \to L(K^n, K^m); A \mapsto L_A$$

証明. 体 K 上で次式のような写像 $L_\bullet$ を考える.

$$L_\bullet : \mathrm{M}(m,n,K) \to L(K^n, K^m); A \mapsto L_A$$

このとき, 任意の線形写像 $L : K^n \to K^m$ は $A \in \mathrm{M}(m, n, K)$ なる行列 A を用いて次式のように表され,

$$L : K^n \to K^m ; \mathbf{v} \mapsto L(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

これ L からその行列 A へうつす写像が写像 $L_\bullet$ の逆写像 $L_\bullet^{-1}$ となるので, 写像 $L_\bullet$ は全単射 $L_\bullet : \mathrm{M}(m, n, K) \xrightarrow{\sim} L(K^n, K^m)$ である.

また, $\forall k, l \in K \forall A, B \in \mathrm{M}(m, n, K) \forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
(L_\bullet(kA + lB))(\mathbf{v}) &= L_{kA+lB}(\mathbf{v}) \\
&= (kA + lB)(\mathbf{v}) \\
&= (lA)(\mathbf{v}) + (lB)(\mathbf{v}) \\
&= kA(\mathbf{v}) + lB(\mathbf{v}) \\
&= kL_A(\mathbf{v}) + lL_B(\mathbf{v}) \\
&= k(L_\bullet(A))(\mathbf{v}) + l(L_\bullet(B))(\mathbf{v}) \\
&= (kL_\bullet(A) + lL_\bullet(B))(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

ゆえに, $L_\bullet(kA + lB) = kL_\bullet(A) + lL_\bullet(B)$ が得られる. □

1.4.5 行列の階数

定理 1.4.10. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, 線形写像 $L_A : K^n \to K^m ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が与えられたとき, 次のようにおかれれば,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

その値域 $V(L_A)$ は n つの vectors$\mathbf{a}_j$ によって張られる vector 空間 K^m の部分 vector 空間 $\mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ に等しい, 即ち, 次式が成り立つ.

$$V(L_A) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, 線形写像 $L_A : K^n \to K^m ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が与えられたとき, 次のようにおかれよう.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

その値域 $V(L_A)$ について, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とすれば, 定理 1.4.5 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
V(L_A) &= \{L_A(\mathbf{v}) \in K^m | \mathbf{v} \in K^n\} \\
&= \{A\mathbf{v} \in K^m | \mathbf{v} \in K^n\} \\
&= \{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \in K^m | \mathbf{v} \in K^n\} \\
&= \{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \in K^m | x_1, x_2, \ldots, x_n \in K\} \\
&= \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subseteq K^m
\end{aligned}$$

□

定義 1.4.8. 体 K 上で $\forall A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, その行列 A の n つの列 vectors$\mathbf{a}_j$ によって張られる vector 空間 K^n の部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\}$ を行列 A の列空間といいその次元 $\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\}$ をその行列 A の列階数という.

ここで, 線形写像 $L_A : K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が与えられたとき, 定理 1.4.10 よりその値域 $V\left(L_A\right)$ は n つの vectors$\mathbf{a}_j$ によって張られる vector 空間 K^m の部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\}$ に等しいのであった.

定義 1.4.9. 体 K 上で $\forall A = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1' \\ {}^t\mathbf{a}_2' \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}_m' \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, その行列 A の m つの行 vectors$\mathbf{b}_i$ によって張られる vector 空間 K^n の部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \ldots, \mathbf{a}_m'\right\}$ を行列 A の行空間といいその次元 $\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \ldots, \mathbf{a}_m'\right\}$ をその行列 A の行階数という.

線形写像 $L_A : K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ の核 $\ker L_A$ において, その写像 L_A を用いた vector$\mathbf{v}$ の式 $L_A\left(\mathbf{v}\right) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が与えられたとき, その式 $L_A\left(\mathbf{v}\right) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を方程式とみなせば, このような $\mathbf{v}$ はその方程式 $L_A\left(\mathbf{v}\right) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ の解にあたることから, その写像 L_A の核 $\ker L_A$ はその方程式 $L_A\left(\mathbf{v}\right) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ の解空間ともいうのであった. ここで, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ とおくと, $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ は次のように変形されることができるので,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

これより, その核 $\ker L_A$ は後述する上の n 元連立 1 次方程式の解全体の集合でもある.

定理 1.4.11. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1' \\ {}^t\mathbf{a}_2' \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}_m' \end{pmatrix}$ とすれば, 次式が成り立つ.

$$\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\} = \dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \ldots, \mathbf{a}_m'\right\}$$

定義 1.4.10. 体 K 上で $\forall A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, その行列 A の列階数 $\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\}$ をその行列 A の階数といい $\mathrm{rank}A$ と書く.

この定理は次のようにして示される.

1. $\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \ldots, \mathbf{a}_m'\right\} = s$ とおきその行空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \ldots, \mathbf{a}_m'\right\}$ の基底を $\left\langle\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \ldots, \mathbf{a}_s'\right\rangle$ とおく.

2. $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, ${}^t\mathbf{a}'_i\mathbf{v} = 0$ なる vector 空間 K^n の元 $\mathbf{v}$ を考えたとき, $\forall j \in \Lambda_m \setminus \Lambda_s$ に対し, ${}^t\mathbf{a}'_j\mathbf{v} = 0$ が成り立つことを示す.
3. $A' = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_s \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(s, n, K)$ なる行列 A' が考えられたとき, 2.. より, $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り, $A'\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つことを示す.
4. 線形写像たち $L_A : K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$, $L_{A'} : K^n \to K^s; \mathbf{v} \mapsto A'\mathbf{v}$ が考えられ $\mathrm{nullity} L_A = \mathrm{nullity} L_{A'}$ が成り立つことを示す.
5. 次元公式を用いて次式を示す.

$$\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\} = \dim V\left(L_{A'}\right)$$

6. $V\left(L_{A'}\right) \subseteq K^s$ を用いて次式を示す.

$$\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\} \leq \dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_m\right\}$$

7. 転置行列 ${}^tA$ のときを考えることで示すべきことが示される.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_m \end{pmatrix}$ とおかれよう. $\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_m\right\} = s$ とおくと, その族 $\left\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_m\right\}$ がその行空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_m\right\}$ を生成するので, その族 $\left\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_m\right\}$ のうちどれかがその行空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_m\right\}$ の基底をなす vector となる. したがって, その行列 A の行空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_m\right\}$ の基底を $\langle\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_s\rangle$ としてもよい.

このとき, $\forall j \in \Lambda_m \setminus \Lambda_s$ に対し, $\mathbf{a}'_j = k_{1j}\mathbf{a}'_1 + k_{2j}\mathbf{a}'_2 + \cdots + k_{sj}\mathbf{a}'_s$ が成り立つ. もし, vector 空間 K^n の元 $\mathbf{v}$ が, $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, ${}^t\mathbf{a}'_i\mathbf{v} = 0$ を満たせば, $\forall j \in \Lambda_m \setminus \Lambda_s$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{a}'_j\mathbf{v} &= {}^t\left(k_{1j}\mathbf{a}'_1 + k_{2j}\mathbf{a}'_2 + \cdots + k_{sj}\mathbf{a}'_s\right)\mathbf{v} \\ &= k_{1j}{}^t\mathbf{a}'_1\mathbf{v} + k_{2j}{}^t\mathbf{a}'_2\mathbf{v} + \cdots + k_{sj}{}^t\mathbf{a}'_s\mathbf{v} \\ &= k_{1j}0 + k_{2j}0 + \cdots + k_{sj}0 = 0 \end{aligned}$$

ゆえに, この vector$\mathbf{v}$ は, $\forall i \in \Lambda_m$ に対し, ${}^t\mathbf{a}'_i\mathbf{v} = 0$ を満たす.

そこで, $A' = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_s \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(s, n, K)$ なる行列 A' が考えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \Lambda_m$ に対し, ${}^t\mathbf{a}'_i\mathbf{v} = 0$ が成り立つことになる. したがって, $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, ${}^t\mathbf{a}'_i\mathbf{v} = 0$ も成り立つので, $A'\mathbf{v} = \mathbf{0}$ も成り立つ. 逆に, $A'\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, ${}^t\mathbf{a}'_i\mathbf{v} = 0$ が成り立ち, 上記の議論により, $\forall i \in \Lambda_m$ に対し, ${}^t\mathbf{a}'_i\mathbf{v} = 0$ も成り立つので, $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ も成り立つ. ゆえに, $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り, $A'\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ.

線形写像たち $L_A : K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$, $L_{A'} : K^n \to K^s; \mathbf{v} \mapsto A'\mathbf{v}$ が考えられれば, $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $\mathbf{v} \in \ker L_A$ が成り立つならそのときに限り, $L_A\left(\mathbf{v}\right) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ. 上記の議論により, これが成り立

つならそのときに限り, $L_{A'}(\mathbf{v}) = A'\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つので, これが成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} \in \ker L_{A'}$ が成り立つ. したがって, $\ker L_A = \ker L_{A'}$ が得られる. よって, $\mathrm{nullity} L_A = \mathrm{nullity} L_{A'}$ が成り立つ.

このとき, 定理 1.4.10 と次元公式より次のようになる.

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\} &= \dim V\left(L_A\right)\\ &= \mathrm{rank} L_A\\ &= n - \mathrm{nullity} L_A\\ &= n - \mathrm{nullity} L_{A'}\\ &= \mathrm{rank} L_{A'}\\ &= \dim V\left(L_{A'}\right)\end{aligned}$$

ここで, $V\left(L_A\right) \subseteq K^s$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\} &= \dim V\left(L_{A'}\right)\\ &\leq \dim K^s = s\\ &= \dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_m\right\}\end{aligned}$$

その行列 A の転置行列 ${}^tA$ についても同様にして考えることで次のようになることから,

$$\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\} \geq \dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_m\right\}$$

よって, 次式が成り立つ.

$$\dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\} = \dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_m\right\}$$

□

定理 1.4.12. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が与えられたとき, $A = \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^t\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_m\end{pmatrix}$ とし n つの vectors$\mathbf{a}_j$ のうち線形独立なものの最大個数を r, m つの vectors$\mathbf{a}'_i$ のうち線形独立なものの最大個数を s とすれば, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} L_A &= \dim V\left(L_A\right)\\ &= \dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\} = r\\ &= \dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_m\right\} = s\end{aligned}$$

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が与えられたとき, $A = \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^t\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_m\end{pmatrix}$ とし n つの vectors$\mathbf{a}_j$ のうち線形独立なものの最大個数を r, m つの vectors$\mathbf{a}'_i$ のうち線形独立なものの最大個数を s とすれば, 定義より明らかに $\mathrm{rank} A = \dim \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right\}$ が成り立つ.

定理 1.4.10 より $V\left(L_{A}\right)=\operatorname{span}\left\{\mathbf{a}_{1},\mathbf{a}_{2},\ldots,\mathbf{a}_{n}\right\}$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{rank}L_{A}=\dim V\left(L_{A}\right)=\dim\operatorname{span}\left\{\mathbf{a}_{1},\mathbf{a}_{2},\ldots,\mathbf{a}_{n}\right\}$$

また, その列空間 $\operatorname{span}\left\{\mathbf{a}_{1},\mathbf{a}_{2},\ldots,\mathbf{a}_{n}\right\}$ は n 個の vectors$\mathbf{a}_{j}$ によって張られているので, その列空間 $\operatorname{span}\left\{\mathbf{a}_{1},\mathbf{a}_{2},\ldots,\mathbf{a}_{n}\right\}$ の基底は n 個の vectors$\mathbf{a}_{j}$ のうちどれかである. そこで, r つの線形独立な vectors$\mathbf{a}_{j}$ の添数全体の集合を Λ' とすれば, その組 $\left(\mathbf{a}_{j}\right)_{j\in\Lambda'}$ がその列空間 $\operatorname{span}\left\{\mathbf{a}_{1},\mathbf{a}_{2},\ldots,\mathbf{a}_{n}\right\}$ の基底となるので, $\mathrm{card}\Lambda'=r$ より $\dim\operatorname{span}\left\{\mathbf{a}_{1},\mathbf{a}_{2},\ldots,\mathbf{a}_{n}\right\}=r$ が成り立つ. 同様にして, $\dim\operatorname{span}\left\{\mathbf{a}_{1}',\mathbf{a}_{2}',\ldots,\mathbf{a}_{m}'\right\}=s$ が成り立つことが示される.

最後に, 定理 1.4.11 より $\dim\operatorname{span}\left\{\mathbf{a}_{1},\mathbf{a}_{2},\ldots,\mathbf{a}_{n}\right\}=\dim\operatorname{span}\left\{\mathbf{a}_{1}',\mathbf{a}_{2}',\ldots,\mathbf{a}_{m}'\right\}$ が成り立つ. □

定理 1.4.13. 体 K 上で $\forall A\in\mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 線形写像 $L_{A}:K^{n}\rightarrow K^{n};\mathbf{v}\mapsto A\mathbf{v}$ について, 次のことは同値である.

- その線形写像 $L_{A}:K^{n}\rightarrow K^{n}$ が全単射である.
- その線形写像 $L_{A}:K^{n}\rightarrow K^{n}$ が全射である.
- その線形写像 $L_{A}:K^{n}\rightarrow K^{n}$ が単射である.

証明. 定理 1.2.15 より明らかである. □

定理 1.4.14. 体 K 上で $\forall A\in\mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 次のことは同値である.

- 線形写像 $L_{A}:K^{n}\rightarrow K^{n};\mathbf{v}\mapsto A\mathbf{v}$ が全単射である.
- $\mathrm{rank}A=n$ が成り立つ.
- $A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{1} & \mathbf{a}_{2} & \cdots & \mathbf{a}_{n}\end{pmatrix}$ とおくと, それらの vectors$\mathbf{a}_{1}$, $\mathbf{a}_{2}$, …, $\mathbf{a}_{n}$ が線形独立である.
- $A=\begin{pmatrix}{}^{t}\mathbf{a}_{1}' \\ {}^{t}\mathbf{a}_{2}' \\ \vdots \\ {}^{t}\mathbf{a}_{n}'\end{pmatrix}$ とおくと, それらの vectors$\mathbf{a}_{1}'$, $\mathbf{a}_{2}'$, …, $\mathbf{a}_{n}'$ が線形独立である.
- $\exists X\in\mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $AX=XA=I_{n}$ が成り立つ.
- $\ker L_{A}=\{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.
- $\forall\mathbf{v}\in K^{n}$ に対し, $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ が成り立つ.

定義 1.4.11. 体 K 上の n 次正方行列 A が上の条件たちのうち少なくとも 1 つ満たせば, その他全ての条件たちを満たす. このような行列 A を正則行列などといいこのような行列 A 全体の集合を $\mathrm{GL}(n,K)$ と書く場合がある. このような行列 A に対応する上から 3 つ目の式での行列 X をその行列 A の逆行列といい, 既に述べられたようにこれが存在するなら一意的なので, これを A^{-1} と書く.

証明. 体 K 上で $\forall A\in\mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 線形写像 $L_{A}:K^{n}\rightarrow K^{n};\mathbf{v}\mapsto A\mathbf{v}$ が全単射であるとき, 明らかに, この写像 L_{A} は全射であるかつ, 単射でもあり定理 1.2.15 より次のようになる.

$$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}L_{A}=\dim K^{n}=n$$

逆に, これが成り立つなら, 次のようになるので,

$$\dim K^{n}=n=\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}L_{A}$$

定理 1.2.15 よりその写像 L_A は全射であるかつ, 単射でもあるので, その線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ は全単射である. ゆえに, 次のことは同値である.

- 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が全単射である.
- $\mathrm{rank} A = n$ が成り立つ.

$\mathrm{rank} A = n$ が成り立つとき, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とおくと, 定理 1.4.12 より $\mathrm{rank} A = n = \dim \mathrm{span} \left\{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \right\}$ が成り立つので, 組 $\left\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \right\rangle$ がその列空間 $\mathrm{span} \left\{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \right\}$ の基底をなす. したがって, それらの vectors$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ は線形独立である. 逆に, これが成り立つなら, 組 $\left\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \right\rangle$ がその列空間 $\mathrm{span} \left\{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \right\}$ の基底をなすので, 定理 1.4.12 より $\mathrm{rank} A = n$ が成り立つ. 行空間についても同様にして示されるので, 以上の議論により, 次のことは同値である.

- $\mathrm{rank} A = n$ が成り立つ.
- $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とおくと, それらの vectors$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ が線形独立である.
- $A = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_n \end{pmatrix}$ とおくと, それらの vectors$\mathbf{a}'_1$, $\mathbf{a}'_2$, ..., $\mathbf{a}'_n$ が線形独立である.

その線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が全単射であるとき, これの逆写像 $L_A^{-1} : K^n \rightarrow K^n$ が存在するので, これの行列を X とおくと, 次式が成り立つ.

$$L_A \circ L_A^{-1} = L_A^{-1} \circ L_A = I_{K^n}$$

ここで, $I_{K^n} : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} = I_n \mathbf{v}$ が成り立つかつ, 線形写像たち $L_A \circ L_A^{-1}$, $L_A^{-1} \circ L_A$ の行列がそれぞれ AX, XA と与えられるので, 次式が成り立つ.

$$AX = XA = I_n$$

一方で, $\exists A^{-1} \in \mathrm{M}(n, n, K)$ に対し, 次式が成り立つなら,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

線形写像 $L_{A^{-1}} : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A^{-1}\mathbf{v}$ が考えられれば, 次式が成り立つので,

$$L_A \circ L_{A^{-1}} = L_{A^{-1}} \circ L_A = I_{K^n}$$

その写像 L_A の逆写像 L_A^{-1} が存在し, したがって, その線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ は全単射である. ゆえに, 次のことは同値である.

- 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が全単射である.
- $\exists A^{-1} \in \mathrm{M}(n, n, K)$ に対し, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ が成り立つ.

その線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が全単射であるとき, 明らかに, この写像 L_A は全射であるかつ, 単射でもあり定理 1.2.12 より $\ker L_A = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. 逆に, これが成り立つなら, $\mathrm{nullity} L_A = \dim \ker L_A = 0$ が成り立つので, 定理 1.2.15 よりその線形写像 L_A は全射であるかつ, 単射でもあるので, その線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ は全単射である. ゆえに, 次のことは同値である.

- 線形写像 $L_A : K^n \to K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が全単射である.
- $\ker L_A = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.

$\ker L_A = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つならそのときに限り, $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $\mathbf{v} \in \ker L_A$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ. ここで, $\mathbf{v} \in \ker L_A$ が成り立つならそのときに限り, $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つことに注意すれば, これが成り立つならそのときに限り, $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つことになる. ゆえに, 次のことは同値である.

- $\ker L_A = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ.

□

定理 1.4.15. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(l, m, K) \forall B \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{rank}AB \leq \mathrm{rank}A, \quad \mathrm{rank}AB \leq \mathrm{rank}B$$

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(m, n, K) \forall B \in \mathrm{M}(l, m, K)$ に対し, 次のような線形写像たち L_A, L_B, L_{AB} が考えられれば,

$$\begin{aligned} L_A &: K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v} \\ L_B &: K^m \to K^l; \mathbf{v} \mapsto B\mathbf{v} \\ L_{AB} &: K^n \to K^l; \mathbf{v} \mapsto AB\mathbf{v} \end{aligned}$$

定理 1.2.16 , 定理 1.4.8, 定理 1.4.12 より次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}AB &= \mathrm{rank}L_{AB} \\ &= \mathrm{rank}L_A \circ L_B \\ &\leq \mathrm{rank}L_A \\ &= \mathrm{rank}A \\ \mathrm{rank}AB &= \mathrm{rank}L_{AB} \\ &= \mathrm{rank}L_A \circ L_B \\ &\leq \mathrm{rank}B \\ &= \mathrm{rank}B \end{aligned}$$

□

定理 1.4.16. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(l, m, K) \forall B \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, $AB = O$ が成り立つなら, $\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leq m$ が成り立つ.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(l, m, K) \forall B \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, $AB = O$ が成り立つなら, 次のような線形写像たち L_A, L_B, L_{AB} が考えられれば,

$$\begin{aligned} L_A &: K^m \to K^l; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v} \\ L_B &: K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto B\mathbf{v} \\ L_{AB} &: K^n \to K^l; \mathbf{v} \mapsto AB\mathbf{v} \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v} \in K^m$ に対し, $\mathbf{v} \in V\left(L_B\right)$ が成り立つなら, $\exists \mathbf{w} \in K^n$ に対し, $\mathbf{v} = B\mathbf{w}$ が成り立つ. このとき, 次のようになるので,

$$L_A\left(\mathbf{v}\right) = A\mathbf{v} = AB\mathbf{w} = O\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{v} \in \ker L_A$ が成り立つ. これにより, $V\left(L_B\right) \subseteq \ker L_A$ が成り立つので, 次元公式と定理 1.4.1 よりしたがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B &= \mathrm{rank}L_A + \mathrm{rank}L_B \\ &= m - \mathrm{nullity}L_A + \dim V\left(L_B\right) \\ &\leq m - \dim\ker L_A + \dim\ker L_A = m \end{aligned}$$

□

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p41-65,92-113 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 1976. 新装版第 2 刷 p45-51,107-112,170-199 ISBN978-4-00-029873-5

[3] 中西敏浩. ”数学基礎 IV (線形代数学) 講義ノート”. 島根大学. `http://www.math.shimane-u.ac.jp/~tosihiro/skks4main.pdf` (2020-9-7 取得)

1.5 表現行列

1.5.1 線形写像

定義 (定義 1.2.1 の再掲)**.** 体 K 上の vector 空間 V, W において写像 $f:V\rightarrow W$ が, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V\forall k,l\in K$ に対し, $f\left(k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\right)=kf\left(\mathbf{v}\right)+lf\left(\mathbf{w}\right)$ を満たすとき, この写像を体 K 上の vector 空間として準同型写像, 体 K 上の vector 空間 V から W への線形写像, 体 K 上で線形的な写像などという. 体 K は vector 空間が満たすべき条件が揃っているので, 体 K 上の vector 空間 V から体 K への線形写像を特に vector 空間 V の線形形式という.

以下ここでは, 今まで扱ってきた概念たちが挙げられよう.

定義 (定義 1.2.2 の再掲)**.** 体 K 上の 2 つの vector 空間たち V, W が与えられたとする. 線形写像 $f:V\rightarrow W$ が全単射であるとき, この写像 f をその体 K 上のその vector 空間 V からその vector 空間 W への線形同型写像, 同型写像などといい, その体 K 上のその vector 空間 V からその vector 空間 W への線形同型写像が存在するとき, その vector 空間 V とその vector 空間 W は線形同型であるなどといい $V\cong W$ などと書く.

もちろん, その vector 空間 V の恒等写像 I_V も V の線形自己同型写像である.

定義 (定義 1.2.4 の再掲)**.** 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いて線形写像 $f:V\rightarrow W$ が与えられたとき, 次式のような集合 $V(f)$ をその写像 f の値域, 像といい $f(V)$, $\mathrm{Im}f$ などと書く.

$$V(f)=\left\{f\left(\mathbf{v}\right)\in W\middle|\mathbf{v}\in V\right\}\subseteq W$$

また, 次式のような集合, 即ち, $f\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{0}$ となるような vector 空間 V の元 $\mathbf{v}$ 全体の集合で写像 f を対応とみなしたときの逆対応 f^{-1} に $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ とした像をその写像 f の核といい, $\ker_K f$, $\ker f$ などと書く.

定義 (定義 1.2.5 の再掲)**.** 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いて線形写像 $f:V\rightarrow W$ が与えられたとき, その写像 f の値域 $V(f)$ の次元 $\dim V(f)$ をその写像 f の階数, その核 $\ker f$ の次元 $\dim\ker f$ をその写像 f の退化次数といいそれぞれ $\mathrm{rank}f$, $\mathrm{nullity}f$ と書く.

定理 (次元公式 1.2.14 の再掲)**.** 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いた線形写像 $f:V\rightarrow W$ が与えられ, その vector 空間 V が有限次元であるとき, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{rank}f+\mathrm{nullity}f=\dim V(f)+\dim\ker f=\dim V$$

この式, または, この定理を次元公式という.

定理 (定理 1.4.15 の再掲)**.** 集合 $\mathrm{M}(n,n,K)$ に属する n 次正方行列 A について, 次のことは同値である.

- 線形写像 $L_A:K^n\rightarrow K^n;\mathbf{v}\mapsto A\mathbf{v}$ が全単射である.
- $\mathrm{rank}A=n$ が成り立つ.
- $\exists A^{-1}\in\mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$ が成り立つ.
- $\ker L_A=\{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.
- $\forall\mathbf{v}\in K^n$ に対し, $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ が成り立つ.

定義 (定義 1.4.11 の再掲)**.** n 次正方行列 A が上の条件たちのうち少なくとも 1 つ満たせば, その他全ての条件たちを満たす. このような行列 A を正則行列などといいこのような行列 A 全体の集合を $\mathrm{GL}(n,K)$ と書く場合がある. このような行列 A に対応する上から 3 つ目の式での行列 A^{-1} をその行列 A の逆行列という.

1.5.2 表現行列

定理 1.5.1. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V とこれの 1 つの基底 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ が与えられ, その基底 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ を α とおくとき, vector 空間 K^n の標準直交基底 $\langle\mathbf{e}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ を用いて $\forall i\in\varLambda_n$ に対し, $\varphi_\alpha\left(\mathbf{e}_i\right)=\mathbf{v}_i$ が成り立つような線形写像 $\varphi_\alpha:K^n\rightarrow V$ は全単射であり, これの逆写像 φ_α^{-1} は, $\forall i\in\varLambda_n$ に対し, $\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v}_i\right)=\mathbf{e}_i$ が成り立つような線形写像 $\varphi_\alpha^{-1}:V\rightarrow K^n$ である.

定義 1.5.1. この線形同型写像 φ_α を以下, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像ということにする.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V とこれの 1 つの基底 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ が与えられ, その基底 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ を α とおくとき, vector 空間 K^n の標準直交基底 $\langle\mathbf{e}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ を用いて $\forall i\in\varLambda_n$ に対し, $\varphi_\alpha\left(\mathbf{e}_i\right)=\mathbf{v}_i$ が成り立つような線形写像 $\varphi_\alpha:K^n\rightarrow V$ と, $\forall i\in\varLambda_n$ に対し, $f\left(\mathbf{v}_i\right)=\mathbf{e}_i$ が成り立つような線形写像 $f:V\rightarrow K^n$ を考えよう.

このとき, このような写像たち φ_α, f は定理 1.2.2, 定理 1.2.6, 即ち, 線形同型定理より一意的に存在し線形同型写像となるのであった. ここで, $\forall\mathbf{w}\in K^n$ に対し, 次式が成り立つようなその体 K の元々 k_i が存在し,

$$\mathbf{w}=\sum_{i\in\varLambda_n}k_i\mathbf{e}_i$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}f\circ\varphi_\alpha\left(\mathbf{w}\right)&=f\circ\varphi_\alpha\left(\sum_{i\in\varLambda_n}k_i\mathbf{e}_i\right)\\&=f\left(\sum_{i\in\varLambda_n}k_i\varphi_\alpha\left(\mathbf{e}_i\right)\right)\\&=f\left(\sum_{i\in\varLambda_n}k_i\mathbf{v}_i\right)\\&=\sum_{i\in\varLambda_n}k_if\left(\mathbf{v}_i\right)\\&=\sum_{i\in\varLambda_n}k_i\mathbf{e}_i=\mathbf{w}\end{aligned}$$

同様にして, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次式が成り立つようなその体 K の元々 k_i が存在し,

$$\mathbf{v}=\sum_{i\in\varLambda_n}k_i\mathbf{v}_i$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha\circ f\left(\mathbf{v}\right)&=\varphi_\alpha\circ f\left(\sum_{i\in\varLambda_n}k_i\mathbf{v}_i\right)\\&=\varphi_\alpha\left(\sum_{i\in\varLambda_n}k_if\left(\mathbf{v}_i\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_\alpha\left(\sum_{i\in\varLambda_n} k_i\mathbf{e}_i\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_n} k_i\varphi_\alpha\left(\mathbf{e}_i\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_n} k_i\mathbf{v}_i = \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

以上より, その写像 f はその写像 φ_α の逆写像 φ_α^{-1} となる. □

定理 1.5.2. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V と線形同型写像 $\varphi:K^n\rightarrow V$ が与えられたとき, その vector 空間 K^n の標準直交基底 $\left\langle\mathbf{e}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ を用いた vectors の組 $\left\langle\varphi\left(\mathbf{e}_i\right)\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ はその vector 空間 V の基底となり, これを α とおくと, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いて $\varphi=\varphi_\alpha$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V と線形同型写像 $\varphi:K^n\rightarrow V$ が与えられたとき, その vector 空間 K^n の標準直交基底 $\left\langle\mathbf{e}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ を用いた vectors の組 $\left\langle\varphi\left(\mathbf{e}_i\right)\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ について, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, その写像 φ の逆写像となるような線形写像 φ^{-1} が存在するので, $\varphi^{-1}\left(\mathbf{v}\right)=\sum_{i\in\varLambda_n} k_i\mathbf{e}_i$ とおくと, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \varphi\circ\varphi^{-1}\left(\mathbf{v}\right)\\
&= \varphi\left(\sum_{i\in\varLambda_n} k_i\mathbf{e}_i\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_n} k_i\varphi\left(\mathbf{e}_i\right)
\end{aligned}
$$

ゆえに, その vector 空間 V はそれらの vectors$\varphi\left(\mathbf{e}_i\right)$ によって生成される.

さらに, $\mathbf{0}=\sum_{i\in\varLambda_n} c_i\varphi\left(\mathbf{e}_i\right)$ が成り立つなら, その写像 φ の逆写像となるような線形写像 φ^{-1} が存在するので, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \varphi^{-1}\left(\mathbf{0}\right)\\
&= \varphi^{-1}\left(\sum_{i\in\varLambda_n} c_i\varphi\left(\mathbf{e}_i\right)\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_n} c_i\varphi^{-1}\circ\varphi\left(\mathbf{e}_i\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_n} c_i\mathbf{e}_i
\end{aligned}
$$

ここで, その vectors の組 $\left\langle\mathbf{e}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ はその vector 空間 K^n の基底なので, $\forall i\in\varLambda_n$ に対し, $c_i=0$ が成り立つ. よって, その vectors の組 $\left\langle\varphi\left(\mathbf{e}_i\right)\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ はその vector 空間 V の基底である.

これを α とおくと, $\forall i\in\varLambda_n$ に対し, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いて $\varphi\left(\mathbf{e}_i\right)=\varphi_\alpha\left(\mathbf{e}_i\right)$ が成り立つので, 定理 1.2.2 より $\varphi=\varphi_\alpha$ が成り立つ. □

定理 1.5.3. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\left\langle\mathbf{w}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ であり, これらをそれぞれ α, β とする. 線形写像 $f:V\rightarrow W$ が与えられたとき, それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β を用いて写像 $\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha$ も線形写像で, $\exists A\in\mathrm{M}(n,m,K)\forall\mathbf{v}\in K^m$ に対し, $\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha\left(\mathbf{v}\right)=A\mathbf{v}$ が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
 & K^m \arrow[rr, "\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"'] & & K^n \\
\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha"] & & A\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & \\
 & V \arrow[rr, "f"] & & W \arrow[uu, "\varphi_\beta^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

定義 1.5.2. この行列 A, 即ち, 線形写像 $f:V\rightarrow W$ が与えられたときの線形写像 $\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha$ の行列 A をそれらの基底たち α, β に関するその写像 f の表現行列といい $[f]_\alpha^\beta$ と書く.

証明. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ でありこれらをそれぞれ α, β とする. 線形写像 $f:V\rightarrow W$ が与えられたとき, それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち $\varphi_\alpha:K^m\rightarrow V$, $\varphi_\beta:K^n\rightarrow W$ は線形同型写像となるのであった. したがって, その逆写像 φ_β^{-1} も線形写像でその合成写像 $\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha$ も線形写像となる. このとき, その写像 $\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha$ の始集合, 終集合がそれぞれ K^m, K^n であるから, 定理 1.4.7 よりこの写像 $\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha$ に対応する行列 A がその集合 $\mathrm{M}(n,m,K)$ に存在して, $\forall\mathbf{v}\in K^m$ に対し, $\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$ が成り立つ. □

定理 1.5.4. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ $\langle\mathbf{v}_j\rangle_{j\in\varLambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ であり, これらをそれぞれ α, β とするとき, それらの基底たち α,β に関する線形写像 $f:V\rightarrow W$ の $[f]_\alpha^\beta\in\mathrm{M}(n,m,K)$ なる表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ の第 (i,j) 成分 a_{ij} は, $\forall j\in\varLambda_m$ に対し, 次式を満たす.

$$
f(\mathbf{v}_j)=\sum_{i\in\varLambda_n}a_{ij}\mathbf{w}_i
$$

逆に, $A=(a_{ij})_{(i,j)\in\varLambda_n\times\varLambda_m}\in\mathrm{M}(n,m,K)$ なるある行列 A が上の式を満たすなら, その行列 A はそれらの基底たち α, β に関する線形写像 $f:V\rightarrow W$ の表現行列となる.

証明. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ $\langle\mathbf{v}_j\rangle_{j\in\varLambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ であり, これらをそれぞれ α, β とする. また, vector 空間たち K^m, K^n の標準直交基底をそれぞれ $\langle\mathbf{d}_j\rangle_{j\in\varLambda_m}$, $\langle\mathbf{e}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ とおく.

このとき, 線形写像 $f:V\rightarrow W$, それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β を用いて次式のように考えると,

$$
\begin{tikzcd}
K^m \arrow[rr, "\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"'] & & K^n \arrow[dd, "\varphi_\beta"] \\
\mathbf{d}_j \in K^m \arrow[r, mapsto, "\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha"] & {[f]}_\alpha^\beta\,\mathbf{d}_j \in K^n & \\
V \arrow[rr, "f"] & & W
\end{tikzcd}
$$

$\forall j \in \varLambda_m$ に対し, 次式が成り立つ.

$$
f \circ \varphi_\alpha\left(\mathbf{d}_j\right) = f\left(\varphi_\alpha\left(\mathbf{d}_j\right)\right) = f\left(\mathbf{v}_j\right)
$$

一方で, それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の $[f]_\alpha^\beta \in \mathrm{M}(n, m, K)$ なる表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ が $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_n\times\varLambda_m}$ と成分表示されるとき, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
f \circ \varphi_\alpha\left(\mathbf{d}_j\right) &= \varphi_\beta \circ \varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha\left(\mathbf{d}_j\right) \\
&= \varphi_\beta\left(\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha\left(\mathbf{d}_j\right)\right) \\
&= \varphi_\beta\left([f]_\alpha^\beta \mathbf{d}_j\right)
\end{aligned}
$$

ここで, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
[f]_\alpha^\beta \mathbf{d}_j &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \\
&= a_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nj} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= a_{1j}\mathbf{e}_1 + a_{2j}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{e}_n
\end{aligned}
$$

したがって, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
f \circ \varphi_\alpha\left(\mathbf{d}_j\right) &= \varphi_\beta\left(\sum_{i\in\varLambda_n} a_{ij}\mathbf{e}_i\right) \\
&= \sum_{i\in\varLambda_n} a_{ij}\varphi_\beta\left(\mathbf{e}_i\right)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i \in \Lambda_n} a_{ij} \mathbf{w}_i$$

以上より, 次式が成り立つ.

$$f(\mathbf{v}_j) = f \circ \varphi_\alpha (\mathbf{d}_j) = \sum_{i \in \Lambda_n} a_{ij} \mathbf{w}_i$$

逆に, $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \Lambda_n \times \Lambda_m} \in \mathrm{M}(n,m,K)$ なるある行列 A が上の式を満たすなら, $\forall j \in \Lambda_m$ に対し, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha (\mathbf{d}_j) &= \varphi_\beta^{-1} \circ f(\mathbf{v}_j) \\
&= \varphi_\beta^{-1} \left(\sum_{i \in \Lambda_n} a_{ij} \mathbf{w}_i \right) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} a_{ij} \varphi_\beta^{-1} (\mathbf{w}_i) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} a_{ij} \mathbf{e}_i = A\mathbf{d}_j
\end{aligned}$$

定理 1.4.7 よりその写像 $\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha : K^m \to K^n$ は線形写像となりその行列 A はそれらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の表現行列となる. □

定理 1.5.5. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ $\langle \mathbf{v}_j \rangle_{j \in \Lambda_m}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ であり, これらをそれぞれ α, β とし, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{j \in \Lambda_m} k_j \mathbf{v}_j$ のように書かれるとする. それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の $[f]_\alpha^\beta \in \mathrm{M}(n,m,K)$ なる表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ が $(a_{ij})_{(i,j) \in \Lambda_n \times \Lambda_m}$ と成分表示されるとき, 次式が成り立つ.

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i \in \Lambda_n} \sum_{j \in \Lambda_m} a_{ij} k_j \mathbf{w}_i$$

さらにいえば, その vector$f(\mathbf{v})$ が $f(\mathbf{v}) = \sum_{i \in \Lambda_n} l_i \mathbf{w}_i$ を満たすとき, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$$

このことは $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$, $\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ としてそれらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β を用いて次式のようにも書かれる.

$$
\begin{tikzcd}
 & K^m \arrow[rr, "\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"] & & K^n \\
\mathbf{k} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[rr, mapsto, "\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & & \mathbf{l} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] & \\
 & V \arrow[rr, "f"] & & W \arrow[uu, "\varphi_\beta^{-1}"'] \\
\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f(\mathbf{v}) \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_\beta^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

証明. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ $\langle \mathbf{v}_j \rangle_{j \in \varLambda_m}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ であり, これらをそれぞれ α, β とし, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次式のように書かれるとする.

$$\mathbf{v} = \sum_{j \in \varLambda_m} k_j \mathbf{v}_j$$

それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の $[f]_\alpha^\beta \in \mathrm{M}(n, m, K)$ なる表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ が $(a_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_n \times \varLambda_m}$ と成分表示されるとき, 定理 1.5.4 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{v}) &= f\left(\sum_{j \in \varLambda_m} k_j \mathbf{v}_j \right) \\
&= \sum_{j \in \varLambda_m} k_j f(\mathbf{v}_j) \\
&= \sum_{j \in \varLambda_m} k_j \sum_{i \in \varLambda_n} a_{ij} \mathbf{w}_i \\
&= \sum_{j \in \varLambda_m} \sum_{i \in \varLambda_n} a_{ij} k_j \mathbf{w}_i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} \sum_{j \in \varLambda_m} a_{ij} k_j \mathbf{w}_i
\end{aligned}$$

さらにいえば, その vector$f(\mathbf{v})$ が $f(\mathbf{v}) = \sum_{i \in \varLambda_n} l_i \mathbf{w}_i$ を満たすとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \sum_{i \in \varLambda_n} l_i \mathbf{w}_i - \sum_{i \in \varLambda_n} \sum_{j \in \varLambda_m} a_{ij} k_j \mathbf{w}_i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} \left(l_i - \sum_{j \in \varLambda_m} a_{ij} k_j \right) \mathbf{w}_i
\end{aligned}$$

ここで, その組 $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ は基底であるから, 次のようになる.

$$\forall i \in \varLambda_n \left[l_i - \sum_{j \in \varLambda_m} a_{ij} k_j = 0 \right] \Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_n \left[l_i = \sum_{j \in \varLambda_m} a_{ij} k_j \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2m}k_m \\ \vdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nm}k_m \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$$

□

定理 1.5.6. 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像たち $f: V \rightarrow W$, $g: V \rightarrow W$ が与えられたとき, $\forall k, l \in K$ に対し, その写像 $kf + lg: V \rightarrow W$ も線形写像であった. これらの vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ α, β としそれらの基底たち α, β に関するそれらの線形写像たち $f: V \rightarrow W$, $g: V \rightarrow W$, $kf + lg: V \rightarrow W$ の表現行列をそれぞれ $[f]_\alpha^\beta$, $[g]_\alpha^\beta$, $[kf + lg]_\alpha^\beta$ とおくと, $[kf + lg]_\alpha^\beta = k[f]_\alpha^\beta + l[g]_\alpha^\beta$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像たち $f: V \rightarrow W$, $g: V \rightarrow W$ が与えられたとき, $\forall k, l \in K$ に対し, その写像 $kf + lg: V \rightarrow W$ も線形写像であった. これらの vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ α, β としそれらの基底たち α, β に関するそれらの線形写像たち $f: V \rightarrow W$, $g: V \rightarrow W$, $kf + lg: V \rightarrow W$ の表現行列をそれぞれ $[f]_\alpha^\beta$, $[g]_\alpha^\beta$, $[kf + lg]_\alpha^\beta$ とおき, これらの表現行列たち $[f]_\alpha^\beta$, $[g]_\alpha^\beta$ がそれぞれ $\left(a_{ij}\right)_{(i,j) \in \Lambda_n \times \Lambda_m}$, $\left(b_{ij}\right)_{(i,j) \in \Lambda_n \times \Lambda_m}$ と成分表示されるとき, 定理 1.5.4 より $\forall j \in \Lambda_m$ に対し, 次式が成り立つ.

$$f\left(\mathbf{v}_j\right) = \sum_{i \in \Lambda_n} a_{ij} \mathbf{w}_i, \quad g\left(\mathbf{v}_j\right) = \sum_{i \in \Lambda_n} b_{ij} \mathbf{w}_i$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} (kf + lg)\left(\mathbf{v}_j\right) &= kf\left(\mathbf{v}_j\right) + lg\left(\mathbf{v}_j\right) \\ &= k \sum_{i \in \Lambda_n} a_{ij} \mathbf{w}_i + l \sum_{i \in \Lambda_n} b_{ij} \mathbf{w}_i \\ &= k \sum_{i \in \Lambda_n} a_{ij} \mathbf{w}_i + l \sum_{i \in \Lambda_n} b_{ij} \mathbf{w}_i \\ &= \sum_{i \in \Lambda_n} \left(ka_{ij} + lb_{ij}\right) \mathbf{w}_i \end{aligned}$$

このとき, 定理 1.5.4 よりそれらの基底たち α, β に関する線形写像 $kf + lg$ の表現行列 $[kf + lg]_\alpha^\beta$ は $\left(ka_{ij} + lb_{ij}\right)_{(i,j) \in \Lambda_n \times \Lambda_m}$ のように成分表示され, したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} [kf + lg]_\alpha^\beta &= \left(ka_{ij} + lb_{ij}\right)_{(i,j) \in \Lambda_n \times \Lambda_m} \\ &= k\left(a_{ij}\right)_{(i,j) \in \Lambda_n \times \Lambda_m} + l\left(b_{ij}\right)_{(i,j) \in \Lambda_n \times \Lambda_m} \\ &= k[f]_\alpha^\beta + l[g]_\alpha^\beta \end{aligned}$$

□

定理 1.5.7. 体 K 上の vector 空間たち U, V, W の基底の 1 つがそれぞれ α, β, γ としそれらの基底たち α, β に関する線形写像 $f: U \rightarrow V$, それらの基底たち β, γ に関する線形写像 $g: V \rightarrow W$, それらの基底たち α,

γ に関する線形写像 $g \circ f : U \to W$ の表現行列をそれぞれ $[f]^\beta_\alpha$, $[g]^\gamma_\beta$, $[g \circ f]^\gamma_\alpha$ とおくと, $[g \circ f]^\gamma_\alpha = [g]^\gamma_\beta [f]^\beta_\alpha$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元, n 次元, o 次元 vector 空間たち U, V, W の基底の 1 つがそれぞれ α, β, γ としそれらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : U \to V$, それらの基底たち β, γ に関する線形写像 $g : V \to W$, それらの基底たち α, γ に関する線形写像 $g \circ f : U \to W$ の表現行列をそれぞれ $[f]^\beta_\alpha$, $[g]^\gamma_\beta$, $[g \circ f]^\gamma_\alpha$ とおくと, それらの基底たち α, β, γ に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β, φ_γ を用いて次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\varphi_\gamma^{-1} \circ (g \circ f) \circ \varphi_\alpha &= \varphi_\gamma^{-1} \circ g \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha \\ &= \left(\varphi_\gamma^{-1} \circ g \circ \varphi_\beta\right) \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha\right)\end{aligned}$$

これは次のようになることを意味する.

$$\begin{tikzcd}
K^m \arrow[r, "\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_\gamma^{-1}\circ(g\circ f)\circ\varphi_\alpha"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"] & K^n \arrow[r, "\varphi_\gamma^{-1}\circ g\circ\varphi_\beta"] \arrow[dd, shift left, "\varphi_\beta"] & K^o \\
\mathbf{v} \arrow[r, mapsto, "\varphi_\beta^{-1}\circ f\circ\varphi_\alpha"] \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & {[f]^\beta_\alpha \mathbf{v}} \arrow[r, mapsto, "\varphi_\gamma^{-1}\circ g\circ\varphi_\beta"] \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & {[g]^\gamma_\beta [f]^\beta_\alpha \mathbf{v}} \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \\
U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "g"] \arrow[uu, shift left, "\varphi_\beta^{-1}"] & W \arrow[uu, "\varphi_\gamma^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

したがって, 定義よりそれらの写像たち $\varphi_\gamma^{-1} \circ g \circ \varphi_\beta$, $\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha$ の対応する行列がそれぞれ $[f]^\beta_\alpha$, $[g]^\gamma_\beta$ と与えられることに注意すれば, その写像 $\left(\varphi_\gamma^{-1} \circ g \circ \varphi_\beta\right) \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha\right)$ の対応する行列が $[g]^\gamma_\beta [f]^\beta_\alpha$ と与えられ, 定義よりしたがって $[g \circ f]^\gamma_\alpha = [g]^\gamma_\beta [f]^\beta_\alpha$ が成り立つ. □

定理 1.5.8. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ α, β とするとき, それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の表現行列 $[f]^\beta_\alpha$ の階数 $\mathrm{rank}[f]^\beta_\alpha$ はそれらの基底たち α, β によらずその線形写像 f の階数に等しい, 即ち, $\mathrm{rank}[f]^\beta_\alpha = \mathrm{rank} f$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ α, β とするとき, それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の表現行列 $[f]^\beta_\alpha$ の階数 $\mathrm{rank}[f]^\beta_\alpha$ について考えよう. このとき, それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β を用いてその合成写像 $\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha$ を $L_{[f]^\beta_\alpha}$ とおくと, 次のようになり,

$$\begin{aligned}f &= I_W \circ f \circ I_V \\ &= \varphi_\beta \circ \varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \\ &= \varphi_\beta \circ L_{[f]^\beta_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}\end{aligned}$$

定理 1.2.16 より次式が成り立つ.

$$\mathrm{rank}\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha \leq \mathrm{rank} f \circ \varphi_\alpha$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathrm{rank} f \\
&= \mathrm{rank}\varphi_\beta \circ L_{[f]_\alpha^\beta} \circ \varphi_\alpha^{-1} \\
&\leq \mathrm{rank} L_{[f]_\alpha^\beta} \circ \varphi_\alpha^{-1} \\
&\leq \mathrm{rank} L_{[f]_\alpha^\beta} \\
&= \mathrm{rank}\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha
\end{aligned}
$$

以上より $\mathrm{rank}\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha = \mathrm{rank} f$ が成り立つ. ここで, 定理 1.4.12 より $\mathrm{rank} L_{[f]_\alpha^\beta} = \mathrm{rank}[f]_\alpha^\beta$ が成り立つので, その表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ の階数 $\mathrm{rank}[f]_\alpha^\beta$ はそれらの基底たち α, β によらずその線形写像の階数 $\mathrm{rank} f$ に等しい. □

1.5.3 基底変換行列

定理 1.5.9. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の 2 つの基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられこれらをそれぞれ α, β とおく. このとき, それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β の合成写像 $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ に対応する $A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる行列 A はそれらの基底たち α, β に関する恒等写像 $I_V : V \rightarrow V$ の表現行列 $[I_V]_\alpha^\beta$ に等しい, 即ち, $A = [I_V]_\alpha^\beta$ が成り立つ.

定義 1.5.3. このような行列 $[I_V]_\alpha^\beta$, 即ち, 線形写像 $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ の行列 $[I_V]_\alpha^\beta$ をその基底 α からその基底 β への基底変換行列という.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の 2 つの基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられこれらをそれぞれ α, β とおく. このとき, 次式のようにそれらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β, 恒等写像 $I_V : V \rightarrow V$ を用いて考えると,

$$
\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "\varphi_\beta^{-1}\circ I_V\circ\varphi_\alpha"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"] & & K^n \\
\mathbf{k} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "\varphi_\beta^{-1}\circ I_V\circ\varphi_\alpha"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"'] & & \mathbf{l} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & \\
 & V \arrow[rr, "I_V"] & & V \arrow[uu, "\varphi_\beta^{-1}"'] \\
\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "I_V"] & & \mathbf{v} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_\beta^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha = \varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha$ が成り立つので, 定義より明らかにその合成写像 $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ に対応する $A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる行列 A はそれらの基底たち α, β に関するその恒等写像 $I_V : V \rightarrow V$ の表現行列 $[I_V]_\alpha^\beta$ に等しい. □

定理 1.5.10. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の 2 つの基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられこれらをそれぞれ α, β とおく. このとき, その基底 α からその基底 β への基底変換行列 $[I_V]_\alpha^\beta$ は $[I_V]_\alpha^\beta \in \mathrm{GL}(n,K)$ を満たし $[I_V]_\beta^\alpha = {[I_V]_\alpha^\beta}^{-1}$ が成り立つ.

このことはそれらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β を用いて次式のようにも書かれる.

$$\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, shift left, "\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha"] \arrow[ddd, shift left, "\varphi_\alpha"] & & K^n \arrow[ll, shift left, "\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\beta"] \arrow[ddd, shift left, "\varphi_\beta"] \\
\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha"] \arrow[d, equal] & & \left[I_V\right]_\alpha^\beta \mathbf{v} \arrow[ur, phantom, "\in"] \arrow[d, equal] & \\
\left[I_V\right]_\beta^\alpha \mathbf{w} & & \mathbf{w} \arrow[ll, mapsto, "\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\beta"] & \\
 & V \arrow[uuu, shift left, "\varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[rr, "I_V"] & & V \arrow[uuu, shift left, "\varphi_\beta^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の 2 つの基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i\in\Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i\in\Lambda_n}$ が与えられこれらをそれぞれ α, β とおく. このとき, それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β を用いてその基底 α からその基底 β への基底変換行列 $[I_V]_\alpha^\beta$ は定理 1.5.9 よりその合成写像 $\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha$ の対応する行列でもあり, それらの 2 つの写像たち φ_α, φ_β は線形同型写像であったので, その合成写像 $\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha$ も線形同型写像となる. このとき, 定理 1.4.14 よりその合成写像 $\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha$ に対応する行列でもあるその基底 α からその基底 β への基底変換行列 $[I_V]_\alpha^\beta$ は正則行列で $[I_V]_\alpha^\beta \in \mathrm{GL}(n,K)$ を満たす. したがって, 逆行列 ${[I_V]_\alpha^\beta}^{-1}$ が存在しこれが対応する行列となるその写像はその写像 $\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha$ の逆写像となる. このとき, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
I_{K^n} &= \varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha \\
&= \varphi_\alpha^{-1}\circ\left(\varphi_\beta\circ\varphi_\beta^{-1}\right)\circ\varphi_\alpha \\
&= \left(\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\beta\right)\circ\left(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha\right) \\
I_{K^n} &= \varphi_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1} \\
&= \varphi_\alpha\circ\left(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\beta\right)\circ\varphi_\alpha^{-1} \\
&= \left(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}\right)\circ\left(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\right)
\end{aligned}$$

その合成写像 $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ は対応する行列が ${[I_V]_\alpha^\beta}^{-1}$ となるようなその合成写像 $\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha$ の逆写像となりこれに対応する行列が上記の定理より $[I_V]_\beta^\alpha$ となるので, $[I_V]_\beta^\alpha = {[I_V]_\alpha^\beta}^{-1}$ が成り立つ. □

以上の議論により体 K 上の n 次元 vector 空間 V の 2 つの基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i\in\Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i\in\Lambda_n}$ が与えられこれらをそれぞれ α, β とおく. $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次式のように書かれるとする.

$$\mathbf{v} = \sum_{i\in\Lambda_n} k_i\mathbf{v}_i = \sum_{i\in\Lambda_n} l_i\mathbf{w}_i$$

その基底 α からその基底 β への基底変換行列 $[I_V]_\alpha^\beta$ が $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\Lambda_n\times\Lambda_n}$ と成分表示されるとき, $\forall j\in\Lambda_n$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i\in\Lambda_n} a_{ij}\mathbf{w}_i$$

逆に, $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\Lambda_n\times\Lambda_n} \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なるある行列 A が上の式を満たすなら, その行列 A はその基底 α

からその基底 β への基底変換行列となる．さらにいえば，次式が成り立つ．

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

このことは $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ として次式のようにも書かれる．

$$\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"] & & K^n \\
\mathbf{k} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[rr, mapsto, "\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & & \mathbf{l} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] & \\
 & V & & V \arrow[uu, "\varphi_\beta^{-1}"'] \\
\sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[rr, equal] & & \sum_{i \in \Lambda_n} l_i \mathbf{w}_i \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_\beta^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

定理 1.5.11. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V のある基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられこれを α とおく．このとき，$A \in \mathrm{GL}(n, K)$ なる行列 A がその基底 α からある基底 β への基底変換行列となるようなその基底 β が存在する．

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V のある基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられこれを α とおく．このとき，$A \in \mathrm{GL}(n, K)$ なる行列 A がある写像 $L_A : K^n \to K^n$ に対応する行列となるようなその写像 L_A の逆写像 L_A^{-1} は定理より明らかに線形同型写像でその基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いて得られる合成写像 $\varphi_\alpha \circ L_A^{-1} : K^n \to V$ は線形同型写像となり，次式のように考えれば，

$$\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, shift left, "L_A"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"] & & K^n \arrow[ll, shift left, "L_A^{-1}"] \arrow[dd, shift left, "\varphi_\beta"] \\
\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[rr, mapsto, "L_A = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha"] & & A\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] & \\
 & V \arrow[rr, "I_V"] & & V \arrow[uu, shift left, "\varphi_\beta^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

定理 1.5.2 より，その vector 空間 K^n の標準直交基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ を用いた vectors の組 $\left\langle \varphi_\alpha \circ L_A^{-1} (\mathbf{e}_i) \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ は

その vector 空間 V の基底となり, これを β とおくと, $\varphi_\alpha \circ L_A^{-1} = \varphi_\beta$ が成り立つ. このとき, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
L_A &= \left(L_A^{-1}\right)^{-1} \\
&= \left(I_{K^n} \circ L_A^{-1}\right)^{-1} \\
&= \left(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ L_A^{-1}\right)^{-1} \\
&= \left(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta\right)^{-1} \\
&= \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha
\end{aligned}$$

定義より明らかにその行列 A がその基底 α からある基底 β への基底変換行列となる. □

定理 1.5.12. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 2 つをそれぞれ α_1, α_2, β_1, β_2 とするとき, それらの基底たちそれぞれ α_1, β_1, α_2, β_2 に関する線形写像 $f : V \to W$ の表現行列たちそれぞれ $[f]_{\alpha_1}^{\beta_1}$, $[f]_{\alpha_2}^{\beta_2}$ とそれらの vector 空間 V, W の基底変換行列たち $[I_V]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$, $[I_W]_{\beta_1}^{\beta_2}$ について, $[I_W]_{\beta_1}^{\beta_2}[f]_{\alpha_1}^{\beta_1} = [f]_{\alpha_2}^{\beta_2}[I_V]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 2 つをそれぞれ α_1, α_2, β_1, β_2 とするとき, それらの基底たちそれぞれ α_1, β_1, α_2, β_2 に関する線形写像 $f : V \to W$ の表現行列たちそれぞれ $[f]_{\alpha_1}^{\beta_1}$, $[f]_{\alpha_2}^{\beta_2}$ とそれらの vector 空間 V, W の基底変換行列たち $[I_V]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$, $[I_W]_{\beta_1}^{\beta_2}$ について, それらの基底たち α_1, β_1, α_2, β_2 に関する基底変換における線形同型写像たち φ_{α_1}, φ_{β_1}, φ_{α_2}, φ_{β_2} を用いて次のようになり,

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{\beta_2}^{-1} \circ \varphi_{\beta_1}\right) \circ \left(\varphi_{\beta_1}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\alpha_1}\right) &= \varphi_{\beta_2}^{-1} \circ \left(\varphi_{\beta_1} \circ \varphi_{\beta_1}^{-1}\right) \circ f \circ \varphi_{\alpha_1} \\
&= \varphi_{\beta_2}^{-1} \circ I_W \circ f \circ I_V \circ \varphi_{\alpha_1} \\
&= \varphi_{\beta_2}^{-1} \circ f \circ \left(\varphi_{\alpha_2} \circ \varphi_{\alpha_2}^{-1}\right) \circ \varphi_{\alpha_1} \\
&= \left(\varphi_{\beta_2}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\alpha_2}\right) \circ \left(\varphi_{\alpha_2}^{-1} \circ \varphi_{\alpha_1}\right)
\end{aligned}$$

次式より明らかに,

$$\begin{tikzcd}
& K^m \arrow[rr, "\varphi_{\beta_1}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\alpha_1}"] \arrow[dl, "\varphi_{\alpha_2}^{-1}\circ\varphi_{\alpha_1}"'] \arrow[dd, "\varphi_{\alpha_1}"] & & K^n \arrow[dl, "\varphi_{\beta_2}^{-1}\circ\varphi_{\beta_1}"] \arrow[dd, "\varphi_{\beta_1}"] \\
K^m \arrow[rr, "\varphi_{\beta_2}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\alpha_2}"] \arrow[dd, "\varphi_{\alpha_2}"] & & K^n \arrow[dd, "\varphi_{\beta_2}"] & \\
& V \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "I_V"] & & W \arrow[dl, "I_W"] \\
V \arrow[rr, "f"] & & W &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{k} \arrow[r, equal] \arrow[dl, mapsto, "\varphi_{\alpha_2}^{-1}\circ\varphi_{\alpha_1}"'] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\alpha_1}"] & \mathbf{k} \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\beta_1}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\alpha_1}"] & & \left[f\right]_{\alpha_1}^{\beta_1}\mathbf{k} \arrow[dl, mapsto, "\varphi_{\beta_2}^{-1}\circ\varphi_{\beta_1}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\beta_1}"] \\
\left[I_V\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}\mathbf{k} \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\beta_2}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\alpha_2}"'] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\alpha_2}"] & & \left[f\right]_{\alpha_2}^{\beta_2}\left[I_V\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}\mathbf{k} \arrow[r, equal] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\beta_2}"] & \left[I_W\right]_{\beta_1}^{\beta_2}\left[f\right]_{\alpha_1}^{\beta_1}\mathbf{k} & \\
 & \mathbf{v} \arrow[r, equal] \arrow[dl, equal] & \mathbf{v} \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f\left(\mathbf{v}\right) \arrow[dl, equal] \\
\mathbf{v} \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f\left(\mathbf{v}\right) \arrow[r, equal] & f\left(\mathbf{v}\right) &
\end{tikzcd}$$

その写像 $\varphi_{\beta_2}^{-1}\circ\varphi_{\beta_1}:K^n\rightarrow K^n$ に対応する行列がその基底 β_1 からその基底 β_2 へのその基底変換行列 $\left[I_W\right]_{\beta_1}^{\beta_2}$ となるかつ, 定義より明らかにその写像 $\varphi_{\beta_1}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\alpha_1}:K^m\rightarrow K^n$ に対応する行列がそれらの基底たちそれぞれ α_1, β_1 に関する線形写像 $f:V\rightarrow W$ の表現行列 $[f]_{\alpha_1}^{\beta_1}$ となるので, その合成写像 $\left(\varphi_{\beta_2}^{-1}\circ\varphi_{\beta_1}\right)\circ\left(\varphi_{\beta_1}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\alpha_1}\right)$ に対応する行列は $\left[I_W\right]_{\beta_1}^{\beta_2}[f]_{\alpha_1}^{\beta_1}$ となる. 同様にして, その合成写像 $\left(\varphi_{\beta_2}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\alpha_2}\right)\circ\left(\varphi_{\alpha_2}^{-1}\circ\varphi_{\alpha_1}\right)$ に対応する行列は $[f]_{\alpha_2}^{\beta_2}\left[I_V\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ となるので, $\left[I_W\right]_{\beta_1}^{\beta_2}[f]_{\alpha_1}^{\beta_1}=[f]_{\alpha_2}^{\beta_2}\left[I_V\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ が成り立つ. □

定理 1.5.13. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ α, β とするとき, それらの基底たち α,β に関する線形写像 $f:V\rightarrow W$ の表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ が $\mathrm{rank}f=r$ として次式のように書かれるようなそれらの基底たち α, β が存在する.

$$[f]_\alpha^\beta=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

証明. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W が与えられたとする. このとき, 次元公式より線形写像 $f:V\rightarrow W$ の核 $\ker f$ は $\mathrm{rank}f=r$ として $m-r$ 次元でありこれの基底の 1 つを $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_m\setminus\varLambda_r}$ とおきこれを拡張してその vector 空間 V の基底を $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_m}$ としこれを α とおく. このとき, vector の組 $\left\langle f\left(\mathbf{v}_i\right)\right\rangle_{i\in\varLambda_r}$ は定理 1.2.13 よりその部分 vector 空間 $V(f)$ の基底となるのであった. そこで, これを, $\forall i\in\varLambda_r$ に対し, $\mathbf{w}_i=f\left(\mathbf{v}_i\right)$ となるように拡張したその vector 空間 W の基底 $\left\langle\mathbf{w}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ を β とおく. このとき, $\forall j\in\varLambda_m$ に対し, $j\in\varLambda_r$ のとき, 次のようになるし,

$$f\left(\mathbf{v}_j\right)=\mathbf{w}_j=\sum_{i\in\varLambda_n\setminus\{j\}}0\mathbf{w}_i+1\mathbf{w}_j=\sum_{i\in\varLambda_n}\delta_{ij}\mathbf{w}_i$$

$j\in\varLambda_m\setminus\varLambda_r$ のとき, 核の定義より次のようになる.

$$f\left(\mathbf{v}_j\right)=\mathbf{0}=\sum_{i\in\varLambda_n}0\mathbf{w}_i$$

定理 1.5.4 よりそれらの基底たち α,β に関する線形写像 $f:V\rightarrow W$ の表現行列 $[f]_{\alpha}^{\beta}$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}
[f]_{\alpha}^{\beta} &= \begin{pmatrix}
\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\delta_{r1} & \delta_{r2} & \cdots & \delta_{rr} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\delta_{r+1,1} & \delta_{r+1,2} & \cdots & \delta_{r+1,r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\delta_{r+2,1} & \delta_{r+2,2} & \cdots & \delta_{r+2,r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nr} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

1.5.4 線形写像の行列表現

定理 1.5.14. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ $\left\langle \mathbf{v}_j \right\rangle_{j\in\Lambda_m}$, $\left\langle \mathbf{w}_i \right\rangle_{i\in\Lambda_n}$ であり, これらをそれぞれ α, β とすると, それらの基底たち α,β に関する線形写像 $f:V\rightarrow W$ の $[f]_{\alpha}^{\beta}\in \mathrm{M}(n,m,K)$ なる表現行列 $[f]_{\alpha}^{\beta}$ を用いて次式のように定義される写像 $F_{\alpha\rightarrow\beta}$ は vector 空間 $L(V,W)$ から vector 空間 $\mathrm{M}(n,m,K)$ への線形同型写像である. なお, $L(V,W)$ はその vector 空間 V からその vector 空間 W への線形写像全体の集合である.

$$F_{\alpha\rightarrow\beta}:L(V,W)\rightarrow \mathrm{M}(n,m,K);f\mapsto [f]_{\alpha}^{\beta}$$

証明. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つがそれぞれ $\left\langle \mathbf{v}_j \right\rangle_{j\in\Lambda_m}$, $\left\langle \mathbf{w}_i \right\rangle_{i\in\Lambda_n}$ であり, これらをそれぞれ α, β とする. それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f:V\rightarrow W$ の $[f]_{\alpha}^{\beta}\in \mathrm{M}(n,m,K)$ なる表現行列 $[f]_{\alpha}^{\beta}$ を用いて次式のように定義される写像 $F_{\alpha\rightarrow\beta}$ を考えよう.

$$F_{\alpha\rightarrow\beta}:L(V,W)\rightarrow \mathrm{M}(n,m,K);f\mapsto [f]_{\alpha}^{\beta}$$

このとき, 2 つの集合たち $L(V,W)$, $\mathrm{M}(n,m,K)$ は vector 空間で, 定理 1.5.6 より $\forall f,g\in L(V,W)\forall k,l\in K$ に対し, $kf+lg\in L(V,W)$ が成り立ち, それらの基底たち α, β に関する線形写像たち f, g, $kf+lg$ の表現行列たち $[f]_{\alpha}^{\beta}$, $[g]_{\alpha}^{\beta}$, $[kf+lg]_{\alpha}^{\beta}$ が与えられたとき, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
F_{\alpha\rightarrow\beta}\left(kf+lg\right) &= [kf+lg]_{\alpha}^{\beta} \\
&= k[f]_{\alpha}^{\beta}+l[g]_{\alpha}^{\beta} \\
&= kF_{\alpha\rightarrow\beta}(f)+lF_{\alpha\rightarrow\beta}(g)
\end{aligned}$$

その写像 $F_{\alpha \to \beta}$ は線形的である.

また, 定理 1.5.4 より $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_n \times \varLambda_m} \in \mathrm{M}(n,m,K)$ なるある行列 A が, $\forall j \in \varLambda_m$ に対し, 次式を満たすようにすれば,

$$f : V \to W; \mathbf{v}_j \mapsto \sum_{i \in \varLambda_n} a_{ij} \mathbf{w}_i$$

その行列 A はそれらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の表現行列となるので, 逆写像が存在することから, その写像 $F_{\alpha \to \beta}$ は全単射となる.

以上より, その写像 $F_{\alpha \to \beta}$ は線形的であるかつ, 全単射であるので, 線形同型写像である. □

定理 1.5.15. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の基底の 1 つを α とし, その基底 α に関する線形写像 $f : V \to V$ の $[f]_\alpha^\alpha \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる表現行列 $[f]_\alpha^\alpha$ を用いて写像 $F_{\alpha \to \alpha}$ が次式のように定義されれば,

$$F_{\alpha \to \alpha} : L(V,W) \to \mathrm{M}(n,n,K); f \mapsto [f]_\alpha^\alpha$$

恒等写像 $I_V : V \to V; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$ について, n 次単位行列 I_n を用いて $[I_V]_\alpha^\alpha = F_{\alpha \to \alpha}(I_V) = I_n$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の基底の 1 つを α とし, その基底 α に関する線形写像 $f : V \to V$ の $[f]_\alpha^\alpha \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる表現行列 $[f]_\alpha^\alpha$ を用いて写像 $F_{\alpha \to \alpha}$ が次式のように定義されれば,

$$F_{\alpha \to \alpha} : L(V,W) \to \mathrm{M}(n,n,K); f \mapsto [f]_\alpha^\alpha$$

恒等写像 $I_V : V \to V; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$ について, 定理 1.5.8 より次のようになり,

$$[I_V]_\alpha^\alpha = F_{\alpha \to \alpha}(I_V) = F_{\alpha \to \alpha}(I_V \circ I_V) = [I_V \circ I_V]_\alpha^\alpha = [I_V]_\alpha^\alpha [I_V]_\alpha^\alpha$$

ここで, 定理 1.5.10 より $[I_V]_\alpha^\alpha = {[I_V]_\alpha^\alpha}^{-1}$ が成り立つので, n 次単位行列 I_n を用いてしたがって, 次のようになる.

$$[I_V]_\alpha^\alpha = F_{\alpha \to \alpha}(I_V) = [I_V]_\alpha^\alpha [I_V]_\alpha^\alpha = [I_V]_\alpha^\alpha {[I_V]_\alpha^\alpha}^{-1} = I_n$$

□

定理 1.5.16. 体 K 上の n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つをそれぞれ α, β とし, それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の $[f]_\alpha^\beta \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ を用いて写像 $F_{\alpha \to \beta}$ が次式のように定義されれば,

$$F_{\alpha \to \beta} : L(V,W) \to \mathrm{M}(n,n,K); f \mapsto [f]_\alpha^\beta$$

$\forall f \in L(V,W)$ に対し, 次のことは同値である.

- その写像 f は線形同型写像である.
- その写像 f は全射 $f : V \twoheadrightarrow W$ である.
- その写像 f は単射 $f : V \rightarrowtail W$ である.
- $n = \mathrm{rank} f = \dim V(f)$ が成り立つ.
- $\mathrm{nullity} f = \dim \ker f = 0$ が成り立つ.
- それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ は正則行列である, 即ち, $[f]_\alpha^\beta \in \mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.

- その行列 $F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)$ は正則行列である, 即ち, $F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)\in\mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.

このとき, 次式が成り立つ.

$$f^{-1}=F_{\beta\rightarrow\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)^{-1}\right):W\rightarrow V,$$
$$\left[f^{-1}\right]_{\beta}^{\alpha}=[f]_{\alpha}^{\beta\,-1},\quad F_{\beta\rightarrow\alpha}\left(f^{-1}\right)=F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)^{-1}$$

最後の 2 本の式は実は先に $F_{\alpha\rightarrow\beta}\left(f^{-1}\right)=F_{\alpha\rightarrow\alpha}(f)^{-1}$ が成り立つことを示せば, 次のようになることから,

$$f^{-1}=F_{\beta\rightarrow\alpha}^{-1}\circ F_{\beta\rightarrow\alpha}\left(f^{-1}\right)=F_{\beta\rightarrow\alpha}^{-1}\left(F_{\beta\rightarrow\alpha}\left(f^{-1}\right)\right)=F_{\beta\rightarrow\alpha}^{-1}\left(F_{\beta\rightarrow\alpha}(f)^{-1}\right)$$

明らかであるが, ここでは別の証明も与えておこう.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つをそれぞれ α, β とし, それらの基底たち α,β に関する線形写像 $f:V\rightarrow W$ の $[f]_{\alpha}^{\beta}\in\mathrm{M}(n,n,K)$ なる表現行列 $[f]_{\alpha}^{\beta}$ を用いて写像 $F_{\alpha\rightarrow\beta}$ が次式のように定義されよう.

$$F_{\alpha\rightarrow\beta}:L(V,W)\rightarrow\mathrm{M}(n,n,K);f\mapsto[f]_{\alpha}^{\beta}$$

$\forall f\in L(V,W)$ に対し, 定理 1.2.15 より次のことは同値である.

- その写像 f は線形同型写像である.
- その写像 f は全射 $f:V\twoheadrightarrow W$ である.
- その写像 f は単射 $f:V\rightarrowtail W$ である.
- $n=\mathrm{rank}f=\dim V(f)$ が成り立つ.
- $\mathrm{nullity}f=\dim\ker f=0$ が成り立つ.

さらに, 定理 1.5.8 より $\mathrm{rank}[f]_{\alpha}^{\beta}=\mathrm{rank}f$ が成り立つので, 定理 1.4.14 より次のことは同値である.

- $n=\mathrm{rank}f=\dim V(f)$ が成り立つ.
- それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f:V\rightarrow W$ の表現行列 $[f]_{\alpha}^{\beta}$ は正則行列である, 即ち, $[f]_{\alpha}^{\beta}\in\mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.

$F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)=[f]_{\alpha}^{\beta}$ なので明らかに次のことは同値である.

- それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f:V\rightarrow W$ の表現行列 $[f]_{\alpha}^{\beta}$ は正則行列である, 即ち, $[f]_{\alpha}^{\beta}\in\mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.
- その行列 $F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)$ は正則行列である, 即ち, $F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)\in\mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.

このとき, その行列 $F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)$ が正則行列であることから, これの逆行列 $F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)^{-1}$ を用いて, 定理 1.5.15 より次のようになるので,

$$\begin{aligned}I_V&=F_{\beta\rightarrow\beta}^{-1}\left(I_n\right)\\&=F_{\beta\rightarrow\beta}^{-1}\left(F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)^{-1}\right)\\&=F_{\beta\rightarrow\beta}^{-1}\left(F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)F_{\beta\rightarrow\alpha}\circ F_{\beta\rightarrow\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)^{-1}\right)\right)\\&=F_{\beta\rightarrow\beta}^{-1}\left(F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)F_{\beta\rightarrow\alpha}\left(F_{\beta\rightarrow\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\rightarrow\beta}(f)^{-1}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F_{\beta\to\beta}^{-1}\left([f]_\alpha^\beta\left[F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)\right]_\beta^\alpha\right)\\
&= F_{\beta\to\beta}^{-1}\left(\left[F_{\alpha\to\beta}^{-1}\left(f\circ F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)\right)\right]_\beta^\beta\right)\\
&= F_{\beta\to\beta}^{-1}\left(F_{\beta\to\beta}\left(f\circ F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)\right)\right)\\
&= F_{\beta\to\beta}^{-1}\circ F_{\beta\to\beta}\left(f\circ F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)\right)\\
&= f\circ F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)\\
I_V &= F_{\alpha\to\alpha}^{-1}\left(I_n\right)\\
&= F_{\alpha\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}F_{\alpha\to\beta}(f)\right)\\
&= F_{\alpha\to\alpha}^{-1}\left(F_{\beta\to\alpha}\circ F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)F_{\alpha\to\beta}(f)\right)\\
&= F_{\alpha\to\alpha}^{-1}\left(F_{\beta\to\alpha}\left(F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)\right)F_{\alpha\to\beta}(f)\right)\\
&= F_{\alpha\to\alpha}^{-1}\left(\left[F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)\right]_\beta^\alpha[f]_\alpha^\beta\right)\\
&= F_{\alpha\to\alpha}^{-1}\left(\left[F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)\circ f\right]_\alpha^\alpha\right)\\
&= F_{\alpha\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\alpha}\left(F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)\circ f\right)\right)\\
&= F_{\alpha\to\alpha}^{-1}\circ F_{\alpha\to\alpha}\left(F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)\circ f\right)\\
&= F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)\circ f
\end{aligned}
$$

その写像 f の逆写像 f^{-1} が存在し $f^{-1}=F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right)$ と与えられる.

また, これの逆写像 f^{-1} が存在し $I_V=f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}$ が成り立つので, 定理 1.5.15 より次のようになる.

$$
\begin{aligned}
I_n &= F_{\alpha\to\alpha}\left(I_V\right)\\
&= F_{\alpha\to\alpha}\left(f^{-1}\circ f\right)\\
&= \left[f^{-1}\circ f\right]_\alpha^\alpha\\
&= \left[f^{-1}\right]_\beta^\alpha[f]_\alpha^\beta\\
&= F_{\beta\to\alpha}\left(f^{-1}\right)F_{\alpha\to\beta}(f)\\
I_n &= F_{\beta\to\beta}\left(I_V\right)\\
&= F_{\beta\to\beta}\left(f\circ f^{-1}\right)\\
&= \left[f\circ f^{-1}\right]_\beta^\beta\\
&= [f]_\alpha^\beta\left[f^{-1}\right]_\beta^\alpha\\
&= F_{\alpha\to\beta}(f)F_{\beta\to\alpha}\left(f^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

逆行列の定義より $\left[f^{-1}\right]_\beta^\alpha={[f]_\alpha^\beta}^{-1}$, $F_{\beta\to\alpha}\left(f^{-1}\right)=F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}$ が成り立つ. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p196-215 ISBN978-4-00-029872-8

1.6 行列の対等

1.6.1 行列の対等

定義 1.6.1. 可換環 R 上の $A, B \in \mathrm{M}(m,n,R)$ なる行列たち A, B が与えられたとき, $PA = BQ$ が成り立つような行列たち P, Q がそれぞれ集合 $\mathrm{GL}(m,R)$, $\mathrm{GL}(n,R)$ に存在するとき, その行列 B はその行列 A に対等であるといい $A \sim B$ などと書く.

定理 1.6.1. この関係 $\sim$ は同値関係となる.

証明. 可換環 R が与えられたとき, $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, m 次単位行列 I_m, n 次単位行列 I_n を用いれば $I_m A = A I_n$ が成り立つので, $A \sim A$ が成り立つ.

$\forall A, B \in \mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, $A \sim B$ が成り立つなら, $PA = BQ$ が成り立つような行列たち P, Q がそれぞれ集合 $\mathrm{GL}(m,R)$, $\mathrm{GL}(n,R)$ に存在することになり, したがって, 次のようになるので,

$$\begin{aligned} AQ^{-1} &= P^{-1}PAQ^{-1} \\ &= P^{-1}BQQ^{-1} \\ &= P^{-1}B \end{aligned}$$

$B \sim A$ が成り立つ.

$\forall A, B, C \in \mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, $A \sim B$ かつ $B \sim C$ が成り立つなら, $PA = BQ$ かつ $RB = CS$ が成り立つような行列たち P, Q, R, S がそれぞれ集合 $\mathrm{GL}(m,R)$, $\mathrm{GL}(n,R)$, $\mathrm{GL}(m,R)$, $\mathrm{GL}(n,R)$ に存在することになり, したがって, $RPA = RBQ = CSQ$ が成り立つので, $RP \in \mathrm{GL}(m,R)$ かつ $SQ \in \mathrm{GL}(n,R)$ が成り立つことにより $A \sim C$ が成り立つ.

以上より, その関係 $\sim$ は同値関係となる. □

定義 1.6.2. 可換環 R 上の $A, B \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列たち A, B が与えられたとき, $PA = BP$ が成り立つような行列 P が集合 $\mathrm{GL}(n,R)$ に存在するとき, その行列 B はその行列 A に相似であるといい $A \approx B$ などと書く.

もちろん, その行列 B はその行列 A に相似であるなら, その行列 B はその行列 A に対等である.

定理 1.6.2. この関係 $\approx$ は同値関係となる.

証明. 可換環 R が与えられたとき, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, n 次単位行列 I_n を用いれば, $I_n A = A I_n$ が成り立つので, $A \approx A$ が成り立つ.

$\forall A, B \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, $A \approx B$ が成り立つなら, $PA = BP$ が成り立つような行列 P が集合 $\mathrm{GL}(n,R)$ に存在することになり, したがって, 次のようになるので,

$$\begin{aligned} AP^{-1} &= P^{-1}PAP^{-1} \\ &= P^{-1}BPP^{-1} \\ &= P^{-1}B \end{aligned}$$

$B \approx A$ が成り立つ.

$\forall A, B, C_{nn} \in \mathrm{M}(n, n, R)$ に対し, $A \approx B$ かつ $B \approx C_{nn}$ が成り立つなら, $PA = BP$ かつ $QB = CQ$ が成り立つような行列たち P, Q が集合 $\mathrm{GL}(n, R)$ に存在することになり, したがって, $QPA = QBP = C_{nn}QP$ が成り立つので, $QP \in \mathrm{GL}(n, R)$ が成り立つことにより $A \approx C_{nn}$ が成り立つ.

以上より, その関係 $\approx$ は同値関係となる. □

1.6.2 行列の対等と表現行列

定理 1.6.3. 体 K 上の有限次元の vector 空間たち V, W の基底の 2 つをそれぞれ α_1, α_2, β_1, β_2 とするとき, それらの基底たちそれぞれ α_1, β_1, α_2, β_2 に関する線形写像 $f : V \rightarrow W$ の表現行列たち $[f]_{\alpha_1}^{\beta_1}$, $[f]_{\alpha_2}^{\beta_2}$ は対等である.

証明. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 2 つをそれぞれ α_1, α_2, β_1, β_2 とするとき, それらの基底たちそれぞれ α_1, β_1, α_2, β_2 に関する線形写像 $f : V \rightarrow W$ の表現行列たちそれぞれ $[f]_{\alpha_1}^{\beta_1}$, $[f]_{\alpha_2}^{\beta_2}$ とそれらの vector 空間 V, W の基底変換行列たち $[I_V]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$, $[I_W]_{\beta_1}^{\beta_2}$ について, 定理 1.5.12 より $[I_W]_{\beta_1}^{\beta_2}[f]_{\alpha_1}^{\beta_1} = [f]_{\alpha_2}^{\beta_2}[I_V]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ が成り立つ. 定理 1.5.10 よりこれらの基底変換行列たち $[I_V]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$, $[I_W]_{\beta_1}^{\beta_2}$ は $[I_V]_{\alpha_1}^{\alpha_2}, [I_W]_{\beta_1}^{\beta_2} \in \mathrm{GL}(n, K)$ を満たすので, これらの表現行列たち $[f]_{\alpha_1}^{\beta_1}$, $[f]_{\alpha_2}^{\beta_2}$ は対等である. □

定理 1.6.4. 体 K 上の有限次元の vector 空間 V の 2 つの基底を α, β とするとき, それらの基底たちそれぞれ α, α, β, β に関する線形写像 $f : V \rightarrow W$ の表現行列たち $[f]_{\alpha}^{\alpha}$, $[f]_{\beta}^{\beta}$ は相似である.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の 2 つの基底を α, β とするとき, それらの基底たちそれぞれ α, α, β, β に関する線形写像 $f : V \rightarrow W$ の表現行列たち $[f]_{\alpha}^{\alpha}$, $[f]_{\beta}^{\beta}$ と基底変換行列 $[I_V]_{\alpha}^{\beta}$ について, 定理 1.5.12 より $[I_V]_{\alpha}^{\beta}[f]_{\alpha}^{\alpha} = [f]_{\beta}^{\beta}[I_V]_{\alpha}^{\beta}$ が成り立つ. 定理 1.5.10 よりこれらの基底変換行列 $[I_V]_{\alpha}^{\beta}$ は $[I_V]_{\alpha}^{\beta} \in \mathrm{GL}(n, K)$ を満たすので, これらの表現行列たち $[f]_{\alpha}^{\alpha}$, $[f]_{\beta}^{\beta}$ は相似である. □

定理 1.6.5. 体 K 上の有限次元の vector 空間たち V, W の基底の 1 つをそれぞれ α, β とするとき, $\mathrm{rank} f = r$ としてそれらの基底たちそれぞれ α, β に関する線形写像 $f : V \rightarrow W$ の表現行列 $[f]_{\alpha}^{\beta}$ は行列 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ と対等である.

証明. 体 K 上の m 次元, n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つをそれぞれ α, β とするとき, $\mathrm{rank} f = r$ として定理 1.5.13 よりある vector 空間たち V, W の基底たち α', β' が存在して, それらの基底たちそれぞれ α, β に関する線形写像 $f : V \rightarrow W$ の表現行列 $[f]_{\alpha'}^{\beta'}$ が次式のように書かれることができる.

$$[f]_{\alpha'}^{\beta'} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理 1.6.5 よりこれらの表現行列たち $[f]_{\alpha}^{\beta}$, $[f]_{\alpha'}^{\beta'}$ は対等であるので, よって, 表現行列 $[f]_{\alpha}^{\beta}$ は行列 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ と対等である. □

1.6.3　行列の標準形

定理 1.6.6 (行列の標準形)**.** 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, $\mathrm{rank}A = r$ としてその行列 A は行列 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ と対等である.

定義 1.6.3. 体 K 上の $A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ なる行列 A が与えられたとき, $\mathrm{rank}A = r$ としてその行列 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ をその行列 A の標準形という.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, $\mathrm{rank}A = r$ として定理 1.5.13 より線形写像 $L_A : K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が考えられれば, 定理 1.4.12 より $\mathrm{rank}L_A = \mathrm{rank}A$ で, 定理 1.5.13 よりある vector 空間たち K^n, K^m の基底たち α, β が存在して, それらの基底たち α, β に関する線形写像 $L_A : K^n \to K^m$ の表現行列 $[L_A]_\alpha^\beta$ が次式のように書かれることができる.

$$[L_A]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

このとき, これらの vector 空間たち K^n, K^m の標準直交基底たち δ, ε を用いれば, 定理 1.4.7 と定理 1.5.4 より $[L_A]_\delta^\varepsilon = A$ が成り立つので, 定理 1.6.3 よりその行列 A は行列 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ と対等である. □

定理 1.6.7. $\forall A, B \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, これらの行列たち A, B が対等であるならそのときに限り, これらの行列たち A, B の階数が等しい, 即ち, $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$ が成り立つ.

証明. $\forall A, B \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, これらの行列たち A, B が対等であるなら, $\exists P \in \mathrm{GL}(m,K) \exists Q \in \mathrm{GL}(n,K)$ に対し, $PA = BQ$ が成り立つので, 定理 1.4.15 より次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}A &= \mathrm{rank}P^{-1}PA \\ &= \mathrm{rank}P^{-1}BQ \\ &\leq \mathrm{rank}B \\ &= \mathrm{rank}BQQ^{-1} \\ &= \mathrm{rank}PAQ^{-1} \\ &\leq \mathrm{rank}A \end{aligned}$$

以上の議論により, $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$ が成り立つ.

逆に, $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$ が成り立つなら, $r = \mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$ として定理 1.6.6 よりそれらの行列たち A, B は行列 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ と対等であるので, それらの行列たち A, B が対等である. □

定理 1.6.8. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, vector 空間 K^n の 1 つの基底 $\langle \mathbf{p}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとしその基底を α とおく. このとき, 線形写像 $L_A : K^n \to K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ のその基底 α における表現行列 $[L_A]_\alpha^\alpha$ は第 j 列が $\mathbf{p}_j$ なる行列 P を用いて $P [L_A]_\alpha^\alpha = AP$ を満たす.

ちなみに, $P \in \mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つことに注意されたい.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, vector 空間 K^n の 1 つの基底 $\langle \mathbf{p}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとしその

基底を α とおき, さらに, その vector 空間 K^n の標準直交基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ を ε とおく. このとき, 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ のそれらの基底たち α, ε に関する表現行列をそれぞれ $[L_A]_\alpha^\alpha$, $[L_A]_\varepsilon^\varepsilon$ としその基底 α からその基底 ε への基底変換行列を $[I_{K^n}]_\alpha^\varepsilon$ とおくと, 定理 1.5.12 より次式が成り立つ.

$$[I_{K^n}]_\alpha^\varepsilon [L_A]_\alpha^\alpha = [L_A]_\varepsilon^\varepsilon [I_{K^n}]_\alpha^\varepsilon$$

ここで, 定理 1.4.7 と定理 1.5.4 より $[L_A]_\varepsilon^\varepsilon = A$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$[I_{K^n}]_\alpha^\varepsilon [L_A]_\alpha^\alpha = A [I_{K^n}]_\alpha^\varepsilon$$

ここで, $\forall j \in \Lambda_n$ に対し, $\mathbf{p}_j = \sum_{i \in \Lambda_n} p_{ij} \mathbf{e}_i$ と成分表示されるとすると, $P = (p_{ij})_{(i,j) \in \Lambda_n^2}$ として定理 1.5.4 よりこのような行列 P はその基底 α からその基底 ε への基底変換行列 $[I_{K^n}]_\alpha^\varepsilon$ となるのであったので, $[I_{K^n}]_\alpha^\varepsilon = P$ となる. したがって, $P [L_A]_\alpha^\alpha = AP$ が得られる. □

1.6.4 行列の相似と跡

定理 1.6.9. 可換環 R 上で $\forall A, B \in \mathrm{M}(n, n, R)$ に対し, これらの行列たち A, B が相似であるなら, $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$ が成り立つ.

証明. 可換環 R 上で $\forall A, B \in \mathrm{M}(n, n, R)$ に対し, これらの行列たち A, B が相似であるなら, $PA = BP$ が成り立つような行列 P が集合 $\mathrm{GL}(n, R)$ に存在するので, 定理 1.3.7 より次のようになる.

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}P^{-1}PA = \mathrm{tr}P^{-1}BP = \mathrm{tr}B$$

□

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p203-215 ISBN978-4-00-029872-8

1.7 行列の基本変形

1.7.1 基本行列

定義 1.7.1. 可換環 R 上で $\forall i',j' \in \varLambda_n \forall k \in R$ に対し, $i' \neq j'$ が成り立つとき, 集合 $\mathrm{M}(n,n,R)$ に属する 3 つの行列たち $P_n\left(i',k\right)$, $Q_n\left(i',j',k\right)$, $R_n\left(i',j'\right)$ を次式のように定義する. このような行列たちを基本行列などという[*6].

$$P_n\left(i',k\right) = \begin{pmatrix} I_{i'-1} & & O \\ & k & \\ O & & I_{n-i'} \end{pmatrix} \ \text{if} \ \exists\frac{1}{k} \in R\left[k\frac{1}{k} = \frac{1}{k}k = 1\right]$$

$$Q_n\left(i',j',k\right) = \begin{pmatrix} I_{i'-1} & & & & O \\ & 1 & & k & \\ & & I_{j'-i'-1} & & \\ & & & 1 & \\ O & & & & I_{n-j'} \end{pmatrix}$$

$$R_n\left(i',j'\right) = \begin{pmatrix} I_{i'-1} & & & & O \\ & 0 & & 1 & \\ & & I_{j'-i'-1} & & \\ & 1 & & 0 & \\ O & & & & I_{n-j'} \end{pmatrix}$$

定理 1.7.1. 基本行列について, 次式が成り立つ.

$$P_n\left(i',k\right)^{-1} = P_n\left(i',\frac{1}{k}\right)$$
$$Q_n\left(i',j',k\right)^{-1} = Q_n\left(i',j',-k\right)$$
$$R_n\left(i',j'\right)^{-1} = R_n\left(i',j'\right)$$

これにより, 基本行列は可逆行列である.

証明. 可換環 R 上で $\forall i',j' \in \varLambda_n \forall k \in R$ に対し, $i' \neq j'$ が成り立つとき, 集合 $\mathrm{M}(n,n,R)$ に属する 3 つの基本行列たち $P_n\left(i',k\right)$, $Q_n\left(i',j',k\right)$, $R_n\left(i',j'\right)$ が与えられ, 行列 $P_n\left(i',k\right)$ について, 次のようになる.

$$\begin{aligned} P_n\left(i',k\right)P_n\left(i',\frac{1}{k}\right) &= \begin{pmatrix} I_{i'-1} & & O \\ & k & \\ O & & I_{n-i'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{i'-1} & & O \\ & \frac{1}{k} & \\ O & & I_{n-i'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{i'-1}I_{i'-1} & O & O \\ O & k\frac{1}{k} & O \\ O & O & I_{n-i'}I_{n-i'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{i'-1} & & O \\ & 1 & \\ O & & I_{n-i'} \end{pmatrix} = I_n \end{aligned}$$

[*6] block 行列や行列の成分表示では $i' < j'$ と仮定されている. 以下同様である.

同様にして, 次式が得られる.

$$P_n\left(i',\frac{1}{k}\right)P_n\left(i',k\right)=I_n$$

以上より次式が成り立ち, その行列 $P_n\left(i',k\right)$ の逆行列は行列 $P_n\left(i',\frac{1}{k}\right)$ である.

$$P_n\left(i',k\right)P_n\left(i',\frac{1}{k}\right)=P_n\left(i',\frac{1}{k}\right)P_n\left(i',k\right)=I_n$$

また, 行列 $Q_n\left(i',j',k\right)$ について, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
Q_n\left(i',j',k\right)Q_n\left(i',j',-k\right)&=\begin{pmatrix} I_{i'-1} & & & & O \\ & 1 & & k & \\ & & I_{j'-i'-1} & & \\ & & & 1 & \\ O & & & & I_{n-j'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{i'-1} & & & & O \\ & 1 & & -k & \\ & & I_{j'-i'-1} & & \\ & & & 1 & \\ O & & & & I_{n-j'} \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} I_{i'-1}I_{i'-1} & O & O & O & O \\ O & 1 & O & -k+k & O \\ O & O & I_{j'-i'-1}I_{j'-i'-1} & O & O \\ O & O & O & -0k+1 & O \\ O & O & O & O & I_{n-j'}I_{n-j'} \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} I_{i'-1} & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & I_{j'-i'-1} & & \\ & & & 1 & \\ O & & & & I_{n-j'} \end{pmatrix}=I_n
\end{aligned}$$

同様にして, 次式が得られる.

$$Q_n\left(i',j',-k\right)Q_n\left(i',j',k\right)=I_n$$

以上より次式が成り立ち, その行列 $Q_n\left(i',j'\right)$ の逆行列は行列 $Q_n\left(i',j',-k\right)$ である.

$$Q_n\left(i',j',k\right)Q_n\left(i',j',-k\right)=Q_n\left(i',j',-k\right)Q_n\left(i',j',k\right)=I_n$$

また, 行列 $R_n\left(i',j'\right)$ について, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
R_n\left(i',j'\right)R_n\left(i',j'\right)&=\begin{pmatrix} I_{i'-1} & & & & O \\ & 0 & & 1 & \\ & & I_{j'-i'-1} & & \\ & 1 & & 0 & \\ O & & & & I_{n-j'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{i'-1} & & & & O \\ & 0 & & 1 & \\ & & I_{j'-i'-1} & & \\ & 1 & & 0 & \\ O & & & & I_{n-j'} \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} I_{i'-1}I_{i'-1} & O & O & O & O \\ O & 1 & O & O & O \\ O & O & I_{j'-i'-1}I_{j'-i'-1} & O & O \\ O & O & O & 1 & O \\ O & O & O & O & I_{n-j'}I_{n-j'} \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} I_{i'-1} & & & & O \\ & 1 & & & \\ & & I_{j'-i'-1} & & \\ & & & 1 & \\ O & & & & I_{n-j'} \end{pmatrix}=I_n
\end{aligned}$$

以上より次式が成り立ち, その行列 $R_n\left(i',j'\right)$ の逆行列はその行列 $R_n\left(i',j'\right)$ 自身である.

$$R_n\left(i',j'\right)R_n\left(i',j'\right)=I_n$$

□

1.7.2 行列の基本変形

定義 1.7.2. 可換環 R 上で $\forall i',j'\in\varLambda_n\forall k\in R$ に対し, $i'\neq j'$ が成り立つとき, 次のような写像たちを考えられることができる.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{C1})\left(n,i',k\right)&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto AP_n\left(i',k\right)\ \text{if}\ \exists\frac{1}{k}\in R\left[k\frac{1}{k}=\frac{1}{k}k=1\right]\\
(\mathrm{C2})\left(n,i',j',k\right)&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto AQ_n\left(i',j',k\right)\\
(\mathrm{C3})\left(n,i',j'\right)&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto AR_n\left(i',j'\right)\\
(\mathrm{R1})\left(m,i',k\right)&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto P_m\left(i',k\right)A\ \text{if}\ \exists\frac{1}{k}\in R\left[k\frac{1}{k}=\frac{1}{k}k=1\right]\\
(\mathrm{R2})\left(m,i',j',k\right)&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto Q_m\left(i',j',k\right)A\\
(\mathrm{R3})\left(m,i',j'\right)&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto R_m\left(i',j'\right)A
\end{aligned}$$

定理 1.7.2. 可換環 R 上でこれらの写像たちは全単射で次のような逆写像たちが存在する.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{C1})\left(n,i',k\right)^{-1}&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto AP_n\left(i',\frac{1}{k}\right)\\
(\mathrm{C2})\left(n,i',j',k\right)^{-1}&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto AQ_n\left(i',j',-k\right)\\
(\mathrm{C3})\left(n,i',j'\right)^{-1}&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto AR_n\left(i',j'\right)\\
(\mathrm{R1})\left(m,i',k\right)^{-1}&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto P_m\left(i',\frac{1}{k}\right)A\\
(\mathrm{R2})\left(m,i',j',k\right)^{-1}&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto Q_m\left(i',j',-k\right)A\\
(\mathrm{R3})\left(m,i',j'\right)^{-1}&:\mathrm{M}(m,n,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,n,R);A\mapsto R_m\left(i',j'\right)A
\end{aligned}$$

証明. ほとんど明らかである. □

定理 1.7.3. 可換環 R 上で, $\forall A\in\mathrm{M}(m,n,R)$ に対し, $A=\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ とおかれれば, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{C1})\left(n,i',k\right)(A)=AP_n\left(i',k\right)&=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&ka_{1i'}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&ka_{mi'}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\\
(\mathrm{C2})\left(n,i',j',k\right)(A)=AQ_n\left(i',j',k\right)&=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1i'}&\cdots&a_{1j'}+ka_{1i'}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mi'}&\cdots&a_{mj'}+ka_{mi'}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\\
(\mathrm{C3})\left(n,i',j'\right)(A)=AR_n\left(i',j'\right)&=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j'}&\cdots&a_{1i'}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mj'}&\cdots&a_{mi'}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$(\mathrm{R1})\left(m,i',k\right)(A)=P_m\left(i',k\right)A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ ka_{i'1} & \cdots & ka_{i'n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{R2})\left(m,i',j',k\right)(A)=Q_m\left(i',j',k\right)A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i'1} & \cdots & a_{i'n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{j'1}+ka_{i'1} & \cdots & a_{j'n}+ka_{i'n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{R3})\left(m,i',j'\right)(A)=R_m\left(i',j'\right)A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{j'1} & \cdots & a_{j'n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i'1} & \cdots & a_{i'n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

証明. 成分表示して計算すればよい. □

これにより, 次のことがわかる.

- 行列 A が写像 $(\mathrm{C1})\left(n,i',k\right)$ によってうつされると, 即ち, その行列 A の右に行列 $P_n\left(i',k\right)$ との積をとると, その行列 A の第 i' 列の各成分が k 倍される.
- 行列 A が写像 $(\mathrm{C2})\left(n,i',j',k\right)$ によってうつされると, 即ち, その行列 A の右に行列 $Q_n\left(i',j'\right)$ との積をとると, その行列 A の第 j' 列の各成分に k 倍されたその第 i' 列の同じ行ごとの各成分が加わる.
- 行列 A が写像 $(\mathrm{C3})\left(n,i',j'\right)$ によってうつされると, 即ち, その行列 A の右に行列 $R_n\left(i',j'\right)$ との積をとると, その行列 A の第 i'列と第 j' 列が互いに入れ替わる.
- 行列 A が写像 $(\mathrm{R1})\left(m,i',k\right)$ によってうつされると, 即ち, その行列 A の左に行列 $P_m\left(i',k\right)$ との積をとると, その行列 A の第 i' 行の各成分が k 倍される.
- 行列 A が写像 $(\mathrm{R2})\left(m,i',j',k\right)$ によってうつされると, 即ち, その行列 A の左に行列 $Q_m\left(i',j'\right)$ との積をとると, その行列 A の第 j' 行の各成分に k 倍されたその第 i' 行の同じ列ごとの各成分が加わる.
- 行列 A が写像 $(\mathrm{R3})\left(m,i',j'\right)$ によってうつされると, 即ち, その行列 A の左に行列 $R_m\left(i',j'\right)$ とのをとると, その行列 A の第 i'行と第 j' 行が互いに入れ替わる.

定義 1.7.3. 可換環 R 上の行列に関して, 写像たち (C1), (C2), (C3) を用いた次の操作を列基本変形といい, これらを組み合わせたものを列変形という.

- ある 2 つの列々を入れかえる.
- $\forall k\in R$ に対し, その元 k が可逆元であるなら, ある 1 つの列の成分全体を k 倍する.
- $\forall k\in R$ に対し, ある 1 つの列の各成分の k 倍を別の 1 つの列の対応する各成分に加える.

同様にして, 写像たち (R1), (R2), (R3) を用いた次の操作を行基本変形といい, これらを組み合わせたものを行変形という

- ある 2 つの行々を入れかえる.
- $\forall k \in R$ に対し, その元 k が可逆元であるなら, ある 1 つの行の成分全体を k 倍する.
- $\forall k \in R$ に対し, ある 1 つの行の各成分の k 倍を別の 1 つの行の対応する各成分に加える.

以上の列基本変形, 行基本変形合わせて行列の基本変形, または単に, 基本変形といい, これらを組み合わせたものを行列の変形という.

$A \in \mathrm{M}(m,n,R)$ なる行列 A に写像 f による行列の変形を行った後の行列を A' とおくと, この関係は次式のように書かれることが多い.

$$A \to A', \quad A \xrightarrow{f} A'$$

1.7.3 体 K 上の行列の標準形

定理 1.7.4. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, その行列 A が行列の基本変形をされたとしても, その行列の階数は一定である.

このことは行列の基本変形が右あるいは左から基本行列をかけているだけにすぎないことと定理 1.6.7 より明らかであるが, 別の証明も与えておこう.

証明. まず, 列基本変形の場合を示そう. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, その行列 A の第 j 列を $\mathbf{a}_j$ とおくと, その行列の列空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j \in \Lambda_n}$ は $\forall j \in \Lambda_n$ に対する vectors$\mathbf{a}_j$ によって生成される集合 K^m の部分 vector 空間である. したがって, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j \in \Lambda_n} = \left\{\mathbf{v} \in K^n \middle| \mathbf{v} = \sum_{j \in \Lambda_n} k_j \mathbf{a}_j\right\}$$

ここで, $\forall k \in K \setminus \{0\}$ なる元 k を用いてある第 j' 列の成分全体を k 倍したとしても, されたあとの行列の列空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_j\right\}_{j \in \Lambda_n}$ について, 次のようになり

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \sum_{j \in \Lambda_n} k_j \mathbf{a}'_j \\ &= \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} k_j \mathbf{a}'_j + k_{j'} \mathbf{a}'_{j'} \\ &= \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} k_j \mathbf{a}_j + k_{j'} k \mathbf{a}_{j'}\end{aligned}$$

$\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_j\right\}_{j \in \Lambda_n} = \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j \in \Lambda_n}$ が成り立つので, その行列の階数は一定である.

また, ある第 i' 列の各成分の k 倍を別の第 j' 行の対応する各成分に加えたとしても, されたあとの行列の列空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}'_j\right\}_{j \in \Lambda_n}$ について, 次のようになり

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \sum_{j \in \Lambda_n} k_j \mathbf{a}'_j \\ &= \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \{i', j'\}} k_j \mathbf{a}'_j + k_{i'} \mathbf{a}'_{i'} + k_{j'} \mathbf{a}'_{j'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \{i', j'\}} k_j \mathbf{a}_j + k_{i'} \mathbf{a}_{i'} + k_{j'} \left(\mathbf{a}_{j'} + k\mathbf{a}_{i'}\right)\\
&= \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \{i', j'\}} k_j \mathbf{a}_j + k_{i'} \mathbf{a}_{i'} + k_{j'} \mathbf{a}_{j'} + k_{j'} k\mathbf{a}_{i'}\\
&= \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \{i', j'\}} k_j \mathbf{a}_j + \left(k_{i'} + k_{j'}k\right) \mathbf{a}_{i'} + k_{j'} \mathbf{a}_{j'}
\end{aligned}$$

$\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j'\right\}_{j \in \Lambda_n} = \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j \in \Lambda_n}$ が成り立つので, その行列の階数は一定である.

その行列 A のある 2 つの列々を入れかえたとしても, されたあとの行列の列空間は $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j \in \Lambda_n}$ に等しいので, その行列の階数は一定である.

以上より, その行列 A に列基本変形を行ったとしても, その列空間は一定であるので, その行列 A の階数も一定である.

同様にして, その行列 A に行基本変形を行ったとしても, その行空間は一定であるので, その行列 A の階数も一定である. □

定理 1.7.5. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, その行列 A は行列の基本変形を有限回くり返すと, $\mathrm{rank}A = r$ として次のその行列 A の標準形に変形できる.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

後述する証明の議論から分かるように, この変形は次の algorithm に従う.

1. $\forall k \in \Lambda_{\min\{m,n\}}$ に対し次式のように表されたとする.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. 行列 $\begin{pmatrix} a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ の各成分がすべて 0 であれば, 9.. へ進む.
3. そうでないならば, 0 でない成分 $a_{i'j'}$ が存在することになりある 2 つの行々を入れかえる操作とある 2 つの列々を入れかえる操作でその成分 $a_{i'j'}$ を第 (k,k) 成分とすることができる.
4. このときの第 (i,j) 成分を a_{ij}' とおき $\forall i \in \Lambda_m \setminus \{k\}$ に対し第 k 行の成分全体を $-\dfrac{a_{ij'}'}{a_{i'j'}}$ 倍しその各成分を第 i 行の対応する各成分に加える.
5. このときの第 (i,j) 成分を a_{ij}'' とおき $\forall j \in \Lambda_n \setminus \{k\}$ に対し第 k 列の成分全体を $-\dfrac{a_{i'j}''}{a_{i'j'}}$ 倍しその各成分を第 j 列の対応する各成分に加える.

6. 第 k 行の成分全体を $\dfrac{1}{a_{i'j'}}$ 倍する. そうすると, $\forall i \in \varLambda_m \setminus \{k\}$ に対し第 (i,k) 成分は 0 と, $\forall j \in \varLambda_n \setminus \{k\}$ に対し第 (k,j) 成分は 0 と, 第 (k,k) 成分は 1 となる.
7. $k = \min\{m,n\}$ が成り立つなら, 9.. へ進む.
8. そうでないならば, 1.. へ戻る.
9. この algorithm は終了する.

証明. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ とおかれると, その各成分が 0 であれば, この行列 A は零行列 O でありその行列 A の階数 $\mathrm{rank}A$ は 0 であるから, 明らかである.

0 でないその行列 A の成分 $a_{i'j'}$ が存在すれば, ある 2 つの行々を入れかえる操作とある 2 つの列々を入れかえる操作でその成分を第 $(1,1)$ 成分とすることができる.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i'1} & \cdots & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj'} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{i'1} & \cdots & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj'} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_{i'j'} & \cdots & a_{i'1} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j'} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj'} & \cdots & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

このときの第 (i,j) 成分を a'_{ij} とおき $\forall i \in \varLambda_m \setminus \{1\}$ に対し第 1 行の成分全体を $-\dfrac{a'_{ij'}}{a_{i'j'}}$ 倍しその各成分を第 i 行の対応する各成分に加えると, $\forall i \in \varLambda_m \setminus \{1\}$ に対し第 $(i,1)$ 成分は 0 となる.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} a_{i'j'} & \cdots & a_{i'1} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j'} - \dfrac{a_{1j'}}{a_{i'j'}}a_{i'j'} & \cdots & a_{11} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'1} & \cdots & a_{1n} - \dfrac{a_{1j'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj'} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'j'} & \cdots & a_{m1} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'1} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_{i'j'} & \cdots & a_{i'1} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{11} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'1} & \cdots & a_{1n} - \dfrac{a_{1j'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{m1} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'1} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \end{pmatrix}$$

このときの第 (i,j) 成分を $a''_{i,j}$ とおき $\forall j \in \varLambda_n \setminus \{1\}$ に対し第 1 列の成分全体を $-\dfrac{a''_{i'j}}{a_{i'j'}}$ 倍しその各成分を第 j

列の対応する各成分に加えると, $\forall j \in \varLambda_n \setminus \{1\}$ に対し第 $(1,j)$ 成分は 0 となる.

$$\begin{aligned}
A &\rightarrow \begin{pmatrix}
a_{i'j'} & \cdots & a_{i'1} - \dfrac{a_{i'1}}{a_{i'j'}} a_{i'j'} & \cdots & a_{i'n} - \dfrac{a_{i'n}}{a_{i'j'}} a_{i'j'} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{11} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}} a_{i'1} & \cdots & a_{1n} - \dfrac{a_{1j'}}{a_{i'j'}} a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{m1} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'1} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n}
\end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix}
a_{i'j'} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{11} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}} a_{i'1} & \cdots & a_{1n} - \dfrac{a_{1j'}}{a_{i'j'}} a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{m1} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'1} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

第 1 行の成分全体を $\dfrac{1}{a_{i'j'}}$ 倍すると, 次の行列が得られる.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{11} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}} a_{i'1} & \cdots & a_{1n} - \dfrac{a_{1j'}}{a_{i'j'}} a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{m1} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'1} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n}
\end{pmatrix}$$

$k \in \varLambda_{\min\{m,n\}}$ に対し次式のように表されたとする. このとき, 行列 $\begin{pmatrix} a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ の各成分がすべて 0 であるなら, その行列 A は $\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$ と変形されており, その行列 $\begin{pmatrix} I_k & O \end{pmatrix}$ の行 vectors はその行列 $\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の行空間を張り線形独立でありその行空間の基底をなしそれらの行 vectors が k つあるから, その行列 $\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の階数 rank $\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$ は k に等しい. ここで, ある行列に行列の基本変形を行ったとしても, その行列の階数は一定であったので, その行列 A の階数 $\mathrm{rank}A$ は k に等しい.

逆に, 0 でないその行列 $\begin{pmatrix} a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ の成分 $a_{i'j'}$ が存在すれば, ある 2 つの行々を入れかえる操作

とある 2 つの列々を入れかえる操作でその成分を第 (k,k) 成分とすることができる.

$$\begin{aligned}
A &\rightarrow \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{kj'} & \cdots & a_{kn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{i'k} & \cdots & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{mk} & \cdots & a_{mj'} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{i'k} & \cdots & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{kj'} & \cdots & a_{kn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{mk} & \cdots & a_{mj'} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'k} & \cdots & a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{kj'} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{mj'} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

このときの第 (i,j) 成分を a'_{ij} とおき $\forall i \in \varLambda_m \setminus \{k\}$ に対し第 k 行の成分全体を $-\dfrac{a'_{ij'}}{a_{i'j'}}$ 倍しその各成分を第 i 行の対応する各成分に加えると, $\forall i \in \varLambda_m \setminus \{k\}$ に対し第 (i,k) 成分は 0 となる.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'k} & \cdots & a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{kj'} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'j'} & \cdots & a_{kk} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'k} & \cdots & a_{kn} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{mj'} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'j'} & \cdots & a_{mk} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'k} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n}
\end{pmatrix}$$

$$
\to \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'k} & \cdots & a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{kk} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}} a_{i'k} & \cdots & a_{kn} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{mk} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'k} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n}
\end{pmatrix}
$$

このときの第 (i,j) 成分を $a'_{i,j}$ とおき $\forall j \in \varLambda_n \setminus \{k\}$ に対し第 k 列の成分全体を $-\dfrac{a'_{i',j}}{a_{i',j'}}$ 倍しその各成分を第 j 列の対応する各成分に加えると, $\forall j \in \varLambda_n \setminus \{k\}$ に対し第 (k,j) 成分は 0 となる.

$$
\begin{aligned}
A &\to \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'k} - \dfrac{a_{i'k}}{a_{i'j'}} a_{i'j'} & \cdots & a_{i'n} - \dfrac{a_{i'n}}{a_{i'j'}} a_{i'j'} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{kk} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}} a_{i'k} & \cdots & a_{kn} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{mk} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'k} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n}
\end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{i'j'} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{kk} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}} a_{i'k} & \cdots & a_{kn} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{mk} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'k} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

第 k 行の成分全体を $\dfrac{1}{a_{i',j'}}$ 倍すると, 次の行列が得られる.

$$
A \to \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{kk} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}} a_{i'k} & \cdots & a_{kn} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{mk} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'k} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n}
\end{pmatrix}
$$

以上より数学的帰納法によって示すべきことは示された. □

定理 1.7.6. $A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ なる行列 A は, 列基本変形とある 2 つの行々を入れかえる操作を有限回くり返すと, $\mathrm{rank}A = r$ として次の形に変形できる. この形をその行列 A の列標準形という.

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ * & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a'_{r+1,1} & \cdots & a'_{r+1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & \cdots & a'_{mr} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

同様に, 行基本変形とある 2 つの列々を入れかえる操作を有限回くり返すと, 次の形に変形できる. この形をその行列 A の行標準形という.

$$\begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

これらの操作は第 (i,j) 成分と第 (j,i) 成分とを逆にすればよいだけなので, 行標準形のほうのみで議論することにしよう. 後述する証明の議論から分かるように, この変形は次の algorithm に従う.

1. $\forall k \in \varLambda_{\min\{m,n\}}$ に対し次式のように表されたとする.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. 行列 $\begin{pmatrix} a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ の各成分がすべて 0 であれば, 9.. へ進む.
3. そうでないならば, 0 でない成分 $a_{i'j'}$ が存在することになりある 2 つの行々を入れかえる操作とある 2 つの列々を入れかえる操作でその成分 $a_{i'j'}$ を第 (k,k) 成分とすることができる.
4. このときの第 (i,j) 成分を a'_{ij} とおき $\forall i \in \varLambda_m \setminus \{k\}$ に対し第 k 行の成分全体を $-\dfrac{a'_{ij'}}{a_{i'j'}}$ 倍しその各成分を第 i 行の対応する各成分に加える.
5. 第 k 行の成分全体を $\dfrac{1}{a_{i'j'}}$ 倍する.
6. そうすると, $\forall i \in \varLambda_m \setminus \{k\}$ に対し第 (i,k) 成分は 0 と, 第 (k,k) 成分は 1 となる.
7. $k = \min\{m,n\}$ が成り立つなら, 9.. へ進む.
8. そうでないならば, 1.. へ戻る.

9. この algorithm は終了する.

証明. $A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ なる行列 $A=(a_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}$ を考える. その各成分が 0 であれば, この行列 A は零行列でありその行列 A の階数 $\mathrm{rank}A$ は 0 であるから, 明らかである.

0 でないその行列 A の成分 $a_{i'j'}$ が存在すれば, ある 2 つの行々を入れかえる操作とある 2 つの列々を入れかえる操作でその成分を第 $(1,1)$ 成分とすることができる.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i'1} & \cdots & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj'} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{i'1} & \cdots & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj'} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} a_{i'j'} & \cdots & a_{i'1} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j'} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj'} & \cdots & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

このときの第 (i,j) 成分を a'_{ij} とおき $\forall i \in \Lambda_m \setminus \{1\}$ に対し第 1 行の成分全体を $-\dfrac{a'_{ij'}}{a_{i'j'}}$ 倍しその各成分を第 i 行の対応する各成分に加えると, $\forall i \in \Lambda_m \setminus \{1\}$ に対し第 $(i,1)$ 成分は 0 となる.

$$A \to \begin{pmatrix} a_{i'j'} & \cdots & a_{i'1} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j'}-\dfrac{a_{1j'}}{a_{i'j'}}a_{i'j'} & \cdots & a_{11}-\dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'1} & \cdots & a_{1n}-\dfrac{a_{1j'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj'}-\dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'j'} & \cdots & a_{m1}-\dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'1} & \cdots & a_{mn}-\dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} a_{i'j'} & \cdots & a_{i'1} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{11}-\dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'1} & \cdots & a_{1n}-\dfrac{a_{1j'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{m1}-\dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'1} & \cdots & a_{mn}-\dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \end{pmatrix}$$

第 1 行の成分全体を $\dfrac{1}{a_{i'j'}}$ 倍すると, 次の行列が得られる.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \dfrac{a_{i'1}}{a_{i'j'}} & \cdots & \dfrac{a_{i'n}}{a_{i'j'}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{11}-\dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'1} & \cdots & a_{1n}-\dfrac{a_{1j'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{m1}-\dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'1} & \cdots & a_{mn}-\dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \end{pmatrix}$$

$k \in \Lambda_{\min\{m,n\}}$ に対し次式のように表されたとする. このとき, 行列 $\begin{pmatrix} a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ の各成分がすべて 0 であるなら, その行列 A は $\begin{pmatrix} I_k & * \\ O & O \end{pmatrix}$ と変形されており, その行列 $\begin{pmatrix} I_k & * \end{pmatrix}$ の行 vectors はその行列 $\begin{pmatrix} I_k & * \\ O & O \end{pmatrix}$ の行空間を張り線形独立でありその行空間の基底をなしそれらの行 vectors が k つあるから, その行列 $\begin{pmatrix} I_k & * \\ O & O \end{pmatrix}$ の階数 rank $\begin{pmatrix} I_k & * \\ O & O \end{pmatrix}$ は k に等しい. ここで, ある行列に行列の基本変形を行ったとしても, その行列の階数は一定であったので, その行列 A の階数 rank$A$ は k に等しい.

逆に, 0 でないその行列 $\begin{pmatrix} a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ の成分 $a_{i'j'}$ が存在すれば, ある 2 つの行々を入れかえる操作とある 2 つの列々を入れかえる操作でその成分を第 (k,k) 成分とすることができる.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_{1k} & \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{k-1,k} & \cdots & a_{k-1,j'} & \cdots & a_{k-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{kj'} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i'k} & \cdots & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mk} & \cdots & a_{mj'} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_{1k} & \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{k-1,k} & \cdots & a_{k-1,j'} & \cdots & a_{k-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i'k} & \cdots & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{kj'} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mk} & \cdots & a_{mj'} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_{1j'} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{k-1,j'} & \cdots & a_{k-1,k} & \cdots & a_{k-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'k} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kj'} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mj'} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

このときの第 (i,j) 成分を a'_{ij} とおき $\forall i \in \Lambda_m \setminus \{k\}$ に対し第 k 行の成分全体を $-\dfrac{a'_{ij'}}{a_{i'j'}}$ 倍しその各成分を第 i

行の対応する各成分に加えると, $\forall i \in \Lambda_m \setminus \{k\}$ に対し第 (i,k) 成分は 0 となる.

$$A \to \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & a_{1j'} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & a_{k-1,j'} & \cdots & a_{k-1,k} & \cdots & a_{k-1,n} \\
0 & \cdots & 0 & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'k} & \cdots & a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{kj'} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'j'} & \cdots & a_{kk} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'k} & \cdots & a_{kn} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{mj'} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'j'} & \cdots & a_{mk} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'k} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n}
\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & a_{1j'} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & a_{k-1,j'} & \cdots & a_{k-1,k} & \cdots & a_{k-1,n} \\
0 & \cdots & 0 & a_{i'j'} & \cdots & a_{i'k} & \cdots & a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{kk} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'k} & \cdots & a_{kn} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{mk} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'k} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n}
\end{pmatrix}$$

第 k 行の成分全体を $\dfrac{1}{a_{i'j'}}$ 倍すると, 次の行列が得られる.

$$A \to \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & a_{1j'} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & a_{k-1,j'} & \cdots & a_{k-1,k} & \cdots & a_{k-1,n} \\
0 & \cdots & 0 & a_{i'j'} & \cdots & \dfrac{a_{i'k}}{a_{i'j'}} & \cdots & \dfrac{a_{i'n}}{a_{i'j'}} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{kk} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'k} & \cdots & a_{kn} - \dfrac{a_{kj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{mk} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'k} & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}}a_{i'n}
\end{pmatrix}$$

以上より数学的帰納法によって示すべきことは示された.

同様にして, 列基本変形とある 2 つの行々を入れかえる操作を有限回くり返すと, 列標準形に変形できる. □

定理 1.7.7. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が正則行列であるならそのときに限り, その標準形が単位行列である.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が正則行列であるなら, 定理 1.4.14, 定理 1.7.5 よりその標準形 I が与えられたとき, その標準形 I は単位行列そのものである.

逆に, その標準形が単位行列であるなら, $\exists P,Q \in \mathrm{GL}(n,K)$ に対し, $PAQ = I_n$ が成り立つので, 次のよう

になる.

$$\begin{aligned}AQP &= P^{-1}PAQP\\ &= P^{-1}I_nP\\ &= P^{-1}P = I_n\\ QPA &= QPAQQ^{-1}\\ &= QI_nQ^{-1}\\ &= QQ^{-1} = I_n\end{aligned}$$

以上より, $A^{-1} = QP$ が成り立つので, その行列 A は正則行列である. □

定理 1.7.8. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, その行列 A は基本行列の積で表されることができる.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, 定理 1.7.7 より $\exists P, Q \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, $PAQ = I_n$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}AQP &= P^{-1}PAQP\\ &= P^{-1}I_nP\\ &= P^{-1}P = I_n\\ QPA &= QPAQQ^{-1}\\ &= QI_nQ^{-1}\\ &= QQ^{-1} = I_n\end{aligned}$$

以上より, $A^{-1} = QP$ が成り立つので, $A = P^{-1}Q^{-1}$ が成り立つ. これにより, その行列 A は基本行列の積で表されることができる. □

定理 1.7.9. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, その行列 A は列変形あるいは行変形だけで単位行列に変形されることができる.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, 定理 1.7.7 より $\exists P, Q \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, $PAQ = I_n$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}AQP &= P^{-1}PAQP\\ &= P^{-1}I_nP\\ &= P^{-1}P = I_n\\ QPA &= QPAQQ^{-1}\\ &= QI_nQ^{-1}\\ &= QQ^{-1} = I_n\end{aligned}$$

よって, その行列 A は列変形あるいは行変形だけで単位行列に変形されることができる. □

定理 1.7.10. 体 K 上で $\forall A, B \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, その行列 A が行列の変形でその行列 B に変形されることができるならそのときに限り, これらの行列たち A, B は対等である.

証明. 体 K 上で $\forall A, B \in \mathrm{M}(m, n, K)$ に対し, その行列 A が行列の変形でその行列 B に変形されることがで

きるなら, $\exists P, Q \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, $A = PBQ$ が成り立つので, $P^{-1}A = BQ$ が得られる. したがって, これらの行列たち A, B は対等である.

逆に, これが成り立つなら, $\exists P, Q \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, $PA = BQ$ が成り立つので, $A = P^{-1}BQ$ が得られる. 定理 1.7.8 より, これらの行列たち P, Q は基本行列の積で表されることができることにより, その行列 A が行列の変形でその行列 B に変形されることができる. $\square$

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p113-p118,196-215 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007. 改訂版 8 刷 p104-113 ISBN978-4-320-11097-7

1.8 掃き出し計算

1.8.1 掃き出し計算

定義 1.8.1. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V の基底を $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_m}$ としその vector 空間 V の零 vector$\mathbf{0}$ でないものが存在するような族 $\left\{ \mathbf{w}_j \right\}_{j \in \varLambda_n}$ の n つの元々 $\mathbf{w}_j$ が $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_m} a_{ij} \mathbf{v}_i$ と書かれることができる, 即ち, 組 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_m}$ を基底としたときのそれらの vectors$\mathbf{w}_j$ の座標が $\left(a_{ij} \right)_{i \in \varLambda_m}$ であるとき, その組 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_m}$ が基底とするときの $\forall i \in \varLambda_m \forall j \in \varLambda_n$ に対しそれらの vectors$\mathbf{v}_i$ とそれらの vectors$\mathbf{w}_j$ の座標たちを並べて得られる $(m, m+n)$ 型の行列 A について考えると, その行列 A は次式のように表される.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_m & \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, $\forall j \in \varLambda_n$ に対し n つのそれらの vectors$\mathbf{w}_j$ のうちその行列 $\left(a_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n}$ の各成分のうち 0 でないものが存在するので, これを第 (i', j') 成分とし a とおくと, その行列 A は次式のように表される.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j'} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{i'1} & a_{i'2} & \cdots & a & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj'} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ここで, $\forall i \in \varLambda_m \setminus \{i'\}$ に対し第 i' 行の成分全体を $-\dfrac{a_{ij'}}{a}$ 倍しその各成分を第 i 行の対応する各成分に加えると,

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & -\dfrac{a_{1j'}}{a} & \cdots & 0 & a_{11} - \dfrac{a_{1j'}}{a} a_{i'1} & \cdots & a_{1j'} - \dfrac{a_{1j'}}{a} a & \cdots & a_{1n} - \dfrac{a_{1j'}}{a_{i'j'}} a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{i',1} & \cdots & a & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\dfrac{a_{mj'}}{a} & \cdots & 1 & a_{m1} - \dfrac{a_{mj'}}{a} a_{i'1} & \cdots & a_{mj'} - \dfrac{a_{mj'}}{a} a & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a_{i'j'}} a_{i'n} \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & -\dfrac{a_{1j'}}{a} & \cdots & 0 & a_{11} - \dfrac{a_{1j'}}{a} a_{i'1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} - \dfrac{a_{1j'}}{a} a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{i'1} & \cdots & a & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\dfrac{a_{mj'}}{a} & \cdots & 1 & a_{m1} - \dfrac{a_{mj'}}{a} a_{i'1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a} a_{i'n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

第 i' 行の成分全体を $\dfrac{1}{a}$ 倍すると, 次の行列が得られる. ここで, この行列を A' とおく.

$$A \to A' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & -\dfrac{a_{1j'}}{a} & \cdots & 0 & a_{11} - \dfrac{a_{1j'}}{a} a_{i'1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} - \dfrac{a_{1j'}}{a} a_{i'n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dfrac{1}{a} & \cdots & 0 & \dfrac{a_{i'1}}{a} & \cdots & 1 & \cdots & \dfrac{a_{i'n}}{a} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\dfrac{a_{mj'}}{a} & \cdots & 1 & a_{m1} - \dfrac{a_{mj'}}{a} a_{i'1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn} - \dfrac{a_{mj'}}{a} a_{i'n} \end{pmatrix}$$

ここで, 定理 1.1.24 よりこの行列 A' は組 $\left\langle \begin{cases} \mathbf{w}_{j'} & \text{if} \quad i = i' \\ \mathbf{v}_i & \text{if} \quad i \neq i' \end{cases} \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ を基底としたとき, $\forall i \in \Lambda_m \forall j \in \Lambda_n$ に対し, それらの vectors$\mathbf{v}_i$ とそれらの vectors$\mathbf{w}_j$ の座標たちを並べて得られる $(m, m+n)$ 型の行列である. したがって, 次のような写像 G_a が定義されることができ, この写像 G_a で行列をうつすことをその元 a をかなめとする掃き出し計算, とりかえ計算, Gauss-Jordan 消去法などという.

$$G_a : \mathrm{M}(m, m+n, K) \to \mathrm{M}(m, m+n, K); A \mapsto A'$$

1.8.2 block 行列に関する二定理

定理 1.8.1. $\forall A \in \mathrm{M}(m, n, K) \forall \mathbf{b} \in K^m$ に対し, $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m, K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n, K)$ なる行列たちを用いて行基本変形と列の入れ替えによって次のように変形できるとき,

$$A \to P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$$

行列 $\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ は次のように変形できる.

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \to P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}} & P_{\mathrm{R}} \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

証明. $\forall A \in \mathrm{M}(m, n, K) \forall \mathbf{b} \in K^m$ に対し, $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m, K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n, K)$ なる行列たちを用いて行基本変形と列の入れ替えによって次のように変形できるとき,

$$A \to P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \to P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_{\mathrm{R}} A & P_{\mathrm{R}} \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}} + P_{\mathrm{R}} \mathbf{b} O & P_{\mathrm{R}} A O + P_{\mathrm{R}} \mathbf{b} 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}} & P_{\mathrm{R}} \mathbf{b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

定理 1.8.2. $\forall A \in \mathrm{M}(m, m, K) \forall B \in \mathrm{M}(n, n, K)$ に対し, $A \in \mathrm{GL}(m, K)$ かつ $B \in \mathrm{GL}(n, K)$ が成り立つならそのときに限り, その行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}$ が存在し $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ となる. これにより, その行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ は正則行列となる.

証明. $\forall A \in \mathrm{M}(m,m,K)\forall B \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $A \in \mathrm{GL}(m,K)$ かつ $B \in \mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つなら, これらの逆行列たちが存在し $A^{-1} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $B^{-1} \in \mathrm{GL}(n,K)$ となる. ここで, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AA^{-1}+O & AO+OB^{-1} \\ OA^{-1}+BO & O+BB^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{pmatrix} = I_{m+n} \\
\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A^{-1}A+O & AO+OB \\ OA+B^{-1}O & O+B^{-1}B \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{pmatrix} = I_{m+n}
\end{aligned}$$

したがって, その行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}$ が存在し $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ となる.

逆に, その行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}$ が存在するとすると, その逆行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}$ を $X_{11} \in \mathrm{M}(m,m,K)$, $X_{12} \in \mathrm{M}(m,n,K)$, $X_{21} \in \mathrm{M}(n,m,K)$, $X_{22} \in \mathrm{M}(n,n,K)$ として $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ とおくと, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AX_{11}+OX_{21} & AX_{12}+OX_{22} \\ OX_{11}+BX_{21} & OX_{12}+BX_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} AX_{11} & AX_{12} \\ BX_{21} & BX_{22} \end{pmatrix} \\
&= I_{m+n} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

また, 次のようになり,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_{11}A+X_{12}O & X_{11}O+X_{12}B \\ X_{21}A+X_{22}O & X_{21}O+X_{22}B \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X_{11}A & X_{12}B \\ X_{21}A & X_{22}B \end{pmatrix} \\
&= I_{m+n} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

成分を比較すると, 次式が成り立つことになる.

$$AX_{11} = X_{11}A = I_m, \quad BX_{22} = X_{12}B = I_n$$

これにより, それらの行列たち A, B の逆行列が存在することになる. したがって, $A \in \mathrm{GL}(m,K)$ かつ $B \in \mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ. □

1.8.3 連立 1 次方程式

定義 1.8.2. 体 K 上で $a_{ij}, b_i, x_j \in K$ として次式のように書かれる式を n 元連立 1 次方程式という.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

この式に対し, n 元連立 1 次方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ も考えられることができ, これを この式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ に随伴する n 元連立 1 次方程式という. また, n 元連立 1 次方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ を満たす組 $\left(x_j\right)_{j \in \varLambda_n}$ あるいはその体 K の元々 x_j をその式の解といい, 特に, $x_j = 0$ なる解を自明な解といい, これらの組 $\left(x_j\right)_{j \in \varLambda_n}$ 全体の集合を解空間という. このような元々 x_j が存在するとき, その式は解をもつという.

定理 1.8.3. n 元連立 1 次方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ は次のように書き換えられることができる.

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また, $b_i = 0$ のとき, 次のようにおくと,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

その解空間はその vector 空間 K^n の部分 vector 空間でその次元は $n - \mathrm{rank}A$ に等しい.

証明. 次式のような n 元連立 1 次方程式を考えよう.

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}\right.$$

このとき, 次のようになり,

$$\begin{aligned} \left\{\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}\right. &\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_m \left[a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \right] \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_m \left[\sum_{h \in \varLambda_n} a_{ih}x_h = b_i \right] \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{h \in \varLambda_n} a_{ih}x_h \right)_{i \in \varLambda_m} = (b_i)_{i \in \varLambda_m} \\ &\Leftrightarrow (a_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n} (x_i)_{i \in \varLambda_n} = (b_i)_{i \in \varLambda_m} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \left\{\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m = 0 \end{matrix}\right. \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_m \left[a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i = 0 \right] \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \varLambda_m \left[\sum_{h \in \varLambda_n} a_{ih}x_h - b_i = 0 \right] \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{h \in \varLambda_n} a_{ih}x_h - b_i \right)_{i \in \varLambda_m} = (0)_{i \in \varLambda_m} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n} & (b_i)_{i \in \varLambda_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_i)_{i \in \varLambda_n} \\ -1 \end{pmatrix} = (0)_{i \in \varLambda_m} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

また, $b_i = 0$ のとき, 次のようにおくと,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

その解空間は線形写像 $L_A : K^n \to K^m; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ の核 $\ker L_A$ に等しいので, その解空間はその vector 空間 K^n の部分 vector 空間である. ここで次元公式より次のようになる.

$$\dim \ker L_A = \mathrm{nullity} L_A = \dim K^n - \mathrm{rank} L_A = n - \mathrm{rank} A$$

$\square$

定義 1.8.3. この定理によって, この式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ は $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n}$, $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \varLambda_n}$, $\mathbf{b} = (b_i)_{i \in \varLambda_m}$ とすれば, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ または $\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ のように書き換えられることができる. ここで, この行列 A をその連立 1 次方程式の係数行列, この vector$\mathbf{b}$ をその連立 1 次方程式の定数項 vector という. さらに, その定数項 vector$\mathbf{b}$ が零 vector$\mathbf{0}$ であるとき, その連立 1 次方程式は同次である, そうでないとき, その連立 1 次方程式は非同次であるといい, その連立 1 次方程式を考えたとき, その定数項 vector$\mathbf{b}$ を零 vector$\mathbf{0}$ に置き換えた式をその連立 1 次方程式に随伴する式という.

1.8.4 同次な連立 1 次方程式

定理 1.8.4. $\forall A \in \mathrm{M}(m, n, K) \forall \mathbf{b} \in K^m$ に対し, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ として vectors$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を用いた連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に随伴する連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は, 次の方法にしたがって式変形されれば, 必ずその解をもつことがわかる. この式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解こう. この方法は次のようになる.

1. 行基本変形と列の入れ替えによって $\mathrm{rank}A = r$ として次のような行標準形に変形する.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m, K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n, K)$ なる行列たちそれぞれ P_{R}, P_{C} を用いると, 行標準形にされたその行列は $P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$ と書かれることができるのであった. その vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ はその vector$\mathbf{x}$ の成分の順序を入れ替えたものになることに注意すると, この vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ は, ある全単射な写像 $p : \varLambda_n \xrightarrow{\sim} \varLambda_n$ が存在して, 次式のように書かれることができる.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ x_{p(2)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix}$$

3. したがって, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{1n} x_{p(n)} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{rn} x_{p(n)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix}$$

4. $\forall j \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r$ に対し, $t_{j-r} = x_{p(j)} \in K$ とおくと, $\forall \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} \in K^{n-r}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + t_{n-r} \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. これにより, その連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間 $\ker L_A$ は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} \in \ker L_A = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

定義 1.8.4. なお, それらの vectors $\begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ をその式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解という. このようにしても, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の次元は $n - r$ に, 即ち, $n - \mathrm{rank}A$ に等しいことがわかる. また, $n = r = \mathrm{rank}A$ が成り立つなら, 明らかに解空間 $\ker L_A$ は $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ となる. この方法を詳しく述べたものを証明としよう.

証明. $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)\forall\mathbf{b} \in K^m$ に対し, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ として vectors$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を用いた連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に随伴する連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解こう. このとき, 行基本変形と列の入れ替えによって $\mathrm{rank}A = r$ として次のように変形できるのであった. なお, P_{R}, P_{C} はそれぞれ $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たちである.

$$A \to \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}}AP_{\mathrm{C}}$$

$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x} \in K^n$ より vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}'$ とおくと, したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow P_{\mathrm{R}}AP_{\mathrm{C}}P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix}\mathbf{x}' = \mathbf{0} \end{aligned}$$

ここで, その基本行列 P_{C} は行列 A の列の入れ替えを行っているのであったので, その逆行列 P_{C}^{-1} はその vector$\mathbf{x}$ を行列とみなしたとき, その行列 $\mathbf{x}$ の行の入れ替えを行うことになるので, その vector$\mathbf{x}'$ はその vector$\mathbf{x}$ の成分の順序を入れ替えたものになることに注意すると, この vector$\mathbf{x}'$ は, ある全単射な写像 $p : \Lambda_n \xrightarrow{\sim} \Lambda_n$ が存在して, 次式のように書かれることができる.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ x_{p(2)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix}$$

したがって, その行列 $\begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$ が次式のように成分表示されたらば,

$$\begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

その式 $\begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_{p(1)} + a'_{1,r+1}x_{p(r+1)} + \cdots + a'_{1n}x_{p(n)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} + a'_{r,r+1}x_{p(r+1)} + \cdots + a'_{rn}x_{p(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x_{p(1)} + a'_{1,r+1}x_{p(r+1)} + \cdots + a'_{1n}x_{p(n)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} + a'_{r,r+1}x_{p(r+1)} + \cdots + a'_{rn}x_{p(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1}x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{1n}x_{p(n)} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1}x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{rn}x_{p(n)} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+2)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1}x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{1n}x_{p(n)} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1}x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{rn}x_{p(n)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = x_{p(r+1)} \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_{p(n)} \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, $\forall j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r$ に対し, $t_{j-r} = x_{p(j)} \in K$ とおくと, $j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r$ なるそれらの係数たち t_{j-r} は任意で, $\forall \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} \in K^{n-r}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + t_{n-r} \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

これにより, その連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間 $\ker L_A$ は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} \in \ker L_A = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

このようにしても, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の次元は $n - r$ に, 即ち, $n - \mathrm{rank}A$ に等しいことがわかる. □

1.8.5 非同次な連立 1 次方程式

定理 1.8.5 (有解条件)**.** $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)\forall \mathbf{b} \in K^m$ に対し, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ として vectors$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を用いた連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ について考えよう. ここで, 次のことは同値である.

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ がその解をもつ, 即ち, $\exists \mathbf{x} \in K^n$ に対し, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が成り立つ.
- $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ が成り立つ.
- $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たち P_{R}, P_{C} を用いて行基本変形と列の入れ替えによって $\mathrm{rank}A = r$ として次のように変形されたとき,

$$A \to \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$$

  $P_{\mathrm{R}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^* \\ \mathbf{b}_* \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}^* \in K^r$ とおくと, $\mathbf{b}_* = \mathbf{0}$ が成り立つ.

この定理を有解条件という.

証明. $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)\forall \mathbf{b} \in K^m$ に対し, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ として vectors$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を用いた連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が与えられたとする.

ここで, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ がその解をもつ, 即ち, $\exists \mathbf{x} \in K^n$ に対し, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が成り立つとき, 定理 1.7.5 より $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たち P_{R}, P_{C} を用いて行基本変形と列の入れ替えによって $\mathrm{rank}A = r$ として次のように変形できる.

$$A \to \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$$

ここで, $P_{\mathrm{R}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^* \\ \mathbf{b}_* \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}^* \in K^r$ とおくと, 定理 1.8.1 より次のようになることから,

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} & P_{\mathrm{R}}\mathbf{b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{b}^* \\ \mathbf{b}_* \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_r & * & \mathbf{b}^* \\ O & O & \mathbf{b}_* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

定理 1.8.2 よりその行列 $\begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ が存在でき $\begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}}^{-1} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$ となるので, $\begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} \in K^{n+1}$ より vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}'$ とおくと, 定理 1.8.3 よりしたがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_r & * & \mathbf{b}^* \\ O & O & \mathbf{b}_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ -\mathbf{b}_* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに, $\mathbf{b}_* = \mathbf{0}$ が成り立つ.

また, $\mathbf{b}_* = \mathbf{0}$ が成り立つなら, 上記の議論により次のようになるので,

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_r & * & \mathbf{b}^* \\ O & O & \mathbf{b}_* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_r & * & \mathbf{b}^* \\ O & O & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} = r$ が成り立つ, 即ち, $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ が成り立つ.

$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ が成り立つなら, 次式が成り立つので,

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

次式が成り立つ.

$$\dim\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\} = \dim\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\right\}$$

ここで, 次式が成り立つので,

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\right\}$$

次元が等しいことから, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\right\}$$

ゆえに, その vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ が $i \in \Lambda_n$ なるそれらの vectors $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ の線形結合であり次のようになるので,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} &= x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\exists\mathbf{x} \in K^n$ に対し, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が成り立つ.

以上の議論により, 次のことは同値である.

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ がその解をもつ, 即ち, $\exists\mathbf{x} \in K^n$ に対し, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が成り立つ.
- $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ が成り立つ.

- $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たち P_{R}, P_{C} を用いて行基本変形と列の入れ替えによって $\mathrm{rank}A = r$ として次のように変形されたとき,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$$

$P_{\mathrm{R}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^* \\ \mathbf{b}_* \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}^* \in K^r$ とおくと, $\mathbf{b}_* = \mathbf{0}$ が成り立つ.

□

定理 1.8.6. さて, その連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解こう. この方法は次のようになる.

1. この式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は定理 1.8.3 より次のように変形できる.

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

2. $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たちを用いて行基本変形と列の入れ替えによって $\mathrm{rank}A = r$ として次のように変形できるとき,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$$

行列 $\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ は次のように変形できる.

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \rightarrow P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} & P_{\mathrm{R}}\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

3. その行列 $\begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & I_1 \end{pmatrix}$ の逆行列が $\begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}}^{-1} & O \\ O & I_1 \end{pmatrix}$ となるので, vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}'$ とおくと, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} & P_{\mathrm{R}}\mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

4. ここで, その vector$\mathbf{x}'$ はその vector$\mathbf{x}$ の成分の順序を入れ替えたものになることに注意すると, この vector$\mathbf{x}'$ は, ある全単射な写像 $p : \Lambda_n \xrightarrow{\sim} \Lambda_n$ が存在して, 次式のように書かれることができる.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ x_{p(2)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix}$$

5. また, 次式のように成分表示されることができる.

$$\begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathrm{R}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix}$$

6. 4. と 5. よりその式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ は次のようになる.

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

7. $\exists i \in \varLambda_m \setminus \varLambda_r$ に対し, $b'_i \neq 0$ が成り立つなら, その式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ はその解をもたない.
8. $\forall i \in \varLambda_m \setminus \varLambda_r$ に対し, $b'_i = 0$ が成り立つなら, その式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ はその解をもつ.
9. 8. のとき, $t_{j-r}=x_{p(j)} \in K$ とおくと, $\forall \begin{pmatrix}t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r}\end{pmatrix} \in K^{n-r}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix}x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)}\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}-a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}+\cdots+t_{n-r}\begin{pmatrix}-a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

10. これにより, 写像 $L'_A : K^n \to K^m; \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}-\mathbf{b}$ を考えることで, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の解空間 $\ker L'_A$ は次のようになる.

$$\begin{pmatrix}x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)}\end{pmatrix} \in \ker L'_A = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}-a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\right\}+\begin{pmatrix}b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

なお, その vector $\begin{pmatrix}b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$ をその式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の特殊解という. このようにしても, その式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ がその解をもつならそのときに限り, $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & \mathbf{b}\end{pmatrix}$ が成り立つことがわかる. また, $n=r=\mathrm{rank}A$ が成り立ちその式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ が解をもつなら, 明らかに解空間 $\ker L'_A$ は $\left\{\begin{pmatrix}b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n\end{pmatrix}\right\}$ となる.

このように, その式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の解は次のように 3 通りに分類されることができる.

名称	解空間 $\ker L'_A$ / 解 $\mathbf{x}'$	有解条件
その解は不能である	$\emptyset$	$\mathrm{rank}A \neq \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$
	nothing	
その解は不定である	$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ $\wedge \mathrm{rank}A \neq n$
	$\forall\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} \in K^{n-r}\left[\begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + t_{n-r}\begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right]$	
	$\left\{\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}\right\}$	$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ $\wedge \mathrm{rank}A = n$
	$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$	

この方法を詳しく述べたものを証明としよう.

証明. $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)\forall\mathbf{b} \in K^m$ に対し, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ として vectors$\mathbf{x} =$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を用いた連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は定理 1.8.3 より次のように変形できる.

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m, K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n, K)$ なる行列たちを用いて行基本変形と列の入れ替えによって $\mathrm{rank}A = r$ として次のように変形できるのであった.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$$

このとき, 定理 1.8.1 より行列 $\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ は次のように変形できる.

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \rightarrow P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} & P_{\mathrm{R}} \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

ここで, 定理 1.8.2 よりその行列 $\begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ が存在でき $\begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}}^{-1} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$ となるので, $\begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} \in K^{n+1}$ より vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}'$ とおくと, 定理 1.8.3 よりしたがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\mathrm{C}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} & P_{\mathrm{R}} \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, その基本行列 P_{C} は行列 A の列の入れ替えを行っているのであった. その逆行列 P_{C}^{-1} はその vector$\mathbf{x}$ を行列とみなしたとき, その行列 $\mathbf{x}$ の行の入れ替えを行うことになるので, その vector$\mathbf{x}'$ はその vector$\mathbf{x}$ の成分の順序を入れ替えたものになることに注意すると, この vector$\mathbf{x}'$ は, ある全単射な写像 $p : \varLambda_n \xrightarrow{\sim} \varLambda_n$ が存在して, 次式のように書かれることができる.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ x_{p(2)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix}$$

したがって, $P_{\mathrm{R}}\mathbf{b} \in K^m$ が成り立つことに注意して, その行列 $\begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$, その vector$P_{\mathrm{R}}\mathbf{b}$ が次式のように成

分表示されたらば,

$$\begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathrm{R}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix}$$

その式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{pmatrix} x_{p(1)} + a'_{1,r+1}x_{p(r+1)} + \cdots + a'_{1n}x_{p(n)} - b'_1 \\ \vdots \\ x_{p(r)} + a'_{r,r+1}x_{p(r+1)} + \cdots + a'_{rn}x_{p(n)} - b'_r \\ -b'_{r+1} \\ \vdots \\ -b'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで, 有解条件より $\exists i \in \varLambda_m \setminus \varLambda_r$ に対し, $b'_i \neq 0$ が成り立つなら, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解はもたない.

一方で有解条件より, $\forall i \in \varLambda_m \setminus \varLambda_r$ に対し, $b'_i = 0$ が成り立つなら, 明らかにその式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ も成り立つ.

なお, その式 $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ はその行列 $\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ が変形された行標準形になっており $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} = r = \mathrm{rank}A$ が成り立っている. したがって, 次のようになる.

$$\begin{pmatrix} x_{p(1)} + a'_{1,r+1}x_{p(r+1)} + \cdots + a'_{1n}x_{p(n)} - b'_1 \\ \vdots \\ x_{p(r)} + a'_{r,r+1}x_{p(r+1)} + \cdots + a'_{rn}x_{p(n)} - b'_r \\ -b'_{r+1} \\ \vdots \\ -b'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{p(1)} + a'_{1,r+1}x_{p(r+1)} + \cdots + a'_{1n}x_{p(n)} - b'_1 \\ \vdots \\ x_{p(r)} + a'_{r,r+1}x_{p(r+1)} + \cdots + a'_{rn}x_{p(n)} - b'_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1}x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{1n}x_{p(n)} + b'_1 \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1}x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{rn}x_{p(n)} + b'_r \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1}x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{1n}x_{p(n)} + b'_1 \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1}x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{rn}x_{p(n)} + b'_r \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ x_{p(2)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ x_{p(r+2)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = x_{p(r+1)} \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_{p(n)} \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで, $\forall j \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r$ に対し, $t_{j-r} = x_{p(j)} \in K$ とおくと, $j \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r$ なるそれらの係数たち t_{j-r} は任意で, $\forall \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} \in K^{n-r}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + t_{n-r} \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

これにより, 写像 $L'_A : K^n \to K^m; \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ を考えることで, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解空間 $\ker L'_A$ は次のようになる.

$$\ker L'_A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

このようにしても, その式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつならそのときに限り, $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ が成り立つことがわかる. $\square$

定理 1.8.7. その式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の特殊解 $\mathbf{x}_0$ が与えられたら, これに随伴する式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解を $\mathbf{x}_1$ とおいて vector$\mathbf{x}_0+\mathbf{x}_1$ もその式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の解となる.

証明. $\forall A\in \mathrm{M}(m,n,K)\forall\mathbf{b}\in K^m$ に対し, vectors$\mathbf{x}$ を用いた連立方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ を考えよう. その式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の特殊解 $\mathbf{x}_0$ が与えられたら, これに随伴する式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解を $\mathbf{x}_1$ とおくと,

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_0=\mathbf{b}\wedge A\mathbf{x}_1=\mathbf{0} &\Rightarrow A\mathbf{x}_0+A\mathbf{x}_1=\mathbf{b}\\ &\Leftrightarrow A\left(\mathbf{x}_0+\mathbf{x}_1\right)=\mathbf{b} \end{aligned}$$

よって, vector$\mathbf{x}_0+\mathbf{x}_1$ もその式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の解となる. □

定理 1.8.8. このことを用いれば, その式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ がその解をもつとき, その式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ に随伴する式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解が $\mathbf{x}_1$ と求まっており $\mathrm{rank}A=r$ として $P_{\mathrm{R}}\in\mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}}\in\mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たち P_{R}, P_{C} を用いて次のようにその行列 A の行標準形に変形できたとき,

$$A\to\begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix}=P_{\mathrm{R}}AP_{\mathrm{C}}$$

その式は次のようにして求めることができる.

1. その行列 A がされた行基本変形でその vector$\mathbf{b}$ を変形する.
$$\mathbf{b}\to P_{\mathrm{R}}\mathbf{b}$$
2. vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}'$ とおくと, その vector$\mathbf{x}'$はその *vector*$\mathbf{x}$ の成分の順序を入れ替えたものになることに注意すれば, この vector$\mathbf{x}'$ は, ある全単射な写像 $p:\Lambda_n\xrightarrow{\sim}\Lambda_n$ が存在して, 次式のように書かれることができる.
$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ x_{p(2)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix}$$
3. その式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解空間 $\ker A$ を用いて写像 $L_A':K^n\to K^m;\mathbf{x}\mapsto A\mathbf{x}-\mathbf{b}$ を考えることで, その vector$\mathbf{x}'$ が属するその式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の解空間 $\ker L_A'$ は次のようになる.
$$\ker L_A'=\ker L_A+P_{\mathrm{R}}\mathbf{b}$$

この方法を詳しく述べたものを証明としよう.

証明. $\forall A\in \mathrm{M}(m,n,K)\forall\mathbf{b}\in K^m$ に対し, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ として vectors$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を用いた連立方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ を考えよう. その式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ がその解をもつとき, その式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ に随

伴する式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解が $\mathbf{x}_1$ と求まっており $\mathrm{rank}A=r$ として $P_{\mathrm{R}}\in\mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}}\in\mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たち P_{R}, P_{C} を用いて次のようにその行列 A の行標準形に変形でき,

$$A\to\begin{pmatrix}I_r & *\\ O & O\end{pmatrix}=P_{\mathrm{R}}AP_{\mathrm{C}}$$

この行列 $\begin{pmatrix}I_r & *\\ O & O\end{pmatrix}$ とこの vector$P_{\mathrm{R}}\mathbf{b}$ を次のように成分表示されたとき,

$$\begin{pmatrix}I_r & *\\ O & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad P_{\mathrm{R}}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b'_1\\ b'_2\\ \vdots\\ b'_m\end{pmatrix}$$

vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}'$ とおくと, その基本行列 P_{C} は行列 A の列の入れ替えを行っているのであったので, その逆行列 P_{C}^{-1} はその vector$\mathbf{x}$ を行列とみなしたとき, その行列 $\mathbf{x}$ の行の入れ替えを行うことになるので, その vector$\mathbf{x}'$ はその vector$\mathbf{x}$ の成分の順序を入れ替えたものになることに注意すると, この vector$\mathbf{x}'$ は, ある全単射な写像 $p:\Lambda_n\xrightarrow{\sim}\Lambda_n$ が存在して, 次式のように書かれることができる.

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}x_{p(1)}\\ x_{p(2)}\\ \vdots\\ x_{p(n)}\end{pmatrix}$$

上の議論よりその vector$\mathbf{x}'$ が属するその式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解空間 $\ker L_A$ は次のようになり,

$$\ker L_A=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-a'_{1,r+1}\\ \vdots\\ -a'_{r,r+1}\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}-a'_{1n}\\ \vdots\\ -a'_{rn}\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

上と同様な議論により, 写像 $L'_A:K^n\to K^m;\mathbf{x}\mapsto A\mathbf{x}-\mathbf{b}$ を考えることで, その vector$\mathbf{x}'$ が属するその式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の解空間 $\ker L'_A$ は次のようになる.

$$\ker L'_A=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-a'_{1,r+1}\\ \vdots\\ -a'_{r,r+1}\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}-a'_{1n}\\ \vdots\\ -a'_{rn}\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right\}+\begin{pmatrix}b'_1\\ \vdots\\ b'_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

それらの解空間たち $\ker L_A$, $\ker L'_A$ とその vector$P_{\mathrm{R}}\mathbf{b}$ を比較することにより次式が成り立つ.

$$\ker L'_A=\ker L_A+P_{\mathrm{R}}\mathbf{b}$$

□

1.8.6 生成された部分 vector 空間の基底を求めよう

定理 1.8.9. $\mathbf{a}_j \in K^n$ なる vectors$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を用いた部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j \in \varLambda_n}$ の基底を求めよう.

これは次のようにして求められることができる.

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m, n, K)$ なる行列 A と $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ なる vector$\mathbf{x}$ を用いて考えよう.
2. その行列 A は行基本変形と列の入れ替えによって次のように変形できるのであった. なお, P_{R}, P_{C} はそれぞれ $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m, K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n, K)$ なる行列たちで $\mathrm{rank}A = r$ とした.
$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$$
3. その vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ はその vector$\mathbf{x}$ の成分の順序を入れ替えたものになることに注意すると, この vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ は, ある全単射な写像 $p : \varLambda_n \xrightarrow{\sim} \varLambda_n$ が存在して, 次式のように書かれることができる.
$$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_{p(1)} \\ c_{p(2)} \\ \vdots \\ c_{p(n)} \end{pmatrix}$$
4. 次の組 $\left\langle \mathbf{a}_{p(j)} \right\rangle_{j \in \varLambda_r}$ がその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j \in \varLambda_n}$ の基底となる.
$$\left\langle \mathbf{a}_{p(j)} \right\rangle_{j \in \varLambda_r} = \left\langle \begin{pmatrix} a_{1p(1)} \\ a_{2p(1)} \\ \vdots \\ a_{mp(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1p(2)} \\ a_{2p(2)} \\ \vdots \\ a_{mp(2)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1p(r)} \\ a_{2p(r)} \\ \vdots \\ a_{mp(r)} \end{pmatrix} \right\rangle$$

この方法を詳しく述べたものを証明としよう.

証明. $\mathbf{a}_j \in K^n$ なる vectors$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を用いた部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j \in \varLambda_n}$ の基底を求めよう. この

とき, $c_i \in K$ なる体の元々 c_i を用いて次式を考えよう.

$$c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m,n,K)$ なる行列 A と $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ なる vector$\mathbf{x}$ を用いた次式に書き換えられることができる.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで, その連立 1 次方程式を解こう. その行列 A は行基本変形と列の入れ替えによって次のように変形できるのであった. なお, P_{R}, P_{C} はそれぞれ $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たちで $\mathrm{rank}A = r$ とした.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$$

その vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ はその vector$\mathbf{x}$ の成分の順序を入れ替えたものになることに注意すると, この vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ は, ある全単射な写像 $p : \varLambda_n \xrightarrow{\sim} \varLambda_n$ が存在して, 次式のように書かれることができる.

$$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_{p(1)} \\ c_{p(2)} \\ \vdots \\ c_{p(n)} \end{pmatrix}$$

したがって, $\forall j \in \varLambda_{n-r}$ に対し, $t_j = c_{p(r+j)} \in K$ とおくと, $\forall j \in \varLambda_{n-r}$ なるそれらの係数たち t_j は任意で, $\forall \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} \in K^{n-r}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} c_{p(1)} \\ \vdots \\ c_{p(r)} \\ c_{p(r+1)} \\ \vdots \\ c_{p(n)} \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + t_{n-r} \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

これにより, その連立 1 次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解空間 $\ker L_A$ は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} c_{p(1)} \\ \vdots \\ c_{p(r)} \\ c_{p(r+1)} \\ \vdots \\ c_{p(n)} \end{pmatrix} \in \ker L_A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ここで, $\forall j' \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r$ に対し, $t_j = \delta_{j'-r,j}$ とすれば, 次式が成り立ち,

$$\begin{pmatrix} c_{p(1)} \\ \vdots \\ c_{p(r)} \\ c_{p(r+1)} \\ \vdots \\ c_{p(j)} \\ \vdots \\ c_{p(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a'_{1,r+j'} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+j'} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって, 次のようになる.

$$-a'_{1j'}\begin{pmatrix} a_{1p(1)} \\ a_{2p(1)} \\ \vdots \\ a_{mp(1)} \end{pmatrix} - a'_{2j'}\begin{pmatrix} a_{1p(2)} \\ a_{2p(2)} \\ \vdots \\ a_{mp(2)} \end{pmatrix} + \cdots - a'_{rj'}\begin{pmatrix} a_{1p(r)} \\ a_{2p(r)} \\ \vdots \\ a_{mp(r)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1p(j')} \\ a_{2p(j')} \\ \vdots \\ a_{mp(j')} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

これにより次式が成り立つので,

$$\begin{pmatrix} a_{1p(j')} \\ a_{2p(j')} \\ \vdots \\ a_{mp(j')} \end{pmatrix} = a'_{1j'}\begin{pmatrix} a_{1p(1)} \\ a_{2p(1)} \\ \vdots \\ a_{mp(1)} \end{pmatrix} + a'_{2j'}\begin{pmatrix} a_{1p(2)} \\ a_{2p(2)} \\ \vdots \\ a_{mp(2)} \end{pmatrix} + \cdots + a'_{rj'}\begin{pmatrix} a_{1p(r)} \\ a_{2p(r)} \\ \vdots \\ a_{mp(r)} \end{pmatrix}$$

$\forall j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r$ に対し, その vector$\mathbf{a}_{p(j)}$ は族 $\left\{\mathbf{a}_{p(j')}\right\}_{j' \in \Lambda_r}$ の線形結合となる.

一方で, $A^* = \begin{pmatrix} a_{1p(1)} & a_{1p(2)} & \cdots & a_{1p(r)} \\ a_{2p(1)} & a_{2p(2)} & \cdots & a_{2p(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mp(1)} & a_{mp(2)} & \cdots & a_{mp(r)} \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}^* = \begin{pmatrix} c_{p(1)} \\ c_{p(2)} \\ \vdots \\ c_{p(r)} \end{pmatrix}$ とし $AP_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} A^* & A_* \end{pmatrix}$, $P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^* \\ \mathbf{c}_* \end{pmatrix}$
とおくと, 次のようになるので,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} &= P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}} \\ &= P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A^* & A_* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{\mathrm{R}} A^* & P_{\mathrm{R}} A_* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$P_{\mathrm{R}}A^* = \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}$ が成り立つ. このことに注意すれば, 次式が成り立つなら,

$$c_{p(1)} \begin{pmatrix} a_{1p(1)} \\ a_{2p(1)} \\ \vdots \\ a_{mp(1)} \end{pmatrix} + c_{p(2)} \begin{pmatrix} a_{1p(2)} \\ a_{2p(2)} \\ \vdots \\ a_{mp(2)} \end{pmatrix} + \cdots + c_{p(r)} \begin{pmatrix} a_{1p(r)} \\ a_{2p(r)} \\ \vdots \\ a_{mp(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

次のようになるので,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= c_{p(1)} \begin{pmatrix} a_{1p(1)} \\ a_{2p(1)} \\ \vdots \\ a_{mp(1)} \end{pmatrix} + c_{p(2)} \begin{pmatrix} a_{1p(2)} \\ a_{2p(2)} \\ \vdots \\ a_{mp(2)} \end{pmatrix} + \cdots + c_{p(r)} \begin{pmatrix} a_{1p(r)} \\ a_{2p(r)} \\ \vdots \\ a_{mp(r)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1p(1)} & a_{1p(2)} & \cdots & a_{1p(r)} \\ a_{2p(1)} & a_{2p(2)} & \cdots & a_{2p(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mp(1)} & a_{mp(2)} & \cdots & a_{mp(r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{p(1)} \\ c_{p(2)} \\ \vdots \\ c_{p(r)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

左から行列 P_{R} をかければ, 次のようになる.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{p(1)} \\ c_{p(2)} \\ \vdots \\ c_{p(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{p(1)} \\ c_{p(2)} \\ \vdots \\ c_{p(r)} \end{pmatrix}$$

$\forall j \in \varLambda_r$ に対し, $c_{p(j)} = 0$ が成り立つ. ゆえに, 族 $\left\{ \mathbf{a}_{p(j)} \right\}_{j \in \varLambda_r}$ は線形独立である.

基底の定義よりその部分 vector 空間 $\mathrm{span} \left\{ \mathbf{a}_j \right\}_{j \in \varLambda_n}$ を生成するそれらの vectors$\mathbf{a}_j$ のうち線形独立なものが基底となるのであったので, よって, その組 $\left\langle \mathbf{a}_{p(j)} \right\rangle_{j \in \varLambda_r}$ がその部分 vector 空間 $\mathrm{span} \left\{ \mathbf{a}_j \right\}_{j \in \varLambda_n}$ の基底となる. □

1.8.7 逆行列を求めよう

定理 1.8.10. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, その行列 A の逆行列を求めよう.

1. その行列 A を用いた行列 $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$ を考えこれを, その行列 A が単位行列 I_n となるように, 行基本変形をする.
2. 1.. で行基本変形をされた行列 $\begin{pmatrix} I_n & X \end{pmatrix}$ に用いられるその行列 X はその行列 A の逆行列となる.

この方法を詳しく述べたものを証明としよう.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, 定理 1.7.9 より行基本変形だけで I_n に変形できるのであった. なお, P_{R} は $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(n, K)$ なる行列である.

$$A \to I_n = P_{\mathrm{R}}A$$

ここで, その行列 P_{R} について, これの逆行列が存在するのであったので, $P_{\mathrm{R}}A = I_n$ が成り立つことに注意すると, 次のようになる.

$$AP_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{R}}^{-1}P_{\mathrm{R}}AP_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{R}}^{-1}I_nP_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{R}}^{-1}P_{\mathrm{R}} = I_n$$

また, 明らかに, $P_{\mathrm{R}}A = I_n$ が成り立つ. したがって, 逆行列の定義よりその行列 P_{R} がその行列 A の逆行列となる.

ここで, 行列 $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$ もその行列 A と同じような行基本変形で変形されると, 次のようになる.

$$\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix} \to P_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\mathrm{R}}A & P_{\mathrm{R}}I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & P_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$$

このとき, その行列 A が単位行列 I_n となるように, その行列 $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$ が行列 $\begin{pmatrix} I_n & X \end{pmatrix}$ に変形されたとき, 右側のその行列 X はその行列 P_{R} に一致しこれがその行列 A の逆行列となる. □

1.8.8 生成された部分 vector 空間と解空間

定理 1.8.11. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, 第 j 列が $\mathbf{a}_j$ なる (m,n) 型行列 A, $\mathrm{rank}A = r$ として $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たちを用いて行基本変形と列の入れ替えによって次のように変形されることができるとき,

$$A \to \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}}AP_{\mathrm{C}}$$

$P_{\mathrm{R}}^* \in \mathrm{M}(m-r,m,K)$ として $P_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} * \\ P_{\mathrm{R}}^* \end{pmatrix}$ とおくと, その部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\Lambda_n}$ は次式のように書き換えられることができる.

$$\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\Lambda_n} = \left\{\mathbf{v} \in K^m \middle| P_{\mathrm{R}}^*\mathbf{v} = \mathbf{0}\right\}$$

これはその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\Lambda_n}$ は連立 1 次方程式 $P_{\mathrm{R}}^*\mathbf{v} = \mathbf{0}$ の解空間に一致することを表している.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, 第 j 列が $\mathbf{a}_j$ なる (m,n) 型行列 A, $\mathrm{rank}A = r$ として $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $\mathrm{rank}A = r$ として $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たちを用いて行基本変形と列の入れ替えによって次のように変形されることができるとき,

$$A \to \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}}AP_{\mathrm{C}}$$

定義より $k_j \in K$ なる元々 k_j を用いて $\forall\mathbf{v} \in K^m$ に対し, $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\Lambda_n}$ が成り立つなら, $\mathbf{v} = \sum_{j\in\Lambda_n} k_j\mathbf{a}_j$ のように書かれることができる. ここで, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ とおくと, 次のようになる.

$$\mathbf{v} = \sum_{j\in\Lambda_n} k_j\mathbf{a}_j$$

$$
\begin{aligned}
&= k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_n\mathbf{a}_n \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \\
&= A\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$P_{\mathrm{R}}^* \in \mathrm{M}(m-r, m, K)$ として $P_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} * \\ P_{\mathrm{R}}^* \end{pmatrix}$ とおくと, 有解条件より $P_{\mathrm{R}}^*\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が得られる. したがって, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_n} \subseteq \left\{\mathbf{v} \in K^m \middle| P_{\mathrm{R}}^*\mathbf{v} = \mathbf{0}\right\}$$

逆に, $P_{\mathrm{R}}^*\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つなら, 有解条件より $\exists\mathbf{k} \in K^n$ に対し, $A\mathbf{k} = \mathbf{v}$ が成り立つので, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ とおくと, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= A\mathbf{k} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \\
&= k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_n\mathbf{a}_n \\
&= \sum_{j\in\varLambda_n} k_j\mathbf{a}_j
\end{aligned}
$$

したがって, $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_n} \supseteq \left\{\mathbf{v} \in K^m \middle| P_{\mathrm{R}}^*\mathbf{v} = \mathbf{0}\right\}$$

よって, その部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}$ は次式のように書き換えられることができる.

$$\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_n} = \left\{\mathbf{v} \in K^m \middle| P_{\mathrm{R}}^*\mathbf{v} = \mathbf{0}\right\}$$

□

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p118-131 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007. 改訂版 8 刷 p114-128 ISBN978-4-320-11097-7

1.9 和空間と交空間

1.9.1 和空間

定義 1.9.1. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W を用いた次式のような集合 $U+W$ を考える. この集合 $U+W$ をそれらの部分 vector 空間たち U, W の和空間という.

$$U+W=\{\mathbf{u}+\mathbf{w}\in V|\mathbf{u}\in U,\quad \mathbf{w}\in W\}$$

定理 1.9.1. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W の和空間 $U+W$ もその vector 空間 V の部分 vector 空間である.

また, これより明らかにそれらの部分 vector 空間たち U, W はその和空間 $U+W$ の部分 vector 空間でもある.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W を用いた次式のような集合 $U+W$ を考える.

$$U+W=\{\mathbf{u}+\mathbf{w}\in V|\mathbf{u}\in U,\quad \mathbf{w}\in W\}$$

このとき, 定義より明らかにその集合 $U+W$ は空集合ではなく, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in U+W$ に対し定義より $\mathbf{v}_U,\mathbf{w}_U\in U$ かつ $\mathbf{v}_W,\mathbf{w}_W\in W$ かつ $\mathbf{v}=\mathbf{v}_U+\mathbf{v}_W$ かつ $\mathbf{w}=\mathbf{w}_U+\mathbf{w}_W$ なる vectors$\mathbf{v}_U$, $\mathbf{w}_U$, $\mathbf{v}_W$, $\mathbf{w}_W$ が存在する. ここで, $\forall k,l\in K$ に対しそれらの集合たち U, W はその vector 空間 V の部分 vector 空間であったので, 次式が成り立つ.

$$k\mathbf{v}_U+l\mathbf{w}_U\in U,\quad k\mathbf{v}_W+l\mathbf{w}_W\in W$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}k\mathbf{v}+l\mathbf{w}&=k\left(\mathbf{v}_U+\mathbf{v}_W\right)+l\left(\mathbf{w}_U+\mathbf{w}_W\right)\\&=k\mathbf{v}_U+k\mathbf{v}_W+l\mathbf{w}_U+l\mathbf{w}_W\\&=\left(k\mathbf{v}_U+l\mathbf{w}_U\right)+\left(k\mathbf{v}_W+l\mathbf{w}_W\right)\in U+W\end{aligned}$$

□

定理 1.9.2. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たち $\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_m}$, $\mathrm{span}\left\{\mathbf{w}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_m}+\mathrm{span}\left\{\mathbf{w}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}=\mathrm{span}\left(\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_m}\cup\left\{\mathbf{w}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}\right)$$

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たち $\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_m}$, $\mathrm{span}\left\{\mathbf{w}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{u}\in\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_m}+\mathrm{span}\left\{\mathbf{w}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}$ に対し, $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$ かつ $\mathbf{v}\in\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_m}$ かつ $\mathbf{w}\in\mathrm{span}\left\{\mathbf{w}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}$ なる vectors$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ が存在し定義より $\forall i\in\varLambda_m\forall j\in\varLambda_n$ に対し $k_i,l_j\in K$ なる元々 k_i, l_j を用いて次式のように書かれることができる.

$$\mathbf{v}=\sum_{i\in\varLambda_m}k_i\mathbf{v}_i,\quad \mathbf{w}=\sum_{j\in\varLambda_n}l_j\mathbf{w}_j$$

したがって, 次式が成り立ち

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_m} k_i \mathbf{v}_i + \sum_{j \in \Lambda_n} l_j \mathbf{w}_j$$

$\mathbf{v} \in \mathrm{span}\left(\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_m} \cup \{\mathbf{w}_j\}_{j \in \Lambda_n}\right)$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_m} + \mathrm{span}\{\mathbf{w}_j\}_{j \in \Lambda_n} \subseteq \mathrm{span}\left(\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_m} \cup \{\mathbf{w}_j\}_{j \in \Lambda_n}\right)$$

一方で, $\forall \mathbf{v} \in \mathrm{span}\left(\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_m} \cup \{\mathbf{w}_j\}_{j \in \Lambda_n}\right)$ に対しその vector$\mathbf{v}$ は $\forall i \in \Lambda_m \forall j \in \Lambda_n$ に対し $k_i, l_j \in K$ なる元々 k_i, l_j を用いて次式のように書かれることができる.

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_m} k_i \mathbf{v}_i + \sum_{j \in \Lambda_n} l_j \mathbf{w}_j$$

ここで, 明らかに $\sum_{i \in \Lambda_m} k_i \mathbf{v}_i \in \mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_m}$ かつ $\sum_{j \in \Lambda_n} l_j \mathbf{w}_j \in \mathrm{span}\{\mathbf{w}_j\}_{j \in \Lambda_n}$ が成り立つので, $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_m} + \mathrm{span}\{\mathbf{w}_j\}_{j \in \Lambda_n}$ が成り立つ. したがって, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_m} + \mathrm{span}\{\mathbf{w}_j\}_{j \in \Lambda_n} \supseteq \mathrm{span}\left(\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_m} \cup \{\mathbf{w}_j\}_{j \in \Lambda_n}\right)$$

□

1.9.2 交空間

定義 1.9.2. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W を用いた次式のような集合 $U \cap W$ を考える. この集合 $U \cap W$ をそれらの部分 vector 空間たち U, W の交空間という.

$$U \cap W = \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v} \in U, \quad \mathbf{v} \in W\}$$

定理 1.9.3. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W の交空間 $U \cap W$ もその vector 空間 V の部分 vector 空間である.

また, これより明らかに, その交空間 $U \cap W$ はそれらの部分 vector 空間たち U, W の部分 vector 空間でもある. ちなみに, その集合 $U \cup W$ は必ずしも部分 vector 空間にならないことに注意されたい.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W を用いた次式のような集合 $U \cap W$ を考える.

$$U \cap W = \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v} \in U, \quad \mathbf{v} \in W\}$$

このとき, 定義より明らかにその集合 $U \cap W$ は空集合ではなく, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U \cap W$ に対し定義より $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ かつ $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ が成り立ち, $\forall k, l \in K$ に対しそれらの集合たち U, W はその vector 空間 V の部分 vector 空間であったので, $k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \in U$ かつ $k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \in W$ が成り立ち, したがって, $k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \in U \cap W$ が成り立つ. □

定理 1.9.4. 体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n の $A \in \mathrm{M}(l, n, K)$, $B \in \mathrm{M}(m, n, K)$ なる行列たち A, B を用いた部分 vector 空間たち $\{\mathbf{v} \in K^n | A\mathbf{v} = \mathbf{b}\}$, $\{\mathbf{v} \in K^n | B\mathbf{v} = \mathbf{c}\}$ が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\{\mathbf{v} \in K^n | A\mathbf{v} = \mathbf{b}\} \cap \{\mathbf{v} \in K^n | B\mathbf{v} = \mathbf{c}\} = \left\{\mathbf{v} \in K^n \middle| \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}\right\}$$

証明. 体 K 上の vector 空間 K^n の $A \in \mathrm{M}(l,n,K)$, $B \in \mathrm{M}(m,n,K)$ なる行列たち A, B を用いた部分 vector 空間たち $\{\mathbf{v} \in K^n | A\mathbf{v} = \mathbf{b}\}$, $\{\mathbf{v} \in K^n | B\mathbf{v} = \mathbf{c}\}$ が与えられたとき,

$$\begin{aligned}\{\mathbf{v} \in K^n | A\mathbf{v} = \mathbf{b}\} \cap \{\mathbf{v} \in K^n | B\mathbf{v} = \mathbf{c}\} &= \{\mathbf{v} \in K^n | A\mathbf{v} = \mathbf{b}, \quad B\mathbf{v} = \mathbf{c}\} \\ &= \left\{\mathbf{v} \in K^n \middle| \begin{pmatrix} A\mathbf{v} \\ B\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{\mathbf{v} \in K^n \middle| \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

□

1.9.3 2 つの部分 vector 空間たちの次元たちの和

定理 1.9.5. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W が与えられたとし, これらの交空間 $U \cap W$ を考え, これの基底を $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_r}$ とおき, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ としてそれらの部分 vector 空間たち U, W の基底をそれぞれ $\langle \mathbf{u}_i \rangle_{i \in \varLambda_{r_U}}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_{r_W}}$ とおく. このとき, その和空間 $U + W$ の基底の 1 つは $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_{r_U} \mathbf{w}_{r+1}, \ldots, \mathbf{w}_{r_W} \rangle$ となり次式が成り立つ.

$$\dim U \cap W + \dim U + W = \dim U + \dim W$$

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W が与えられたとし, これらの交空間 $U \cap W$ を考え, これの基底を $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_r}$ とおく. なお, その次元 $\dim U \cap W$ を r とおいた. このとき, その交空間 $U \cap W$ はそれらの部分 vector 空間たち U, W いずれの部分 vector 空間となるので, それらの部分 vector 空間たち U, W の基底は, その組 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_r}$ に適切な vectors が追加されれば, 得られるのであったので, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ としてそれぞれ $\langle \mathbf{u}_i \rangle_{i \in \varLambda_{r_U}}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_{r_W}}$ とおく. なお, それらの次元たち $\dim U$, $\dim W$ をそれぞれ r_U, r_W とおいた. このとき, それらの部分 vector 空間たち U, W の和空間 $U + W$ を考え, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し $k_i, l_i \in K$, $\forall i \in \varLambda_{r_U} \setminus \varLambda_r$ に対し $u_i \in K$, $\forall i \in \varLambda_{r_W} \setminus \varLambda_r$ に対し $w_i \in K$ なる元々 k_i, l_i, u_i, w_i を用いれば, $\forall \mathbf{v} \in U + W$ に対し次式が成り立つ.

$$\mathbf{v} = \left(\sum_{i \in \varLambda_r} k_i \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \varLambda_{r_U} \setminus \varLambda_r} u_i \mathbf{u}_i\right) + \left(\sum_{i \in \varLambda_r} l_i \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \varLambda_{r_W} \setminus \varLambda_r} w_i \mathbf{w}_i\right)$$

したがって, 次式が成り立つので,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_r} (k_i + l_i) \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \varLambda_{r_U} \setminus \varLambda_r} u_i \mathbf{u}_i + \sum_{i \in \varLambda_{r_W} \setminus \varLambda_r} w_i \mathbf{w}_i$$

次式が成り立つ.

$$U + W = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_{r_U} \mathbf{w}_{r+1}, \ldots, \mathbf{w}_{r_W}\}$$

ここで, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $c_i \in K$, $\forall i \in \varLambda_{r_U} \setminus \varLambda_r$ に対し, $d_i \in K$, $\forall i \in \varLambda_{r_W} \setminus \varLambda_r$ に対し $e_i \in K$ なる元々 c_i, d_i, e_i を用いて次式を考えよう.

$$\sum_{i \in \varLambda_r} c_i \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \varLambda_{r_U} \setminus \varLambda_r} d_i \mathbf{u}_i + \sum_{i \in \varLambda_{r_W} \setminus \varLambda_r} e_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$$

したがって, 次のようになる.

$$\sum_{i\in\Lambda_r} c_i\mathbf{v}_i + \sum_{i\in\Lambda_{r_U}\setminus\Lambda_r} d_i\mathbf{u}_i = -\sum_{i\in\Lambda_{r_W}\setminus\Lambda_r} e_i\mathbf{w}_i = \sum_{i\in\Lambda_{r_W}\setminus\Lambda_r} (-e_i)\,\mathbf{w}_i$$

ここで, この vector $\sum_{i\in\Lambda_r} c_i\mathbf{v}_i + \sum_{i\in\Lambda_{r_U}\setminus\Lambda_r} d_i\mathbf{u}_i$ を $\mathbf{w}$ とおくと, その vector$\mathbf{w}$ は vectors$\mathbf{v}_i$ と vectors$\mathbf{u}_i$ によって生成されているので, その部分 vector 空間 U に属し, その vector$\mathbf{w}$ は vectors$\mathbf{w}_i$ によって生成されているので, その部分 vector 空間 W に属する. したがって, その vector$\mathbf{w}$ はその交空間 $U\cap W$ に属することになり, その交空間 $U\cap W$ の基底がその組 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_r}$ であったので, $\forall i\in\Lambda_r$ に対し $c_i'\in K$ なる元々 c_i' を用いて $\mathbf{w}=\sum_{i\in\Lambda_r} c_i'\mathbf{v}_i$ が成り立つ. したがって, 次のようになる.

$$\sum_{i\in\Lambda_r} c_i'\mathbf{v}_i + \sum_{i\in\Lambda_{r_W}\setminus\Lambda_r} e_i\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$$

ここで, その組 $\langle\mathbf{w}_i\rangle_{i\in\Lambda_{r_W}}$ はその部分 vector 空間 W の基底であったので, $i\in\Lambda_r$ なる vectors$\mathbf{v}_i$ と $i\in\Lambda_{r_W}\setminus\Lambda_r$ なる vectors$\mathbf{w}_i$ は線形独立となる. したがって, $\forall i\in\Lambda_r$ に対し, $c_i'=0$ が成り立つかつ, $\forall i\in\Lambda_{r_W}\setminus\Lambda_r$ に対し, $e_i=0$ が成り立つ. これにより, 次のようになる.

$$\mathbf{w} = \sum_{i\in\Lambda_r} c_i\mathbf{v}_i + \sum_{i\in\Lambda_{r_U}\setminus\Lambda_r} d_i\mathbf{u}_i = -\sum_{i\in\Lambda_{r_W}\setminus\Lambda_r} e_i\mathbf{w}_i = -0\sum_{i\in\Lambda_{r_W}\setminus\Lambda_r} \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$$

したがって, 次式が得られる.

$$\sum_{i\in\Lambda_r} c_i\mathbf{v}_i + \sum_{i\in\Lambda_{r_U}\setminus\Lambda_r} d_i\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

ここで, その組 $\langle\mathbf{u}_i\rangle_{i\in\Lambda_{r_U}}$ はその部分 vector 空間 U の基底であったので, $i\in\Lambda_r$ なる vectors$\mathbf{v}_i$ と $i\in\Lambda_{r_U}\setminus\Lambda_r$ なる vectors$\mathbf{u}_i$ は線形独立となる. したがって, $\forall i\in\Lambda_r$ に対し, $c_i=0$ が成り立つかつ, $\forall i\in\Lambda_{r_U}\setminus\Lambda_r$ に対し, $d_i=0$ が成り立つ. 以上より $i\in\Lambda_r$ なる vectors$\mathbf{v}_i$ と $i\in\Lambda_{r_U}\setminus\Lambda_r$ なる vectors$\mathbf{u}_i$ と $i\in\Lambda_{r_W}\setminus\Lambda_r$ なる vectors$\mathbf{w}_i$ は線形独立となる.

したがって, その組 $\langle\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r,\mathbf{u}_{r+1},\ldots,\mathbf{u}_{r_U}\mathbf{w}_{r+1},\ldots,\mathbf{w}_{r_W}\rangle$ はその和空間 $U+W$ の基底となり次式が成り立つ.

$$\dim U+W = r+(r_U-r)+(r_W-r)$$

以上より, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\dim U\cap W+\dim U+W &= r+r+(r_U-r)+(r_W-r)\\ &= r_U+r_W+r-r+r-r\\ &= r_U+r_W\\ &= \dim U+\dim W\end{aligned}$$

□

1.9.4 和空間と交空間で便利そうな定理たち

以上のような和空間と交空間について議論するときに便利そうな定理たちを次に 3 つ述べよう.

定理 (定理 1.8.4 の再掲)**.** $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)\forall\mathbf{b} \in K^m$ に対し, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ として vectors$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を用いた連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に随伴する連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は, 次の方法にしたがって式変形されれば, 必ずその解をもつことがわかる. この式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解こう. この方法は次のようになる.

1. 行基本変形と列の入れ替えによって $\mathrm{rank}A = r$ として次のような行標準形に変形する.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たちそれぞれ P_{R}, P_{C} を用いると, 行標準形にされたその行列は $P_{\mathrm{R}}AP_{\mathrm{C}}$ と書かれることができるのであった. その vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ はその vector$\mathbf{x}$ の成分の順序を入れ替えたものになることに注意すると, この vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ は, ある全単射な写像 $p : \Lambda_n \xrightarrow{\sim} \Lambda_n$ が存在して, 次式のように書かれることができる.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ x_{p(2)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix}$$

3. したがって, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1}x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{1n}x_{p(n)} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1}x_{p(r+1)} - \cdots - a'_{rn}x_{p(n)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix}$$

4. $\forall j \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r$ に対し, $t_{j-r} = x_{p(j)} \in K$ とおくと, $\forall \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} \in K^{n-r}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + t_{n-r} \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. これにより, その連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間 $\ker L_A$ は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} x_{p(1)} \\ \vdots \\ x_{p(r)} \\ x_{p(r+1)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{pmatrix} \in \ker L_A = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

定理 (定理 1.8.9 の再掲)**.** $\mathbf{a}_j \in K^n$ なる vectors$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を用いた部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j \in \varLambda_n}$ の基底を求めよう. これは次のようにして求められることができる.

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m,n,K)$ なる行列 A と $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ なる vector$\mathbf{x}$ を用いて考えよう.
2. その行列 A は行基本変形と列の入れ替えによって次のように変形できるのであった. なお, P_{R}, P_{C} はそれぞれ $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たちで $\mathrm{rank}A = r$ とした.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$$

3. その vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ はその vector$\mathbf{x}$ の成分の順序を入れ替えたものになることに注意すると, この

vector$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x}$ は, ある全単射な写像 $p:\varLambda_n \xrightarrow{\sim} \varLambda_n$ が存在して, 次式のように書かれることができる.

$$P_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_{p(1)} \\ c_{p(2)} \\ \vdots \\ c_{p(n)} \end{pmatrix}$$

4. 次の組 $\left\langle \mathbf{a}_{p(j)} \right\rangle_{j\in\varLambda_r}$ がその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}$ の基底となる.

$$\left\langle \mathbf{a}_{p(j)} \right\rangle_{j\in\varLambda_r} = \left\langle \begin{pmatrix} a_{1p(1)} \\ a_{2p(1)} \\ \vdots \\ a_{mp(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1p(2)} \\ a_{2p(2)} \\ \vdots \\ a_{mp(2)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1p(r)} \\ a_{2p(r)} \\ \vdots \\ a_{mp(r)} \end{pmatrix} \right\rangle$$

定理 (定理 1.8.11 の再掲)**.** 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, 第 j 列が $\mathbf{a}_j$ なる (m,n) 型行列 A, $\mathrm{rank}A = r$ として $P_{\mathrm{R}} \in \mathrm{GL}(m,K)$, $P_{\mathrm{C}} \in \mathrm{GL}(n,K)$ なる行列たちを用いて行基本変形と列の入れ替えによって次のように変形されることができるとき,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} I_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}} A P_{\mathrm{C}}$$

$P_{\mathrm{R}}^* \in \mathrm{M}(m-r,m,K)$ として $P_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} * \\ P_{\mathrm{R}}^* \end{pmatrix}$ とおくと, その部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}$ は次式のように書き換えられることができる.

$$\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_n} = \left\{\mathbf{v} \in K^m \middle| P_{\mathrm{R}}^*\mathbf{v} = \mathbf{0}\right\}$$

これはその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}$ は連立 1 次方程式 $P_{\mathrm{R}}^*\mathbf{v} = \mathbf{0}$ の解空間に一致することを表している.

参考文献

[1] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007. 改訂版 8 刷 p129-133 ISBN978-4-320-11097-7

1.10 置換

1.10.1 置換

定義 1.10.1. 添数集合 $\varLambda_n$ について考えよう. 次のような写像 p をその添数集合 $\varLambda_n$ の置換といい $\begin{pmatrix} (i)_{i \in \varLambda_n} \\ (p(i))_{i \in \varLambda_n} \end{pmatrix}$ とも書く.

$$p : \varLambda_n \xrightarrow{\sim} \varLambda_n; i \mapsto p(i)$$

2 つの置換たち p, p' が与えられたとき, その置換 p を $\begin{pmatrix} (p'(i))_{i \in \varLambda_n} \\ (p \circ p'(i))_{i \in \varLambda_n} \end{pmatrix}$ と書いてもよい. また, 添数集合 $\varLambda_n$ の置換全体の集合 $\mathfrak{S}_n$ を置換群という.

定理 1.10.1. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\#\mathfrak{S}_n = n!$ が成り立つ.

証明. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $n = 1$ のときは明らかに $\#\mathfrak{S}_1 = 1!$ が成り立つ.

ここで, $n = k$ のとき, $\#\mathfrak{S}_k = k!$ が成り立つと仮定しよう. $n = k + 1$ のとき, 残りの元々の集合 $\varLambda_{k+1} \setminus \{k+1\}$ は添数集合 $\varLambda_k$ に等しく写像 $p|\varLambda_k : \varLambda_k \xrightarrow{\sim} \varLambda_{k+1} \setminus \{p(k+1)\}$ を考えよう. $\forall i' \in \varLambda_k$ に対し, 次式のように集合たち $\mathfrak{F}, \mathfrak{R}_{i'}$ と

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \left\{ p|\varLambda_k \in \mathfrak{F}\left(\varLambda_k, \varLambda_{k+1} \setminus \{p(k+1)\}\right) \middle| p : \varLambda_{k+1} \xrightarrow{\sim} \varLambda_{k+1} \right\} \\ \mathfrak{R}_{i'} &= \{p \in \mathfrak{F}\left(\varLambda_{k+1}, \varLambda_{k+1}\right) | p(k+1) = i'\} \end{aligned}$$

次式のような写像 $\mathfrak{p}(p)$ が定められよう.

$$\mathfrak{p} : \mathfrak{R}_{i'} \to \mathfrak{F}; p \mapsto \mathfrak{p}(p) = p|\varLambda_k : \varLambda_k \to \varLambda_{k+1} \setminus \{p(k+1)\}; i \mapsto p(i)$$

定義より $\mathfrak{p}(p) = \mathfrak{p}(q)$ が成り立つなら, 明らかに $p = q$ が成り立つかつ, $p' \in \mathfrak{S}_k \setminus V(\mathfrak{p})$ なる写像 p' が存在したと仮定すると, 次のように写像 p'' を考えれば,

$$p'' : \varLambda_{k+1} \to \varLambda_{k+1}; i \mapsto \begin{cases} i' & \text{if} \quad i = k+1 \\ p'(i) & \text{if} \quad i \neq k+1 \end{cases}$$

写像 $\mathfrak{p}(p'')$ は次のようになる.

$$\mathfrak{p}(p'') = p''|\varLambda_k : \varLambda_k \to \varLambda_{k+1} \setminus \{p''(k+1)\}; i \mapsto p''(i)$$

ここで, $\forall i \in D(\mathfrak{p}(p'')) = \varLambda_k$ に対し, 次のようになるが,

$$\mathfrak{p}(p'')(i) = p''(i) = p'(i)$$

これは $p' \in \mathfrak{S}_k \setminus V(\mathfrak{p})$ が成り立つことに矛盾する. したがって, その写像 $\mathfrak{p}$ は全単射である. ゆえに, その自然数 i' によらず $\#\mathfrak{R}_{i'} = \#\mathfrak{F}$ が成り立つ. また, その写像 p は単射であるから, 次式のような写像 $\mathfrak{p}'$ が考えられることができる.

$$\mathfrak{p}' : \mathfrak{F} \to \mathfrak{S}_k; p \mapsto \mathfrak{p}(p) : \varLambda_k \xrightarrow{\sim} \varLambda_k; i \mapsto \begin{cases} p(k+1) & \text{if} \quad p(i) = k+1 \\ p(i) & \text{if} \quad p(i) \neq k+1 \end{cases}$$

定義より $\mathfrak{p}'(p)=\mathfrak{p}'(q)$ が成り立つなら, 明らかに $p=q$ が成り立つかつ, $p'\in\mathfrak{S}_k\setminus V(\mathfrak{p}')$ なる写像 p' が存在したと仮定すると, $i'\in\varLambda_k$ なる自然数 i' を選んで次のように写像 p'' を考えれば,

$$p'':\varLambda_{k+1}\overset{\sim}{\to}\varLambda_{k+1};i\mapsto\begin{cases}k+1 & \text{if} \quad i=i'\\ p'(i') & \text{if} \quad i=k+1\\ p'(i) & \text{if} \quad i\neq i'\wedge i\neq k+1\end{cases}$$

写像 $\mathfrak{p}'(p'')$ は次のようになり

$$\mathfrak{p}'(p''):\varLambda_k\overset{\sim}{\to}\varLambda_k;i\mapsto\begin{cases}p''(k+1) & \text{if} \quad p''(i)=k+1\\ p''(i) & \text{if} \quad p''(i)\neq k+1\end{cases}$$

ここで, $\forall i\in D(\mathfrak{p}'(p''))=\varLambda_k$ に対し, 次のようになるが,

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}'(p'')(i)&=\begin{cases}p''(k+1) & \text{if} \quad p''(i)=k+1\\ p''(i) & \text{if} \quad p''(i)\neq k+1\end{cases}\\ &=\begin{cases}p'(i') & \text{if} \quad i=i'\\ p'(i) & \text{if} \quad i\neq i'\end{cases}=p'(i)\end{aligned}$$

これは $p'\in\mathfrak{S}_k\setminus V(\mathfrak{p}')$ が成り立つことに矛盾する. したがって, その写像 $\mathfrak{p}'$ は全単射である. ゆえに, $\#\mathfrak{F}=\#\mathfrak{S}_k=k!$ が成り立つ. 以上の関係が図式で表されると, 次のようになる.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{R}_{i'} \arrow[rr, tail, two heads, "\mathfrak{p}"] & & \mathfrak{F} \arrow[rr, tail, two heads, "\mathfrak{p}'"] & & \mathfrak{S}_k \\
p \arrow[rr, mapsto, "\mathfrak{p}"] & & p|\,\varLambda_k \arrow[rr, mapsto, "\mathfrak{p}'"] & & \begin{cases} p|\,\varLambda_k(k+1) & \text{if} \quad p|\varLambda_k(i)=k+1\\ p|\,\varLambda_k(i) & \text{if} \quad p\varLambda_k(i)\neq k+1\end{cases} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
k+1 \arrow[rrd, mapsto, "p"] & & k+1 \arrow[rrd, mapsto, "p"] & & k+1 \\
& & p(k+1) & & p(k+1) \\
& & i' \arrow[rruu, mapsto, bend left, "p"] \arrow[rru, mapsto, "\mathfrak{p}'(p)"] & & \\
i \arrow[rrd, mapsto, bend left, "p"] \arrow[rrd, mapsto, "\mathfrak{p}(p)"'] & & i \arrow[rrd, mapsto, bend left, "p"] \arrow[rrd, mapsto, "\mathfrak{p}'(p)"'] & & \\
& & p(i) & & p(i)
\end{tikzcd}$$

また, その置換群 $\mathfrak{S}_{k+1}$ は $\mathfrak{S}_{k+1}=\bigsqcup_{i\in\varLambda_{k+1}}\mathfrak{R}_i$ のように書き換えられることができるので, したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\#\mathfrak{S}_{k+1}&=\#\bigsqcup_{i\in\varLambda_{k+1}}\mathfrak{R}_i\\ &=\#\varLambda_{k+1}\#\mathfrak{F}\\ &=\#\varLambda_{k+1}\#\mathfrak{S}_k\\ &=(k+1)k!\\ &=(k+1)!\end{aligned}$$

よって, 数学的帰納法によって $\#\mathfrak{S}_n=n!$ が成り立つことが示された. $\square$

定理 1.10.2. 定義より次のような恒等写像 I_{Λ_n} もまたその添数集合 Λ_n の置換となるかつ,

$$I_{\Lambda_n} : \Lambda_n \to \Lambda_n; i \mapsto i$$

$\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し, その置換 p は全単射であるから, これの逆写像 p^{-1} が存在することに注意すれば, 組 $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ は群をなす.

定義 1.10.2. 置換の合成写像のことを置換の積, このときの恒等写像 I_{Λ_n} のことを恒等置換, 置換の逆写像のことを逆置換という.

証明. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, 置換同士の合成写像も置換であり, その集合 $\mathfrak{S}_n$ の元々は写像であるので, $\forall p, q, r \in \mathfrak{S}_n$ に対し, 次式が成り立つ.

$$(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$$

また, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し, 次のような恒等写像 I_{Λ_n} もまたその添数集合 Λ_n の置換となるので,

$$I_{\Lambda_n} : \Lambda_n \to \Lambda_n; i \mapsto i$$

次式が成り立つような写像 I_{Λ_n} がその置換群 $\mathfrak{S}_n$ に存在する.

$$I_{\Lambda_n} \circ p = p \circ I_{\Lambda_n} = p$$

$\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し, その置換 p は全単射でありこれの逆写像 p^{-1} が存在するので, 次式が成り立つようなその写像 p の逆元 p^{-1} が存在する.

$$p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ p = I_{\Lambda_n}$$

□

定義 1.10.3. $n \geq 2$ のとき, 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $i', j' \in \Lambda_n$ なる互いに異なる元々 i', j' を選びその置換群 $\mathfrak{S}_n$ に属し次式が成り立つような置換 τ を考えよう.

$$\tau : \Lambda_n \to \Lambda_n; i \mapsto \begin{cases} j' & \text{if} \quad i = j' \\ i' & \text{if} \quad i = i' \\ i & \text{if} \quad i \neq i' \wedge i \neq j' \end{cases}$$

このような置換 τ をその添数集合 Λ_n の互換といい $\begin{pmatrix} i' & j' \end{pmatrix}$ などと書く. また, その添数集合 Λ_n の互換 τ 全体の集合を $\mathfrak{T}_n$ とおく.

このとき, 明らかに $\tau^{-1} = \tau$ が成り立つ.

定理 1.10.3. $n \geq 2$ が成り立つなら, 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し $\forall i \in \Lambda_s$ に対し $\tau_i \in \mathfrak{T}_k$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されることができる.

$$p = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

ただし, この表し方は一意的でないことに注意されたい.

証明. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し $n=2$ のときその置換 p 自身が互換となる.

$n=k$ のとき, $i \in \Lambda_s$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されることができると仮定しよう.

$$p = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

$n=k+1$ のとき, $p(k+1)=k+1$ が成り立つなら, その置換 p を用いれば, 次式のような写像 p' が得られることができる.

$$p' : \Lambda_k \to \Lambda_k ; i \mapsto p(i)$$

その写像 p' は明らかに $p' \in \mathfrak{S}_k$ が成り立つので, 仮定より $\forall i \in \Lambda_s$ に対し $\tau_i \in \mathfrak{T}_{k+1}$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されることができる.

$$p' = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

このとき, 次のような写像 $\mathfrak{t}$ を考えよう.

$$\mathfrak{t} : \mathfrak{T}_k \to \mathfrak{T}_{k+1} ; \tau \mapsto \mathfrak{t}(\tau) : \Lambda_{k+1} \to \Lambda_{k+1} ; i \mapsto \begin{cases} k+1 & \text{if} \quad i = k+1 \\ \tau(i) & \text{if} \quad i \neq k+1 \end{cases}$$

このとき, $\forall i \in \Lambda_k$ に対し $\tau(i) = \mathfrak{t}(\tau)(i)$ が成り立つかつ, $\forall \tau \in \mathfrak{T}_k$ に対し $\mathfrak{t}(\tau)(k+1) = k+1$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned} p(i) &= \begin{cases} k+1 & \text{if} \quad i = k+1 \\ p'(i) & \text{if} \quad i \neq k+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} k+1 & \text{if} \quad i = k+1 \\ \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1(i) & \text{if} \quad i \neq k+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathfrak{t}(\tau_s) \circ \cdots \circ \mathfrak{t}(\tau_2) \circ \mathfrak{t}(\tau_1)(k+1) & \text{if} \quad i = k+1 \\ \mathfrak{t}(\tau_s) \circ \cdots \circ \mathfrak{t}(\tau_2) \circ \mathfrak{t}(\tau_1)(i) & \text{if} \quad i \neq k+1 \end{cases} \\ &= \mathfrak{t}(\tau_s) \circ \cdots \circ \mathfrak{t}(\tau_2) \circ \mathfrak{t}(\tau_1)(i) \end{aligned}$$

一方, $p(k+1) \neq k+1$ が成り立つなら, 互換 $\tau' = \begin{pmatrix} p(k+1) & k+1 \end{pmatrix}$ を用いると, 写像 $\tau' \circ p$ はその添数集合 Λ_{k+1} の置換であるかつ, 次のようになるので,

$$\tau' \circ p(k+1) = \tau'(p(k+1)) = k+1$$

$p(k+1) = k+1$ が成り立つ場合に帰着できる. したがって, $\forall i \in \Lambda_s$ に対し $\tau_i \in \mathfrak{T}_{k+1}$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されることができる.

$$\tau' \circ p = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

したがって, ${\tau'}^{-1} = \tau' \in \mathfrak{T}_{k+1}$ が成り立ち次のようになる.

$$p = {\tau'}^{-1} \circ \tau' \circ p = {\tau'}^{-1} \circ \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

以上より $n=k+1$ のときでもこれは成り立つ.

数学的帰納法によって示すべきことは示された. □

1.10.2 差積

定義 1.10.4. $n \geq 2$ が成り立つとき, 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し $\forall i \in \Lambda_s$ に対し $\tau_i \in \mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されることができるのであった.

$$p = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

このとき, 集合 $\mathfrak{D}$ を次のように定め

$$\mathfrak{D} = \left\{ (i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \right\}$$

次のような写像 Δ を考えよう. このような写像 Δ を差積などという.

$$\Delta : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Q}; p \mapsto \frac{\prod_{(i,j) \in \mathfrak{D}(p(j)-p(i))}}{\prod_{(i,j) \in \mathfrak{D}}(j-i)}$$

定理 1.10.4. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し $\forall i \in \Lambda_s$ に対し $\tau_i \in \mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されることができるとき,

$$p = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

$\Delta(p) = (-1)^s$ が成り立つ.

なお, $\forall (i,j) \in \mathfrak{D}$ に対し $j - i \neq 0$ が成り立つので, $\displaystyle\prod_{(i,j) \in \mathfrak{D}} (j-i) \neq 0$ となっているかつ, その写像 p は単射であるので, $p(i) \neq p(j)$ が成り立ち $\displaystyle\prod_{(i,j) \in \mathfrak{D}} (p(j) - p(i)) \neq 0$ となっていることに注意されたい. このことは数学的帰納法によって示される.

証明. $n \geq 2$ が成り立つとき, 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, 集合 $\mathfrak{D}$ を次のように定め

$$\mathfrak{D} = \left\{ (i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \right\}$$

次のような写像 Δ を考えよう.

$$\begin{aligned}
\Delta : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Q}; p &\mapsto \frac{\prod_{(i,j) \in \mathfrak{D}} (p(j) - p(i))}{\prod_{(i,j) \in \mathfrak{D}}(j-i)} \\
\mathfrak{D}_< : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{P}\left(\Lambda_n^2\right); p &\mapsto \left\{ (i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \wedge p(i) < p(j) \right\} \\
\mathfrak{D}_> : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{P}\left(\Lambda_n^2\right); p &\mapsto \left\{ (i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \wedge p(i) > p(j) \right\}
\end{aligned}$$

なお, $\forall (i,j) \in \mathfrak{D}$ に対し $j - i \neq 0$ が成り立つので, $\displaystyle\prod_{(i,j) \in \mathfrak{D}} (j-i) \neq 0$ となっているかつ, その写像 p は単射であるので, $p(i) \neq p(j)$ が成り立ち $\displaystyle\prod_{(i,j) \in \mathfrak{D}} (p(j) - p(i)) \neq 0$ となる. さらに, $\forall (i,j) \in \mathfrak{D}$ に対し $p\left(i_1\right) \neq p\left(i_2\right)$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} &= \left\{ (i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \right\} \\
&= \left\{ (i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \wedge p(i) \neq p(j) \right\} \\
&= \left\{ (i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \wedge (p(i) < p(j) \vee p(i) > p(j)) \right\} \\
&= \left\{ (i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| (i < j \wedge p(i) < p(j)) \vee (i < j \wedge p(i) > p(j)) \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{(i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \wedge p(i) < p(j)\right\} \cup \left\{(i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \wedge p(i) > p(j)\right\} \\
&= \mathfrak{D}_<(p) \cup \mathfrak{D}_>(p)
\end{aligned}
$$

また, 次のようになり,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{D}_<(p) \cap \mathfrak{D}_<(p) &= \left\{(i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \wedge p(i) < p(j)\right\} \cap \left\{(i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \wedge p(i) > p(j)\right\} \\
&= \left\{(i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \wedge p(i) < p(j) \wedge i < j \wedge p(i) > p(j)\right\} \\
&= \left\{(i,j) \in \Lambda_n^2 \middle| i < j \wedge \bot\right\} = \emptyset
\end{aligned}
$$

以上より, 次式が成り立つ.

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_<(p) \sqcup \mathfrak{D}_>(p)$$

このとき, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し $\forall i \in \Lambda_s$ に対し $\tau_i \in \mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されることができるのであった.

$$p = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

$s = 1$ のとき, その互換 τ_1 を $(i', j') \in D$ として $\tau_1 = \begin{pmatrix} i' & j' \end{pmatrix} \in \mathfrak{T}_n$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
\Delta(p) = \Delta(\tau_1) &= \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (\tau_1(j) - \tau_1(i))}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (j-i)} \\
&= \frac{(\tau_1(j') - \tau_1(i')) \prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}\setminus\{(i',j')\}} (\tau_1(j) - \tau_1(i))}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (j-i)} \\
&= \frac{(i' - j') \prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}\setminus\{(i',j')\}} (j-i)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (j-i)} \\
&= -\frac{(j' - i') \prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}\setminus\{(i',j')\}} (j-i)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (j-i)} \\
&= -\frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (j-i)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (j-i)} = -1
\end{aligned}
$$

$s = k$ のとき, $\Delta(p) = (-1)^k$ が成り立つと仮定しよう. $s = k+1$ のとき, $\forall i \in \Lambda_{k+1}$ に対し $\tau_i \in \mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表され

$$p = \tau_{k+1} \circ \tau_k \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

次式のように写像 p' を定める.

$$p' = \tau_k \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

このとき, 次のようになり,

$$
\begin{aligned}
\Delta(p) &= \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (p(j) - p(i))}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (j-i)} \\
&= \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (\tau_{k+1} \circ p'(j) - \tau_{k+1} \circ p'(i))}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (j-i)} \\
&= \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (\tau_{k+1} \circ p'(j) - \tau_{k+1} \circ p'(i))}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (p'(i_1) - p'(i))} \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (p'(j) - p'(i))}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}} (j-i)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{<}(p)\sqcup\mathfrak{D}_{>}(p)}\left(\tau_{k+1}\circ p'(j)-\tau_{k+1}\circ p'(i)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{<}(p)\sqcup\mathfrak{D}_{>}(p)}\left(p'(j)-p'(i)\right)}\frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}}\left(p'(j)-p'(i)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}}(j-i)}\\
&= \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{<}(p)}\left(\tau_{k+1}\circ p'(j)-\tau_{k+1}\circ p'(i)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{<}(p)}\left(p'(j)-p'(i)\right)}\\
&\quad \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{>}(p)}\left(\tau_{k+1}\circ p'(j)-\tau_{k+1}\circ p'(i)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{>}(p)}\left(p'(j)-p'(i)\right)}\frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}}\left(p'(j)-p'(i)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}}(j-i)}\\
&= \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{<}(p)}\left(\tau_{k+1}\circ p'(j)-\tau_{k+1}\circ p'(i)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{<}(p)}\left(p'(j)-p'(i)\right)}\\
&\quad \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{>}(p)}(-1)\left(\tau_{k+1}\circ p'(i)-\tau_{k+1}\circ p'(j)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{>}(p)}(-1)\left(p'(i)-p'(j)\right)}\frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}}\left(p'(j)-p'(i)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}}(j-i)}\\
&= \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{<}(p)}\left(\tau_{k+1}\circ p'(j)-\tau_{k+1}\circ p'(i)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{<}(p)}\left(p'(j)-p'(i)\right)}\frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{>}(p)}\left(\tau_{k+1}\circ p'(i)-\tau_{k+1}\circ p'(j)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{>}(p)}\left(p'(i)-p'(j)\right)}\\
&\quad \frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{>}(p)}(-1)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}_{>}(p)}(-1)}\frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}}\left(p'(j)-p'(i)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}}(j-i)}\\
&= \frac{\prod_{(p(i),p(j))\in\mathfrak{D}}\left(\tau_{k+1}\circ p'(j)-\tau_{k+1}\circ p'(i)\right)}{\prod_{(p(i),p(j))\in\mathfrak{D}}\left(p'(j)-p'(i)\right)}\frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}}\left(p'(j)-p'(i)\right)}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}}(j-i)}\\
&= \varDelta\left(\tau_{k+1}\right)\varDelta\left(p'\right)=(-1)(-1)^k=(-1)^{k+1}
\end{aligned}
$$

以上より数学的帰納法によって $\forall p\in\mathfrak{S}_n$ に対し $\forall i\in\varLambda_s$ に対し $\tau_i\in\mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されるとき,

$$p=\tau_s\circ\cdots\circ\tau_2\circ\tau_1$$

$\varDelta(p)=(-1)^s$ が成り立つ. □

定理 1.10.5. $n\geq 2$ が成り立つとき, 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall p\in\mathfrak{S}_n$ に対し, $\forall i\in\varLambda_s$, $\sigma_i\in\mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_i と $\forall j\in\varLambda_t$, $\tau_j\in\mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_j を用いて次式のように表されるとき,

$$p=\sigma_s\circ\cdots\circ\sigma_2\circ\sigma_1=\tau_t\circ\cdots\circ\tau_2\circ\tau_1$$

その自然数たち s,t の偶奇が一意的である, 即ち, $s,t\in 2\mathbb{N}$ または $s,t\in 2\mathbb{N}-1$ が成り立つ.

このことは上記の差積 $\varDelta$ を用いて背理法によって示される.

定義 1.10.5. 置換 p が偶数の個数の互換たちの積で表されるとき, 即ち, $\varDelta(p)=1$ が成り立つとき, その置換は偶置換といい, 奇数の個数の互換たちの積で表されるとき, 即ち, $\varDelta(p)=-1$ が成り立つとき, その置換は奇置換という.

証明. $n\geq 2$ が成り立つとき, 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, 集合 $\mathfrak{D}$ を次のように定め

$$\mathfrak{D}=\left\{(i,j)\in\varLambda_n^2\middle|i<j\right\}$$

次のような写像たち $\varDelta$ を考えよう.

$$\varDelta:\mathfrak{S}_n\rightarrow\mathbb{Q};p\mapsto\frac{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}(p(j)-p(i))}}{\prod_{(i,j)\in\mathfrak{D}(j-i)}}$$

このとき, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し $\forall i \in \Lambda_s$ に対し $\tau_i \in \mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されるとき,

$$p = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

次式が成り立つのであった.

$$\varDelta(p) = (-1)^s$$

ここで, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $\forall i \in \Lambda_s$, $\sigma_i \in \mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_i と $\forall j \in \Lambda_t$, $\tau_j \in \mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_j を用いて次式のように表されるとき,

$$p = \sigma_s \circ \cdots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tau_t \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

次式が成り立つ.

$$\varDelta(p) = (-1)^s = (-1)^t$$

ここで, $s \in 2\mathbb{N}$ かつ $t \in 2\mathbb{N} - 1$ と仮定しよう. このとき, $t + 1 \in 2\mathbb{N}$ が成り立つので, 自然数たち m, n を用いて $s = 2m$ かつ $t + 1 = 2n$ と書かれることができ, したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
(-1)^s &= (-1)^{2m} = \left((-1)^2\right)^m = 1^m = 1 \\
(-1)^t &= (-1)^{-1}(-1)^{t+1} = -(-1)^{2n} = -\left((-1)^2\right)^n = -1^n = -1
\end{aligned}$$

となり $(-1)^s = (-1)^t$ に矛盾する. $t \in 2\mathbb{N}$ かつ $s \in 2\mathbb{N} - 1$ と仮定しても同様に矛盾する.

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\neg (s \in 2\mathbb{N} \land t \in 2\mathbb{N} - 1) \land \neg (t \in 2\mathbb{N} \land s \in 2\mathbb{N} - 1) \\
&\Leftrightarrow (s \notin 2\mathbb{N} \lor t \notin 2\mathbb{N} - 1) \land (t \notin 2\mathbb{N} \lor s \notin 2\mathbb{N} - 1) \\
&\Leftrightarrow (s \in 2\mathbb{N} - 1 \lor t \in 2\mathbb{N}) \land (t \in 2\mathbb{N} - 1 \lor s \in 2\mathbb{N}) \\
&\Leftrightarrow (s \in 2\mathbb{N} \land t \in 2\mathbb{N}) \lor (s \in 2\mathbb{N} - 1 \land t \in 2\mathbb{N} - 1) \\
&\quad \lor (s \in 2\mathbb{N} \land s \in 2\mathbb{N} - 1) \lor (t \in 2\mathbb{N} \land t \in 2\mathbb{N} - 1) \\
&\Leftrightarrow (s \in 2\mathbb{N} \land t \in 2\mathbb{N}) \lor (s \in 2\mathbb{N} - 1 \land t \in 2\mathbb{N} - 1) \lor \bot \lor \bot \\
&\Leftrightarrow s, t \in 2\mathbb{N} \lor s, t \in 2\mathbb{N} - 1
\end{aligned}$$

□

定理 1.10.6. $n \geq 2$ のとき, 置換群 $\mathfrak{S}_n$ のうち偶置換, 奇置換全体の集合がそれぞれ $\mathfrak{S}_{\mathrm{even}}$, $\mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}$ とおかれると, $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{\mathrm{even}} \sqcup \mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}$ が成り立つ. さらに, その集合 $\mathfrak{S}_n$ のうち偶置換, 奇置換がどちらも $\dfrac{n!}{2}$ つ存在する.

証明. $n \geq 2$ が成り立つとき, 置換群 $\mathfrak{S}_n$ のうち偶置換, 奇置換全体の集合がそれぞれ $\mathfrak{S}_{\mathrm{even}}$, $\mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}$ とおかれると, 即ち, 集合たち $\mathfrak{S}_{\mathrm{even}}$, $\mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}$ を次のように定めると,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\mathrm{even}} &= \{p \in \mathfrak{S}_n | \varDelta(p) = 1\} \\
\mathfrak{S}_{\mathrm{odd}} &= \{p \in \mathfrak{S}_n | \varDelta(p) = -1\}
\end{aligned}$$

次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_n &= \{p \in \mathfrak{S}_n | p \in \mathfrak{S}_n\} \\
&= \{p \in \mathfrak{S}_n | \varDelta(p) = \pm 1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \{p \in \mathfrak{S}_n | \varDelta(p) = 1\} \cup \{p \in \mathfrak{S}_n | \varDelta(p) = -1\} \\ &= \mathfrak{S}_{\mathrm{even}} \cup \mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}\end{aligned}$$

次のようになるので,

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{\mathrm{even}} \cap \mathfrak{S}_{\mathrm{odd}} &= \{p \in \mathfrak{S}_n | \varDelta(p) = 1\} \cap \{p \in \mathfrak{S}_n | \varDelta(p) = -1\} \\ &= \{p \in \mathfrak{S}_n | \varDelta(p) = 1 \wedge \varDelta(p) = -1\} = \emptyset\end{aligned}$$

$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{\mathrm{even}} \sqcup \mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}$ が成り立つ.

さらに, 添数集合 $\varLambda_n$ の互換全体の集合を $\mathfrak{T}_n$ とし $\tau \in \mathfrak{T}_n$ なる互換 τ を選んで次のような写像 $\mathfrak{t}$ を考えよう.

$$\mathfrak{t} : \mathfrak{S}_{\mathrm{even}} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}; p \mapsto \tau \circ p$$

このとき, その互換 τ は全単射でこれの逆写像 τ^{-1} が存在しこれはその互換 τ 自身となるので, この写像 $\mathfrak{t}$ の逆写像 $\mathfrak{t}^{-1}$ が次式のように存在する.

$$\mathfrak{t}^{-1} : \mathfrak{S}_{\mathrm{odd}} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathrm{even}}; p \mapsto \tau^{-1} \circ p = \tau \circ p$$

これにより, その写像 $\mathfrak{t}$ は全単射となり $\#\mathfrak{S}_{\mathrm{even}} = \#\mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}$ が成り立つ. したがって, 定理 1.10.1 より $\#\mathfrak{S}_n = n!$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\#\mathfrak{S}_n &= \#\mathfrak{S}_{\mathrm{even}} \sqcup \mathfrak{S}_{\mathrm{odd}} \\ &= \#\mathfrak{S}_{\mathrm{even}} + \#\mathfrak{S}_{\mathrm{odd}} \\ &= 2\#\mathfrak{S}_{\mathrm{even}} = 2\#\mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}\end{aligned}$$

よって, 次式が得られる.

$$\#\mathfrak{S}_{\mathrm{even}} = \#\mathfrak{S}_{\mathrm{odd}} = \frac{\#\mathfrak{S}_n}{2} = \frac{n!}{2}$$

□

定義 1.10.6. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, 次のような写像 sgn を考える

$$\mathrm{sgn} : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}; p \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 1 \\ \varDelta(p) & \text{if} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

この写像 sgn を置換の符号という.

定理 1.10.7. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall p, q \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $\mathrm{sgn} q \circ p = \mathrm{sgn} p \mathrm{sgn} q$ が成り立つ.

証明. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall p, q \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $n = 1$ のとき, $\forall p' \in \mathfrak{F}(\varLambda_1, \varLambda_1)$ に対しその写像 p' は恒等写像となり置換であるので, 明らかに示すべきことが成り立つ.

$n \geq 2$ のとき, $\forall i \in \varLambda_s$ に対し $\sigma_i \in \mathfrak{T}_n$ なる互換たち σ_i と $\forall j \in \varLambda_t$ に対し $\tau_j \in \mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_j を用いて次式のように表されるとき,

$$p = \sigma_s \circ \cdots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1, \quad q = \tau_t \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

次式が成り立つ.

$$q \circ p = \tau_t \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \sigma_s \circ \cdots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$$

このとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn} q \circ p &= \varDelta(q \circ p)\\
&= (-1)^{s+t}\\
&= (-1)^s(-1)^t\\
&= \varDelta(p)\varDelta(q)\\
&= \mathrm{sgn} p \mathrm{sgn} q
\end{aligned}$$

□

定理 1.10.8. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $\mathrm{sgn} p^{-1} = \mathrm{sgn} p$ が成り立つ.

証明. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $n=1$ のとき, $\forall p' \in \mathfrak{F}\left(\varLambda_1, \varLambda_1\right)$ に対しその写像 p' は恒等写像となり置換であるので, $\mathrm{sgn} p^{-1} = \mathrm{sgn} p$ が成り立つ.

$n \geq 2$ のとき, $\forall i \in \varLambda_s$ に対し $\tau_i \in \mathfrak{T}_n$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されるとき,

$$p = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

次のようになるので,

$$p^{-1} = \tau_1^{-1} \circ \tau_2^{-1} \circ \cdots \circ \tau_s^{-1}$$

したがって, 次のようになる.

$$\mathrm{sgn} p = \varDelta(p) = (-1)^s = \varDelta\left(p^{-1}\right) = \mathrm{sgn} p^{-1}$$

□

1.10.3 辞書式順序

定理 1.10.9. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall\left(\alpha_i\right)_{i \in \varLambda_n} \in \varLambda_m^n \exists p \in \mathfrak{S}_n \forall k, l \in \varLambda_n$ に対し, $k \leq l$ が成り立つなら, $\alpha_{p(k)} \leq \alpha_{p(l)}$ が成り立つようにすることができる. このような置換 p を辞書式順序という.

証明. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $n=1$ のときは明らかである. $n=2$ のとき, $\forall\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix} \in \varLambda_m^2$ に対し, $\alpha_1 \leq \alpha_2$ のとき, 恒等置換で考えればよいし, $\alpha_1 > \alpha_2$ のとき, 置換 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ で考えればよい. そこで, $n=j$ のとき, $\forall\left(\alpha_i\right)_{i \in \varLambda_j} \in \varLambda_m^j \exists p \in \mathfrak{S}_j \forall k, l \in \varLambda_j$ に対し, $k \leq l$ が成り立つなら, $\alpha_{p(k)} \leq \alpha_{p(l)}$ が成り立つようにすることができると仮定しよう. $n=j+1$ のとき, $\forall\left(\alpha_i\right)_{i \in \varLambda_n} \in \varLambda_m^{j+1}$ に対し, 仮定よりある $p' \in \mathfrak{S}_j$ なる置換 p' が存在して, $\forall k, l \in \varLambda_j$ に対し, $k \leq l$ が成り立つなら, $\alpha_{p'(k)} \leq \alpha_{p'(l)}$ が成り立つようにすることができる. そこで, 次式のような集合 $\mathfrak{D}$ が考えられると,

$$\mathfrak{D} = \left\{\alpha_k \in \varLambda_m \middle| \alpha_k \leq \alpha_{j+1}\right\}, \quad \mathfrak{M} = \left\{M \in \varLambda_j \middle| \max \mathfrak{D} = \alpha_{p'(M)}\right\}$$

$\mathfrak{D} = \emptyset$ のとき, $\max V\left(p' | \mathfrak{M}\right) = 0$ とすることにして, 次のような置換 p で考えられれば,

$$p : \varLambda_{j+1} \xrightarrow{\sim} \varLambda_{j+1}; k \mapsto p(k) = \begin{cases} p'(k-1) & \text{if} \quad \max V\left(p' | \mathfrak{M}\right) + 1 < k \\ j+1 & \text{if} \quad k = \max V\left(p' | \mathfrak{M}\right) + 1 \\ p'(k) & \text{if} \quad k \leq \max V\left(p' | \mathfrak{M}\right) \end{cases}$$

$\forall k,l \in \varLambda_{j+1}$ に対し, $k \leq l$ が成り立つなら, 次のようになることから,

条件 1	条件 2	理由	結論
$\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1<k$ $\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1<l$		$k-1 \leq l-1$ が成り立つことからその置換 p' のおき方による.	$\alpha_{p(k)} \leq \alpha_{p(l)}$
$\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1<k$ $l=\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1$		仮定に矛盾している.	
$\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1<k$ $l \leq \max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)$		仮定に矛盾している.	
$k=\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1$ $\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1<l$		仮定に矛盾している.	
$k=\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1$ $l=\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1$		$k=l$ より明らかである.	$\alpha_{p(k)}=\alpha_{p(l)}$
$k=\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1$ $l \leq \max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)$		仮定に矛盾している.	
$k \leq \max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)$ $\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1<l$	$\mathfrak{D}=\emptyset$	ありえない.	
	$\mathfrak{D}\neq\emptyset$ $\alpha_{j+1} \leq \alpha_{p'(l-1)}$	$\alpha_{p'(k)} \leq \alpha_{j+1} \leq \alpha_{p'(l-1)}$ が成り立つことによる.	$\alpha_{p(k)} \leq \alpha_{p(l)}$
	$\mathfrak{D}\neq\emptyset$ $\alpha_{p'(l-1)}<\alpha_{j+1}$	$\alpha_{p'(k)} \leq \alpha_{j+1}$ が成り立つ. そこで, $\alpha_{p'(l-1)}<\alpha_{j+1}$ が成り立つとすれば, $l-1 \leq \max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)$ が成り立つことになるが, これは仮定に矛盾している. したがって, $\alpha_{j+1} \leq \alpha_{p'(l-1)}$ が得られる.	$\alpha_{p(k)} \leq \alpha_{p(l)}$
$k \leq \max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)$ $l=\max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)+1$	$\mathfrak{D}=\emptyset$	ありえない.	
	$\mathfrak{D}\neq\emptyset$	$\alpha_{p'(k)} \leq \alpha_{j+1}=\alpha_{p(l)}$ が成り立つことによる.	$\alpha_{p(k)} \leq \alpha_{p(l)}$
$k \leq \max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)$ $l \leq \max V\left(p'\middle\|\mathfrak{M}\right)$	$\mathfrak{D}=\emptyset$	ありえない.	
	$\mathfrak{D}\neq\emptyset$	その置換 p' のおき方による.	$\alpha_{p(k)}=\alpha_{p(l)}$

$\forall k,l \in \varLambda_n$ に対し, $k \leq l$ が成り立つなら, $\alpha_{p(k)} \leq \alpha_{p(l)}$ が成り立つ.

以上より, 数学的帰納法によって, $\forall\left(\alpha_i\right)_{i \in \varLambda_n} \in \varLambda_m^n \exists p \in \mathfrak{S}_n \forall k,l \in \varLambda_n$ に対し, $k \leq l$ が成り立つなら, $\alpha_{p(k)} \leq \alpha_{p(l)}$ が成り立つようにすることができる. □

定理 1.10.10. $\forall k,l \in \varLambda_n$ に対し, $k \leq l$ が成り立つなら, $\alpha_k \leq \alpha_l$ が成り立つような $\left(\alpha_i\right)_{i \in \varLambda_n} \in \varLambda_m^n$ なる組 $\left(\alpha_i\right)_{i \in \varLambda_n}$ はすべて $\dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$ つある.

証明. $\forall k,l \in \varLambda_n$ に対し, $k \leq l$ が成り立つなら, $\alpha_k \leq \alpha_l$ が成り立つような $\left(\alpha_i\right)_{i \in \varLambda_n} \in \varLambda_m^n$ なる組 $\left(\alpha_i\right)_{i \in \varLambda_n}$ について, $m=n=1$ のとき, その個数は明らかに 1 つある. そこで, $m+n-1=p$ のとき, その個数が $\dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$ つあると仮定しよう. $m+n-1=p+1$ のとき, $\forall k,l \in \varLambda_n$ に対し, $k \leq l$ が成り立つなら, $\alpha_k \leq \alpha_l$ が成り立つような $\left(\alpha_i\right)_{i \in \varLambda_n} \in \varLambda_{p+1}^n$ なる組 $\left(\alpha_i\right)_{i \in \varLambda_n}$ のうち, その族 $\left\{\alpha_i\right\}_{i \in \varLambda_n}$ に自然数 m が含まれないようなものの個数が $\dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$ つある. 一方で, その族 $\left\{\alpha_i\right\}_{i \in \varLambda_n}$ に自然数 m が含まれるようなもの

の個数は, 族 $\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda_{n-1}}$ とその自然数 m との和集合がとられればよいので, $\dfrac{(m+1+n-1-1)!}{(n-1)!(m+1-1)!}$ つある. 以上より, その個数は $\dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}+\dfrac{(m+1+n-1-1)!}{(n-1)!(m+1-1)!}$ に等しいので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}+\frac{(m+1+n-1-1)!}{(n-1)!(m+1-1)!}&=\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}+\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!}\\&=\frac{m(m+n-1)!}{n!m!}+\frac{n(m+n-1)!}{n!m!}\\&=\frac{(m-n)(m+n-1)!}{n!m!}=\frac{(m-n)!}{n!m!}\end{aligned}$$

よって, 数学的帰納法により, $\forall k,l\in\Lambda_n$ に対し, $k\leq l$ が成り立つなら, $\alpha_k\leq\alpha_l$ が成り立つような $(\alpha_i)_{i\in\Lambda_n}\in\Lambda_m^n$ なる組 $(\alpha_i)_{i\in\Lambda_n}$ はすべて $\dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$ つあることが示された. □

定理 1.10.11. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall(\alpha_i)_{i\in\Lambda_n}\in\Lambda_m^n$ に対し, $\forall k,l\in\Lambda_n$ に対し, $k\neq l$ が成り立つなら, $\alpha_k\neq\alpha_l$ が成り立つとき, $\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n$ に対し, $k<l$ が成り立つなら, $\alpha_{p(k)}<\alpha_{p(l)}$ が成り立つようにすることができる.

証明. 置換群 $\mathfrak{S}_n$ について, $\forall(\alpha_i)_{i\in\Lambda_n}\in\Lambda_m^n$ に対し, $\forall k,l\in\Lambda_n$ に対し, $k\neq l$ が成り立つなら, $\alpha_k\neq\alpha_l$ が成り立つとき, 定理 1.10.9 より次のようになることから,

$$\begin{aligned}&\forall k,l\in\Lambda_n\left[k\neq l\Rightarrow\alpha_k\neq\alpha_l\right]\wedge\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[k\leq l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\right]\\
&\Leftrightarrow\forall k,l\in\Lambda_n\left[p(k)\neq p(l)\Rightarrow\alpha_{p(k)}\neq\alpha_{p(l)}\right]\\
&\quad\wedge\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[\left(k\leq l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\right)\wedge(k\neq l\Rightarrow p(k)\neq p(l))\right]\\
&\Leftrightarrow\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[\left(p(k)\neq p(l)\Rightarrow\alpha_{p(k)}\neq\alpha_{p(l)}\right)\right.\\
&\quad\left.\wedge\left(k\leq l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\right)\wedge(k\neq l\Rightarrow p(k)\neq p(l))\right]\\
&\Rightarrow\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[\left(k\neq l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\neq\alpha_{p(l)}\right)\wedge\left(k\leq l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\right)\right]\\
&\Leftrightarrow\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[\left(k\neq l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\neq\alpha_{p(l)}\right)\wedge\left(k<l\vee k=l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\right)\right]\\
&\Leftrightarrow\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[\left(k\neq l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\neq\alpha_{p(l)}\right)\wedge\left((\neg k<l\wedge\neg k=l)\vee\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\right)\right]\\
&\Leftrightarrow\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[\left(k\neq l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\neq\alpha_{p(l)}\right)\right.\\
&\quad\left.\wedge\left(k<l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\right)\wedge\left(k=l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\right)\right]\\
&\Leftrightarrow\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[\left(k\neq l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\neq\alpha_{p(l)}\right)\right.\\
&\quad\left.\wedge\left(k<l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\right)\wedge\top\wedge(k<l\Rightarrow k\neq l)\right]\\
&\Leftrightarrow\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[\left(k<l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\right)\wedge\left(k<l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\neq\alpha_{p(l)}\right)\right]\\
&\Leftrightarrow\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[\left(\neg k<l\vee\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\right)\wedge\left(\neg k<l\vee\alpha_{p(k)}\neq\alpha_{p(l)}\right)\right]\\
&\Leftrightarrow\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[k<l\Rightarrow\alpha_{p(k)}\leq\alpha_{p(l)}\wedge\alpha_{p(k)}\neq\alpha_{p(l)}\right]\\
&\Leftrightarrow\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n\left[k<l\Rightarrow\alpha_{p(k)}<\alpha_{p(l)}\right]\end{aligned}$$

$\forall(\alpha_i)_{i\in\Lambda_n}\in\Lambda_m^n$ に対し, $\forall k,l\in\Lambda_n$ に対し, $k\neq l$ が成り立つなら, $\alpha_k\neq\alpha_l$ が成り立つとき, $\exists p\in\mathfrak{S}_n\forall k,l\in\Lambda_n$ に対し, $k<l$ が成り立つなら, $\alpha_{p(k)}<\alpha_{p(l)}$ が成り立つようにすることができる. □

定理 1.10.12. $\forall k,l\in\Lambda_n$ に対し, $k<l$ が成り立つなら, $\alpha_k<\alpha_l$ が成り立つような $(\alpha_i)_{i\in\Lambda_n}\in\Lambda_m^n$ なる組 $(\alpha_i)_{i\in\Lambda_n}$ の個数は, $0\leq n\leq m$ のとき, すべて $\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ つ, $m<n$ のとき, すべて 0 つある.

証明. $\forall k,l \in \varLambda_n$ に対し, $k < l$ が成り立つなら, $\alpha_k < \alpha_l$ が成り立つような $(\alpha_i)_{i\in\varLambda_n} \in \varLambda_m^n$ なる組 $(\alpha_i)_{i\in\varLambda_n}$ について, $0 \leq n \leq m$ のとき, $m+n-1=1$ のときは明らかであるから, $m+n-1=p$ のとき, その個数は $\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ つあると仮定すると, $m+n+1=p+1$ のとき, $\forall k,l \in \varLambda_n$ に対し, $k<l$ が成り立つなら, $\alpha_k < \alpha_l$ が成り立つような $(\alpha_i)_{i\in\varLambda_n} \in \varLambda_{p+1}^n$ なる組 $(\alpha_i)_{i\in\varLambda_n}$ のうち, その族 $\{\alpha_i\}_{i\in\varLambda_n}$ に自然数 m が含まれないようなものの個数が $\dfrac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!}$ つある. 一方で, その族 $\{\alpha_i\}_{i\in\varLambda_n}$ に自然数 m が含まれるようなものの個数は, $\{\alpha_i\}_{i\in\varLambda_{n-1}} \subseteq \varLambda_{m-1}$ なる族 $\{\alpha_i\}_{i\in\varLambda_{n-1}}$ で考えられればよいので, $\dfrac{(m-1)!}{(n-1)!\,((m-1)-(n-1))!}$ つある. 以上より, その個数は $\dfrac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!} + \dfrac{(m-1)!}{(n-1)!\,((m-1)-(n-1))!}$ に等しいので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\frac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!\,((m-1)-(n-1))!} &= \frac{(m-1)!}{n!(m-n-1)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!}\\ &= \frac{(m-n)m!}{mn!(m-n)!} + \frac{nm!}{mn!(m-n)!}\\ &= \left(\frac{m-n+n}{m}\right)\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}\end{aligned}$$

よって, 数学的帰納法により, $\forall k,l \in \varLambda_n$ に対し, $k<l$ が成り立つなら, $\alpha_k < \alpha_l$ が成り立つような $(\alpha_i)_{i\in\varLambda_n} \in \varLambda_m^n$ なる組 $(\alpha_i)_{i\in\varLambda_n}$ はすべて $\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ つあることが示された.

$m<n$ のとき, $(\alpha_i)_{i\in\varLambda_n} \in \varLambda_m^n$ なる組 $(\alpha_i)_{i\in\varLambda_n}$ を写像 $(\alpha_i)_{i\in\varLambda_n} : \varLambda_n \to \varLambda_m$ とみなせば, これは単射でありえない. しかしながら, これは仮定に矛盾している. ゆえに, その個数は 0 つである. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p167-171 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007. 改訂版 8 刷 p65-68 ISBN978-4-320-11097-7

[3] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958. 第 53 刷 p68 ISBN4-7853-1301-3

[4] Wikipedia. ”重複組合せ”. Wikipedia. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%87%8D%E8%A4%87%E7%B5%84%E5%90%88%E3%81%9B (2022-2-15 5:01 閲覧)

[5] Wikipedia. ”組合せ”. Wikipedia. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%B5%84%E5%90%88%E3%81%9B_(%E6%95%B0%E5%AD%A6) (2022-2-16 6:22 閲覧)

1.11 行列式

1.11.1 行列式

公理 1.11.1 (行列式写像の公理)**.** 可換環 R 上に次の性質を満たすような写像 $\det : \mathrm{M}(n,n,R) \rightarrow R$ を n 次行列式写像といい, $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_n^2} \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列 A のその写像 $\det$ による像 $\det(A)$ を $\det A$, $|A|$, $\left|a_{ij}\right|_{(i,j)\in\varLambda_n^2}$ などと書きその行列 A の行列式という.

- $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ を考え $\forall j' \in \varLambda_n$ に対し $k,l \in R$ なる元々 k, l を用いて $\mathbf{a}_{j'} = k\mathbf{b} + l\mathbf{c}$ とおくとき, 次式が成り立つ.

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & k\mathbf{b}+l\mathbf{c} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + l\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{c} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

  この性質を n 重線形性という.
- $n \geq 2$ のとき, $\mathbf{a}_{j'} = \mathbf{a}_{j'+1}$ なる元々 j' がその添数集合 $\varLambda_{n-1}$ に存在するなら, 即ち, その行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ の隣り合う 2 つの列々が等しいようなものがあれば, $\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = 0$ が成り立つ.
- n 次単位行列について $\det I_n = 1$ が成り立つ.

定理 1.11.1 (行列式写像の存在性)**.** このとき, その写像 $\det$ は存在する.

証明. 可換環 R 上で n 次行列式写像 $\det : \mathrm{M}(n,n,R) \rightarrow R$ を考えよう. $n=1$ のとき, $\det : \mathrm{M}(1,1,R) \rightarrow R; \left(a_{11}\right) \mapsto a_{11}$ とすれば, 明らかであろう.

$n=2$ のとき, $\det : \mathrm{M}(2,2,R) \rightarrow R; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ とすれば, $k_1, k_2 \in R$ なる元々 k_1, k_2 を用いて $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ とすれば, 第 1 列について,

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} kb_1+lc_1 & a_{12} \\ kb_2+lc_2 & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \left(kb_1+lc_1\right)a_{22} - a_{12}\left(kb_2+lc_2\right) \\
&= kb_1a_{22} + lc_1a_{22} - ka_{12}b_2 - la_{12}c_2 \\
&= k\left(b_1a_{22} - a_{12}b_2\right) + l\left(c_1a_{22} - a_{12}c_2\right) \\
&= k\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} + l\det\begin{pmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

第 2 列についても同様にして示される. $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ とすれば, 次のようになり,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21} = 0$$

また, 次のようになる.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$$

以上より, $n=2$ のときも行列式写像が存在する.

$n=m$ のときも行列式写像が存在するとしよう. $n=m+1$ のとき, $A=\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_{m+1}^2}\in\mathrm{M}(m+1,m+1,R)$ なる行列 A を考え, $\forall\left(i',j'\right)\in\varLambda_{m+1}^2$ に対し次のような写像 $\mathfrak{s}_{\left(i',j'\right)}$ を定義する.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_{\left(i',j'\right)}&:\mathrm{M}(m+1,m+1,R)\rightarrow\mathrm{M}(m,m,R);A\mapsto\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\left(\varLambda_{m+1}\setminus\{i'\}\right)\times\left(\varLambda_{m+1}\setminus\{j'\}\right)}\\
&=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j'-1} & a_{1,j'+1} & \cdots & a_{1,m+1}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j'-1} & a_{2,j'+1} & \cdots & a_{2,m+1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{i'-1,1} & a_{i'-1,2} & \cdots & a_{i'-1,j'-1} & a_{i'-1,j'+1} & \cdots & a_{i'-1,m+1}\\
a_{i'+1,1} & a_{i'+1,2} & \cdots & a_{i'+1,j'-1} & a_{i'+1,j'+1} & \cdots & a_{i'+1,m+1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m+1,2} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,j'-1} & a_{m+1,j'+1} & \cdots & a_{m+1,m+1}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

このとき, $\mathfrak{s}_{\left(i',j'\right)}(A)\in\mathrm{M}(m,m,R)$ が成り立つので, その写像 $\det$ が定義されている.

さて, $\forall i'\in\varLambda_{m+1}$ に対し次式のように写像 D を定める.

$$D:\mathrm{M}(m+1,m+1,R)\rightarrow R;A\mapsto\sum_{j\in\varLambda_{m+1}}(-1)^{i'+j}a_{i'j}\det\mathfrak{s}_{\left(i',j'\right)}(A)$$

このとき, $\forall j'\in\varLambda_{m+1}$ に対し次のようにおき,

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix}a_{1j'}\\a_{2j'}\\\vdots\\a_{m+1,j'}\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_{m+1}\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_{m+1}\end{pmatrix},\\
B_{\left(i',j'\right)}=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j'-1} & a_{1,j'+1} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1,m+1}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j'-1} & a_{2,j'+1} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2,m+1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{i'-1,1} & a_{i'-1,2} & \cdots & a_{i'-1,j'-1} & a_{i'-1,j'+1} & \cdots & b_{i'-1} & \cdots & a_{i'-1,m+1}\\
a_{i'+1,1} & a_{i'+1,2} & \cdots & a_{i'+1,j'-1} & a_{i'+1,j'+1} & \cdots & b_{i'+1} & \cdots & a_{i'+1,m+1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m+1,2} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,j'-1} & a_{m+1,j'+1} & \cdots & b_{m+1} & \cdots & a_{m+1,m+1}
\end{pmatrix},\\
C_{\left(i',j'\right)}=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j'-1} & a_{1,j'+1} & \cdots & c_1 & \cdots & a_{1,m+1}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j'-1} & a_{2,j'+1} & \cdots & c_2 & \cdots & a_{2,m+1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{i'-1,1} & a_{i'-1,2} & \cdots & a_{i'-1,j'-1} & a_{i'-1,j'+1} & \cdots & c_{i'-1} & \cdots & a_{i'-1,m+1}\\
a_{i'+1,1} & a_{i'+1,2} & \cdots & a_{i'+1,j'-1} & a_{i'+1,j'+1} & \cdots & c_{i'+1} & \cdots & a_{i'+1,m+1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m+1,2} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,j'-1} & a_{m+1,j'+1} & \cdots & c_{m+1} & \cdots & a_{m+1,m+1}
\end{pmatrix}
\end{gathered}$$

可換環 R の元 $D(A)$ について, 次のようになり,

$$\begin{aligned}
D(A)&=\sum_{j\in\varLambda_{m+1}}(-1)^{i'+j}a_{i'j}\det\mathfrak{s}_{\left(i',j\right)}(A)\\
&=\sum_{j\in\varLambda_{m+1}\setminus\{j'\}}(-1)^{i'+j}a_{i'j}\det\mathfrak{s}_{\left(i',j\right)}(A)\\
&\quad+(-1)^{i'+j'}a_{i'j'}\det\mathfrak{s}_{\left(i',j'\right)}(A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j \in \varLambda_{m+1} \setminus \{j'\}} (-1)^{i'+j} a_{i'j} \left(k \det B_{(i',j')} + l \det C_{(i',j')} \right) \\
&\quad + (-1)^{i'+j'} (k b_{i'} + l c_{i'}) \det \mathfrak{s}_{(i',j')} (A) \\
&= k \sum_{j \in \varLambda_{m+1} \setminus \{j'\}} (-1)^{i'+j} a_{i'j} \det B_{(i',j')} \\
&\quad + l \sum_{j \in \varLambda_{m+1} \setminus \{j'\}} (-1)^{i'+j} a_{i'j} \det C_{(i',j')} \\
&\quad + k(-1)^{i'+j'} b_{i'} \det B_{(i',j')} + l(-1)^{i'+j'} c_{i'} \det C_{(i',j')} \\
&= k \left(\sum_{j \in \varLambda_{m+1} \setminus \{j'\}} (-1)^{i'+j} a_{i'j} \det B_{(i',j')} + (-1)^{i'+j'} b_{i'} \det B_{(i',j')} \right) \\
&\quad + l \left(\sum_{j \in \varLambda_{m+1} \setminus \{j'\}} (-1)^{i'+j} a_{i'j} \det C_{(i',j')} + (-1)^{i'+j'} c_{i'} \det C_{(i',j')} \right) \\
&= k \sum_{j \in \varLambda_{m+1}} (-1)^{i'+j} \begin{cases} b_{i'} & \text{if} \quad j = j' \\ a_{i'j} & \text{if} \quad j \neq j' \end{cases} \det B_{(i',j')} \\
&\quad + l \sum_{j \in \varLambda_{m+1}} (-1)^{i'+j} \begin{cases} c_{i'} & \text{if} \quad j = j' \\ a_{i'j} & \text{if} \quad j \neq j' \end{cases} \det C_{(i',j')} \\
&= kD \left(B_{(i',j')} \right) + lD \left(C_{(i',j')} \right)
\end{aligned}$$

また, $\forall j' \in \varLambda_m$ に対し次のように定め,

$$\begin{pmatrix} a_{1j'} \\ a_{2j'} \\ \vdots \\ a_{m+1,j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,j'+1} \\ a_{2,j'+1} \\ \vdots \\ a_{m+1,j'+1} \end{pmatrix}$$

可換環 R の元 $D(A)$ について, 仮定より次のようになる.

$$\begin{aligned}
D(A) &= \sum_{j \in \varLambda_{m+1}} (-1)^{i'+j} a_{i'j} \det \mathfrak{s}_{(i',j)} (A) \\
&= \sum_{j \in \varLambda_{m+1} \setminus \{j', j'+1\}} (-1)^{i'+j} a_{i'j} \det \mathfrak{s}_{(i',j)} (A) \\
&\quad + (-1)^{i'+j'} a_{i'j'} \det \mathfrak{s}_{(i',j')} (A) \\
&\quad + (-1)^{i'+j'+1} a_{i',j'+1} \det \mathfrak{s}_{(i',j'+1)} (A) \\
&= \sum_{j \in \varLambda_{m+1} \setminus \{j', j'+1\}} (-1)^{i'+j} a_{i'j} 0 \\
&\quad + (-1)^{i'+j'} a_{i'j'} \det \mathfrak{s}_{(i',j')} (A) \\
&\quad + (-1)^{i'+j'+1} a_{i',j'+1} \det \mathfrak{s}_{(i',j'+1)} (A) \\
&= (-1)^{i'+j'} a_{i'j'} \det \mathfrak{s}_{(i',j')} (A) \\
&\quad + (-1)^{i'+j'+1} a_{i',j'+1} \det \mathfrak{s}_{(i',j'+1)} (A)
\end{aligned}$$

ここで, $\begin{pmatrix} a_{1j'} \\ a_{2j'} \\ \vdots \\ a_{m+1,j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,j'+1} \\ a_{2,j'+1} \\ \vdots \\ a_{m+1,j'+1} \end{pmatrix}$ が成り立つので, したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} D\left(A\right) &= (-1)^{i'+j'} a_{i'j'} \det \mathfrak{s}_{(i',j')}\left(A\right) \\ &\quad + (-1)^{i'+j'+1} a_{i',j'+1} \det \mathfrak{s}_{(i',j'+1)}\left(A\right) \\ &= (-1)^{i'+j'} a_{i'j'} \det \mathfrak{s}_{(i',j')}\left(A\right) \\ &\quad - (-1)^{i'+j'} a_{i'j'} \det \mathfrak{s}_{(i',j')}\left(A\right) = 0 \end{aligned}$$

可換環 R の元 $D\left(I_{m+1}\right)$ について, $\forall\left(i',j'\right) \in \Lambda_{m+1}^2$ に対し, $\mathfrak{s}_{(i',j')}\left(I_{m+1}\right) = I_m$ が成り立つので, 次のようになり,

$$\begin{aligned} D\left(I_{m+1}\right) &= \sum_{j \in \Lambda_{m+1}} (-1)^{i'+j} \delta_{i'j} \det \mathfrak{s}_{(i',j')}\left(I_{m+1}\right) \\ &= \sum_{j \in \Lambda_{m+1} \setminus \{i'\}} (-1)^{i'+j} 0 \det I_m + (-1)^{i'+i'} 1 \det I_m \\ &= \left((-1)^2\right)^{i'} = 1^{i'} = 1 \end{aligned}$$

以上より, $n = m+1$ のときでもその写像 det が存在する.

数学的帰納法によってその写像 det が存在することが示された. □

定理 1.11.2. $n \geq 2$ のとき, 可換環 R 上で $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$, 添数集合 Λ_nの互換$\tau = \begin{pmatrix} j' & k' \end{pmatrix}$ を用いれば, $\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{\tau(1)} & \mathbf{a}_{\tau(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n)} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ が成り立つ. この性質を交代性などという.

証明. 可換環 R 上で n 次行列式写像 $\det : \mathrm{M}(n,n,R) \rightarrow R$ を考えよう. $n \geq 2$ のとき, $\forall j' \in \Lambda_{n-1}$ に対し $d \in \Lambda_{n-j'+1}$ なる自然数 d について, $1 \leq j' \leq n-1$ かつ $1 \leq d \leq n-j'$ が成り立つので, $2 \leq j'+d$ と $n \leq 2n-j'-1$ より $2 \leq j'+d \leq n$ が成り立つ. これにより, $j' \in \Lambda_{n-1}$, $d \in \Lambda_{n-j'}$ なる自然数たち j', $j'+d$ を用いて $\tau = \begin{pmatrix} j' & j'+d \end{pmatrix}$ とおくことができる. $\forall j \in \Lambda_n$ に対し, $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} j' & j'+d \end{pmatrix}$ なる添数集合 Λ_n の互換 τ を用いた行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{\tau(1)} & \mathbf{a}_{\tau(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n)} \end{pmatrix}$ について考えよう.

$d = 1$ のとき, 行列 A' を次式のように定める.

$$A' = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} + \mathbf{a}_{j'+1} & \mathbf{a}_{j'} + \mathbf{a}_{j'+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

このとき, その行列 A' に隣り合う 2 つの列々が等しいようなものがあるので, $\det A' = 0$ が成り立つ. 一方で, 次のようになり,

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} + \mathbf{a}_{j'+1} & \mathbf{a}_{j'} + \mathbf{a}_{j'+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \mathbf{a}_{j'}+\mathbf{a}_{j'+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&\quad + \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'+1} & \mathbf{a}_{j'}+\mathbf{a}_{j'+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&\quad + \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \mathbf{a}_{j'+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&\quad + \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'+1} & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&\quad + \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'+1} & \mathbf{a}_{j'+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで, 隣り合う 2 つの列々が等しいようなものがある行列の行列式は 0 になるので, 次のようになり,

$$\begin{aligned}
\det A' &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \mathbf{a}_{j'+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&\quad + \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'+1} & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \mathbf{a}_{j'+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&\quad + \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(j')} & \mathbf{a}_{\tau(j'+1)} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\tau(1)} & \mathbf{a}_{\tau(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n)}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以上より, 次式が成り立つ.

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\tau(1)} & \mathbf{a}_{\tau(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n)}\end{pmatrix} = \det A' = 0$$

したがって, $\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\tau(1)} & \mathbf{a}_{\tau(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n)}\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ が成り立つ.

$d = k$ のとき, $\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\tau(1)} & \mathbf{a}_{\tau(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n)}\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ が成り立つと仮定しよう. $d = k+1$ のとき, 次のように互換を定める.

$$\tau = \begin{pmatrix}j' & j'+d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}j' & j'+k+1\end{pmatrix}$$

このとき, 次のようになり,

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\tau(1)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(j')} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(j'+k)} & \mathbf{a}_{\tau(j'+k+1)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n)}\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'+k+1} & \cdots & \mathbf{a}_{j'+k} & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'+k+1} & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \mathbf{a}_{j'+k} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= -\left(-\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_{j'+k+1} & \mathbf{a}_{j'+k} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\right)\\
&= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_{j'+k+1} & \mathbf{a}_{j'+k} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_{j'+k} & \mathbf{a}_{j'+k+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以上より, $d = k+1$ のときも成り立つ.

よって, 数学的帰納法によって示すべきことは示された. □

定理 1.11.3. 可換環 R 上で $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列 $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ が与えられたとき, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{p(1)} & \mathbf{a}_{p(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{p(n)}\end{pmatrix} = \mathrm{sgn} p \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ が成り立つ.

証明. 可換環 R 上で n 次行列式写像 $\det : \mathrm{M}(n,n,R) \to R$ を考えよう. $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列 $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ が与えられたとき, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$ に対し, その置換 p を用いた行列 $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{p(1)} & \mathbf{a}_{p(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{p(n)}\end{pmatrix}$ について考えよう. $n = 1$ のとき, $\forall p' \in \mathfrak{F}(\varLambda_1, \varLambda_1)$ に対しその写像 p' は恒等写像となり置換であるので, 明らかに $\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{p(1)}\end{pmatrix} = \mathrm{sgn} p \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\end{pmatrix}$ が成り立つ.

$n \geq 2$ のとき, $\forall i \in \varLambda_s$, $\tau_i \in \mathfrak{T}_k$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されることができるのであった.

$$p = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

したがって, $s = 1$ のとき, その置換 p は互換となり, その互換 p を用いると, $\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{p(1)} & \mathbf{a}_{p(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{p(n)}\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ が成り立つのであった. ここで, $\mathrm{sgn}p = \Delta(p) = (-1)^1 = -1$ より $\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{p(1)} & \mathbf{a}_{p(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{p(n)}\end{pmatrix} = \mathrm{sgn}p\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ が成り立つ.

$s = k$ のとき, $\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{p(1)} & \mathbf{a}_{p(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{p(n)}\end{pmatrix} = \mathrm{sgn}p\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ が成り立つと仮定しよう. $s = k + 1$ のとき, 次のように置換 p' を定める.

$$p' = \tau_k \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

このとき, 仮定より次のようになり,

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{p(1)} & \mathbf{a}_{p(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{p(n)}\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\tau_{k+1}\circ p'(1)} & \mathbf{a}_{\tau_{k+1}\circ p'(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau_{k+1}\circ p'(n)}\end{pmatrix}\\
&= -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{p'(1)} & \mathbf{a}_{p'(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{p'(n)}\end{pmatrix}\\
&= -\mathrm{sgn}p'\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= (-1)\Delta(p')\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= (-1)^{k+1}\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= \Delta(p)\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{sgn}p\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$s = k + 1$ のときも成り立つ.

以上より, 数学的帰納法によって示すべきことは示された. □

定理 1.11.4. $n \geq 2$ のとき, 可換環 R 上で $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n, n, R)$ なる行列 $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ が与えられたとき, $\mathbf{a}_{j'} = \mathbf{a}_{k'}$ なる互いに異なる元々 j', k' がその添数集合 $\varLambda_n$ に存在するなら, 即ち, その行列 $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ の 2 つの列々が等しいようなものがあれば, $\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} = 0$ が成り立つ.

証明. $n \geq 2$ のとき, 可換環 R 上で $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n, n, R)$ なる行列 $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ が与えられたとき, $\mathbf{a}_{j'} = \mathbf{a}_{k'}$ なる元々 j', k' がその添数集合 $\varLambda_n$ に存在するなら, 即ち, その行列 $(\mathbf{v}_j)_{j\in\varLambda_n}$ の 2 つの列々が等しいようなものがあれば, $j' \leq n - 1$ のとき, $\tau = \begin{pmatrix}j' + 1 & k'\end{pmatrix} \in \mathfrak{T}_n$, $j' = n$ のとき, $\tau = \begin{pmatrix}j' - 1 & k'\end{pmatrix} \in \mathfrak{T}_n$ なる互換 τ を用いて $j \in \varLambda_n \backslash \mathfrak{A}$ が成り立つときのその行列 $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ を次のように書き換えれば, $\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\tau(1)} & \mathbf{a}_{\tau(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n)}\end{pmatrix}$ が成り立つ. $j' \leq n - 1$ のとき, 次のようになり,

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} &= -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\tau(1)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(j')} & \mathbf{a}_{\tau(j'+1)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n)}\end{pmatrix}\\
&= -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \mathbf{a}_{k'} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \mathbf{a}_{j'+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$j' = n$ のとき, 次のようになり,

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} &= -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\tau(1)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n-1)} & \mathbf{a}_{\tau(n)}\end{pmatrix}\\
&= -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{k'} & \mathbf{a}_{j'}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \mathbf{a}_{j'}\end{pmatrix}$$

その行列 $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\tau(1)} & \mathbf{a}_{\tau(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n)}\end{pmatrix}$ に隣り合う 2 つの列々が等しいようなものがあるので, 次式が成り立つ.

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\tau(1)} & \mathbf{a}_{\tau(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{\tau(n)}\end{pmatrix} = 0$$

□

定理 1.11.5 (行列式写像の一意性)**.** 可換環 R 上で行列式写像 $\det$ は一意的に存在し $\forall A = (a_{ij})_{(i,j)\in\varLambda_n^2} \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し次式が成り立つ.

$$\det A = \sum_{p\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}p \prod_{j\in\varLambda_n} a_{p(j),j}$$

証明. 可換環 R 上で n 次行列式写像 $\det : \mathrm{M}(n,n,R) \to R$ を考えよう. $\mathbf{e}_j = (\delta_{ij})_{i\in\varLambda_n} \in R^n$, $A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列たち $\mathbf{e}_j$, A を考えその行列 A の第 j 列を $\mathbf{a}_j$ とおく.

$j = 1$ について考えると, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\det A &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}\sum_{i_1\in\varLambda_n} a_{i_1 1}\mathbf{e}_{i_1} & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\ &= \sum_{i_1\in\varLambda_n} a_{i_1 1}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\ &= \sum_{\forall j\in\varLambda_1[i_j\in\varLambda_n]} a_{i_1 1}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$n = 1$ のとき, $\det : \mathrm{M}(1,1,R) \to R; (a_{11}) \mapsto a_{11}$ とすれば, 明らかに成り立つので, $n \geq 2$ のときを考えよう. $j = k \leq n-1$ のとき, 次式が成り立つと仮定しよう.

$$\det A = \sum_{\forall j\in\varLambda_k[i_j\in\varLambda_n]} \prod_{i'\in\varLambda_k} a_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_k} & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

$j = k+1 \leq n$ のとき, 次のようになり,

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\forall j\in\varLambda_k[i_j\in\varLambda_n]} \prod_{i'\in\varLambda_k} a_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_k} & \sum_{i_{k+1}\in\varLambda_n} a_{i_{k+1},k+1}\mathbf{e}_{i_{k+1}} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\ &= \sum_{\forall j\in\varLambda_k[i_j\in\varLambda_n]} \prod_{i'\in\varLambda_k} a_{i_{i'}i'} \sum_{i_{k+1}\in\varLambda_n} a_{i_{k+1},k+1}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_k} & \mathbf{e}_{i_{k+1}} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\ &= \sum_{\forall j\in\varLambda_k[i_j\in\varLambda_n]} \sum_{i_{k+1}\in\varLambda_n} \prod_{i'\in\varLambda_k} a_{i_{i'}i'} a_{i_{k+1},k+1}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_k} & \mathbf{e}_{i_{k+1}} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\ &= \sum_{\forall j\in\varLambda_{k+1}[i_j\in\varLambda_n]} \prod_{i'\in\varLambda_{k+1}} a_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_k} & \mathbf{e}_{i_{k+1}} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

以上より, $n = k+1$ のときも成り立つので, 数学的帰納法によって, $\forall j' \in \varLambda_n$ に対し次式が成り立つことが示された.

$$\det A = \sum_{\forall j\in\varLambda_{j'}[i_j\in\varLambda_n]} \prod_{i'\in\varLambda_{j'}} a_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_{j'}} & \mathbf{a}_{j'+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

$j' = n$ とすれば, 次のようになる.

$$\det A = \sum_{\forall j \in \varLambda_n [i_j \in \varLambda_n]} \prod_{i' \in \varLambda_n} a_{i_{i'} i'} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_n} \end{pmatrix}$$

ここで, 次式のように集合 $\mathfrak{A}$ を定めると,

$$\mathfrak{A} = \{ j \in \varLambda_n | \exists p \in \mathfrak{S}_n [p(j) = i_j] \}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\forall j \in (\varLambda_n \setminus \mathfrak{A}) \sqcup \mathfrak{A} [i_j \in \varLambda_n]} \prod_{i' \in \varLambda_n} a_{i_{i'} i'} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\forall j \in \varLambda_n \setminus \mathfrak{A} [i_j \in \varLambda_n]} \prod_{i' \in \varLambda_n} a_{i_{i'} i'} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_n} \end{pmatrix} + \sum_{\forall j \in \mathfrak{A} [i_j \in \varLambda_n]} \prod_{i' \in \varLambda_n} a_{i_{i'} i'} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, $n = 1$ のとき, 写像 $p : \varLambda_1 \to \varLambda_1; j \mapsto i_j$ は集合 $\mathfrak{F}(\varLambda_1, \varLambda_1)$ に属し, $\forall p' \in \mathfrak{F}(\varLambda_1, \varLambda_1)$ に対し, その写像 p' は恒等写像となり置換であるので,

$$\begin{aligned} \varLambda_1 \setminus \mathfrak{A} &= \{ j \in \varLambda_1 | \neg (\exists p \in \mathfrak{S}_1 [p(j) = i_j]) \} \\ &= \{ j \in \varLambda_1 | \forall p \in \mathfrak{S}_1 [p(j) \neq i_j] \} \\ &= \{ j \in \varLambda_1 | \bot \} = \emptyset \end{aligned}$$

したがって, 次式が成り立つ.

$$\det A_{11} = \sum_{\forall j \in \mathfrak{A} [i_j \in \varLambda_1]} \prod_{i' \in \varLambda_1} a_{i_{i'} i'} \det (\mathbf{e}_{i_1})$$

$n \geq 2$ が成り立つとき, $j \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら, $i_j = p(j)$ なる置換 p が存在しその置換 p は単射であったので, $\forall j, k \in \varLambda_n$ に対し, $j \neq k$ が成り立つなら, $p(j) \neq p(k)$ が成り立ち, したがって, $i_j \neq i_k$ が成り立つ. 逆に, $j \notin \mathfrak{A}$ が成り立つなら, 置換の定義より写像 $p' : \varLambda_n \to \varLambda_n; j \mapsto i_j$ は全射でないか単射でないことになり, その写像 p' が単射であると仮定すると, その写像 p' は全射でないことになる.

ここで, $n = 2$ のとき, その写像 p' は次の通りが考えられる.

$$\begin{gathered} 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2 \\ 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2 \\ 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1 \end{gathered}$$

その写像 p' は全射でないので, 次のようになる.

$$\begin{gathered} 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2 \end{gathered}$$

このとき, その写像 p' は単射でない.

$n = k$ のとき, その写像 p' が全射でないなら, その写像 p' は単射でないと仮定しよう. $n = k + 1$ のとき, 写像 $p'|\varLambda_k$ が全射であるなら, $\forall i' \in \varLambda_k$ に対し $i' = p'|\varLambda_k (j')$ なる自然数 j' がその集合 $\varLambda_k = D(p'|\varLambda_k)$ に存在する. $p'(k+1) = k+1$ が成り立つなら, $\forall i' \in \varLambda_{k+1}$ に対し, $i' \in \varLambda_k$ が成り立つなら, 上記の議論より $i' = p'|\varLambda_k (j') = p'(j')$ なる自然数 j' がその集合 $\varLambda_{k+1} = D(p')$ に存在し, $i' = k+1$ が成り立つなら,

$k+1=p'(j')$ なる自然数 j' が $k+1$ でその集合 $\varLambda_{k+1}=D(p')$ に存在するので, その写像 p' が全射となり仮定よりその写像 p' が全射でないことに矛盾する. $p'(k+1)\neq k+1$ が成り立つなら, $p'(k+1)\in\varLambda_k$ が成り立つことになり, その写像 $p'|\varLambda_k$ が全射であったので, $\varLambda_k=V(p'|\varLambda_k)$ となり $p'(j')=p'|\varLambda_k(j')=p'(k+1)$ なる自然数 j' がその集合 $\varLambda_k=D(p'|\varLambda_k)$ に存在する. これにより, $j'\neq k+1$ が成り立つかつ, $p'(j')=p'(k+1)$ が成り立つので, その写像 p' は単射でない. 写像 $p'|\varLambda_k$ が全射でないなら, 仮定よりその写像 $p'|\varLambda_k$ は単射でないことになり, $j'\neq k'$ が成り立つかつ, $p'|\varLambda_k(j')=p'|\varLambda_k(k')$ が成り立つような自然数 j', k' が添数集合 $\varLambda_k$ に存在する. これは, $j'\neq k'$ が成り立つかつ, $p'(j')=p'(k')$ が成り立つような自然数 j', k' が集合 $\varLambda_{k+1}$ に存在するともいえ, したがって, $j'\neq k'$ が成り立つかつ, $p'(j')=p'(k')$ が成り立つような自然数 j', k' が集合 $\varLambda_{k+1}$ に存在する.

以上より数学的帰納法によって, その写像 p' が全射でないなら, その写像 p' は単射でないことが示された. しかしながら, このことは仮定のその写像 p' が単射であるという仮定に矛盾する. したがって, その写像 p' は単射でないことになり, $j'=k'$ が成り立つかつ, $i_{j'}=i_{k'}$ が成り立つ.

これにより, $n\geq 2$ が成り立つとき, $j\in\mathfrak{A}$ が成り立つならそのときに限り, $\forall j,k\in\varLambda_n$ に対し $j\neq k$ が成り立つなら, $i_j\neq i_k$ が成り立つ. したがって, $j\in\varLambda_n\backslash\mathfrak{A}$ が成り立つならそのときに限り, $j\neq k$ が成り立つかつ, $i_j=i_k$ が成り立つような自然数たち j, k が存在することになり, $j\in\varLambda_n\backslash\mathfrak{A}$ が成り立つときのその行列 $\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_n}\end{pmatrix}$ に2つの列々が等しいようなものがあるので, $\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_n}\end{pmatrix}=0$ が成り立つ. したがって, 次式のようになり

$$\sum_{\forall j\in\varLambda_n\backslash\mathfrak{A}[i_j\in\varLambda_n]}\prod_{i'\in\varLambda_n}a_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_n}\end{pmatrix}=0$$

次式のようになる.

$$\det A=\sum_{\forall j\in\mathfrak{A}[i_j\in\varLambda_n]}\prod_{i'\in\varLambda_n}a_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_n}\end{pmatrix}$$

ここで, その集合 $\mathfrak{A}$ の定義より $p(j)=i_j$ なる置換 p が存在するので, 次のように書き換えられることができる.

$$\begin{aligned}\det A&=\sum_{\forall j\in\mathfrak{A}[i_j\in\varLambda_n\land\exists p\in\mathfrak{S}_n[p(j)=i_j]]}\prod_{i'\in\varLambda_n}a_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_n}\end{pmatrix}\\&=\sum_{\forall j\in\mathfrak{A}[p(j)=i_j\in\varLambda_n]\land p\in\mathfrak{S}_n}\prod_{i'\in\varLambda_n}a_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{i_1} & \cdots & \mathbf{e}_{i_n}\end{pmatrix}\\&=\sum_{\substack{p\in\mathfrak{S}_n\\ \forall j\in\varLambda_n[p(j)\in\varLambda_n]}}\prod_{j\in\varLambda_n}a_{p(j)j}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{p(1)} & \cdots & \mathbf{e}_{p(n)}\end{pmatrix}\\&=\sum_{p\in\mathfrak{S}_n}\prod_{j\in\varLambda_n}a_{p(j)j}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{p(1)} & \cdots & \mathbf{e}_{p(n)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで, $\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{p(1)} & \cdots & \mathbf{e}_{p(n)}\end{pmatrix}=\mathrm{sgn}p\det(\mathbf{e}_j)_{j\in\varLambda_n}$ が成り立つので, 次のようになり,

$$\begin{aligned}\det A&=\sum_{p\in\mathfrak{S}_n}\prod_{j\in\varLambda_n}a_{p(j)j}\mathrm{sgn}p\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n\end{pmatrix}\\&=\sum_{p\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}p\prod_{j\in\varLambda_n}a_{p(j)j}\det I_n\end{aligned}$$

ここで, $\det I_n = 1$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$\det A = \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_n} a_{p(j)j}$$

これにより, その写像 det は一意的に存在する. □

定理 1.11.6. $n \geq 2$ のとき, $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n,n,R)$ のようにその列 vector たちが $\mathbf{a}_j$ となるような行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ を考え $\forall j', k' \in \Lambda_n$ に対し, $j' \neq k'$ が成り立つなら, $\forall k \in R$ に対し次式が成り立つ, 即ち, その行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ の 1 つの列の各成分に対応する他の列の k 倍を加えた各成分を加えた行列の行列式はもとの行列の行列式に等しい.

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} + k\mathbf{a}_{k'} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

証明. $n \geq 2$ のとき, $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n,n,R)$ のようにその列 vector たちが $\mathbf{a}_j$ となるような行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ を考え $\forall j', k' \in \Lambda_n$ に対し, $j' \neq k'$ が成り立つなら, 次のようになり,

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} + k\mathbf{a}_{k'} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + k \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{k'} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + k \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{k'} & \cdots & \mathbf{a}_{k'} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, その行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ の 2 つの列々が等しいようなものがあるので, 次式が成り立つ.

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} + k\mathbf{a}_{k'} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

□

定理 1.11.7. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が正則行列でないなら, $\det A = 0$ が成り立つ.

証明. 体 K 上で, $\forall \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ が正則行列でないなら, 次式が成り立つので, 次のようになり,

$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \dim \mathrm{span} \left\{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \right\} \neq n$$

これらの vectors$\left\{ \mathbf{a}_j \right\}_{j \in \Lambda_n}$ は線形従属であることになり $\sum_{j \in \Lambda_n} c_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ かつ, $\exists j \in \Lambda_n$ に対し, $c_j \neq 0$ が成り立つ. ここで, $c_j \neq 0$ となるような自然数 j を j' とおくと, 次のようになり,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Lambda_n} c_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} c_j \mathbf{a}_j + c_{j'} \mathbf{a}_{j'} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow c_{j'} \mathbf{a}_{j'} = - \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} c_j \mathbf{a}_j = \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} \left(-c_j \right) \mathbf{a}_j \\ &\Leftrightarrow \mathbf{a}_{j'} = \frac{1}{c_{j'}} \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} \left(-c_j \right) \mathbf{a}_j = \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} \left(-\frac{c_j}{c_{j'}} \right) \mathbf{a}_j \end{aligned}$$

したがって, 次のようになる.

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j'} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} \left(-\frac{c_i}{c_{j'}} \right) \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} \left(-\frac{c_i}{c_{j'}} \right) \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} \left(-\frac{c_i}{c_{j'}} \right) \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで, $\forall i \in \Lambda_n \setminus \{j'\}$ に対し, その行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ の 2 つの列々が等しいようなものがあるので, 次式が成り立ち,

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = 0$$

したがって, 次式が成り立つ.

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} \left(-\frac{c_i}{c_{j'}} \right) 0 = 0$$

□

定理 1.11.8. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $\det A \neq 0$ が成り立つなら, その行列 A は正則行列である[*7].

証明. 定理 1.11.7 に対偶律をとっただけにすぎない. □

定理 1.11.9. 可換環 R 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, その行列 A の行列式とこれの転置行列 ${}^tA$ の行列式は等しい, 即ち, $\det A = \det {}^tA$ が成り立つ.

証明. 可換環 R 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \Lambda_n^2}$ とおくと, ${}^tA = (a_{ji})_{(i,j) \in \Lambda_n^2}$ が成り立つので, 添数集合 Λ_n の置換全体の集合を $\mathfrak{S}_n$ とおくと, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_n} a_{p(j),j} \\
&= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn} p \prod_{p(j) \in \Lambda_n} a_{p(j),p^{-1} \circ p(j)} \\
&= \sum_{p^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn} p^{-1} \prod_{p(j) \in \Lambda_n} a_{p(j),p^{-1} \circ p(j)} \\
&= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_n} a_{j,p(j)} = \det {}^tA
\end{aligned}$$

□

定理 1.11.10. 可換環 R 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(m,m,R) \forall B \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\det\begin{pmatrix} A & O \\ * & B \end{pmatrix} = \det A \det B$$

*7 後述しますが, 一般に, 可換環 R での行列式を用いた行列の正則性の判定法もある.

証明. 可換環 R 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(m,m,R) \forall B \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, それらの行列たちが次のように成分表示され,

$$A = \left(a_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_m^2}, \quad B = \left(b_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$$

$\begin{pmatrix} A & O \\ * & B \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m+n, m+n, R)$ なる行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ * & B \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} A & O \\ * & B \end{pmatrix} = \left(a'_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_{m+n}^2}$ とおくと, 次のようになる.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ * & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ a'_{m+1,1} & \cdots & a'_{m+1,m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m+n,1} & \cdots & a'_{m+n,m} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

したがって, 次のようになり,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & O \\ * & B \end{pmatrix} &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \varLambda_{m+n}} a'_{p(j),j} \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \varLambda_m} a'_{p(j),j} \prod_{j \in \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m} a'_{p(j),j} \end{aligned}$$

ここで, 次のような集合 $\mathfrak{s}_{m+n}$ を考えよう.

$$\mathfrak{s}_{m+n} = \left\{ p \in \mathfrak{S}_{m+n} \middle| V \left(\left. p \right|_{\varLambda_m} \right) = \varLambda_m \right\}$$

このとき, $\forall p \in \mathfrak{s}_{m+n} \forall j \in \varLambda_m$ に対し, $p(j) \in \varLambda_m$ が成り立ち, $\forall p \in \mathfrak{s}_{m+n}$ に対し, $p\left(j' \right) \in \varLambda_m$ なる自然数 j' が集合 $\varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m$ に存在するなら, $p\left(j' \right) = p\left(k' \right)$ なる自然数がその添数集合 $\varLambda_m$ に存在し, $j' \neq k'$ が成り立つが, これはその写像 p が単射であることに矛盾する. したがって, $\forall p \in \mathfrak{s}_{m+n} \forall j \in \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m$ に対し, $p(j) \notin \varLambda_m$ が成り立つ, 即ち, $p(j) \in \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m$ が成り立つ.

一方で, $\forall p \in \mathfrak{S}_{m+n} \setminus \mathfrak{s}_{m+n}$ に対し, $p\left(j' \right) \notin \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m$ なる自然数 j' がその添数集合 $\varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m$ に存在することになりこのような自然数 j' 全体の集合を O とおくと, したがって, 次のようになり,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & O \\ * & B \end{pmatrix} &= \sum_{p \in \mathfrak{s}_{m+n} \sqcup \mathfrak{S}_{m+n} \setminus \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \varLambda_m} a'_{p(j),j} \prod_{j \in \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m} a'_{p(j),j} \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \varLambda_m} a'_{p(j),j} \prod_{j \in \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m} a'_{p(j),j} \\ &\quad + \sum_{p \in \mathfrak{S}_{m+n} \setminus \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \varLambda_m} a'_{p(j),j} \prod_{j \in O \sqcup \left(\varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m \right) \setminus O} a'_{p(j),j} \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \varLambda_m} a'_{p(j),j} \prod_{j \in \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m} a'_{p(j),j} \\ &\quad + \sum_{p \in \mathfrak{S}_{m+n} \setminus \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \varLambda_m} a'_{p(j),j} \prod_{j \in O} a'_{p(j),j} \prod_{j \in \left(\varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m \right) \setminus O} a'_{p(j),j} \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \varLambda_m} a_{p(j),j} \prod_{j \in \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m} b_{-m+p(j),-m+j} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{p \in \mathfrak{S}_{m+n} \setminus \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_m} a'_{p(j),j} \prod_{j \in O} a'_{p(j),j} \prod_{j \in (\Lambda_{m+n} \setminus \Lambda_m) \setminus O} a'_{p(j),j}\\
&= \sum_{p \in \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_m} a_{p(j),j} \prod_{j \in \Lambda_n} b_{p(j),j}\\
&+ \sum_{p \in \mathfrak{S}_{m+n} \setminus \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_m} 0 \prod_{j \in \Lambda_{m+n} \setminus \Lambda_m} a'_{p(j),j}\\
&= \sum_{p \in \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_m} a_{p(j),j} \prod_{j \in \Lambda_n} b_{p(j),j}
\end{aligned}
$$

ここで, $\forall p \in \mathfrak{s}_{m+n}$ に対し次のような置換たち σ, τ を考えると, 次のようになり,

$$
\begin{aligned}
\sigma &: \Lambda_{m+n} \to \Lambda_{m+n}; j \mapsto \begin{cases} p(j) & \text{if} \quad j \in \Lambda_m \\ j & \text{if} \quad j \in \Lambda_{m+n} \setminus \Lambda_m \end{cases}\\
\tau &: \Lambda_{m+n} \to \Lambda_{m+n}; j \mapsto \begin{cases} j & \text{if} \quad j \in \Lambda_m \\ p(j) & \text{if} \quad j \in \Lambda_{m+n} \setminus \Lambda_m \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\forall p \in \mathfrak{s}_{m+n}$ に対し, 次式が成り立つので,

$$
\forall j \in \Lambda_m \left[p(j) \in \Lambda_m \right] \wedge \forall j \in \Lambda_{m+n} \setminus \Lambda_m \left[p(j) \in \Lambda_{m+n} \setminus \Lambda_m \right]
$$

$\sigma, \tau \in \mathfrak{s}_{m+n}$ が成り立つ. また, $\forall j \in \Lambda_{m+n}$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\sigma \circ \tau(j) &= \sigma\left(\tau(j)\right)\\
&= \sigma\left(\begin{cases} j & \text{if} \quad j \in \Lambda_m \\ p(j) & \text{if} \quad j \in \Lambda_{m+n} \setminus \Lambda_m \end{cases}\right)\\
&= \begin{cases} p(j) & \text{if} \quad j \in \Lambda_m \\ p(j) & \text{if} \quad j \in \Lambda_{m+n} \setminus \Lambda_m \end{cases} = p(j)
\end{aligned}
$$

これにより, $p = \sigma \circ \tau$ が成り立つ. したがって, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} A & O \\ * & B \end{pmatrix} &= \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} \sigma \circ \tau \prod_{j \in \Lambda_m} a_{\sigma(j)j} \prod_{j \in \Lambda_n} b_{\tau(j)j}\\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{s}_{m+n}} \sum_{\tau \in \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} \sigma \mathrm{sgn} \tau \prod_{j \in \Lambda_m} a_{\sigma(j)j} \prod_{j \in \Lambda_n} b_{\tau(j)j}\\
&= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} \sigma \prod_{j \in \Lambda_m} a_{\sigma(j)j}\right)\left(\sum_{\tau \in \mathfrak{s}_{m+n}} \mathrm{sgn} \tau \prod_{j \in \Lambda_n} b_{\tau(j)j}\right)
\end{aligned}
$$

ここで, $\forall p \in \mathfrak{S}_{m+n}$ に対し, $\forall i \in \Lambda_s$, $\tau_i \in \mathfrak{T}_{m+n}$ なる互換たち τ_i を用いて次式のように表されることができるのであった.

$$
p = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1
$$

したがって, 写像 $\sigma | \Lambda_m$ について, 次式が成り立つので,

$$
\sigma | \Lambda_m = p | \Lambda_m = \tau_s | \Lambda_m \circ \cdots \circ \tau_2 | \Lambda_m \circ \tau_1 | \Lambda_m
$$

次式が成り立つ.

$$
\mathrm{sgn}\left(\sigma | \Lambda_m\right) = \Delta\left(\sigma | \Lambda_m\right) = s = \Delta(\sigma) = \mathrm{sgn} \sigma
$$

また, $\forall p \in \mathfrak{s}_{m+n}$ に対し, $\forall j \in \varLambda_m$ に対し, $p(j) \in \varLambda_m$ が成り立つかつ, 次式のように逆写像 $(p|\varLambda_m)^{-1}$ が定義されることができるので,

$$(p|\varLambda_m)^{-1} : \varLambda_m \to \varLambda_m; i \mapsto p^{-1}(i)$$

その写像 $p|\varLambda_m$ は全単射となり $p|\varLambda_m \in \mathfrak{s}_m$ が成り立つ.

これにより, 次のように集合 $\mathfrak{s}'$ を定め

$$\mathfrak{s}' = \{p \in \mathfrak{s}_{m+n} | \forall j \in \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m \, [p(j) = j]\}$$

次のような写像 $\mathfrak{r}$ を考えると,

$$\mathfrak{r} : \mathfrak{s}' \to \mathfrak{S}_m; p \mapsto p|\varLambda_m$$

定義より明らかに $\sigma \in \mathfrak{s}'$ が成り立ち明らかにその写像 $\mathfrak{r}$ は単射で $\sigma' \in \mathfrak{S}_m \setminus V(\mathfrak{r})$ なる写像 σ' が存在すると仮定し, 次のような写像 σ'' を考えると,

$$\sigma'' : \varLambda_{m+n} \to \varLambda_{m+n}; j \mapsto \begin{cases} \sigma'(j) & \text{if} \quad j \in \varLambda_m \\ j & \text{if} \quad j \in \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m \end{cases}$$

次のように逆写像 ${\sigma''}^{-1}$ が定められることができるので,

$${\sigma''}^{-1} : \varLambda_{m+n} \to \varLambda_{m+n}; i \mapsto \begin{cases} {\sigma'}^{-1}(j) & \text{if} \quad j \in \varLambda_m \\ j & \text{if} \quad j \in \varLambda_{m+n} \setminus \varLambda_m \end{cases}$$

明らかに $\sigma'' \in \mathfrak{s}'$ が成り立ち, したがって, 次式が成り立つが,

$$\mathfrak{r}(\sigma'') : \varLambda_{m+n} \to \varLambda_{m+n}; j \mapsto \sigma'(j)$$

これは仮定 $\sigma' \in \mathfrak{S}_m \setminus V(\mathfrak{r})$ に矛盾するので, その写像 $\mathfrak{r}$ は全単射となる.

これにより, 次式が成り立つ.

$$\sigma \in \mathfrak{s}_{m+n} \Leftrightarrow \sigma \in \mathfrak{s}' \Leftrightarrow \mathfrak{r}(\sigma) = \sigma|\varLambda_m \in \mathfrak{S}_m$$

同様にして, 次式たちも成り立つ.

$$\mathrm{sgn}\tau|\varLambda_n = \mathrm{sgn}\tau, \quad \tau \in \mathfrak{s}_{m+n} \Leftrightarrow \tau|\varLambda_n \in \mathfrak{S}_n$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & O \\ * & B \end{pmatrix} &= \left(\sum_{\sigma|\varLambda_m \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}\sigma|\varLambda_m \prod_{j \in \varLambda_m} a_{\sigma(j)j} \right) \left(\sum_{\tau|\varLambda_n \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\tau|\varLambda_n \prod_{j \in \varLambda_n} b_{\tau(j)j} \right) \\ &= \left(\sum_{p \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}p \prod_{j \in \varLambda_m} a_{p(j)j} \right) \left(\sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}p \prod_{j \in \varLambda_n} b_{p(j)j} \right) \\ &= \det A \det B \end{aligned}$$

□

定理 1.11.11 (行列式の展開). 可換環 R 上で, $\forall A = \left(a_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列 A について $n \geq 2$ のとき, $\forall j' \in \varLambda_n$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\det A = \sum_{i \in \varLambda_n} (-1)^{i+j'} a_{ij'} \det \mathfrak{s}_{(i,j')}(A)$$

なお, $\mathfrak{s}_{(i',j')}$ は, $\forall (i',j') \in \varLambda_n^2$ に対し, 次式のように定義される写像である.

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_{(i',j')} &: \mathrm{M}(n,n,R) \rightarrow \mathrm{M}(n-1,n-1,R); A \mapsto \left(a_{ij} \right)_{(i,j) \in (\varLambda_n \setminus \{i'\}) \times (\varLambda_n \setminus \{j'\})} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j'-1} & a_{1,j'+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j'-1} & a_{2,j'+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i'-1,1} & a_{i'-1,2} & \cdots & a_{i'-1,j'-1} & a_{i'-1,j'+1} & \cdots & a_{i'-1,n} \\ a_{i'+1,1} & a_{i'+1,2} & \cdots & a_{i'+1,j'-1} & a_{i'+1,j'+1} & \cdots & a_{i'+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j'-1} & a_{n,j'+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

この式をその行列式 $\det A$ の第 j' 列に関する展開という.

証明. 可換環 R 上で $A = \left(a_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \in \mathrm{M}(n,n,R)$ なる行列 A について $n \geq 2$ のとき, $\forall (i',j') \in \varLambda_n^2$ に対し, 次式のように写像 $\mathfrak{s}_{(i',j')}$ を定めると,

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_{(i',j')} &: \mathrm{M}(n,n,R) \rightarrow \mathrm{M}(n-1,n-1,R); A \mapsto \left(a_{ij} \right)_{(i,j) \in (\varLambda_n \setminus \{i'\}) \times (\varLambda_n \setminus \{j'\})} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j'-1} & a_{1,j'+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j'-1} & a_{2,j'+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i'-1,1} & a_{i'-1,2} & \cdots & a_{i'-1,j'-1} & a_{i'-1,j'+1} & \cdots & a_{i'-1,n} \\ a_{i'+1,1} & a_{i'+1,2} & \cdots & a_{i'+1,j'-1} & a_{i'+1,j'+1} & \cdots & a_{i'+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j'-1} & a_{n,j'+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\forall j' \in \varLambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j'} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2j'} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj'} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i \in \varLambda_n} a_{ij'} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j'-1} & 0 & a_{1,j'+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j'-1} & 0 & a_{2,j'+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j'-1} & 0 & a_{i-1,j'+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,j'-1} & 1 & a_{i,j'+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j'-1} & 0 & a_{i+1,j'+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j'-1} & 0 & a_{n,j'+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

数学的帰納法によって明らかに, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{i \in \varLambda_n} a_{ij'} (-1)^{j'-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j'-1} & a_{1,j'+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j'-1} & a_{2,j'+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j'-1} & a_{i-1,j'+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 1 & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,j'-1} & a_{i,j'+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j'-1} & a_{i+1,j'+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j'-1} & a_{n,j'+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_{ij'} (-1)^{j'-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i-1,1} & a_{i1} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i-1,1} & a_{i2} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,j'-1} & a_{2,j'-1} & \cdots & a_{i-1,j'-1} & a_{i,j'-1} & a_{i+1,j'-1} & \cdots & a_{n,j'-1} \\ a_{1,j'+1} & a_{2,j'+1} & \cdots & a_{i-1,j'+1} & a_{i,j'+1} & a_{i+1,j'+1} & \cdots & a_{n,j'+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{in} & a_{i+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_{ij'} (-1)^{j'-1} (-1)^{i-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i1} & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{i2} & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i-1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,j'-1} & a_{1,j'-1} & a_{2,j'-1} & \cdots & a_{i-1,j'-1} & a_{i+1,j'-1} & \cdots & a_{n,j'-1} \\ a_{i,j'+1} & a_{1,j'+1} & a_{2,j'+1} & \cdots & a_{i-1,j'+1} & a_{i+1,j'+1} & \cdots & a_{n,j'+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{in} & a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_{ij'} (-1)^{j'-1} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,j'-1} & a_{i,j'+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j'-1} & a_{1,j'+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j'-1} & a_{2,j'+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j'-1} & a_{i-1,j'+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j'-1} & a_{i+1,j'+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j'-1} & a_{n,j'+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_{ij'} \frac{(-1)^{i+j'}}{(-1)^2} \det \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i,j'-1} & a_{i,j'+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & a_{1,j'-1} & a_{1,j'+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,j'-1} & a_{2,j'+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,j'-1} & a_{i-1,j'+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,j'-1} & a_{i+1,j'+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n,j'-1} & a_{n,j'+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} (-1)^{i+j'} a_{ij'} \det \mathfrak{s}_{(i,j')}(A) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} (-1)^{i+j'} a_{ij'} \det \mathfrak{s}_{(i,j')}(A)
\end{aligned}$$

□

定理 1.11.12. 可換環 R 上で, $\forall A, B \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, $\det(AB) = \det A \det B$ が成り立つ.

これにより, 行列式写像 $\det$ は積との順序の交換ができる.

証明. 可換環 R 上で, $\forall A, B \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, その行列 A の第 j 列を $\mathbf{a}_j$ とおき, これらが次のように成分表示されたとする.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\Lambda_n^2}, \quad B = \left(b_{ij}\right)_{(i,j)\in\Lambda_n}$$

このとき, その行列 AB の第 j 列を $\mathbf{c}_j$ として次のようになる.

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n\end{pmatrix}, \\ \mathbf{c}_j &= \sum_{i_j\in\Lambda_n} b_{i_j j}\mathbf{a}_{i_j} = b_{1j}\mathbf{a}_1 + b_{2j}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{nj}\mathbf{a}_n \end{aligned}$$

ここで, $j=1$ について考えると, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det\begin{pmatrix}\sum_{i_1\in\Lambda_n} b_{i_1 1}\mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n\end{pmatrix} \\ &= \sum_{i_1\in\Lambda_n} b_{i_1 1}\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$j=k$ のとき, 次式が成り立つと仮定しよう.

$$\det(AB) = \sum_{\forall j\in\Lambda_k[i_j\in\Lambda_n]} \prod_{i'\in\Lambda_k} b_{i_{i'}i'} \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \cdots & \mathbf{a}_{i_k} & \mathbf{c}_{k+1} & \cdots & \mathbf{c}_n\end{pmatrix}$$

$j=k+1$ のとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\forall j\in\Lambda_k[i_j\in\Lambda_n]} \prod_{i'\in\Lambda_k} b_{i_{i'}i'} \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \cdots & \mathbf{a}_{i_k} & \sum_{i_{k+1}\in\Lambda_n} b_{i_{k+1},k+1}\mathbf{a}_{i_{k+1}} & \cdots & \mathbf{c}_n\end{pmatrix} \\ &= \sum_{\forall j\in\Lambda_k[i_j\in\Lambda_n]} \prod_{i'\in\Lambda_k} b_{i_{i'}i'} \sum_{i_{k+1}\in\Lambda_n} b_{i_{k+1},k+1} \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \cdots & \mathbf{a}_{i_k} & \mathbf{a}_{i_{k+1}} & \cdots & \mathbf{c}_n\end{pmatrix} \\ &= \sum_{\forall j\in\Lambda_k[i_j\in\Lambda_n]} \sum_{i_{k+1}\in\Lambda_n} \prod_{i'\in\Lambda_k} b_{i_{i'}i'} b_{i_{k+1},k+1} \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \cdots & \mathbf{a}_{i_k} & \mathbf{a}_{i_{k+1}} & \cdots & \mathbf{c}_n\end{pmatrix} \\ &= \sum_{\forall j\in\Lambda_{k+1}[i_j\in\Lambda_n]} \prod_{i'\in\Lambda_{k+1}} b_{i_{i'}i'} \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \cdots & \mathbf{a}_{i_k} & \mathbf{a}_{i_{k+1}} & \cdots & \mathbf{c}_n\end{pmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに, $j=k+1$ のときも成り立つ.

以上より数学的帰納法によって, 次式が成り立つ.

$$\det(AB) = \sum_{\forall j\in\Lambda_{j'}[i_j\in\Lambda_n]} \prod_{i'\in\Lambda_{j'}} b_{i_{i'}i'} \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \cdots & \mathbf{a}_{i_{j'}} & \mathbf{c}_{j'+1} & \cdots & \mathbf{c}_n\end{pmatrix}$$

ここで, $j'=n$ とおくと, 次のようになる.

$$\det(AB) = \sum_{\forall j\in\Lambda_n[i_j\in\Lambda_n]} \prod_{i'\in\Lambda_n} b_{i_{i'}i'} \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{a}_{i_2} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n}\end{pmatrix}$$

ここで, 次のように集合 $\mathfrak{A}$ を定めると,

$$\mathfrak{A} = \{j \in \varLambda_n | \exists p \in \mathfrak{S}_n \left[p(j) = i_j \right]\}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \sum_{\forall j \in (\varLambda_n \setminus \mathfrak{A}) \sqcup \mathfrak{A}[i_j \in \varLambda_n]} \prod_{i' \in \varLambda_n} b_{i_{i'} i'} \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{a}_{i_2} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\forall j \in \varLambda_n \setminus \mathfrak{A}[i_j \in \varLambda_n]} \prod_{i' \in \varLambda_n} b_{i_{i'} i'} \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{a}_{i_2} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n} \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{\forall j \in \mathfrak{A}[i_j \in \varLambda_n]} \prod_{i' \in \varLambda_n} b_{i_{i'} i'} \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{a}_{i_2} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで, $n = 1$ のとき, 写像 $p : \varLambda_1 \rightarrow \varLambda_1; j \mapsto i_j$ は集合 $\mathfrak{F}(\varLambda_1, \varLambda_1)$ に属し, $\forall p' \in \mathfrak{F}(\varLambda_1, \varLambda_1)$ に対し, その写像 p' は恒等写像となり置換であるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varLambda_n \setminus \mathfrak{A} &= \{j \in \varLambda_n | \neg(\exists p \in \mathfrak{S}_n \left[p(j) = i_j \right])\} \\
&= \{j \in \varLambda_n | \forall p \in \mathfrak{S}_n \left[p(j) \neq i_j \right]\} \\
&= \{j \in \varLambda_n | \bot\} = \emptyset
\end{aligned}$$

したがって, 次式が成り立つ.

$$\det(AB) = \sum_{\forall j \in \mathfrak{A}[i_j \in \varLambda_n]} \prod_{i' \in \varLambda_n} b_{i_{i'} i'} \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{a}_{i_2} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n} \end{pmatrix}$$

$n \geq 2$ が成り立つとき, $j \in \mathfrak{A}$ が成り立つなら, $i_j = p(j)$ なる置換 p が存在しその置換 p は単射であったので, $\forall j, k \in \varLambda_n$ に対し, $j \neq k$ が成り立つなら, $p(j) \neq p(k)$ が成り立ち, したがって, $i_j \neq i_k$ が成り立つ.

逆に, $j \notin \mathfrak{A}$ が成り立つなら, 置換の定義より写像 $p' : \varLambda_n \rightarrow \varLambda_n; j \mapsto i_j$ は全射でないか単射でないことになり, その写像 p' が単射であると仮定すると, その写像 p' は全射でないことになる.

ここで, $n = 2$ のとき, その写像 p' は次の通りが考えられる.

$$\begin{aligned}
1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2 \\
1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1 \\
1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2 \\
1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1
\end{aligned}$$

その写像 p' は全射でないので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1 \\
1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2
\end{aligned}$$

このとき, その写像 p' は単射でない.

$n = k$ のとき, その写像 p' が全射でないなら, その写像 p' は単射でないと仮定しよう. $n = k + 1$ のとき, 写像 $p'|\varLambda_k$ が全射であるなら, $\forall i' \in \varLambda_k$ に対し $i' = p'|\varLambda_k(j')$ なる自然数 j' がその集合 $\varLambda_k = D(p'|\varLambda_k)$ に存在する. $p'(k+1) = k+1$ が成り立つなら, $\forall i' \in \varLambda_{k+1}$ に対し $i' \in \varLambda_k$ が成り立つなら, 上記の議論より $i' = p'|\varLambda_k(j') = p'(j')$ なる自然数 j' がその集合 $\varLambda_{k+1} = D(p')$ に存在し, $i' = k + 1$ が成り立つなら,

$k+1=p'\left(j'\right)$ なる自然数 j' が $k+1$ でその集合 $\varLambda_{k+1}=D\left(p'\right)$ に存在するので, その写像 p' が全射となり仮定よりその写像 p' が全射でないことに矛盾する. $p'(k+1)\neq k+1$ が成り立つなら, $p'(k+1)\in\varLambda_k$ が成り立つことになり, その写像 $\left.p'\right|_{\varLambda_k}$ が全射であったので, $\varLambda_k=V\left(p'|\varLambda_k\right)$ となり $p'\left(j'\right)=p'|\varLambda_k\left(j'\right)=p'(k+1)$ なる自然数 j' がその集合 $\varLambda_k=D\left(p'|\varLambda_k\right)$ に存在する. これにより, $j'\neq k+1$ が成り立つかつ, $p'\left(j'\right)=p'(k+1)$ が成り立つので, その写像 p' は単射でない. 写像 $p'|\varLambda_k$ が全射でないなら, 仮定よりその写像 $p'|\varLambda_k$ は単射でないことになり, $j'\neq k'$ が成り立つなら, $p'|\varLambda_k\left(j'\right)=p'|\varLambda_k\left(k'\right)$ が成り立つような自然数 j', k' が添数集合 $\varLambda_k$ に存在する. これは, $j'\neq k'$ が成り立つなら, $p'\left(j'\right)=p'\left(k'\right)$ が成り立つような自然数 j', k' が集合 $\varLambda_{k+1}$ に存在するともいえ, したがって, $j'\neq k'$ が成り立つなら, $p'\left(j'\right)=p'\left(k'\right)$ が成り立つような自然数 j', k' が集合 $\varLambda_{k+1}$ に存在する.

以上より数学的帰納法によって, その写像 p' が全射でないなら, その写像 p' は単射でないことが示された. しかしながら, このことは仮定のその写像 p' が単射であるという仮定に矛盾する. したがって, その写像 p' は単射でないことになり, $j'=k'$ が成り立つかつ, $i_{j'}=i_{k'}$ が成り立つ.

これにより, $n\geq 2$ が成り立つとき, $j\in\mathfrak{A}$ が成り立つならそのときに限り, $\forall j,k\in\varLambda_n$ に対し, $j\neq k$ が成り立つなら, $i_j\neq i_k$ が成り立つ. したがって, $j\in\varLambda_n\backslash\mathfrak{A}$ が成り立つならそのときに限り, $j\neq k$ が成り立つかつ, $i_j=i_k$ が成り立つような自然数たち j, k が存在することになり, $j\in\varLambda_n\backslash\mathfrak{A}$ が成り立つときのその行列 $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{a}_{i_2} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n}\end{pmatrix}$ に 2 つの列々が等しいようなものがあるので, 次式が成り立つ.

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{a}_{i_2} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n}\end{pmatrix}=0$$

したがって, 次式のようになり

$$\sum_{\forall j\in\mathfrak{A}\left[i_j\in\varLambda_n\right]}\prod_{i'\in\varLambda_n}b_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{a}_{i_2} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n}\end{pmatrix}=0$$

次式のようになる.

$$\det(AB)=\sum_{\forall j\in\mathfrak{A}\left[i_j\in\varLambda_n\right]}\prod_{i'\in\varLambda_n}b_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{a}_{i_2} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n}\end{pmatrix}$$

ここで, その集合 $\mathfrak{A}$ の定義より $p(j)=i_j$ なる置換 p が存在するので, 次のように書き換えられることができる.

$$\begin{aligned}\det(AB)&=\sum_{\forall j\in\mathfrak{A}\left[i_j\in\varLambda_n\wedge\exists p\in\mathfrak{S}_n\left[p(j)=i_j\right]\right]}\prod_{i'\in\varLambda_n}b_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{a}_{i_2} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n}\end{pmatrix}\\&=\sum_{\forall j\in\mathfrak{A}\left[p(j)=i_j\in\varLambda_n\right]\wedge p\in\mathfrak{S}_n}\prod_{i'\in\varLambda_n}b_{i_{i'}i'}\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{i_1} & \mathbf{a}_{i_2} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n}\end{pmatrix}\\&=\sum_{\substack{p\in\mathfrak{S}_n\\\forall j\in\mathfrak{A}\left[p(j)=i_j\in\varLambda_n\right]}}\prod_{j\in\varLambda_n}b_{p(j),j}\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{p(1)} & \mathbf{a}_{p(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{p(n)}\end{pmatrix}\\&=\sum_{p\in\mathfrak{S}_n}\prod_{j\in\varLambda_n}b_{p(j),j}\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{p(1)} & \mathbf{a}_{p(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{p(n)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで, $\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{p(1)} & \mathbf{a}_{p(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{p(n)}\end{pmatrix}=\mathrm{sgn}p\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\det(AB)=\sum_{p\in\mathfrak{S}_n}\prod_{j\in\varLambda_n}b_{p(j),j}\mathrm{sgn}p\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_n} b_{p(j),j} \\
&= \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \det B \\
&= \det A \det B
\end{aligned}
$$

□

定理 1.11.13. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が正則行列であるならそのときに限り, $\det A \neq 0$ が成り立つ. さらに, このとき, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $\det A \neq 0$ が成り立つなら, その行列 A は正則行列であることはすでに示されているのであった. 逆に, その行列 A が正則行列であるならそのときに限り, その行列 A の逆行列 A^{-1} が存在するのであった. したがって, 次のようになる.

$$
1 = \det I_n = \det AA^{-1} = \det A \det A^{-1}
$$

これにより, $\det A \neq 0$ かつ $\det A^{-1} \neq 0$ が成り立つ. 以上より, その行列 A が正則行列であるなら, $\det A \neq 0$ が成り立つことが示された.

また, 次式たちが成り立つことにより,

$$
\det A \det A^{-1} = 1, \quad \det A \neq 0, \quad \det A^{-1} \neq 0
$$

したがって, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ が成り立つ. □

定理 1.11.14. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明な解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のみもつならそのときに限り, $\det A \neq 0$ が成り立つ.

証明. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明な解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のみもつならそのときに限り, その解空間の次元が 0 になるので, 線形写像 $L_A : K^n \to K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ について, 次元公式より $\mathrm{rank} A = \dim V(L_A) = n$ となりその行列 A は正則行列となる. ここで, その行列 A が正則行列であるならそのときに限り, $\det A \neq 0$ が成り立つので, 示すべきことは示された. □

定理 1.11.15. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 次のことは同値である.

- その行列 A は正則行列である, 即ち, $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.
- 線形写像 $L_A : K^n \to K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が全単射である.
- $\mathrm{rank} A = n$ が成り立つ.
- $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とおくと, vectors$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n$ が線形独立である.
- $A = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_n \end{pmatrix}$ とおくと, vectors$\mathbf{a}'_1$, $\mathbf{a}'_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}'_n$ が線形独立である.
- $\exists X \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $AX = XA = I_n$ が成り立つ.
- $\ker L_A = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ.

- 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が自明な解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ のみもつ.
- $\det A \neq 0$ が成り立つ.

証明. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 定理 1.4.14 より次のことは同値である.

- その行列 A は正則行列である, 即ち, $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.
- 線形写像 $L_A : K^n \to K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が全単射である.
- $\mathrm{rank}A = n$ が成り立つ.
- $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とおくと, それらの vectors$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n$ が線形独立である.
- $A = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}'_1 \\ {}^t\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}'_n \end{pmatrix}$ とおくと, それらの vectors$\mathbf{a}'_1$, $\mathbf{a}'_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}'_n$ が線形独立である.
- $\exists A^{-1} \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ が成り立つ.
- $\ker L_A = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ.

また, 定理 1.11.13 より次のことは同値である.

- その行列 A は正則行列である, 即ち, $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.
- $\det A \neq 0$ が成り立つ.

定理 1.11.14 より次のことは同値である.

- 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が自明な解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ のみもつ.
- $\det A \neq 0$ が成り立つ.

以上より示すべきことが示された. □

1.11.2 Cramer の公式

定理 1.11.16 (Cramer の公式)**.** 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K) \forall \mathbf{b} \in K^n$ に対し, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とおき $\det A \neq 0$ とする. このとき, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ とした連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}$$

この式を Cramer の公式という.

実際, 連立 1 次方程式が解かれるとき, $\det A \neq 0$ となる条件を確かめ公式をあてはめるのにその計算量が多くなりやすいので, あまり実用的ではなかろう.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)\forall \mathbf{b} \in K^n$ に対し, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とおき $\det A \neq 0$ とする. このとき, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ とした連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は次のように変形できる.

$$\sum_{j \in \varLambda_n} x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{b}$$

したがって, $\det A \neq 0$ より $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}} &= \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \sum_{j \in \varLambda_n} x_j \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}} \\
&= \sum_{j \in \varLambda_n} x_j \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}} \\
&= \sum_{j \in \varLambda_n \setminus \{i\}} x_j \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}} \\
&\quad + x_i \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}} \\
&= \sum_{j \in \varLambda_n \setminus \{i\}} x_j \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}} \\
&\quad + x_i \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

ここで, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, その行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ の 2 つの列々が等しいようなものがあるので, 次式が成り立ち,

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = 0$$

したがって, 次のようになる.

$$\frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}} = \sum_{j \in \varLambda_n \setminus \{i\}} x_j \frac{0}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}} + x_i = x_i$$

□

1.11.3 余因子行列

定義 1.11.2. 可換環 R 上で, $n \geq 2$ のとき, $\forall (i',j') \in \varLambda_n^2$ に対し, 次式のように写像 $\mathfrak{s}_{(i',j')}$ が定義されたとき,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_{(i',j')} &: \mathrm{M}(n,n,R) \rightarrow \mathrm{M}(n-1,n-1,R); \\
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j'-1} & a_{1,j'+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j'-1} & a_{2,j'+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i'-1,1} & a_{i'-1,2} & \cdots & a_{i'-1,j'-1} & a_{i'-1,j'+1} & \cdots & a_{i'-1,n} \\ a_{i'+1,1} & a_{i'+1,2} & \cdots & a_{i'+1,j'-1} & a_{i'+1,j'+1} & \cdots & a_{i'+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j'-1} & a_{n,j'+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

この像 $\mathfrak{s}_{(i',j')}(A)$ をその行列 A の (i',j') 小行列などという.

定義 1.11.3. 可換環 R 上で, $n \geq 2$ のとき, $\forall (i',j') \in \Lambda_n^2$ に対し, 次のような写像 $\mathfrak{c}_{(i',j')}$ が定義されたとき,

$$\mathfrak{c}_{(i',j')} : \mathrm{M}(n,n,R) \to R; A \mapsto (-1)^{i'+j'} \det \mathfrak{s}_{(i',j')}(A)$$

この像 $\mathfrak{c}_{(i',j')}(A)$ をその行列 A の (i',j') 余因子, $a_{i'j'}$ の余因子などという.

定理 1.11.17. 可換環 R 上で, $n \geq 2$ のとき, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,R) \forall (i',j') \in \Lambda_n^2$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\sum_{k \in \Lambda_n} a_{i'k} \mathfrak{c}_{(j',k)}(A) = \sum_{k \in \Lambda_n} a_{kj'} \mathfrak{c}_{(k,i')}(A) = \delta_{i'j'} \det A$$

証明. 可換環 R 上で, $n \geq 2$ のとき, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,R) \forall (i',j') \in \Lambda_n^2$ に対し, 次のような写像 $\mathfrak{c}_{(i',j')}$ が定義されたとする.

$$\mathfrak{c}_{(i',j')} : \mathrm{M}(n,n,R) \to R; A \mapsto (-1)^{i'+j'} \det \mathfrak{s}_{(i',j')}(A)$$

$i' = j'$ のとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \Lambda_n} a_{i'k} \mathfrak{c}_{(j',k)}(A) &= \sum_{k \in \Lambda_n} a_{i'k} (-1)^{k+j'} \det \mathfrak{s}_{(j',k)}(A) \\ &= \sum_{k \in \Lambda_n} (-1)^{i'+k} a_{i'k} \det \mathfrak{s}_{(i',k)}(A) \end{aligned}$$

この式はその行列式 $\det A$ の第 i' 行に関する展開であるので, 次式が成り立つ.

$$\sum_{k \in \Lambda_n} a_{i'k} \mathfrak{c}_{(j',k)}(A) = \det A$$

一方で, $i' \neq j'$ のとき, 次式のように定義される行列 A' を考えると,

$$A' = (a_{ij})_{(i,j) \in \Lambda_n^2}, \quad a'_{ij} = \begin{cases} a_{i'j} & \text{if} \quad i = j' \\ a_{ij} & \textit{otherwise} \end{cases}$$

その行列 A' に 2 つの列々が等しいようなものがあるので, $\det A' = 0$ が成り立つ.

一方で, その行列式 $\det A'$ を第 j' 行に関して展開すれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{k \in \Lambda_n} (-1)^{j'+k} a'_{j'k} \cdot \det \mathfrak{s}_{(j',k)}(A') \\ &= \sum_{k \in \Lambda_n} (-1)^{j'+k} a_{i'k} \det \mathfrak{s}_{(j',k)}(A) \\ &= \sum_{k \in \Lambda_n} a_{i'k} (-1)^{k+j'} \det \mathfrak{s}_{(j',k)}(A) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k \in \Lambda_n} a_{i'k} \mathfrak{c}_{(j',k)}(A)$$

よって, 次式が成り立つ.

$$\sum_{k \in \Lambda_n} a_{i'k} \mathfrak{c}_{(j',k)}(A) = \delta_{i'j'} \det A$$

あとは同様にして示される. □

定義 1.11.4. 可換環 R 上で, $n \geq 2$ のとき, 写像 $\mathfrak{a}$ が次のように定義されたとき,

$$\mathfrak{a} : \mathrm{M}(n,n,R) \rightarrow \mathrm{M}(n,n,R); A \mapsto \left(\mathfrak{c}_{(j,i)}(A) \right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2}$$

この写像 $\mathfrak{a}$ によるその行列 A の像 $\mathfrak{a}(A)$ をその行列 A の余因子行列などといい $\widetilde{A}$ と書くことが多い.

定理 1.11.18. 可換環 R 上で, $n \geq 2$ のとき, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, 次式が成り立つ.

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A) I_n$$

証明. 可換環 R 上で, $n \geq 2$ のとき, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, その行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は次のように成分表示される.

$$\widetilde{A} = \left(\mathfrak{c}_{(j,i)}(A) \right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2}$$

このとき, 定理 1.11.17 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
A\widetilde{A} &= (a_{ij})_{(i,j) \in \Lambda_n^2} \left(\mathfrak{c}_{(j,i)}(A) \right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2} \\
&= \left(\sum_{k \in \Lambda_n} a_{ik} \mathfrak{c}_{(j,k)}(A) \right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2} \\
&= (\delta_{ij} \det A)_{(i,j) \in \Lambda_n^2} \\
&= (\det A) (\delta_{ij})_{(i,j) \in \Lambda_n^2} = (\det A) I_n
\end{aligned}$$

また, 同様にして, 次式が得られる.

$$\widetilde{A}A = (\det A) I_n$$

□

定理 1.11.19. 可換環 R 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, その行列 A が可逆行列であるならそのときに限り, その行列式 $\det A$ は可逆元である.

さらに, $n \geq 2$ のとき, その行列 A が可逆行列であるとき, 次式が成り立ち,

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}_{nn}}{\det A}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

証明. 可換環 R 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, その行列 A が可逆行列であるなら, $n=1$ のときは明らかであるから, $n \geq 2$ のとき, 逆行列 A^{-1} が存在して, 次のようになる.

$$\det A \det A^{-1} = \det\left(AA^{-1}\right) = \det I_n = 1$$

これにより, その行列式 $\det A$ は可逆元である.

逆に, その行列式 $\det A$ が可逆元であるなら, 定理 1.11.19 より次式が成り立つ.

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)\, I_n$$

したがって, 次式のようになり,

$$A\frac{\widetilde{A}}{\det A} = \frac{\widetilde{A}}{\det A}A = I_n$$

ここで, 逆行列の定義とこれが一意的に存在することより次式が成り立つ.

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{\det A}$$

よって, その行列 A は可逆行列である.

また, 次式たちが成り立つことにより,

$$\det A \det A^{-1} = \det\left(AA^{-1}\right) = \det I_n = 1$$

その行列式 $\det A$ が可逆元であることに注意すれば, したがって, 次式が成り立つ.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

□

定理 1.11.20. 可換環 R 上で, $\forall A,B \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, これらの行列たち A, B が相似であるなら, $\det A = \det B$ が成り立つ.

証明. 可換環 R 上で, $\forall A,B \in \mathrm{M}(n,n,R)$ に対し, これらの行列たち A, B が相似であるなら, $PA = BP$ が成り立つような行列 P が集合 $\mathrm{GL}(n,R)$ に存在することになり, したがって, $A = P^{-1}BP$ が成り立つことになり, したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\det A &= \det\left(P^{-1}BP\right)\\ &= \det P^{-1} \det B \det P\\ &= \frac{1}{\det P}\det B \det P\\ &= \det B\end{aligned}$$

□

1.11.4 小行列式

定義 1.11.5. 可換環 R 上の $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n} \in \mathrm{M}(m,n,R)$ なる行列 A と $p \in \Lambda_m \cap \Lambda_n$ なる自然数 p について, $\Lambda \subseteq \Lambda_m$ かつ $M \subseteq \Lambda_n$ かつ $\#\Lambda = \#M = p$ なる集合たち Λ, M を用いた行列, 即ち, その行列 A のうち p つの行々と列々だけ順序を変えずに取り出して得られる行列の行列式 $\det\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\Lambda\times M}$ をその行列 A の p 次小行列式などという.

定理 1.11.21. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, その行列 A の階数はその行列 A の 0 でない p 次小行列式の正の整数 p のうち最大なものに等しい, 即ち, $r = \mathrm{rank}A$ としてその行列 A の r 次小行列式のうち 0 でないものが存在し, $r < p$ なる p 次小行列式が存在すれば, これは 0 となる.

証明. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, $r = \mathrm{rank}A$, $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ とおき, その行列 A の第 i 列を ${}^t\mathbf{a}_i'$ とおくとき, その行列 A の r 次小行列式のうち 0 でないものが存在することを示そう. 階数の定義より行 vectors$\mathbf{a}_i'$ のうち線形独立なものが r つだけあることになる. このような行 vector をもつような行全体の集合を $\varLambda$ とおき, $\forall k \in \varLambda_r$ に対し, $i_k \in \varLambda$ かつ, $\forall k \in \varLambda_{r-1}$ に対し, $i_k < i_{k+1}$ とすると, 次のような行列 A' の階数も r となる.

$$A' = \left(a_{i_k j}\right)_{(k,j)\in\varLambda_r\times\varLambda_n} \in \mathrm{M}(r,n,K)$$

このとき, 階数の定義よりその行列 A' の第 j 列を $\mathbf{a}_j''$ として n つの列 vector たち $\mathbf{a}_j'$ のうち線形独立なものが r つだけあることになる. このような列 vector をもつような列全体の集合を M とおき, $\forall l \in \varLambda_r$ に対し, $j_l \in M$ かつ, $\forall l \in \varLambda_{r-1}$ に対し, $j_l < j_{l+1}$ とすると, 次のような行列 A'' の階数も r となる.

$$A'' = \left(a_{i_k j_l}\right)_{(k,l)\in\varLambda_r^2} \in \mathrm{M}(r,r,K)$$

このとき, $\mathrm{rank}A'' = \mathrm{rank}A = r$ が成り立つので, 定理 1.11.15 より $\det A'' \neq 0$ が成り立つ. これにより, その行列 A の r 次小行列式のうち 0 でないものが存在することが示された.

次に, $r < p$ なる p 次小行列式が存在すれば, これは 0 となることを示そう. $\varLambda \subseteq \varLambda_m$ かつ $M \subseteq \varLambda_n$ なる集合たち $\varLambda$, M を用いた行列 $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda\times M}$ の階数は階数に定義より r 以下となる. ここで, $\forall k \in \left(\varLambda_m \cap \varLambda_n\right) \setminus \varLambda_r$ に対し, その行列 A のうち k つの行々と列々だけ順序を変えずに取り出して得られる行列を A''' とすると, これは k 次正方行列であり上の議論より $\mathrm{rank}A''' \leq r < k$ が成り立つことになるので, 定理 1.11.15 よりその行列 A''' は正則行列でない. したがって, $\det A''' = 0$ が成り立つ. よって, $r < p$ なる p 次小行列式が存在すれば, これは 0 となることが示された. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p157-167,171-189 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007. 改訂版 8 刷 p69-87 ISBN978-4-320-11097-7

[3] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958. 第 53 刷 p68 ISBN4-7853-1301-3

[4] 理系のための備忘録. "零行列を含むブロック行列の行列式を簡単に求める方法". 理系のための備忘録. https://science-log.com/%E6%95%B0%E5%AD%A6/%E9%9B%B6%E8%A1%8C%E5%88%97%E3%82%92%E5%90%AB%E3%82%80%E3%83%96%E3%83%AD%E3%83%83%E3%82%AF%E8%A1%8C%E5%88%97%E3%81%AE%E8%A1%8C%E5%88%97%E5%BC%8F%E3%82%92%E7%B0%A1%E5%8D%98%E3%81%AB%E6%B1%82%E3%82%81/ (2021-2-13 5:00 閲覧)

[5] 対馬龍司. "3.3 行列式の積". 明治大学. https://www.isc.meiji.ac.jp/~tsushima/senkei/%E7%AC%AC%EF%BC%91%EF%BC%93%E5%9B%9E.pdf (2021-2-13 20:00 閲覧)

第 2 部　固有値問題

固有値問題とは, 線形写像 f が与えられたとき, $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ をみたす $\mathbf{0}$ でない vector$\mathbf{v}$ が存在するようなその係数 λ とその vector$\mathbf{v}$ を求める問題でありその係数 λ は固有値と呼ばれる. これは微分方程式や 2 次形式の研究から生じた概念であり微分方程式の解を求めるのに, あるいは, 2 次形式の標準形を求めるのに重要となってくる. ここでは, まず, 直和空間を述べ固有値問題を多項式環の観点からも考え対角化可能性を議論し最終的には Jordan 標準形というものを扱うことにしよう.

2.1　直和空間

2.1.1　直和空間

定義 2.1.1. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たちの添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた族 $\{W_i\}_{i\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, 集合 $\sum_{i\in\varLambda_n} W_i$ が次式のように定義される.

$$\sum_{i\in\varLambda_n} W_i = \left\{ \sum_{i\in\varLambda_n} \mathbf{w}_i \in V \middle| \forall i \in \varLambda_n \left[\mathbf{w}_i \in W_i\right] \right\}$$

この集合 $\sum_{i\in\varLambda_n} W_i$ をその族 $\{W_i\}_{i\in\varLambda_n}$ の和空間という. 特に, $n = 2$ のとき, $W_1 + W_2$ とも書かれる.

定理 2.1.1. その族 $\{W_i\}_{i\in\varLambda_n}$ の和空間はその vector 空間 V の部分 vector 空間で, $\forall\mathbf{z} \in \sum_{i\in\varLambda_n} W_i$ に対し, $\mathbf{z} = \sum_{i\in\varLambda_n} \mathbf{w}_i$ なるその直積 $\prod_{i\in\varLambda_n} W_i$ の元 $(\mathbf{w}_i)_{i\in\varLambda_n}$ が存在する.

しかしながら, その直積 $\prod_{i\in\varLambda_n} W_i$ のそのような元は一意的でない. 例えば, 1 つの部分 vector 空間 W が与えられたとき, $\mathbf{z} = W + W$ とおくと, $\mathbf{z} = \mathbf{z} + \mathbf{0}$ あるいは $\mathbf{z} = \mathbf{0} + \mathbf{z}$ といった 2 通りの組々 $(\mathbf{z}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{0}, \mathbf{z})$ が考えられることができる.

証明. 部分 vector 空間と和空間の定義, 定理 1.9.1 より明らかである. □

定義 2.1.2. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たちの添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた族 $\{W_i\}_{i\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{z} \in \sum_{i\in\varLambda_n} W_i$ に対し, $\mathbf{z} = \sum_{i\in\varLambda_n} \mathbf{w}_i$ なるその直積 $\prod_{i\in\varLambda_n} W_i$ の元 $(\mathbf{w}_i)_{i\in\varLambda_n}$ が一意的に存在するようなその和空間 $\sum_{i\in\varLambda_n} W_i$ をその族 $\{W_i\}_{i\in\varLambda_n}$ の直和空間といい $\bigoplus_{i\in\varLambda_n} W_i$ と書く. 特に, $n = 2$ のとき, $W_1 \oplus W_2$ とも書かれる. また, $\mathbf{z} = \sum_{i\in\varLambda_n} \mathbf{w}_i$, $\mathbf{w}_i \in W_i$ なる元 $\mathbf{z}$ を $\mathbf{z} = \bigoplus_{i\in\varLambda_n} \mathbf{w}_i$ と書くこともある.

定理 2.1.2. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たちの添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた族 $\{W_i\}_{i\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, 次のことは同値

- その族 $\{W_i\}_{i\in\varLambda_n}$ の和空間 $\sum_{i\in\varLambda_n} W_i$ は直和空間 $\bigoplus_{i\in\varLambda_n} W_i$ でもある.

- $\forall i' \in \varLambda_n$ に対し, $\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.
- $\forall i' \in \varLambda_n \setminus \{1\}$ に対し, $\sum_{i \in \varLambda_{i'-1}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たちの添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた族 $\{W_i\}_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, その族 $\{W_i\}_{i \in \varLambda_n}$ の和空間 $\sum_{i \in \varLambda_n} W_i$ は直和空間 $\bigoplus_{i \in \varLambda_n} W_i$ でもあるとする. $\forall i' \in \varLambda_n$ に対し, $\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立たない, 即ち, その集合 $\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'}$ に属する零 vector でない vector$\mathbf{z}$ が存在するとき, $\mathbf{z} = \bigoplus_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} \mathbf{w}_i$ とおける. このとき, その vector$\mathbf{z}$ はその和空間 $\sum_{i \in \varLambda_n} W_i$ に属しており, さらに, その部分 vector 空間 $W_{i'}$ にも属するので, $\mathbf{z} = \sum_{i \in \varLambda_n} \mathbf{w}_i'$ としたとき, 次のように 2 通り存在することになり,

$$\mathbf{w}_i' = \begin{cases} \mathbf{w}_i & \text{if} \quad i \neq i' \\ \mathbf{0} & \text{if} \quad i = i' \end{cases}, \quad \mathbf{w}_i' = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{if} \quad i \neq i' \\ \mathbf{z} & \text{if} \quad i = i' \end{cases}$$

これはその族 $\{W_i\}_{i \in \varLambda_n}$ の和空間 $\sum_{i \in \varLambda_n} W_i$ は直和空間 $\bigoplus_{i \in \varLambda_n} W_i$ でもあることに矛盾する. したがって, $\forall i' \in \varLambda_n$ に対し, $\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.

$\forall i' \in \varLambda_n$ に対し, $\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つなら, $\forall i' \in \varLambda_n \setminus \{1\}$ に対し, $\sum_{i \in \varLambda_{i'-1}} W_i \subseteq \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ が成り立つので, $\sum_{i \in \varLambda_{i'-1}} W_i \cap W_{i'} \subseteq \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. 一方で, その集合 $\sum_{i \in \varLambda_{i'-1}} W_i \cap W_{i'}$ は部分 vector 空間の定義より零 vector$\mathbf{0}$ に属されているので, よって, $\sum_{i \in \varLambda_{i'-1}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ

$\forall i' \in \varLambda_n \setminus \{1\}$ に対し, $\sum_{i \in \varLambda_{i'-1}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{z} \in \sum_{i \in \varLambda_n} W_i$ に対し, $\mathbf{z} = \sum_{i \in \varLambda_n} \mathbf{w}_i' = \sum_{i \in \varLambda_n} \mathbf{w}_i''$, $\mathbf{w}_i', \mathbf{w}_i'' \in W_i$ とおくと, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \varLambda_n} \mathbf{w}_i' = \sum_{i \in \varLambda_n} \mathbf{w}_i'' &\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_{n-1}} \mathbf{w}_i' + \mathbf{w}_n' = \sum_{i \in \varLambda_{n-1}} \mathbf{w}_i'' + \mathbf{w}_n'' \\ &\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_{n-1}} \mathbf{w}_i' - \sum_{i \in \varLambda_{n-1}} \mathbf{w}_i'' = \mathbf{w}_n'' - \mathbf{w}_n' \\ &\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_{n-1}} \left(\mathbf{w}_i' - \mathbf{w}_i''\right) = \mathbf{w}_n'' - \mathbf{w}_n' \end{aligned}$$

ここで, $\sum_{i \in \varLambda_{n-1}} \left(\mathbf{w}_i' - \mathbf{w}_i''\right) \in \sum_{i \in \varLambda_{n-1}} W_i$ かつ $\mathbf{w}_n'' - \mathbf{w}_n' \in W_n$ が成り立つので, 次式が得られる.

$$\sum_{i \in \varLambda_{n-1}} \left(\mathbf{w}_i' - \mathbf{w}_i''\right) = \mathbf{w}_n'' - \mathbf{w}_n' \in \sum_{i \in \varLambda_{n-1}} W_i \cap W_n = \{\mathbf{0}\}$$

したがって, $\mathbf{w}_n' = \mathbf{w}_n''$ が得られる.

$n - i' + 1 = k \leq n - 1$ のとき, $\forall n - i' + 1 \in \varLambda_k$ に対し, $\mathbf{w}_{n-i'+1}' = \mathbf{w}_{n-i'+1}''$ が成り立つと仮定しよう.

$n-i'+1=k+1 \leq n$ のとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\Lambda_n}\mathbf{w}_i'=\sum_{i\in\Lambda_n}\mathbf{w}_i'' &\Leftrightarrow \sum_{i\in\Lambda_{i'-1}}\mathbf{w}_i'+\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_{i'-1}}\mathbf{w}_i'=\sum_{i\in\Lambda_{i'-1}}\mathbf{w}_i''+\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_{i'-1}}\mathbf{w}_i''\\
&\Leftrightarrow \sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\mathbf{w}_i'+\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_{n-(k+1)}}\mathbf{w}_i'=\sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\mathbf{w}_i''+\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_{n-(k+1)}}\mathbf{w}_i''\\
&\Leftrightarrow \sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\mathbf{w}_i'+\sum_{i\in\Lambda_{k+1}}\mathbf{w}_{n-i+1}'=\sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\mathbf{w}_i''+\sum_{i\in\Lambda_{k+1}}\mathbf{w}_{n-i+1}'\\
&\Leftrightarrow \sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\mathbf{w}_i'+\sum_{i\in\Lambda_k}\mathbf{w}_{n-i+1}'+\mathbf{w}_{n-k}'=\sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\mathbf{w}_i''+\sum_{i\in\Lambda_k}\mathbf{w}_{n-i+1}'+\mathbf{w}_{n-k}''\\
&\Leftrightarrow \sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\mathbf{w}_i'-\sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\mathbf{w}_i''=\sum_{i\in\Lambda_k}\mathbf{w}_{n-i+1}''-\sum_{i\in\Lambda_k}\mathbf{w}_{n-i+1}'+\mathbf{w}_{n-k}''-\mathbf{w}_{n-k}'\\
&\Leftrightarrow \sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\left(\mathbf{w}_i'-\mathbf{w}_i''\right)=\sum_{i\in\Lambda_k}\left(\mathbf{w}_{n-i+1}''-\mathbf{w}_{n-i+1}'\right)+\mathbf{w}_{n-k}''-\mathbf{w}_{n-k}'\\
&\Leftrightarrow \sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\left(\mathbf{w}_i'-\mathbf{w}_i''\right)=\sum_{i\in\Lambda_k}\mathbf{0}+\mathbf{w}_{n-k}''-\mathbf{w}_{n-k}'\\
&\Leftrightarrow \sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\left(\mathbf{w}_i'-\mathbf{w}_i''\right)=\mathbf{w}_{n-k}''-\mathbf{w}_{n-k}'
\end{aligned}$$

ここで, $\displaystyle\sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\left(\mathbf{w}_i'-\mathbf{w}_i''\right)\in\sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}W_i$ かつ $\mathbf{w}_n''-\mathbf{w}_n'\in W_{n-k}$ が成り立つので, 次式が得られる.

$$\sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)}}\left(\mathbf{w}_i'-\mathbf{w}_i''\right)=\mathbf{w}_{n-k}''-\mathbf{w}_{n-k}'\in\sum_{i\in\Lambda_{n-(k+1)+1-1}}W_i\cap W_{n-(k+1)+1}=\{\mathbf{0}\}$$

したがって, $\mathbf{w}_{n-k}'=\mathbf{w}_{n-k}''$ が得られる.

以上より数学的帰納法によって $\forall n-i'+1\in\Lambda_n$ に対し, $\mathbf{w}_{n-i'+1}'=\mathbf{w}_{n-i'+1}''$ が成り立つことになり, したがって, $\left(\mathbf{w}_i'\right)_{i\in\Lambda_n}=\left(\mathbf{w}_i''\right)_{i\in\Lambda_n}$ が成り立つ. これにより, その族 $\left\{W_i\right\}_{i\in\Lambda_n}$ の和空間 $\displaystyle\sum_{i\in\Lambda_n}W_i$ は直和空間 $\displaystyle\bigoplus_{i\in\Lambda_n}W_i$ でもあることが示された. □

定理 2.1.3. 体 K 上の vector 空間 V の有限次元な部分 vector 空間たちの添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\left\{W_i\right\}_{i\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\dim\sum_{i\in\Lambda_n}W_i\leq\sum_{i\in\Lambda_n}\dim W_i$$

特に, 次式が成り立つ.

$$\dim\bigoplus_{i\in\Lambda_n}W_i=\sum_{i\in\Lambda_n}\dim W_i$$

証明. 体 K 上の vector 空間 V の有限次元な部分 vector 空間たちの添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\left\{W_i\right\}_{i\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, $n=2$ のとき, 定理 1.9.5 より次式が成り立つ.

$$\dim W_1+W_2=\dim W_1+\dim W_2-\dim W_1\cap W_2\leq\dim W_1+\dim W_2$$

$n=k$ のとき, $\dim \sum_{i \in \varLambda_k} W_i \leq \sum_{i \in \varLambda_k} \dim W_i$ が成り立つと仮定すると, $n=k+1$ のとき, 定理 1.9.5 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\dim \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} W_i &= \dim \sum_{i \in \varLambda_k} W_i + W_{k+1} \\
&= \dim \sum_{i \in \varLambda_k} W_i + \dim W_{k+1} - \dim \sum_{i \in \varLambda_k} W_i \cap W_{k+1} \\
&\leq \dim \sum_{i \in \varLambda_k} W_i + \dim W_{k+1} \\
&\leq \sum_{i \in \varLambda_k} \dim W_i + \dim W_{k+1} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} \dim W_i
\end{aligned}$$

以上より, 数学的帰納法によって $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, $\dim \sum_{i \in \varLambda_n} W_i \leq \sum_{i \in \varLambda_n} \dim W_i$ が成り立つ.

特に, その族 $\{W_i\}_{i \in \varLambda_n}$ の和空間 $\sum_{i \in \varLambda_n} W_i$ は直和空間 $\bigoplus_{i \in \varLambda_n} W_i$ でもあるなら, $n=2$ のとき, 定理 1.9.5 より次式が成り立つ.

$$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$$

ここで, 定理 2.1.2 より $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\dim W_1 \oplus W_2 &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim \{\mathbf{0}\} \\
&= \dim W_1 + \dim W_2 - 0 \\
&= \dim W_1 + \dim W_2
\end{aligned}$$

$n=k$ のとき, $\dim \bigoplus_{i \in \varLambda_k} W_i = \sum_{i \in \varLambda_k} \dim W_i$ が成り立つと仮定すると, $n=k+1$ のとき, 定理 1.9.5 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\dim \bigoplus_{i \in \varLambda_{k+1}} W_i &= \dim \bigoplus_{i \in \varLambda_k} W_i \oplus W_{k+1} \\
&= \dim \bigoplus_{i \in \varLambda_k} W_i + \dim W_{k+1} - \dim \sum_{i \in \varLambda_k} W_i \cap W_{k+1}
\end{aligned}$$

ここで, 定理 2.1.2 より $\sum_{i \in \varLambda_k} W_i \cap W_{k+1} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つので,

$$\begin{aligned}
\dim \bigoplus_{i \in \varLambda_{k+1}} W_i &= \dim \bigoplus_{i \in \varLambda_k} W_i + \dim W_{k+1} - \dim \{\mathbf{0}\} \\
&= \dim \bigoplus_{i \in \varLambda_k} W_i + \dim W_{k+1} - 0 \\
&= \dim \bigoplus_{i \in \varLambda_k} W_i + \dim W_{k+1} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_k} \dim W_i + \dim W_{k+1} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} \dim W_i
\end{aligned}$$

以上より, 数学的帰納法によって $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, $\dim \bigoplus_{i \in \Lambda_n} W_i = \sum_{i \in \Lambda_n} \dim W_i$ が成り立つ. □

定理 2.1.4. 体 K 上の vector 空間 V の有限次元な部分 vector 空間たちの添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\{W_i\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\dim \sum_{i \in \Lambda_n} W_i = \sum_{i \in \Lambda_n} \dim W_i$ が成り立つなら, $\sum_{i \in \Lambda_n} W_i = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} W_i$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の有限次元な部分 vector 空間たちの添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\{W_i\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\dim \sum_{i \in \Lambda_n} W_i = \sum_{i \in \Lambda_n} \dim W_i$ が成り立つなら, $i \in \Lambda_n$ なる部分 vector 空間たち W_i の基底の 1 つを $\dim W_i = n_i$ として $\langle \mathbf{w}_{ij} \rangle_{j \in \Lambda_{n_i}}$ とおくとする. $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立たないような添数 i' が存在すると仮定すると, それらの集合たち $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i$, $W_{i'}$ いづれもその vector 空間 V の部分 vector 空間であるから, $i \in \Lambda_n$ なる基底たち $\langle \mathbf{w}_{ij} \rangle_{j \in \Lambda_{n_i}}$ のうち $\mathbf{w}' \in \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'}$ なる vector$\mathbf{w}'$ が存在する. $\exists j' \in \Lambda_n \setminus \{i'\}$ に対し, $\mathbf{w}' \in W_{j'}$ が成り立つので, $\mathbf{w}' \in W_{i'} \cap W_{j'}$ が成り立ち, 定理 1.9.5 より $\dim W_{i'} + W_{j'} > \dim W_{i'} + \dim W_{j'}$ が成り立つことになる. このとき, 定理 2.1.3 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\dim \sum_{i \in \Lambda_n} W_i &= \dim \left(\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i', j'\}} W_i + W_{i'} + W_{j'} \right) \\
&\geq \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i', j'\}} \dim W_i + \dim W_{i'} + W_{j'} \\
&> \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i', j'\}} \dim W_i + \dim W_{i'} + \dim W_{j'} \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} \dim W_i
\end{aligned}$$

しかしながら, これは $\dim \sum_{i \in \Lambda_n} W_i = \sum_{i \in \Lambda_n} \dim W_i$ が成り立つことに矛盾する. したがって, $\forall i' \in \Lambda_n$ に対し, $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立ち, 定理 2.1.2 より $\sum_{i \in \Lambda_n} W_i = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} W_i$ が成り立つ. □

定理 2.1.5. 体 K 上の vector 空間 V の有限次元な部分 vector 空間たちの添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\{W_i\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $i \in \Lambda_n$ なる部分 vector 空間たち W_i の基底の 1 つを $\dim W_i = n_i$ として $\langle \mathbf{w}_{ij} \rangle_{j \in \Lambda_{n_i}}$ とおくと, その直和空間 $\bigoplus_{i \in \Lambda_n} W_i$ の基底は $\langle \mathbf{w}_{ij} \rangle_{(i,j) \in \Lambda_n \times \Lambda_{n_i}}$ と与えられる.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の有限次元な部分 vector 空間たちの添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\{W_i\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $i \in \Lambda_n$ なる部分 vector 空間たち W_i の基底の 1 つを $\dim W_i = n_i$ として $\langle \mathbf{w}_{ij} \rangle_{j \in \Lambda_{n_i}}$ とおく.

ある互いに異なる添数たち i', j' に対し, それらの部分 vector 空間たち $W_{i'}$, $W_{j'}$ どちらの基底をもなす vector が存在すると仮定しよう. このような vector を $\mathbf{w}'$ とおくと, この vector は零 vector でなく $\mathbf{w}' \in W_{i'} \cap W_{j'}$ が成り立つ. 一方で, 定理 2.1.2 より $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} W_i \cap W_{j'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つので, $W_{i'} \subseteq \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} W_i$ が成り立つことに注意すれば, $W_{i'} \cap W_{j'} \subseteq \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{j'\}} W_i \cap W_{j'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つかつ,

零 vector はその部分 vector 空間 $W_{i'} \cap W_{j'}$ に属するので, $W_{i'} \cap W_{j'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. しかしながら, これは $\mathbf{w}' \in W_{i'} \cap W_{j'}$ が成り立つことに矛盾する. したがって, $\forall i', j' \in \Lambda_n$ に対し, それらの添数たち i', j' が互いに異なるなら, それらの部分 vector 空間たち $W_{i'}$, $W_{j'}$ どちらの基底をもなす vector が存在しないことになる.

これにより, $\forall \mathbf{z} \in \bigoplus_{i \in \Lambda_n} W_i$ に対し, $\mathbf{z} = \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{w}_i$ なるその直積 $\prod_{i \in \Lambda_n} W_i$ の元 $(\mathbf{w}_i)_{i \in \Lambda_n}$ が一意的に存在し, ここで, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $\mathbf{w}_i = \sum_{j \in \Lambda_{n_i}} c_{ij} \mathbf{w}_{ij}$ と一意的に書かれるので, $\mathbf{z} = \sum_{i \in \Lambda_n} \sum_{j \in \Lambda_{n_i}} c_{ij} \mathbf{w}_{ij}$ と一意的に書かれることができ, したがって, その直和空間 $\bigoplus_{i \in \Lambda_n} W_i$ の基底は $\langle \mathbf{w}_{ij} \rangle_{(i,j) \in \Lambda_n \times \Lambda_{n_i}}$ となる. □

定理 2.1.6. 体 K 上の有限次元な vector 空間 V の基底 α をいくつかに互いに交わらないように $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ と分割し $i \in \Lambda_n$ なるその組 α_i で張られる部分 vector 空間を W_i とおくと, $V = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} W_i$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V の基底 α をいくつかに互いに交わらないように $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ と分割し $i \in \Lambda_n$ なるその組 α_i で張られる部分 vector 空間を W_i とおく. このとき, $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立たないような添数 i' が存在すると仮定すると, その集合 $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'}$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間であるから, $\mathbf{w}' \in \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'}$ が成り立つような零 vector でない vector$\mathbf{w}'$ が存在する. ここで, $\alpha = \langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_m}$ とおくと, $\mathbf{w}' = \sum_{i \in \Lambda_m} c_i \mathbf{w}_i$ が成り立つような体 K の元 c_i が存在し, さらに, $c_{j'} \neq 0$ なる添数 j' が存在する. したがって, $\mathbf{w}_{j'} \in \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ かつ $\mathbf{w}_{j'} \in W_{i'}$ が成り立つ. このとき, $\mathbf{w}_{j'} \in W_{k'}$ なる部分 vector 空間 $W_{k'}$ が存在することになるので, その vector$\mathbf{w}_{j'}$ はそれらの基底たち $\alpha_{i'}$, $\alpha_{k'}$ をなすことになる. しかしながら, これは仮定に矛盾する. したがって, $\forall i' \in \Lambda_n$ に対し, $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立ち, 定理 2.1.2 よりよって, その和空間 $\sum_{i \in \Lambda_n} W_i$ は直和空間 $\bigoplus_{i \in \Lambda_n} W_i$ でもあり, 基底の定義より $V = \sum_{i \in \Lambda_n} W_i$ が成り立つので, $V = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} W_i$ が得られる. □

定理 2.1.7. 体 K 上の有限次元な vector 空間 V の添数集合 Λ_n によって添数づけられた零 vector でない元の族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, その組 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ がその vector 空間 V の基底をなすならそのときに限り, $V = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} \mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の有限次元な vector 空間 V の添数集合 Λ_n によって添数づけられた零 vector でない元の族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, その組 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ がその vector 空間 V の基底をなすなら, $\forall k \in K \forall i' \in \Lambda_n$ に対し, $k \neq 0$ なら, その vector$k\mathbf{v}_{i'}$ は族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}}$ の線形結合でないので, $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \cap \mathrm{span}\{\mathbf{v}_{i'}\} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. ここで, $\forall \mathbf{z} \in \mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}}$ に対し, $i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}$ なるその体 K のある元々 k_i を用いて $\mathbf{z} = \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} k_i \mathbf{v}_i$ が成り立つので, $\mathbf{z} \in \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\}$ が成り立つ. 以上より, $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} = \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\}$ が得られ, したがって, $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\} \cap \mathrm{span}\{\mathbf{v}_{i'}\} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立ち, 定理 2.1.2 よ

り $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_n} \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\} = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}$ が得られる．上記と同様にして, $V = \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n} = \displaystyle\sum_{i \in \Lambda_n} \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}$ が成り立つことが示され, よって, $V = \displaystyle\bigoplus_{i \in \Lambda_n} \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}$ が成り立つ.

逆に, $V = \displaystyle\bigoplus_{i \in \Lambda_n} \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}$ が成り立つなら, 上記と同様にして, $V = \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ が成り立つことが示される．ここで, $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つかつ, $c_{i'} \neq 0$ なる添数 i' が存在すると仮定すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} c_i \mathbf{v}_i + c_{i'} \mathbf{v}_{i'} = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow c_{i'} \mathbf{v}_{i'} = - \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} c_i \mathbf{v}_i \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v}_{i'} = - \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \frac{c_i}{c_{i'}} \mathbf{v}_i
\end{aligned}$$

これにより, $\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_{i'}\right\} \subseteq \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} = \displaystyle\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}$ が成り立つことになる．このとき, 零 vector でない vector$\mathbf{v}_{i'}$ は $\mathbf{v}_{i'} \in \displaystyle\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\} \cap \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_{i'}\right\}$ を満たすので, $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\} \cap \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_{i'}\right\} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立たないような添数 i' が存在することになる．しかしながら, 定理 2.1.2 より $\forall i' \in \Lambda_n$ に対し, $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つことに矛盾する．したがって, その族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ は線形独立であり, $V = \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ が成り立つのであったので, 基底の定義よりその組 $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ がその vector 空間 V の基底をなす. □

2.1.2 射影子

定義 2.1.3. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たちの添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\left\{W_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ が $V = \displaystyle\bigoplus_{i \in \Lambda_n} W_i$ を満たすとき, その vector 空間 V はその族 $\left\{W_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ に直和分解される, その族 $\left\{W_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ の直和に分解されるなどといい, その族 $\left\{W_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ に属する各部分 vector 空間たちをその vector 空間 V の直和因子という.

定義 2.1.4. 体 K 上の vector 空間 V がこれの部分 vector 空間たちの添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\left\{W_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ に直和分解されるとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \displaystyle\bigoplus_{i \in \Lambda_n} \mathbf{w}_i$ とおくと, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, 次式のように写像 P_i が定義され, その写像 P_i をその vector 空間 V からその直和因子 W_i への直和分解から定まる射影という.

$$P_i : V \rightarrow V; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{w}_i$$

定義 2.1.5. 体 K 上の vector 空間 V を用いた線形写像 $f : V \rightarrow V$ のうち $f \circ f = f$ が成り立つとき, その線形写像 f をその vector 空間 V の射影子という.

定理 2.1.8. 体 K 上の vector 空間 V がこれの部分 vector 空間たちの添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\left\{W_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ に直和分解されるとき, 次のことが成り立つ.

- $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, その vector 空間 V からその直和因子 W_i への直和分解から定まる射影 P_i はその vector 空間 V の射影子である.
- $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, その vector 空間 V からその直和因子 W_i への直和分解から定まる射影 P_i について, $V\left(P_i\right) = W_i$ が成り立つ.
- $\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, その vector 空間 V からその直和因子 W_i, W_j への直和分解から定まる射影たちそれぞれ P_i, P_j について, $P_j \circ P_i = 0$ が成り立つ.
- $i \in \varLambda_n$ なるその vector 空間 V からその直和因子 W_i への直和分解から定まる射影たち P_i について, その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $\sum_{i \in \varLambda_n} P_i = I_V$ が成り立つ.
- $\forall i' \in \varLambda_n$ に対し, その vector 空間 V からその直和因子 $W_{i'}$ への直和分解から定まる射影 $P_{i'}$ について, $\ker P_{i'} = \bigoplus_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V がこれの部分 vector 空間たちの添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた族 $\{W_i\}_{i \in \varLambda_n}$ に直和分解されるとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \bigoplus_{i \in \varLambda_n} \mathbf{w}_i$ とおくと, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, その vector 空間 V からその直和因子 W_i への直和分解から定まる射影 P_i について, 次のようになるので,

$$P_i \circ P_i(\mathbf{v}) = P_i(\mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_i = P_i(\mathbf{v})$$

その射影 P_i はその vector 空間 V の射影子である.

また, その射影 P_i について, 定義より $V\left(P_i\right) \subseteq W_i$ が成り立ち, また, $\forall \mathbf{w}_i \in W_i$ に対し, $P_i\left(\mathbf{w}_i\right) = \mathbf{w}_i$ が成り立つので, $\mathbf{w}_i \in V\left(P_i\right)$ が得られ, したがって, $V\left(P_i\right) = W_i$ が成り立つ.

$\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, その vector 空間 V からその直和因子 W_i, W_j への直和分解から定まる射影たちそれぞれ P_i, P_j について, $\mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}$ のとき, $P_i(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_i \notin W_j$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned} P_j \circ P_i(\mathbf{v}) &= P_j\left(P_i(\mathbf{v})\right) \\ &= P_j\left(\mathbf{w}_i\right) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

よって, $P_j \circ P_i = 0$ が成り立つ.

また, $i \in \varLambda_n$ なるその vector 空間 V からその直和因子 W_i への直和分解から定まる射影たち P_i について, 次のようになるので,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in \varLambda_n} P_i\right)(\mathbf{v}) &= \sum_{i \in \varLambda_n} P_i(\mathbf{v}) \\ &= \sum_{i \in \varLambda_n} \mathbf{w}_i = \mathbf{v} \end{aligned}$$

その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $\sum_{i \in \varLambda_n} P_i = I_V$ が成り立つ.

最後に, $\forall i' \in \varLambda_n$ に対し, その vector 空間 V からその直和因子 $W_{i'}$ への直和分解から定まる射影 $P_{i'}$ について, $\mathbf{v} \in \ker P_{i'}$ が成り立つかつ, $\mathbf{v} \notin \bigoplus_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ が成り立つようなその核 $\ker P_{i'}$ の元 $\mathbf{v}$ が存在すると仮定しよう. このとき, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ なら, その集合 $\bigoplus_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ もその vector 空間の部分 vector 空間でもあり,

$\mathbf{0} \in \bigoplus_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ が成り立つことになるので, その vector$\mathbf{v}$ は零 vector でない. このとき, $\mathbf{v} \notin \bigoplus_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ が成り立つかつ, $V = W_{i'} \oplus \bigoplus_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ が成り立つことにより, $\mathbf{v} \in W_{i'}$ が成り立つことになる. このとき, $P_{i'}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が得られ $\mathbf{v} \in \ker P_{i'}$ が成り立つことに矛盾する. したがって, $\forall \mathbf{v} \in \ker P_{i'}$ に対し, $\mathbf{v} \in \ker P_{i'}$ が成り立つなら, $\mathbf{v} \notin \bigoplus_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ が成り立つので, $\ker P_{i'} \subseteq \bigoplus_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ が成り立つ. 一方で, $\forall \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \mathbf{w}_i \in \bigoplus_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ に対し, その射影 $P_{i'}$ の定義より $P_{i'}\left(\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \mathbf{w}_i\right) = \mathbf{0}$ が成り立つので, $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \mathbf{w}_i \in \ker P_{i'}$ が成り立つ. したがって, $\ker P_{i'} \supseteq \bigoplus_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ が得られ, 以上より, $\ker P_{i'} = \bigoplus_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} W_i$ が成り立つ. □

定理 2.1.9. 体 K 上の vector 空間 V の線形写像 $P_i : V \to V$ の添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\{P_i\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, 次のことを満たすなら,

- $\forall i, j \in \Lambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $P_j \circ P_i = 0$ が成り立つ.
- $i \in \Lambda_n$ なるそれらの線形写像たち P_i について, その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $\sum_{i \in \Lambda_n} P_i = I_V$ が成り立つ.

$\forall i \in \Lambda_n$ に対し, その線形写像 P_i はその vector 空間 V の射影子でもある.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の線形写像 $P_i : V \to V$ の添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\{P_i\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, 次のことを満たすなら,

- $\forall i, j \in \Lambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $P_j \circ P_i = 0$ が成り立つ.
- $i \in \Lambda_n$ なるそれらの線形写像たち P_i について, その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $\sum_{i \in \Lambda_n} P_i = I_V$ が成り立つ.

$\forall i' \in \Lambda_n \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $P_{i'}(\mathbf{v}) \in V$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i \in \Lambda_n} P_i\right)(P_{i'}(\mathbf{v})) &= \sum_{i \in \Lambda_n} P_i(P_{i'}(\mathbf{v})) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} P_i \circ P_{i'}(\mathbf{v}) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} P_i \circ P_{i'}(\mathbf{v}) + P_{i'} \circ P_{i'}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

ここで, 仮定より $i \neq i'$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $P_i \circ P_{i'}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つのであったので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i \in \Lambda_n} P_i\right)(P_{i'}(\mathbf{v})) &= \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \mathbf{0} + P_{i'} \circ P_{i'}(\mathbf{v}) \\
&= P_{i'} \circ P_{i'}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

ここで, $i \in \Lambda_n$ なるその線形写像たち P_i について, その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $\sum_{i \in \Lambda_n} P_i = I_V$ が成り立つのであったので, 次式が成り立ち,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i \in \Lambda_n} P_i\right)\left(P_{i'}(\mathbf{v})\right) &= I_V\left(P_{i'}(\mathbf{v})\right)\\ &= P_{i'}(\mathbf{v})\\ &= P_{i'} \circ P_{i'}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

したがって, その線形写像 $P_{i'}$ はその vector 空間 V の射影子でもある. □

定理 2.1.10. 体 K 上の vector 空間 V の線形写像 $P_i : V \rightarrow V$ の添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\left\{P_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, 次のことを満たすなら,

- $\forall i, j \in \Lambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $P_j \circ P_i = 0$ が成り立つ.
- $i \in \Lambda_n$ なるそれらの線形写像たち P_i について, その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $\sum_{i \in \Lambda_n} P_i = I_V$ が成り立つ.

次式が成り立ち,

$$V = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} V\left(P_i\right)$$

さらに, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, その線形写像 P_i はいづれもその vector 空間 V からその直和因子 $V\left(P_i\right)$ への直和分解から定まる射影でもある.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の線形写像 $P_i : V \rightarrow V$ の添数集合 Λ_n によって添数づけられた族 $\left\{P_i\right\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, 次のことを満たすなら,

- $\forall i, j \in \Lambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $P_j \circ P_i = 0$ が成り立つ.
- $i \in \Lambda_n$ なるそれらの線形写像たち P_i について, その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $\sum_{i \in \Lambda_n} P_i = I_V$ が成り立つ.

ここで, $i \in \Lambda_n$ なる値域たち $V\left(P_i\right)$ はいづれもその vector 空間 V の部分 vector 空間でもあるから, $i \in \Lambda_n$ なる部分 vector 空間たち W_i の基底の 1 つを $\dim W_i = n_i$ として $\left\langle \mathbf{w}_{ij} \right\rangle_{j \in \Lambda_{n_i}}$ とおくとする. $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} V\left(P_i\right) \cap V\left(P_{i'}\right) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立たないような添数 i' が存在すると仮定すると, それらの集合たち $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} V\left(P_i\right)$, $V\left(P_{i'}\right)$ いづれもその vector 空間 V の部分 vector 空間であるから, $i \in \Lambda_n$ なる基底たち $\left\langle \mathbf{w}_{ij} \right\rangle_{j \in \Lambda_{n_i}}$ のうち $\mathbf{w}' \in \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} V\left(P_i\right) \cap V\left(P_{i'}\right)$ なる vector$\mathbf{w}'$ が存在する. $\exists j' \in \Lambda_n \setminus \{i'\}$ に対し, $\mathbf{w}' \in V\left(P_{j'}\right)$ が成り立つので, $\mathbf{w}' \in V\left(P_{i'}\right) \cap V\left(P_{j'}\right)$ が成り立ち, $P_{i'}\left(\mathbf{v}_{i'}\right) = P_{j'}\left(\mathbf{v}_{j'}\right) = \mathbf{w}'$ なる vectors$\mathbf{v}_{i'}$, $\mathbf{v}_{j'}$ がその vector 空間 V に存在する. ここで, 仮定より $P_{j'} \circ P_{i'}\left(\mathbf{v}'\right) = \mathbf{0}$ が成り立つかつ, 定理 2.1.9 よりそれらの線形写像たち $P_{i'}$, $P_{j'}$ は射影子でもあるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}P_{j'} \circ P_{i'}\left(\mathbf{v}_{i'}\right) &= P_{j'}\left(P_{i'}\left(\mathbf{v}_{i'}\right)\right)\\ &= P_{j'}\left(P_{j'}\left(\mathbf{v}_{j'}\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P_{j'} \circ P_{j'}\left(\mathbf{v}_{j'}\right) \\
&= P_{j'}\left(\mathbf{v}_{j'}\right) = \mathbf{w}'
\end{aligned}
$$

以上より, $\mathbf{w}' = \mathbf{0}$ が成り立つことになるが, その vector$\mathbf{w}'$ が零 vector でないことに矛盾する. したがって, $\forall i' \in \varLambda_n$ に対し, $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} W_i \cap W_{i'} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立ち, 定理 2.1.2 より $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_n} V\left(P_i\right) = \bigoplus_{i \in \varLambda_n} V\left(P_i\right)$ が成り立つ.

ここで, その族 $\left\{P_i\right\}_{i \in \varLambda_n}$ の定義より $V \supseteq \displaystyle\bigoplus_{i \in \varLambda_n} V\left(P_i\right)$ が成り立つかつ, 仮定より $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= I_V\left(\mathbf{v}\right) \\
&= \left(\sum_{i \in \varLambda_n} P_i\right)\left(\mathbf{v}\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} P_i\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}
$$

$\mathbf{v} \in \displaystyle\bigoplus_{i \in \varLambda_n} V\left(P_i\right)$ が得られ, したがって, $V \subseteq \displaystyle\bigoplus_{i \in \varLambda_n} V\left(P_i\right)$ が成り立つので, $V = \displaystyle\bigoplus_{i \in \varLambda_n} V\left(P_i\right)$ が成り立つ.

さらに, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, 直和空間の定義より $\forall \mathbf{z} \in \displaystyle\bigoplus_{i \in \varLambda_n} V\left(P_i\right)$ に対し, $\mathbf{z} = \displaystyle\bigoplus_{i \in \varLambda_n} P_i\left(\mathbf{v}_i\right)$ とおくと, $\forall i' \in \varLambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
P_{i'}\left(\mathbf{z}\right) &= P_{i'}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} P_i\left(\mathbf{v}_i\right)\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} P_{i'} \circ P_i\left(\mathbf{v}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} P_{i'} \circ P_i\left(\mathbf{v}_i\right) + P_{i'} \circ P_{i'}\left(\mathbf{v}_{i'}\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} \mathbf{0} + P_{i'} \circ P_{i'}\left(\mathbf{v}_{i'}\right) \\
&= P_{i'} \circ P_{i'}\left(\mathbf{v}_{i'}\right)
\end{aligned}
$$

定理 2.1.9 よりその線形写像 $P_{i'}$ は射影子でもあるので, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
P_{i'}\left(\mathbf{z}\right) &= P_{i'}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} P_i\left(\mathbf{v}_i\right)\right) \\
&= P_{i'} \circ P_{i'}\left(\mathbf{v}_{i'}\right) \\
&= P_{i'}\left(\mathbf{v}_{i'}\right)
\end{aligned}
$$

よって, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, その線形写像 P_i はいづれもその vector 空間 V からその直和因子 $V\left(P_i\right)$ への直和分解から定まる射影でもある. □

2.1.3 補空間

定義 2.1.6. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間たちが U, W と与えられたとき, $V = U \oplus W$ が成り立つなら, その部分 vector 空間 W はその vector 空間 V におけるその部分 vector 空間 U の補空間という.

定理 2.1.11. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, その vector 空間 V におけるその部分 vector 空間 W の補空間は存在する.

ただし, その存在は一意的でない. 例えば, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \oplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\\ &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \oplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, その r 次元部分 vector 空間 W の基底を $\langle\mathbf{u}_i\rangle_{i\in\Lambda_r}$ とすると, その vector 空間 V の基底が $\langle\mathbf{u}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$ と与えられることができるのであった. このとき, 集合 $\operatorname{span}\{\mathbf{u}'_i\}_{i\in\Lambda_{n-r}}$ について, 定理 2.1.6 より次のようになる.

$$\begin{aligned}V &= \bigoplus_{i\in\Lambda_r} \operatorname{span}\{\mathbf{u}_i\} \oplus \bigoplus_{i\in\Lambda_{n-r}} \operatorname{span}\{\mathbf{u}'_i\}\\ &= W \oplus \operatorname{span}\{\mathbf{u}'_i\}_{i\in\Lambda_{n-r}}\end{aligned}$$

よって, その vector 空間 V におけるその部分 vector 空間 W の 1 つの補空間が $\operatorname{span}\{\mathbf{u}'_i\}_{i\in\Lambda_{n-r}}$ で与えられる. □

定理 2.1.12. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の線形写像 $f: V \to V$ が与えられたとき, 次のことは同値である.

- $V = \ker f \oplus V(f)$ が成り立つ.
- $\ker f \cap V(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.
- $\ker f \circ f = \ker f$ が成り立つ.
- $V(f \circ f) = V(f)$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の線形写像 $f: V \to V$ が与えられたとき, $V = \ker f \oplus V(f)$ が成り立つなら, 次元公式と定理 2.1.2 より $\ker f \cap V(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.

$\ker f \cap V(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つなら, $\forall\mathbf{v} \in \ker f \circ f$ に対し, $f \circ f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つことになるので, $f(\mathbf{v}) \in \ker f$ が成り立つかつ, $f(\mathbf{v}) \in V(f)$ が成り立つ. これにより, $f(\mathbf{v}) = 0$ となり, したがって, $\mathbf{v} \in \ker f$ が成り立つ. 逆に, $\forall\mathbf{v} \in \ker f$ に対し, $\mathbf{v} \in \ker f$ が成り立つなら, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立ち, その写像 f は線形的であるから, したがって, $f \circ f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つ. これにより, $\mathbf{v} \in \ker f \circ f$ が得られる. 以上より, $\ker f \circ f = \ker f$ が得られる.

$\ker f \circ f = \ker f$ が成り立つなら, その核 $\ker f$ の基底を $\dim\ker f = r$ として $\langle\mathbf{w}_i\rangle_{i\in\Lambda_r}$ とおくと, その vector 空間 V の基底は定理 1.1.22 より $\langle\mathbf{w}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$ とおかれることができ, 次元公式より次式が成り立ち,

$$\dim\ker f + \dim V(f) = \dim\ker f \circ f + \dim V(f \circ f) = \dim V$$

したがって, $\dim V(f \circ f) = \dim V(f)$ が成り立つことになる. $\forall\mathbf{v} \in V(f \circ f)$ に対し, $f \circ f(\mathbf{v}') = \mathbf{v}$ なる vector$\mathbf{v}'$ がその vector 空間 V に存在することになり, したがって, $f(\mathbf{v}') \in V$ が成り立つので, $\mathbf{v} \in V(f)$ が成り立つ. これにより, $V(f \circ f) \subseteq V(f)$ が得られ, 定義よりその集合 $V(f \circ f)$ はその集合 $V(f)$ の部分 vector 空間であるから, 定理 1.1.22 より $V(f \circ f) = V(f)$ が成り立つ.

$V(f\circ f)=V(f)$ が成り立つなら, 明らかに $V\supseteq \ker f+V(f)$ が成り立つ. 一方で, $\forall \mathbf{v}\in V$ に対し, $f(\mathbf{v})=f\circ f(\mathbf{v}')$ なる vector$\mathbf{v}'$ がその vector 空間 V に存在し次のようになるので,

$$f\left(\mathbf{v}-f\left(\mathbf{v}'\right)\right)=f\left(\mathbf{v}\right)-f\circ f\left(\mathbf{v}'\right)=f\left(\mathbf{v}\right)-f\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{0}$$

$\mathbf{v}-f\left(\mathbf{v}'\right)\in\ker f$ が得られ, $\mathbf{v}=\left(\mathbf{v}-f\left(\mathbf{v}'\right)\right)+f\left(\mathbf{v}'\right)$ が成り立つことにより, $V\subseteq\ker f+V(f)$ が成り立つ. 以上より, $V=\ker f+V(f)$ が得られる. また, 次元公式と定理 2.1.4 より $V=\ker f\oplus V(f)$ が成り立つ. □

定理 2.1.13. 体 K 上の vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $f\circ f=I_V$ なる線形写像 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, 集合たち $\{\mathbf{v}\in V|f\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{v}\in V|f\left(\mathbf{v}\right)=-\mathbf{v}\}$ はいづれもその vector 空間 V の部分 vector 空間たちで次式が成り立つ.

$$V=\{\mathbf{v}\in V|f\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{v}\}\oplus\{\mathbf{v}\in V|f\left(\mathbf{v}\right)=-\mathbf{v}\}$$

これにより, 例えば, 次のようなものが挙げられる.

- その集合 $\mathrm{M}(m,n,K)$ の恒等写像 $I_{\mathrm{M}(m,n,K)}$ について, $\mathrm{M}(m,n,K)=\mathrm{M}(m,n,K)\oplus\{O\}$ が成り立つ.
- 共役複素数へうつす写像について, $\mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}$ が成り立つ.
- 転置行列へうつす写像 ${}^t\bullet$ について, $\mathrm{M}(n,n,K)=\mathrm{Sym}_n(K)\oplus\mathrm{skewSym}_n(K)$ が成り立つ.
- 複素共役行列へうつす写像について, $\mathrm{M}\left(n,n,\mathbb{C}\right)=\mathrm{M}\left(n,n,\mathbb{R}\right)\oplus i\mathrm{M}\left(n,n,\mathbb{R}\right)$ が成り立つ.
- 随伴行列へうつす写像について, $\mathrm{M}\left(n,n,\mathbb{C}\right)=H_n\oplus\mathrm{skew}H_n$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $f\circ f=I_V$ なる線形写像 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in\{\mathbf{v}\in V|f\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{v}\}$ に対し, $f\left(\mathbf{0}\right)=\mathbf{0}$ が成り立つかつ, 次のようになるので,

$$f\left(k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\right)=kf\left(\mathbf{v}\right)+lf\left(\mathbf{w}\right)=k\mathbf{v}+l\mathbf{w}$$

定義よりその集合 $\{\mathbf{v}\in V|f\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{v}\}$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間である. 同様にして, その集合 $\{\mathbf{v}\in V|f\left(\mathbf{v}\right)=-\mathbf{v}\}$ もその vector 空間 V の部分 vector 空間であることが示される.

ここで, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次式のような vectors$\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ が考えられるとする.

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}+f\left(\mathbf{v}\right)}{2},\quad\mathbf{w}=\frac{\mathbf{v}-f\left(\mathbf{v}\right)}{2}$$

このとき, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
f\left(\mathbf{u}\right)&=f\left(\frac{\mathbf{v}+f\left(\mathbf{v}\right)}{2}\right)\\
&=\frac{f\left(\mathbf{v}\right)+f\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right)}{2}\\
&=\frac{f\circ f\left(\mathbf{v}\right)+f\left(\mathbf{v}\right)}{2}\\
&=\frac{\mathbf{v}+f\left(\mathbf{v}\right)}{2}=\mathbf{u}\\
f\left(\mathbf{w}\right)&=f\left(\frac{\mathbf{v}-f\left(\mathbf{v}\right)}{2}\right)\\
&=\frac{f\left(\mathbf{v}\right)-f\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right)}{2}\\
&=-\frac{f\circ f\left(\mathbf{v}\right)-f\left(\mathbf{v}\right)}{2}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\mathbf{v} - f(\mathbf{v})}{2} = -\mathbf{w}$$

それらの vectors$\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ はそれぞれそれらの集合たち $\{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\}$ に属する．

さらに, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{2\mathbf{v}}{2} \\
&= \frac{\mathbf{v} + f(\mathbf{v}) + \mathbf{v} - f(\mathbf{v})}{2} \\
&= \frac{\mathbf{v} + f(\mathbf{v})}{2} + \frac{\mathbf{v} - f(\mathbf{v})}{2} \\
&= \mathbf{u} + \mathbf{w}
\end{aligned}$$

その vector$\mathbf{v}$ はそれらの vectors$\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ の和として表されることができる．

最後に, その vector$\mathbf{v}$ はそれらの集合たち $\{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\}$ の元々 $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ の和として表されることができるとき, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{v}) &= f(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \\
&= f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{w}) \\
&= \mathbf{u} - \mathbf{w}
\end{aligned}$$

$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ かつ $f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ が得られる．これにより, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \\ f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} - \mathbf{w} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{v} + f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{u} \\ \mathbf{v} - f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{w} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v} + f(\mathbf{v})}{2} \\ \mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{v} - f(\mathbf{v})}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

その vector$\mathbf{v}$ はそれらの vectors$\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ の和として一意的に表されることができる．以上より, 次式が成り立つ．

$$V = \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\} \oplus \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\}$$

□

定理 2.1.14. 体 K 上の有限次元な vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $f \circ f = I_V$ なる線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, 次式が成り立つ．

$$\dim V(f - I_V) + \dim V(f + I_V) = \dim V$$

証明. 体 K 上の有限次元な vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $f \circ f = I_V$ なる線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, 定理 2.1.13 より次式が成り立つ．

$$V = \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\} \oplus \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\}$$

定理 2.1.4 より次のようになる．

$$\begin{aligned}
\dim V &= \dim \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\} \oplus \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\} \\
&= \dim \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\} + \dim \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\} \\
&= \dim \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) - \mathbf{v} = \mathbf{0}\} + \dim \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \dim \{\mathbf{v} \in V | (f - I_V)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} + \dim \{\mathbf{v} \in V | (f + I_V)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \\
&= \dim \ker (f - I_V) + \dim \ker (f - I_V)
\end{aligned}
$$

ここで, 次元公式より次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\dim V &= \dim V - \dim V (f - I_V) + \dim V - \dim V (f + I_V) \\
&= 2 \dim V - \dim V (f - I_V) - \dim V (f + I_V)
\end{aligned}
$$

よって, 次式が成り立つ.

$$\dim V (f - I_V) + \dim V (f + I_V) = \dim V$$

□

定義 2.1.7. 体 K 上の線形写像 $f : \mathrm{M}(m,n,K) \to \mathrm{M}(m,n,K)$ がその集合 $\mathrm{M}(m,n,K)$ の恒等写像 $I_{\mathrm{M}(m,n,K)}$ を用いて $f \circ f = I_{\mathrm{M}(m,n,K)}$ を満たすとき, ここでは, $f(A) = A$ を満たすような行列 A をその線形写像 f について対称な行列, $f(A) = -A$ を満たすような行列 A をその線形写像 f について歪対称な行列ということにし, このような行列全体の集合をそれぞれ $\mathrm{sym}_{mn}(f,K)$, $\mathrm{skewsym}_{mn}(f,K)$ とおくことにする.

定理 2.1.15. $f \circ f = I_{\mathrm{M}(m,n,K)}$ なる体 K 上の線形写像 $f : \mathrm{M}(m,n,K) \to \mathrm{M}(m,n,K)$ について, $\mathrm{M}(m,n,K) = \mathrm{sym}_{mn}(f,K) \oplus \mathrm{skewsym}_{mn}(f,K)$ が成り立つ.

証明. 定義と行列もまた vector でもあることに注意すれば, 定理 2.1.13 そのものである. □

定理 2.1.16. $f \circ f = I_{\mathrm{M}(n,n,K)}$ かつ $\forall A, B \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $f(AB) = f(A) f(B)$ なる体 K 上の線形写像 $f : \mathrm{M}(n,n,K) \to \mathrm{M}(n,n,K)$ について対称な, あるいは, 歪対称な行列たち A, B が与えられたとき, 行列 AB はその線形写像 f について対称な行列である.

証明. $f \circ f = I_{\mathrm{M}(n,n,K)}$ かつ $\forall A, B \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $f(AB) = f(A) f(B)$ なる体 K 上の線形写像 $f : \mathrm{M}(n,n,K) \to \mathrm{M}(n,n,K)$ について対称な行列たち A, B が与えられたとき, 行列 AB について次のようになるので,

$$f(AB) = f(A) f(B) = AB$$

その行列 AB はその線形写像 f について対称な行列である. その線形写像 f について歪対称な行列たち A, B が与えられたときも同様にして示される. □

定理 2.1.17. $f \circ f = I_{\mathrm{M}(n,n,K)}$ かつ $\forall A, B \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $f(AB) = f(B) f(A)$ なる体 K 上の線形写像 $f : \mathrm{M}(n,n,K) \to \mathrm{M}(n,n,K)$ について対称な, あるいは, 歪対称な行列たち A, B が与えられたとき, 行列 AB がその線形写像 f について対称な行列であるならそのときに限り, $AB = BA$ が成り立つ.

証明. $f \circ f = I_{\mathrm{M}(n,n,K)}$ かつ $\forall A, B \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $f(AB) = f(B) f(A)$ なる体 K 上の線形写像 $f : \mathrm{M}(n,n,K) \to \mathrm{M}(n,n,K)$ について対称な行列たち A, B が与えられたとき, その行列 AB がその線形写像 f について対称な行列であるならそのときに限り, $f(AB) = AB$ が成り立つ. ここで, 次式が成り立つことにより,

$$f(AB) = f(B) f(A) = BA$$

これが成り立つならそのときに限り, $AB = BA$ が成り立つ. その線形写像 f について歪対称な行列たち A, B が与えられたときも同様にして示される. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p215-226 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007. 改訂版 8 刷 p48-52 ISBN978-4-320-11097-7

[3] 福井敏純. "線形代数学講義ノート". 埼玉大学. http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/Fukui/lectures/Linear_algebra.pdf (2021-7-30 17:25 取得)

[4] 大和田拓. "付録１ 人には聞けない線形代数の基礎". 京都大学. https://fd.kuaero.kyoto-u.ac.jp/sites/default/files/linear_algebra.pdf (2022-3-18 8:15 閲覧)

[5] 桂田祐史. "3.1.1 代数的直和, 代数的補空間, 代数的射影作用素". 明治大学. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/functional-analysis-3/node16.html (2022-3-18 8:05 閲覧)

2.2 固有値

2.2.1 固有値

定義 2.2.1. 以下, 体 K 上の vector 空間 K^n において, 線形写像 $f:K^n\rightarrow K^n$ が $f:K^n\rightarrow K^n;\mathbf{v}\mapsto A\mathbf{v}$ と与えられたとき, その線形写像 f を L_A とおくことにする.

定義 2.2.2. 体 K 上の vector 空間 V において, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとする. $f(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$ が成り立つような零 vector でないその vector 空間 V の vector$\mathbf{v}$ とその体 K の元 λ が存在するとき, その元 λ をその線形写像 f の固有値といい, その vector$\mathbf{v}$ をその線形写像 f のその固有値 λ に対する固有 vector という.

定理 2.2.1. 体 K 上の vector 空間 V において, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ の固有値 α が与えられたとき, vector$\mathbf{v}$ がその固有値 λ に対する固有 vector であるなら, $\forall k\in K$ に対し, その vector$k\mathbf{v}$ もその固有値 λ に対する固有 vector である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V において, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ の固有値 λ が与えられたとき, vector$\mathbf{v}$ がその固有値 λ に対する固有 vector であるなら, $\forall k\in K$ に対し, その vector$k\mathbf{v}$ は次のことを満たすので,

$$f(k\mathbf{v})=kf(\mathbf{v})=k(\lambda\mathbf{v})=\lambda(k\mathbf{v})$$

その vector$k\mathbf{v}$ もその固有値 λ に対する固有 vector である. □

定理 2.2.2. 体 K 上の vector 空間 V において, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, $\exists\lambda\in K$ に対し, その元 λ がその線形写像 f の固有値であるならそのときに限り, その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて線形写像 λI_V-f の核 $\ker(\lambda I_V-f)$ が零 vector 以外の元を含む, 即ち, $\ker(\lambda I_V-f)\supset\{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. このとき, その vector 空間 V の元 $\mathbf{v}$ がその固有値 λ に対する固有 vector であるならそのときに限り, その vector$\mathbf{v}$ はその集合 $\ker(\lambda I_V-f)\setminus\{\mathbf{0}\}$ の元である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V において, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, $\exists\lambda\in K$ に対し, その元 λ がその線形写像 f の固有値であるなら, $f(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$ が成り立つような零 vector でないその vector 空間 V の vector$\mathbf{v}$ が存在する. ここで, その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて次のようになるので,

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=f(\mathbf{v})-f(\mathbf{v})\\&=\lambda\mathbf{v}-f(\mathbf{v})\\&=\lambda I_V(\mathbf{v})-f(\mathbf{v})\\&=(\lambda I_V-f)(\mathbf{v})\end{aligned}$$

$\mathbf{v}\in\ker(\lambda I_V-f)$ が成り立つ. これにより, 線形写像 λI_V-f の核 $\ker(\lambda I_V-f)$ が零 vector 以外の元を含む, 即ち, $\ker(\lambda I_V-f)\supset\{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.

逆に, これが成り立つなら, その核 $\ker(\lambda I_V-f)$ は空集合でないので, $\mathbf{v}\in\ker(\lambda I_V-f)$ なる零 vector でない vector$\mathbf{v}$ が存在する. したがって, $(\lambda I_V-f)(\mathbf{v})=\mathbf{0}$ が成り立つ. これにより, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}f(\mathbf{v})&=f(\mathbf{v})-\lambda I_V(\mathbf{v})+\lambda I_V(\mathbf{v})\\&=-(\lambda I_V(\mathbf{v})-f(\mathbf{v}))+\lambda I_V(\mathbf{v})\\&=-(\lambda I_V-f)(\mathbf{v})+\lambda I_V(\mathbf{v})\end{aligned}$$

$$= \lambda I_V(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

その vector$\mathbf{v}$ はまさしくその線形写像 f のその固有値 λ に対する固有 vector である.

このとき, その vector 空間 V の元 $\mathbf{v}$ がその固有値 λ に対する固有 vector であるならそのときに限り, その vector$\mathbf{v}$ は零 vector でないかつ, $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ が成り立つ. ここで, 次のようになるので,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} &\Leftrightarrow \lambda I_V(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \\ &\Leftrightarrow \lambda I_V(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow (\lambda I_V - f)(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} \in \ker(\lambda I_V - f) \end{aligned}$$

これが成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} \in \ker(\lambda I_V - f) \setminus \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. □

定理 2.2.3. 体 K 上の vector 空間 V において, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, $\exists \lambda \in K$ に対し, その元 λ がその線形写像 f の固有値であるならそのときに限り, その線形写像 $\lambda I_V - f$ が全単射でない.

なお, 線形写像が全単射であるかどうかの判定については次の定理が有用であろう.

定理 (定理 1.5.16 の再掲)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つをそれぞれ α, β とし, それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の $[f]_\alpha^\beta \in \mathrm{M}(n, n, K)$ なる表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ を用いて写像 $F_{\alpha \to \beta}$ が次式のように定義されれば,

$$F_{\alpha \to \beta} : L(V, W) \to \mathrm{M}(n, n, K); f \mapsto [f]_\alpha^\beta$$

$\forall f \in L(V, W)$ に対し, 次のことは同値である.

- その写像 f は線形同型写像である.
- その写像 f は全射 $f : V \twoheadrightarrow W$ である.
- その写像 f は単射 $f : V \rightarrowtail W$ である.
- $n = \mathrm{rank} f = \dim V(f)$ が成り立つ.
- $\mathrm{nullity} f = \dim \ker f = 0$ が成り立つ.
- それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ は正則行列である, 即ち, $[f]_\alpha^\beta \in \mathrm{GL}(n, K)$ が成り立つ.
- その行列 $F_{\alpha \to \beta}(f)$ は正則行列である, 即ち, $F_{\alpha \to \beta}(f) \in \mathrm{GL}(n, K)$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V において, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, $\exists \lambda \in K$ に対し, その元 λ がその線形写像 f の固有値であるならそのときに限り, 定理 2.2.2 よりその vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて線形写像 $\lambda I_V - f$ の核 $\ker(\lambda I_V - f)$ が零 vector 以外の元を含む, 即ち, $\mathrm{nullity}(\lambda I_V - f) \neq 0$ が成り立つ. これが成り立つならそのときに限り, 定理 1.5.16 よりその線形写像 $\lambda I_V - f$ が線形同型写像でない, 即ち, 全単射でない. □

2.2.2 固有多項式

定理 2.2.4. 体 K 上の 2 つの基底たち α, β をもつ n 次元 vector 空間 V において, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, $\forall a \in K$ に対し, その vector 空間 V の恒等写像 I_V, その基底 α, β に関するその線形写像

$aI_V - f$ の表現行列それぞれ $[aI_V - f]^\alpha_\alpha$, $[aI_V - f]^\beta_\beta$ を用いると, 次式が成り立つ.

$$\det [aI_V - f]^\alpha_\alpha = \det [aI_V - f]^\beta_\beta$$

証明. 体 K 上の 2 つの基底たち α, β をもつ n 次元 vector 空間 V において, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, $\forall a \in K$ に対し, その vector 空間 V の恒等写像 I_V, その基底 α からその基底 β への基底変換行列 $[I_V]^\beta_\alpha$, その基底 α に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]^\alpha_\alpha$, その基底 β に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]^\beta_\beta$, n 次単位行列 I_n を用いると, 定理 1.5.10 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\det [aI_V - f]^\alpha_\alpha &= \det \left(a [I_V]^\alpha_\alpha - [f]^\alpha_\alpha\right) \\
&= \det \left(a [I_V \circ I_V \circ I_V]^\alpha_\alpha - [I_V \circ f \circ I_V]^\alpha_\alpha\right) \\
&= \det \left(a [I_V]^\alpha_\beta [I_V]^\beta_\beta [I_V]^\beta_\alpha - [I_V]^\alpha_\beta [f]^\beta_\beta [I_V]^\beta_\alpha\right) \\
&= \det \left(a{[I_V]^\beta_\alpha}^{-1} [I_V]^\beta_\beta [I_V]^\beta_\alpha - {[I_V]^\beta_\alpha}^{-1} [f]^\beta_\beta [I_V]^\beta_\alpha\right) \\
&= \det \left({[I_V]^\beta_\alpha}^{-1} a [I_V]^\beta_\beta [I_V]^\beta_\alpha - {[I_V]^\beta_\alpha}^{-1} [f]^\beta_\beta [I_V]^\beta_\alpha\right) \\
&= \det \left({[I_V]^\beta_\alpha}^{-1} \left(a [I_V]^\beta_\beta - [f]^\beta_\beta\right) [I_V]^\beta_\alpha\right) \\
&= \det \left({[I_V]^\beta_\alpha}^{-1} [aI_V - f]^\beta_\beta [I_V]^\beta_\alpha\right) \\
&= \det {[I_V]^\beta_\alpha}^{-1} \det [aI_V - f]^\beta_\beta \det [I_V]^\beta_\alpha \\
&= \frac{1}{\det [I_V]^\beta_\alpha} \det [I_V]^\beta_\alpha \det [aI_V - f]^\beta_\beta \\
&= \det [aI_V - f]^\beta_\beta
\end{aligned}$$

□

定義 2.2.3. 体 K 上の基底 α をもつ n 次元 vector 空間 V において, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, その vector 空間 V の恒等写像 I_V, その基底 α に関するその線形写像 $aI_V - f$ の表現行列 $[aI_V - f]^\alpha_\alpha$, n 次元単位行列 I_n を用いて次式のように写像 $\varPhi_f$ を考える.

$$\varPhi_f : K \to K; a \mapsto \det [aI_V - f]^\alpha_\alpha$$

この写像 $\varPhi_f$ を固有多項式写像という.

上記の定理 2.2.4 よりその写像 $\varPhi_f$ はその vector 空間 V の基底に依らないことが分かるであろう.

定理 2.2.5. 体 K 上の基底 α をもつ n 次元 vector 空間 V において, 線形写像 $f : V \to V$ の固有多項式写像 $\varPhi_f$ は多項式写像である, 即ち, 固有多項式 $\varPhi_f(a)$ は $i \in \varLambda_n \cup \{0\}$ なるある体の元々 k_i を用いて次式のように表されることができる.

$$\varPhi_f(a) = \sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} k_i a^i$$

これにより, これが定められる多項式環 $K[X]$ の多項式 $\varPhi_f$ をその線形写像 f の固有多項式という. さらに, その固有多項式の n 次係数 k_n, $n-1$ 次係数 k_{n-1}, 定数項 k_0 について, その基底 α に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]^\alpha_\alpha$ を用いると, 次のようになる.

$$k_n = 1, \quad k_{n-1} = -\mathrm{tr}[f]^\alpha_\alpha, \quad k_0 = (-1)^n \det[f]^\alpha_\alpha$$

なお, その他の元々 k_i を求めるのは証明の議論についてこれば分かるように困難である.

証明. 体 K 上の基底 α をもつ n 次元 vector 空間 V において, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ の固有多項式 $\varPhi_f(a)$ は, 定義よりその vector 空間 V の恒等写像 I_V, その基底 α に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_\alpha^\alpha$, n 次単位行列 I_n を用いると, 次式を満たす.

$$\varPhi_f(a)=\det\left[aI_V-f\right]_\alpha^\alpha=\det\left(a\left[I_V\right]_\alpha^\alpha-[f]_\alpha^\alpha\right)=\det\left(aI_n-[f]_\alpha^\alpha\right)$$

ここで, $[f]_\alpha^\alpha=\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_n^2}$ と, 添数集合 $\varLambda_n$ の置換全体の集合を $\mathfrak{S}_n$ とおくと, 定理 1.11.5 より次式が成り立つ.

$$\varPhi_f(a)=\det\left(aI_n-[f]_\alpha^\alpha\right)=\sum_{p\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}p\prod_{j\in\varLambda_n}\left(a\delta_{p(j)j}-a_{p(j)j}\right)$$

したがって, 次のようになる.

$$\varPhi_f(a)=\sum_{p\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}p\prod_{\substack{j\in\varLambda_n\\p(j)\neq j}}\left(-a_{p(j)j}\right)\prod_{\substack{j\in\varLambda_n\\p(j)=j}}\left(a-a_{p(j)j}\right)$$

ここで, $j\in\varLambda_n$ かつ $p(j)=j$ が成り立つような添数 j 全体の集合を $\varLambda_p'$ とおくと, $\#\varLambda_p'=L$ として, $i\in\varLambda_L\cup\{0\}$ なるある体の元々 k_i' を用いて次式を満たすかつ $k_L'=1$ かつ $k_{L-1}'=-\sum_{i\in\varLambda_p'}a_{ii}$ が成り立つことを示そう.

$$\prod_{\substack{j\in\varLambda_n\\p(j)=j}}\left(a-a_{p(j)j}\right)=\prod_{j\in\varLambda_p'}\left(a-a_{jj}\right)=\sum_{i\in\varLambda_L\cup\{0\}}k_i'a^i$$

このとき, $\#\varLambda_L\leq\#\varLambda_n=n$ が成り立つことに注意すれば, $L=1$ のとき, $j'\in\varLambda_L$ なる添数 j' を用いれば明らかに $\prod_{j\in\varLambda_p'}\left(a-a_{jj}\right)=a-a_{j'j'}$ が成り立つ.

$1\leq L=k\leq n-1$ のとき, $\prod_{j\in\varLambda_p'}\left(a-a_{jj}\right)=\sum_{i\in\varLambda_L\cup\{0\}}k_i'a^i$ が成り立つかつ $k_k'=1$ かつ $k_{k-1}'=-\sum_{i\in\varLambda_p'}a_{ii}$ が成り立つと仮定しよう.

$2\leq L=k+1\leq 1$ のとき, あるその集合 $\varLambda_L$ の添数 j' を用いると, $\#\left(\varLambda_p'\setminus\{j'\}\right)=k$ が成り立つことに注意すれば, 仮定より次のようになる.

$$\begin{aligned}\prod_{j\in\varLambda_p'}\left(a-a_{jj}\right)&=\left(a-a_{j'j'}\right)\prod_{j\in\varLambda_p'\setminus\{j'\}}\left(a-a_{jj}\right)\\&=\left(a-a_{j'j'}\right)\sum_{i\in\varLambda_k\cup\{0\}}k_i'a^i\\&=\left(a-a_{j'j'}\right)\left(k_k'a^k+k_{k-1}'a^{k-1}+\sum_{i\in(\varLambda_k\cup\{0\})\setminus\{k,k-1\}}k_i'a^i\right)\\&=\left(a-a_{j'j'}\right)\left(a^k-\sum_{i\in\varLambda_p'\setminus\{j'\}}a_{ii}a^{k-1}+\sum_{i\in(\varLambda_k\cup\{0\})\setminus\{k,k-1\}}k_i'a^i\right)\\&=a^{k+1}-\sum_{i\in\varLambda_p'\setminus\{j'\}}a_{ii}a^k+\sum_{i\in(\varLambda_k\cup\{0\})\setminus\{k,k-1\}}k_i'a^{i+1}-a_{j'j'}a^k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ a_{j'j'} \sum_{i \in \Lambda_p' \setminus \{j'\}} a_{ii} a^{k-1} - a_{j'j'} \sum_{i \in (\Lambda_k \cup \{0\}) \setminus \{k,k-1\}} k_i' a^i \\
&= a^{k+1} - \sum_{i \in \Lambda_p'} a_{ii} a^k + \sum_{i \in (\Lambda_k \cup \{0\}) \setminus \{k,k-1\}} k_i' a^{i+1} \\
&\quad + a_{j'j'} \sum_{i \in \Lambda_p' \setminus \{j'\}} a_{ii} a^{k-1} - a_{j'j'} \sum_{i \in (\Lambda_k \cup \{0\}) \setminus \{k,k-1\}} k_i' a^i \\
&= a^{k+1} - \sum_{i \in \Lambda_p'} a_{ii} a^k + \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} k_{i-1}' a^i \\
&\quad + a_{j'j'} \sum_{i \in \Lambda_p' \setminus \{j'\}} a_{ii} a^{k-1} - a_{j'j'} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} k_{i-1}' a^{i-1}
\end{aligned}
$$

以上より, 数学的帰納法によって $i \in \Lambda_L \cup \{0\}$ なるある体の元々 k_i' を用いて次式を満たすかつ, $k_{\Lambda_L}' = 1$ かつ $k_{\Lambda_L - 1}' = -\sum_{i \in \Lambda_p'} a_{ii}$ が成り立つことが示された.

$$
\prod_{\substack{j \in \Lambda_n \\ p(j) = j}} \left(a - a_{p(j),j} \right) = \prod_{j \in \Lambda_p'} \left(a - a_{jj} \right) = \sum_{i \in \Lambda_L \cup \{0\}} k_i' a^i
$$

したがって, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\Phi_f(a) &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_p'} \left(-a_{p(j),j} \right) \sum_{i \in \Lambda_L \cup \{0\}} k_i' a^i \\
&= \sum_{l \in \Lambda_n} \sum_{\substack{p \in \mathfrak{S}_n \\ L = l}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_p',} \left(-a_{p(j),j} \right) \sum_{i \in \Lambda_L \cup \{0\}} k_i' a^i \\
&= \sum_{\substack{p \in \mathfrak{S}_n \\ L = n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_p',} \left(-a_{p(j),j} \right) \sum_{i \in \Lambda_L \cup \{0\}} k_i' a^i \\
&\quad + \sum_{l \in \Lambda_{n-1}} \sum_{\substack{p \in \mathfrak{S}_n \\ L = l}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_p'} \left(-a_{p(j),j} \right) \sum_{i \in \Lambda_l \cup \{0\}} k_i' a^i
\end{aligned}
$$

ここで, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{p \in \mathfrak{S}_n \\ L = n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_p'} \left(-a_{p(j),j} \right) \sum_{i \in \Lambda_L \cup \{0\}} k_i' a^i &= \sum_{p = I_{\Lambda_n}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_p'} \left(-a_{p(j),j} \right) \sum_{i \in \Lambda_L \cup \{0\}} k_i' a^i \\
&= \sum_{p = I_{\Lambda_n}} \mathrm{sgn} I_{\Lambda_n} \prod_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_{I_{\Lambda_n}}'} \left(-a_{p(j),j} \right) \sum_{i \in \Lambda_n \cup \{0\}} k_i' a^i \\
&= \prod_{j \in \emptyset} \left(-a_{p(j),j} \right) \sum_{i \in \Lambda_n \cup \{0\}} k_i' a^i = \sum_{i \in \Lambda_n \cup \{0\}} k_i' a^i
\end{aligned}
$$

したがって, 次のようになる.

$$
\Phi_f(a) = \sum_{i \in \Lambda_n \cup \{0\}} k_i' a^i + \sum_{l \in \Lambda_{n-1}} \sum_{\substack{p \in \mathfrak{S}_n \\ L = l}} \mathrm{sgn} p \prod_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_p'} \left(-a_{p(j),j} \right) \sum_{i \in \Lambda_l \cup \{0\}} k_i' a^i
$$

ここで, $L = n - 1$ なる置換 p が存在すると仮定すると, ある 1 つの添数 j' に対してのみ $p\left(j'\right) \neq j'$ が成り立ちその添数 j' 以外の添数 j では $p(j) = j$ が成り立つことになる. このとき, その置換は全単射なので, 逆写

像 p^{-1} が存在して $p^{-1}\left(p\left(j'\right)\right)=j'$ が成り立つかつ, $p\left(j''\right)=p\left(j'\right)$ なるその添数 j' とは異なる添数 j'' が存在して $p\left(j'\right)=j''$ が成り立つことになる. したがって, 次のようになる.

$$j'=p^{-1}\left(p\left(j'\right)\right)=p^{-1}\left(j''\right)=j''$$

しかしながら, これは仮定に矛盾する.

したがって, $L=n-1$ なる置換 p が存在しないことになるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varPhi_f(a)&=\sum_{i\in\varLambda_n\cup\{0\}}k_i'a^i+\sum_{l\in\varLambda_{n-2}}\sum_{\substack{p\in\mathfrak{S}_n\\L=l}}\mathrm{sgn}p\prod_{j\in\varLambda_n\setminus\varLambda_p'}\left(-a_{p(j),j}\right)\sum_{i\in\varLambda_l\cup\{0\}}k_i'a^i\\&=k_n'a^n+k_{n-1}'a^{n-1}+\sum_{i\in(\varLambda_n\cup\{0\})\setminus\{n,n-1\}}k_i'a^i\\&\quad+\sum_{l\in\varLambda_{n-2}}\sum_{\substack{p\in\mathfrak{S}_n\\L=l}}\mathrm{sgn}p\prod_{j\in\varLambda_n\setminus\varLambda_p'}\left(-a_{p(j),j}\right)\sum_{i\in\varLambda_l\cup\{0\}}k_i'a^i\\&=k_n'a^n+k_{n-1}'a^{n-1}+\sum_{i\in\varLambda_{n-2}\cup\{0\}}k_i'a^i\\&\quad+\sum_{l\in\varLambda_{n-2}}\sum_{\substack{p\in\mathfrak{S}_n\\L=l}}\mathrm{sgn}p\prod_{j\in\varLambda_n\setminus\varLambda_p'}\left(-a_{p(j),j}\right)\sum_{i\in\varLambda_l\cup\{0\}}k_i'a^i\end{aligned}$$

ここで, $i\in\varLambda_n\cup\{0\}$ なるある体の元々 k_i を用いれば, $k_n=k_n'=1$ かつ $k_{n-1}=k_{n-1}'=-\sum_{i\in\varLambda_n}a_{ii}$ かつ次式を満たすので,

$$\sum_{i\in\varLambda_{n-2}\cup\{0\}}k_i'a^i+\sum_{l\in\varLambda_{n-2}}\sum_{\substack{p\in\mathfrak{S}_n\\L=l}}\mathrm{sgn}p\prod_{j\in\varLambda_n\setminus\varLambda_p'}\left(-a_{p(j),j}\right)\sum_{i\in\varLambda_l\cup\{0\}}k_i'a^i=\sum_{i\in\varLambda_{n-2}\cup\{0\}}k_ia^i$$

次式が得られる.

$$\varPhi_f(a)=\sum_{i\in\varLambda_n\cup\{0\}}k_ia^i$$

さらに, それらの元々 k_n, k_{n-1} は次式を満たす.

$$k_n=1,\quad k_{n-1}=-\sum_{i\in\varLambda_n}a_{ii}=-\mathrm{tr}[f]_\alpha^\alpha$$

また, その線形写像 f の固有多項式写像 $\varPhi_f$ の 0 による像について考えよう. このとき, その基底 α に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_\alpha^\alpha$ を用いて次のようになるかつ,

$$\varPhi_f(0)=\det\left[0I_V-f\right]_\alpha^\alpha=\det\left(-[f]_\alpha^\alpha\right)=(-1)^n\det[f]_\alpha^\alpha$$

上記の議論により $i\in\varLambda_n\cup\{0\}$ なるある体の元々 k_i を用いて次式を満たすので,

$$\varPhi_f(a)=\sum_{i\in\varLambda_n\cup\{0\}}k_ia^i=\sum_{i\in\varLambda_n}k_ia^i+k_0$$

次のようになる.

$$\varPhi_f(0)=\sum_{i\in\varLambda_n}k_i0^i+k_0=k_0$$

以上より, $k_0=(-1)^n\det[f]_\alpha^\alpha$ が得られる. □

定理 2.2.6. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V において, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, $\exists\lambda\in K$ に対し, その元 λ がその線形写像 f の固有値であるならそのときに限り, その元 λ がその線形写像 f の固有多項式の根である.

ここで, 例えば, $K=\mathbb{R}$ が成り立つとき, $\varPhi_f(\lambda)=0$ が成り立つようなその元 λ は実数でなければならないことになることに注意されたい.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V において, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, $\exists\lambda\in K$ に対し, その元 λ がその線形写像 f の固有値であるならそのときに限り, 定理 1.11.15, 定理 1.5.16, 定理 2.2.3 よりその線形写像 λI_V-f の表現行列 $[\lambda I_V-f]_\alpha^\alpha$ について, $\det[\lambda I_V-f]_\alpha^\alpha=0$ が成り立つ. これは定義よりその線形写像 f の固有多項式写像 $\varPhi_f$ のその元 λ による像が 0 に等しい, 即ち, その元 λ がその線形写像 f の固有多項式の根であることと同値である. □

定理 2.2.7. $A\in\mathrm{M}(n,n,K)$ なる体 K 上の行列 A が次式を満たすなら,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\O&&&a_{nn}\end{pmatrix}$$

体 K 上の n 次元 vector 空間 V において, その vector 空間 V の基底 α に関する線形写像 $f:V\rightarrow V$ の表現行列が A であるようなその線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ について, 次式が成り立つ.

$$\varPhi_f=\prod_{i\in\varLambda_n}(X-a_{ii})$$

証明. $A\in\mathrm{M}(n,n,K)$ なる体 K 上の行列 A が次式を満たすなら,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\O&&&a_{nn}\end{pmatrix}$$

体 K 上の n 次元 vector 空間 V において, その vector 空間 V の基底 α に関する線形写像 $f:V\rightarrow V$ の表現行列が A であるようなその線形写像 f の固有多項式写像 $\varPhi_f$ について, $\forall a\in K$ に対し, 定義よりその vector 空間 V の恒等写像 I_V, n 次単位行列 I_n を用いて次のようになる.

$$\begin{aligned}\varPhi_f(a)&=\det[aI_V-f]_\alpha^\alpha\\&=\det\left(a[I_V]_\alpha^\alpha-[f]_\alpha^\alpha\right)\\&=\det(aI_n-A)\\&=\begin{vmatrix}a-a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a-a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\O&&&a-a_{nn}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

ここで, 定理 1.11.9 と定理 1.11.10 より次式が得られる.

$$\varPhi_f=\prod_{i\in\varLambda_n}(X-a_{ii})$$

□

定理 2.2.8. $A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる体 K 上の行列 A が $A' \in \mathrm{M}(r,r,K)$, $A'' \in \mathrm{M}(n-r,n-r,K)$ なる行列たち A, A'' を用いて次式のうちいづれかを満たすなら,

$$A = \begin{pmatrix} A' & * \\ O & A'' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A' & O \\ * & A'' \end{pmatrix}$$

その体 K 上の n 次元 vector 空間 V において, その vector 空間 V の基底 α に関する線形写像 $f : V \to V$ の表現行列が A であるようなその線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ について, $\varPhi_f = \varPhi_{L_{A'}} \varPhi_{L_{A''}}$ が成り立つ.

証明. $A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる体 K 上の行列 A が $A' \in \mathrm{M}(r,r,K)$, $A'' \in \mathrm{M}(n-r,n-r,K)$ なる行列たち A', A'' を用いて次式を満たすなら,

$$A = \begin{pmatrix} A' & * \\ O & A'' \end{pmatrix}$$

その体 K 上の n 次元 vector 空間 V において, その vector 空間 V の基底 α に関する線形写像 $f : V \to V$ の表現行列が A であるようなその線形写像 f の固有多項式写像 $\varPhi_f$ について, $\forall a \in K$ に対し, 定義より n 次単位行列 I_n, r 次単位行列 I_r, $n-r$ 次単位行列 I_{n-r} を用いて定理 1.11.9 と定理 1.11.10 より次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\varPhi_f(a) &= \det \left[aI_V - f \right]_\alpha^\alpha \\
&= \det \left(a \left[I_V \right]_\alpha^\alpha - [f]_\alpha^\alpha \right) \\
&= \det \left(aI_n - A \right) \\
&= \det \left(a \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A' & * \\ O & A'' \end{pmatrix} \right) \\
&= \det \begin{pmatrix} aI_r - A' & * \\ O & aI_{n-r} - A'' \end{pmatrix} \\
&= \det \left(aI_r - A' \right) \det \left(aI_{n-r} - A'' \right)
\end{aligned}$$

ここで, 標準直交基底 ε, 線形写像たち $L_{A'}$, $L_{A''}$ を用いれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi_f(a) &= \det \left(aI_r - A' \right) \det \left(aI_{n-r} - A'' \right) \\
&= \det \left(a \left[I_{K^r} \right]_\varepsilon^\varepsilon - \left[L_{A'} \right]_\varepsilon^\varepsilon \right) \det \left(a \left[I_{K^{n-r}} \right]_\varepsilon^\varepsilon - \left[L_{A''} \right]_\varepsilon^\varepsilon \right) \\
&= \det \left[aI_{K^r} - L_{A'} \right]_\varepsilon^\varepsilon \det \left[aI_{K^r} - L_{A''} \right]_\varepsilon^\varepsilon \\
&= \varPhi_{L_{A'}}(a) \varPhi_{L_{A''}}(a)
\end{aligned}$$

$A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる体 K 上の行列 A が $A' \in \mathrm{M}(r,r,K)$, $A'' \in \mathrm{M}(n-r,n-r,K)$ なる行列たち A', A'' を用いて次式を満たすときも同様にして示される.

$$A = \begin{pmatrix} A' & O \\ * & A'' \end{pmatrix}$$

よって, $\varPhi_f = \varPhi_{L_{A'}} \varPhi_{L_{A''}}$ が成り立つ. □

定理 2.2.9. 体 K 上の n 次元 vector 空間たち V, W において, 線形写像たち $f : V \to V$, $g : W \to V$ が与えられたとする. その線形写像 g が線形同型写像であるとき, $\varPhi_{g^{-1} \circ f \circ g} = \varPhi_f$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間たち V, W において, その vector 空間 V の基底 α に関する線形写像たち $f : V \to V$, $g : W \to V$ が与えられたとする. その線形写像 g が線形同型写像であるとき, $\forall a \in K$ に対し, そ

の vector 空間たち V, W の恒等写像たち I_V, I_W, その vector 空間 V の基底 α, その vector 空間の基底 β が与えられたとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi_{g^{-1}\circ f\circ g}(a) &= \det\left[aI_W - g^{-1}\circ f\circ g\right]_\beta^\beta \\
&= \det\left[ag^{-1}\circ I_V\circ g - g^{-1}\circ f\circ g\right]_\beta^\beta \\
&= \det\left(a\left[g^{-1}\circ I_V\circ g\right]_\beta^\beta - \left[g^{-1}\circ f\circ g\right]_\beta^\beta\right) \\
&= \det\left(a\left[g^{-1}\right]_\alpha^\beta\left[I_V\right]_\alpha^\alpha[g]_\beta^\alpha - \left[g^{-1}\right]_\alpha^\beta[f]_\alpha^\alpha[g]_\beta^\alpha\right) \\
&= \det\left[g^{-1}\right]_\alpha^\beta\left(a\left[I_V\right]_\alpha^\alpha - [f]_\alpha^\alpha\right)[g]_\beta^\alpha \\
&= \det\left[g^{-1}\right]_\alpha^\beta\det\left(a\left[I_V\right]_\alpha^\alpha - [f]_\alpha^\alpha\right)\det[g]_\beta^\alpha \\
&= \det[g]_\beta^{\alpha-1}\det\left[aI_V - f\right]_\alpha^\alpha\det[g]_\beta^\alpha \\
&= \frac{1}{\det[g]_\beta^\alpha}\det[g]_\beta^\alpha\det\left[aI_V - f\right]_\alpha^\alpha \\
&= \det\left[aI_V - f\right]_\alpha^\alpha = \varPhi_f(a)
\end{aligned}$$

よって, $\varPhi_{g^{-1}\circ f\circ g} = \varPhi_f$ が成り立つ. □

定理 2.2.10. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V において, その vector 空間 V の線形写像たち $f:V\rightarrow V$, $g:V\rightarrow V$ の合成写像たち $g\circ f$, $f\circ g$ の固有多項式たちそれぞれ $\varPhi_{g\circ f}$, $\varPhi_{f\circ g}$ について, $\varPhi_{g\circ f} = \varPhi_{f\circ g}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V において, その vector 空間 V の基底 α に関する線形写像たち $f:V\rightarrow V$, $g:V\rightarrow V$ の合成写像たち $g\circ f$, $f\circ g$ の固有多項式写像たちそれぞれ $\varPhi_{g\circ f}$, $\varPhi_{f\circ g}$ について, その vector 空間 V の基底 α に関するそれらの線形写像たち f, g の表現行列たちそれぞれ $[f]_\alpha^\alpha$, $[g]_\alpha^\alpha$ とおく. 定理 1.6.6 より $\exists P,Q\in\mathrm{GL}(n,K)$ に対し, $\mathrm{rank}[g]_\alpha^\alpha = r$ とおくと, r 次単位行列 I_r を用いて次式が成り立つ.

$$P[g]_\alpha^\alpha Q^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

このとき, その行列 $P[g]_\alpha^\alpha Q^{-1}$, 行列 $Q[f]_\alpha^\alpha P^{-1}$ をそれぞれ A, B とおくと, 定理 1.5.1 よりその基底 α に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_\alpha:K^n\rightarrow V$ は全単射で次式のようになる.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & V \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & V \arrow[r, "f"] & V \\
K^n \arrow[u, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] \arrow[r, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[d, tail, two heads, "L_P"'] & K^n \arrow[u, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] \arrow[r, "L_{[g]_\alpha^\alpha}"] \arrow[d, tail, two heads, "L_Q"'] & K^n \arrow[u, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] \arrow[r, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[d, tail, two heads, "L_P"'] & K^n \arrow[u, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, tail, two heads, "L_Q"'] \\
K^n \arrow[r, "L_B"] \arrow[rr, bend right, "L_{AB}"'] & K^n \arrow[r, "L_A"] \arrow[rr, bend right, "L_{BA}"'] & K^n \arrow[r, "L_B"] & K^n
\end{tikzcd}
$$

したがって, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
L_{AB} &= L_{P[g]_\alpha^\alpha Q^{-1}Q[f]_\alpha^\alpha P^{-1}} \\
&= L_{P[g]_\alpha^\alpha [f]_\alpha^\alpha P^{-1}} \\
&= L_{P[g\circ f]_\alpha^\alpha P^{-1}} \\
&= L_P \circ L_{[g\circ f]_\alpha^\alpha} \circ L_{P^{-1}} \\
&= L_P \circ L_{[g\circ f]_\alpha^\alpha} \circ L_P^{-1} \\
&= L_P \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ g \circ f \circ \varphi_\alpha \circ L_P^{-1} \\
&= \left(L_P \circ \varphi_\alpha^{-1}\right) \circ (g\circ f) \circ \left(L_P \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)^{-1}, \\
L_{BA} &= L_{Q[f]_\alpha^\alpha P^{-1}P[g]_\alpha^\alpha Q^{-1}} \\
&= L_{Q[f]_\alpha^\alpha [g]_\alpha^\alpha Q^{-1}} \\
&= L_{Q[f\circ g]_\alpha^\alpha Q^{-1}} \\
&= L_Q \circ L_{[f\circ g]_\alpha^\alpha} \circ L_{Q^{-1}} \\
&= L_Q \circ L_{[f\circ g]_\alpha^\alpha} \circ L_Q^{-1} \\
&= L_Q \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ f \circ g \circ \varphi_\alpha \circ L_Q^{-1} \\
&= \left(L_Q \circ \varphi_\alpha^{-1}\right) \circ (f\circ g) \circ \left(L_Q \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

次式が成り立つ.

$$\varPhi_{L_{AB}} = \varPhi_{\left(L_P\circ\varphi_\alpha^{-1}\right)\circ(g\circ f)\circ\left(L_P\circ\varphi_\alpha^{-1}\right)^{-1}}, \quad \varPhi_{L_{BA}} = \varPhi_{\left(L_Q\circ\varphi_\alpha^{-1}\right)\circ(f\circ g)\circ\left(L_Q\circ\varphi_\alpha^{-1}\right)^{-1}}$$

これは多項式とみても成り立つ. ここで, 定理 2.2.9 より次のようになる.

$$\varPhi_{L_{AB}} = \varPhi_{g\circ f}, \quad \varPhi_{L_{BA}} = \varPhi_{f\circ g}$$

また, $B' \in \mathrm{M}(r,r,K)$ として行列 B を次式のようにおくと,

$$B = \begin{pmatrix} B' & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B' & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' & * \\ O & O \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} B' & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' & O \\ * & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, 定理 2.2.8 より次のようになる.

$$\begin{aligned} \varPhi_{g\circ f} &= \varPhi_{L_{AB}} = \varPhi_{L_{B'}} \varPhi_{L_O}, \\ \varPhi_{f\circ g} &= \varPhi_{L_{BA}} = \varPhi_{L_{B'}} \varPhi_{L_O} \end{aligned}$$

以上より, 次式が得られる.

$$\varPhi_{g\circ f} = \varPhi_{L_{B'}} \varPhi_{L_O} = \varPhi_{f\circ g}$$

□

2.2.3 行列の対角化

定義 2.2.4. 体 K 上の有限次元な vector 空間 V の線形写像 $f: V \rightarrow V$ のある基底 $\mathcal{B}$ が存在してこれに関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となるとき, その線形写像 f はその基底 $\mathcal{B}$ で対角化可能であるという. 特に, $K = \mathbb{C}$ のとき, 線形写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ がその基底 $\mathcal{B}$ で対角化可能であるとき, その線形写像 f はその基底 $\mathcal{B}$ で半単純であるともいう.

定理 2.2.11. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の線形写像 $f: V \rightarrow V$ が対角化可能であるならそのときに限り, 任意のその vector 空間 V の基底 α に対し, $\exists P \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, その基底 α に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_\alpha^\alpha$ を用いた行列 $P^{-1}[f]_\alpha^\alpha P$ も対角行列となる.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の線形写像 $f: V \rightarrow V$ が対角化可能であるなら, 定義よりその線形写像 $f: V \rightarrow V$ のある基底 $\mathcal{B}$ が存在してこれに関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となるのであった. ここで, 定理 1.5.1 よりその基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}: K^n \rightarrow V$ は全単射であり, 任意のその vector 空間 V の基底 α に対し, 同様に定理 1.5.1 よりその基底 α に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_\alpha: K^n \rightarrow V$ は全単射であるので, 次式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[rr, "f"] & & V & \\ & & K^n \arrow[ul, tail, two heads, "\varphi_\alpha"'] \arrow[rr, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] & & K^n \arrow[ul, tail, two heads, "\varphi_\alpha"'] \\ K^n \arrow[uur, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[rr, "L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}"] & & K^n \arrow[uur, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & \end{tikzcd}$$

ここで, 次式のように合成写像 $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}: K^n \rightarrow K^n$ をおくと,

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[rrr, "f"] & & & V & \\
 & & K^n \arrow[ul, tail, two heads, "\varphi_\alpha"'] \arrow[rrr, "L_{[f]^\alpha_\alpha}"] & & & K^n \arrow[ul, tail, two heads, "\varphi_\alpha"'] \\
K^n \arrow[uur, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[urr, tail, two heads, "\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[rrr, "L_{[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}}"] & & & K^n \arrow[uur, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[urr, tail, two heads, "\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] & &
\end{tikzcd}
$$

その写像 $\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}}$ も線形同型写像であり, これに対応する行列を P とおくと, その行列 P は正則行列であり次式のようになる.

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[rrr, "f"] & & & V & \\
 & & K^n \arrow[ul, tail, two heads, "\varphi_\alpha"'] \arrow[rrr, "L_{[f]^\alpha_\alpha}"] & & & K^n \arrow[ul, tail, two heads, "\varphi_\alpha"'] \\
K^n \arrow[uur, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[urr, tail, two heads, "L_P"] \arrow[rrr, "L_{[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}}"] & & & K^n \arrow[uur, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[urr, tail, two heads, "L_P"] & &
\end{tikzcd}
$$

これにより, 次のようになる.

$$L_{[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}} = L_P^{-1}\circ L_{[f]^\alpha_\alpha}\circ L_P = L_{P^{-1}[f]^\alpha_\alpha P}$$

よって, その基底 α に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]^\alpha_\alpha$ を用いた行列 $P^{-1}[f]^\alpha_\alpha P$ も対角行列となる.

逆に, 任意のその vector 空間 V の基底 α に対し, $\exists P\in\mathrm{GL}(n,K)$ に対し, その基底 α に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]^\alpha_\alpha$ を用いた行列 $P^{-1}[f]^\alpha_\alpha P$ も対角行列となるとき, 次式のようになる.

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[rrr, "f"] & & & V & \\
 & & K^n \arrow[ul, tail, two heads, "\varphi_\alpha"'] \arrow[rrr, "L_{[f]^\alpha_\alpha}"] & & & K^n \arrow[ul, tail, two heads, "\varphi_\alpha"'] \\
K^n \arrow[urr, tail, two heads, "L_P"] \arrow[rrr, "L_{P^{-1}[f]^\alpha_\alpha P}"] & & & K^n \arrow[urr, tail, two heads, "L_P"] & &
\end{tikzcd}
$$

ここで, 合成写像 $\varphi_\alpha\circ L_P : K^n\to V$ を $\varphi_{\mathcal{B}}$ とおくと, 定理 1.5.1 より次式のようになり,

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[rrr, "f"] & & & V & \\
& & K^n \arrow[ul, "\varphi_\alpha"'] \arrow[rrr, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] & & & K^n \arrow[ul, "\varphi_\alpha"'] \\
K^n \arrow[uur, "\varphi_\mathcal{B}"] \arrow[urr, "L_P"] \arrow[rrr, "L_{[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}"] & & & K^n \arrow[uur, "\varphi_\mathcal{B}"] \arrow[urr, "L_P"] & &
\end{tikzcd}$$

よって, その vector 空間 V の線形写像 $f:V \to V$ のある基底 $\mathcal{B}$ が存在してこれに関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}$ が対角行列となるので, その線形写像 f は対角化可能である. □

定理 2.2.12. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の線形写像 $f:V \to V$ がその基底 $\mathcal{B}$ で対角化可能であるならそのときに限り, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, その基底 $\mathcal{B}$ をなす vector$\mathbf{v}_i$ がいずれもその線形写像 f の固有値 λ_i に対する固有 vectors である. このとき, その基底 $\mathcal{B}$ に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}$ が次式のように与えられる.

$$[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の線形写像 $f:V \to V$ がその基底 $\mathcal{B}$ で対角化可能であるなら, その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}$ が対角行列であり, 次式のようにおき

$$[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, 定理 1.5.1 よりその基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_\mathcal{B}:K^n \to V$ は線形同型写像であり次式が成り立つので,

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & V \\
K^n \arrow[u, "\varphi_\mathcal{B}"] \arrow[r, "L_{[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}"] & K^n \arrow[u, "\varphi_\mathcal{B}"']
\end{tikzcd}$$

$\forall i \in \Lambda_n$ に対し, vector 空間 K^n の正規直交基底を $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, 次のようになる.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_i) &= \varphi_\mathcal{B} \circ L_{[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}} \circ \varphi_\mathcal{B}^{-1}(\mathbf{v}_i) \\ &= \varphi_\mathcal{B}\left(L_{[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}\left(\varphi_\mathcal{B}^{-1}(\mathbf{v}_i)\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_{\mathcal{B}}\left(L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}\left(\mathbf{e}_i\right)\right)\\
&= \varphi_{\mathcal{B}}\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\mathbf{e}_i\right)\\
&= \varphi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & O \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_i & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)\\
&= \varphi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\\
&= \varphi_{\mathcal{B}}\left(\lambda_i\mathbf{e}_i\right)\\
&= \lambda_i\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{e}_i\right) = \lambda_i\mathbf{v}_i
\end{aligned}$$

よって, その基底 $\mathcal{B}$ をなす vectors がいずれもその線形写像 f の固有 vectors である.

逆に, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, その基底 $\mathcal{B}$ をなす vector$\mathbf{v}_i$ がいずれもその線形写像 f の固有値 λ_i に対する固有 vectors であるなら, $f\left(\mathbf{v}_i\right) = \lambda_i\mathbf{v}_i$ が成り立つことになる. ここで, 定理 1.5.1 よりその基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V$ について, 次式が成り立つので,

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & V \\
K^n \arrow[u, two heads, tail, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}"] & K^n \arrow[u, two heads, tail, "\varphi_{\mathcal{B}}"']
\end{tikzcd}$$

$\forall \sum_{i \in \varLambda_n} a_i\mathbf{e}_i \in K^n$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i\mathbf{e}_i\right) &= \sum_{i \in \varLambda_n} a_i f\left(\mathbf{e}_i\right)\\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_i\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{e}_i\right)\\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_i\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f\left(\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{e}_i\right)\right)\right)\\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_i\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f\left(\mathbf{v}_i\right)\right)\\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_i\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\lambda_i\mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_i\lambda_i\mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \varLambda_n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_i \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{e}_1 & \lambda_2 \mathbf{e}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって, その基底 $\mathcal{B}$ に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式のように対角行列となるので,

$$
[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

その線形写像 f はその基底 $\mathcal{B}$ で対角化可能である. □

定理 2.2.13. 体 K 上の有限次元な vector 空間 V の線形写像 $f : V \rightarrow V$ の添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた互いに異なる固有値たちからなる族 $\left\{ \lambda_i \right\}_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, その固有値 λ_i に対する固有 vector のうち 1 つを $\mathbf{v}_i$ とおくと, その族 $\left\{ \mathbf{v}_i \right\}_{i \in \varLambda_n}$ は線形独立である.

証明. 体 K 上の有限次元な vector 空間 V の線形写像 $f : V \rightarrow V$ の添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた互いに異なる固有値たちからなる族 $\left\{ \lambda_i \right\}_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, その固有値 λ_i に対する固有 vector のうち 1 つを $\mathbf{v}_i$ とおくと, $n = 1$ のときは明らかなので, $n = k$ のとき, その族 $\left\{ \mathbf{v}_i \right\}_{i \in \varLambda_k}$ は線形独立であると仮定しよう. $n = k + 1$ のとき, $i \in \varLambda_{k+1}$ なる体 K の元々 c_i を用いて次式が成り立つとすれば,

$$
\sum_{i \in \varLambda_{k+1}} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}
$$

次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in \varLambda_{k+1}} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \wedge f \left(\sum_{i \in \varLambda_{k+1}} c_i \mathbf{v}_i \right) = f\left(\mathbf{0} \right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \wedge \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} c_i f\left(\mathbf{v}_i \right) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} c_i \lambda_{k+1} \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \wedge \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} c_i \lambda_i \left(\mathbf{v}_i \right) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_k} c_i \lambda_{k+1} \mathbf{v}_i + c_{k+1} \lambda_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0} \wedge \sum_{i \in \varLambda_k} c_i \lambda_i \left(\mathbf{v}_i \right) + c_{k+1} \lambda_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(\sum_{i\in\varLambda_k} c_i\lambda_{k+1}\mathbf{v}_i + c_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}\right) - \left(\sum_{i\in\varLambda_k} c_i\lambda_i\left(\mathbf{v}_i\right) + c_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}\right) = \mathbf{0}\\
&\Leftrightarrow \sum_{i\in\varLambda_k} c_i\lambda_{k+1}\mathbf{v}_i + c_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - \sum_{i\in\varLambda_k} c_i\lambda_i\left(\mathbf{v}_i\right) - c_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}\\
&\Leftrightarrow \sum_{i\in\varLambda_k} c_i\left(\lambda_{k+1}-\lambda_i\right)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

ここで, 仮定より $\forall i \in \varLambda_k$ に対し, $c_i\left(\lambda_{k+1}-\lambda_i\right) = 0$ が成り立つので, $c_i = 0$ または $\lambda_i = \lambda_{k+1}$ が成り立ち, 仮定より $c_i = 0$ が成り立つ. これにより, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\varLambda_{k+1}} c_i\mathbf{v}_i &= \sum_{i\in\varLambda_k} c_i\mathbf{v}_i + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}\\
&= \sum_{i\in\varLambda_k} \mathbf{0} + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}\\
&= c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

ここで, その vector$\mathbf{v}_{k+1}$ は固有 vector の定義より零 vector でないので, $c_{k+1} = 0$ が成り立つ.

以上より, 数学的帰納法によって $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が成り立ち, その族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_n}$ に対する vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立である. □

2.2.4 固有空間

定義 2.2.5. 定理 2.2.2 より体 K 上の vector 空間 V の元 $\mathbf{v}$ が線形写像 $f : V \to V$ の固有値 λ に対する固有 vector であるならそのときに限り, その vector$\mathbf{v}$ はその集合 $\ker\left(\lambda I_V - f\right) \setminus \{\mathbf{0}\}$ の元であるのであった. ここで, 次式のように集合 $W_f(\lambda)$ が定義され, その集合 $W_f(\lambda)$ をその固有値 λ に対する固有空間という.

$$W_f(\lambda) = \ker\left(\lambda I_V - f\right)$$

定理 2.2.14. 体 K 上の vector 空間 V の線形写像 $f : V \to V$ の固有値 λ に対する固有空間 $W_f(\lambda)$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間である.

証明. 固有空間の定義と定理 1.2.11 より直ちに示される. □

定理 2.2.15. 体 K 上の有限次元な vector 空間 V の線形写像 $f : V \to V$ の添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた互いに異なる固有値たちからなる族 $\left\{\lambda_i\right\}_{i\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, 添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられたそれらの固有値たち λ_i に対する固有空間 $W_f\left(\lambda_i\right)$ の族 $\left\{W_f\left(\lambda_i\right)\right\}_{i\in\varLambda_n}$ の和空間 $\displaystyle\sum_{i\in\varLambda_n} W_f\left(\lambda_i\right)$ は直和空間 $\displaystyle\bigoplus_{i\in\varLambda_n} W_f\left(\lambda_i\right)$ でもある.

証明. 体 K 上の有限次元な vector 空間 V の線形写像 $f : V \to V$ の添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた互いに異なる固有値たちからなる族 $\left\{\lambda_i\right\}_{i\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, 添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられたそれらの固有値たち λ_i に対する固有空間 $W_f\left(\lambda_i\right)$ の族 $\left\{W_f\left(\lambda_i\right)\right\}_{i\in\varLambda_n}$ の和空間 $\displaystyle\sum_{i\in\varLambda_n} W_f\left(\lambda_i\right)$ について, $\forall\mathbf{z} \in \displaystyle\sum_{i\in\varLambda_n} W_f\left(\lambda_i\right)$ に対し, $\mathbf{z} = \displaystyle\sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{v}_i = \sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{v}_i'$ なるその集合 $\displaystyle\prod_{i\in\varLambda_n} W_f\left(\lambda_i\right)$ の互いに異なる元々 $\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}$, $\left(\mathbf{v}_i'\right)_{i\in\varLambda_n}$ が存在すると仮定すると, 次のようになる.

$$\sum_{i\in\varLambda_n}\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i'\right) = \sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{v}_i - \sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{v}_i'$$

$$= \mathbf{z} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

ここで, $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i' \in W_f(\lambda_i)$ が成り立ち, 定理 2.2.13 より $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, その固有値 λ_i に対する固有 vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立であるので, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, それらの vectors$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i'$ は固有 vector でないことになる. したがって, それらの vectors$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i'$ は零 vectors であり, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i'$ が成り立つ. しかしながら, これは仮定に矛盾する. したがって, $\forall \mathbf{z} \in \sum_{i \in \varLambda_n} W_f(\lambda_i)$ に対し, $\mathbf{z} = \sum_{i \in \varLambda_n} \mathbf{v}_i$ なるその集合 $\prod_{i \in \varLambda_n} W_f(\lambda_i)$ の元 $(\mathbf{v}_i)_{i \in \varLambda_n}$ が一意的に存在することになり, 直和空間の定義よりその和空間 $\sum_{i \in \varLambda_n} W_f(\lambda_i)$ は直和空間 $\bigoplus_{i \in \varLambda_n} W_f(\lambda_i)$ でもある. $\square$

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p226-246 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007. 改訂版 8 刷 p155-164 ISBN978-4-320-11097-7

2.3 Hamilton-Cayley の定理

2.3.1 行列の三角化

定理 2.3.1. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $f:V\rightarrow V$ なる任意の線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ はあるその体 K の元々 λ_i を用いて次式のように変形されることができる.

$$\varPhi_f=\prod_{i\in\varLambda_n}\left(X-\lambda_i\right)$$

その証明は残念ながら代数学の多項式環の知識をかなり要求するので, 多項式環の書籍にゆずることにする.

定理 2.3.2 (代数学の基本定理)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $f:V\rightarrow V$ なる任意の線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ の任意の複素数 z による像 $\varPhi_f(z)$ がある複素数たち λ_i を用いて次式のように変形されることができる.

$$\varPhi_f(z)=\prod_{i\in\varLambda_n}\left(z-\lambda_i\right)$$

その証明は代数学の基本定理による.

定理 2.3.3 (三角化定理)**.** 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線型写像 $f:V\rightarrow V$, これの n つの固有値たち λ_i が与えられたとき, ある基底 $\mathcal{B}$ が存在してその線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ は次式のように上三角行列で表されることができる.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

同様にして, ある基底 $\mathcal{C}$ が存在してその線形写像 f のその基底 $\mathcal{C}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ は次式のように下三角行列で表されることができる.

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

この定理を三角化定理という.

ここでは, 上の主張どちらも同様にして示されるので, 下三角行列の場合のみ証明を与えることにしておこう.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線型写像 $f:V\rightarrow V$, これの n つの固有値たち λ_i が与えられたとする. $n=1$ のときでは明らかであるから, $n=k$ のとき, ある基底が存在してその線形写像 f のその基底に関する表現行列が上三角行列で表されることができると仮定しよう. $n=k+1$ のとき, その体 K は代数的閉体なので, これの 1 つの固有 vector$\mathbf{v}_{k+1}$ を含む vectors の組 $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_{k+1}}$ がその vector 空間 V の基底

となるようにとられるとする. $\lambda_* = \lambda_{k+1}$, $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}_{k+1}$, $W = \mathrm{span}\left\{ \mathbf{v}_i \right\}_{i \in \varLambda_k}$ として定理 2.1.6 より次のようになるかつ,

$$V = W \oplus \mathrm{span}\left\{ \mathbf{v}_* \right\}$$

$\forall \mathbf{v} \in W$ に対し, $f\left(\mathbf{v} \right) \in V$ が成り立つので, 次式のようなその体 K の元 c と vector$\widetilde{\mathbf{v}}$ が一意的に存在する.

$$f\left(\mathbf{v} \right) = \widetilde{\mathbf{v}} \oplus c\mathbf{v}_*$$

また, その集合 W はその代数的閉体 K 上のその vector 空間 V の部分 vector 空間である. これにより, 次式のような写像 f_* が定義されると,

$$f_* : W \rightarrow W; \mathbf{v} \mapsto \widetilde{\mathbf{v}}$$

$f_*\left(\mathbf{v} \right) = f\left(\mathbf{v} \right) - c\mathbf{v}_*$ が成り立つ. ここで, $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ に対し, 次のようにおくと,

$$f_*\left(\mathbf{v} \right) = f\left(\mathbf{v} \right) - c\mathbf{v}_*, \quad f_*\left(\mathbf{w} \right) = f\left(\mathbf{w} \right) - d\mathbf{v}_*$$

次のようになり,

$$\begin{aligned}
f_*\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \right) &= f\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \right) - C\mathbf{v}_* \\
&= kf\left(\mathbf{v} \right) + lf\left(\mathbf{w} \right) - C\mathbf{v}_* \\
&= k\left(c\mathbf{v}_* + f_*\left(\mathbf{v} \right) \right) + l\left(d\mathbf{v}_* + f_*\left(\mathbf{w} \right) \right) - C\mathbf{v}_* \\
&= kc\mathbf{v}_* + kf_*\left(\mathbf{v} \right) + ld\mathbf{v}_1 + lf_*\left(\mathbf{w} \right) - C\mathbf{v}_* \\
&= kf_*\left(\mathbf{v} \right) + lf_*\left(\mathbf{w} \right) + (kc + ld - C)\mathbf{v}_* \\
&= \left(kf_*\left(\mathbf{v} \right) + lf_*\left(\mathbf{w} \right) \right) \oplus (kc + ld - C)\mathbf{v}_*
\end{aligned}$$

次式が成り立つので,

$$f_*\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \right), kf_*\left(\mathbf{v} \right) + lf_*\left(\mathbf{w} \right) \in W, \quad (kc + ld - C)\mathbf{v}_* \in \mathrm{span}\left\{ \mathbf{v}_* \right\}$$

$kc + ld - C = 0$ が成り立つことになる. したがって, 次のようになる.

$$f_*\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \right) = kf_*\left(\mathbf{v} \right) + lf_*\left(\mathbf{w} \right)$$

これにより, その写像 f_* は線形的であることが分かった.

ここで, その基底 $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_{k+1}}$ を $\mathcal{C}$, その基底 $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_k}$ を $\mathcal{C}_*$ とおかれると, これらに関するそれらの線形写像たち f, f_* の表現行列たち $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$, $[f_*]_{\mathcal{C}_*}^{\mathcal{C}_*}$ を用いて考えられれば, 固有 vector の定義より $f\left(\mathbf{v}_* \right) = \lambda_* \mathbf{v}_*$ が成り立ち, その vector 空間 K^{k+1} の標準直交基底を $\left\langle \mathbf{e}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_{k+1}}$ とおけば, その基底 $\mathcal{C}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{C}}$ を用いて $\mathbf{e}_* = \mathbf{e}_{k+1}$ として $\varphi_{\mathcal{C}}\left(\mathbf{v}_* \right) = \mathbf{e}_*$ が成り立つかつ, 次式が成り立つことから,

$$
\begin{tikzcd}
 & K^{k+1} \arrow[rr, "\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{C}}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{C}}" near start] & & K^{k+1} \\
\mathbf{e}_* \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{C}}" near start] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}"] & & \lambda_*\mathbf{e}_* \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & \\
 & V \arrow[rr, "f" near end] & & V \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}"'] \\
\mathbf{v}_* \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "f"] & & \lambda_*\mathbf{v}_* \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}"' near end] &
\end{tikzcd}
$$

その表現行列 $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ の第 $k+1$ 列は $\begin{pmatrix} O \\ \lambda_* \end{pmatrix}$ という形になることが分かる. さらに, $\forall\mathbf{v}\oplus l_*\mathbf{v}_*\in V=W\oplus\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}_*\right\}$ に対し, $\mathbf{v}=\sum_{i\in\varLambda_k} l_i\mathbf{v}_i$, $f_*\left(\mathbf{v}\right)=\sum_{i\in\varLambda_k}\widetilde{l_i}\mathbf{v}_i$, $\mathbf{l}=\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_k \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathbf{l}}=\begin{pmatrix} \widetilde{l_1} \\ \vdots \\ \widetilde{l_{k+1}} \\ c \end{pmatrix}$ とすると, 次式のようになることから,

$$
\begin{tikzcd}
 & K^{k+1} \arrow[rr, "\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{C}}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{C}}" near start] & & K^{k+1} \\
\begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{C}}" near start] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}"] & & \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{l}} \\ c \end{pmatrix} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & \\
 & V \arrow[rr, "f" near end] & & V \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}"'] \\
\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f_*\left(\mathbf{v}\right)\oplus c\mathbf{v}_* \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}"' near end] &
\end{tikzcd}
$$

次のようになる.

$$
\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ l_* \end{pmatrix} &= [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix}+[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ l_* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{l}} \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} * & O \\ * & \lambda_* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ l_* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [f_*]_{\mathcal{C}_*}^{\mathcal{C}_*}\mathbf{l} \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda_* l_* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [f_*]_{\mathcal{C}_*}^{\mathcal{C}_*}\mathbf{l} \\ c+\lambda_* l_* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [f_*]_{\mathcal{C}_*}^{\mathcal{C}_*} & O \\ * & \lambda_* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ l_* \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって, $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} [f_*]_{\mathcal{C}_*}^{\mathcal{C}_*} & O \\ * & \lambda_* \end{pmatrix}$ が成り立つ. ここで, 仮定より予め基底 $\mathcal{C}_*$ を上手く選んでおけば, その線形写像 f_* のその基底 $\mathcal{C}_*$ に関する表現行列 $[f_*]_{\mathcal{C}_*}^{\mathcal{C}_*}$ は次式のように下三角行列で表されることができるので,

$$[f_*]_{\mathcal{C}_*}^{\mathcal{C}_*} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

次式が得られる.

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_k \end{pmatrix} & O \\ * & \lambda_{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \lambda_{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

2.3.2 Frobenius の定理

定義 2.3.1. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 多項式環 $K[X]$ の $\rho = \sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i X^i$ なる多項式 ρ が与えられたとき, $f : V \rightarrow V$ なる線形写像 f を用いて, 線形写像 f^0, 合成 $\circ$ をそれぞれ恒等写像 I_V, 積とみなすことにすると, 次式のような写像 $\rho(f)$ をその多項式 ρ の変数 X にその線形写像 f を代入した写像という.

$$\rho(f) = \sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i = k_0 I_V + k_1 f + k_2 f \circ f + \cdots + k_r \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{r \text{ times}} : V \rightarrow V$$

定理 2.3.4. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, 多項式環 $K[X]$ の多項式 ρ の変数 X に線形写像 $f : V \rightarrow V$ を代入した写像 $\rho(f)$ も線形的である.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, 多項式環 $K[X]$ の $\rho = \sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i X^i$ なる多項式 ρ の変数 X に線形写像 $f : V \rightarrow V$ を代入した写像 $\rho(f)$ において, $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \rho(f)(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}) &= \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i \right) (k\mathbf{v} + l\mathbf{w}) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i (k\mathbf{v} + l\mathbf{w}) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i \left(k f^i(\mathbf{v}) + l f^i(\mathbf{w}) \right) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} \left(k_i k f^i(\mathbf{v}) + k_i l f^i(\mathbf{w}) \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= k \sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i (\mathbf{v}) + l \sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i (\mathbf{w}) \\
&= k \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i \right) (\mathbf{v}) + l \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i \right) (\mathbf{w}) \\
&= k\rho(f) (\mathbf{v}) + l\rho(f) (\mathbf{w})
\end{aligned}
$$

よって, その多項式 ρ の変数 X にその線形写像 f を代入した写像 $\rho(f)$ も線形的である. $\square$

定理 2.3.5. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 次式のような多項式環 $K[X]$ の多項式たち ρ, σ が与えられたとき,

$$
\rho = \sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i X^i, \quad \sigma = \sum_{i \in \Lambda_s \cup \{0\}} l_i X^i
$$

それらの多項式たち ρ, σ の変数 X に線形写像 $f : V \rightarrow V$ を代入した写像たち $\rho(f)$, $\sigma(f)$ について, $\sigma(f) \circ \rho(f) = \rho(f) \circ \sigma(f)$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 次式のような多項式環 $K[X]$ の多項式たち ρ, σ が与えられたとき,

$$
\rho = \sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i X^i, \quad \sigma = \sum_{i \in \Lambda_s \cup \{0\}} l_i X^i
$$

それらの多項式たち ρ, σ の変数 X に線形写像 $f : V \rightarrow V$ を代入した写像たち $\rho(f)$, $\sigma(f)$ について, 定理 1.2.10 より次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\sigma(f) \circ \rho(f) &= \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i \right) \circ \left(\sum_{i \in \Lambda_s \cup \{0\}} l_i f^i \right) \\
&= \sum_{(i,j) \in (\Lambda_r \cup \{0\}) \times (\Lambda_s \cup \{0\})} k_i f^i \circ l_j f^j \\
&= \sum_{(i,j) \in (\Lambda_r \cup \{0\}) \times (\Lambda_s \cup \{0\})} k_i l_j f^{i+j} \\
&= \sum_{(i,j) \in (\Lambda_s \cup \{0\}) \times (\Lambda_r \cup \{0\})} l_i f^i \circ k_j f^j \\
&= \left(\sum_{i \in \Lambda_s \cup \{0\}} l_i f^i \right) \circ \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i \right) = \rho(f) \circ \sigma(f)
\end{aligned}
$$

$\square$

定理 2.3.6. 上三角行列たち $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \beta_1 & & & * \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \beta_n \end{pmatrix}$ が与えられたとき, 次式のようになる.

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \beta_1 & & & * \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \beta_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & & * \\ & \alpha_2\beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}
$$

同様に, 下三角行列たち $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & & & O \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \beta_n \end{pmatrix}$ が与えられたとき, 次式のようになる.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & & & O \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & & O \\ & \alpha_2\beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$$

証明. n 次正方行列でもある上三角行列たち $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & & & * \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \beta_n \end{pmatrix}$ が与えられたとき,

これらを $\left(a_{ij} \right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2}, \left(b_{ij} \right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2}$ とおくと, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \Lambda_n} a_{ik} b_{kj} &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in \Lambda_n} a_{ik} b_{kj} & \text{if} \quad i < j \\ a_{ii} b_{ii} + \displaystyle\sum_{\substack{k \in \Lambda_n \setminus \{i\} \\ k < i}} a_{ik} b_{kj} + \displaystyle\sum_{\substack{k \in \Lambda_n \setminus \{i\} \\ k > i}} a_{ik} b_{kj} & \text{if} \quad i = j \\ \displaystyle\sum_{\substack{k \in \Lambda_n \\ k \leq j}} a_{ik} b_{kj} + \displaystyle\sum_{\substack{k \in \Lambda_n \\ j < k < i}} a_{ik} b_{kj} \displaystyle\sum_{\substack{k \in \Lambda_n \\ i \leq k}} a_{ik} b_{kj} & \text{if} \quad i > j \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in \Lambda_n} a_{ik} b_{kj} & \text{if} \quad i < j \\ a_{ii} b_{ii} + \displaystyle\sum_{\substack{k \in \Lambda_n \setminus \{i\} \\ k < i}} 0 b_{kj} + \displaystyle\sum_{\substack{k \in \Lambda_n \setminus \{i\} \\ k > i}} a_{ik} 0 & \text{if} \quad i = j \\ \displaystyle\sum_{\substack{k \in \Lambda_n \\ k \leq j}} 0 b_{kj} + \displaystyle\sum_{\substack{k \in \Lambda_n \\ j < k < i}} 0 + \displaystyle\sum_{\substack{k \in \Lambda_n \\ i \leq k}} a_{ik} 0 & \text{if} \quad i > j \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in \Lambda_n} a_{ik} b_{kj} & \text{if} \quad i < j \\ a_{ii} b_{ii} + 0 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i > j \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in \Lambda_n} a_{ik} b_{kj} & \text{if} \quad i < j \\ \alpha_i \beta_i & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i > j \end{cases}
\end{aligned}$$

次式のようになる.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & & & * \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & & * \\ & \alpha_2\beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$$

下三角行列についても同様にして示される. □

定理 2.3.7 (Frobenius の定理)**.** 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線型写像 $f:V \rightarrow V$, これの $\forall i \in \varLambda_n$ に対する固有値たち λ_i, 多項式環 $K[X]$ の多項式 ρ が与えられたとき, その多項式 ρ の変数 X にその線形写像 f を代入した写像 $\rho(f)$ の固有値たちは, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\rho\left(\lambda_i\right)$ と与えられる, 即ち, それらの線形写像たち f, $\rho(f)$ の固有多項式 $\varPhi_f$, $\varPhi_{\rho(f)}$ について, 定理 2.3.1 より次式のように与えられることができ, そうしたらば,

$$\varPhi_f=\prod_{i \in \varLambda_n}\left(X-\lambda_i\right)$$

次のようになる.

$$\varPhi_{\rho(f)}=\prod_{i \in \varLambda_n}\left(X-\rho\left(\lambda_i\right)\right)$$

この定理を Frobenius の定理という.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線型写像 $f:V \rightarrow V$, これの $\forall i \in \varLambda_n$ に対する固有値たち λ_i, $\rho=\sum_{i \in \varLambda_r \cup\{0\}} k_i X^i$ なる多項式環 $K[X]$ の多項式 ρ が与えられたとき, 三角化定理よりある基底 $\mathcal{B}$ に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ は次式のように表されることができる.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & * \\
& \lambda_2 & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \lambda_n
\end{pmatrix}$$

したがって, 定理 2.3.6 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
{[\rho(f)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} } & =\left[\sum_{i \in \varLambda_r \cup\{0\}} k_i f^i\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\
& =\sum_{i \in \varLambda_r \cup\{0\}} k_i\left[f^i\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\
& =\sum_{i \in \varLambda_r \cup\{0\}} k_i[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}\, i} \\
& =\sum_{i \in \varLambda_r \cup\{0\}} k_i\begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & * \\
& \lambda_2 & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \lambda_n
\end{pmatrix}^i \\
& =\sum_{i \in \varLambda_r \cup\{0\}} k_i\begin{pmatrix}
\lambda_1^i & & & * \\
& \lambda_2^i & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \lambda_n^i
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
=\begin{pmatrix}
\displaystyle\sum_{i\in\Lambda_r\cup\{0\}} k_i\lambda_1^i & & & * \\
& \displaystyle\sum_{i\in\Lambda_r\cup\{0\}} k_i\lambda_2^i & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \displaystyle\sum_{i\in\Lambda_r\cup\{0\}} k_i\lambda_n^i
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\rho\left(\lambda_1\right) & & & * \\
& \rho\left(\lambda_2\right) & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \rho\left(\lambda_n\right)
\end{pmatrix}
$$

定理 2.2.9 , 定理 2.3.1 より, それらの線形写像たち f, $\rho(f)$ の固有多項式 $\varPhi_f$, $\varPhi_{\rho(f)}$ について, 次式のように与えられることができ, そうしたらば,

$$
\varPhi_f=\prod_{i\in\Lambda_n}\left(X-\lambda_i\right)
$$

次のようになる.

$$
\varPhi_{\rho(f)}=\prod_{i\in\Lambda_n}\left(X-\rho\left(\lambda_i\right)\right)
$$

よって, その多項式 ρ の変数 X にその線形写像 f を代入した写像 $\rho(f)$ の固有値たちは, $\forall i\in\Lambda_n$ に対し, $\rho\left(\lambda_i\right)$ と与えられる. □

定理 2.3.8. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線型写像 $f:V\rightarrow V$, これの固有値 λ, これの固有 vector$\mathbf{v}$, 多項式環 $K[X]$ の多項式 ρ が与えられたとき, その多項式 ρ の変数 X にその線形写像 f を代入した写像 $\rho(f)$ の固有値 $\rho(\lambda)$ の固有 vector はその vector$\mathbf{v}$ である.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線型写像 $f:V\rightarrow V$, これの固有値 λ, これの固有 vector$\mathbf{v}$, $\rho=\displaystyle\sum_{i\in\Lambda_r\cup\{0\}} k_iX^i$ なる多項式環 $K[X]$ の多項式 ρ が与えられたとき, $f\left(\mathbf{v}\right)=\lambda\mathbf{v}$ が成り立つのであった. このとき, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\rho(f)\left(\mathbf{v}\right)&=\left(\sum_{i\in\Lambda_r\cup\{0\}} k_if^i\right)\left(\mathbf{v}\right)\\
&=\sum_{i\in\Lambda_r\cup\{0\}} k_if^i\left(\mathbf{v}\right)\\
&=\sum_{i\in\Lambda_r\cup\{0\}} k_i\lambda^i\mathbf{v}\\
&=\left(\sum_{i\in\Lambda_r\cup\{0\}} k_i\lambda^i\right)\left(\mathbf{v}\right)=\rho(\lambda)\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

その多項式 ρ の変数 X にその線形写像 f を代入した写像 $\rho(f)$ の固有値 $\rho(\lambda)$ の固有 vector はその vector$\mathbf{v}$ である. □

2.3.3 Hamilton-Cayley の定理

定理 2.3.9 (Hailiton-Cayley の定理)**.** 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線型写像 $f:V\rightarrow V$, 固有多項式 Φ_f が与えられたとき, その多項式 Φ_f の変数 X にその線形写像 f を代入した写像 $\Phi_f(f)$ は零写像である, 即ち, 次式のようになる.

$$\Phi_f(f):V\rightarrow V;\mathbf{v}\mapsto\mathbf{0}$$

この定理を Hailiton-Cayley の定理という.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線型写像 $f:V\rightarrow V$, 固有多項式 Φ_f が与えられたとき, 定理 2.3.1 より次式のように与えられることができ, そうしたらば,

$$\Phi_f=\prod_{i\in\varLambda_n}\left(X-\lambda_i\right)$$

次式が成り立つ.

$$\Phi_f(f)=\prod_{i\in\varLambda_n}\left(f-\lambda_iI_V\right)$$

ここで, 三角化定理よりその vector 空間 V のある基底 $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ が存在して, これを $\mathcal{B}$ とおくと, これに関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ は次式のように表されることができる.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&*\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\O&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$f\left(\mathbf{v}_1\right)=\lambda_1\mathbf{v}_1$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\left(f-\lambda_1I_V\right)\left(\mathbf{v}_1\right)&=f\left(\mathbf{v}_1\right)-\lambda_1I_V\left(\mathbf{v}_1\right)\\&=f\left(\mathbf{v}_1\right)-\lambda_1\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\end{aligned}$$

$m=k$ のとき, $\forall m'\in\varLambda_k$ に対し, $\displaystyle\prod_{i\in\varLambda_k}\left(f-\lambda_iI_V\right)\left(\mathbf{v}_{m'}\right)=\mathbf{0}$ が成り立つと仮定しよう. $m=k+1$ のとき, $\forall i\in\varLambda_k$ に対し, 写像の合成 $\circ$ は, その線形写像 f 自身か恒等写像 I_V に対してのみ移すので, 可換的であり次のようになる.

$$\begin{aligned}\prod_{i\in\varLambda_{k+1}}\left(f-\lambda_iI_V\right)\left(\mathbf{v}_{m'}\right)&=\left(f-\lambda_{k+1}I_V\right)\circ\prod_{i\in\varLambda_k}\left(f-\lambda_iI_V\right)\left(\mathbf{v}_{m'}\right)\\&=\left(f-\lambda_{k+1}I_V\right)\left(\prod_{i\in\varLambda_k}\left(f-\lambda_iI_V\right)\left(\mathbf{v}_{m'}\right)\right)\\&=\left(f-\lambda_{k+1}I_V\right)(\mathbf{0})=\mathbf{0}\end{aligned}$$

また, その表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ の第 $k+1$ 列は $\begin{pmatrix}*\\\lambda_{k+1}\\O\end{pmatrix}$ と表されるので, その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ を用いて第 k 成分のみ 1 でこれ以外の成分が 0 であるような n-vector$\mathbf{e}_k$ を用いて次式のように考えられれば,

$$
\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] & & K^n \arrow[dd, tail, twoheadrightarrow, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbf{e}_k \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] & & \begin{pmatrix} * \\ \lambda_{k+1} \\ O \end{pmatrix} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & \\
 & V \arrow[uu, tail, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"] \arrow[rr, "f"] & & V \\
\mathbf{v}_{k+1} \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f\left(\mathbf{v}_{k+1}\right) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] &
\end{tikzcd}
$$

あるその体 K の元々 k_i を用いて次式のように表されることができるので,

$$
f\left(\mathbf{v}_{k+1}\right) = \sum_{i\in\varLambda_k} k_i\mathbf{v}_i + \lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}
$$

定理 2.3.5 より次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\prod_{i\in\varLambda_{k+1}}\left(f-\lambda_i I_V\right)\left(\mathbf{v}_{k+1}\right) &= \prod_{i\in\varLambda_k}\left(f-\lambda_i I_V\right)\circ\left(f-\lambda_{k+1}I_V\right)\left(\mathbf{v}_{k+1}\right)\\
&= \prod_{i\in\varLambda_k}\left(f-\lambda_i I_V\right)\left(f\left(\mathbf{v}_{k+1}\right)-\lambda_{k+1}I_V\left(\mathbf{v}_{k+1}\right)\right)\\
&= \prod_{i\in\varLambda_k}\left(f-\lambda_i I_V\right)\left(\sum_{j\in\varLambda_k} k_j\mathbf{v}_j+\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}-\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}\right)\\
&= \prod_{i\in\varLambda_k}\left(f-\lambda_i I_V\right)\left(\sum_{j\in\varLambda_k} k_j\mathbf{v}_j\right)\\
&= \sum_{j\in\varLambda_k} k_j\prod_{i\in\varLambda_k}\left(f-\lambda_i I_V\right)\left(\mathbf{v}_j\right)\\
&= \sum_{j\in\varLambda_k} k_j\prod_{i\in\varLambda_k\setminus\{j\}}\left(f-\lambda_i I_V\right)\circ\left(f-\lambda_j I_V\right)\left(\mathbf{v}_j\right)\\
&= \sum_{j\in\varLambda_k} k_j\prod_{i\in\varLambda_k\setminus\{j\}}\left(f-\lambda_i I_V\right)\left(f\left(\mathbf{v}_j\right)-\lambda_j I_V\left(\mathbf{v}_j\right)\right)\\
&= \sum_{j\in\varLambda_k} k_j\prod_{i\in\varLambda_k\setminus\{j\}}\left(f-\lambda_i I_V\right)\left(\lambda_j\mathbf{v}_j-\lambda_j\mathbf{v}_j\right)\\
&= \sum_{j\in\varLambda_k} k_j\prod_{i\in\varLambda_k\setminus\{j\}}\left(f-\lambda_i I_V\right)(\mathbf{0})\\
&= \sum_{j\in\varLambda_k} k_j\mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

以上, 数学的帰納法によって, $\forall m\in\varLambda_n$ に対し, $\displaystyle\prod_{i\in\varLambda_n}\left(f-\lambda_i I_V\right)\left(\mathbf{v}_m\right)=\mathbf{0}$ が成り立つ, 即ち, $\forall i\in\varLambda_n$ に対し, $\varPhi_f(f)\left(\mathbf{v}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立ち, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $\varPhi_f(f)(\mathbf{v})=\mathbf{0}$ が成り立つので, よって, その多項式 $\varPhi_f$ の変数 X にその線形写像 f を代入した写像 $\varPhi_f(f)$ は零写像である. $\square$

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p257-264 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 1976. 新装版第 2 刷 p156-158 ISBN978-4-00-029873-5

[3] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007. 改訂版 8 刷 p155-164 ISBN978-4-320-11097-7

2.4 分解定理

2.4.1 広義の固有空間

定義 2.4.1. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, その線形写像 f の固有値の 1 つ λ, 恒等写像 $I_{V}:V\rightarrow V$ を用いて, $\exists l\in\mathbb{N}$ に対し, $\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l}(\mathbf{v})=\mathbf{0}$ が成り立つとき, その vector$\mathbf{v}$ をその線形写像 f のその固有値 λ に対する広義の固有 vector という.

定理 2.4.1. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, 恒等写像 $I_{V}:V\rightarrow V$ を用いた次式のようなその線形写像 f の 1 つの固有値 λ に対する広義の固有 vector$\mathbf{v}$ 全体の集合と零 vector との和集合 $\widetilde{W_{f}}(\lambda)$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間をなす.

$$\widetilde{W_{f}}(\lambda)=\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\ker\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l}$$

さらに, その固有値 λ に対する固有空間 $W_{f}(\lambda)$ はその集合 $\widetilde{W_{f}}(\lambda)$ に含まれる.

定義 2.4.2. 上の式で定義された集合 $\widetilde{W_{f}}(\lambda)$ をその固有値 λ に対する広義の固有空間という.

証明. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, その線形写像 f の 1 つの固有値 λ に対する広義の固有 vector$\mathbf{v}$ 全体の集合と零 vector との和集合 $\widetilde{W_{f}}(\lambda)$ について, 恒等写像 $I_{V}:V\rightarrow V$ を用いた写像 $\lambda I_{V}-f$ も線形写像であり, 線形写像同士の合成写像もまた線形写像であるから, 定義と定理 1.2.11 より恒等写像 $I_{V}:V\rightarrow V$ と自然数 l を用いた集合 $\ker\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l}$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間をなす. さらに, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in\bigcup_{l'\in\mathbb{N}}\ker\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l'}\forall k,l\in K$ に対し, ある自然数たち $l_{\mathbf{v}}$, $l_{\mathbf{w}}$ が存在して, 次式が成り立つ.

$$\mathbf{v}\in\ker\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{v}}},\quad\mathbf{w}\in\ker\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{w}}}$$

このとき, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{v}}+l_{\mathbf{w}}}\left(k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\right)&=k\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{v}}+l_{\mathbf{w}}}(\mathbf{v})+l\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{v}}+l_{\mathbf{w}}}(\mathbf{w})\\&=k\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{w}}}\circ\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{v}}}(\mathbf{v})\\&\quad+l\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{v}}}\circ\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{w}}}(\mathbf{w})\\&=k\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{w}}}(\mathbf{0})+l\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{v}}}(\mathbf{0})=\mathbf{0}\end{aligned}$$

$k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\in\ker\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l_{\mathbf{v}}+l_{\mathbf{w}}}$ が成り立つので, $k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\in\bigcup_{l'\in\mathbb{N}}\ker\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l'}$ が成り立つ. したがって, これらの和集合 $\bigcup_{l'\in\mathbb{N}}\ker\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l'}$ もその vector 空間 V の部分 vector 空間をなす.

よって, その線形写像 f の 1 つの固有値 λ に対する広義の固有 vector$\mathbf{v}$ 全体の集合と零 vector との和集合 $\widetilde{W_{f}}(\lambda)$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間をなす.

$$\widetilde{W_{f}}(\lambda)=\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\ker\left(\lambda I_{V}-f\right)^{l}$$

さらに, その固有値 λ に対する固有空間 $W_{f}(\lambda)$ はまさしく $\ker\left(\lambda I_{V}-f\right)$ に等しいので, その集合 $\widetilde{W_{f}}(\lambda)$ に含まれる. □

定理 2.4.2. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像たち $f:V\rightarrow V$, $g:V\rightarrow V$ が与えられたとき, $g\circ f=f\circ g$ が成り立ち, $\forall\mathbf{v}\in V\exists l,m\in\mathbb{N}$ に対し, $f^{l}\left(\mathbf{v}\right)=g^{m}\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, $\exists t\in\mathbb{N}$ に対し, $(f+g)^{t}\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{0}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像たち $f:V\rightarrow V$, $g:V\rightarrow V$ が与えられたとき, $g\circ f=f\circ g$ が成り立ち, $\forall\mathbf{v}\in V\exists l,m\in\mathbb{N}$ に対し, $f^{l}\left(\mathbf{v}\right)=g^{m}\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, $l+m-1=t$ なる自然数 t を用いて考えれば, 二項定理より次のようになる.

$$\begin{aligned}
(f+g)^{t}&=\sum_{i\in\varLambda_{t}\cup\{0\}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i}\circ g^{t-i}\\
&=\sum_{i\in\varLambda_{t}\setminus\varLambda_{l-1}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i}\circ g^{t-i}+\sum_{i\in\varLambda_{l-1}\cup\{0\}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i}\circ g^{t-i}\\
&=\sum_{i\in\varLambda_{t}\setminus\varLambda_{l-1}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i-l}\circ f^{l}\circ g^{t-i}+\sum_{i\in\varLambda_{l-1}\cup\{0\}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i}\circ g^{t-i-m}\circ g^{m}\\
&=\sum_{i\in\varLambda_{t}\setminus\varLambda_{l-1}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i-l}\circ g^{t-i}\circ f^{l}+\sum_{i\in\varLambda_{l-1}\cup\{0\}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i}\circ g^{l-1-i}\circ g^{m}
\end{aligned}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
(f+g)^{t}\left(\mathbf{v}\right)&=\left(\sum_{i\in\varLambda_{t}\setminus\varLambda_{l-1}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i-l}\circ g^{t-i}\circ f^{l}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i\in\varLambda_{l-1}\cup\{0\}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i}\circ g^{l-1-i}\circ g^{m}\right)\left(\mathbf{v}\right)\\
&=\left(\sum_{i\in\varLambda_{t}\setminus\varLambda_{l-1}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i-l}\circ g^{t-i}\circ f^{l}\right)\left(\mathbf{v}\right)\\
&\quad+\left(\sum_{i\in\varLambda_{l-1}\cup\{0\}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i}\circ g^{l-1-i}\circ g^{m}\right)\left(\mathbf{v}\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_{t}\setminus\varLambda_{l-1}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i-l}\circ g^{t-i}\circ f^{l}\left(\mathbf{v}\right)\\
&\quad+\sum_{i\in\varLambda_{l-1}\cup\{0\}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i}\circ g^{l-1-i}\circ g^{m}\left(\mathbf{v}\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_{t}\setminus\varLambda_{l-1}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i-l}\circ g^{t-i}\left(f^{l}\left(\mathbf{v}\right)\right)\\
&\quad+\sum_{i\in\varLambda_{l-1}\cup\{0\}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i}\circ g^{l-1-i}\left(g^{m}\left(\mathbf{v}\right)\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_{t}\setminus\varLambda_{l-1}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i-l}\circ g^{t-i}\left(\mathbf{0}\right)\\
&\quad+\sum_{i\in\varLambda_{l-1}\cup\{0\}}\frac{t!}{i!(t-i)!}f^{i}\circ g^{l-1-i}\left(\mathbf{0}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i \in \Lambda_t \setminus \Lambda_{l-1}} \frac{t!}{i!(t-i)!}\mathbf{0} + \sum_{i \in \Lambda_{l-1} \cup \{0\}} \frac{t!}{i!(t-i)!}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

よって, $\exists t \in \mathbb{N}$ に対し, $(f+g)^t(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つ. □

定理 2.4.3. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, $\forall m \in \mathbb{N} \forall k \in K$ に対し, 恒等写像 $I_V : V \to V$ を用いたその線形写像 f の 1 つの固有値 λ に対する広義の固有 vector$\mathbf{v}$ の写像 $(kI_V - f)^m$ による像も, $k \neq \lambda$ が成り立つなら, その固有値 λ に対する広義の固有 vector である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, $\forall m \in \mathbb{N} \forall k \in K$ に対し, 恒等写像 $I_V : V \to V$ を用いたその線形写像 f の 1 つの固有値 λ に対する広義の固有 vector$\mathbf{v}$ の写像 $(kI_V - f)^m$ による像 $(kI_V - f)^m(\mathbf{v})$ について, $k \neq \lambda$ が成り立つなら, その写像 $(kI_V - f)^m$ も線形写像であることに注意すれば, $\exists l \in \mathbb{N}$ に対し, $(\lambda I_V - f)^l(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned} (\lambda I_V - f)^l\left((kI_V - f)^m(\mathbf{v})\right) &= (\lambda I_V - f)^l \circ (kI_V - f)^m(\mathbf{v}) \\ &= (kI_V - f)^m \circ (\lambda I_V - f)^l(\mathbf{v}) \\ &= (kI_V - f)^m\left((\lambda I_V - f)^l(\mathbf{v})\right) \\ &= (kI_V - f)^m(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

ここで, $(kI_V - f)^m(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つとすれば, これらの線形写像たち $f - \lambda I_V$, $kI_V - f$ の合成は交換律が成り立つので, 定理 2.4.2 より $\exists t \in \mathbb{N}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$((f - \lambda I_V) + (kI_V - f))^t(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

一方で, 次のようになることから,

$$\begin{aligned} ((f - \lambda I_V) + (kI_V - f))^t(\mathbf{v}) &= (kI_V - \lambda I_V)^t(\mathbf{v}) \\ &= ((k-\lambda)I_V)^t(\mathbf{v}) \\ &= (k-\lambda)^t I_V^t(\mathbf{v}) \\ &= (k-\lambda)^t\mathbf{v} \end{aligned}$$

ここで, $k - \lambda \neq 0$ かつ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つので, $((f - \lambda I_V) + (kI_V - f))^t(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ が成り立つ. これは先ほどの定理 2.4.2 の結果と矛盾するので, $(kI_V - f)^m(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ が成り立つ.

よって, 広義の固有 vector$\mathbf{v}$ の写像 $(kI_V - f)^m$ による像もその固有値 λ に対する広義の固有 vector である. □

定理 2.4.4. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, $i \in \Lambda_n$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i に対する広義の固有 vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, $i \in \Lambda_n$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i に対する広義の固有 vectors$\mathbf{v}_i$ について, $n = 1$ のときは明らかであるから, $2 \leq n$ とする. $n = k$ のとき, $i \in \Lambda_k$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i に対する広義の固有 vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立であると仮定すると, $n = k+1$ のとき, $\sum_{i \in \Lambda_{k+1}} c_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つとすれば, その vector$\mathbf{v}_{k+1}$ はその固有値 λ_{k+1} に対する広義の固有 vector であるから, $\exists l \in \mathbb{N}$ に対し, 恒等写像 $I_V : V \to V$ を用いた

$\left(\lambda_{k+1}I_V - f\right)^l\left(\mathbf{v}_{k+1}\right) = \mathbf{0}$ が成り立つ．このとき, その写像 $\left(\lambda_{k+1}I_V - f\right)^l$ は線形写像であるから, 次のようになる．

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \left(\lambda_{k+1}I_V - f\right)^l\left(\sum_{i\in\varLambda_{k+1}} c_i\mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_{k+1}} c_i\left(\lambda_{k+1}I_V - f\right)^l\left(\mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_k} c_i\left(\lambda_{k+1}I_V - f\right)^l\left(\mathbf{v}_i\right) + c_{k+1}\left(\lambda_{k+1}I_V - f\right)^l\left(\mathbf{v}_{k+1}\right)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_k} c_i\left(\lambda_{k+1}I_V - f\right)^l\left(\mathbf{v}_i\right) + \mathbf{0}\\
&= \sum_{i\in\varLambda_k} c_i\left(\lambda_{k+1}I_V - f\right)^l\left(\mathbf{v}_i\right)
\end{aligned}$$

ここで, $\forall i \in \varLambda_k$ に対し, $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ が成り立つので, 定理 2.4.3 よりその族 $\left\{\left(\lambda_{k+1}I_V - f\right)^l\left(\mathbf{v}_i\right)\right\}_{i\in\varLambda_k}$ もまたそれらの互いに異なる固有値たち λ_i に対する広義の固有 vectors でもあり, 仮定より $\forall i \in \varLambda_k$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ．このとき, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\varLambda_{k+1}} c_i\mathbf{v}_i &= \sum_{i\in\varLambda_k} c_i\mathbf{v}_i + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}\\
&= \mathbf{0} + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}\\
&= c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$\mathbf{v}_{k+1} \neq 0$ より $c_{k+1} = 0$ が成り立つ．以上より, $i \in \varLambda_{k+1}$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i に対する広義の固有 vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立であることになる．

よって, $i \in \varLambda_n$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i に対する広義の固有 vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立である． □

定理 2.4.5. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f: V \rightarrow V$ が与えられたとき, $i \in \varLambda_n$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i に対する広義の固有空間たち $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ の和空間 $\sum_{i\in\varLambda_n}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ は直和空間 $\bigoplus_{i\in\varLambda_n}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ でもある．

証明. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f: V \rightarrow V$ が与えられたとき, $i \in \varLambda_n$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i に対する広義の固有空間たち $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ の和空間 $\sum_{i\in\varLambda_n}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ について, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in \sum_{i\in\varLambda_n}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{v}_i$, $\mathbf{w} = \sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{w}_i$, $\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i \in \widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ とすれば, $\sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{v}_i = \sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{w}_i$ が成り立つなら, 次のようになり,

$$\mathbf{0} = \sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{v}_i - \sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{w}_i = \sum_{i\in\varLambda_n}\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i\right)$$

ここで, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i \in \widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ が成り立つことから, 定理 2.4.4 と対偶律より $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ が成り立つ．これにより, その和空間 $\sum_{i\in\varLambda_n}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ は直和空間 $\bigoplus_{i\in\varLambda_n}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ でもある． □

定理 2.4.6. 体 K 上の有限次元 vector 空間 V, 線形写像たちの族 $\{f_i : V \to V\}_{i \in \varLambda_s}$ が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{nullity} f_s \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 \leq \sum_{i \in \varLambda_s} \mathrm{nullity} f_i$$

証明. 体 K 上の有限次元 vector 空間 V, 線形写像たちの族 $\{f_i : V \to V\}_{i \in \varLambda_s}$ が与えられたとき, $s = 1$ のときは明らかであるから, $2 \leq s$ とし, $s = k$ のとき, 次式が成り立つと仮定しよう.

$$\mathrm{nullity} f_k \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 \leq \sum_{i \in \varLambda_k} \mathrm{nullity} f_i$$

$s = k + 1$ のとき, $f_k \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 = f$ とおかれると, 線形写像 $f_{k+1}|V(f) : V(f) \to V$ について, 次元公式より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank} f &= \dim V(f) \\
&= \mathrm{rank} f_{k+1}|V(f) + \mathrm{nullity} f_{k+1}|V(f) \\
&= \dim V\left(f_{k+1}|V(f)\right) + \mathrm{nullity} f_{k+1}|V(f) \\
&= \dim V\left(f_{k+1} \circ f\right) + \mathrm{nullity} f_{k+1}|V(f) \\
&= \mathrm{rank} f_{k+1} \circ f + \mathrm{nullity} f_{k+1}|V(f)
\end{aligned}$$

また, その線形写像たち $f : V \to V$, $f_{k+1} \circ f : V \to V$ について, 次元公式より次式が成り立つので,

$$\mathrm{rank} f + \mathrm{nullity} f = \dim V = \mathrm{rank} f_{k+1} \circ f + \mathrm{nullity} f_{k+1} \circ f$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{nullity} f_{k+1} \circ f_k \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 &= \mathrm{nullity} f_{k+1} \circ f \\
&= \dim V\left(f_{k+1} \circ f\right) + \dim \ker f_{k+1} \circ f \\
&\quad - \mathrm{rank} f_{k+1} \circ f \\
&= \mathrm{rank} f + \mathrm{nullity} f - \mathrm{rank} f_{k+1} \circ f \\
&= \mathrm{rank} f_{k+1} \circ f + \mathrm{nullity} f_{k+1}|V(f) \\
&\quad + \mathrm{nullity} f - \mathrm{rank} f_{k+1} \circ f \\
&= \mathrm{nullity} f + \mathrm{nullity} f_{k+1}|V(f) \\
&= \mathrm{nullity} f + \dim \ker f_{k+1}|V(f)
\end{aligned}$$

ここで, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \in \ker f_{k+1}|V(f)$ が成り立つなら, $\mathbf{v} \in V(f) \subseteq V$ なので, 次のようになる.

$$f_{k+1}|V(f)\left(\mathbf{v}\right) = f_{k+1}\left(\mathbf{v}\right) = \mathbf{0}$$

ゆえに, $\mathbf{v} \in \ker f_{k+1}$ が成り立ち, したがって, $\ker f_{k+1}|V(f) \subseteq \ker f_{k+1}$ が成り立つことから, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{nullity} f_{k+1} \circ f_k \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 &\leq \mathrm{nullity} f + \dim \ker f_{k+1} \\
&\leq \sum_{i \in \varLambda_k} \mathrm{nullity} f_i + \mathrm{nullity} f_{k+1} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} \mathrm{nullity} f_i
\end{aligned}$$

以上より, 数学的帰納法によって線形写像たちの族 $\{f_i : V \to V\}_{i \in \varLambda_s}$ が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{nullity} f_s \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 \leq \sum_{i \in \varLambda_s} \mathrm{nullity} f_i$$

□

定理 2.4.7. 体 K 上の有限次元 vector 空間 V, 線形写像たちの族 $\{f_i : V \to V\}_{i \in \varLambda_s}$ が与えられたとき, $f_s \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 = 0$ が成り立つなら, 次式が成り立つ.

$$n \leq \sum_{i \in \varLambda_s} \mathrm{nullity} f_i$$

証明. 体 K 上の有限次元 vector 空間 V, 線形写像たちの族 $\{f_i : V \to V\}_{i \in \varLambda_s}$ が与えられたとき, $f_s \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 = 0$ が成り立つなら, 定理 2.4.6 より次のようになる.

$$\dim \ker f_s \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 \leq \sum_{i \in \varLambda_s} \mathrm{nullity} f_i$$

ここで, 次元公式より次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\dim V &= \mathrm{rank} f_s \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 + \mathrm{nullity} f_s \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 \\
&= \mathrm{rank} 0 + \mathrm{nullity} f_s \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 \\
&= 0 + \mathrm{nullity} f_s \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 \\
&= \mathrm{nullity} f_s \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1
\end{aligned}$$

次式が成り立つ.

$$\dim V \leq \sum_{i \in \varLambda_s} \mathrm{nullity} f_i$$

□

2.4.2 f-不変

定義 2.4.3. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, $V(f|W) \subseteq W$ が成り立つなら, その部分 vector 空間 W は f-不変であるという.

定理 2.4.8. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, その値域 $V(f)$ と核 $\ker f$ は f-不変である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, $V(f|V(f)) \subseteq V(f)$ が成り立つかつ, $V(f|\ker f) = \{\mathbf{0}\} \subseteq \ker f$ が成り立つので, その値域 $V(f)$ と核 $\ker f$ は f-不変である. □

定理 2.4.9. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとする. $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その vector$\mathbf{v}$ がその線形写像 f の固有 vector であるならそのときに限り, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つかつ, その vector$\mathbf{v}$ から生成されるその vector 空間 V の部分 vector 空間 $\mathrm{span}\{\mathbf{v}\}$ が f-不変である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとする. $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その vector$\mathbf{v}$ がその線形写像 f の固有 vector であるなら, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立ち, さらに, その線形写像 f のある固有値 λ が存在

して $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ が成り立つ. このとき, $\forall k\mathbf{v} \in \mathrm{span}\{\mathbf{v}\}$ に対し, 次のようになるので,

$$f(k\mathbf{v}) = \lambda k\mathbf{v} \in \mathrm{span}\{\mathbf{v}\}$$

その vector$\mathbf{v}$ から生成されるその vector 空間 V の部分 vector 空間 $\mathrm{span}\{\mathbf{v}\}$ が f-不変である.

逆に, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つかつ, その vector$\mathbf{v}$ から生成されるその vector 空間 V の部分 vector 空間 $\mathrm{span}\{\mathbf{v}\}$ が f-不変であるなら, $\forall k\mathbf{v} \in \mathrm{span}\{\mathbf{v}\}$ に対し, あるその体 K の元 l が存在して $f(k\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v}) = l\mathbf{v}$ が成り立つので, $k \neq 0$ のとき, $f(\mathbf{v}) = \dfrac{l}{k}\mathbf{v}$ が成り立つ. よって, その vector$\mathbf{v}$ がその線形写像 f の固有 vector である. □

定理 2.4.10. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f: V \to V$ が与えられたとき, その線形写像 f の 1 つの固有値 λ に対する固有空間 $W_f(\lambda)$, 広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda)$ は f-不変である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f: V \to V$ が与えられたとき, その線形写像 f の 1 つの固有値 λ に対する固有空間 $W_f(\lambda)$, 広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda)$ について, $\forall\mathbf{v} \in W_f(\lambda)$ に対し, $\lambda = 0$ のとき, 恒等写像 $I_V: V \to V$ を用いて次のようになることから,

$$(\lambda I_V - f)(\mathbf{v}) = (-f)(\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

次のようになるので,

$$\begin{aligned}(\lambda I_V - f)(f(\mathbf{v})) &= (-f)(f(\mathbf{v}))\\ &= -f \circ f(\mathbf{v})\\ &= f(-f(\mathbf{v}))\\ &= f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

したがって, $f(\mathbf{v}) \in W_f(\lambda)$ が成り立つ. $\lambda \neq 0$ のとき, 定理 2.4.3 より次のようになるので,

$$\begin{aligned}(\lambda I_V - f)(f(\mathbf{v})) &= -(\lambda I_V - f)(-f(\mathbf{v}))\\ &= -(\lambda I_V - f)((-f)(\mathbf{v}))\\ &= -\mathbf{0} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

$f(\mathbf{v}) \in W_f(\lambda)$ が成り立つ. いづれにしても, $V(f|W_f(\lambda)) \subseteq W_f(\lambda)$ が成り立つので, その広義の固有空間 $W_f(\lambda)$ は f-不変である.

$\forall\mathbf{v} \in \widetilde{W_f}(\lambda)$ に対し, $\lambda = 0$ のとき, $\exists l \in \mathbb{N}$ に対し, 恒等写像 $I_V: V \to V$ を用いて次のようになることから,

$$\begin{aligned}(\lambda I_V - f)^l(\mathbf{v}) &= (-f)^l(\mathbf{v})\\ &= (-1)^l f^l(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

次のようになるので,

$$\begin{aligned}(\lambda I_V - f)^l(f(\mathbf{v})) &= (-f)^l(f(\mathbf{v}))\\ &= (-1)^l f^l \circ f(\mathbf{v})\\ &= f\left((-1)^l f^l(\mathbf{v})\right)\\ &= f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

したがって, $f(\mathbf{v}) \in \widetilde{W_f}(\lambda)$ が成り立つ. $\lambda \neq 0$ のとき, 定理 2.4.3 より次のようになるので,

$$\begin{aligned}\left(\lambda I_V - f\right)^l \left(f(\mathbf{v})\right) &= -\left(\lambda I_V - f\right)^l \left(-f(\mathbf{v})\right)\\ &= -\left(\lambda I_V - f\right)^l \left((-f)(\mathbf{v})\right)\\ &= -\mathbf{0} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

$f(\mathbf{v}) \in \widetilde{W_f}(\lambda)$ が成り立つ. いづれにしても, $V\left(f|\widetilde{W_f}(\lambda)\right) \subseteq \widetilde{W_f}(\lambda)$ が成り立つので, その広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda)$ は f-不変である. □

定理 2.4.11. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 多項式環 $K[X]$ の多項式 ρ の変数 X に線形写像 $f: V \to V$ を代入した写像 $\rho(f)$ の値域 $V(\rho(f))$ と核 $\ker\rho(f)$ も f-不変である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, $\rho = \sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i X^i$ なる多項式環 $K[X]$ の多項式 ρ の変数 X に線形写像 $f: V \to V$ を代入した写像 $\rho(f)$ の値域 $V(\rho(f))$ と核 $\ker\rho(f)$ について, $\forall f(\mathbf{v}) \in V(f|V(\rho(f)))$ に対し, $\mathbf{v} \in V(\rho(f))$ が成り立つことから, $\exists\mathbf{w} \in V$ に対し, $\rho(f)(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$ が成り立つ. このとき, 定理 1.2.10 より次のようになることから,

$$\begin{aligned}f(\mathbf{v}) &= f(\rho(f)(\mathbf{w}))\\ &= f \circ \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i\right)(\mathbf{w})\\ &= \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f \circ f^i\right)(\mathbf{w})\\ &= \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i \circ f\right)(\mathbf{w})\\ &= \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i\right) \circ f(\mathbf{w})\\ &= \rho(f)(f(\mathbf{w}))\end{aligned}$$

$f(\mathbf{v}) \in V(\rho(f))$ が成り立つ. したがって, その値域 $V(\rho(f))$ は f-不変である.

一方で, $\forall f(\mathbf{v}) \in V(f|\ker\rho(f))$ に対し, $\mathbf{v} \in \ker\rho(f)$ が成り立つことから, $\rho(f)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つ. したがって, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}\rho(f)(f(\mathbf{v})) &= \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i\right) \circ f(\mathbf{v})\\ &= \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i \circ f\right)(\mathbf{v})\\ &= \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f \circ f^i\right)(\mathbf{v})\\ &= f \circ \left(\sum_{i \in \Lambda_r \cup \{0\}} k_i f^i\right)(\mathbf{w})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f\left(\rho(f)\left(\mathbf{v}\right)\right) \\ &= f\left(\mathbf{0}\right) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$f\left(\mathbf{v}\right) \in \ker \rho(f)$ が成り立つ. したがって, その核 $\ker \rho(f)$ は f-不変である. $\square$

定理 2.4.12. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線形写像 $f: V \to V$ が与えられたとき, $V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_i$ を満たすかつ, f-不変な $i \in \varLambda_s$ なるその vector 空間 V の部分 vector 空間たち W_i の基底 α_i に関するその線形写像 $f|W_i$ の表現行列が A_i とおかれれば, その vector 空間 V の基底 $\langle \alpha_i \rangle_{i \in \varLambda_s}$ に関するその線形写像 f の表現行列 A は次式のように与えられる.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$$

もちろん, その行列たち A_i の次数は $\dim W_i$ に等しい. さらに, その線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ は次式を満たす.

$$\varPhi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} \varPhi_{f|W_i} = \varPhi_{f|W_1} \varPhi_{f|W_2} \cdots \varPhi_{f|W_s}$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線形写像 $f: V \to V$ が与えられたとき, $V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_i$ を満たすかつ, f-不変な $i \in \varLambda_s$ なるその vector 空間 V の部分 vector 空間たち W_i の基底 α_i に関するその線形写像 $f|W_i$ の表現行列が A_i とおかれれば, $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $\langle \alpha_i \rangle_{i \in \varLambda_s} = \alpha$ とおくと, その基底 α についてのその線形写像 f の表現行列 $[f]_\alpha^\alpha$ を $A = [f]_\alpha^\alpha$ とおくと, 線形写像 $L_A: K^n \to K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ とその基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いれば, 次式が成り立つことから,

$$\begin{tikzcd}
& K^n \arrow[rr, "L_A"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"] & & K^n \\
\mathbf{v} \arrow[rr, mapsto, "L_A"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"'] & & A\mathbf{v} & \\
& V \arrow[rr, "f"] & & V \arrow[uu, "\varphi_\alpha^{-1}"'] \\
\varphi_\alpha\left(\mathbf{v}\right) \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f \circ \varphi_\alpha\left(\mathbf{v}\right) \arrow[uu, mapsto, "\varphi_\alpha^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

$\varphi_\alpha\left(\mathbf{v}\right) = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i$ と一意的に表されることができてその基底 α_i に関する基底変換における線形同型写像 φ_{α_i} を用いて次のようになる.

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \varphi_\alpha^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha\left(\mathbf{v}\right) \\ &= \varphi_\alpha^{-1} \circ f \left(\bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \varphi_\alpha^{-1} \circ f\left(\mathbf{w}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_{\alpha_i} \circ \varphi_{\alpha_i}^{-1} \circ f|W_i\left(\mathbf{w}_i\right)
\end{aligned}
$$

ここで, 定理 1.5.1, 定理 1.5.3 より $n_i = \dim W_i$ とおき線形写像 $L_{A_i} : K^{n_i} \rightarrow K^{n_i}; \mathbf{v} \mapsto A_i \mathbf{v}$ を用いれば, 次式が成り立つので,

$$
\begin{tikzcd}
& K^{n_i} \arrow[rr, "L_{A_i}"] & & K^{n_i} \\
\varphi_{\alpha_i}^{-1}\left(\mathbf{w}_i\right) \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[rr, mapsto, "L_{A_i}"] & & A_i\varphi_{\alpha_i}^{-1}\left(\mathbf{w}_i\right) \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] & \\
& W_i \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\alpha_i}^{-1}"] \arrow[rr, "f|W_i"] & & W_i \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\alpha_i}^{-1}"'] \\
\mathbf{w}_i \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\alpha_i}^{-1}"] \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[rr, mapsto, "f|W_i"] & & f|W_i\left(\mathbf{w}_i\right) \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\alpha_i}^{-1}"] \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] &
\end{tikzcd}
$$

次のようになる.

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{v} &= \sum_{i \in \varLambda_s} \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_{\alpha_i} \circ L_{A_i} \circ \varphi_{\alpha_i}^{-1}\left(\mathbf{w}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_{\alpha_i}\left(A_i \varphi_{\alpha_i}^{-1}\left(\mathbf{w}_i\right)\right) \\
&= \begin{pmatrix} A_1 \varphi_{\alpha_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) \\ A_2 \varphi_{\alpha_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) \\ \vdots \\ A_s \varphi_{\alpha_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) \\ \varphi_{\alpha_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) \\ \vdots \\ \varphi_{\alpha_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで, 次のようになることから,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) \\ \varphi_{\alpha_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) \\ \vdots \\ \varphi_{\alpha_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{\alpha_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi_{\alpha_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \end{pmatrix} \\
&= \varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) + \varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) + \cdots + \varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{w}_i\right) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}\left(\bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i\right)
\end{aligned}
$$

$$= \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

よって, その表現行列 A は次式のように与えられる.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$$

もちろん, その行列たち A_i の次数は n_i に等しい.

さらに, その線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ について, 次式が成り立つことから,

$$[f]_\alpha^\alpha = A = \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}, \quad [f|W_i]_{\alpha_i}^{\alpha_i} = A_i$$

$\forall a \in K$ に対し, 恒等写像 $I_V : V \to V$ を用いれば, n_i 次正方行列 I_{n_i} を用いて次のようになる.

$$\begin{aligned}
\det[aI_V - f]_\alpha^\alpha &= \det\left(a[I_V]_\alpha^\alpha - [f]_\alpha^\alpha\right) = \det(aI_n - A) \\
&= \left| a \begin{pmatrix} I_{n_1} & & & O \\ & I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & I_{n_s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} aI_{n_1} - A_1 & & & O \\ & aI_{n_2} - A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & aI_{n_s} - A_s \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i \in \varLambda_s} \det(aI_{n_i} - A_i) \\
&= \prod_{i \in \varLambda_s} \det\left(a[I_V|W_i]_{\alpha_i}^{\alpha_i} - [f|W_i]_{\alpha_i}^{\alpha_i}\right) \\
&= \prod_{i \in \varLambda_s} \det[aI_V|W_i - f|W_i]_{\alpha_i}^{\alpha_i}
\end{aligned}$$

したがって, その線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ は次式を満たす.

$$\varPhi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} \varPhi_{f|W_i} = \varPhi_{f|W_1}\varPhi_{f|W_2} \cdots \varPhi_{f|W_s}$$

□

2.4.3 分解定理

定理 2.4.13 (分解定理)**.** 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとき, 定理 2.3.1 よりその線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ がその線形写像 f の互いに異なる s つの固有値たち λ_i を用いて次式のように表されることができるので, そうするなら,

$$\varPhi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}, \quad \sum_{i \in \varLambda_s} n_i = n$$

次のことが成り立つ.

- その固有値 λ_i に対する広義の固有空間たち $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ すべての和空間は直和空間でこれはその vector 空間 V に等しい, 即ち, その vector 空間 V は次式を満たす.
$$V=\bigoplus_{i\in\Lambda_s}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$$
- $\forall i\in\Lambda_s$ に対し, その固有値 λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ は恒等写像 $I_V:V\rightarrow V$ を用いて次式を満たす.
$$\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)=\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}$$
- $\forall i\in\Lambda_s$ に対し, その固有値 λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ の次元は自然数 n_i に等しい, 即ち, 次式を満たす.
$$\dim\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)=\operatorname{nullity}\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}=n_i$$

この定理を分解定理という.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線形写像 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, 定理 2.3.1 よりその線形写像 f の固有多項式 Φ_f がその線形写像 f の互いに異なる s つの固有値たち λ_i を用いて次式のように表されることができる.
$$\Phi_f=\prod_{i\in\Lambda_s}\left(X-\lambda_i\right)^{n_i},\quad\sum_{i\in\Lambda_s}n_i=n$$
このとき, Hamilton-Cayley の定理より恒等写像 $I_V:V\rightarrow V$ を用いて次式が成り立ち,
$$\Phi_f(f)=\left(\lambda_1 I_V-f\right)^{n_1}\circ\left(\lambda_2 I_V-f\right)^{n_2}\circ\cdots\circ\left(\lambda_s I_V-f\right)^{n_s}=0$$
さらに, $\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}\subseteq\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)\subseteq V$ が成り立つので, 定理 2.1.4, 定理 2.4.5, 定理 2.4.7 より次のようになる.
$$\begin{aligned}n&\leq\sum_{i\in\Lambda_s}\operatorname{nullity}\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}\\&=\sum_{i\in\Lambda_s}\dim\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}\\&\leq\sum_{i\in\Lambda_s}\dim\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)\\&=\dim\bigoplus_{i\in\Lambda_s}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)\\&\leq\dim V=n\end{aligned}$$
したがって, $\dim\bigoplus_{i\in\Lambda_s}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)=n$ が成り立ち, 定理 1.1.22 よりしたがって, 次のことが成り立つ.

- その固有値 λ_i に対する広義の固有空間たち $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ すべての和空間は直和空間でこれはその vector 空間 V に等しい, 即ち, その vector 空間 V は次式を満たす.
$$V=\bigoplus_{i\in\Lambda_s}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$$

また, $\exists i \in \varLambda_s$ に対し, $\widetilde{W_f}(\lambda_i) \supset \ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ が成り立つと仮定すれば, $\dim\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i} < \dim\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ が成り立つことから, 上と同様にして, 定理 2.1.4, 定理 2.4.5, 定理 2.4.7 より次のようになる.

$$\begin{aligned} n &\leq \sum_{i \in \varLambda_s} \operatorname{nullity}(\lambda_i I_V - f)^{n_i} \\ &= \sum_{i \in \varLambda_s} \dim\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i} \\ &< \sum_{i \in \varLambda_s} \dim\widetilde{W_f}(\lambda_i) \\ &= \dim\bigoplus_{i \in \varLambda_s} \widetilde{W_f}(\lambda_i) \\ &= \dim V = n \end{aligned}$$

しかしながら, これは矛盾している. よって, 次のことが成り立つ.

- $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, その固有値 λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ は恒等写像 $I_V : V \to V$ を用いて次式を満たす.

$$\widetilde{W_f}(\lambda_i) = \ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$$

また, 定理 2.4.10 より $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, その広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ は f-不変で定理 2.4.12 より次式が成り立つ.

$$\varPhi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} \varPhi_{f|\widetilde{W_f}(\lambda_i)}$$

定理 2.4.3 より $\forall i \in \varLambda_s \forall \mu_i \in K$ に対し, $\lambda_i \neq \mu_i$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v} \in \widetilde{W_f}(\lambda_i)$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, その vector$\left(\mu_i I_V - f|\widetilde{W_f}(\lambda_i)\right)(\mathbf{v})$ もその固有値 λ_i に対する広義の固有 vector であるから, 次式が成り立つ.

$$\left(\mu_i I_V - f|\widetilde{W_f}(\lambda_i)\right)(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$$

これにより, その線形写像 $f|\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ はその体 K の元 λ_i 以外に固有値をもたないことになる. したがって, 次式が成り立つことになる.

$$\varPhi_{f|\widetilde{W_f}(\lambda_i)} = (X - \lambda_i)^{\dim\widetilde{W_f}(\lambda_i)}$$

これにより, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \varPhi_f &= \prod_{i \in \varLambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i} \\ &= \prod_{i \in \varLambda_s} (X - \lambda_i)^{\dim\widetilde{W_f}(\lambda_i)} \end{aligned}$$

$\widetilde{W_f}(\lambda_i) = \ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ よりよって, 次のことが成り立つ.

- $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, その固有値 λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ の次元は自然数 n_i に等しい, 即ち, 次式を満たす.

$$\dim \widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right) = \mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i} = n_i$$

□

定理 2.4.14 (分解定理の拡張)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線形写像 $f:V \rightarrow V$ が与えられたとき, $\forall \rho \in K[X]$ に対し, その多項式 ρ の変数 X にその線形写像 f を代入した写像 $\rho(f)$ が $\rho(f) = 0$ を満たすかつ, 定理 1.2.10 と素元分解の基本定理よりその多項式 ρ は $\rho = \prod_{i \in \varLambda_s} \pi_i$ と素元分解できるので, そうすると, これらの既約多項式たち π_i から定まる多項式写像 π_i を用いて $V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} \ker \pi_i$ が成り立つ.

この定理を分解定理の拡張という.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線形写像 $f:V \rightarrow V$ が与えられたとき, $\forall \rho \in K[X]$ に対し, その多項式 ρ の変数 X にその線形写像 f を代入した写像 $\rho(f)$ が $\rho(f) = 0$ を満たすかつ, その多項式環 $K[X]$ が単項 ideal 整域であることと素元分解の基本定理よりその多項式 ρ は $\rho = \prod_{i \in \varLambda_s} \pi_i$ と素元分解できるので, そうするとする. このとき, その族 $\left\{\prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'}\right\}_{i \in \varLambda_s}$ の最大公約元は単位元と同伴であることになる. したがって, その多項式環 $K[X]$ が単項 ideal 整域であることにより次式が成り立つ.

$$K[X] = \sum_{i \in \varLambda_s} K[X] \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'}$$

これにより, その多項式環 $K[X]$ の族 $\{\kappa_i\}_{i \in \varLambda_s}$ が存在して, $\kappa_i \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'} = \sigma_i$ とおかれると, 次式が成り立つ.

$$\overline{1} = \sum_{i \in \varLambda_s} \kappa_i \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'} = \sum_{i \in \varLambda_s} \sigma_i$$

$\forall i,j \in \varLambda_s$ に対し, $i \neq j$ のとき, $\rho = \prod_{i \in \varLambda_s} \pi_i$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \sigma_j \sigma_i &= \kappa_j \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{j\}} \pi_{i'} \kappa_i \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'} \\ &= \kappa_j \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i,j\}} \pi_{i'} \kappa_i \prod_{i \in \varLambda_s} \pi_i \\ &= \kappa_j \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i,j\}} \pi_{i'} \kappa_i \rho \end{aligned}$$

ここで, これらの既約多項式たち π_i から定まる多項式写像たちが $\pi_i : K \rightarrow K$ と, それらの多項式たち κ_i から定まる多項式写像たちが $\kappa_i : K \rightarrow K$ と, それらの多項式たち σ_i から定まる多項式写像たちが $\sigma_i : K \rightarrow K$ とおかれると, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned} \sigma_j(f) \circ \sigma_i(f) &= \kappa_j(f) \circ \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i,j\}} \pi_{i'}(f) \circ \kappa_i(f) \circ \rho(f) \\ &= \kappa_j(f) \circ \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i,j\}} \pi_{i'}(f) \circ \kappa_i(f) \circ 0 = 0 \end{aligned}$$

恒等写像 $I_K : K \to K$ を用いて $I_K = \sum_{i \in \varLambda_s} \sigma_i$ が成り立つことになるので, 恒等写像 $I_V : V \to V$ を用いて $I_V = \sum_{i \in \varLambda_s} \sigma_i(f)$ のようになる.

以上より, 線形写像 $\sigma_i(f) : V \to V$ の族 $\left\{ \sigma_i(f) \right\}_{i \in \varLambda_s}$ が与えられたとき, 次のことを満たし,

- $\forall i, j \in \varLambda_s$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $\sigma_j(f) \circ \sigma_i(f) = 0$ が成り立つ.
- $i \in \varLambda_s$ なるそれらの線形写像たち $\sigma_i(f)$ について, $\sum_{i \in \varLambda_s} \sigma_i(f) = I_V$ が成り立つ.

定理 2.1.10 よりしたがって, 次式が成り立つ.

$$V = \bigoplus_{i \in \varLambda_n} V\left(\sigma_i(f) \right)$$

このとき, $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned} \kappa_i \rho &= \kappa_i \prod_{i' \in \varLambda_s} \pi_{i'} \\ &= \kappa_i \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'} \pi_i \\ &= \sigma_i \pi_i \\ &= \pi_i \sigma_i \end{aligned}$$

次のようになり,

$$\begin{aligned} \pi_i(f) \circ \sigma_i(f) &= \kappa_i(f) \circ \rho(f) \\ &= \kappa_i(f) \circ 0 = 0 \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\sigma_i(f)(\mathbf{v}) \in \ker \pi_i(f)$ が成り立つので, $V\left(\sigma_i(f) \right) \subseteq \ker \pi_i(f)$ が成り立つ. 逆に, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \in \ker \pi_i(f)$ が成り立つ, 即ち, $\pi_i(f)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つかつ, $\forall j \in \varLambda_s$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, 次のようになることから,

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \kappa_j \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{j\}} \pi_{i'} \\ &= \kappa_j \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i,j\}} \pi_{i'} \pi_i \end{aligned}$$

次のようになり,

$$\begin{aligned} \sigma_j(f)(\mathbf{v}) &= \kappa_j(f) \circ \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i,j\}} \pi_{i'}(f) \circ \pi_i(f)(\mathbf{v}) \\ &= \kappa_j(f) \circ \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i,j\}} \pi_{i'}(f)\left(\pi_i(f)(\mathbf{v}) \right) \\ &= \kappa_j(f) \circ \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i,j\}} \pi_{i'}(f)(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\sum_{i' \in \varLambda_s} \sigma_{i'}(f) = I_V$ よりしたがって, 次のようになる.

$$\mathbf{v} = \left(\sum_{i' \in \varLambda_s} \sigma_{i'}(f) \right)(\mathbf{v})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i' \in \Lambda_s} \sigma_{i'}(f)(\mathbf{v}) \\
&= \sum_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \sigma_{i'}(f)(\mathbf{v}) + \sigma_i(f)(\mathbf{v}) \\
&= \sum_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \mathbf{0} + \sigma_i(f)(\mathbf{v}) \\
&= \sigma_i(f)(\mathbf{v}) \in V(\sigma_i(f))
\end{aligned}
$$

これにより, $\ker \pi_i(f) \subseteq V(\sigma_i(f))$ が成り立つ. 以上より, $V(\sigma_i(f)) = \ker \pi_i(f)$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$V = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} \ker \pi_i(f)$$

□

定理 2.4.15 (対角化条件)**.** 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線形写像 $f: V \to V$ が与えられたとき, 定理 2.3.1 よりその線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ がその線形写像 f の互いに異なる s つの固有値たち λ_i を用いて次式のように表されることができるので, そうするなら,

$$\varPhi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}, \quad \sum_{i \in \Lambda_s} n_i = n$$

次のことは同値

- その線形写像 f は対角化可能である.
- その vector 空間 V はその固有値 λ_i に対する固有空間 $W_f(\lambda_i)$ を用いて次式が成り立つ.

$$V = \bigoplus_{i \in \Lambda_s} W_f(\lambda_i)$$

- その固有値 λ_i に対する固有空間 $W_f(\lambda_i)$ の次元はその自然数 n_i に等しい, 即ち, 次式が成り立つ.

$$\dim W(\lambda_i) = n_i$$

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V, 線形写像 $f: V \to V$ が与えられたとき, 定理 2.3.1 よりその線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ がその線形写像 f の互いに異なる s つの固有値たち λ_i を用いて次式のように表されることができるので, そうするなら,

$$\varPhi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}, \quad \sum_{i \in \Lambda_s} n_i = n$$

その固有値 λ_i に対する固有空間 $W_f(\lambda_i)$ に属する $\dim W_f(\lambda_i)$ つの線形独立なその線形写像 f の固有 vectors が存在して, 定理 2.1.15 より和空間 $\sum_{i \in \Lambda_n} W_f(\lambda_i)$ は直和空間 $\bigoplus_{i \in \Lambda_n} W_f(\lambda_i)$ でもあるから, 定理 2.1.3 より次のようになり,

$$\dim \sum_{i \in \Lambda_s} W_f(\lambda_i) = \dim \bigoplus_{i \in \Lambda_s} W_f(\lambda_i) = \sum_{i \in \Lambda_s} \dim W_f(\lambda_i)$$

したがって, その vector 空間 V に属する $\sum_{i \in \Lambda_s} \dim W_f(\lambda_i)$ つの線形独立な固有 vectors が存在し, さらに, これらの vectors はその直和空間 $\bigoplus_{i \in \Lambda_s} W_f(\lambda_i)$ の基底でもある. ここで, 定理 2.2.12 よりその線形写像 f は対角

化可能であるならそのときに限り, その vector 空間 V の基底をなす vectors がいづれも固有 vector であるから, $V \subseteq \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f\left(\lambda_i\right)$ が成り立つことにより, したがって, 次のことは同値

- その線形写像 f は対角化可能である.
- その vector 空間 V はその固有値 λ_i に対する固有空間 $W_f\left(\lambda_i\right)$ を用いて次式が成り立つ.

$$V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f\left(\lambda_i\right)$$

また, 分解定理より $\dim W_f\left(\lambda_i\right) \leq \dim \widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right) = n_i$ が成り立つので, その vector 空間 V はその固有値 λ_i に対する固有空間 $W_f\left(\lambda_i\right)$ を用いて次式が成り立つなら,

$$V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f\left(\lambda_i\right)$$

次のようになる.

$$\begin{aligned} n &= \dim V \\ &= \dim \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f\left(\lambda_i\right) \\ &= \sum_{i \in \varLambda_s} \dim W_f\left(\lambda_i\right) \\ &\leq \sum_{i \in \varLambda_s} n_i = n \end{aligned}$$

したがって, $\sum_{i \in \varLambda_s} \dim W_f\left(\lambda_i\right) = \sum_{i \in \varLambda_s} n_i$ が成り立つ. そこで, $\exists i \in \varLambda_s$ に対し, $\dim W_f\left(\lambda_i\right) < n_i$ が成り立つとすれば, 次のようになるので,

$$\sum_{i \in \varLambda_s} n_i = \sum_{i \in \varLambda_s} \dim W_f\left(\lambda_i\right) < \sum_{i \in \varLambda_s} n_i$$

矛盾している. これにより, $\dim W_f\left(\lambda_i\right) = n_i$ が成り立つ. 逆に, その固有値 λ_i に対する固有空間 $W_f\left(\lambda_i\right)$ の次元がその自然数 n_i に等しいなら, 分解定理と定理 2.1.4 より次のようになることから,

$$\begin{aligned} \dim V = n &= \sum_{i \in \varLambda_s} n_i \\ &= \sum_{i \in \varLambda_s} \dim W_f\left(\lambda_i\right) \\ &= \dim \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f\left(\lambda_i\right) \end{aligned}$$

$V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f\left(\lambda_i\right)$ が成り立つ. 以上より, 次のことは同値である.

- その vector 空間 V はその固有値 λ_i に対する固有空間 $W_f\left(\lambda_i\right)$ を用いて次式が成り立つ.

$$V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f\left(\lambda_i\right)$$

- その固有値 λ_i に対する固有空間 $W_f\left(\lambda_i\right)$ の次元はその自然数 n_i に等しい, 即ち, 次式が成り立つ.

$$\dim W\left(\lambda_i\right) = n_i$$

□

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p247-248,265-275 ISBN978-4-00-029872-8

2.5 冪零変換

2.5.1 冪零変換

定義 2.5.1. 代数的閉体 K 上の vector 空間 V, 線形写像 $f:V\to V$ が与えられたとき, $\exists l\in\mathbb{N}$ に対し, $f^l=0$ が成り立つようなその線形写像 f をその vector 空間 V の冪零変換という.

定理 2.5.1. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V の線形写像 f が与えられたとき, その線形写像 f がその vector 空間 V の冪零変換であるならそのときに限り, その線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ が次式のように与えられる.

$$\varPhi_f=X^n$$

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V の線形写像 f が与えられたとき, その線形写像 f がその vector 空間 V の冪零変換であるなら, $\exists l\in\mathbb{N}$ に対し, $f^l=0$ が成り立つことになる. ここで, その線形写像 f の表現行列の 1 つを A とし, 線形写像 $L_A:K^n\to K^n;\mathbf{v}\mapsto A\mathbf{v}$ の任意の固有値 λ に対するその線形写像 L_A の固有 vector$\mathbf{w}$ が与えられれば, $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し, Frobenius の定理より $A^n\mathbf{w}=L_A^n(\mathbf{w})=\lambda^n\mathbf{w}$ が成り立つ. $n=l$ のとき, 定理 1.5.1 より線形同型写像 $\varphi:K^n\to V$ が存在して $L_A=\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi$ が成り立つので, 数学的帰納法により次のようになり,

$$\begin{aligned}
L_A^l(\mathbf{w})&=\left(\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi\right)^l(\mathbf{w})\\
&=\left(\varphi^{-1}\circ f^l\circ\varphi\right)(\mathbf{w})\\
&=\varphi^{-1}\left(f^l(\varphi(\mathbf{w}))\right)\\
&=\varphi^{-1}(\mathbf{0})=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

したがって, その行列 A は零行列である. これにより, $\lambda^l\mathbf{w}=\mathbf{0}$ が成り立つ. ここで, その vector$\mathbf{w}$ は固有 vector であるから, $\lambda=0$ が成り立つ. $L_A=\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi$ が成り立つことに注意すれば, したがって, その線形写像 L_A の固有多項式 $\varPhi_{L_A}$ は n 次単位行列 I_n を用いて定理 2.2.5, 定理 2.2.9 より次式のように与えられる.

$$\varPhi_f=\varPhi_{L_A}=X^n$$

逆に, その線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ が次式のように与えられたらば,

$$\varPhi_f=X^n$$

Hamilton-Cayley の定理より次のようになる.

$$\varPhi_f(f)=f^n=0$$

これにより, その線形写像 f がその vector 空間 V の冪零変換である. □

定義 2.5.2. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V の冪零変換 f が与えられたとき, $f^l=0$ なる自然数のうちもっとも小さいものをその冪零変換 f の指数という.

2.5.2 Halmos の定理

定理 2.5.2 (Halmos の定理)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の指数 q の冪零変換 f が与えられたとき, $f^{q-1}\left(\mathbf{v}_*\right) \neq \mathbf{0}$ なる vector$\mathbf{v}_*$ を用いれば, 次のことが成り立つ.

- この族 $\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right\}_{i \in \Lambda_q}$ は線形独立である.
- 部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right\}_{i \in \Lambda_q}$ は f-不変である.
- $V = \mathrm{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right\}_{i \in \Lambda_q} \oplus W$ なるその vector 空間 V の f-不変な部分 vector 空間 W が存在する.

この定理を Halmos の定理という[*8].

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の指数 q の冪零変換 f が与えられたとき, $f^{q-1}\left(\mathbf{v}_*\right) \neq 0$ なる vector$\mathbf{v}_*$ を用いて $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_q} c_i f^{i-1}\left(\mathbf{v}_*\right) = \mathbf{0}$ とおかれれば, したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
f^{q-1}\left(\sum_{i \in \Lambda_q} c_i f^{i-1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right) &= \sum_{i \in \Lambda_q} c_i f^{q+i-2}\left(\mathbf{v}_*\right)\\
&= \sum_{i \in \Lambda_{q-1} \cup \{0\}} c_{i+1} f^{q+i-1}\left(\mathbf{v}_*\right)\\
&= c_1 f^{q-1}\left(\mathbf{v}_*\right) + \sum_{i \in \Lambda_{q-1}} c_i f^{i-1} \circ f^q\left(\mathbf{v}_*\right)\\
&= c_1 f^{q-1}\left(\mathbf{v}_*\right) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

ここで, $f^{q-1}\left(\mathbf{v}_*\right) \neq \mathbf{0}$ が成り立つので, $c_1 = 0$ が成り立つ. $\forall i \in \Lambda_k$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つとすれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
f^{q-(k+1)}\left(\sum_{i \in \Lambda_q} c_i f^{i-1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right) &= f^{q-(k+1)}\left(\sum_{i \in \Lambda_q \setminus \Lambda_k} c_i f^{i-1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right)\\
&= \sum_{i \in \Lambda_q \setminus \Lambda_k} c_i f^{q+i-k-2}\left(\mathbf{v}_*\right)\\
&= \sum_{i \in \Lambda_{q-(k+1)} \cup \{0\}} c_{i+k+1} f^{q+i-1}\left(\mathbf{v}_*\right)\\
&= c_{k+1} f^{q-1}\left(\mathbf{v}_*\right) + \sum_{i \in \Lambda_{q-(k+1)}} c_{i+k+1} f^{i-1} \circ f^q\left(\mathbf{v}_*\right)\\
&= c_{k+1} f^{q-1}\left(\mathbf{v}_*\right) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

ここで, $f^{q-1}\left(\mathbf{v}_*\right) \neq \mathbf{0}$ が成り立つので, $c_{k+1} = 0$ が成り立つ. 以上より, 数学的帰納法により $\forall i \in \Lambda_q$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ. ゆえに, この族 $\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right\}_{i \in \Lambda_q}$ は線形独立である.

$f^{q-1}\left(\mathbf{v}_*\right) \neq 0$ なる vector$\mathbf{v}_*$ を用いた部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right\}_{i \in \Lambda_q}$ が与えられたとき,

[*8] 要出典.

$\forall \sum_{i \in \Lambda_q} k_i f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \in \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_q}$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i \in \Lambda_q} k_i f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right) &= \sum_{i \in \Lambda_q} k_i f^i(\mathbf{v}_*) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_{q-1}} k_i f^i(\mathbf{v}_*) + k_q f^q(\mathbf{v}_*) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_{q-1}} k_i f^i(\mathbf{v}_*) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_q \setminus \{1\}} k_{i-1} f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \in \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_q} \end{aligned}$$

その部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_q}$ は f-不変である.

$q = 1$ のとき, その線形写像 f は零変換であるから, その部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{ \mathbf{v}_* \right\}$ の補空間 W が定理 2.1.11 より存在する. このとき, $\forall \mathbf{v} \in W$ に対し, $f(\mathbf{v}) = 0(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \in W$ が成り立つので, その部分 vector 空間 W は f-不変である.

$q = k$ のとき, 示すべきことが成り立つと仮定すると, $q = k + 1$ のとき, 定理 2.4.8 よりその値域 $V(f)$ は f-不変で, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $f^{k+1}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つので, $\forall f(\mathbf{v}) \in V(f)$ に対し, $(f|V(f))^k \circ f(\mathbf{v}) = f^k \circ f(\mathbf{v}) = f^{k+1}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つことによりその線形写像 $f|V(f)$ は指数 k の冪零変換である. ここで, これを $f' : V(f) \to V(f)$ とおき, さらに, $f(\mathbf{v}_*) = \mathbf{w}_*$ とおき, 次式のように集合 U が定義されると,

$$U = V\left(f|\mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_{k+1}} \right) \subseteq V(f)$$

もちろん, $\mathbf{w}_* = f(\mathbf{v}_*) \in V(f)$ が成り立つかつ, 仮定より次のようになるかつ,

$$\begin{aligned} f^{k-1}(\mathbf{w}_*) &= f^{k-1}(f(\mathbf{v}_*)) \\ &= f^k(\mathbf{v}_*) \\ &= f^{k+1-1}(\mathbf{v}_*) \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \in U$ が成り立つならそのときに限り, ある vector$\mathbf{w}$ がその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_{k+1}}$ に存在して, $\mathbf{v} = f(\mathbf{w})$ が成り立つ. そこで, $\mathbf{w} \in \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_{k+1}}$ より $\mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_{k+1}} k'_i f^{i-1}(\mathbf{v}_*)$ とおくことができて次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= f\left(\sum_{i \in \Lambda_{k+1}} k'_i f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_{k+1}} k'_i f^i(\mathbf{v}_*) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_k} k'_i f^i(\mathbf{v}_*) + k'_{k+1} f^{k+1}(\mathbf{v}_*) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_k} k'_i f^i(\mathbf{v}_*) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_k} k'_i f^{i-1}(f(\mathbf{v}_*)) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i \in \Lambda_k} k'_i f^{i-1}(\mathbf{w}_*)$$

ゆえに, $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{w}_*) \right\}_{i \in \Lambda_k}$ が成り立つ．これにより, $U \subseteq \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{w}_*) \right\}_{i \in \Lambda_k}$ が得られる．逆も同様にして示され, $U = \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{w}_*) \right\}_{i \in \Lambda_k}$ が成り立つ．仮定より $V(f) = U \oplus W'$ なるその値域 $V(f)$ の f-不変な部分 vector 空間 W' が存在する．このとき, $\forall \mathbf{v} \in V(f)$ に対し, $\mathbf{v} \in U$ が成り立つとすれば, $U = \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{w}_*) \right\}_{i \in \Lambda_k}$ より $\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_k} k_i f^{i-1}(\mathbf{w}_*)$ とおいて次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \Lambda_k} k_i f^{i-1}(\mathbf{w}_*) \in U &= \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{w}_*) \right\}_{i \in \Lambda_k} \\
&\subseteq \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{w}_*) \right\}_{i \in \Lambda_k \cup \{0\}} \\
&= \mathrm{span}\left\{ f^{i}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_k \cup \{0\}} \\
&= \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_{k+1}}
\end{aligned}$$

次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \Lambda_k} k_i f^{i-1}(\mathbf{w}_*) &= \sum_{i \in \Lambda_k} k_i f^{i}(\mathbf{v}_*) \\
&= f\left(\sum_{i \in \Lambda_k} k_i f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right) \\
&= f\left(\sum_{i \in \Lambda_{k-1} \cup \{0\}} k_{i+1} f^{i}(\mathbf{v}_*) \right) \in V(f)
\end{aligned}$$

次式が成り立つ．

$$U \subseteq \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_{k+1}} \cap V(f)$$

逆に, $\forall \mathbf{v} \in V(f)$ に対し, $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_{k+1}} \cap V(f)$ が成り立つとすれば, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_{k+1}} k_i f^{i-1}(\mathbf{v}_*)$ とおいて $1 \leq i-1$ が成り立つことになるので, $2 \leq i$ が成り立ち, このとき, $k_1 = 0$ が成り立つ．したがって, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \Lambda_{k+1}} k_i f^{i-1}(\mathbf{v}_*) &= \sum_{i \in \Lambda_k} k_{i+1} f^{i}(\mathbf{v}_*) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_k} k_{i+1} f^{i-1}(\mathbf{w}_*) \in \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{w}_*) \right\}_{i \in \Lambda_k} = U
\end{aligned}$$

次式が成り立つ．

$$U \supseteq \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_{k+1}} \cap V(f)$$

以上, $U = \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_{k+1}} \cap V(f)$ が成り立つかつ, 定理 2.2.2 より $U \cap W' = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つので, 次のようになる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_{k+1}} \cap W' &= \mathrm{span}\left\{ f^{i-1}(\mathbf{v}_*) \right\}_{i \in \Lambda_{k+1}} \cap V(f) \cap W' \\
&= U \cap W' = \{\mathbf{0}\}
\end{aligned}$$

ここで, $W' \subseteq V(f)$ が成り立つことにより, 逆対応 f^{-1} の値域 $V\left(f^{-1}|W'\right)$ について, $\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \in W'$ が成り立つので, $\mathbf{0} \in V\left(f^{-1}|W'\right)$ が成り立つかつ, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V\left(f^{-1}|W'\right)$ に対し, $f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \in W'$ が成り立つので, $\forall k, l \in K$ に対し, $f(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}) = kf(\mathbf{v}) + lf(\mathbf{w}) \in W'$ が成り立ち, したがって, $k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \in V\left(f^{-1}|W'\right)$ が成り立つ. ゆえに, その値域 $V\left(f^{-1}|W'\right)$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間である.

ここで, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $V(f) = U \oplus W'$ が成り立つので, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \oplus \mathbf{w}$ とおくと, その集合 U の定義より $\mathbf{u} = f(\mathbf{u}')$ なる元 $\mathbf{u}'$ がその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}}$ に存在することになり, したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \mathbf{u} + \mathbf{w} - \mathbf{u}\\ &= f(\mathbf{v}) - \mathbf{u}\\ &= f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u}')\\ &= f(\mathbf{v} - \mathbf{u}')\end{aligned}$$

これにより, $\mathbf{v} - \mathbf{u}' \in V\left(f^{-1}|W'\right)$ が成り立ち, したがって, $V = \mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} + V\left(f^{-1}|W'\right)$ が得られる.

ここで, その部分 vector 空間 W' は f-不変であるから, $\forall \mathbf{w} \in W'$ に対し, $\mathbf{w} \in V\left(f^{-1}|W'\right)$ が成り立つので, $W' \subseteq V\left(f^{-1}|W'\right)$ が成り立つ. これにより, 部分 vector 空間たち $\mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} \cap V\left(f^{-1}|W'\right)$, W' はいづれもその部分 vector 空間 $V\left(f^{-1}|W'\right)$ の部分 vector 空間であるが, 上記の議論により $\mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} \cap W' = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つので, 定理 2.1.2 よりこれらの部分 vector 空間たち $\mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} \cap V\left(f^{-1}|W'\right)$, W' の和空間は直和空間である. 定理 2.1.11 よりその部分 vector 空間 $V\left(f^{-1}|W'\right)$ の直和空間 $\left(\mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} \cap V\left(f^{-1}|W'\right)\right) \oplus W'$ の補空間を W'' とおくと, 次式が成り立つ.

$$V\left(f^{-1}|W'\right) = \left(\mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} \cap V\left(f^{-1}|W'\right)\right) \oplus W' \oplus W''$$

ここで, $W = W' \oplus W''$ とおかれると, 定理 2.1.2 より次式が成り立ち,

$$\mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} \cap V\left(f^{-1}|W'\right) \cap W = \{\mathbf{0}\}$$

ここで, $W \subseteq V\left(f^{-1}|W'\right)$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} \cap W = \{\mathbf{0}\}$$

次に, $V = \mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} + V\left(f^{-1}|W'\right)$ が成り立つことにより, 次のようになる.

$$\begin{aligned}V &= \mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} + V\left(f^{-1}|W'\right)\\ &= \mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} + \left(\mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} \cap V\left(f^{-1}|W'\right)\right) + W\\ &\subseteq \mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} + \mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} + W\\ &= \mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} + W \subseteq V\end{aligned}$$

ゆえに, $V = \mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} + W$ が成り立つ. ここで, 上記の議論により $\mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} \cap W = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つので, 定理 2.1.2 より $V = \mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_*)\right\}_{i \in \varLambda_{k+1}} \oplus W$ が成り立つ.

ここで, $\forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $W \subseteq V\left(f^{-1}|W'\right)$ が成り立つので, $\mathbf{w} \in V\left(f^{-1}|W'\right)$ が成り立つ. このとき, $f(\mathbf{w}) \in W' \subseteq W' \oplus W'' = W$ が成り立つので, その部分 vector 空間 W は f-不変である. 以上より, $V = \mathrm{span}\left\{f^{i-1}(\mathbf{v}_0)\right\}_{i \in \varLambda_q} \oplus W$ なるその vector 空間 V の f-不変な部分 vector 空間 W が存在する. □

2.5.3 冪零変換の不変系

定理 2.5.3 (冪零変換の不変系の存在性)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の指数 q の冪零変換 f が与えられたとき, 次のことを満たすその vector 空間 V の元の列 $(\mathbf{v}_i)_{i\in\varLambda_r}$ と自然数の列 $(q_i)_{i\in\varLambda_r}$ が存在する.

- $q_1=q$ が成り立つかつ, $\forall i\in\varLambda_{r-1}$ に対し, $q_{i+1}\leq q_i$ が成り立つ.
- $\displaystyle\sum_{i\in\varLambda_r}q_i=n$ が成り立つ.
- 次式のような n つの vectors の組 $\mathcal{B}$ はその vector 空間 V の基底をなす.

$$\mathcal{B}=\left\langle\begin{matrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_r\\ f\left(\mathbf{v}_1\right) & f\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f\left(\mathbf{v}_r\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f^{q_1-1}\left(\mathbf{v}_1\right) & f^{q_2-1}\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f^{q_r-1}\left(\mathbf{v}_r\right)\end{matrix}\right\rangle$$

- $\forall i\in\varLambda_r$ に対し, $f^{q_i}\left(\mathbf{v}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立つ.

定義 2.5.3. このような体 K 上の n 次元 vector 空間 V における冪零変換 $f:V\rightarrow V$ に対する自然数の列 $(q_i)_{i\in\varLambda_r}$ をその冪零変換 f の不変系という.

実は後に述べるように任意の冪零変換 f に対し, これの不変系が一意的に決まる.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の指数 q の冪零変換 f が与えられたとき, $V=W_1$, $q=q_1$ とおくと, $f^{q_1-1}\left(\mathbf{v}_1\right)\neq 0$ なる vector$\mathbf{v}_1$ を用いて Halmos の定理より次式のような f-不変な部分 vector 空間 W_2 が存在して $W_2\subset W_1$ が成り立ち, さらに, その族 $\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_1\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q_1}}$ は線形独立である.

$$W_1=\mathrm{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_1\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q_1}}\oplus W_2$$

ここで, 線形写像 $f|W_2$ が考えられると, $(f|W_2)^{q_1}=0$ が成り立つので, その線形写像 $f|W_2$ は冪零変換であり, これの指数が q_2 とおかれると, $q_2\leq q_1$ が成り立つ. f-不変なその vector 空間 V の部分 vector 空間 W_k が存在して冪零変換 $f|W_k$ の指数が q_k とおかれると, $(f|W_k)^{q_k-1}\left(\mathbf{v}_k\right)\neq 0$ なる vector$\mathbf{v}_k$ を用いて Halmos の定理より次式のような f-不変な部分 vector 空間 W_{k+1} が存在して $W_{k+1}\subset W_k$ が成り立ち, さらに, その族 $\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_{k+1}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q_{k+1}}}$ は線形独立である.

$$W_k=\mathrm{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_k\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q_k}}\oplus W_{k+1}$$

ここで, 線形写像 $f|W_{k+1}$ が考えられると, $(f|W_{k+1})^{q_k}=0$ が成り立つので, その線形写像 $f|W_{k+1}$ は冪零変換であり, これの指数が q_{k+1} とおかれると, $q_{k+1}\leq q_k$ が成り立つ. 以上, 帰納的にそれらの部分 vector 空間たち W_i が得られる. ここで, 任意の自然数 i に対し, $\dim W_{i+1}<\dim W_i$ が成り立つので, $\dim W_i=0$ なる自然数 i が存在する. これのうち最も小さいものを r とすると, 定理 2.1.7 と Halmos の定理より次のようになる.

$$V=\bigoplus_{j\in\varLambda_r}\mathrm{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_j\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q_j}}=\bigoplus_{j\in\varLambda_r}\bigoplus_{i\in\varLambda_{q_j}}\mathrm{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_j\right)\right\}$$

ここで, 定理 2.1.7 より次式のような vectors の組 $\mathcal{B}$ はその vector 空間 V の基底をなす.

$$\mathcal{B} = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_r \\ f\left(\mathbf{v}_1\right) & f\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f\left(\mathbf{v}_r\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{q_1-1}\left(\mathbf{v}_1\right) & f^{q_2-1}\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f^{q_r-1}\left(\mathbf{v}_r\right) \end{matrix} \right\rangle$$

さらに, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} n &= \dim V \\ &= \sum_{j \in \Lambda_r} \sum_{i \in \Lambda_{q_j}} \dim \operatorname{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_j\right)\right\} \\ &= \sum_{j \in \Lambda_r} \sum_{i \in \Lambda_{q_j}} 1 \\ &= \sum_{j \in \Lambda_r} q_j = \sum_{i \in \Lambda_r} q_i \end{aligned}$$

以上より, 次のことを満たすその vector 空間 V の元の列 $\left(\mathbf{v}_i\right)_{i \in \Lambda_r}$ と自然数の列 $\left(q_i\right)_{i \in \Lambda_r}$ が存在する.

- $q_1 = q$ が成り立つかつ, $\forall i \in \Lambda_{r-1}$ に対し, $q_{i+1} \leq q_i$ が成り立つ.
- $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_r} q_i = n$ が成り立つ.
- 次式のような n つの vectors の組 $\mathcal{B}$ はその vector 空間 V の基底をなす.

$$\mathcal{B} = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_r \\ f\left(\mathbf{v}_1\right) & f\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f\left(\mathbf{v}_r\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{q_1-1}\left(\mathbf{v}_1\right) & f^{q_2-1}\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f^{q_r-1}\left(\mathbf{v}_r\right) \end{matrix} \right\rangle$$

- $\forall i \in \Lambda_r$ に対し, $f^{q_i}\left(\mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0}$ が成り立つ.

□

定理 2.5.4. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の指数 q の冪零変換 f が与えられたとき, $I_V = f^0$ とすれば, $\forall i \in \Lambda_{q-1}$ に対し, $\operatorname{nullity} f^i < \operatorname{nullity} f^{i+1}$ が成り立つかつ, $0 < \operatorname{nullity} f$ かつ $\operatorname{nullity} f^q = n$ も成り立つ. ここで, $\forall i \in \Lambda_{q-1}$ に対し, $\operatorname{nullity} f^{i+1} - \operatorname{nullity} f^i \leq \operatorname{nullity} f^i - \operatorname{nullity} f^{i-1}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の指数 q の冪零変換 f が与えられたとき, $\forall i \in \Lambda_{q-1} \forall \mathbf{v} \in \ker f^i$ に対し, $f^i\left(\mathbf{v}\right) = \mathbf{0}$ が成り立つことから, $f^{i+1}\left(\mathbf{v}\right) = f \circ f^i\left(\mathbf{v}\right) = f\left(\mathbf{0}\right) = \mathbf{0}$ も成り立つので, $\ker f^i \subseteq \ker f^{i+1}$ が成り立つ. ここで, 定理 2.5.3 より次のことを満たすその vector 空間 V の元の列 $\left(\mathbf{v}_i\right)_{i \in \Lambda_r}$ と自然数の列 $\left(q_i\right)_{i \in \Lambda_r}$ が存在する.

- $q_1 = q$ が成り立つかつ, $\forall i \in \Lambda_{r-1}$ に対し, $q_{i+1} \leq q_i$ が成り立つ.
- $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_r} q_i = n$ が成り立つ.
- 次式のような n つの vectors の組 $\mathcal{B}$ はその vector 空間 V の基底をなす.

$$\mathcal{B} = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_r \\ f\left(\mathbf{v}_1\right) & f\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f\left(\mathbf{v}_r\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{q_1-1}\left(\mathbf{v}_1\right) & f^{q_2-1}\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f^{q_r-1}\left(\mathbf{v}_r\right) \end{matrix} \right\rangle$$

- $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $f^{q_i}\left(\mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0}$ が成り立つ.

このとき, 次の表のように考えられれば, 明らかに陰影部分はその核 $\ker f^i$ の元々を表し, 定理 2.5.3 よりこれらは線形独立でもある.

	1	2	$\cdots$	r
q_1	$\mathbf{v}_1$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$i+1$	$f^{q_1-(i+1)}\left(\mathbf{v}_1\right)$	$f^{q_2-(i+1)}\left(\mathbf{v}_2\right)$	$\cdots$	
i	$f^{q_1-i}\left(\mathbf{v}_1\right)$	$f^{q_2-i}\left(\mathbf{v}_2\right)$	$\cdots$	
$i-1$	$f^{q_1-(i-1)}\left(\mathbf{v}_1\right)$	$f^{q_2-(i-1)}\left(\mathbf{v}_2\right)$	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1	$f^{q_1-1}\left(\mathbf{v}_1\right)$	$f^{q_2-1}\left(\mathbf{v}_2\right)$	$\cdots$	$f^{q_r-1}\left(\mathbf{v}_r\right)$

そこで, $\forall j \in \varLambda_r$ に対し, $i+1 \leq q_j$ が成り立つなら, vector$f^{q_j-(i+1)}\left(\mathbf{v}_j\right)$ はその vector 空間 V に存在して, 仮定より $f^{i+1}\left(f^{q_j-(i+1)}\left(\mathbf{v}_j\right)\right) = f^{i+1} \circ f^{q_j-(i+1)}\left(\mathbf{v}_j\right) = f^{q_j}\left(\mathbf{v}_j\right) = \mathbf{0}$ が成り立つので, $f^{q_j-(i+1)}\left(\mathbf{v}_j\right) \in \ker f^{i+1}$ が成り立つ. 一方で, その組 $\mathcal{B}$ はその vector 空間 V の基底をなすので, $f^{q_j-1}\left(\mathbf{v}_j\right) \neq \mathbf{0}$ が成り立つことに注意すれば, $f^i \circ f^{q_j-(i+1)}\left(\mathbf{v}_j\right) = f^{q_j-1}\left(\mathbf{v}_j\right) \neq \mathbf{0}$ が成り立つので, $f^{q_j-(i+1)}\left(\mathbf{v}_j\right) \in \ker f^i$ が成り立たない. これにより, $\ker f^i \subset \ker f^{i+1}$ が成り立ち, したがって, $\mathrm{nullity} f^i < \mathrm{nullity} f^{i+1}$ が成り立つ. 以上より, 次の表のように考えられれば, 陰影部分はその核 $\ker f^{i+1}$ の元々であるかつ, その核 $\ker f^i$ の元々でないものを表す.

	1	2	$\cdots$	r
q_1	$\mathbf{v}_1$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$i+1$	$f^{q_1-(i+1)}\left(\mathbf{v}_1\right)$	$f^{q_2-(i+1)}\left(\mathbf{v}_2\right)$	$\cdots$	
i	$f^{q_1-i}\left(\mathbf{v}_1\right)$	$f^{q_2-i}\left(\mathbf{v}_2\right)$	$\cdots$	
$i-1$	$f^{q_1-(i-1)}\left(\mathbf{v}_1\right)$	$f^{q_2-(i-1)}\left(\mathbf{v}_2\right)$	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1	$f^{q_1-1}\left(\mathbf{v}_1\right)$	$f^{q_2-1}\left(\mathbf{v}_2\right)$	$\cdots$	$f^{q_r-1}\left(\mathbf{v}_r\right)$

さらに, その線形写像 f が全単射であるとすれば, $V(f) = V$ が成り立つことにより, $V\left(f^q\right) = V$ が成り立つが, その線形写像 f は指数 q の冪零変換なので, $V\left(f^q\right) = \{\mathbf{0}\}$ でないことになり, したがって, これは矛盾している. ゆえに, その線形写像 f は全単射でないことになる. したがって, 定理 1.2.15 より $0 < \mathrm{nullity} f$ が成り立つ. また, 先ほどの議論により $\mathrm{rank} f^q = 0$ が成り立つので, 次元公式より $\mathrm{nullity} f^q = \dim V = n$ が成り立つ.

ここで, $I_V = f^0$ とすれば, その線形写像 I_V は全単射であるから, 定理??より $0 = \mathrm{nullity} I_V < \mathrm{nullity} f$ が成り立つ. このとき, $\forall i \in \varLambda_{q-1}$ に対し, $i-1 \leq q_j$, $i \leq q_j$, $i+1 \leq q_j$ なる自然数たち j が必ず存在し[*9] これらのうち最も小さいものがそれぞれ j', j'', j''' とおかれると, もちろん, $j' \geq j'' \geq j'''$ が成り立つので, $\forall i \in \varLambda_{q-1}$ に対し, 上記の議論と同じように, $\forall j \in \varLambda_r$ に対し, $j \leq j''$ が成り立つなら, vectors$f^{q_j-(i-1)}(\mathbf{v}_j)$ がその核 $\ker f^i$ の元々であるかつ, その核 $\ker f^{i-1}$ の元々でないことになり, この個数 j'' は, 定理 2.5.3 よりこれらの vectors$f^{q_j-(i-1)}(\mathbf{v}_j)$ は線形独立であるから, 自然数 $\mathrm{nullity} f^i - \mathrm{nullity} f^{i-1}$ に等しい即ち, 次の表の陰影部分がそれらの vectors$f^{q_j-(i-1)}(\mathbf{v}_j)$ にあたる.

	1	$\cdots$	j'''	$\cdots$	j''	$\cdots$	j'	$\cdots$	r
q_1	$\mathbf{v}_1$								
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$							
$i+1$	$f^{q_1-(i+1)}(\mathbf{v}_1)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-(i+1)}(\mathbf{v}_{j'''})$						
i	$f^{q_1-i}(\mathbf{v}_1)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-i}(\mathbf{v}_{j'''})$	$\cdots$	$f^{q_{j''}-i}(\mathbf{v}_{j''})$				
$i-1$	$f^{q_1-(i-1)}(\mathbf{v}_1)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-(i-1)}(\mathbf{v}_{j'''})$	$\cdots$	$f^{q_{j''}-(i-1)}(\mathbf{v}_{j''})$	$\cdots$	$f^{q_{j'}-(i-1)}(\mathbf{v}_{j'})$		
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1	$f^{q_1-1}(\mathbf{v}_1)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-1}(\mathbf{v}_{j'''})$	$\cdots$	$f^{q_{j''}-1}(\mathbf{v}_{j''})$	$\cdots$	$f^{q_{j'}-1}(\mathbf{v}_{j'})$	$\cdots$	$f^{q_r-1}(\mathbf{v}_r)$

同様にして, この個数 j''' は自然数 $\dim\ker f^{i+1} - \dim\ker f^i$ に等しい, 即ち, 次の表の陰影部分がその核 $\ker f^i$ の元々であるかつ, その核 $\ker f^{i-1}$ の元々でない vectors である.

	1	$\cdots$	j'''	$\cdots$	j''	$\cdots$	j'	$\cdots$	r
q_1	$\mathbf{v}_1$								
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$							
$i+1$	$f^{q_1-(i+1)}(\mathbf{v}_1)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-(i+1)}(\mathbf{v}_{j'''})$						
i	$f^{q_1-i}(\mathbf{v}_1)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-i}(\mathbf{v}_{j'''})$	$\cdots$	$f^{q_{j''}-i}(\mathbf{v}_{j''})$				
$i-1$	$f^{q_1-(i-1)}(\mathbf{v}_1)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-(i-1)}(\mathbf{v}_{j'''})$	$\cdots$	$f^{q_{j''}-(i-1)}(\mathbf{v}_{j''})$	$\cdots$	$f^{q_{j'}-(i-1)}(\mathbf{v}_{j'})$		
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1	$f^{q_1-1}(\mathbf{v}_1)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-1}(\mathbf{v}_{j'''})$	$\cdots$	$f^{q_{j''}-1}(\mathbf{v}_{j''})$	$\cdots$	$f^{q_{j'}-1}(\mathbf{v}_{j'})$	$\cdots$	$f^{q_r-1}(\mathbf{v}_r)$

以上より, $\forall i \in \varLambda_{q-1}$ に対し, $\dim\ker f^{i+1} - \dim\ker f^i \leq \dim\ker f^i - \dim\ker f^{i-1}$ が成り立つ. □

定理 2.5.5. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の指数 q の冪零変換 f が与えられたとき, 次式のように自然数 ε_j が, $\forall j \in \varLambda_q$ に対し, 定義されると,

$$\varepsilon_j = 2\mathrm{nullity} f^j - \mathrm{nullity} f^{j+1} - \mathrm{nullity} f^{j-1}$$

その冪零変換 f の不変系 $(q_i)_{i\in\varLambda_r}$ の中に含まれる自然数 j の個数は先ほどの自然数 ε_j に等しい.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の指数 q の冪零変換 f が与えられたとき, 次式のように自然数 ε_j が, $\forall j \in \varLambda_q$ に対し, 定義されると,

$$\varepsilon_j = 2\mathrm{nullity} f^j - \mathrm{nullity} f^{j+1} - \mathrm{nullity} f^{j-1}$$

[*9] 例えば, 自然数 1 が挙げられます.

その冪零変換 f の不変系 $\left(q_{i} \right)_{i \in \varLambda_{r}}$ の中に含まれる自然数 j において, 定理 2.5.4 の証明より $j \leq q_{j}$, $j+1 \leq q_{j}$ なる自然数たち j のうち最も小さいものがそれぞれ j'', j''' とおかれると, 仮定より $j'' \leq j'''$ が成り立ち, このとき, $j'' = \dim\ker f^{j} - \dim\ker f^{j-1}$, $j''' = \dim\ker f^{j+1} - \dim\ker f^{j}$ が成り立ち, さらに, それらの自然数たち j'', j''' がそれぞれその核 $\ker f^{i}$ の元々であるかつ, その核 $\ker f^{i-1}$ の元々でない vectors, その核 $\ker f^{i+1}$ の元々であるかつ, その核 $\ker f^{i}$ の元々でない vectors の個数に等しい.

$j = q_{j''}$ のとき, 次の表のように考えれば,

	1	$\cdots$	j'''	$\cdots$	j''	$\cdots$	r
q_{1}	$\mathbf{v}_{1}$						
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$					
$j+1$	$f^{q_{1}-(j+1)}\left(\mathbf{v}_{1} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-(j+1)}\left(\mathbf{v}_{j'''} \right)$				
j	$f^{q_{1}-j}\left(\mathbf{v}_{1} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-j}\left(\mathbf{v}_{j'''} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{j''}-j}\left(\mathbf{v}_{j''} \right)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1	$f^{q_{1}-1}\left(\mathbf{v}_{1} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-1}\left(\mathbf{v}_{j'''} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{j''}-1}\left(\mathbf{v}_{j''} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{r}-1}\left(\mathbf{v}_{r} \right)$

$j+1 = q_{j''}+1 > q_{j''}$ より $j'' > j'''$ が成り立ち, その自然数 $q_{j''}$ の個数は $j'' - j'''$ に等しい. したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
j'' - j''' &= \left(\mathrm{nullity} f^{j} - \mathrm{nullity} f^{j-1} \right) - \left(\mathrm{nullity} f^{j+1} - \mathrm{nullity} f^{j} \right)\\
&= 2\mathrm{nullity} f^{j} - \mathrm{nullity} f^{j+1} - \mathrm{nullity} f^{j-1} = \varepsilon_{j}
\end{aligned}$$

$j < q_{j''}$ のとき, 次の表のように考えれば,

	1	$\cdots$	j'''	$\cdots$	j''	$\cdots$	r
q_{1}	$\mathbf{v}_{1}$						
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$					
$j+1$	$f^{q_{1}-(j+1)}\left(\mathbf{v}_{1} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-(j+1)}\left(\mathbf{v}_{j'''} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{j''}-(j+1)}\left(\mathbf{v}_{j''} \right)$		
j	$f^{q_{1}-j}\left(\mathbf{v}_{1} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-j}\left(\mathbf{v}_{j'''} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{j''}-j}\left(\mathbf{v}_{j''} \right)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1	$f^{q_{1}-1}\left(\mathbf{v}_{1} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{j'''}-1}\left(\mathbf{v}_{j'''} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{j''}-1}\left(\mathbf{v}_{j''} \right)$	$\cdots$	$f^{q_{r}-1}\left(\mathbf{v}_{r} \right)$

$\forall i \in \varLambda_{r}$ に対し, $i > j''$ が成り立つとき, 仮定より $i \leq j = q_{j''''}$ なる自然数たち j'''' のうち最も小さいものが存在しないので, 自然数の列 $\left(q_{i} \right)_{i \in \varLambda_{r}}$ の中に含まれる自然数 j の個数は 0 である. このとき, $j+1 \leq q_{j''}$ より $j'' = j'''$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
0 &= j'' - j'''\\
&= \left(\mathrm{nullity} f^{j} - \mathrm{nullity} f^{j-1} \right) - \left(\mathrm{nullity} f^{j+1} - \mathrm{nullity} f^{j} \right)\\
&= 2\mathrm{nullity} f^{j} - \mathrm{nullity} f^{j+1} - \mathrm{nullity} f^{j-1} = \varepsilon_{j}
\end{aligned}$$

いづれにしても, その冪零変換 f の不変系 $\left(q_{i} \right)_{i \in \varLambda_{r}}$ の中に含まれる自然数 j の個数は先ほどの自然数 ε_{j} に等しい. □

定理 2.5.6 (冪零変換の不変系の一意性)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の指数 q の冪零変換 f が与えられたとき, その冪零変換 f の不変系 $\left(q_i\right)_{i\in\varLambda_r}$ はその冪零変換 f に対し一意的に決まる.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の指数 q の冪零変換 f が与えられたとき, 定理 2.5.5 における自然数たち ε_j は与えられた冪零変換 f に対し, 一意的に決まる. ここで, このような自然数たち ε_j のうち 0 でないもののうち, 大きいもの ε_j から ε_j 回だけ繰り返して自然数をふると, 自然数の列 $\left(q_i\right)_{i\in\varLambda_r}$ が構成される. このとき, 定理 2.5.5 よりこれがその冪零変換 f の不変系となる. □

定理 2.5.7. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V における冪零変換 $f:V\rightarrow V$ の不変系 $\left(q_i\right)_{i\in\varLambda_r}$ における添数集合 $\varLambda_r$ の元の個数 r はその核 $\ker f$ の次元に等しい, 即ち, 次式が成り立つ.

$$r=\mathrm{nullity}f$$

特に, その冪零変換 f の指数が n であるならそのときに限り, $\mathrm{nullity}f=1$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V における冪零変換 $f:V\rightarrow V$ の不変系 $\left(q_i\right)_{i\in\varLambda_r}$ における添数集合 $\varLambda_r$ の元の個数 r は定理 2.5.3 よりその vector 空間 V の元の列 $\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_r}$ を用いて次式のような n つの vectors の組 $\mathcal{B}$ はその vector 空間 V の基底をなすかつ,

$$\mathcal{B}=\left\langle\begin{matrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_r\\ f\left(\mathbf{v}_1\right) & f\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f\left(\mathbf{v}_r\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f^{q_1-1}\left(\mathbf{v}_1\right) & f^{q_2-1}\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f^{q_r-1}\left(\mathbf{v}_r\right)\end{matrix}\right\rangle$$

$\forall i\in\varLambda_r$ に対し, $f^{q_i}\left(\mathbf{v}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立つ. ここで, $\forall i\in\varLambda_r$ に対し, $f^{q_i}\left(\mathbf{v}_i\right)=f\circ f^{q_i-1}\left(\mathbf{v}_i\right)=f\left(f^{q_i-1}\left(\mathbf{v}_i\right)\right)=\mathbf{0}$ が成り立つので, $f^{q_i-1}\left(\mathbf{v}_i\right)\in\ker f$ が成り立つ. 一方で, $\forall j\in\varLambda_{q_i}\setminus\{1\}$ に対し, $f\circ f^{q_i-j}\left(\mathbf{v}_i\right)=f^{q_i-j+1}\left(\mathbf{v}_i\right)=f^{q_i-(j-1)}\left(\mathbf{v}_i\right)$ が成り立ち, このとき, $q_i-(j-1)<q_i$ が成り立つので, $f\circ f^{q_i-j}\left(\mathbf{v}_i\right)\neq\mathbf{0}$ が成り立ち, したがって, $f^{q_i-j}\left(\mathbf{v}_i\right)\notin\ker f$ が成り立つ. ここで, その核 $\ker f$ はその vector 空間の部分 vector 空間なので, その核 $\ker f$ の基底をなす vectors はその基底 $\mathcal{B}$ の中に含まれる vectors の線形結合でないといけなくて, その基底 $\mathcal{B}$ をなす vectors のうちその核 $\ker f$ の基底をなすものがその族 $\left\{f^{q_i-1}\left(\mathbf{v}_i\right)\right\}_{i\in\varLambda_r}$ である. したがって, その添数集合 $\varLambda_r$ の元の個数 r はその核 $\ker f$ の次元に等しい.

特に, その冪零変換 f の指数が n であるならそのときに限り, 定理 2.5.3 より $q_1=n$ が成り立つかつ, $\forall i\in\varLambda_{r-1}$ に対し, $q_{i+1}\leq q_i$ が成り立つかつ, $\sum_{i\in\varLambda_r}q_i=n$ が成り立つので, $\forall i\in\varLambda_r\setminus\{1\}$ に対し, 自然数 q_i が存在できない. したがって, これが成り立つならそのときに限り, $\emptyset=\varLambda_r\setminus\{1\}$ が成り立つ, 即ち, $r=1$ が成り立つ. ここで, 上記の議論により $\dim\ker f=1$ が成り立つ. □

2.5.4 冪零変換の表現行列

定義 2.5.4. 体 K の元 k を用いて $A\in\mathrm{M}(n,n,K)$ なる行列 A が次式のように表されるとき, その行列 A をその元 k の Jordan 細胞, k 細胞などといい $J(k,n)$ と書く.

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & & & O \\ & k & 1 & & \\ & & k & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ O & & & & k \end{pmatrix}$$

定理 2.5.8. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V における指数 q の冪零変換 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, Halmos の定理より $f^{q-1}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\neq\mathbf{0}$ なる vector$\mathbf{v}_{*}$ を用いたその vector 空間 V の部分 vector 空間 $\operatorname{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q}}$ は f-不変でこれの基底が $\left\langle f^{q-i}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\right\rangle_{i\in\varLambda_{q}}$ とおかれることができる. これを $\mathcal{B}$ とおくと, これに関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, 即ち, $\forall i\in\varLambda_{q}$ に対し, その基底 $\mathcal{B}$ に関する自然な線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}:K^{q}\rightarrow\operatorname{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q}}$ を用いた線形写像 $\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi:K^{q}\rightarrow K^{q}$ に対する行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ は $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=J(0,q)$ を満たす.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V における指数 q の冪零変換 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, Halmos の定理より $f^{q-1}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\neq\mathbf{0}$ なる vector$\mathbf{v}_{*}$ を用いたその vector 空間 V の部分 vector 空間 $\operatorname{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q}}$ は f-不変でこれの基底が $\left\langle f^{q-i}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\right\rangle_{i\in\varLambda_{q}}$ とおかれることができる. これを $\mathcal{B}$ とおくと, これに関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, 即ち, $\forall i\in\varLambda_{q}$ に対し, その基底 $\mathcal{B}$ に関する自然な線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}:K^{q}\rightarrow\operatorname{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q}}$ を用いた線形写像 $\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi:K^{q}\rightarrow K^{q}$ に対する行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ について, $\forall\mathbf{k}\in K^{q}$ に対し, $\mathbf{k}=\begin{pmatrix} k_{1} \\ k_{2} \\ \vdots \\ k_{q} \end{pmatrix}$ とおかれれば, $f=\left(\operatorname{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q}}\rightarrow\operatorname{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q}};\mathbf{w}\mapsto f\left(\mathbf{w}\right)\right)$ と同一視すると, 次式が成り立つので,

$$\begin{tikzcd}
& K^{q} \arrow[rr, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & K^{q} \\
\mathbf{k} \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & & {[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\mathbf{k}} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & \\
& \operatorname{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q}} \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, phantom, sloped, "\ni"] & & \operatorname{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{q}} \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"'] \arrow[dl, phantom, sloped, "\ni"] \\
\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right) \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right) \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

次のようになる.

$$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right)=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\left(\sum_{i\in\varLambda_{q}}k_{i}f^{q-i}\left(\mathbf{v}_{*}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\sum_{i\in\Lambda_q} k_i f^{q-i+1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right)\\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(k_1 f^q\left(\mathbf{v}_*\right) + \sum_{i\in\Lambda_q\setminus\{1\}} k_i f^{q-i+1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right)\\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\sum_{i\in\Lambda_q\setminus\{1\}} k_i f^{q-i+1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right)\\
&= \sum_{i\in\Lambda_q\setminus\{1\}} k_i \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f^{q-i+1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right)\\
&= k_1\mathbf{0} + \sum_{i\in\Lambda_q\setminus\{1\}} k_i \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f^{q-i+1}\left(\mathbf{v}_*\right)\right)\\
&= k_1\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix} + \cdots + k_q\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & 1 & & & O\\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ O & & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\\vdots\\k_q\end{pmatrix}\\
&= J(0,q)\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

したがって, その行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ は $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = J(0,q)$ を満たす. □

定理 2.5.9. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V における指数 q の冪零変換 $f : V \to V$ が与えられたとき, その冪零変換 f の不変系 $\left(q_i\right)_{i\in\Lambda_r}$ を用いれば, ある基底 $\mathcal{B}$ が存在してこれに関するその冪零変換 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式のように表されることができる.

$$
[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J\left(0,q_1\right) & & & O\\ & J\left(0,q_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J\left(0,q_r\right)\end{pmatrix}
$$

さらに, このときの基底 $\mathcal{B}$ は, $\forall i \in \Lambda_r$ に対し, $f^{q_i}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ かつ $f^{q_i-1}\left(\mathbf{v}_i\right) \neq \mathbf{0}$ なる vectors$\mathbf{v}_i$ を用いて次式のように表される.

$$
\mathcal{B} = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_r\\ f\left(\mathbf{v}_1\right) & f\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f\left(\mathbf{v}_r\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f^{q_1-1}\left(\mathbf{v}_1\right) & f^{q_2-1}\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f^{q_r-1}\left(\mathbf{v}_r\right)\end{matrix}\right\rangle
$$

逆に, このような基底 $\mathcal{B}$ が存在するようなその vector 空間 V における線形写像 $f : V \to V$ は不変系 $\left(q_i\right)_{i\in\Lambda_r}$ の冪零変換である.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V における指数 q の冪零変換 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, その冪零変換 f の不変系 $\left(q_i\right)_{i\in\Lambda_r}$ を用いれば, 定理 2.1.6, 定理 2.5.3 より次式が成り立つ.

$$V=\bigoplus_{j\in\Lambda_r}\operatorname{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_j\right)\right\}_{i\in\Lambda_{q_j}}$$

定理 2.5.8 よりそれらの部分 vector 空間たち $\operatorname{span}\left\{f^{i-1}\left(\mathbf{v}_j\right)\right\}_{i\in\Lambda_{q_j}}$ は f-不変でこれの基底 $\mathcal{B}_j$ が $\left\langle f^{q_j-i}\left(\mathbf{v}_j\right)\right\rangle_{i\in\Lambda_{q_j}}$ とおかれると, これに関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}_j}^{\mathcal{B}_j}$ は $[f]_{\mathcal{B}_j}^{\mathcal{B}_j}=J\left(0,q_j\right)$ を満たす. このとき, $\forall\mathbf{k}\in V$ に対し, 基底 $\left\langle\mathcal{B}_j\right\rangle_{j\in\Lambda_r}$ が $\mathcal{B}$ とおかれその基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}:K^n\rightarrow V$ を用いて $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{k}\right)=\bigoplus_{j\in\Lambda_r}\mathbf{w}_j$ とおくと, これに関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ について, 次のようになる.

$$\begin{tikzcd}
& K^n \arrow[rr, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & K^n \\
\mathbf{k} \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & {[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\mathbf{k}} & \\
& V \arrow[rr, "f"] & & V \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"'] \\
\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right) \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right) \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right)&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\left(\bigoplus_{j\in\Lambda_r}\mathbf{w}_j\right)\\
&=\sum_{j\in\Lambda_r}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\left(\mathbf{w}_j\right)\\
&=\begin{pmatrix}\varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\circ f\left(\mathbf{w}_1\right)\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\circ f\left(\mathbf{w}_2\right)\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \varphi_{\mathcal{B}_r}^{-1}\circ f\left(\mathbf{w}_r\right)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}_1}\circ\varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right)\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}_2}\circ\varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right)\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}+\\
&\quad\cdots+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \varphi_{\mathcal{B}_r}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}_r}\circ\varphi_{\mathcal{B}_r}^{-1}\left(\mathbf{w}_r\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} [f]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [f]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2} \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [f]_{\mathcal{B}_r}^{\mathcal{B}_r} \varphi_{\mathcal{B}_r}^{-1}(\mathbf{w}_r) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [f]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1} \\ O \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) + \begin{pmatrix} O \\ [f]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2} \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) + \cdots + \begin{pmatrix} O \\ O \\ \vdots \\ [f]_{\mathcal{B}_r}^{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_r}^{-1}(\mathbf{w}_r) \\
&= \begin{pmatrix} J(0, q_1) \\ O \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) + \begin{pmatrix} O \\ J(0, q_2) \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) + \cdots + \begin{pmatrix} O \\ O \\ \vdots \\ J(0, q_r) \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_r}^{-1}(\mathbf{w}_r) \\
&= \begin{pmatrix} J(0, q_1) & & & O \\ & J(0, q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0, q_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_r}^{-1}(\mathbf{w}_r) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_r}^{-1}(\mathbf{w}_r) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_r}^{-1}(\mathbf{w}_r) \end{pmatrix} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}_1) + \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}_2) + \cdots + \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}_r) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\bigoplus_{j \in \varLambda_r} \mathbf{w}_j \right) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{k}
\end{aligned}
$$

次のようになる.

$$
\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} J(0, q_1) & & & O \\ & J(0, q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0, q_r) \end{pmatrix} \mathbf{k}
$$

ゆえに, ある基底 $\mathcal{B}$ が存在してこれに関するその冪零変換 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式のように表されることができる.

$$
[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J(0, q_1) & & & O \\ & J(0, q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0, q_r) \end{pmatrix}
$$

さらに, このときの基底 $\mathcal{B}$ は上記の議論により, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $f^{q_i}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ かつ $f^{q_i - 1}(\mathbf{v}_i) \neq \mathbf{0}$ なるvectors$\mathbf{v}_i$ を用いて次式のように表される.

$$
\mathcal{B} = \langle \mathcal{B}_j \rangle_{j \in \varLambda_r}
$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle f^{q_j - i}\left(\mathbf{v}_j\right)\right\rangle_{(i,j)\in\Lambda_{q_j}\times\Lambda_r} \\
&= \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_r \\ f\left(\mathbf{v}_1\right) & f\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f\left(\mathbf{v}_r\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{q_1-1}\left(\mathbf{v}_1\right) & f^{q_2-1}\left(\mathbf{v}_2\right) & \cdots & f^{q_r-1}\left(\mathbf{v}_r\right) \end{matrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

逆に, ある基底 $\mathcal{B}$ が存在して, $\forall j \in \Lambda_{r-1}$ に対し, $q_{j+1} \leq q_j$ が成り立つかつ, これに関する線形写像 $f: V \rightarrow V$ の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式のように表されることができるなら,

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J\left(0, q_1\right) & & & O \\ & J\left(0, q_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J\left(0, q_r\right) \end{pmatrix}$$

定理 2.1.6 より $\mathcal{B} = \left\langle \mathcal{B}_j \right\rangle_{j\in\Lambda_r}$ なる基底 $\mathcal{B}_j$ をもつ q_j 次元のその vector 空間 V の部分 vector 空間たち W_j を用いて次式が成り立つのであった.

$$V = \bigoplus_{j\in\Lambda_r} W_j$$

このとき, $\forall j \in \Lambda_r$ に対し, その部分 vector 空間 W_j の基底 $\mathcal{B}_j$ が $\left\langle \mathbf{w}_{ij} \right\rangle_{i\in\Lambda_{q_j}}$ とおかれると, 次のようになることにより,

$$\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dl, phantom, "\in" sloped] & & K^n \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dl, phantom, "\in" sloped] \\
\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{v}\right) \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] & & {[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{v}\right)} \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & \\
 & V \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, phantom, "\in" sloped] & & V \arrow[dl, phantom, "\in" sloped] \\
\mathbf{v} \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"] \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f\left(\mathbf{v}\right) &
\end{tikzcd}$$

次のようになり,

$$\begin{aligned}
f\left(\mathbf{w}_{ij}\right) &= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{w}_{ij}\right) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{w}_{ij}\right)\right) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} J\left(0, q_1\right) & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & J\left(0, q_j\right) & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & J\left(0, q_r\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_j}^{-1}\left(\mathbf{w}_{ij}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$= \varphi_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ J\left(0, q_j\right) \varphi_{\mathcal{B}_j}^{-1}\left(\mathbf{w}_{ij}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

ここで, $i = 1$ のとき, 次のようになるかつ,

$$J\left(0, q_j\right) \varphi_{\mathcal{B}_j}^{-1}\left(\mathbf{w}_{1j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & O \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ O & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_{\mathcal{B}_j}^{-1}\left(\mathbf{0}\right)$$

$i > 1$ のとき, 次のようになることから,

$$J\left(0, q_j\right) \varphi_{\mathcal{B}_j}^{-1}\left(\mathbf{w}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & & & & O \\ & \ddots & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ O & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_{\mathcal{B}_j}^{-1}\left(\mathbf{w}_{i-1,j}\right)$$

次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} f\left(\mathbf{w}_{ij}\right) &= \begin{cases} \varphi_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_j}^{-1}\left(\mathbf{0}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & \text{if} \quad i = 1 \\ \varphi_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_j}^{-1}\left(\mathbf{w}_{i-1,j}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & \text{if} \quad i > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{0}\right) & \text{if} \quad i = 1 \\ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{w}_{i-1,j}\right) & \text{if} \quad i > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathbf{0} & \text{if} \quad i = 1 \\ \mathbf{w}_{i-1,j} & \text{if} \quad i > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

このとき, 数学的帰納法により, $f^{q_j}\left(\mathbf{w}_{q_j j}\right) = \mathbf{0}$, $i > 1$ のとき, $f^{q_j - i + 1}\left(\mathbf{w}_{q_j j}\right) = \mathbf{w}_{i-1,j}$ が成り立つので, $q_j \leq q_1$ より $q = q_1$ とおかれると, その線形写像 f は指数 q の冪零変換であり, さらに, その部分 vector 空間 W_j の基底が $\left\langle f^{q_j - i + 1}\left(\mathbf{w}_{q_j j}\right)\right\rangle_{i \in \varLambda_{q_j + 1} \setminus \{1\}}$, 即ち, $\left\langle f^{q_j - i}\left(\mathbf{w}_{q_j j}\right)\right\rangle_{i \in \varLambda_{q_j}}$ と与えられる. 以上, 次のことを満たすその vector 空間 V の元の列 $\left(\mathbf{v}_j\right)_{j \in \varLambda_r}$ と自然数の列 $\left(q_j\right)_{j \in \varLambda_r}$ が存在する.

- $q_1 = q$ が成り立つかつ, $\forall j \in \varLambda_{r-1}$ に対し, $q_{j+1} \leq q_j$ が成り立つ.

- $\displaystyle\sum_{j \in \varLambda_r} q_j = n$ が成り立つ.
- 次式のような n つの vectors の組 $\mathcal{B}$ はその vector 空間 V の基底をなす.

$$\alpha = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_r \\ f\left(\mathbf{v}_1 \right) & f\left(\mathbf{v}_2 \right) & \cdots & f\left(\mathbf{v}_r \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{q_1 - 1}\left(\mathbf{v}_1 \right) & f^{q_2 - 1}\left(\mathbf{v}_2 \right) & \cdots & f^{q_r - 1}\left(\mathbf{v}_r \right) \end{matrix} \right\rangle$$

- $\forall j \in \varLambda_r$ に対し, $f^{q_j}\left(\mathbf{v}_j \right) = \mathbf{0}$ が成り立つ.

よって, このような基底 $\mathcal{B}$ が存在するようなその vector 空間 V における線形写像 $f : V \rightarrow V$ は不変系 $\left(q_i \right)_{i \in \varLambda_r}$ の冪零変換である. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p276-288 ISBN978-4-00-029872-8

2.6 Jordan 標準形

2.6.1 Jordan 標準形

定義 (定義 2.5.4 の再掲)**.** 体 K の元 k を用いて $A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる行列 A が次式のように表されるとき, その行列 A をその元 k の Jordan 細胞, k 細胞などといい $J(k,n)$ と書く.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & & & O \\ & k & 1 & & \\ & & k & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ O & & & & k \end{pmatrix}$$

定理 2.6.1. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f : V \to V$ の固有多項式 Φ_f が互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\sum_{i \in \Lambda_s} n_i = n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき, 次のことが成り立つ.

$$\Phi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

- $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, 線形写像 $\lambda_i I_V - f$ は核 $\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ における冪零変換である.
- $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, その核 $\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ は f-不変である.
- $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, その核 $\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ における冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の不変系 Q_i が $Q_i = (q_{ij})_{j \in \Lambda_{r_i}}$ と与えられたらば, その核 $\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ の次式のようなある基底 $\mathcal{B}_i$ が存在して,

$$\mathcal{B}_i = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_{i1} & \mathbf{v}_{i2} & \cdots & \mathbf{v}_{ir_i} \\ (f - \lambda_i I_V)(\mathbf{v}_{i1}) & (f - \lambda_i I_V)(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & (f - \lambda_i I_V)(\mathbf{v}_{ir_i}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f - \lambda_i I_V)^{q_{i1}-1}(\mathbf{v}_{i1}) & (f - \lambda_i I_V)^{q_{i2}-1}(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & (f - \lambda_i I_V)^{q_{ir_i}-1}(\mathbf{v}_{ir_i}) \end{matrix} \right\rangle$$

  これに関する線形写像 $f|\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ の表現行列 $[f|\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}$ が次式のように一意的に表されることができる.

$$[f|\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, q_{i1}) & & & O \\ & J(\lambda_i, q_{i2}) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_i, q_{ir_i}) \end{pmatrix}$$

定義 2.6.1. このときの固有値 λ_i に対する表現行列 $[f|\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}$ をその固有値 λ_i に対する Jordan block, Jordan 塊といい, ここでは, $J(\lambda_i; Q_i)$ と書くことにする.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f : V \to V$ の固有多項式 Φ_f が互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\sum_{i \in \Lambda_s} n_i = n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$\Phi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

$\forall i \in \varLambda_s \forall \mathbf{v} \in \ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ に対し, $\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つので, 線形写像 $\lambda_i I_V - f$ は核 $\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ における冪零変換である.

さらに, $\forall i \in \varLambda_s \forall \mathbf{v} \in \ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ に対し, 定理 2.3.5 より次のようになることから,

$$\begin{aligned}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}(f(\mathbf{v})) &= \left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i} \circ f(\mathbf{v})\\ &= f \circ \left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}(\mathbf{v})\\ &= f\left(\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}(\mathbf{v})\right)\\ &= f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

$f(\mathbf{v}) \in \ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ が成り立ち, したがって, その核 $\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ は f-不変である.

$\forall i \in \varLambda_s$ に対し, その核 $\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ における冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の不変系 Q_i が $Q_i = \left(q_{ij}\right)_{j \in \varLambda_{r_i}}$ と与えられたらば, 分解定理よりその核 $\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ の次元はその自然数 n_i に等しく, 定理 2.5.3 より次式のような n_i つの vectors の組 $\mathcal{C}_i$ はその核 $\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ の基底をなす.

$$\mathcal{C}_i = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_{i1} & \mathbf{v}_{i2} & \cdots & \mathbf{v}_{ir_i} \\ \left(\lambda_i I_V - f\right)(\mathbf{v}_{i1}) & \left(\lambda_i I_V - f\right)(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & \left(\lambda_i I_V - f\right)(\mathbf{v}_{ir_i}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\lambda_i I_V - f\right)^{q_{i1}-1}(\mathbf{v}_{i1}) & \left(\lambda_i I_V - f\right)^{q_{i2}-1}(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & \left(\lambda_i I_V - f\right)^{q_{ir_i}-1}(\mathbf{v}_{ir_i}) \end{matrix} \right\rangle$$

このとき, 線形写像 $f - \lambda_i I_V$ も定理 2.5.3, 定理 2.5.6 より不変系 Q_i のその核 $\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ における冪零変換でもあるので, 定理 2.5.9 より次式のようなある基底 $\mathcal{B}_i$ が存在して,

$$\mathcal{B}_i = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_{i1} & \mathbf{v}_{i2} & \cdots & \mathbf{v}_{ir_i} \\ \left(f - \lambda_i I_V\right)(\mathbf{v}_{i1}) & \left(f - \lambda_i I_V\right)(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & \left(f - \lambda_i I_V\right)(\mathbf{v}_{ir_i}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(f - \lambda_i I_V\right)^{q_{i1}-1}(\mathbf{v}_{i1}) & \left(f - \lambda_i I_V\right)^{q_{i2}-1}(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & \left(f - \lambda_i I_V\right)^{q_{ir_i}-1}(\mathbf{v}_{ir_i}) \end{matrix} \right\rangle$$

これに関するその冪零変換 $f - \lambda_i I_V$ の表現行列 $\left[f - \lambda_i I_V\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}$ が次式のように表されることができる.

$$\left[f - \lambda_i I_V\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} J(0, q_{i1}) & & & O \\ & J(0, q_{i2}) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0, q_{ir_i}) \end{pmatrix}$$

これにより, q 次単位行列 I_q を用いて次のようになる.

$$\begin{aligned}\left[f|\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} &= [f]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} - \left[\lambda_i I_V\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} + \left[\lambda_i I_V\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}\\ &= \left[f - \lambda_i I_V\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} + \lambda_i \left[I_V\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}\\ &= \begin{pmatrix} J(0, q_{i1}) & & & O \\ & J(0, q_{i2}) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0, q_{ir_i}) \end{pmatrix} + \lambda_i \begin{pmatrix} I_{q_{i1}} & & & O \\ & I_{q_{i2}} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & I_{ir_i} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} J(0, q_{i1}) + \lambda_i I_{q_{i1}} & & & O \\ & J(0, q_{i2}) + \lambda_i I_{q_{i2}} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0, q_{ir_i}) + \lambda_i I_{q_{ir_1}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
= \begin{pmatrix} J\left(\lambda_i, q_{i1}\right) & & & O \\ & J\left(\lambda_i, q_{i2}\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J\left(\lambda_i, q_{ir_i}\right) \end{pmatrix}
$$

このとき, その固有値 λ_i に対し, 冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ が一意的に存在し, 定理 2.5.6 より冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の不変系が Q_i と一意的に与えられるので, その基底 $\mathcal{B}_i$ に関する線形写像 $f|\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ の上記の形の表現行列 $\left[f|\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}$ が一意的に表されることができる. □

定理 2.6.2. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f : V \to V$ の固有多項式 Φ_f が互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_s} n_i = n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$
\Phi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} \left(X - \lambda_i\right)^{n_i}
$$

$\forall i \in \Lambda_s$ に対し, 定理 2.6.1 よりその核 $\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ における冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の不変系 Q_i が $Q_i = \left(q_{ij}\right)_{j \in \Lambda_{r_i}}$ と与えられたらば, その vector 空間 V の次式のようなある基底 $\left\langle \mathcal{B}_i \right\rangle_{i \in \Lambda_s}$ が存在して,

$$
\mathcal{B}_i = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_{i1} & \mathbf{v}_{i2} & \cdots & \mathbf{v}_{ir_i} \\ \left(f - \lambda_i I_V\right)\left(\mathbf{v}_{i1}\right) & \left(f - \lambda_i I_V\right)\left(\mathbf{v}_{i2}\right) & \cdots & \left(f - \lambda_i I_V\right)\left(\mathbf{v}_{ir_i}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(f - \lambda_i I_V\right)^{q_{i1}-1}\left(\mathbf{v}_{i1}\right) & \left(f - \lambda_i I_V\right)^{q_{i2}-1}\left(\mathbf{v}_{i2}\right) & \cdots & \left(f - \lambda_i I_V\right)^{q_{ir_i}-1}\left(\mathbf{v}_{ir_i}\right) \end{matrix} \right\rangle
$$

これが $\mathcal{B}$ とおかれると, これに関する線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式のように表されることができる.

$$
[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J\left(\lambda_1; Q_1\right) & & & O \\ & J\left(\lambda_2; Q_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J\left(\lambda_s; Q_s\right) \end{pmatrix}
$$

しかも, その表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ の中に含まれる Jordan 塊たちの順序を除けば, その表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ はその線形写像 f に対し一意的に決まる.

定義 2.6.2. このときの線形写像 f に対する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ を Jordan 標準形といい, このような形の行列を Jordan 行列, この基底 $\mathcal{B}$ を Jordan 基底という.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f : V \to V$ の固有多項式 Φ_f が互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_s} n_i = n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$
\Phi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} \left(X - \lambda_i\right)^{n_i}
$$

$\forall i \in \Lambda_s$ に対し, 定理 2.6.1 よりその核 $\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ における冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の不変系 Q_i が $Q_i = \left(q_{ij}\right)_{j \in \Lambda_{r_i}}$ と与えられたらば, その核 $\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ のある基底 $\mathcal{B}_i$ が存在してこれに関する線形写像 $f|\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}$ の表現行列 $\left[f|\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}$ が次式のように表されることができる.

$$
\left[f|\ker\left(\lambda_i I_V - f\right)^{n_i}\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} = J\left(\lambda_i; Q_i\right)
$$

このとき, 分解定理よりその固有値 λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ は $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)=\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}$ を満たすかつ, 次式が成り立つかつ,

$$V=\bigoplus_{i\in\varLambda_s}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)=\bigoplus_{i\in\varLambda_s}\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}$$

その固有値 λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ の次元は自然数 n_i に等しい. ここで, その vector 空間 V のある基底 $\left\langle\mathcal{B}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_s}$ が $\mathcal{B}$ とおかれると, その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ とその核 $\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)$ の元々 $\mathbf{w}_i$ を用いて, $\forall\mathbf{k}\in K^n$ に対し, $\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k})=\bigoplus_{i\in\varLambda_s}\mathbf{w}_i$ と一意的に表されることができる. ここで, $f=\left(\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}\rightarrow\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i};\mathbf{v}\mapsto f(\mathbf{v})\right)$ と同一視すると, その基底 $\mathcal{B}_i$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}_i}:K^{n_i}\rightarrow\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}$ を用いて次式が成り立つので,

$$\begin{tikzcd}
& K^{n_i} \arrow[rr, "\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}_i}"] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & & K^{n_i} \arrow[dl, phantom, "\ni"] \arrow[dd, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}_i}"] \\
\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}\left(\mathbf{w}_i\right) \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}_i}"] & & J\left(\lambda_i;Q_i\right)\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}\left(\mathbf{w}_i\right) \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}_i}"] & \\
& \ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i} \arrow[uu, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & & \ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i} \arrow[dl, phantom, "\ni"] \\
\mathbf{w}_i \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}"] \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f\left(\mathbf{w}_i\right) &
\end{tikzcd}$$

したがって, 次のようになり,

$$\begin{tikzcd}
& K^n \arrow[rr, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dl, phantom, "\ni"] \arrow[dd, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & K^n \arrow[dl, phantom, "\ni"] \\
\mathbf{k} \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & \left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\mathbf{k} & \\
& V \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & & V \arrow[uu, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"] \arrow[dl, phantom, "\ni"] \\
\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f\circ\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k})&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\left(\bigoplus_{i\in\varLambda_s}\mathbf{w}_i\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_s}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\left(\mathbf{w}_i\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \Lambda_s} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}_i} \left(J\left(\lambda_i; Q_i\right) \varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}\left(\mathbf{w}_i\right) \right) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}_1} \left(J\left(\lambda_1; Q_1\right) \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) \right) + \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}_2} \left(J\left(\lambda_2; Q_2\right) \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) \right) + \\
&\quad \cdots + \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}_s} \left(J\left(\lambda_s; Q_s\right) \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \right) \\
&= \begin{pmatrix} J\left(\lambda_1; Q_1\right) \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ J\left(\lambda_2; Q_2\right) \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ J\left(\lambda_s; Q_s\right) \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J\left(\lambda_1; Q_1\right) \\ O \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) + \begin{pmatrix} O \\ J\left(\lambda_2; Q_2\right) \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) + \cdots + \begin{pmatrix} O \\ O \\ \vdots \\ J\left(\lambda_s; Q_s\right) \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \\
&= \begin{pmatrix} J\left(\lambda_1; Q_1\right) & & & O \\ & J\left(\lambda_2; Q_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J\left(\lambda_s; Q_s\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \end{pmatrix} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right) + \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right) + \cdots + \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\bigoplus_{j \in \Lambda_s} \mathbf{w}_j \right) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right) = \mathbf{k}
\end{aligned}
$$

次のようになる.

$$
\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right) = \begin{pmatrix} J\left(\lambda_1; Q_1\right) & & & O \\ & J\left(\lambda_2; Q_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J\left(\lambda_s; Q_s\right) \end{pmatrix} \mathbf{k}
$$

以上より, その表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式のように表されることができる.

$$
[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J\left(\lambda_1; Q_1\right) & & & O \\ & J\left(\lambda_2; Q_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J\left(\lambda_s; Q_s\right) \end{pmatrix}
$$

ここで, 行列たち $J\left(\lambda_i; Q_i\right)$ は定理 2.6.1 より 1 つの固有値 λ_i に対し一意的に決まるので, 固有値 λ_i の順序を除けば, 即ち, その表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ の中に入っている Jordan 塊たちの順序を除けば, その表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ はその線形写像 f に対し一意的に決まる. $\square$

定理 2.6.3. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f:V\rightarrow V$ の固有多項式 $\varPhi_{f}$ が互いに異なるその体 K の元々 λ_{i} を用いて $\sum_{i\in\varLambda_{s}}n_{i}=n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$\varPhi_{f}=\prod_{i\in\varLambda_{s}}\left(X-\lambda_{i}\right)^{n_{i}}$$

次のことが成り立つ.

- $\forall i\in\varLambda_{s}$ に対し, その線形写像 f の Jordan 標準形に入っている固有値 λ_{i} に対する Jordan 細胞 $J\left(\lambda_{i},q_{ij}\right)$ の個数 r_{i} は冪零変換 $\lambda_{i}I_{V}-f$ の核の次元, 即ち, その固有値 λ_{i} に対する固有空間 $W\left(\lambda_{i}\right)$ の次元に等しい, 即ち, 次式が成り立つ.

$$r_{i}=\mathrm{nullity}\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)=\dim W\left(\lambda_{i}\right)$$

- $q_{i}=q_{i1}$ として $\forall i\in\varLambda_{s}\forall j\in\varLambda_{q_{i}}$ に対し, その線形写像 f の Jordan 標準形に入っている固有値 λ_{i} に対する Jordan 細胞 $J\left(\lambda_{i},j\right)$ の個数 ε_{ij} は次式を満たす.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}&=2\mathrm{nullity}\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)^{j}-\mathrm{nullity}\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)^{j+1}-\mathrm{nullity}\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)^{j-1}\\&=\mathrm{rank}\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)^{j+1}+\mathrm{rank}\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)^{j-1}-2\mathrm{rank}\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)^{j}\end{aligned}$$

- $q_{i}=q_{i1}$ として $\forall i\in\varLambda_{s}\forall j\in\varLambda_{q_{i}}$ に対し, その線形写像 f の Jordan 標準形に入っている固有値 λ_{i} に対する $j\leq k$ なる Jordan 細胞 $J\left(\lambda_{i},k\right)$ の個数 E_{ij} は次式を満たす.

$$E_{ij}=\mathrm{rank}\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)^{j-1}-\mathrm{rank}\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)^{j}$$

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f:V\rightarrow V$ の固有多項式 $\varPhi_{f}$ が互いに異なるその体 K の元々 λ_{i} を用いて $\sum_{i\in\varLambda_{s}}n_{i}=n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$\varPhi_{f}=\prod_{i\in\varLambda_{s}}\left(X-\lambda_{i}\right)^{n_{i}}$$

$\forall i\in\varLambda_{s}$ に対し, 定理 2.6.1 よりその核 $\ker\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)^{n_{i}}$ における冪零変換 $\lambda_{i}I_{V}-f$ の不変系 Q_{i} が $Q_{i}=\left(q_{ij}\right)_{j\in\varLambda_{r_{i}}}$ と与えられたらば, 定理 2.8.20 よりその vector 空間 V のある基底 $\left\langle\mathcal{B}_{i}\right\rangle_{i\in\varLambda_{s}}$ が存在して, これが $\mathcal{B}$ とおかれると, これに関する線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式のように表されることができる.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}J\left(\lambda_{1};Q_{1}\right)&&&O\\&J\left(\lambda_{2};Q_{2}\right)&&\\&&\ddots&\\O&&&J\left(\lambda_{s};Q_{s}\right)\end{pmatrix}$$

このとき, その線形写像 f の Jordan 標準形に入っている固有値 λ_{i} に対する Jordan 細胞 $J\left(\lambda_{i},q_{ij}\right)$ の個数 r_{i} は定理 2.5.7 よりその核 $\ker\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)$ の次元に等しい, 特に, 固有空間の定義よりその固有値 λ_{i} に対する固有空間 $W\left(\lambda_{i}\right)$ の次元に等しい, 即ち, 次式が成り立つ.

$$r_{i}=\mathrm{nullity}\left(\lambda_{i}I_{V}-f\right)=\dim W\left(\lambda_{i}\right)$$

$q_i = q_{i1}$ として $\forall i \in \Lambda_s \forall j \in \Lambda_{q_i}$ に対し, その線形写像 f の Jordan 標準形に入っている固有値 λ_i に対する Jordan 細胞 $J\left(\lambda_i, j \right)$ の個数 ε_{ij} について, 定理 2.8.20 よりその個数 ε_{ij} はその冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の不変系 Q_i の値域 $\left\{ q_{ij} \right\}_{j \in \Lambda_{r_i}}$ のうち自然数 j が含まれる個数に等しいので, 定理 2.5.5 より次式が成り立つ.

$$\varepsilon_{ij} = 2\mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^j - \mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j+1} - \mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j-1}$$

ここで, それらの線形写像たち $\left(\lambda_i I_V - f \right)^j$ に関する次元公式より次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= 2\mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^j - \mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j+1} - \mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j-1}\\
&= 2\left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^j + \mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^j - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^j \right)\\
&\quad - \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j+1} + \mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j+1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j+1} \right)\\
&\quad - \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j-1} + \mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j-1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j-1} \right)\\
&= 2\left(n - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^j \right) - \left(n - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j+1} \right) - \left(n - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j-1} \right)\\
&= 2n - 2\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^j - n + \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j+1} - n + \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j-1}\\
&= \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j+1} + \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j-1} - 2\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^j
\end{aligned}$$

次式が得られる.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= 2\mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^j - \mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j+1} - \mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j-1}\\
&= \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j+1} + \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j-1} - 2\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^j
\end{aligned}$$

$q_i = q_{i1}$ として $\forall i \in \Lambda_s \forall j \in \Lambda_{q_i}$ に対し, その線形写像 f の Jordan 標準形に入っている固有値 λ_i に対する $j \leq k$ なる Jordan 細胞 $J\left(\lambda_i, k \right)$ の個数 E_{ij} について, 上記の議論により, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
E_{ij} &= \sum_{k \in \Lambda_{q_i} \setminus \Lambda_{j-1}} \varepsilon_{ik}\\
&= \sum_{k \in \Lambda_{q_i} \setminus \Lambda_{j-1}} \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{k+1} + \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{k-1} - 2\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^k \right)\\
&= \sum_{k \in \Lambda_{q_i} \setminus \Lambda_{j-1}} \left(\left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{k+1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^k \right) \right.\\
&\quad \left. - \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^k - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{k-1} \right) \right)\\
&= \sum_{k \in \Lambda_{q_i} \setminus \Lambda_{j-1}} \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{k+1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^k \right)\\
&\quad - \sum_{k \in \Lambda_{q_i} \setminus \Lambda_{j-1}} \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^k - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{k-1} \right)\\
&= \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{q_i+1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{q_i} \right)\\
&\quad + \sum_{k \in \Lambda_{q_i-1} \setminus \Lambda_{j-1}} \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{k+1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^k \right)\\
&\quad - \sum_{k \in \Lambda_{q_i} \setminus \Lambda_j} \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^k - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{k-1} \right)\\
&\quad - \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^j - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f \right)^{j-1} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{j-1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^j \\
&\quad + \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{q_i+1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{q_i} \\
&\quad + \sum_{k \in \Lambda_{q_i} \setminus \Lambda_j} \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^k - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{k-1}\right) \\
&\quad - \sum_{k \in \Lambda_{q_i} \setminus \Lambda_j} \left(\mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^k - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{k-1}\right) \\
&= \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{j-1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^j \\
&\quad + \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{q_i+1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{q_i} \\
&= \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{j-1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^j + \mathrm{rank} 0 - \mathrm{rank} 0 \\
&= \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^{j-1} - \mathrm{rank}\left(\lambda_i I_V - f\right)^j
\end{aligned}
$$

□

定理 2.6.4. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像たち $f : V \rightarrow V$, $g : V \rightarrow V$ の固有多項式たち Φ_f, Φ_g が互いに異なるその体 K の元々 λ_i, 互いに異なるその体 K の元々 μ_i を用いて $\sum_{i \in \Lambda_s} m_i = \sum_{i \in \Lambda_t} n_i = n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$
\Phi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} \left(X - \lambda_i\right)^{m_i}, \quad \Phi_g = \prod_{i \in \Lambda_t} \left(X - \mu_i\right)^{n_i}
$$

任意の基底たち α, β に関するそれらの線形写像たち f, g の表現行列たち $[f]_\alpha^\alpha$, $[g]_\beta^\beta$ が互いに相似であるならそのときに限り, それらの線形写像たち f, g の Jordan 標準形がこれに入っている Jordan block の順序の違いを除けば一致する.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像たち $f : V \rightarrow V$, $g : V \rightarrow V$ の固有多項式たち Φ_f, Φ_g が互いに異なるその体 K の元々 λ_i, 互いに異なるその体 K の元々 μ_i を用いて $\sum_{i \in \Lambda_s} m_i = \sum_{i \in \Lambda_t} n_i = n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$
\Phi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} \left(X - \lambda_i\right)^{m_i}, \quad \Phi_g = \prod_{i \in \Lambda_t} \left(X - \mu_i\right)^{n_i}
$$

任意の基底たち α, β に関するそれらの線形写像たち f, g の表現行列たち $[f]_\alpha^\alpha$, $[g]_\beta^\beta$ が相似であるならそのときに限り, ある正則行列 P が存在して $P[f]_\alpha^\alpha = [g]_\beta^\beta P$ が成り立つ. このとき, 対応する n 次正方行列が A であるようなその vector 空間 K^n 間の線形写像が $L_A : K^n \rightarrow K^n$, それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β を用いて次式が成り立ち,

$$
\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] & & K^n \arrow[dd, two heads, tail, "\varphi_\alpha"] \\
\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] & & {[f]_\alpha^\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & \\
 & V \arrow[uu, two heads, tail, "\varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[rr, "f"] & & V \\
\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f(\mathbf{v}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "L_{[g]_\beta^\beta}"] & & K^n \arrow[dd, two heads, tail, "\varphi_\beta"] \\
\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "L_{[g]_\beta^\beta}"] & & {[g]_\beta^\beta \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{v})} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\beta"] & \\
 & V \arrow[uu, two heads, tail, "\varphi_\beta^{-1}"] \arrow[rr, "g"] & & V \\
\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_\beta^{-1}"] \arrow[rr, mapsto, "g"] & & g(\mathbf{v}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] &
\end{tikzcd}
$$

これにより, $[f]_\alpha^\alpha = P^{-1}[g]_\beta^\beta P$ が成り立つことになり, 線形同型写像 L_P を用いて次式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
L_{[f]_\alpha^\alpha} &= L_{P^{-1}[g]_\beta^\beta P} \\
&= L_{P^{-1}} \circ L_{[g]_\beta^\beta} \circ L_P \\
&= L_P^{-1} \circ L_{[g]_\beta^\beta} \circ L_P
\end{aligned}
$$

したがって, 次式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[dd, two heads, tail, "L_P"] & & K^n \\
\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[dd, mapsto, "L_P"] & & {[f]_\alpha^\alpha \mathbf{v}} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & \\
 & K^n \arrow[rr, "L_{[g]_\beta^\beta}"] & & K^n \arrow[uu, two heads, tail, "L_P^{-1}"] \\
P\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "L_{[g]_\beta^\beta}"] & & {[g]_\beta^\beta P\mathbf{v}} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[uu, mapsto, "L_P^{-1}"] &
\end{tikzcd}
$$

これにより, 次式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "L_{[g]^\beta_\beta}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\beta"] & & K^n \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\beta"] \\
K^n \arrow[ur, tail, two heads, "L_P"] \arrow[rr, "L_{[f]^\alpha_\alpha}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] & & K^n \arrow[ur, tail, two heads, "L_P"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] & \\
 & V \arrow[rr, "g"] & & V \\
V \arrow[rr, "f"] & & V &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}) \arrow[rr, mapsto, "L_{[g]^\beta_\beta}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\beta"] & & {[g]^\beta_\beta}\,\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}) \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\beta"] \\
\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, mapsto, "L_P"] \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]^\alpha_\alpha}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & & {[f]^\alpha_\alpha}\,\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, mapsto, "L_P"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & \\
 & \mathbf{w} \arrow[rr, mapsto, "g"] & & g(\mathbf{w}) \\
\mathbf{v} \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f(\mathbf{v}) &
\end{tikzcd}
$$

$\forall i \in \mathit{\Lambda}_s$ に対し, 定理 2.6.1 よりその核 $\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ における冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の不変系 Q_i が $Q_i = (q_{ij})_{j \in \mathit{\Lambda}_{r_i}}$ と与えられたらば, 定理 2.8.20 よりその vector 空間 V のある基底 $\langle \mathcal{B}_i \rangle_{i \in \mathit{\Lambda}_s}$ が存在して, これが $\mathcal{B}$ とおかれると, これに関する線形写像 f の表現行列 $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ が次式のように表されることができる.

$$
[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}
J(\lambda_1; Q_1) & & & O \\
 & J(\lambda_2; Q_2) & & \\
 & & \ddots & \\
O & & & J(\lambda_s; Q_s)
\end{pmatrix}
$$

このとき, その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ を用いて次式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "L_{[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}}"] & & K^n \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \\
\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}}"] & & {[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}}\,\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & \\
 & V \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"] \arrow[rr, "f"] & & V \\
\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"] \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f(\mathbf{v}) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] &
\end{tikzcd}
$$

以上より, 次式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "L_{[g]_\beta^\beta}"] \arrow[dd, "\varphi_\beta"] & & K^n \arrow[dd, "\varphi_\beta"] \\
K^n \arrow[ur, "L_P"] \arrow[rr, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"] & & K^n \arrow[ur, "L_P"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"] & \\
 & V \arrow[rr, "g"] & & V \\
V \arrow[rr, "f"] & & V & \\
K^n \arrow[u, "\varphi_\mathcal{B}"] \arrow[rr, "L_{[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}"] & & K^n \arrow[u, "\varphi_\mathcal{B}"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}) \arrow[rr, mapsto, "L_{[g]_\beta^\beta}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\beta"] & & {[g]_\beta^\beta \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})} \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\beta"] \\
\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, mapsto, "L_P"] \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & & {[f]_\alpha^\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})} \arrow[ur, mapsto, "L_P"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & \\
 & \mathbf{w} \arrow[rr, mapsto, "g"] & & g(\mathbf{w}) \\
\mathbf{v} \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f(\mathbf{v}) & \\
\varphi_\mathcal{B}^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[u, mapsto, "\varphi_\mathcal{B}"] \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}"] & & {[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B} \varphi_\mathcal{B}^{-1}(\mathbf{v})} \arrow[u, mapsto, "\varphi_\mathcal{B}"] &
\end{tikzcd}
$$

ここで, 合成写像 $\varphi_\beta \circ L_P \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\mathcal{B}$ は線形同型写像であるから, この写像によるその vector 空間 K^n の直交標準基底の像々はその vector 空間 V の基底をなし, これが $\mathcal{C}$ とおかれると, その基底 $\mathcal{C}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_\mathcal{C}$ を用いて次式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "L_{[g]_\beta^\beta}"] \arrow[dd, "\varphi_\beta"] & & K^n \arrow[dd, "\varphi_\beta"] \\
K^n \arrow[ur, "L_P"] \arrow[rr, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"] & & K^n \arrow[ur, "L_P"] \arrow[dd, "\varphi_\alpha"] & \\
 & V \arrow[rr, "g"] & & V \\
V \arrow[rr, "f"] & & V & \\
 & K^n \arrow[uu, "\varphi_\mathcal{C}"] \arrow[rr, "L_{[g]_\mathcal{C}^\mathcal{C}}"] & & K^n \arrow[uu, "\varphi_\mathcal{C}"] \\
K^n \arrow[uu, "\varphi_\mathcal{B}"] \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "L_{[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}"] & & K^n \arrow[uu, "\varphi_\mathcal{B}"] \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}) \arrow[rr, mapsto, "L_{[g]_\beta^\beta}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\beta"] & & {[g]_\beta^\beta \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})} \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\beta"] \\
\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, mapsto, "L_P"] \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & & {[f]_\alpha^\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})} \arrow[ur, mapsto, "L_P"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & \\
 & \mathbf{w} \arrow[rr, mapsto, "g"] & & g(\mathbf{w}) \\
\mathbf{v} \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f(\mathbf{v}) & \\
 & \varphi_\mathcal{B}^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[uu, mapsto, "\varphi_\mathcal{C}"] \arrow[rr, mapsto, "L_{[g]_\mathcal{C}^\mathcal{C}}"] & & {[g]_\mathcal{C}^\mathcal{C} \varphi_\mathcal{B}^{-1}(\mathbf{v})} \arrow[uu, mapsto, "\varphi_\mathcal{C}"] \\
\varphi_\mathcal{B}^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[uu, mapsto, "\varphi_\mathcal{B}"] \arrow[ur, equal] \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}"] & & {[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B} \varphi_\mathcal{B}^{-1}(\mathbf{v})} \arrow[uu, mapsto, "\varphi_\mathcal{B}"] \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}
$$

これにより, その基底 $\mathcal{C}$ に関するその線形写像 g の表現行列 $[g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ について, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ が成り立つ. これにより, それらの線形写像たち f, g の Jordan 標準形がこれに入っている Jordan block の順序の違いを除けば一致する.

逆に, それらの線形写像たち f, g の Jordan 標準形がこれに入っている Jordan block の順序の違いを除けば一致するなら, 任意の基底たち α, β に関するそれらの線形写像たち f, g の表現行列たち $[f]_\alpha^\alpha$, $[g]_\beta^\beta$ を用いて次式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd}
& K^n \arrow[rr, "L_{[g]_\beta^\beta}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\beta"] & & K^n \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\beta"] \\
K^n \arrow[rr, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] & & K^n \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] & \\
& V \arrow[rr, "g"] & & V \\
V \arrow[rr, "f"] & & V & \\
& K^n \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{C}}"] & & K^n \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{C}}"] \\
K^n \arrow[rr, "L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}"] \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[ur, equal] & & K^n \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}) \arrow[rr, mapsto, "L_{[g]_\beta^\beta}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\beta"] & & {[g]_\beta^\beta \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})} \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\beta"] \\
\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & & {[f]_\alpha^\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})} \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & \\
& \mathbf{w} \arrow[rr, mapsto, "g"] & & g(\mathbf{w}) \\
\mathbf{v} \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f(\mathbf{v}) & \\
& \varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbf{w}) \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}"] & & {[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbf{w})} \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}"] \\
\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}"] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[ur, equal] & & {[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})} \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

ここで, 合成写像 $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{C}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_\alpha$ は線形同型写像であるから, これに対応する行列が P とおかれると, この行列 P は正則行列で次式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "L_{[g]_\beta^\beta}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\beta"] & & K^n \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\beta"] \\
K^n \arrow[ur, tail, two heads, "L_P"] \arrow[rr, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\alpha"'] & & K^n \arrow[ur, tail, two heads, "L_P"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] & \\
 & V \arrow[rr, "g"] & & V \\
V \arrow[rr, "f"] & & V & \\
 & K^n \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{C}}"] & & K^n \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{C}}"] \\
K^n \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}"] \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & K^n \arrow[ur, equal] \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}) \arrow[rr, mapsto, "L_{[g]_\beta^\beta}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\beta"] & & {[g]_\beta^\beta}\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}) \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\beta"] \\
\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, mapsto, "L_P"] \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]_\alpha^\alpha}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"'] & & {[f]_\alpha^\alpha}\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, mapsto, "L_P"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_\alpha"] & \\
 & \mathbf{w} \arrow[rr, mapsto, "g"] & & g(\mathbf{w}) \\
\mathbf{v} \arrow[rr, mapsto, "f"] & & f(\mathbf{v}) & \\
 & \varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbf{w}) \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}"] & & {[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbf{w}) \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}"] \\
\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, equal] \arrow[rr, mapsto, "L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}"] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & {[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \arrow[ur, equal] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] &
\end{tikzcd}
$$

したがって, 次式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
L_{[f]_\alpha^\alpha} &= L_P^{-1} \circ L_{[g]_\beta^\beta} \circ L_P \\
&= L_{P^{-1}} \circ L_{[g]_\beta^\beta} \circ L_P \\
&= L_{P^{-1}[g]_\beta^\beta P}
\end{aligned}
$$

これにより, $[f]_\alpha^\alpha = P^{-1}[g]_\beta^\beta P$ が成り立つことになり, したがって, $P[f]_\alpha^\alpha = [g]_\beta^\beta P$ が成り立つので, 任意の基底たち α, β に関するそれらの線形写像たち f, g の表現行列たち $[f]_\alpha^\alpha$, $[g]_\beta^\beta$ は相似である. $\square$

2.6.2 最小多項式

定義 2.6.3. Hamilton-Cayley の定理より体 K 上の多項式環 $K[X]$ の多項式 ρ のうち, これに体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f:V \rightarrow V$ を代入した写像 $\rho(f)$ が $\rho(f)=0$ を満たすものが存在するのであった. このようにその線形写像 $f:V \rightarrow V$ に対し, これを代入した写像が $0:V \rightarrow V$ となるような多項式たちのうちもとの定数でない多項式の次数が最小で最高次の係数が 1 であるようなものをその線形写像 f の最小多項式, これから定められる多項式写像をその線形写像 f の最小多項式写像といい, ここでは, どちらも φ_f と書くことにする.

定理 2.6.5. 体 K 上の多項式環 $K[X]$ の元 ρ の変数 X にその体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f:V \rightarrow V$ を代入した写像 $\rho(f)$ が $\rho(f)=0$ となるならそのときに限り, その線形写像 f の最小多項式 φ_f でその多項式 ρ が割り切れる.

証明. 体 K 上の多項式環 $K[X]$ の元 ρ の変数 X にその体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f:V \rightarrow V$ を代入した写像 $\rho(f)$ が $\rho(f)=0$ となるとき, その線形写像 f の最小多項式 φ_f でその多項式 ρ が

割られると, 除法の定理より $\exists q, r \in K[X]$ に対し, $\rho = q\varphi_f + r$ かつ $\deg r < \deg \varphi_f$ が成り立つ. このとき, それらの多項式たち q, r から定義される多項式写像たち q, r を用いて $\rho = q\varphi_f + r$ が成り立つ. したがって, 次のようになる.

$$0 = \rho(f) = q(f) \circ \varphi_f(f) + r(f) = r(f)$$

ここで, $0 < \deg r$ とすれば, $\deg r < \deg \varphi_f$ が成り立つかつ, $r(f) = 0$ が成り立つので, その多項式 φ_f がその線形写像 f の最小多項式でないことになるが, これは仮定に矛盾する. さらに, $r \neq \overline{0}$ とすれば, $r(f) \neq 0$ が成り立ち, $r(f) = 0$ が成り立つことに矛盾するので, $r = \overline{0}$ が成り立つ. このとき, $\rho = q\varphi_f$ が成り立つことになるので, その多項式 φ_f でその多項式 ρ が割り切れる.

逆に, その線形写像 f の最小多項式 φ_f でその多項式 ρ が割り切れるなら, $\exists q \in K[X]$ に対し, $\rho = q\varphi_f$ が成り立つので, $\rho = q\varphi_f$ が成り立つ. ここで, $\varphi_f(f) = 0$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\rho(f) = q(f) \circ \varphi_f(f) = 0$$

□

定理 2.6.6. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f: V \rightarrow V$ の最小多項式は一意的に存在する.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f: V \rightarrow V$ の最小多項式が φ_f, χ_f と与えられたとする. 定理 2.6.5 より $\exists q, r \in K[X]$ に対し, $\varphi_f = q\chi_f$ かつ $\chi_f = r\varphi_f$ が成り立つ. このとき, $\deg \varphi_f = \deg \chi_f$ が成り立つことにより, $\deg q = \deg r = 0$ が成り立つので, $\exists a, b \in K$ に対し, $q = \overline{a}$ かつ $r = \overline{b}$ が成り立つことになる. ここで, $a \neq 1$ とすれば, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_f &= q\chi_f \\
&= \overline{a} \sum_{i \in \varLambda_{\deg \chi_f} \cup \{0\}} \chi_f(i) X^i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{\deg \chi_f} \cup \{0\}} \overline{a}\overline{\chi_f(i)} X^i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{\deg \chi_f} \cup \{0\}} \overline{a\chi_f(i)} X^i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{\deg q\chi_f} \cup \{0\}} \overline{(q\chi_f)(i)} X^i
\end{aligned}$$

その多項式 $q\chi_f$ の最高次の係数 $\overline{(q\chi_f)(\deg q\chi_f)}$ が $\overline{a\chi_f(\deg \chi_f)}$ に等しいので, その最高次の係数は $\overline{1}$ でないことになるが, $\varphi_f = q\chi_f$ が成り立つことにより最小多項式写像の定義に矛盾する. したがって, $a = 1$ が成り立つ. 同様にして, $b = 1$ が成り立つ. このとき, $\varphi_f = \chi_f$ が成り立つので, その線形写像 $f: V \rightarrow V$ の最小多項式は一意的に存在する. □

定理 2.6.7. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f: V \rightarrow V$ の固有多項式 $\varPhi_f$ はその線形写像 $f: V \rightarrow V$ の最小多項式 φ_f で割り切れる.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f: V \rightarrow V$ の固有多項式 $\varPhi_f$ は Hamilton-Cayley の定理より $\varPhi_f(f) = 0$ を満たす. ここで, 定理 2.6.5 よりその多項式 $\varPhi_f$ はその線形写像 $f: V \rightarrow V$ の最小多項式 φ_f で割り切れる. □

定理 2.6.8. 体 K の部分体 K' 上の $A \in \mathrm{M}(n,n,K')$ なる行列 A を用いた線形写像 $L'_A : {K'}^n \rightarrow {K'}^n; \mathbf{w} \mapsto A\mathbf{w}$ の最小多項式 $\varphi_{L'_A}$ は線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n; \mathbf{w} \mapsto A\mathbf{w}$ の最小多項式 φ_{L_A} に等しい. 特に, この定理は $K = \mathbb{C}$, $K' = \mathbb{R}$ のときに便利である.

証明. 体 K の部分体 K' 上の $A \in \mathrm{M}(n,n,K')$ なる行列 A を用いた線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n; \mathbf{w} \mapsto A\mathbf{w}$ の最小多項式 φ_{L_A}, 線形写像 $L'_A : {K'}^n \rightarrow {K'}^n; \mathbf{w} \mapsto A\mathbf{w}$ の最小多項式 $\varphi_{L'_A}$ が与えられたとき, 定理 2.6.5 より $\exists q \in K[X]$ に対し, $\varphi_{L'_A} = q\varphi_{L_A}$ が成り立つので, $\deg \varphi_{L_A} \leq \deg \varphi_{L'_A}$ が成り立つ.

一方で, $d = \deg \varphi_{L_A}$ として Hamilton-Cayley の定理より次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_{L_A}(L_A) &= \sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) L_A^i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) L_{A^i} \\
&= L_{\sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) A^i} \\
&= L_{\varphi_{L_A}(A)} = 0
\end{aligned}$$

したがって, $\varphi_{L_A}(A) = O$ が成り立つ. これにより, それらの vectorsA^i はその体 K で線形従属である.

ここで, $\mathrm{M}(n,n,K') = {K'}^{n^2}$ が成り立つとみなして, $i \in \varLambda_m$ なるその vector 空間 $\mathrm{M}(n,n,K')$ の元々 A_i が線形独立であるなら, $m \leq n^2$ が成り立って $i \in \varLambda_{n^2} \setminus \varLambda_m$ なるその vector 空間 $\mathrm{M}(n,n,K')$ の元々 A_i を用いて組 $\langle A_i \rangle_{i \in \varLambda_{n^2}}$ がその vector 空間 $\mathrm{M}(n,n,K')$ の基底となるようにすることができる. このとき, その vector 空間 $\mathrm{M}(n,n,K')$ の標準直交基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \varLambda_{n^2}}$ をなす vectors$\mathbf{e}_i$ はいづれもそれらの vectorsA_i の線形結合である. ここで, $\forall A' \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A' はそれらの vectors$\mathbf{e}_i$ の線形結合であるから, それらの vectorsA_i の線形結合でもある. したがって, その組 $\langle A_i \rangle_{i \in \varLambda_{n^2}}$ はその vector 空間 $\mathrm{M}(n,n,K)$ の基底でもある. したがって, $i \in \varLambda_m$ なるその vector 空間 $\mathrm{M}(n,n,K)$ の元々 A_i も線形独立である.

対偶律よりしたがって, それらの vectorsA^i はその体 K' で線形従属である. これにより, $i \in \varLambda_d \cup \{0\}$ なる全てが 0 でない体 K' の元々 k_i を用いて次式が成り立つ.

$$\sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} k_i A^i = O$$

このとき, 多項式環 $K'[X]$ における $P = \sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} k_i X^i$ なる多項式 P は定数でなくこれから定義される多項式写像 P に対し, 次のようになることから,

$$P(L_A) = \sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} k_i L_A^i = \sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} k_i L_{A^i} = L_{P(A)} = L_O = 0$$

定理 2.6.5 よりその多項式 P はその多項式 $\varphi_{L'_A}$ で割り切れるので, 次式が成り立つ.

$$\deg \varphi_{L'_A} \leq \deg P = d = \deg \varphi_{L_A}$$

以上より, $\deg \varphi_{L_A} = \deg \varphi_{L'_A}$ が成り立つことになり, ここで, $P = r\varphi_{L'_A}$ とおかれると, $\deg q = \deg r = 0$ が成り立つので, $\exists a, b \in K$ に対し, $q = \overline{a}$ かつ $r = \overline{b}$ が成り立つことになる. ここで, $a \neq 1$, $d' = \deg q\varphi_{L_A}$ とすれば, 次のようになることから,

$$\varphi_{L'_A} = q\varphi_{L_A}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{a} \sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) X^i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} \overline{a} \overline{\varphi_{L_A}(i)} X^i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} \overline{a \varphi_{L_A}(i)} X^i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{d'} \cup \{0\}} \overline{\left(q \varphi_{L_A}\right)(i)} X^i
\end{aligned}$$

その多項式 $q\varphi_{L_A}$ の最高次の係数 $\overline{\left(q\varphi_{L_A}\right)(d')}$ が $\overline{a\varphi(d)}$ に等しいので, その最高次の係数は $\overline{1}$ でないことになるが, $\varphi_{L'_A} = q\varphi_{L_A}$ が成り立つことにより最小多項式写像の定義に矛盾する. したがって, $a = 1$ が成り立つ. 同様にして, $b = 1$ が成り立つので, よって, $\varphi_{L_A} = \varphi_{L'_A}$ が成り立つ, 即ち, その最小多項式 $\varphi_{L'_A}$ はその最小多項式 φ_{L_A} に等しい. □

定理 2.6.9. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f: V \to V$ の最小多項式 φ_f について, その体 K の元 λ がその線形写像 f の固有値であるなら, $\varphi_f(\lambda) = 0$ が成り立つ.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f: V \to V$ の最小多項式 φ_f について, その体 K の元 λ がその線形写像 f の固有値であるなら, Frobenius の定理より体 K の元 $\varphi_f(\lambda)$ はその線形写像 $\varphi_f(f)$ の固有値である. ここで, Hamilton-Cayley の定理より $\varphi_f(f) = 0$ が成り立つので, その vector 空間 V の 1 つの基底 α を用いて次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi_f(f)}\left(\varphi_f(\lambda)\right) &= \det\left[\varphi_f(\lambda) I_V - \varphi_f(f)\right]_\alpha^\alpha \\
&= \det\left[\varphi_f(\lambda) I_V\right]_\alpha^\alpha \\
&= \varphi_f(\lambda) \det\left[I_V\right]_\alpha^\alpha \\
&= \varphi_f(\lambda) \det I_n \\
&= \varphi_f(\lambda) = 0
\end{aligned}$$

以上より, $\varphi_f(\lambda) = 0$ が成り立つ. □

定理 2.6.10. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f: V \to V$ の固有多項式 $\varPhi_f$ と最小多項式 φ_f について互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\sum_{i \in \varLambda_s} n_i = n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$\varPhi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} \left(X - \lambda_i\right)^{n_i}$$

$\forall i \in \varLambda_s \exists \nu_i \in \varLambda_{n_i}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\varphi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} \left(X - \lambda_i\right)^{\nu_i}$$

これにより, 固有多項式の因数分解の形が知られているのであれば, その自然数たち ν_i の値を 1 つ 1 つたしかめることで最小多項式が求められることができる.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f: V \to V$ の固有多項式 $\varPhi_f$ と最小多項式 φ_f について互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\sum_{i \in \varLambda_s} n_i = n$ として次式のように表されることができ

るので, そうするとき,

$$\Phi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

定理 2.6.7 より $\exists q \in K[X]$ に対し, $\Phi_f = q\varphi_f$ が成り立つので, $\forall i \in \Lambda_s \exists \nu_i \in \Lambda_{n_i} \cup \{0\}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\varphi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} \left(X - \overline{\lambda_i}\right)^{\nu_i}$$

一方で, 定理 2.6.9 より $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, その体の元 λ_i がその多項式 φ_f の根であるから, 因数定理より $\nu_i \neq 0$ が成り立つ. 以上より, $\forall i \in \Lambda_s \exists \nu_i \in \Lambda_{n_i}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\varphi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} \left(X - \overline{\lambda_i}\right)^{\nu_i}$$

□

定理 2.6.11. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f: V \to V$ の最小多項式 φ_f について, 分解定理と定理 2.6.1 より $i \in \Lambda_s$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i を用いた線形写像たち $\lambda_i I_V - f$ はいずれもその固有値 λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ における冪零変換でこれの指数が q_i とおかれると, 次式が成り立つ.

$$\varphi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)^{q_i}$$

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f: V \to V$ の最小多項式 φ_f について, 分解定理と定理 2.6.1 より $i \in \Lambda_s$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i を用いた線形写像たち $\lambda_i I_V - f$ はいずれもその固有値 λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ における冪零変換でこれの指数が q_i とおかれるとする. 多項式環 $K[X]$ の次式のような元 $\widetilde{\varphi}$ について,

$$\widetilde{\varphi} = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)^{q_i}$$

$\forall i \in \Lambda_s$ に対し, $P_i = (X - \lambda_i)^{q_i}$ なる多項式 P_i から定義される多項式写像 P_i とその多項式 P_i の変数 X にその広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ におけるその線形写像 f を代入した写像 $P_i(f)$ は $P_i(f) = (f - \lambda_i I_V)^{q_i} = (-1)^{q_i} (\lambda_i I_V - f)^{q_i} = 0$ を満たす. さらに, $\forall q \in \Lambda_{q_i - 1}$ に対し, $(\lambda_i I_V - f)^q \neq 0$ が成り立つので, その多項式 P_i がその広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ における線形写像 f の最小多項式となる. ここで, それらの広義の固有空間たち $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ においても $\varphi_f(f) = 0$ が成り立つので, その最小多項式 φ_f はその多項式 $(X - \lambda_i)^{q_i}$ で割り切れる. このことは全ての添数 i に対してもいえるので, その最小多項式 φ_f はその多項式 $\widetilde{\varphi}$ で割り切れ, $\exists q \in K[X]$ に対し, $\varphi_f = q\widetilde{\varphi}$ が成り立つ.

逆に, その多項式 $\widetilde{\varphi}$ から定義される多項式写像 $\widetilde{\varphi}$ について, $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, その広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ においても次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(f) &= \prod_{i' \in \Lambda_s} (f - \lambda_{i'} I_V)^{q_{i'}} \\
&= \prod_{i' \in \Lambda_s} (-1)^{q_{i'}} (\lambda_{i'} I_V - f)^{q_{i'}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{q_i} (\lambda_i I_V - f)^{q_i} \circ \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} (-1)^{q_{i'}} (\lambda_{i'} I_V - f)^{q_{i'}} \\
&= (-1)^{q_i} 0 \circ \prod_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} (-1)^{q_{i'}} (\lambda_{i'} I_V - f)^{q_{i'}} = 0
\end{aligned}$$

分解定理より $V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} \widetilde{W_f}(\lambda_i)$ が成り立ち, したがって, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, それらの広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ の元々 $\mathbf{w}_i$ を用いて $\mathbf{v} = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i$ と一意的に表されることができるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(f)(\mathbf{v}) &= \widetilde{\varphi}(f) \left(\bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i \right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \widetilde{\varphi}(f)(\mathbf{w}_i) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

したがって, $\widetilde{\varphi}(f) = 0$ が成り立つので, 定理 2.6.5 よりその多項式 $\widetilde{\varphi}$ はその多項式 φ_f で割り切れ, $\exists r \in K[X]$ に対し, $\varphi_f = r\widetilde{\varphi}$ が成り立つ.

以上より, $\deg \varphi_f = \deg \widetilde{\varphi}$ が成り立つことになり, $\deg q = \deg r = 0$ が成り立つので, $\exists a, b \in K$ に対し, $q = \overline{a}$ かつ $r = \overline{b}$ が成り立つことになる. ここで, $a \neq 1$ とすれば, $d = \deg \varphi_f$, $d' = \deg q\varphi_f$ として次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} &= q\varphi_f \\
&= \overline{a} \sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} \varphi_f(i) X^i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} \overline{a}\,\overline{\varphi_f(i)} X^i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_d \cup \{0\}} \overline{a\varphi_f(i)} X^i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{d'} \cup \{0\}} \overline{(q\varphi_f)(i)} X^i
\end{aligned}$$

その多項式 $q\varphi_f$ の最高次の係数 $\overline{(q\varphi_f)(d')}$ が $\overline{a\varphi_f(d)}$ に等しいので, その最高次の係数は $\overline{1}$ でないことになるが, $\widetilde{\varphi} = q\varphi_f$ が成り立つことによりその多項式 $\widetilde{\varphi}$ の定義に矛盾する. したがって, $a = 1$ が成り立つ. 同様にして, $b = 1$ が成り立つので, よって, $\varphi_f = \widetilde{\varphi}$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$\varphi_f = \widetilde{\varphi} = \prod_{i \in \varLambda_s} (X - \lambda_i)^{q_i}$$

□

2.6.3 対角化条件

定理 2.6.12 (対角化条件)**.** 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f : V \to V$ の最小多項式 φ_f が $i \in \varLambda_s$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i を用いて次式を満たすならそのときに

限り,

$$\varphi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} (X - \lambda_i)$$

その線形写像 f は対角化可能である[*10].

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f : V \rightarrow V$ の最小多項式 φ_f が $i \in \varLambda_s$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i を用いて次式を満たすならそのときに限り,

$$\varphi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} (X - \lambda_i)$$

分解定理と定理 2.6.1, 定理 2.6.11 より $i \in \varLambda_s$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i を用いた線形写像たち $\lambda_i I_V - f$ はいずれもそれらの固有値たち λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ における指数 1 の冪零変換である. これが成り立つならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, $Q_i = (q_{ij})_{j \in \varLambda_{r_i}}$ なるその冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の不変系 Q_i をなす自然数たちがいづれも 1 であるから, その線形写像 f の Jordan 標準形 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次のようになり,

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1; Q_1) & & & O \\ & J(\lambda_2; Q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_s; Q_s) \end{pmatrix}$$

これに入っている Jordan 塊 $J(\lambda_i; Q_1)$ が次式のように表される.

$$\begin{aligned} J(\lambda_i; Q_i) &= \begin{pmatrix} J(\lambda_i, q_{i1}) & & & O \\ & J(\lambda_i, q_{i2}) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_i, q_{ir_i}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J(\lambda_i, 1) & & & O \\ & J(\lambda_i, 1) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_i, 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_i & & & O \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これにより, $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, その冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の不変系 Q_i をなす自然数たちがいづれも 1 であるならそのときに限り, 定理 2.6.11 よりその冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の指数が 1 となりその線形写像 f は対角化可能である. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p287-296 ISBN978-4-00-029872-8

[*10] ぜひ定理 2.4.15 と比較してみるといいかも.

2.7 Jordan 分解

2.7.1 Jordan 分解

定理 2.7.1 (Jordan 分解)**.** 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における任意の線形写像 $f:V\rightarrow V$ に対し, 対角化可能な線形写像 $R:V\rightarrow V$ と冪零変換 $G:V\rightarrow V$ が存在して $f=R+G$ が成り立つかつ, $R\circ G=G\circ R$ が成り立つ.

この定理を Jordan 分解という.

より詳しくいえば, そのような線形写像 R の一例として[*11], 分解定理よりその線形写像 f の互いに異なる固有値の族 $\left\{\lambda_i\right\}_{i\in\Lambda_s}$ が与えられたらば, これらの広義の固有空間たち $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ を用いて $V=\bigoplus_{i\in\Lambda_s}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ が成り立つので, その vector 空間 V からその広義の固有空間 $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ への直和分解から定まる射影 P_i を用いて $R=\sum_{i\in\Lambda_s}\lambda_iP_i$ が成り立つ. この定理を $S+N$ 分解ともいう[*12].

定義 2.7.1. 上記の定理における線形写像たち R, G をそれぞれその線形写像 f の半単純部分, 冪零部分という.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における任意の線形写像 $f:V\rightarrow V$ に対し, これの固有多項式 $\varPhi_f$ が互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\sum_{i\in\Lambda_s}n_i=n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$\varPhi_f=\prod_{i\in\Lambda_s}\left(X-\lambda_i\right)^{n_i}$$

分解定理より $\forall i\in\Lambda_s$ に対し, その線形写像 f の固有値 λ_i の広義の固有空間 $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ は $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)=\ker\left(\lambda_iI_V-f\right)^{n_i}$ を満たす. このとき, この広義の固有空間 $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ における線形写像 λ_iI_V-f は冪零変換であり, その広義の固有空間 $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ においてそれらの線形写像たち λ_iI_V, $f-\lambda_iI_V$ と一致するような線形写像たち R, G が与えられたらば, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 分解定理より $V=\bigoplus_{i\in\Lambda_s}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ が成り立つので, それらの広義の固有空間たち $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ の元 $\mathbf{w}_i$ を用いて $\mathbf{v}=\bigoplus_{i\in\Lambda_s}\mathbf{w}_i$ と一意的に表されることができて次のようになる.

$$\begin{aligned}
f\left(\mathbf{v}\right)&=f\left(\bigoplus_{i\in\Lambda_s}\mathbf{w}_i\right)\\
&=\left(\lambda_iI_V+f-\lambda_iI_V\right)\left(\bigoplus_{i\in\Lambda_s}\mathbf{w}_i\right)\\
&=\lambda_iI_V\left(\bigoplus_{i\in\Lambda_s}\mathbf{w}_i\right)+\left(f-\lambda_iI_V\right)\left(\bigoplus_{i\in\Lambda_s}\mathbf{w}_i\right)\\
&=\sum_{i\in\Lambda_s}\lambda_iI_V\left(\mathbf{w}_i\right)+\sum_{i\in\Lambda_s}\left(f-\lambda_iI_V\right)\left(\mathbf{w}_i\right)
\end{aligned}$$

[*11] ホントは後述するようにコレしかない.

[*12] 半単純：semi-simple, 冪零：nilpotent が語源らしい.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \varLambda_s} R\left(\mathbf{w}_i\right) + \sum_{i \in \varLambda_s} G\left(\mathbf{w}_i\right) \\
&= R\left(\bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i\right) + G\left(\bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i\right) \\
&= (R + G)\left(\bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i\right) \\
&= (R + G)(\mathbf{v}) \\
R \circ G(\mathbf{v}) &= R \circ G\left(\bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} R \circ G\left(\mathbf{w}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \left(\lambda_i I_V\right) \circ \left(f - \lambda_i I_V\right)\left(\mathbf{w}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \left(f - \lambda_i I_V\right) \circ \left(\lambda_i I_V\right)\left(\mathbf{w}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} G \circ R\left(\mathbf{w}_i\right) \\
&= G \circ R\left(\bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i\right) \\
&= G \circ R(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

したがって, $f = R + G$ が成り立つかつ, $R \circ G = G \circ R$ が成り立つ.

さらに, $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, 分解定理, 定理 2.6.1 よりその線形写像 $f - \lambda_i I_V$ はその広義の固有空間 $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ で冪零変換であるから, これの指数が q_i とおかれると, $q_i \leq \max\left\{q_i\right\}_{i \in \varLambda_s}$ が成り立ち, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 分解定理より $V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} \widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ が成り立つので, それらの広義の固有空間たち $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ の元 $\mathbf{w}_i$ を用いて $\mathbf{v} = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i$ と一意的に表されることができて $q = \max\left\{q_i\right\}_{i \in \varLambda_s}$ とおくと, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
G^q(\mathbf{v}) &= G^q\left(\bigoplus_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} G^q\left(\mathbf{w}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \left(f - \lambda_i I_V\right)^q\left(\mathbf{w}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \left(f - \lambda_i I_V\right)^{q - q_i} \circ \left(f - \lambda_i I_V\right)^{q_i}\left(\mathbf{w}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \left(f - \lambda_i I_V\right)^{q - q_i}(\mathbf{0}) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

ゆえに, その線形写像 G は冪零変換である.

最後に, その vector 空間 V のある基底 $\mathcal{B}$ が存在してその線形写像 f の Jordan 標準形 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式のように表されるとき, $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, その冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の不変系 Q_i が $Q_i = \left(q_{ij}\right)_{j \in \varLambda_{r_i}}$ と与えられたなら,

その線形写像 f の Jordan 標準形 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次のようになる.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1; Q_1) & & & O \\ & J(\lambda_2; Q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_s; Q_s) \end{pmatrix}$$

$\forall i \in \varLambda_s$ に対し, 分解定理よりその広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ の次元はその自然数 n_i に等しく, 定理 2.5.3 より次式のような n_i つの vectors の組 $\mathcal{C}_i$ はその広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ の基底をなす.

$$\mathcal{C}_i = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_{i1} & \mathbf{v}_{i2} & \cdots & \mathbf{v}_{ir_i} \\ (\lambda_i I_V - f)(\mathbf{v}_{i1}) & (\lambda_i I_V - f)(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & (\lambda_i I_V - f)(\mathbf{v}_{ir_i}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_i I_V - f)^{q_{i1}-1}(\mathbf{v}_1) & (\lambda_i I_V - f)^{q_{i2}-1}(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & (\lambda_i I_V - f)^{q_{ir_i}-1}(\mathbf{v}_{ir_i}) \end{matrix} \right\rangle$$

このとき, 次式のような n_i つの vectors の組 $\mathcal{C}_i'$ はその広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ の基底をなし,

$$\mathcal{C}_i' = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_{i1} & \mathbf{v}_{i2} & \cdots & \mathbf{v}_{ir_i} \\ (f - \lambda_i I_V)(\mathbf{v}_{i1}) & (f - \lambda_i I_V)(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & (f - \lambda_i I_V)(\mathbf{v}_{ir_i}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f - \lambda_i I_V)^{q_{i1}-1}(\mathbf{v}_1) & (f - \lambda_i I_V)^{q_{i2}-1}(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & (f - \lambda_i I_V)^{q_{ir_i}-1}(\mathbf{v}_{ir_i}) \end{matrix} \right\rangle$$

線形写像 $f - \lambda_i I_V$ も定理 2.5.3, 定理 2.5.6 より不変系 Q_i のその広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ における冪零変換でもあるので, 定理 2.5.3, 定理 2.5.9 より $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, $q_i = q_{i1}$ が成り立つかつ, ある基底 $\mathcal{B}_i$ が存在してこれに関するその冪零変換 $f - \lambda_i I_V$ の表現行列 $[f - \lambda_i I_V]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}$ が次式のように表されることができる.

$$[f - \lambda_i I_V]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} = J(0; Q_i) = \begin{pmatrix} J(0, q_{i1}) & & & O \\ & J(0, q_{i2}) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0, q_{ir_i}) \end{pmatrix}$$

このとき, その基底 $\mathcal{B}_i$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}_i} : K^{n_i} \rightarrow \widetilde{W_f}(\lambda_i)$ を用いれば, 次式が成り立つかつ,

$$\begin{tikzcd}
 & K^{n_i} \arrow[rr, "\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1} \circ (f - \lambda_i I_V) \circ \varphi_{\mathcal{B}_i}"] & & K^{n_i} \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}_i}"] \\
\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}(\mathbf{w}_i) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1} \circ (f - \lambda_i I_V) \circ \varphi_{\mathcal{B}_i}"] & & {[f - \lambda_i I_V]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} \varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}(\mathbf{w}_i)} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}_i}"] & \\
 & \widetilde{W_f}(\lambda_i) \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}"] \arrow[rr, "f - \lambda_i I_V"] & & \widetilde{W_f}(\lambda_i) \\
\mathbf{w}_i \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}"] \arrow[rr, mapsto, "f - \lambda_i I_V"] & & (f - \lambda_i I_V)(\mathbf{w}_i) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] &
\end{tikzcd}$$

例えば, $\mathcal{B}=\langle\mathcal{B}_i\rangle_{i\in\varLambda_s}$ とおくと, その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}:K^n\rightarrow V$ を用いれば, $\forall\mathbf{k}\in K^n$ に対し, それらの広義の固有空間たち $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ の元 $\mathbf{w}_i$ を用いて $\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right)=\bigoplus_{i\in\varLambda_s}\mathbf{w}_i$ と一意的に表されることができて次のようになることから,

$$\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ G\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & K^n \\
\mathbf{k} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ G\circ\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & & \left[G\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\mathbf{k} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & \\
 & V \arrow[rr, "G"] & & V \arrow[uu, tail, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \\
\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "G"] & & f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] &
\end{tikzcd}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ G\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{k}\right)&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ G\left(\bigoplus_{i\in\varLambda_s}\mathbf{w}_i\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_s}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ G\left(\mathbf{w}_i\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_s}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}_i}\circ\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}\circ G\circ\varphi_{\mathcal{B}_i}\circ\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}\left(\mathbf{w}_i\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_s}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}_i}\circ\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}\circ\left(f-\lambda_iI_V\right)\circ\varphi_{\mathcal{B}_i}\circ\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}\left(\mathbf{w}_i\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_s}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}_i}\left(\left[f-\lambda_iI_V\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}\varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}\left(\mathbf{w}_i\right)\right)\\
&=\begin{pmatrix}\left[f-\lambda_1I_V\right]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}\varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right)\\\mathbf{0}\\\vdots\\\mathbf{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\left[f-\lambda_2I_V\right]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}\varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right)\\\vdots\\\mathbf{0}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\vdots\\\left[f-\lambda_sI_V\right]_{\mathcal{B}_s}^{\mathcal{B}_s}\varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}J\left(0;Q_1\right)\varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right)\\\mathbf{0}\\\vdots\\\mathbf{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\J\left(0;Q_2\right)\varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right)\\\vdots\\\mathbf{0}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\vdots\\J\left(0;Q_s\right)\varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}J\left(0;Q_1\right)\\O\\\vdots\\O\end{pmatrix}\varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}\left(\mathbf{w}_1\right)+\begin{pmatrix}O\\J\left(0;Q_2\right)\\\vdots\\O\end{pmatrix}\varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\mathbf{w}_2\right)+\cdots+\begin{pmatrix}O\\O\\\vdots\\J\left(0;Q_s\right)\end{pmatrix}\varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}\left(\mathbf{w}_s\right)
\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix} J(0;Q_1) & & & O \\ & J(0;Q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0;Q_s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}(\mathbf{w}_s) \end{pmatrix}$$

ここで, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}(\mathbf{w}_s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}(\mathbf{w}_s) \end{pmatrix} \\ &= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}_1) + \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}_2) + \cdots + \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}_s) \\ &= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\bigoplus_{j \in \Lambda_s} \mathbf{w}_j\right) \\ &= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\end{aligned}$$

次のようになる.

$$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ G \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} J(0;Q_1) & & & O \\ & J(0;Q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0;Q_s) \end{pmatrix}\mathbf{k}$$

以上より, 次式が成り立つ.

$$[G]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J(0;Q_1) & & & O \\ & J(0;Q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0;Q_s) \end{pmatrix}$$

これにより, 次のようになる.

$$\begin{aligned}[R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= [G+R-G]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\ &= [G+R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - [G]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\ &= [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - [G]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} J(\lambda_1;Q_1) & & & O \\ & J(\lambda_2;Q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_s;Q_s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} J(0;Q_1) & & & O \\ & J(0;Q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(0;Q_s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & O \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって, その線形写像 R は対角化可能である.

よって, 対角化可能な線形写像 $R: V \to V$ と冪零変換 $G: V \to V$ が存在して $f = R + G$ が成り立つかつ, $R \circ G = G \circ R$ が成り立つ.

より詳しくいえば, 分解定理より $V=\bigoplus_{i\in\varLambda_s}\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ が成り立つので, その vector 空間 V からその広義の固有空間 $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ への直和分解から定まる射影 P_i を用いて $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, それらの広義の固有空間たち $\widetilde{W_f}\left(\lambda_i\right)$ の元 $\mathbf{w}_i$ を用いて $\mathbf{v}=\bigoplus_{i\in\varLambda_s}\mathbf{w}_i$ と一意的に表されることができて次のようになる.

$$\begin{aligned}
R\left(\mathbf{v}\right)&=R\left(\bigoplus_{i\in\varLambda_s}\mathbf{w}_i\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_s}R\left(\mathbf{w}_i\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_s}\lambda_iI_V\left(\mathbf{w}_i\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_s}\lambda_i\mathbf{w}_i\\
&=\sum_{i\in\varLambda_s}\lambda_iP_i\left(\bigoplus_{j\in\varLambda_s}\mathbf{w}_j\right)\\
&=\sum_{i\in\varLambda_s}\lambda_iP_i\left(\mathbf{v}\right)\\
&=\left(\sum_{i\in\varLambda_s}\lambda_iP_i\right)\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}$$

したがって, $R=\sum_{i\in\varLambda_s}\lambda_iP_i$ が成り立つ. □

2.7.2 同時対角化

定理 2.7.2. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における対角化可能な線形写像 $R:V\rightarrow V$, R-不変なその vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 線形写像 $R|W:W\rightarrow W$ も対角化可能である.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における対角化可能な線形写像 $R:V\rightarrow V$, R-不変なその vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 定理 2.6.12 よりその線形写像 R の最小多項式 φ_R がその線形写像 R の $i\in\varLambda_s$ なる互いに異なる固有値たち λ_i を用いて次式を満たすかつ,

$$\varphi_R=\prod_{i\in\varLambda_s}\left(X-\lambda_i\right)$$

Hamilton-Cayley の定理より $\varphi_R(R)=0$ が成り立つので, もちろん, $\varphi_R\left(R|W\right)=0$ が成り立つ. したがって, その線形写像 R の最小多項式 φ_R, その線形写像 $R|W$ の最小多項式 $\varphi_{R|W}$ において, 定理 2.6.7 よりその多項式 φ_R はその多項式 $\varphi_{R|W}$ で割り切れる. ゆえに, その集合 $\varLambda_s$ の部分集合 $\varLambda'$ を用いて次式が成り立つ.

$$\varphi_{R|W}=\prod_{i\in\varLambda'}\left(X-\lambda_i\right)$$

これにより, 定理 2.6.12 よりその線形写像 $R|W$ もその部分 vector 空間 W で対角化可能である. □

定理 2.7.3 (同時対角化)**.** 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における対角化可能な線形写像たち $R:V\rightarrow V$, $S:V\rightarrow V$ が与えられたとき, $S\circ R=R\circ S$ が成り立つなら, その vector 空間 V のある基底 $\mathcal{B}$ が存在してこれに関するそれらの線形写像たち R, S の表現行列たち $[R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, $[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となる.

この定理での基底 $\mathcal{B}$ をとること, あるいは, この定理を同時対角化という. このことから明らかに, $\forall k, l \in K$ に対し, 線形写像 $kR + lS$ もその基底 $\mathcal{B}$ で対角化可能である.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における対角化可能な線形写像たち $R : V \rightarrow V$, $S : V \rightarrow V$ が与えられたとき, $S \circ R = R \circ S$ が成り立つなら, その線形写像 R の互いに異なる $i \in \Lambda_s$ なる固有値たち λ_i を用いれば, その線形写像 R は対角化可能であるから, その固有値 λ_i に対する固有空間 $W_R(\lambda_i)$ を用いれば, 定理 2.4.15 より $V = \bigoplus_{i \in \Lambda_s} W_R(\lambda_i)$ が成り立つ. ここで, $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, その固有空間 $W_R(\lambda_i)$ は定理 2.5.9 より R-不変で, $\forall \mathbf{w} \in W_R(\lambda_i)$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned} R(S(\mathbf{w})) &= R \circ S(\mathbf{w}) \\ &= S \circ R(\mathbf{w}) \\ &= S(R(\mathbf{w})) \\ &= S(\lambda_i \mathbf{w}) = \lambda_i S(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

$S(\mathbf{w}) \in W_R(\lambda_i)$ が成り立つので, その固有空間 $W_R(\lambda_i)$ は S-不変でもある. ここで, その線形写像 S は対角化可能なので, 定理 2.7.2 より線形写像 $S|W_R(\lambda_i)$ も対角化可能である. したがって, あるその固有空間 $W_R(\lambda_i)$ の基底 $\mathcal{B}_i$ が存在して, これに関するその線形写像 $S|W_R(\lambda_i)$ の表現行列 $[S|W_R(\lambda_i)]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}$ は対角行列である. ここで, $\mathcal{B} = \langle \mathcal{B}_i \rangle_{i \in \Lambda_s}$ とおかれれば, その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V$ を用いれば, 次のようになることから,

$$\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[rr, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ S \circ \varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & & K^n \arrow[dl, phantom, "\ni"] \\
\mathbf{k} \arrow[rr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ S \circ \varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & {[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \mathbf{k}} & \\
 & V \arrow[rr, "S"] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & & V \arrow[uu, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"'] \arrow[dl, phantom, "\ni"] \\
\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) \arrow[rr, mapsto, "S"] & & S \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) \arrow[uu, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

$\forall \mathbf{k} \in K^n$ に対し, その固有空間 $W_R(\lambda_i)$ の元 $\mathbf{w}_i$ を用いて $\mathbf{v} = \bigoplus_{i \in \Lambda_s} \mathbf{w}_i$ と一意的に表されることができるので, $S|W_R(\lambda_i) = (W_R(\lambda_i) \rightarrow W_R(\lambda_i); \mathbf{v} \mapsto S(\mathbf{v}))$ と同一視すると次のようになる.

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ S \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) &= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ S \left(\bigoplus_{i \in \Lambda_s} \mathbf{w}_i \right) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_s} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ S(\mathbf{w}_i) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_s} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}_i} \circ \varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1} \circ S|W_R(\lambda_i) \circ \varphi_{\mathcal{B}_i} \circ \varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}(\mathbf{w}_i) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_s} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}_i} \left([S|W_R(\lambda_i)]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} \varphi_{\mathcal{B}_i}^{-1}(\mathbf{w}_i) \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} [S|W_R(\lambda_1)]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [S|W_R(\lambda_2)]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2} \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \\
&\quad \cdots + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [S|W_R(\lambda_s)]^{\mathcal{B}_s}_{\mathcal{B}_s} \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}(\mathbf{w}_s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [S|W_R(\lambda_1)]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1} & & & O \\ & [S|W_R(\lambda_2)]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & [S|W_R(\lambda_s)]^{\mathcal{B}_s}_{\mathcal{B}_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}(\mathbf{w}_s) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}(\mathbf{w}_s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\mathbf{w}_1) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \varphi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(\mathbf{w}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \varphi_{\mathcal{B}_s}^{-1}(\mathbf{w}_s) \end{pmatrix} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}_1) + \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}_2) + \cdots + \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}_s) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\bigoplus_{j \in \Lambda_s} \mathbf{w}_j \right) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}
\end{aligned}
$$

次のようになる.

$$
\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ S \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} [S|W_R(\lambda_1)]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1} & & & O \\ & [S|W_R(\lambda_2)]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & [S|W_R(\lambda_s)]^{\mathcal{B}_s}_{\mathcal{B}_s} \end{pmatrix} \mathbf{k}
$$

したがって, 次式が成り立つので,

$$
[S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [S|W_R(\lambda_1)]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1} & & & O \\ & [S|W_R(\lambda_2)]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & [S|W_R(\lambda_s)]^{\mathcal{B}_s}_{\mathcal{B}_s} \end{pmatrix}
$$

その線形写像 S のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ は対角行列となり, このとき, その基底 $\mathcal{B}$ をなす vectors はいづれもその線形写像 R の固有 vector であるから, 定理 2.2.14 よりその線形写像 R のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[R]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ も対角行列となる. よって, その vector 空間 V のある基底 $\mathcal{B}$ が存在してこれに関するそれらの線形写像たち R, S の表現行列たち $[R]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$, $[S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ が対角行列となる.

これにより, $\forall k, l \in K$ に対し, $[kR + lS]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = k[R]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} + l[S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ が成り立つことから, 行列 $[kR + lS]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ も対角行列となり, したがって, 線形写像 $kR + lS$ もその基底 $\mathcal{B}$ で対角化可能である. □

定理 2.7.4. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における冪零変換たち $G:V\rightarrow V$, $H:V\rightarrow V$ が与えられたとき, $H\circ G=G\circ H$ が成り立つなら, $\forall k,l\in K$ に対し, 線形写像 $kG+lH$ も冪零変換である.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における指数それぞれ p, q の冪零変換たち $G:V\rightarrow V$, $H:V\rightarrow V$ が与えられたとき, $H\circ G=G\circ H$ が成り立つなら, $\forall k,l\in K$ に対し, 定理 1.2.10 と二項定理より $j=p+q-1$ とおいて次のようになる.

$$\begin{aligned}
(kG+lH)^j&=\sum_{i\in\Lambda_j\cup\{0\}}\frac{j!}{i!(j-i)!}(kG)^i\circ(lH)^{j-i}\\
&=\sum_{\substack{i\in\Lambda_j\cup\{0\}\\ p\leq i}}\frac{j!}{i!(j-i)!}(kG)^i\circ(lH)^{j-i}+\sum_{\substack{i\in\Lambda_j\cup\{0\}\\ i<p}}\frac{j!}{i!(j-i)!}(kG)^i\circ(lH)^{j-i}\\
&=\sum_{\substack{i\in\Lambda_j\cup\{0\}\\ p\leq i}}\frac{j!}{i!(j-i)!}(kG)^i\circ(lH)^{j-i}+\sum_{\substack{i\in\Lambda_j\cup\{0\}\\ q\leq j-i}}\frac{j!}{i!(j-i)!}(kG)^i\circ(lH)^{j-i}\\
&=\sum_{\substack{i\in\Lambda_j\cup\{0\}\\ p\leq i}}\frac{j!}{i!(j-i)!}k^il^{j-i}H^{j-i}\circ G^i+\sum_{\substack{i\in\Lambda_j\cup\{0\}\\ q\leq j-i}}\frac{j!}{i!(j-i)!}k^il^{j-i}G^i\circ H^{j-i}\\
&=\sum_{\substack{i\in\Lambda_j\cup\{0\}\\ p\leq i}}\frac{j!}{i!(j-i)!}k^il^{j-i}H^{j-i}\circ G^{i-p}\circ G^p\\
&\quad+\sum_{\substack{\in\Lambda_j\cup\{0\}\\ q\leq j-i}}\frac{j!}{i!(j-i)!}k^il^{j-i}G^i\circ H^{j-i-q}\circ H^q\\
&=\sum_{\substack{i\in\Lambda_j\cup\{0\}\\ p\leq i}}\frac{j!}{i!(j-i)!}k^il^{j-i}H^{j-i}\circ G^{i-p}\circ 0\\
&\quad+\sum_{\substack{i\in\Lambda_j\cup\{0\}\\ q\leq j-i}}\frac{j!}{i!(j-i)!}k^il^{j-i}G^i\circ H^{j-i-q}\circ 0\\
&=\sum_{\substack{i\in\Lambda_j\cup\{0\}\\ p\leq i}}0+\sum_{i\in\Lambda_j\cup\{0\},q\leq j-i}0=0
\end{aligned}$$

よって, その線形写像 $kG+lH$ も冪零変換である. $\square$

2.7.3 Jordan 分解の一意性

定理 2.7.5. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $T:V\rightarrow V$ が対角化可能であるかつ, 冪零変換であるなら, $T=0$ が成り立つ.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $T:V\rightarrow V$ が対角化可能であるかつ, 冪零変換であるなら, その線形写像 T の固有値たち λ_i を用いてある基底 $\mathcal{B}$ が存在してこれに関するその線形写像

T の表現行列 $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式のように表される.

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ここで, 定理 2.2.6, 定理 2.5.1 より $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $\lambda_i = 0$ が成り立つことになる. したがって, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = 0$ が成り立つので, $T = 0$ が成り立つ. □

定理 2.7.6 (Jordan 分解の一意性)**.** 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における任意の線形写像 $f : V \to V$ が $S + N$ 分解により対角化可能な線形写像 $R : V \to V$ と冪零変換 $G : V \to V$ を用いて $G \circ R = R \circ G$ が成り立つかつ, $f = R + G$ と表されることができるとき, このような線形写像たち R, G はただ 1 つ存在する. この定理を Joedan 分解の一意性という.

証明. 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における任意の線形写像 $f : V \to V$ が Jordan 分解により対角化可能な線形写像たち $R : V \to V$, $S : V \to V$ と冪零変換たち $G : V \to V$, $H : V \to V$ を用いて $G \circ R = R \circ G$, $H \circ S = S \circ H$ が成り立つかつ, $f = R + G = S + H$ と表されることができるとする. さらに, その線形写像 f の互いに異なる固有値の族 $\{\lambda_i\}_{i \in \Lambda_s}$ が与えられたとする.

その線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ の変数 X にその線形写像 f を代入した写像 $\varPhi_f(f)$ が Hamilton-Cayley の定理より $\varPhi_f(f) = 0$ を満たすかつ, その多項式環 $K[X]$ が単項 ideal 整域をなすことと素元分解の基本定理よりその固有多項式 $\varPhi_f$ はその多項式環 $K[X]$ の多項式であるので, $\varPhi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} \left(X - \overline{\lambda_i} \right)^{n_i}$ と表されることができる. $\pi_i = \left(X - \overline{\lambda_i} \right)^{n_i}$ とおくと, これらの多項式たち π_i から定まる多項式写像 π_i を用いれば, その族 $\left\{ \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'} \right\}_{i \in \Lambda_s}$ の最大公約元は単位元と同伴であることになるので, したがって, 次式が成り立つ.

$$K[X] = \sum_{i \in \Lambda_s} K[X] \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'}$$

これにより, その多項式環 $K[X]$ の族 $\{\kappa_i\}_{i \in \Lambda_s}$ が存在して次式が成り立つ.

$$\overline{1} = \sum_{i \in \Lambda_s} \kappa_i \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'}$$

ここで, それらの多項式たち κ_i から定まる多項式写像たちが $\kappa_i : K \to K$ とおかれると, 恒等写像 $I_V : V \to V$ を用いて $I_K = \sum_{i \in \Lambda_s} \kappa_i \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'}$ が成り立つことになる. ここで, $\kappa_i \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'} = p_i$ とおかれると, $\overline{1} = \sum_{i \in \Lambda_s} p_i$ が成り立つかつ, $\forall i, j \in \Lambda_s$ に対し, $i \neq j$ のとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned} p_j(f) \circ p_i(f) &= \kappa_j(f) \circ \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{j\}} \pi_{i'}(f) \circ \kappa_i(f) \circ \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'}(f) \\ &= \kappa_j(f) \circ \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i,j\}} \pi_{i'}(f) \circ \kappa_i(f) \circ \left(\prod_{i \in \Lambda_s} \pi_i \right)(f) \end{aligned}$$

ここで, $\Phi_f=\prod_{i\in\Lambda_s}\pi_i$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}p_j(f)\circ p_i(f)&=\kappa_j(f)\circ\prod_{i'\in\Lambda_s\setminus\{i,j\}}\pi_{i'}(f)\circ\kappa_i(f)\circ\Phi_f(f)\\&=\kappa_j(f)\circ\prod_{i'\in\Lambda_s\setminus\{i,j\}}\pi_{i'}(f)\circ\kappa_i(f)\circ 0=0\end{aligned}$$

以上より, $P_i=p_i(f)$ とおいて線形写像 $P_i:V\rightarrow V$ の族 $\{P_i\}_{i\in\Lambda_s}$ が与えられたとき, 次のことを満たし,

- $\forall i,j\in\Lambda_s$ に対し, $i\neq j$ が成り立つなら, $P_j\circ P_i=0$ が成り立つ.
- $i\in\Lambda_s$ なるそれらの線形写像たち P_i について, その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $\sum_{i\in\Lambda_s}P_i=I_V$ が成り立つ.

定理 2.1.10 よりしたがって, その線形写像 P_i がその vector 空間 V からその部分 vector 空間 $V\left(P_i\right)$ への射影で次式が成り立つ.

$$V=\bigoplus_{i\in\Lambda_n}V\left(P_i\right)$$

このとき, $\forall i\in\Lambda_s$ に対し, 次式が成り立つことから,

$$\begin{aligned}\kappa_i\Phi_f&=\kappa_i\prod_{i'\in\Lambda_s}\pi_{i'}\\&=\kappa_i\prod_{i'\in\Lambda_s\setminus\{i\}}\pi_{i'}\pi_i\\&=p_i\pi_i\\&=\pi_i p_i\end{aligned}$$

次のようになる.

$$\pi_i(f)\circ P_i=\pi_i(f)\circ p_i(f)=\kappa_i(f)\circ\Phi_f(f)=0$$

これにより, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $\mathbf{v}\in V\left(P_i\right)$ が成り立つなら, $\exists\mathbf{w}\in V$ に対し, $\mathbf{v}=P_i\left(\mathbf{w}\right)$ が成り立つので, $\pi_i\left(\mathbf{v}\right)=\pi_i(f)\circ P_i\left(\mathbf{w}\right)=\mathbf{0}$ より次のようになる.

$$\mathbf{v}\in\ker\pi_i(f)=\ker\left(f-\lambda_i I_V\right)^{n_i}=\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}$$

したがって, $V\left(P_i\right)\subseteq\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}$ が成り立つ. 逆に, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $\mathbf{v}\in\ker\left(\lambda_i I_V-f\right)^{n_i}$ が成り立つなら, $\pi_i(f)\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{0}$ が成り立つかつ, $\forall j\in\Lambda_s$ に対し, $i\neq j$ が成り立つなら, 次のようになり,

$$\begin{aligned}P_j\left(\mathbf{v}\right)&=\kappa_j(f)\circ\prod_{i'\in\Lambda_s\setminus\{j\}}\pi_{i'}(f)\left(\mathbf{v}\right)\\&=\kappa_j(f)\circ\prod_{i'\in\Lambda_s\setminus\{i,j\}}\pi_{i'}(f)\circ\pi_i(f)\left(\mathbf{v}\right)\\&=\kappa_j(f)\circ\prod_{i'\in\Lambda_s\setminus\{i,j\}}\pi_{i'}(f)\left(\pi_i(f)\left(\mathbf{v}\right)\right)\\&=\kappa_j(f)\circ\prod_{i'\in\Lambda_s\setminus\{i,j\}}\pi_{i'}(f)\left(\mathbf{0}\right)=\mathbf{0}\end{aligned}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \left(\sum_{i' \in \Lambda_s} P_{i'}\right)(\mathbf{v})\\ &= \sum_{i' \in \Lambda_s} P_{i'}(\mathbf{v})\\ &= \sum_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} P_{i'}(\mathbf{v}) + P_i(\mathbf{v})\\ &= \sum_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \mathbf{0} + P_i(\mathbf{v}) = P_i(\mathbf{v}) \in V(P_i)\end{aligned}$$

これにより, $\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i} \subseteq V(P_i)$ が成り立つ. 以上より, $V(P_i) = \ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$V = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} \ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$$

ここで, 分解定理より, これらの広義の固有空間たち $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ を用いて $V = \bigoplus_{i \in \Lambda_s} \widetilde{W_f}(\lambda_i)$ が成り立ち, その線形写像 P_i はその vector 空間 V からその広義の固有空間 $\widetilde{W_f}(\lambda_i)$ への直和分解から定まる射影でもある. このとき, 定理 2.7.1 より $S = \sum_{i \in \Lambda_s} \lambda_i P_i$ とおかれるとすると, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}\sum_{i \in \Lambda_s} \overline{\lambda_i} p_i &= \sum_{i \in \Lambda_s} \overline{\lambda_i} \kappa_i \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \pi_{i'}\\ &= \sum_{i \in \Lambda_s} \overline{\lambda_i} \kappa_i \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \left(X - \overline{\lambda_{i'}}\right)^{n_{i'}}\end{aligned}$$

次のようになるので,

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i \in \Lambda_s} \lambda_i P_i\\ &= \sum_{i \in \Lambda_s} \lambda_i p_i(f)\\ &= \sum_{i \in \Lambda_s} \lambda_i \kappa_i(f) \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} (f - \lambda_{i'} I_V)^{n_{i'}}\end{aligned}$$

その線形写像 S は多項式環 $K[X]$ の多項式 $\sum_{i \in \Lambda_s} \overline{\lambda_i} \kappa_i \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \left(X - \overline{\lambda_{i'}}\right)^{n_{i'}}$ から定義される多項式写像のその線形写像 f による像でもあり, したがって, $\sigma = \sum_{j \in \Lambda_{\nu_i} \cup \{0\}} \overline{p_{ij}} X^j$, $\nu_i = \deg \sum_{i \in \Lambda_s} \overline{\lambda_i} \kappa_i \prod_{i' \in \Lambda_s \setminus \{i\}} \left(X - \overline{\lambda_{i'}}\right)^{n_{i'}}$ とおかれると, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}f \circ R &= (R + G) \circ R\\ &= R \circ R + G \circ R\\ &= R \circ R + R \circ G\\ &= R \circ (R + G)\\ &= R \circ f\end{aligned}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} S \circ R &= \sigma(f) \circ R \\ &= \sum_{j \in \Lambda_{\nu_i} \cup \{0\}} p_{ij} f^j \circ R \\ &= \sum_{j \in \Lambda_{\nu_i} \cup \{0\}} p_{ij} f^j \circ R \\ &= \sum_{j \in \Lambda_{\nu_i} \cup \{0\}} p_{ij} R \circ f^j \\ &= R \circ \sum_{j \in \Lambda_{\nu_i} \cup \{0\}} p_{ij} f^j \\ &= R \circ \sigma(f) \\ &= R \circ S \end{aligned}$$

このとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned} H \circ G &= (f - S) \circ (f - R) \\ &= f \circ f - f \circ R - S \circ f + S \circ R \\ &= f \circ f - f \circ S - R \circ f + R \circ S \\ &= (f - R) \circ (f - S) \\ &= G \circ H \end{aligned}$$

ここで, 定理 2.7.3, 定理 2.7.4 より線形写像たち $R - S$, $H - G$ はそれぞれ対角化可能な線形写像, 冪零変換である. ここで, 仮定の $f = R + G = S + H$ が成り立つことにより, $R - S = H - G$ が成り立つので, それらの線形写像たち $R - S$, $H - G$ は対角化可能であるかつ, 冪零変換でもある. ここで, 定理 2.7.5 より $R - S = H - G = 0$ が成り立つので, $R = S$ かつ $G = H$ が成り立つ. よって, その線形写像 $f : V \rightarrow V$ が Jordan 分解により対角化可能な線形写像 $R : V \rightarrow V$ と冪零変換 $G : V \rightarrow V$ を用いて $G \circ R = R \circ G$ が成り立つかつ, $f = R + G$ と表されることができるとき, このような線形写像たち R, G はただ 1 つ存在する. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p299-307 ISBN978-4-00-029872-8

2.8 単因子

2.8.1 X-行列

定義 2.8.1. 体 K 上の多項式環 $K[X]$ を成分とする行列, 即ち, 2 つの添数集合たち Λ_m, Λ_n を用いた次式のような写像 A を体 K 上の X-行列という.

$$A : \Lambda_m \times \Lambda_n \to K[X]; (i, j) \mapsto f_{ij}$$

定理 2.8.1. 体 K 上の X-行列 A が可逆行列であるならそのときに限り, その行列式 $\det A$ が次数 0 の多項式となる, 即ち, 0 でない定数となる.

証明. 定理 1.11.19 と, $\forall f \in K[X]$ に対し, その多項式 f がその多項式環 $K[X]$ の可逆元であるならそのときに限り, $\deg f = 0$ が成り立つことより明らかである. □

2.8.2 単因子標準形

定理 2.8.2 (単因子標準形の存在性)**.** 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}\left(n, n, K[X]\right)$ に対し, この X-行列 A は次式を満たす,

$$A \to \begin{pmatrix} e_1 & & & & O \\ & e_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix}$$

即ち, 任意の X-行列 A は行列の変形によって上の行列に変形されることができる[*13]. ただし, その多項式環 $K[X]$ の族 $\left\{e_i\right\}_{i \in \Lambda_r}$ は次の条件を満たす.

- $\forall i \in \Lambda_r$ に対し, 多項式 e_i は monic である.
- $\forall i \in \Lambda_{r-1}$ に対し, 多項式 e_{i+1} は多項式 e_i で割り切れる.

この上の形の行列を単因子標準形, または, 単に標準形などといい, その族 $\left\{e_i\right\}_{i \in \Lambda_r}$ をその X-行列の単因子という.

これは次のようにして示される.

1. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}\left(n, n, K[X]\right)$ に対し, $n = 1$ のときは明らかである.
2. $n = k$ のとき, その X-行列 A'_{kk} は単因子標準形に変形されることができると仮定する.
3. $n = k + 1$ のとき, $A_{k+1,k+1} \neq O$ が成り立つとしてもよいことに注意する.
4. その行列 $A_{k+1,k+1}$ と対等で第 $(1, 1)$ 成分が $\overline{0}$ でない行列のうち, 第 $(1, 1)$ 成分の次数が最小のものが存在して, このような行列の第 1 行全体が第 $(1, 1)$ 成分の最高次項の係数で割られれることで得られた行列を $A'_{k+1,k+1}$, これの第 $(1, 1)$ 成分を e_1 とする.

[*13] 実は, 単項 ideal 整域 R 版の vector 空間 (?) みたいなものである加群 M に対してもこの定理やのちの Jordan 標準形に関する定理が成り立つんです. 興味のある方はぜひ代数学の書籍を参照してみてください.

5. X-行列 $A'_{k+1,k+1}$ の第 1 行, 第 1 列の全ての成分たちはその多項式 e_1 で割り切れるので, 行列の変形で第 $(1,1)$ 成分以外の第 1 行, 第 1 列の全ての成分たちを $\overline{0}$ にする.
6. ここで, 次式のようにおかれれば,

$$A''_{k+1,k+1} = \begin{pmatrix} e_1 & \overline{0} & \cdots & \overline{0} \\ \overline{0} & a''_{22} & \cdots & a''_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{0} & a''_{k+1,2} & \cdots & a''_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$
$$A''_{kk} = \begin{pmatrix} a''_{22} & \cdots & a''_{2,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{k+1,2} & \cdots & a''_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

仮定より, ある可逆行列 P_{kk}, Q_{kk} が存在して次式が成り立つ.

$$P_{kk}A''_{kk}Q_{kk} = \begin{pmatrix} e_2 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & e_r & \\ O & & & O \end{pmatrix}$$

7. このとき, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & O \\ O & P_{kk} \end{pmatrix} A''_{k+1,k+1} \begin{pmatrix} \overline{1} & O \\ O & Q_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & & & & O \\ & e_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix}$$

8. また, その多項式 e_2 はその多項式 e_1 で割り切れる.
9. 以上, 数学的帰納法によって示すべきことは示される.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K[X])$ に対し, $n=1$ のときでは, その X-行列 A の最高次項の係数で割られればよいので, 明らかである.

$n=k$ のとき, $\forall A'_{kk} \in \mathrm{M}(k,k,K[X])$ に対し, その X-行列 A'_{kk} は単因子標準形に変形されることができると仮定する. $n=k+1$ のとき, $\forall A_{k+1,k+1} \in \mathrm{M}(k+1,k+1,K[X])$ に対し, $A_{k+1,k+1}=O$ が成り立つなら, すでにその行列 $A_{k+1,k+1}$ は単因子標準形となっているので, $A_{k+1,k+1} \neq O$ が成り立つとしてもよい. このとき, その行列 $A_{k+1,k+1}$ の成分たちのうち $\overline{0}$ でないものが存在するので, このような成分が第 $(1,1)$ 成分になるように行と列の入れ替えで変形することで, その行列 $A_{k+1,k+1}$ から行列の変形で変形されることができて第 $(1,1)$ 成分が $\overline{0}$ でない行列が存在できる. これらのうち, 第 $(1,1)$ 成分の次数が最小のものが存在して, このような行列の第 1 行全体が第 $(1,1)$ 成分の最高次項の係数で割られれることで得られた行列を $A'_{k+1,k+1}$ とすると, 次式が成り立つ.

$$A_{k+1,k+1} \sim A'_{k+1,k+1} = \begin{pmatrix} e_1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1,k+1} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{k+1,1} & a'_{k+1,2} & \cdots & a'_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

ここで, X-行列 $A'_{k+1,k+1}$ の第 1 行のうちその多項式 e_1 で割り切れない成分 $a'_{1j'}$ が存在するとすれば, 除法の定理より $\exists q,r \in K[X]$ に対し, $a'_{1j'} = qe_1 + r$ かつ $0 \leq \deg r < \deg e_1$ が成り立つ. このとき, 次のよう

に行列 $A'_{k+1,k+1}$ が変形されれば,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}
e_1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1j'} & \cdots & a'_{1,k+1} \\
a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j'} & \cdots & a'_{2,k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a'_{k+1,1} & a'_{k+1,2} & \cdots & a'_{k+1,j'} & \cdots & a'_{k+1,k+1}
\end{pmatrix} \\
\rightarrow &\begin{pmatrix}
e_1 & a'_{12} & \cdots & qe_1 + r - qe_1 & \cdots & a'_{1,k+1} \\
a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j'} - qa'_{21} & \cdots & a'_{2,k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a'_{k+1,1} & a'_{k+1,2} & \cdots & a'_{k+1,j'} - qa'_{k+1,1} & \cdots & a'_{k+1,k+1}
\end{pmatrix} \\
\rightarrow &\begin{pmatrix}
e_1 & a'_{12} & \cdots & r & \cdots & a'_{1,k+1} \\
a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j'} - qa'_{21} & \cdots & a'_{2,k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a'_{k+1,1} & a'_{k+1,2} & \cdots & a'_{k+1,j'} - qa'_{k+1,1} & \cdots & a'_{k+1,k+1}
\end{pmatrix} \\
\rightarrow &\begin{pmatrix}
r & a'_{12} & \cdots & e_1 & \cdots & a'_{1,k+1} \\
a'_{2j'} - qa'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{21} & \cdots & a'_{2,k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a'_{k+1,j'} - qa'_{k+1,1} & a'_{k+1,2} & \cdots & a'_{k+1,1} & \cdots & a'_{k+1,k+1}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

上の行列はその行列 $A_{k+1,k+1}$ から行列の変形で変形されることができて第 $(1,1)$ 成分が $\overline{0}$ でない行列の 1 つであるが, これはその行列 $A'_{k+1,k+1}$ がその行列 $A_{k+1,k+1}$ と対等で第 $(1,1)$ 成分が $\overline{0}$ でない行列のうち, 第 $(1,1)$ 成分の次数が最小のものであることに矛盾する. したがって, X-行列 $A'_{k+1,k+1}$ の第 1 行の全ての成分たちはその多項式 e_1 で割り切れる. このことは第 1 列についても同様である.

ゆえに, $\forall j \in \Lambda_r \exists q_j \in K[X]$ に対し, $a'_{1j} = q_j e_1$ が成り立つので, 次のように行列 $A'_{k+1,k+1}$ が変形されることで,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}
e_1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1,k+1} \\
a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2,k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a'_{k+1,1} & a'_{k+1,2} & \cdots & a'_{k+1,j} & \cdots & a'_{k+1,k+1}
\end{pmatrix} \\
\rightarrow &\begin{pmatrix}
e_1 & a'_{12} & \cdots & q_j e_1 - q_j e_1 & \cdots & a'_{1,k+1} \\
a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} - q_j a'_{21} & \cdots & a'_{2,k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a'_{k+1,1} & a'_{k+1,2} & \cdots & a'_{k+1,j} - q_j a'_{k+1,1} & \cdots & a'_{k+1,k+1}
\end{pmatrix} \\
\rightarrow &\begin{pmatrix}
e_1 & a'_{12} & \cdots & \overline{0} & \cdots & a'_{1,k+1} \\
a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} - q_j a'_{21} & \cdots & a'_{2,k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a'_{k+1,1} & a'_{k+1,2} & \cdots & a'_{k+1,j} - q_j a'_{k+1,1} & \cdots & a'_{k+1,k+1}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

次のように行列 $A'_{k+1,k+1}$ が変形されることができる.

$$\begin{pmatrix}
e_1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1,k+1} \\
a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2,k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a'_{k+1,1} & a'_{k+1,2} & \cdots & a'_{k+1,k+1}
\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}
e_1 & \overline{0} & \cdots & \overline{0} \\
a'_{21} & a''_{22} & \cdots & a''_{2,k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a'_{k+1,1} & a''_{k+1,2} & \cdots & a''_{k+1,k+1}
\end{pmatrix}$$

第 1 列についても同様にして, 次のように行列 $A'_{k+1,k+1}$ が変形されることができる.

$$\begin{pmatrix} e_1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1,k+1} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{k+1,1} & a'_{k+1,2} & \cdots & a'_{k+1,k+1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e_1 & \overline{0} & \cdots & \overline{0} \\ \overline{0} & a''_{22} & \cdots & a''_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{0} & a''_{k+1,2} & \cdots & a''_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

このとき, 次式のようにおかれれば,

$$A''_{k+1,k+1} = \begin{pmatrix} e_1 & \overline{0} & \cdots & \overline{0} \\ \overline{0} & a''_{22} & \cdots & a''_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{0} & a''_{k+1,2} & \cdots & a''_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

$$A''_{kk} = \begin{pmatrix} a''_{22} & \cdots & a''_{2,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{k+1,2} & \cdots & a''_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

$A''_{kk} \in \mathrm{M}\,(k,k,K[X])$ が成り立ち, 仮定より, その X-行列 A''_{kk} は単因子標準形に変形されることができる, 即ち, ある可逆行列 P_{kk}, Q_{kk} が存在して次式が成り立つので,

$$P_{kk}A''_{kk}Q_{kk} = \begin{pmatrix} e_2 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & e_r & \\ O & & & O \end{pmatrix}$$

行列たち $\begin{pmatrix} \overline{1} & O \\ O & P_{kk} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \overline{1} & O \\ O & Q_{kk} \end{pmatrix}$ も可逆行列で次のようになる.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{1} & O \\ O & P_{kk} \end{pmatrix} A''_{k+1,k+1} \begin{pmatrix} \overline{1} & O \\ O & Q_{kk} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{1} & O \\ O & P_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & O \\ O & A''_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} & O \\ O & Q_{kk} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{1} & O \\ O & P_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & O \\ O & A''_{kk}Q_{kk} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_1 & O \\ O & P_{kk}A''_{kk}Q_{kk} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_1 & & & & O \\ & e_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上より, 次式が成り立つ.

$$A_{k+1,k+1} \to A'_{k+1,k+1} \to A''_{k+1,k+1} \to \begin{pmatrix} e_1 & & & & O \\ & e_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix}$$

ここで, その多項式 e_2 がその多項式 e_1 で割り切れられなければ, 除法の定理より $\exists q, r \in K[X]$ に対し, $e_2 = qe_1 + r$ かつ $0 \leq \deg r < \deg e_1$ が成り立つ. このとき, 上の行列が次のように変形されれば,

$$\begin{pmatrix} e_1 & & & & O \\ & e_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & & & & O \\ e_1 & qe_1 + r & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & -qe_1 & & & O \\ e_1 & qe_1 + r - qe_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & r & & & O \\ e_1 & -qe_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} r & e_1 & & & O \\ -qe_1 & e_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix}$$

上の行列はその行列 $A_{k+1,k+1}$ と対等で第 $(1,1)$ 成分が $\overline{0}$ でない行列の 1 つであるが, これはその行列 $A'_{k+1,k+1}$ がその行列 $A_{k+1,k+1}$ と対等で第 $(1,1)$ 成分が $\overline{0}$ でない行列のうち, 第 $(1,1)$ 成分の次数が最小のものであることに矛盾する. したがって, その多項式 e_2 はその多項式 e_1 で割り切れる. したがって, $\forall A'_{k+1,k+1} \in \mathrm{M}(k+1, k+1, K[X])$ に対し, その X-行列 $A'_{k+1,k+1}$ は単因子標準形と対等である.

以上, 数学的帰納法によって, 任意の X-行列 A は行列の変形で単因子標準形に変形されることができることが示された. □

定義 2.8.2. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(n, n, K[X])$ に対し, 次式が成り立つ,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & & & & O \\ & e_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix}$$

即ち, 任意の X-行列 A が上の単因子標準形に変形されることができるとき, その自然数 r をその X-行列の階数といい, $\mathrm{rank}A$ とかく. また, $\forall p \in \varLambda_r$ に対し, その X-行列 A の全ての p 次小行列式たちの最大公約元の monic は一意的なので, これをその X-行列 A の p 次行列式因子といい, d_p とかく.

定理 2.8.3. 体 K 上で $\forall A, B \in \mathrm{M}(n, n, K[X])$ に対し, その X-行列 A が行列の変形でその X-行列 B に変形されることができるなら, これらの X-行列たち A, B の階数は一致する.

証明. 体 K 上で $\forall A, B \in \mathrm{M}(n, n, K[X])$ に対し, その X-行列 A が行列の変形でその X-行列 B に変形され

ることができるなら, 単因子標準形を用いて次式が成り立つことにより,

$$A \to B \to \begin{pmatrix} e_1 & & & & O \\ & e_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix}$$

これらの X-行列たち A, B の階数は一致する. □

定理 2.8.4. 体 K 上で $A \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right)$ なる X-行列 A の階数はその X-行列 A の 0 でない p 次小行列式のうちその自然数 p の最大に等しい, 即ち, $\mathrm{rank}A = r$ としてその X-行列 A の r 次小行列式のうち 0 でないものが存在し, $r < p$ なる自然数 p を用いて p 次小行列式が存在すれば, これは 0 となる.

証明. 定理 1.11.21 と同様にして, 示される. □

定理 2.8.5. 体 K 上で $\forall A, B \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A が行列の変形でその X-行列 B に変形されることができるなら, これらの X-行列たち A, B の行列式因子は一致する.

証明. 体 K 上で $\forall A, B \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A が行列の変形でその X-行列 B に変形されることができるなら, $\forall f \in K[X]$ に対し, その多項式 f が可逆元であるときの, ある行の成分全体の f 倍, 2 つの行々の入れ替えによる行基本変形によってその X-行列 A が変形されたときでも, 行列式写像の定義, 定理 1.11.3 よりその X-行列 A の小行列式たちはいづれも可逆元倍なので, その行列式因子は一致している.

そこで, $\forall f \in K[X]$ に対し, その X-行列 A の第 i 行の f 倍された成分全体を第 j 行に加えたものを A', これらの X-行列たち A, A' の p 次行列式因子をそれぞれ d_p, d_p', この X-行列 A の p 次小行列式の 1 つを D, これに対応する成分をもつ X-行列 A' の p 次小行列式を D' とおく. その p 次小行列式 D が第 j 行を含まないとき, 明らかに $D = D'$ が成り立つ. その p 次小行列式 D が第 i 行, 第 j 行どちらも含むとき, 定理 1.11.6 より $D = D'$ が成り立つ. その p 次小行列式 D が第 i 行を含まず第 j 行を含むとき, その p 次小行列式 D に含まれるその X-行列 A の第 j 行を第 i 行で置き換えたものを D'' とすると, 行列式写像の定義より次式が成り立つ.

$$D' = D + fD''$$

仮定よりこれらの多項式たち D, D'' はその行列式因子 d_p で割り切れる, 即ち, $\exists q, q'' \in K[X]$ に対し, $D = qd_p$ かつ $D'' = q''d_p$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned} D' &= D + fD'' \\ &= qd_p + fq''d_p \\ &= \left(q + fq''\right)d_p \end{aligned}$$

これにより, その多項式 D' もその行列式因子 d_p で割り切れる. 以上, これに対応する成分をもつ X-行列 A' の任意の p 次小行列式 D' はその行列式因子 d_p で割り切れる.

ここで, その X-行列 A' の全ての p 次小行列式たち全体の族 $\left\{D_i'\right\}_{i \in \varLambda}$ を用いて $D_i' = q_i'd_p$ とおくと, 多項式環 $K[X]$ が Euclid 整域であることと除法の定理より次式が成り立つ.

$$K[X]d_p' = \sum_{i \in \varLambda} K[X]D_i'$$

$$= \sum_{i \in \Lambda} K[X] q_i' d_p$$

$$= \left(\sum_{i \in \Lambda} K[X] q_i' \right) d_p$$

これにより, ある多項式環 $K[X]$ の族 $\{f_i\}_{i \in \Lambda}$ が存在して次式が成り立つ.

$$d_p' = \left(\sum_{i \in \Lambda} f_i q_i' \right) d_p$$

ゆえに, その行列式因子 d_p' はその行列式因子 d_p で割り切れる.

同様にして, その行列式因子 d_p はその行列式因子 d_p' で割り切れることが示される. さらに, これらの行列式因子たちどちらも monic なので, $d_p = d_p'$ が成り立つ.

このことは列基本変形に対しても同様にして示されるので, 行列の基本変形によってその X-行列 A が変形されたときでも, その行列式因子は一致している. 以上より, 行列の基本変形を繰り返せば, これらの X-行列たち A, B の行列式因子は一致する. □

定理 2.8.6 (単因子定理)**.** 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(n, n, K[X])$ に対し, 次式が成り立つ,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & & & & O \\ & e_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix}$$

即ち, 任意の X-行列 A が上の単因子標準形に変形されることができるとき, その X-行列 A の i 次行列式因子 d_i を用いて次式が成り立つ.

$$e_1 = d_1, \quad d_{i+1} = e_{i+1} d_i$$

これにより, その X-行列 A の単因子, 単因子標準形は一意的である. この定理と定理 2.8.2 を合わせて単因子定理という.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(n, n, K[X])$ に対し, 次式が成り立つ,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & & & & O \\ & e_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ O & & & & O \end{pmatrix}$$

即ち, 任意の X-行列 A が上の単因子標準形に変形されることができるとき, 定理 2.8.5 よりその X-行列 A の p 次行列式因子 d_p はその上の単因子標準形の行列式因子でもあり, その単因子標準形の任意の p 次小行列式に対し, これがこれに含まれる単因子すべての積に等しく定理 2.8.2 より多項式 $\prod_{i \in \Lambda_p} e_i$ で割り切れるかつ, これより次数の大きい最大公約元が存在したとすれば, これでは p 次小行列式 $\begin{vmatrix} e_1 & & & O \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_p \end{vmatrix}$ が割り切られ

なくなり矛盾する. したがって, その多項式 $\prod_{i \in \Lambda_p} e_i$ が任意の p 次小行列式の最大公約元であるかつ, monic でもあるので, その多項式 $\prod_{i \in \Lambda_p} e_i$ が p 次行列式因子である. したがって, 次式が成り立つ.

$$e_1 = d_1, \quad d_{i+1} = e_{i+1} d_i$$

これにより, その X-行列 A の単因子, 単因子標準形は一意的である. □

定理 2.8.7. 体 K 上で $\forall A, B \in \mathrm{M}\left(n, n, K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A が行列の変形でその X-行列 B に変形されることができるならそのときに限り, これらの単因子標準形が等しい.

証明. 体 K 上で $\forall A, B \in \mathrm{M}\left(n, n, K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A が行列の変形でその X-行列 B に変形されることができるなら, 定理 2.8.2 よりその X-行列 A が行列の変形で単因子標準形に変形されることができるかつ, その X-行列 B が行列の変形でその X-行列 A に変形されることができるので, その X-行列 B はその X-行列 A の単因子標準形に変形されることができる. 定理 2.8.6 よりゆえに, これらの単因子標準形が等しい.

逆に, これらの単因子標準形が等しいなら, 定理 2.8.2 よりその X-行列 A がその単因子標準形に変形されることができるかつ, その単因子標準形はその X-行列 B に変形されることができるので, その X-行列 A が行列の変形でその X-行列 B に変形されることができる. □

定理 2.8.8. 体 K 上で次のことが成り立つ.

- $\forall A \in \mathrm{M}\left(n, n, K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A が可逆行列であるならそのときに限り, その単因子標準形が単位行列である.
- $\forall A \in \mathrm{GL}\left(n, K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A は基本行列の積で表されることができる.
- $\forall A \in \mathrm{GL}\left(n, K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A は行変形あるいは列変形だけで単位行列に変形されることができる.
- $\forall A, B \in \mathrm{M}\left(n, n, K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A が行列の変形でその X-行列 B に変形されることができるならそのときに限り, $A \sim B$ が成り立つ.

証明. 体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}\left(n, n, K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A が可逆行列であるなら, 定理 2.8.2 よりその単因子標準形 I が与えられたとき, $\exists P, Q \in \mathrm{GL}\left(n, K[X]\right)$ に対し, $PAQ = I$ が成り立つので, 次式のようになる.

$$\det PAQ = \det P \det A \det Q = \det I$$

ここで, 定理 2.8.1 よりその行列式 $\det I$ は $\overline{0}$ でない定数であり, その X-行列 A の階数が自然数 n より小さいなら, $\det I = \overline{0}$ が成り立つことになり矛盾するし, その X-行列の単因子のうちに次数が 1 以上の多項式が含まれるのであれば, その行列式 $\det I$ の次数も 1 以上になりこれも定理 2.8.1 に矛盾する. したがって, それらの単因子たちはいづれも $\overline{0}$ でない定数で, これらが monic であるから, それらの単因子たちはいづれも $\overline{1}$ となり, したがって, その単因子標準形 I は単位行列そのものである. 逆に, その単因子標準形が単位行列であるなら, $\exists P, Q \in \mathrm{GL}\left(n, K[X]\right)$ に対し, $PAQ = I_n$ が成り立つことにより次のようになる.

$$\begin{aligned} AQP &= P^{-1} PAQP \\ &= P^{-1} I_n P \\ &= P^{-1} P = I_n \end{aligned}$$

同様にして, $QPA = I_n$ が得られる. 以上より, 行列 QP がその X-行列 A の逆行列にあたるので, その X-行列 A は可逆行列である.

$\forall A \in \mathrm{GL}\left(n, K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A は上記の議論と同様にして, $\exists P, Q \in \mathrm{GL}\left(n, K[X]\right)$ に対し, $AQP = I_n$ かつ $QPA = I_n$ が成り立つので, 以上より, 行列 QP がその X-行列 A の逆行列にあたり, さらに, $A = P^{-1}Q^{-1}$ が成り立つ. これにより, その X-行列 A は基本行列の積で表されることができる.

$\forall A \in \mathrm{GL}\left(n, K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A は上記の議論と同様にして, $\exists P, Q \in \mathrm{GL}\left(n, K[X]\right)$ に対し, $AQP = I_n$ かつ $QPA = I_n$ が成り立つので, その X-行列 A は行変形あるいは列変形だけで単位行列に変形されることができる.

$\forall A, B \in \mathrm{M}\left(n, n, K[X]\right)$ に対し, その X-行列 A が行列の変形でその X-行列 B に変形されることができるなら, $A \sim B$ が成り立つことは明らかであろう. 逆に, $A \sim B$ が成り立つなら, $\exists P, Q \in \mathrm{GL}\left(n, K[X]\right)$ に対し, $A = PBQ$ が成り立つので, 上記の議論により, これらの行列たち P, Q は基本行列の積で表されることができることにより, その X-行列 A が行列の変形でその X-行列 B に変形されることができる. □

2.8.3 特性 X-行列

定理 2.8.9. 体 K 上の任意の X-行列 A に対し, ある集合 $\mathrm{M}(n, n, K)$ の族 $\left\{A_i\right\}_{i \in \varLambda_k \cup \{0\}}$ が存在して次式が成り立つ.

$$A = \sum_{i \in \varLambda_k \cup \{0\}} A_i X^i$$

この自然数 k をその X-行列 A の冪指数という.

証明. 体 K 上の任意の X-行列 A に対し, $\left(f_{ij}\right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$ と成分表示されたらば, $(i,j) \in \varLambda_n^2$ なる次数 $\deg f_{ij}$ を d_{ij} とおき, 次式のようになる.

$$A = \left(f_{ij}\right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} = \left(\sum_{h \in \varLambda_{d_{ij}} \cup \{0\}} \overline{f_{ij}(h)} X^h\right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$$

ここで, $(i,j) \in \varLambda_n^2$ なる次数 $\deg f_{ij}$ のうち最も大きいものを k とおき, $\forall (i,j) \in \varLambda_n^2$ に対し, 次のようにその体 K の元 a_{hij} がおかれれば,

$$a_{hij} = \begin{cases} f_{ij}(h) & \text{if} \quad h \leq d_{ij} \\ 0 & \text{if} \quad d_{ij} < h \end{cases}, \quad A_h = \left(\overline{a_{hij}}\right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned} A &= \left(\sum_{h \in \varLambda_{d_{ij}} \cup \{0\}} \overline{f_{ij}(h)} X^h + \sum_{h \in \varLambda_k \setminus \varLambda_{d_{ij}}} \overline{0} X^h\right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \\ &= \left(\sum_{h \in \varLambda_{d_{ij}} \cup \{0\}} \overline{a_{hij}} X^h + \sum_{h \in \varLambda_k \setminus \varLambda_{d_{ij}}} \overline{a_{hij}} X^h\right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \\ &= \left(\sum_{h \in \varLambda_k \cup \{0\}} \overline{a_{hij}} X^h\right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{h \in \varLambda_k \cup \{0\}} \left(\overline{a_{hij}}\right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} X^h \\
&= \sum_{h \in \varLambda_k \cup \{0\}} A_h X^h \\
&= \sum_{i \in \varLambda_k \cup \{0\}} A_i X^i
\end{aligned}
$$

□

定義 2.8.3. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, X-行列 $XI_n - A$ をその行列 A の特性 X-行列という. なお, 行列 I_n は n 次単位行列である.

定理 2.8.10. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right) \forall B \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 次のことが成り立つ.

- $\exists P \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right) \exists R \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $A = \left(XI_n - B\right) P + R$ が成り立つ.
- $\exists Q \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right) \exists S \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $A = Q\left(XI_n - B\right) + S$ が成り立つ.

証明. 体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right) \forall B \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A の冪指数が 0 のときでは, $P = O_{nn}$, $R = A$ とおかれればよい. その行列 A の冪指数が 1 のとき, $\exists A_0, A_1 \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 次式が成り立つので,

$$
A = A_1 X + A_0
$$

次のようになる.

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 X + A_1 B - A_1 B + A_0 \\
&= A_1\left(XI_n - B\right) + A_1 B + A_0
\end{aligned}
$$

冪指数が k の任意の行列 A' が与えられたとき, 示すべきことが成り立つと仮定すると, その行列 A の冪指数が $k+1$ のとき, 定理 2.8.9 よりその集合 $\mathrm{M}(n,n,K)$ のある族 $\left\{A_i\right\}_{i \in \varLambda_{k+1} \cup \{0\}}$ が存在して, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i \in \varLambda_{k+1} \cup \{0\}} A_i X^i \\
&= A_{k+1} X^{k+1} + \sum_{i \in \varLambda_k \cup \{0\}} A_i X^i \\
&= A_{k+1} X^{k+1} + \sum_{i \in \varLambda_k \cup \{0\}} A_i X^i + A_{k+1} B X^k - A_{k+1} B X^k \\
&= A_{k+1} X^k \left(XI_n - B\right) + \sum_{i \in \varLambda_k \cup \{0\}} A_i X^i + A_{k+1} B X^k
\end{aligned}
$$

ここで, 仮定より $\exists P' \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right) \exists R' \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
A &= A_{k+1} X^k \left(XI_n - B\right) + \left(XI_n - B\right) P' + R' \\
&= \left(A_{k+1} X^k + P'\right)\left(XI_n - B\right) + R'
\end{aligned}
$$

以上より, 数学的帰納法によって, $\exists P \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right) \exists R \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $A = \left(XI_n - B\right) P + R$ が成り立つことが示された. $\exists Q \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right) \exists S \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $A = Q\left(XI_n - B\right) + S$ が成り立つことも同様にして示される. □

定理 2.8.11. 体 K 上で, $\forall A, B \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $A \approx B$ が成り立つならそのときに限り, $XI_n - A \sim XI_n - B$ が成り立つ.

証明. 体 K 上で, $\forall A, B \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $A \approx B$ が成り立つなら, $\exists P \in \mathrm{GL}(n,K)$ に対し, $B = P^{-1}AP$ が成り立ち, したがって, 次のようになるので,

$$XI_n - B = P^{-1}XI_nP - P^{-1}AP = P^{-1}\left(XI_n - A\right)P$$

定理 2.8.8 より $XI_n - A \sim XI_n - B$ が成り立つ.

逆に, $XI_n - A \sim XI_n - B$ が成り立つなら, $\exists P, Q \in \mathrm{GL}\left(n, K[X]\right)$ に対し, $XI_n - B = P\left(XI_n - A\right)Q$ が成り立つ. ここで, 定理 2.8.10 より, $\exists D, E \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right)\exists R, S \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 次式が成り立ち,

$$P = \left(XI_n - B\right)D + R, \quad Q^{-1} = E\left(XI_n - B\right) + S$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\left(XI_n - B\right)\left(D - E\right)\left(XI_n - A\right)\\
&= \left(XI_n - B\right)D\left(XI_n - A\right) - \left(XI_n - B\right)E\left(XI_n - A\right)\\
&= \left(\left(XI_n - B\right)D + R - R\right)\left(XI_n - A\right) - \left(XI_n - B\right)\left(E\left(XI_n - A\right) + S - S\right)\\
&= \left(P - R\right)\left(XI_n - A\right) - \left(XI_n - B\right)\left(Q^{-1} - S\right)\\
&= P\left(XI_n - A\right) - R\left(XI_n - A\right) - \left(XI_n - B\right)Q^{-1} + \left(XI_n - B\right)S\\
&= \left(XI_n - B\right)S - R\left(XI_n - A\right) + P\left(XI_n - A\right)QQ^{-1} - \left(XI_n - B\right)Q^{-1}\\
&= \left(XI_n - B\right)S - R\left(XI_n - A\right) + \left(XI_n - B\right)Q^{-1} - \left(XI_n - B\right)Q^{-1}\\
&= \left(XI_n - B\right)S - R\left(XI_n - A\right)
\end{aligned}$$

ここで, $D \neq E$ が成り立つなら, その行列 $\left(XI_n - B\right)\left(D - E\right)\left(XI_n - A\right)$ は零行列でなくこれの冪指数が 2 以上となるが, その行列 $\left(XI_n - B\right)S - R\left(XI_n - A\right)$ の冪指数が 1 以下であり冪指数が揃わなくなり矛盾する. したがって, $D = E$ が成り立つ. このとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\left(S - R\right)X + \left(RA - BS\right) &= SX - RX + RA - BS\\
&= SX - BS - RX + RA\\
&= \left(XI_n - B\right)S - R\left(XI_n - A\right)\\
&= \left(XI_n - B\right)\left(D - E\right)\left(XI_n - A\right)\\
&= O_{nn}
\end{aligned}$$

したがって, $R = S$ が成り立つので, $BR = BS = RA$ が成り立つ.

ここで, 定理 2.8.10 より $\exists S \in \mathrm{M}\left(n,n,K[X]\right)\exists T \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, $P^{-1} = \left(XI_n - A\right)S + T$ が成り立つ. したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\left(XI_n - B\right)\left(DP^{-1} + SS\right)\\
&= \left(XI_n - B\right)DP^{-1} + \left(XI_n - B\right)SS\\
&= \left(XI_n - B\right)DP^{-1} + R\left(XI_n - A\right)S + RT - RT\\
&= \left(XI_n - B\right)DP^{-1} + R\left(\left(XI_n - A\right)S + T\right) - RT\\
&= \left(XI_n - B\right)DP^{-1} + RP^{-1} - RT\\
&= \left(\left(XI_n - B\right)D + R\right)P^{-1} - RT
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= PP^{-1} - RT \\
&= I_n - RT
\end{aligned}
$$

ここで, $DP^{-1} + SS \neq O_{nn}$ が成り立つなら, その行列 $(XI_n - B)\left(DP^{-1} + SS\right)$ は零行列でなくこれの冪指数が 1 以上となるが, その行列 $I_n - RT$ の冪指数が 0 であり冪指数が揃わなくなり矛盾する. したがって, $DP^{-1} + SS = O_{nn}$ が成り立つ. したがって, $RT = I_n$ が得られる. また, 同様にして, $TR = I_n$ が得られるので, その行列 R は正則行列である.

以上より, $A = R^{-1}BR$ が得られるので, $A \approx B$ が成り立つ. □

定理 2.8.12. 代数的閉体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, これの特性 X-行列 $XI_n - A$ の階数は n である.

証明. 代数的閉体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, これの特性 X-行列 $XI_n - A$ の行列式はまさしくその行列 A が対応する行列であるような線形写像 L_A の固有多項式である. このとき, 定理 2.2.5 よりその固有多項式, 即ち, これの特性 X-行列 $XI_n - A$ の行列式の次数が n となっているので, これの特性 X-行列 $XI_n - A$ の n 次行列式因子 d_n は $\overline{0}$ でないことになり, 定理 2.8.6 よりしたがって, その特性 X-行列の階数は n である. □

2.8.4 Jordan 標準形

Jordan 標準形について次のことが成り立つのであった.

定義 (定義 2.5.4 の再掲)**.** 体 K の元 k を用いて $A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる行列 A が次式のように表されるとき, その行列 A をその元 k の Jordan 細胞, k 細胞などといい $J(k,n)$ と書く.

$$
A = \begin{pmatrix}
k & 1 & & & O \\
& k & 1 & & \\
& & k & \ddots & \\
& & & \ddots & 1 \\
O & & & & k
\end{pmatrix}
$$

定理 (定理 2.6.1 の再掲)**.** 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f: V \to V$ の固有多項式 $\varPhi_f$ が互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_s} n_i = n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき, 次のことが成り立つ.

$$
\varPhi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}
$$

- $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, 線形写像 $\lambda_i I_V - f$ は核 $\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ における冪零変換である.
- $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, その核 $\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ は f-不変である.
- $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, その核 $\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ における冪零変換 $\lambda_i I_V - f$ の不変系 Q_i が $Q_i = (q_{ij})_{j \in \varLambda_{r_i}}$ と与えられたらば, その核 $\ker(\lambda_i I_V - f)^{n_i}$ の次式のようなある基底 $\mathcal{B}_i$ が存在して,

$$
\mathcal{B}_i = \left\langle \begin{matrix}
\mathbf{v}_{i1} & \mathbf{v}_{i2} & \cdots & \mathbf{v}_{ir_i} \\
(f - \lambda_i I_V)(\mathbf{v}_{i1}) & (f - \lambda_i I_V)(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & (f - \lambda_i I_V)(\mathbf{v}_{ir_i}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(f - \lambda_i I_V)^{q_{i1}-1}(\mathbf{v}_{i1}) & (f - \lambda_i I_V)^{q_{i2}-1}(\mathbf{v}_{i2}) & \cdots & (f - \lambda_i I_V)^{q_{ir_i}-1}(\mathbf{v}_{ir_i})
\end{matrix} \right\rangle
$$

これに関する線形写像 $f|\ker\left(\lambda_iI_V-f\right)^{n_i}$ の表現行列 $\left[f|\ker\left(\lambda_iI_V-f\right)^{n_i}\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}$ が次式のように一意的に表されることができる.

$$\left[f|\ker\left(\lambda_iI_V-f\right)^{n_i}\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}=\begin{pmatrix}J\left(\lambda_i,q_{i1}\right) & & & O\\ & J\left(\lambda_i,q_{i2}\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J\left(\lambda_i,q_{ir_i}\right)\end{pmatrix}$$

定義 (定義 2.6.1 の再掲)**.** このときの固有値 λ_i に対する表現行列 $\left[f|\ker\left(\lambda_iI_V-f\right)^{n_i}\right]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}$ をその固有値 λ_i に対する Jordan block, Jordan 塊といい, ここでは, $J\left(\lambda_i;Q_i\right)$ と書くことにする.

定理 (定理 2.8.20 の再掲)**.** 代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における線形写像 $f:V\rightarrow V$ の固有多項式 $\varPhi_f$ が互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\sum_{i\in\varLambda_s}n_i=n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$\varPhi_f=\prod_{i\in\varLambda_s}\left(X-\lambda_i\right)^{n_i}$$

$\forall i\in\varLambda_s$ に対し, 定理 2.6.1 よりその核 $\ker\left(\lambda_iI_V-f\right)^{n_i}$ における冪零変換 λ_iI_V-f の不変系 Q_i が $Q_i=\left(q_{ij}\right)_{j\in\varLambda_{r_i}}$ と与えられたらば, その vector 空間 V の次式のようなある基底 $\left\langle\mathcal{B}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_s}$ が存在して,

$$\mathcal{B}_i=\left\langle\begin{matrix}\mathbf{v}_{i1} & \mathbf{v}_{i2} & \cdots & \mathbf{v}_{ir_i}\\ \left(f-\lambda_iI_V\right)\left(\mathbf{v}_{i1}\right) & \left(f-\lambda_iI_V\right)\left(\mathbf{v}_{i2}\right) & \cdots & \left(f-\lambda_iI_V\right)\left(\mathbf{v}_{ir_i}\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(f-\lambda_iI_V\right)^{q_{i1}-1}\left(\mathbf{v}_{i1}\right) & \left(f-\lambda_iI_V\right)^{q_{i2}-1}\left(\mathbf{v}_{i2}\right) & \cdots & \left(f-\lambda_iI_V\right)^{q_{ir_i}-1}\left(\mathbf{v}_{ir_i}\right)\end{matrix}\right\rangle$$

これが $\mathcal{B}$ とおかれると, これに関する線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式のように表されることができる.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}J\left(\lambda_1;Q_1\right) & & & O\\ & J\left(\lambda_2;Q_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J\left(\lambda_s;Q_s\right)\end{pmatrix}$$

しかも, その表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ の中に含まれる Jordan 塊たちの順序を除けば, その表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ はその線形写像 f に対し一意的に決まる.

定義 (定義 2.5.4 の再掲)**.** このときの線形写像 f に対する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ を Jordan 標準形といい, このような形の行列を Jordan 行列, この基底 $\mathcal{B}$ を Jordan 基底という.

これらの Jordan 標準形に関する定理たちは代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 V における一般的な線形写像 f に対し成り立ちこれをもとに Algorism が見いだされるが, 行列の対角化や冪零変換, 分解定理などといった証明の議論が煩雑すぎて初学者や数学そのものに興味がないが道具として線形代数学を扱わなければならなくなった学習者には敷居が高い[*14]かつ, 実際に計算するのに手間がかかってしまうため, 手で計算するのにあまり得策ではないという欠点がある. ここで, 先ほどの議論で扱われた単因子を用いて代数的閉体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n における線形写像 f に対する Jordan 標準形に関して議論していこう.

[*14] 構成で改良の余地はありそう….

定理 2.8.13. $\forall k \in K$ に対し, その元 k の Jordan 細胞 $J(k,n)$ の特性 X-行列 $XI_n - J(k,n)$ の単因子標準形は次のように与えられる.

$$XI_n - J(k,n) \sim \begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ O & \left(X - \overline{k}\right)^n \end{pmatrix}$$

証明. $\forall k \in K$ に対し, その元 k の Jordan 細胞 $J(k,n)$ の特性 X-行列 $XI_n - J(k,n)$ の n 次行列式因子 d_n は定理 1.11.10 より次のようになる.

$$\begin{aligned} d_n &= \det\left(XI_n - J(k,n)\right) \\ &= \begin{vmatrix} X - \overline{k} & -\overline{1} & & & O \\ & X - \overline{k} & -\overline{1} & & \\ & & X - \overline{k} & \ddots & \\ & & & \ddots & -\overline{1} \\ O & & & & X - \overline{k} \end{vmatrix} = \left(X - \overline{k}\right)^n \end{aligned}$$

一方で, その特性 X-行列 $XI_n - J(k,n)$ の第 1 列と第 n 行を除いた $n-1$ 次小行列式については定理 1.11.10 より次のとおりであるから,

$$\begin{vmatrix} -\overline{1} & & & O \\ X - \overline{k} & -\overline{1} & & \\ & X - \overline{k} & \ddots & \\ O & & \ddots & -\overline{1} \end{vmatrix} = \left(-\overline{1}\right)^{n-1}$$

その特性 X-行列 $XI_n - J(k,n)$ の n 次行列式因子 d_{n-1} は $\overline{1}$ となる. ゆえに, 定理 2.8.6 より次のようになる.

$$XI_n - J(k,n) \sim \begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ O & \left(X - \overline{k}\right)^n \end{pmatrix}$$

□

定理 2.8.14. 体 K 上で $\forall f, g \in K[X]$ に対し, その体 K 上の X-行列たち A, B が次式のように与えられたとき,

$$A = \begin{pmatrix} I_{m-1} & O \\ O & f \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ O & g \end{pmatrix}$$

次のことが成り立つ.

- 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & f & \\ O & & g \end{pmatrix}$$

  特に, それらの多項式たち f, g が monic でその多項式 g がその多項式 f で割り切れるとき, その X-行列 $\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & f & \\ O & & g \end{pmatrix}$ は単因子標準形となっている.

- それらの多項式たち f, g の最大公約元が $\overline{1}$ であるとき, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_{m+n-1} & O \\ O & fg \end{pmatrix}$$

特に, それらの多項式たち f, g が monic であるとき, その X-行列 $\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & f & \\ O & & g \end{pmatrix}$ は単因子標準形となっている.

証明. 体 K 上で $\forall f, g \in K[X]$ に対し, その体 K 上の X-行列たち A, B が次式のように与えられたとき,

$$A = \begin{pmatrix} I_{m-1} & O \\ O & f \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ O & g \end{pmatrix}$$

行と列の入れ替えによって, 明らかに次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & f & \\ O & & g \end{pmatrix}$$

特に, それらの多項式たち f, g が monic でその多項式 g がその多項式 f で割り切れるとき, その X-行列 $\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & f & \\ O & & g \end{pmatrix}$ は単因子標準形となっている.

それらの多項式たち f, g の最大公約元が $\overline{1}$ であるとき, 除法の定理より多項式環 $K[X]$ が Euclid 整域であるかつ単項 ideal 整域でもあることにより次式が成り立つ.

$$K[X] = K[X]f + K[X]g$$

これにより, $\exists u, v \in K[X]$ に対し, $uf + vg = \overline{1}$ が成り立つ. ここで, 上記の議論により, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & f & \\ O & & g \end{pmatrix}$$

ここで, 行列たち $\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & \overline{1} & v \\ O & -g & uf \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & u & -vg \\ O & \overline{1} & f \end{pmatrix}$ について, 次式のようになり,

$$\begin{vmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & \overline{1} & v \\ O & -g & uf \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{1} & v \\ -g & uf \end{vmatrix} = uf + vg = \overline{1}$$

$$\begin{vmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & u & -vg \\ O & \overline{1} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & -vg \\ \overline{1} & f \end{vmatrix} = uf + vg = \overline{1}$$

定理 2.8.1 より $\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & \overline{1} & v \\ O & -g & uf \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & u & -vg \\ O & \overline{1} & f \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}\left(m+n, K[X]\right)$ が成り立つ. このとき,

次のようになるので,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & \overline{1} & v \\ O & -g & uf \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & f & \\ O & & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & u & -vg \\ O & \overline{1} & f \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & O \\ O & \begin{pmatrix} \overline{1} & v \\ -g & uf \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f & \overline{0} \\ \overline{0} & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & -vg \\ \overline{1} & f \end{pmatrix} \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & O \\ O & \begin{pmatrix} \overline{1} & v \\ -g & uf \end{pmatrix}\begin{pmatrix} uf & -vfg \\ g & fg \end{pmatrix} \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & uf+vg & -vfg+vfg \\ O & -ufg+ufg & vfg^2+uf^2g \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & \overline{1} & \overline{0} \\ O & \overline{0} & fg(uf+vg) \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & \overline{1} & \overline{0} \\ O & \overline{0} & fg \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} I_{m+n-1} & O \\ O & fg \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_{m+n-1} & O \\ O & fg \end{pmatrix}$$

特に, それらの多項式たち f, g が monic であるとき, その X-行列 $\begin{pmatrix} I_{m+n-2} & & O \\ & f & \\ O & & g \end{pmatrix}$ は単因子標準形となっている. $\square$

定理 2.8.15. 代数的閉体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, ある Jordan 標準形 J が存在して, $A \approx J$ が成り立つ.

ただし, この定理では Jordan 標準形の一意性については述べられていないことに注意されたい. これは次のようにして示される.

1. その特性 X-行列 $XI_n - A$ の単因子 $\{e_i\}_{i \in \varLambda_n}$ について, $\exists p \in \varLambda_n$ に対し, $i < p$ のとき, $e_i = \overline{1}$ が成り立ち, $p \leq i$ のとき, $\deg e_i > 0$ が成り立つ.
2. また, 定理 2.8.1 より $\det(XI_n - A) = \prod_{i \in \varLambda_n} e_i$ が成り立つかつ, 定理 2.2.5 に注意すれば, $n = \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1}} \deg e_i$ が成り立つので, 次式のように $\deg e_i$ 次 X-行列 A_i' が定義されることができる.

$$A_i' = \begin{pmatrix} I_{\deg e_i - 1} & O \\ O & e_i \end{pmatrix}$$

3. このとき, 行と列の入れ替えにより次式が成り立つ.

$$XI_n - A \sim \begin{pmatrix} e_1 & & & O \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A'_p & & & O \\ & A'_{p+1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A'_n \end{pmatrix}$$

4. また, 3.. によりその行列 A の固有値たちはその特性 X-行列 $XI_n - A$ の行列式の根であり, その体 K が代数的閉体であるから, $\forall i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1}$ に対し, その行列 A の互いに異なる固有値たちの族が $\left\{ \lambda_j \right\}_{j \in \varLambda_r}$ とおかれると, その集合 $\varLambda_{\deg e_i} \cup \{0\}$ の族 $\left\{ \alpha_{ij} \right\}_{j \in \varLambda_r}$ が存在して次式が成り立つ.

$$e_i = \prod_{j \in \varLambda_r} \left(X - \lambda_j \right)^{\alpha_{ij}}, \quad \sum_{j \in \varLambda_r} \alpha_{ij} = \deg e_i$$

5. さらに, $\forall (i,j) \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1} \times \varLambda_r$ に対し, 次のように α_{ij} 次 X-行列 B_{ij} が与えられたとき,

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} I_{\alpha_{ij}-1} & O \\ O & \left(X - \lambda_j \right)^{\alpha_{ij}} \end{pmatrix}$$

行列式因子に関する議論により, 次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} B_{i1} & & & O \\ & B_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_{ir} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_{\deg e_i - 1} & O \\ O & e_i \end{pmatrix} = A'_i$$

6. 定理 2.8.13 より $\forall (i,j) \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1} \times \varLambda_r$ に対し, $XI_{\alpha_{ij}} - J\left(\lambda_j, \alpha_{ij} \right) \sim B_{ij}$ が成り立つ.
7. $\alpha_j = \left(\alpha_{ij} \right)_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1}}$ として行と列の入れ替えにより $j \in \varLambda_r$ なる X-行列たち $J\left(\lambda_j ; \alpha_j \right)$ を対角成分とする対角行列 J はまさしく Jordan 標準形であるから, 次式が成り立つ.

$$XI_n - J \sim \begin{pmatrix} A'_p & & & O \\ & A'_{p+1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A'_n \end{pmatrix}$$

8. 3.. , 5.. , 定理 2.8.11 より $A \approx J$ が成り立つ.

この定理についてより詳しくいえば, 代数的閉体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その特性 X-行列 $XI_n - A$ の単因子標準形が次のように与えられることができて,

$$XI_n - A \sim \begin{pmatrix} e_1 & & & O \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_n \end{pmatrix}$$

$\exists p \in \varLambda_n$ に対し, $p \leq i$ のとき, $\deg e_i > 0$ が成り立つとすれば, その行列 A の互いに異なる固有値たちの族が $\left\{ \lambda_j \right\}_{j \in \varLambda_r}$ とおかれると, $\forall i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1}$ に対し, その集合 $\varLambda_{\deg e_i} \cup \{0\}$ の族 $\left\{ \alpha_{ij} \right\}_{j \in \varLambda_r}$ が存在して次式が成り立ち,

$$e_i = \prod_{j \in \varLambda_r} \left(X - \lambda_j \right)^{\alpha_{ij}}, \quad \sum_{j \in \varLambda_r} \alpha_{ij} = \mathrm{deg} e_i, \quad n = \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1}} \deg e_i$$

これにより, $j \in \Lambda_r$ なる X-行列たち $J(\lambda_j;\alpha_j)$ を対角成分とする対角行列 J が Jordan 標準形である. 例えば, 次のような対応関係が得られる.

特性 X-行列 $XI_n - A$ の単因子標準形	行列 A の Jordan 標準形
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-\lambda_1)^3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-\lambda_2)^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-\lambda_1)(X-\lambda_2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

証明. 代数的閉体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, 定理 2.8.12 よりその特性 X-行列 $XI_n - A$ の階数は n であるから, 定理 2.8.2, 定理 2.8.6 よりその特性 X-行列 $XI_n - A$ は次のように変形されることができる.

$$XI_n - A \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & & & O \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_n \end{pmatrix}$$

ここで, $\forall i \in \Lambda_{n-1}$ に対し, その多項式 e_{i+1} はその多項式 e_i で割り切れるので, $\exists p \in \Lambda_n$ に対し, $i < p$ のとき, $e_i = \overline{1}$ が成り立ち, $p \leq i$ のとき, $\deg e_i > 0$ が成り立つ.

また, $\exists P, Q \in \mathrm{GL}(n, K[X])$ に対し, 次式が成り立つので,

$$P(XI_n - A)Q = \begin{pmatrix} e_1 & & & O \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_n \end{pmatrix}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned} \det(XI_n - A) &= \frac{1}{\det P} \det P \det(XI_n - A) \det Q \frac{1}{\det Q} \\ &= \frac{1}{\det PQ} \det P(XI_n - A)Q \\ &= \frac{1}{\det PQ} \det P(XI_n - A)Q \\ &= \frac{1}{\det PQ} \det \begin{pmatrix} e_1 & & & O \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, その多項式 $\det PQ$ は $\overline{0}$ でない定数である. そこで, 単因子標準形の行列式は多項式 $\prod_{i \in \varLambda_n} e_i$ に等しく monic でもあるかつ, その特性 X-行列 $XI_n - A$ の行列式から誘導される多項式写像はその行列 A が対応する行列であるような線形写像 L_A の固有多項式写像で定理 2.2.5 よりその固有多項式写像を誘導する多項式, 即ち, これの特性 X-行列 $XI_n - A$ の行列式は monic となっているので, その多項式 $\det PQ$ は $\overline{1}$ に等しい. したがって, 次のようになる.

$$\det\left(XI_n - A\right) = \det\begin{pmatrix} e_1 & & & O \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_n \end{pmatrix} = \prod_{i \in \varLambda_n} e_i$$

ここで, その特性 X-行列 $XI_n - A$ の行列式から誘導される多項式写像はその行列 A が対応する行列であるような線形写像 L_A の固有多項式写像で定理 2.2.5 よりその多項式 $\det\left(XI_n - A\right)$ の次数は n である. ゆえに, 次のようになる.

$$n = \deg\det\left(XI_n - A\right) = \deg\prod_{i \in \varLambda_n} e_i = \sum_{i \in \varLambda_n} \deg e_i = \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1}} \deg e_i$$

ここで, $\deg e_i = d_i$ として, $\forall i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1}$ に対し, 次のように d_i 次 X-行列 A_i' をおくと,

$$A_i' = \begin{pmatrix} I_{d_i-1} & O \\ O & e_i \end{pmatrix}$$

その単因子標準形は次のように変形されることができ,

$$\begin{pmatrix} e_1 & & & O \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_p' & & & O \\ & A_{p+1}' & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_n' \end{pmatrix}$$

このとき, 次式が成り立つ.

$$XI_n - A \sim \begin{pmatrix} e_1 & & & O \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_p' & & & O \\ & A_{p+1}' & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_n' \end{pmatrix}$$

ここで, その特性 X-行列 $XI_n - A$ の行列式から誘導される多項式写像はその行列 A が対応する行列であるような線形写像 L_A の固有多項式写像であることに注意すれば, その行列 A の固有値たちはその特性 X-行列 $XI_n - A$ の行列式の根であるから, その多項式 $\prod_{i \in \varLambda_n} e_i$ の根でもあり, さらに, 定理 2.8.6 よりその行列 A の固有値たちはその多項式 e_n の根でもある. ここで, その体 K が代数的閉体であるから, $\forall i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1}$ に対し, その行列 A の互いに異なる固有値たちの族が $\left\{\lambda_j\right\}_{j \in \varLambda_r}$ とおかれると, その集合 $\varLambda_{d_i} \cup \{0\}$ の族 $\left\{\alpha_{ij}\right\}_{j \in \varLambda_r}$ が存在して次式が成り立つ.

$$e_i = \prod_{j \in \varLambda_r} \left(X - \lambda_j\right)^{\alpha_{ij}}, \quad \sum_{j \in \varLambda_r} \alpha_{ij} = d_i$$

さらに, $\forall(i,j) \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1} \times \varLambda_r$ に対し, 次のように α_{ij} 次 X-行列 B_{ij} が与えられたとき,

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} I_{\alpha_{ij}-1} & O \\ O & \left(X - \lambda_j\right)^{\alpha_{ij}} \end{pmatrix}$$

X-行列 $\begin{pmatrix} B_{i1} & & & O \\ & B_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_{ir} \end{pmatrix}$ の成分 $\left(X - \lambda_{j'}\right)^{\alpha_{i'j'}}$ が含まれる行と列を除いた $d_i - 1$ 次小行列式は定理 1.11.10 より多項式 $\prod_{j \in \Lambda_r \setminus \{j'\}} \left(X - \lambda_j\right)^{\alpha_{i'j}}$ に等しく, ここで, 固有値たちのおき方により族 $\left\{ \prod_{j \in \Lambda_r \setminus \{j'\}} \left(X - \lambda_j\right)^{\alpha_{i'j}} \right\}_{j' \in \Lambda_r}$ の最大公約元は $\overline{1}$ であるから, その X-行列 $\begin{pmatrix} B_{i1} & & & O \\ & B_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_{ir} \end{pmatrix}$ の $d_i - 1$ 次行列式因子 $d_{d_i - 1}$ は $\overline{1}$ となる. ここで, その X-行列 $\begin{pmatrix} B_{i1} & & & O \\ & B_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_{ir} \end{pmatrix}$ の d_i 次行列式因子 d_{d_i} は次式を満たすので,

$$\begin{aligned} d_{d_i} &= \begin{vmatrix} B_{i1} & & & O \\ & B_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_{ir} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{j \in \Lambda_r} \det B_{ij} = \prod_{j \in \Lambda_r} \det \left(X - \lambda_j\right)^{\alpha_{ij}} = e_i \end{aligned}$$

定理 2.8.6 よりそのその X-行列 $\begin{pmatrix} B_{i1} & & & O \\ & B_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_{ir} \end{pmatrix}$ の単因子標準形は次のように与えられる.

$$\begin{pmatrix} B_{i1} & & & O \\ & B_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_{ir} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_{d_i - 1} & O \\ O & e_i \end{pmatrix} = A'_i$$

ここで, 定理 2.8.13 より $\forall (i,j) \in \Lambda_n \setminus \Lambda_{p-1} \times \Lambda_r$ に対し, $XI_{\alpha_{ij}} - J\left(\lambda_j, \alpha_{ij}\right) \sim B_{ij}$ が成り立つので, 次式が成り立ち,

$$\begin{pmatrix} XI_{\alpha_{i1}} - J\left(\lambda_1, \alpha_{i1}\right) & & & O \\ & XI_{\alpha_{i2}} - J\left(\lambda_2, \alpha_{i2}\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & XI_{\alpha_{ir}} - J\left(\lambda_r, \alpha_{ir}\right) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_{i1} & & & O \\ & B_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_{ir} \end{pmatrix}$$

$\alpha_j = \left(\alpha_{ij}\right)_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_{p-1}}$ として行と列の入れ替えにより $j \in \Lambda_r$ なる X-行列たち $J\left(\lambda_j; \alpha_j\right)$ を対角成分とする対

角行列 J はまさしく Jordan 標準形であり上記で次式が成り立つことにより

$$\begin{pmatrix} B_{i1} & & & O \\ & B_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_{ir} \end{pmatrix} \sim A'_i$$

次式が成り立つ.

$$XI_n - J \sim \begin{pmatrix} A'_p & & & O \\ & A'_{p+1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A'_n \end{pmatrix}$$

以上より, 次式が成り立つので,

$$XI_n - A \sim \begin{pmatrix} A'_p & & & O \\ & A'_{p+1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A'_n \end{pmatrix} \sim Xi_n - J$$

定理 2.8.11 より $A \approx J$ が成り立つ. □

定理 2.8.16. 代数的閉体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, ある Jordan 標準形 J が Jordan 細胞の順序の違いを除いて一意的に存在して, $A \approx J$ が成り立つ. これは次のようにして示される.

1. その Jordan 標準形 J で 1 つの固有値 λ_j に対する Jordan 細胞が対角成分上で連続して並んでいるとしてもよい.
2. $\forall j \in \varLambda_r$ に対し, その固有値 λ_j に対する Jordan 細胞 $J\left(\lambda_j, \alpha_{ij}\right)$ の最大次数が l_j と, その固有値 λ_j に対する $1 \leq p \leq l_j$ なる p 次 Jordan 細胞の個数が s_{jp} とおかれるとき, その固有値 λ_j に対する Jordan 細胞が対角成分上に並べられた行列を $A\left(\lambda_j\right)$ とおき, その次数を n_j とおくと, 次式が成り立つ.
$$n_j = \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} p s_{jp}$$
3. 以上の議論により, 次式が成り立つ.
$$A \approx J \approx \begin{pmatrix} A\left(\lambda_1\right) & & & O \\ & A\left(\lambda_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A\left(\lambda_r\right) \end{pmatrix}$$
4. $n_j - \mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_j\right) - \lambda_j I_{n_j}\right) = \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} s_{jp}$ が成り立つかつ, $\mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_{j'}\right) - \lambda_j I_{n_{j'}}\right) = n_{j'}$ が成り立つので, 次式が成り立つ.
$$n - \mathrm{rank}\left(A - \lambda_j I_n\right) = \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} s_{jp}$$

5. 次に, $\forall q \in \varLambda_{l_j+1} \setminus \varLambda_1 \forall p \in \varLambda_{l_j+1} \setminus \varLambda_{q-1}$ に対し, $\left(J\left(\lambda_j, p\right) - \lambda_j I_p\right)^q \sim \begin{pmatrix} I_{p-q} & O \\ O & O \end{pmatrix}$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$n_j - \mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_j\right) - \lambda_j I_{n_j}\right)^q = \sum_{p \in \varLambda_{q-1}} s_{jp} p + \sum_{p \in \varLambda_{l_j} \setminus \varLambda_{q-1}} s_{jp} q$$

6. 以上より, 次式が成り立つ.

$$q\left(n - \mathrm{rank}\left(A - \lambda_j I_n\right)\right) - \left(n_j - \mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_j\right) - \lambda_j I_{n_j}\right)^q\right) = \sum_{p \in \varLambda_{q-1}} s_{jp}(q-p)$$

7. この式から Jordan 標準形のとり方に依らず族 $\left\{s_{jp}\right\}_{p \in \varLambda_{l_j}}$ が得られる. これをもとにすれば, その Jordan 標準形 J が Jordan 細胞の順序の違いを除いて一意的に得られる.

証明. 代数的閉体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A の互いに異なる固有値たちの族が $\left\{\lambda_j\right\}_{j \in \varLambda_r}$ と, $\forall j \in \varLambda_r$ に対し, その Jordan 標準形 J のその固有値 λ_j に対する Jordan 細胞 $J\left(\lambda_j, \alpha_{ij}\right)$ の最大次数が l_j と, その固有値 λ_j に対する $1 \leq p \leq l_j$ なる p 次 Jordan 細胞の個数が s_{jp} とおかれると, 行と列の入れ替えにより対角成分上で Jordan 細胞の順序を入れかえられることができるので, 1 つの固有値 λ_j に対する Jordan 細胞が対角成分上で連続して並んでいるとしてもよい. このとき, その固有値 λ_j に対する Jordan 細胞が対角成分上に並べられた行列を $A\left(\lambda_j\right)$ とおき, その次数を n_j とおくと, 次式が成り立つ.

$$n_j = \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} p s_{jp}$$

以上の議論により, 次式が成り立つ.

$$A \approx J \approx \begin{pmatrix} A\left(\lambda_1\right) & & & O \\ & A\left(\lambda_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A\left(\lambda_r\right) \end{pmatrix}$$

ここで, 行と列の入れ替えにより次のようになるので,

$$J\left(\lambda_j, \alpha_{ij}\right) - \lambda_j I_{\alpha_{ij}} = J\left(0, \alpha_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & O \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ O & & & & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & O \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ O & & & & 0 \end{pmatrix}$$

次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} n_j - \mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_j\right) - \lambda_j I_{n_j}\right) &= \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} p s_{jp} - \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} s_{jp} \mathrm{rank}\left(J\left(\lambda_j, p\right) - \lambda_j I_p\right) \\ &= \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} s_{jp}\left(p - \mathrm{rank}\left(J\left(\lambda_j, p\right) - \lambda_j I_p\right)\right) \\ &= \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} s_{jp}(p - p + 1) = \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} s_{jp} \end{aligned}$$

ここで，$\forall j' \in \varLambda_r \setminus \{j\}$ に対し，行列 $A\left(\lambda_{j'}\right) - \lambda_j I_{n_{j'}}$ の行列式が定理 1.11.10 と固有値たちのおき方によりより 0 でないので，定理 1.11.15 よりその行列 $A\left(\lambda_{j'}\right) - \lambda_j I_{n_{j'}}$ は正則行列であり，したがって，$\mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_{j'}\right) - \lambda_j I_{n_{j'}}\right) = n_{j'}$ が成り立つ．これにより，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
n - \mathrm{rank}\left(A - \lambda_j I_n\right) &= n - \mathrm{rank}\left(J - \lambda_j I_n\right) \\
&= \sum_{j' \in \varLambda_r} n_{j'} - \sum_{j' \in \varLambda_r} \mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_{j'}\right) - \lambda_j I_{n_{j'}}\right) \\
&= \sum_{j' \in \varLambda_r} \left(n_{j'} - \mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_{j'}\right) - \lambda_j I_{n_{j'}}\right)\right) \\
&= \sum_{j' \in \varLambda_r \setminus \{j\}} \left(n_{j'} - \mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_{j'}\right) - \lambda_j I_{n_{j'}}\right)\right) \\
&\quad + n_j - \mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_j\right) - \lambda_j I_{n_j}\right) \\
&= \sum_{j' \in \varLambda_r \setminus \{j\}} 0 + \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} s_{jp} = \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} s_{jp}
\end{aligned}
$$

次に，$\forall q \in \varLambda_{l_j+1} \setminus \varLambda_1 \forall p \in \varLambda_{l_j+1} \setminus \varLambda_{q-1}$ に対し，数学的帰納法と行と列の入れ替えにより次のようになるので，

$$
\begin{aligned}
\left(J\left(\lambda_j, p\right) - \lambda_j I_p\right)^q &= J(0,p)^q \\
&= \begin{pmatrix}
0 & & & 1 & & & O \\
& 0 & & & 1 & & \\
& & 0 & & & \ddots & \\
& & & 0 & & & 1 \\
& & & & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
O & & & & & & 0
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} O & I_{p-q} \\ O & O \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_{p-q} & O \\ O & O \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

次式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
n_j - \mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_j\right) - \lambda_j I_{n_j}\right)^q &= \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} p s_{jp} - \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} s_{jp} \mathrm{rank}\left(J\left(\lambda_j, p\right) - \lambda_j I_p\right)^q \\
&= \sum_{p \in \varLambda_{l_j}} s_{jp}\left(p - \mathrm{rank}\left(J\left(\lambda_j, p\right) - \lambda_j I_p\right)^q\right) \\
&= \sum_{p \in \varLambda_{q-1}} s_{jp}\left(p - \mathrm{rank}\left(J\left(\lambda_j, p\right) - \lambda_j I_p\right)^q\right) \\
&\quad + \sum_{p \in \varLambda_{l_j} \setminus \varLambda_{q-1}} s_{jp}\left(p - \mathrm{rank}\left(J\left(\lambda_j, p\right) - \lambda_j I_p\right)^q\right) \\
&= \sum_{p \in \varLambda_{q-1}} s_{jp}\left(p - \mathrm{rank} O\right) \\
&\quad + \sum_{p \in \varLambda_{l_j} \setminus \varLambda_{q-1}} s_{jp}\left(p - \mathrm{rank}\begin{pmatrix} I_{p-q} & O \\ O & O \end{pmatrix}\right) \\
&= \sum_{p \in \varLambda_{q-1}} s_{jp} p + \sum_{p \in \varLambda_{l_j} \setminus \varLambda_{q-1}} s_{jp}(p - p + q)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{p \in \Lambda_{q-1}} s_{jp} p + \sum_{p \in \Lambda_{l_j} \setminus \Lambda_{q-1}} s_{jp} q$$

以上より, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&q\left(n - \mathrm{rank}\left(A - \lambda_j I_n\right)\right) - \left(n_j - \mathrm{rank}\left(A\left(\lambda_j\right) - \lambda_j I_{n_j}\right)^q\right) \\
&= \sum_{p \in \Lambda_{l_j}} s_{jp} q - \sum_{p \in \Lambda_{q-1}} s_{jp} p - \sum_{p \in \Lambda_{l_j} \setminus \Lambda_{q-1}} s_{jp} q \\
&= \sum_{p \in \Lambda_{q-1}} s_{jp} q + \sum_{p \in \Lambda_{l_j} \setminus \Lambda_{q-1}} s_{jp} q - \sum_{p \in \Lambda_{q-1}} s_{jp} p - \sum_{p \in \Lambda_{l_j} \setminus \Lambda_{q-1}} s_{jp} q \\
&= \sum_{p \in \Lambda_{q-1}} s_{jp}(q - p)
\end{aligned}$$

この式からこの式の q に 1 つずつ代入していけば, 数学的帰納法により Jordan 標準形のとり方に依らず族 $\left\{s_{jp}\right\}_{p \in \Lambda_{l_j}}$ が得られる. これをもとにすれば, その固有値 λ_j に対する Jordan 細胞 $J\left(\lambda_j, \alpha_{ij}\right)$ の最大次数 l_j とその固有値 λ_j に対する $1 \leq p \leq l_j$ なる p 次 Jordan 細胞の個数 s_{jp} がその Jordan 標準形のとり方に依らず得られるので, その行列 A の Jordan 標準形が Jordan 細胞の順序の違いを除いて一意的に存在する. □

定理 2.8.17. 代数的閉体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n, n, K)$ に対し, その行列 A が対角化可能であるならそのときに限り, その行列 A の互いに異なる固有値たちの族が $\left\{\lambda_j\right\}_{j \in \Lambda_r}$ とおかれると, その特性 X-行列 $XI_n - A$ の単因子に含まれる多項式 e_n が次式を満たす.

$$e_n = \prod_{j \in \Lambda_r} \left(X - \lambda_j\right)$$

証明. 定理 2.8.15 の注意から明らかである. 実際, 代数的閉体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n, n, K)$ に対し, その特性 X-行列 $XI_n - A$ の単因子標準形が次のように与えられることができて,

$$XI_n - A \sim \begin{pmatrix} e_1 & & & O \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_n \end{pmatrix}$$

$\exists p \in \Lambda_n$ に対し, $p \leq i$ のとき, $\deg e_i > 0$ が成り立つとすれば, その行列 A の互いに異なる固有値たちの族が $\left\{\lambda_j\right\}_{j \in \Lambda_r}$ とおかれると, $\forall i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_{p-1}$ に対し, その集合 $\{0, 1\}$ の族 $\left\{\alpha_{ij}\right\}_{j \in \Lambda_r}$ が存在して次式が成り立ち,

$$e_i = \prod_{j \in \Lambda_r} \left(X - \lambda_j\right)^{\alpha_{ij}}, \quad \sum_{j \in \Lambda_r} \alpha_{ij} = \deg e_i, \quad n = \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_{p-1}} \deg e_i$$

これにより, $j \in \Lambda_r$ なる X-行列たち $J\left(\lambda_j; \left(\alpha_{ij}\right)_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_{p-1}}\right)$ を対角成分とする対角行列 J が Jordan 標準形である. このとき, $\forall i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_{p-1}$ に対し, 整数 α_{ij} は 0 か 1 しかとらないので, その Jordan 標準形は対角行列である. □

2.8.5 単因子と最小多項式

ここで, まず広義の固有空間に関する定理たちが述べられよう. なお, 分かりやすくするため, 若干内容が変えられてある.

定義 (定義 2.4.1 の再掲). 体 K 上の vector 空間 K^n, 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が与えられたとき, その線形写像 L_A の固有値の 1 つ λ, n 次単位行列 I_n を用いてある自然数 l が存在して $(\lambda I_n - A)^l \mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つとき, その vector$\mathbf{v}$ をその線形写像 L_A のその固有値 λ に対する広義の固有 vector という.

定理 (定理 2.4.1 の再掲). 体 K 上の vector 空間 K^n, 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が与えられたとき, n 次単位行列 I_n と自然数 l を用いた次式のようなその線形写像 L_A の 1 つの固有値 λ に対する広義の固有 vector$\mathbf{v}$ 全体の集合と零 vector との和集合 $\widetilde{W_{L_A}}(\lambda)$ はその vector 空間 K^n の部分 vector 空間をなす.

$$\widetilde{W_{L_A}}(\lambda) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \ker (\lambda I_n - A)^l$$

さらに, その固有値 λ に対する固有空間 $W_{L_A}(\lambda)$ はその集合 $\widetilde{W_{L_A}}(\lambda)$ に含まれる.

定義 (定義 2.4.2 の再掲). 上の式で定義された集合 $\widetilde{W_{L_A}}(\lambda)$ をその固有値 λ に対する広義の固有空間という.

定理 (定理 2.4.4 の再掲). 体 K 上の vector 空間 K^n, 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が与えられたとき, $i \in \Lambda_m$ なるその線形写像 L_A の互いに異なる固有値たち λ_i に対する広義の固有 vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立である.

定理 (定理 2.4.5 の再掲). 体 K 上の vector 空間 K^n, 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が与えられたとき, $i \in \Lambda_m$ なるその線形写像 f の互いに異なる固有値たち λ_i に対する広義の固有空間たち $\widetilde{W_{L_A}}(\lambda_i)$ の和空間 $\sum_{i \in \Lambda_m} \widetilde{W_{L_A}}(\lambda_i)$ は直和空間 $\bigoplus_{i \in \Lambda_m} \widetilde{W_{L_A}}(\lambda_i)$ でもある.

定理 (分解定理 2.4.1 の再掲). 代数的閉体 K 上の vector 空間 K^n, 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ が与えられたとき, 定理 2.3.1 よりその線形写像 f の固有多項式 Φ_{L_A} がその線形写像 L_A の互いに異なる s つの固有値たち λ_i を用いて次式のように表されることができるので, そうするなら,

$$\Phi_{L_A} = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}, \quad \sum_{i \in \Lambda_s} n_i = n$$

次のことが成り立つ.

- その固有値 λ_i に対する広義の固有空間たち $\widetilde{W_{L_A}}(\lambda_i)$ すべての和空間は直和空間でこれはその vector 空間 K^n に等しい, 即ち, その vector 空間 V は次式を満たす.

$$V = \bigoplus_{i \in \Lambda_s} \widetilde{W_{L_A}}(\lambda_i)$$

- $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, その固有値 λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_{L_A}}(\lambda_i)$ は恒等写像 $I_{K^n} : K^n \rightarrow K^n$ を用いて次式を満たす.

$$\widetilde{W_{L_A}}(\lambda_i) = \ker (\lambda_i I_V - L_A)^{n_i}$$

- $\forall i \in \Lambda_s$ に対し, その固有値 λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_{L_A}}(\lambda_i)$ の次元は自然数 n_i に等しい, 即ち, 次式を満たす.

$$\dim \widetilde{W_{L_A}}(\lambda_i) = \operatorname{nullity} (\lambda_i I_V - L_A)^{n_i} = n_i$$

この定理を分解定理という.

定理 (定理 2.6.3 の再掲). 代数的閉体 K 上の vector 空間 K^n における線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n$ の固有多項式 Φ_{L_A} が互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\sum_{i \in \Lambda_s} n_i = n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$\Phi_{L_A} = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

$\forall i \in \Lambda_s$ に対し, その線形写像 L_A の Jordan 標準形に入っている固有値 λ_i に対する Jordan 細胞 $J(\lambda_i, q_{ij})$ の個数 r_i は冪零変換 $\lambda_i I_{K^n} - L_A$ の核の次元, 即ち, その固有値 λ_i に対する固有空間 $W(\lambda_i)$ の次元に等しい, 即ち, 次式が成り立つ.

$$r_i = \mathrm{nullity}\left(\lambda_i I_{K^n} - L_A\right) = \dim W(\lambda_i)$$

定理 2.8.18. 体 K 上の 2 つの正方行列たち A_*, B_* が与えられたとき, 行列 $\begin{pmatrix} A_* & O \\ O & B_* \end{pmatrix}$ を A とおくと, これが対応する行列であるような線形写像 L_A の最小多項式 φ_{L_A} はそれらの行列たち A_*, B_* が対応する行列であるような線形写像たち L_{A_*}, L_{B_*} の最小多項式たち $\varphi_{L_{A_*}}$, $\varphi_{L_{B_*}}$ どちらとものの倍元のうち最も次数が低いものである.

証明. 体 K 上の 2 つの正方行列たち A_*, B_* が与えられたとき, 行列 $\begin{pmatrix} A_* & O \\ O & B_* \end{pmatrix}$ を A とおくと, その行列 A が対応する行列であるような線形写像 L_A の最小多項式 φ_{L_A} の変数 X にその線形写像 L_A を代入した写像 $\varphi_{L_A}(L_A)$ は, $\deg \varphi_{L_A} = d$ とおくと, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \varphi_{L_A}(L_A) &= \sum_{i \in \Lambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) L_A^i \\ &= \sum_{i \Lambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) L_{A^i} \\ &= L_{\sum_{i \in \Lambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) A^i} = 0 \end{aligned}$$

これに対応する行列 A' は次のようになる.

$$\begin{aligned} A' &= \sum_{i \in \Lambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) A^i \\ &= \sum_{i \in \Lambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) \begin{pmatrix} A_* & O \\ O & B_* \end{pmatrix}^i \\ &= \sum_{i \in \Lambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) \begin{pmatrix} A_*^i & O \\ O & B_*^i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i \in \Lambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) A_*^i & O \\ O & \sum_{i \in \Lambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) B_*^i \end{pmatrix} = O \end{aligned}$$

このとき, 成分が比較されることで, 次式が成り立つ.

$$\sum_{i \in \Lambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) A_*^i = O, \quad \sum_{i \in \Lambda_d \cup \{0\}} \varphi_{L_A}(i) B_*^i = O$$

これらはその最小多項式 φ_{L_A} の変数 X にそれらの行列たち A_*, B_* が対応する行列であるような線形写像たち L_{A_*}, L_{B_*} を代入した写像 $\varphi_{L_A}\left(L_{A_*} \right)$, $\varphi_{L_A}\left(L_{B_*} \right)$ が零写像となる．したがって, 定理 2.6.5 よりその最小多項式 φ_{L_A} はそれらの線形写像たち L_{A_*}, L_{B_*} の最小多項式たちどちらでも割り切れられることができる, 即ち, その最小多項式 φ_{L_A} はそれらの最小多項式たち $\varphi_{L_{A_*}}$, $\varphi_{L_{B_*}}$ どちらとものの倍元である．

それらの最小多項式たち $\varphi_{L_{A_*}}$, $\varphi_{L_{B_*}}$ どちらとものの倍元のうち最も次数が低いものが, その多項式環 $K[X]$ が単項 ideal 整域でもあることと単項 ideal 整域が一意分解整域であることに注意すれば, 存在することが容易に分かる[*15]．そこで, その最小多項式 φ_{L_A} がそれらの最小多項式たち $\varphi_{L_{A_*}}$, $\varphi_{L_{B_*}}$ どちらとものの倍元のうち最も次数が低いものでないとすると, それらの最小多項式たち $\varphi_{L_{A_*}}$, $\varphi_{L_{B_*}}$ どちらとものの倍元のうち最も次数が低いものを c とおくと, その多項式 c の変数 X にその線形写像 L_A を代入した写像 $c\left(L_A \right)$ は零写像となるが, これは最小多項式の定義に矛盾する．よって, その最小多項式 φ_{L_A} はそれらの最小多項式たち $\varphi_{L_{A_*}}$, $\varphi_{L_{B_*}}$ どちらとものの倍元のうち最も次数が低いものである． □

定理 2.8.19. 体 K 上の n 次正方行列 A が対応する行列であるような線形写像 L_A の最小多項式 φ_{L_A} はその行列 A の特性 X-行列 $XI_n - A$ の単因子のうち最後の多項式 e_n, 即ち, これの単因子標準形の第 (n,n) 成分に等しい．

証明. 体 K 上の n 次正方行列 A の Jordan 標準形 J はある可逆行列 P を用いて $P^{-1}AP$ と表されることができる．ここで, その行列 A が対応する行列であるような線形写像 L_A の最小多項式 φ_{L_A} について, その行列 J が対応する行列であるような線形写像 L_J の最小多項式 φ_{L_J} もまたその線形写像 L_A の最小多項式でもあるので, 定理 2.6.6 より $\varphi_{L_A} = \varphi_{L_J}$ が成り立つ．ここで, その線形写像 L_A の互いに異なる固有値の族 $\left\{ \lambda_i \right\}_{i \in \varLambda_r}$ が与えられたとき, 分解定理と定理 2.6.1 より $i \in \varLambda_s$ なるその線形写像 L_A の互いに異なる固有値たち λ_i を用いた線形写像たち $\lambda_i I_{K^n} - L_A$ はいずれもその固有値 λ_i に対する広義の固有空間 $\widetilde{W_{L_A}}\left(\lambda_i \right)$ における冪零変換でこれの指数が q_i とおかれると, 定理 2.6.11 より次式が成り立つ．

$$\varphi_{L_A} = \prod_{i \in \varLambda_s} \left(X - \lambda_i \right)^{q_i}$$

ここで, 定理 2.8.12 と定理 2.8.15 の注意よりその行列 A の特性 X-行列 $XI_n - A$ の単因子標準形が次のように与えられることができて,

$$XI_n - A \sim \begin{pmatrix} e_1 & & & O \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_n \end{pmatrix}$$

$\exists p \in \varLambda_n$ に対し, $p \leq i$ のとき, $\deg e_i > 0$ が成り立つとすれば, $\forall i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1}$ に対し, その集合 $\varLambda_{\deg e_i} \cup \{0\}$ の族 $\left\{ \alpha_{ij} \right\}_{j \in \varLambda_r}$ が存在して次式が成り立ち,

$$e_i = \prod_{j \in \varLambda_r} \left(X - \lambda_j \right)^{\alpha_{ij}}, \quad \sum_{j \in \varLambda_r} \alpha_{ij} = \deg e_i, \quad n = \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1}} \deg e_i$$

これにより, $j \in \varLambda_r$ なる X-行列たち $J\left(\lambda_j; \left(\alpha_{ij} \right)_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{p-1}} \right)$ を対角成分とする対角行列 J が Jordan 標準形である．

---

*15 実際, 多項式環 $K[X]$ の多項式たち f, g が素元分解されて, 素元の族 $\left\{ p_i \right\}_{i \in \varLambda_r}$, $\left\{ q_i \right\}_{i \in \varLambda_s}$ とおけば, 多項式 $\prod \left\{ p_i \right\}_{i \in \varLambda_r} \cup \left\{ q_i \right\}_{i \in \varLambda_s}$ がそれらの多項式たち f, g の倍元のうち次数が最も小さいものになる．

ここで, 定理 2.8.20, 単因子定理と比較して Jordan 標準形の一意性より, $\forall i \in \Lambda_r$ に対し, $q_i = \alpha_{ni}$ が成り立つので, $\varphi_{L_A} = e_n$ が成り立つ. よって, その線形写像 L_A の最小多項式 φ_{L_A} はその行列 A の特性 X-行列 $XI_n - A$ の単因子のうち最後の多項式 e_n, 即ち, これの単因子標準形の第 (n, n) 成分に等しい. □

ここで, 定理 2.8.17, 定理 2.8.19 より次の定理が直ちに別の方法として示されることができる. なお, 分かりやすくするため, 若干内容が変えられてある.

定理 (定理 2.6.12 の再掲)**.** 代数的閉体 K 上の n 次正方行列 A が対応する行列であるような線形写像 L_A の最小多項式 φ_{L_A} が $i \in \Lambda_s$ なるその線形写像 L_A の互いに異なる固有値たち λ_i を用いて次式を満たすならそのときに限り,

$$\varphi_{L_A} = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)$$

その線形写像 L_A は対角化可能である.

2.8.6 変換行列

定理 2.8.15, 定理 2.8.16 より代数的閉体 K 上の n 次正方行列 A の Jordan 標準形 J が与えられたとき, ある正則行列 P が存在して $P^{-1}AP = J$ が成り立つのであった. ここでは, その正則行列をその Jordan 標準形 J の変換行列ということにする. その Jordan 標準形 J の変換行列 P の求め方について, 議論していこう. そこで, 定理 2.8.20 を行列で言い換えれば次のようになる.

定理 2.8.20. 代数的閉体 K 上の n 次正方行列 A が対応する行列であるような線形写像 $L_A : K^n \to K^n$ の固有多項式 Φ_{L_A} が互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\displaystyle\sum_{i \in \Lambda_s} n_i = n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$\Phi_{L_A} = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

$\forall i \in \Lambda_s$ に対し, 定理 2.6.1 よりその核 $\ker (\lambda_i I_V - L_A)^{n_i}$ における冪零変換 $\lambda_i I_V - L_A$ の不変系 Q_i が $Q_i = (q_{ij})_{j \in \Lambda_{r_i}}$ と与えられたらば, その vector 空間 V の次式のようなある基底 $\langle \mathcal{B}_i \rangle_{i \in \Lambda_s}$ が存在して,

$$\mathcal{B}_i = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{v}_{i1} & \mathbf{v}_{i2} & \cdots & \mathbf{v}_{ir_i} \\ (A - \lambda_i I_n) \mathbf{v}_{i1} & (A - \lambda_i I_n) \mathbf{v}_{i2} & \cdots & (A - \lambda_i I_n) \mathbf{v}_{ir_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A - \lambda_i I_n)^{q_{i1}-1} \mathbf{v}_{i1} & (A - \lambda_i I_n)^{q_{i2}-1} \mathbf{v}_{i2} & \cdots & (A - \lambda_i I_n)^{q_{ir_i}-1} \mathbf{v}_{ir_i} \end{matrix} \right\rangle$$

これが $\mathcal{B}$ とおかれると, これに関する線形写像 L_A の表現行列 $[L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式のように表されることができる.

$$[L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1; Q_1) & & & O \\ & J(\lambda_2; Q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_s; Q_s) \end{pmatrix}$$

しかも, その表現行列 $[L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ の中に含まれる Jordan 塊たちの順序を除けば, その表現行列 $[L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ はその線形写像 L_A に対し一意的に決まる.

定理 2.8.21. 代数的閉体 K 上で, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, ある Jordan 標準形 J が存在して, $A \approx J$ が成り立つのであった. ここで, その n 次正方行列 A が対応する行列であるような線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n$ の固有多項式 $\varPhi_{L_A}$ が互いに異なるその体 K の元々 λ_i を用いて $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_s} n_i = n$ として次式のように表されることができるので, そうするとき,

$$\varPhi_{L_A} = \prod_{i \in \varLambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

$\forall i \in \varLambda_s$ に対し, 定理 2.6.1 よりその核 $\ker(\lambda_i I_V - L_A)^{n_i}$ における冪零変換 $\lambda_i I_V - L_A$ の不変系 q_i が $q_i = (q_{ij})_{j \in \varLambda_{r_i}}$ と与えられたらば, その vector 空間 V のある基底 $\mathcal{B}$ が存在して, これに関する線形写像 L_A の表現行列 $[L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が次式を満たすのであった.

$$J = [L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

このとき, $\forall i \in \varLambda_s \forall j \in \varLambda_{r_i}$ に対し, $(A - \lambda_i I_n)^{q_{ij}} \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0}$ かつ $(A - \lambda_i I_n)^{q_{ij}-1} \mathbf{v}_{ij} \neq \mathbf{0}$ なる vector$\mathbf{v}_{ij}$ を用いて次式のように行列 P が定義されれば,

$$\begin{gathered} P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_s \end{pmatrix}, \quad P_i = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{r_i} \end{pmatrix}, \\ Q_j = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{ij} & (A - \lambda_i I_n) \mathbf{v}_{ij} & \cdots & (A - \lambda_i I_n)^{q_{ir_i}-1} \mathbf{v}_{ij} \end{pmatrix} \end{gathered}$$

即ち, $\forall i \in \varLambda_s \forall j \in \varLambda_{r_i} \forall k \in \varLambda_{q_{ij}-1}$ に対し, $(A - \lambda_i I_n)^{q_{ij}} \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0}$ かつ $(A - \lambda_i I_n)^{q_{ij}-1} \mathbf{v}_{ij} \neq \mathbf{0}$ なる vector$\mathbf{v}_{ij}$ を用いて, $\mathbf{p}_{ijk} = (A - \lambda_i I_n)^k \mathbf{v}_{ij}$ とおいて, 次式のように行列 P が定義されれば,

$$\begin{aligned} P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_s \end{pmatrix}, \quad P_i &= \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{r_i} \end{pmatrix}, \\ Q_j &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{ij1} & \mathbf{p}_{ij2} & \cdots & \mathbf{p}_{ij,q_{ij}-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

次式が成り立つ.

$$P^{-1}AP = J$$

さらに, これは, $\forall i \in \varLambda_s \forall j \in \varLambda_{r_i}$ に対し, 次式のような連立 1 次方程式と同値である.

$$\begin{cases} (A - \lambda_i I_n) \mathbf{p}_{ij1} = \mathbf{0} \\ (A - \lambda_i I_n) \mathbf{p}_{ij2} = \mathbf{p}_{ij1} \\ \vdots \\ (A - \lambda_i I_n) \mathbf{p}_{ij,q_{ij}-1} = \mathbf{p}_{ij,q_{ij}-2} \end{cases}$$

証明. 上の仮定の下で, $\forall j \in \varLambda_s \forall i \in \varLambda_{r_i}$ に対し, $(A - \lambda_i I_n)^{q_{ij}} (\mathbf{v}_{ij}) = \mathbf{0}$ かつ $(A - \lambda_i I_n)^{q_{ij}-1} (\mathbf{v}_{ij}) \neq \mathbf{0}$ なる vector$\mathbf{v}_{ij}$ を用いて次式のように行列 P が定義されれば,

$$\begin{gathered} P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_s \end{pmatrix}, \quad P_i = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{r_i} \end{pmatrix}, \\ Q_j = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{ij} & (A - \lambda_i I_n) (\mathbf{v}_{ij}) & \cdots & (A - \lambda_i I_n)^{q_{ir_i}-1} (\mathbf{v}_{ij}) \end{pmatrix} \end{gathered}$$

即ち, $\forall i \in \varLambda_s \forall j \in \varLambda_{r_i} \forall k \in \varLambda_{q_{ij}-1}$ に対し, $(A - \lambda_i I_n)^{q_{ij}} \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0}$ かつ $(A - \lambda_i I_n)^{q_{ij}-1} \mathbf{v}_{ij} \neq \mathbf{0}$ なる vector$\mathbf{v}_{ij}$ を用いて, $\mathbf{p}_{ijk} = (A - \lambda_i I_n)^k \mathbf{v}_{ij}$ とおいて, 次式のように行列 P が定義されれば,

$$\begin{aligned} P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_s \end{pmatrix}, \quad P_i &= \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{r_i} \end{pmatrix}, \\ Q_j &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{ij1} & \mathbf{p}_{ij2} & \cdots & \mathbf{p}_{ijq_{ij}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

その Jordan 標準形 J が対応する行列であるような線形写像 L_J を用いて次式が成り立つことから,

$$
\begin{tikzcd}
& K^n \arrow[rr, "L_J"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & K^n \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[rr, mapsto, "L_J"] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & & J\mathbf{v} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[dd, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & \\
& K^n \arrow[rr, "A"] & & K^n \\
\mathbf{w} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] \arrow[rr, mapsto, "A"] & & A\mathbf{w} \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] &
\end{tikzcd}
$$

その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ がまさしくその行列 P が対応する行列であるような線形写像である．ここで, 正規直交基底を ε とおけば次のようになる．

$$
\begin{aligned}
J &= [L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\
&= \left[\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ L_J \circ \varphi_{\mathcal{B}}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\
&= \left[\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\right]_{\mathcal{B}}^{\varepsilon} [L_A]_{\varepsilon}^{\varepsilon} [\varphi_{\mathcal{B}}]_{\varepsilon}^{\mathcal{B}} \\
&= [\varphi_{\mathcal{B}}]_{\varepsilon}^{\mathcal{B}-1} [L_A]_{\varepsilon}^{\varepsilon} [\varphi_{\mathcal{B}}]_{\varepsilon}^{\mathcal{B}} \\
&= P^{-1}AP
\end{aligned}
$$

ここで, その Jordan 標準形 J は次式のように表されることができるので,

$$
J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1; q_1) & & & O \\ & J(\lambda_2; q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_s; q_s) \end{pmatrix}
$$

次のようになる,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \cdots & AP_s \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_s \end{pmatrix} \\
&= AP \\
&= PP^{-1}AP \\
&= PJ \\
&= \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(\lambda_1; q_1) & & & O \\ & J(\lambda_2; q_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_s; q_s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_1 J(\lambda_1; q_1) & P_2 J(\lambda_2; q_2) & \cdots & P_s J(\lambda_s; q_s) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

即ち, $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, $AP_i = P_i J(\lambda_i; q_i)$ が成り立つ．これが成り立つならそのときに限り, 次のようになる,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} AQ_1 & AQ_2 & \cdots & AQ_{r_i} \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{r_i} \end{pmatrix} \\
&= AP_i \\
&= P_i J(\lambda_i; q_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{r_i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J(\lambda_i, q_{i1}) & & & O \\ & J(\lambda_i, q_{i2}) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_i, q_{ir_i}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Q_1 J(\lambda_i, q_{i1}) & Q_2 J(\lambda_i, q_{i2}) & \cdots & Q_{r_i} J(\lambda_i, q_{ir_i}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

即ち, $\forall i \in \varLambda_s \forall j \in \varLambda_{r_i}$ に対し, $AQ_j = Q_j J(\lambda_i, q_{ij})$ が成り立つ. これが成り立つならそのときに限り, 次のようになる,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A\mathbf{p}_{ij1} & A\mathbf{p}_{ij2} & \cdots & A\mathbf{p}_{ijq_{ij}} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{ij1} & \mathbf{p}_{ij2} & \cdots & \mathbf{p}_{ijq_{ij}} \end{pmatrix} \\
&= AQ_j \\
&= Q_j J(\lambda_i, q_{ij}) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{ij1} & \mathbf{p}_{ij2} & \cdots & \mathbf{p}_{ijq_{ij}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & O \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ O & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_i \mathbf{p}_{ij1} & \mathbf{p}_{ij1} + \lambda_i \mathbf{p}_{ij2} & \cdots & \mathbf{p}_{ij,q_{ij}-1} + \lambda_i \mathbf{p}_{ijq_{ij}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

即ち, 次式が得られる.

$$
\begin{cases}
(A - \lambda_i I_n)\, \mathbf{p}_{ij1} = \mathbf{0} \\
(A - \lambda_i I_n)\, \mathbf{p}_{ij2} = \mathbf{p}_{ij1} \\
\qquad \vdots \\
(A - \lambda_i I_n)\, \mathbf{p}_{ijq_{ij}} = \mathbf{p}_{ij,q_{ij}-1}
\end{cases}
$$

□

この定理により, その変換行列 P を求めるのに, 上の連立 1 次方程式を求めることに帰着できる. そこで, $\forall i \in \varLambda_s \forall j \in \varLambda_{r_i} \forall k \in \varLambda_{q_{ij}-1}$ に対し, $\mathbf{p}_{ijk} \neq \mathbf{0}$ が成り立つことから, 次のような 2 通りの求め方がある.

- 1 つ目は, $\forall i \in \varLambda_s \forall j \in \varLambda_{r_i}$ に対し, $(A - \lambda_i I_n)^{q_{ij}} \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0}$ かつ $(A - \lambda_i I_n)^{q_{ij}-1} \mathbf{v}_{ij} \neq \mathbf{0}$ なる vector$\mathbf{v}_{ij}$ をまず求め, 次のように順次 vectors$\mathbf{p}_{ijk}$ を求めていく方法である.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_{ij} &= \mathbf{p}_{ijq_{ij}} \\
(A - \lambda_i I_n)\, \mathbf{p}_{ijq_{ij}} &= \mathbf{p}_{ij,q_{ij}-1} \\
&\vdots \\
(A - \lambda_i I_n)\, \mathbf{p}_{ij2} &= \mathbf{p}_{ij1}
\end{aligned}
$$

  なお, ここで, $i \in \varLambda_s$, $j \in \varLambda_{r_i}$ なる vectors$\mathbf{v}_{ij}$ が線形独立となるようにとることに注意されたい.

- 2 つ目は, $\forall i \in \varLambda_s \forall j \in \varLambda_{r_i}$ に対し, $\mathbf{p}_{ij0} = \mathbf{0}$ として, $\forall k \in \varLambda_{q_{ij}} \setminus \{1\}$ に対し, vector$\mathbf{p}_{ij,k-1}$ が得られたとき, 有解条件より連立 1 次方程式 $(A - \lambda_i I_n)\, \mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつような vector$\mathbf{b}$ の条件 $p(\mathbf{b})$ を求めておき, 連立 1 次方程式 $(A - \lambda_i I_n)\, \mathbf{x} = \mathbf{p}_{ij,k-1}$ なる非自明な解 $\mathbf{x}$ を含む解空間 K_k を求めその解空間 K_k の元 $\mathbf{b}$ のうちこの条件 $p(\mathbf{b})$ を満たすような vector$\mathbf{x}$ を選びこれを $\mathbf{x} = \mathbf{p}_{ijk}$ とおく方法である. ただし, vector$\mathbf{p}_{ijq_{ij}}$ はこの条件 $p(\mathbf{b})$ を満たす必要はないことに注意されたい. さらに, $i \in \varLambda_s$, $j \in \varLambda_{r_i}$ なる vectors$\mathbf{p}_{ij1}$ が線形独立となるようにとることに注意されたい.

例えば, 次の行列 A の Jordan 標準形 J とその変換行列 P を求めよう.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

この特性 X-行列 $XI - A$ の単因子標準形を求めよう. したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
XI - A = \begin{pmatrix} X & 1 & 1 & -1 \\ 1 & X+2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & X & -1 \\ 3 & 7 & 5 & X-6 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & X & -1 \\ -1 & -X-2 & -2 & 2 \\ -3 & -7 & -5 & -X+6 \\ -X & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & X & -1 \\ 0 & -X-1 & X-2 & 1 \\ 0 & -4 & 3X-5 & -X+3 \\ 0 & X-1 & X^2-1 & X+1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3X+5 & X-3 \\ 0 & -4X-4 & 4X-8 & 4 \\ 0 & -4X+4 & -4X^2+4 & -4X-4 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3X^2+6X-3 & X^2-2X+1 \\ 0 & 0 & -7X^2+8X-1 & X^2-1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & -2X^2+X+1 \\ 0 & 0 & X^2-1 & -7X^2+8X-1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & -2X^2+X+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2X^3-6X^2+6X-2 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & -(2X+1)(X-1) \\ 0 & 0 & 0 & (X-1)^3 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X-1)^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

したがって, 求める Jordan 標準形 J は次のように与えられる.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで, $J = P^{-1}AP$ が成り立つことから, $P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \end{pmatrix}$ とおかれれば, 次のようになる.

$$J = P^{-1}AP \Leftrightarrow AP = PJ$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4\end{pmatrix} J \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & A\mathbf{p}_3 & A\mathbf{p}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & A\mathbf{p}_3 & A\mathbf{p}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4\end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases}(A-I)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}\\ (A-I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}\\ (A-I)\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2\\ (A-I)\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_3\end{cases}
\end{aligned}
$$

ここで, $(A-I)^3 = O$ はもちろん成り立つことに注意すると, 次のようになることから,

$$
(A-I)^2 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & -3 & -2 & 2\\ -1 & -1 & -1 & 1\\ -3 & -7 & -5 & 5\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0 & -2 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 1\\ 0 & -6 & -3 & 3\end{pmatrix}
$$

$(A-I)^3\mathbf{v} = \mathbf{0}$ かつ $(A-I)^2\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ なる vector$\mathbf{v}$ として, 次式のようにおくと,

$$
\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}
$$

次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_3 = (A-I)\mathbf{p}_4 &= \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & -3 & -2 & 2\\ -1 & -1 & -1 & 1\\ -3 & -7 & -5 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\-7\end{pmatrix} \\
\mathbf{p}_2 = (A-I)\mathbf{p}_3 &= \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & -3 & -2 & 2\\ -1 & -1 & -1 & 1\\ -3 & -7 & -5 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-6\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

次に, $(A-I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ かつ $(A-I)^0\mathbf{v} = \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ なるなる vector$\mathbf{v}$ として, 次式のようにおくと,

$$
\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}
$$

これらの vectors$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$ は線形独立である. したがって, 求める行列 P は次のように与えられる.

$$
P = \begin{pmatrix}-1 & -2 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -3 & 1\\ 2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & -6 & -7 & 0\end{pmatrix}
$$

したがって, 次のようになる.

$$
\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -3 & 1\\ 2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & -6 & -7 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & -2 & 2\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ -3 & -7 & -5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -3 & 1\\ 2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & -6 & -7 & 0\end{pmatrix}
$$

別の方法でその行列 P を求めよう．まずは, 連立 1 次方程式 $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{b}$ が解をもつような vector$\mathbf{b}$ の条件 $p(\mathbf{b})$ を求めよう．次のようにおかれれば,

$$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{b}$ と $\begin{pmatrix} A-I & \mathbf{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ とは同値である．したがって, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A-I & \mathbf{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & x \\ -1 & -3 & -2 & 2 & y \\ -1 & -1 & -1 & 1 & z \\ -3 & -7 & -5 & 5 & w \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-x \\ 0 & -4 & -2 & 2 & w-3x \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & -1 & x-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (w-3x)+2(x-y) \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 & -2x \\ 0 & 2 & 1 & -1 & x-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x-2y+w \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & -3x+y \\ 0 & 2 & 1 & -1 & x-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x-2y+w \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3x}{2}+\frac{y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{x}{2}-\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x-2y+w \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

有解条件より $\operatorname{rank}(A-I)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-I & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ が成り立つならそのときに限り, その連立 1 次方程式 $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{b}$ が解をもつので, $-x+z=0$ かつ $-x-2y+w=0$ が成り立つ.

次に, 連立 1 次方程式 $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解空間 K_2 を求めよう．上記と同様にして次のようになることから,

$$A-I=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & -7 & -5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

次式が成り立つ.

$$K_2=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} -s+t \\ -s+t \\ 2s \\ 2t \end{pmatrix}$$

これのうち，その連立 1 次方程式 $(A-I)\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ が解をもつならそのときに限り，上記の議論により $-(-s+t)+2s=0$ かつ $-(-s+t)-2(-s+t)+2t=0$ が成り立つことになる．これにより, $3s=t$ が成り立つような vector$\mathbf{x}$ として次のようにおく．

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{p}_2$$

このときの連立 1 次方程式 $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{p}_2$ の解空間 K_3 を求めよう．上記と同様にして次のようになることから,

$$\begin{pmatrix} A-I & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -7 & -5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

次式が成り立つ.

$$K_3 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -s+t-2 \\ -s+t \\ 2s \\ 2t \end{pmatrix}$$

これのうち，その連立 1 次方程式 $(A-I)\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ が解をもつならそのときに限り，上記の議論により $-(-s+t-2)+2s=0$ かつ $-(-s+t-2)-2(-s+t)+2t=0$ が成り立つことになる．これにより, $3s+2=t$ が成り立つような vector$\mathbf{x}$ として次のようにおく．

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \mathbf{p}_3$$

このときの連立 1 次方程式 $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{p}_3$ の解空間 K_4 を求めよう．上記と同様にして次のようになることから,

$$\begin{pmatrix} A-I & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -7 & -5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

次式が成り立つ.

$$K_3 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -s+t-1 \\ -s+t-1 \\ 2s \\ 2t \end{pmatrix}$$

これにより, 次のようにおく.

$$\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

最後に, $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解空間 K_1 を求めよう. これはすでに次のように与えられている.

$$K_1 = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix}-s+t\\-s+t\\2s\\2t\end{pmatrix}$$

これにより, 次のようにおく.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}$$

これらの vectors$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$ は線形独立である. したがって, 求める行列 P は次のように与えられる.

$$P = \begin{pmatrix}0&2&2&-1\\0&2&4&-1\\2&2&2&2\\2&6&10&2\end{pmatrix}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2&2&-1\\0&2&4&-1\\2&2&2&2\\2&6&10&2\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}0&-1&-1&1\\-1&-2&-2&2\\-1&-1&0&1\\-3&-7&-5&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&2&2&-1\\0&2&4&-1\\2&2&2&2\\2&6&10&2\end{pmatrix}$$

参考文献

[1] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007. 改訂版 8 刷 p208-229 ISBN978-4-320-11097-7

[2] 齋藤正彦, 線型代数入門, 東京大学出版会, 1966. 第 21 刷 p173-191 ISBN978-4-13-062001-7

[3] 桂田祐史. ”線形代数ノート 桂田祐史”. 明治大学. `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/note/linear-algebra.pdf` (2021-10-8 14:00 取得)

第 3 部　内積空間論

ここからは, 実数や複素数というものを認めて norm 空間, 内積空間について議論していこう. これは vector 空間に長さや角度という性質を付加させたものである. 係数体が実数や複素数のように完備で長さ, 即ち, 距離が付加されれば, 本来 vector 空間にはなかった幾何学の距離空間論でお馴染みの極限という操作が許されることになる. これの応用として関数を vector と考えることで関数の値の距離ならぬ"関数そのものの距離"が定義される. さらに, 角度が付加されれば, 後述するように距離も定義され上に述べたことができる上にこれまでの vector 空間にはなかった興味深い性質も帯びることになる. これも, "関数そのものの角度"が定義される. なお, 距離空間論に関する知識は欠かせないので, これを仮定しておき可分性に関する話題は省き難しい議論を可能な限り避けておいたが, やはりいくらか初学者にとって困難な箇所はあると思われる. 意欲のある読者は是非とも位相空間論と距離空間論に関する書籍を先に読んでみてほしい.

3.1　norm 空間

3.1.1　norm 空間

公理 3.1.1 (norm 空間の公理)**.** $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 次のことを満たすような写像 $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ をその vector 空間 V 上の norm といい, その組 (V, φ) を norm 空間という.

- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 \leq \varphi(\mathbf{v})$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi(\mathbf{v}) = 0$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ.
- $\forall k \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi(k\mathbf{v}) = |k|\varphi(\mathbf{v})$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \leq \varphi(\mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w})$ が成り立つ.

norm 空間の例として, $(\mathbb{C}, |\bullet|)$, $(\mathbb{R}, |\bullet|)$, $(\mathbb{Q}, |\bullet|)$ などがあげられる.

定理 3.1.1. norm 空間 (V, φ) が与えられたとき, 次式のように写像 d_φ が定義されれば,

$$d_\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \varphi(\mathbf{v} - \mathbf{w})$$

その組 (V, d_φ) は距離空間をなす.

定義 3.1.2. norm 空間 (V, φ) が与えられたとき, その距離空間 (V, d_φ) をその norm 空間 (V, φ) から誘導される距離空間という.

証明. norm 空間 (V, φ) が与えられたとき, 次式のように写像 d_φ が定義されれば,

$$d_\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \varphi(\mathbf{v} - \mathbf{w})$$

$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in V$ が成り立つので, norm の定義より $0 \leq \varphi(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = d_\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が成り立つ.

$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, その写像 d_φ の定義より $d_\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ が成り立つならそのときに限り, $\varphi(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0$ が成り立つ. norm の定義よりこれが成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ が成り立つ. したがって, これが成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ が成り立つ.

$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, その写像 d_{φ} と normφ の定義より次のようになる.

$$\begin{aligned} d_{\varphi}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \varphi(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &= \varphi(-(\mathbf{w} - \mathbf{v})) \\ &= |-1|\varphi(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \\ &= \varphi(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \\ &= d_{\varphi}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

したがって, $d_{\varphi}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = d_{\varphi}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ が成り立つ.

$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, その写像 d_{φ} と normφ の定義より次のようになる.

$$\begin{aligned} d_{\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \varphi(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \\ &= \varphi(\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &\leq \varphi(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &= d_{\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d_{\varphi}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

したがって, $d_{\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq d_{\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d_{\varphi}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が成り立つ.

以上より, その組 (V, d_{φ}) は距離空間をなす. □

定理 3.1.2. norm 空間 (V, φ) が与えられたとき, その norm 空間 (V, φ) から誘導される距離空間 (V, d_{φ}) において, 次のことが成り立つ.

- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $d_{\varphi}(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} + \mathbf{u}) = d_{\varphi}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \forall k \in K$ に対し, $d_{\varphi}(k\mathbf{v}, k\mathbf{w}) = |k| d_{\varphi}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が成り立つ.

証明. norm 空間 (V, φ) が与えられたとき, その norm 空間 (V, φ) から誘導される距離空間 (V, d_{φ}) において, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} d_{\varphi}(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} + \mathbf{u}) &= \varphi((\mathbf{w} + \mathbf{u}) - (\mathbf{v} + \mathbf{u})) \\ &= \varphi(\mathbf{w} + \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ &= \varphi(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \\ &= d_{\varphi}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \forall k \in K$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} d_{\varphi}(k\mathbf{v}, k\mathbf{w}) &= \varphi(k\mathbf{w} - k\mathbf{v}) \\ &= \varphi(k(\mathbf{w} - \mathbf{v})) \\ &= |k|\varphi(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \\ &= |k| d_{\varphi}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

□

定理 3.1.3. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V を用いた次のことを満たすような距離空間 (V, d) が与えられたとき,

- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $d(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} + \mathbf{u}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \forall k \in K$ に対し, $d(k\mathbf{v}, k\mathbf{w}) = |k| d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が成り立つ.

次式のように写像 φ_d が定義されれば,

$$\varphi_d : V \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{v} \mapsto d\left(0, \mathbf{v}\right)$$

その組 (V, φ_d) は norm 空間をなす. さらに, その norm 空間 (V, φ_d) から誘導される距離空間はその距離空間 (V, d) である.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V を用いた次のことを満たすような距離空間 (V, d) が与えられたとき,

- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $d\left(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} + \mathbf{u}\right) = d\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right)$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \forall k \in K$ に対し, $d\left(k\mathbf{v}, k\mathbf{w}\right) = |k| d\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right)$ が成り立つ.

次式のように写像 φ_d が定義されれば,

$$\varphi_d : V \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{v} \mapsto d\left(\mathbf{0}, \mathbf{v}\right)$$

距離空間の定義より $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 \leq \varphi_d\left(\mathbf{v}\right)$ が成り立つ. また, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi_d\left(\mathbf{v}\right) = 0$ が成り立つならそのときに限り, $\varphi_d\left(\mathbf{v}\right) = d\left(\mathbf{0}, \mathbf{v}\right)$ かつ距離空間の定義より $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ. さらに, $\forall k \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \varphi_d\left(k\mathbf{v}\right) &= d\left(0, k\mathbf{v}\right) \\ &= d\left(k\mathbf{0}, k\mathbf{v}\right) \\ &= |k| d\left(\mathbf{0}, \mathbf{v}\right) \\ &= |k| \varphi_d\left(\mathbf{v}\right) \end{aligned}$$

最後に, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \varphi_d\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right) &= d\left(\mathbf{0}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\right) \\ &= d\left(-\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{v}\right) \\ &= d\left(-\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \\ &\leq d\left(-\mathbf{v}, \mathbf{0}\right) + d\left(\mathbf{0}, \mathbf{w}\right) \\ &= d\left(-\mathbf{0}, -\mathbf{v}\right) + d\left(\mathbf{0}, \mathbf{w}\right) \\ &= d\left(\mathbf{0}, \mathbf{v}\right) + d\left(\mathbf{0}, \mathbf{w}\right) \\ &= \varphi_d\left(\mathbf{v}\right) + \varphi_d\left(\mathbf{w}\right) \end{aligned}$$

さらに, その norm 空間 (V, φ_d) から誘導される距離空間 (V, d_{φ_d}) において, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} d_{\varphi_d}\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= \varphi_d\left(\mathbf{w} - \mathbf{v}\right) \\ &= d\left(0, \mathbf{w} - \mathbf{v}\right) \\ &= d\left(\mathbf{v}, \mathbf{w} - \mathbf{v} + \mathbf{v}\right) \\ &= d\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \end{aligned}$$

よって, $d_{\varphi_d} = d$ が成り立つので, その norm 空間 (V, φ_d) から誘導される距離空間はその距離空間 (V, d) である. $\square$

3.1.2 Minkowski の不等式

定理 3.1.4 (相加相乗平均の不等式)**.** $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, n つの非負実数たち a_i が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\left(\prod_{i \in \Lambda_n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in \Lambda_n} a_i$$

また, $\forall i, j \in \Lambda_n$ に対し, $a_i = a_j$ が成り立つなら, 次式が成り立つ.

$$\left(\prod_{i \in \Lambda_n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i \in \Lambda_n} a_i$$

この不等式を相加相乗平均の不等式という.

証明. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, n つの非負実数たち a_i が与えられたとき, $n = 1$ のときは明らかである. $n = 2$ のとき, 当然ながら $0 \leq \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2$ が成り立つので, 次のようになる.

$$0 \leq \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 = a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \Leftrightarrow 2\sqrt{a_1 a_2} \leq a_1 + a_2 \Leftrightarrow (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

$n = k$ のとき, 次式が成り立つと仮定しよう.

$$\left(\prod_{i \in \Lambda_k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \sum_{i \in \Lambda_k} a_i$$

$n = 2k$ のとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i \in \Lambda_{2k}} a_i\right)^{\frac{1}{2k}} &= \left(\left(\prod_{i \in \Lambda_{2k}} a_i\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left(\prod_{i \in \Lambda_k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \left(\prod_{i \in \Lambda_{2k} \setminus \Lambda_k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\left(\prod_{i \in \Lambda_k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\prod_{i \in \Lambda_{2k} \setminus \Lambda_k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\prod_{i \in \Lambda_k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{2}\left(\prod_{i \in \Lambda_{2k} \setminus \Lambda_k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{1}{k} \sum_{i \in \Lambda_k} a_i + \frac{1}{2}\frac{1}{k} \sum_{i \in \Lambda_{2k} \setminus \Lambda_k} a_i \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{i \in \Lambda_k} a_i + \sum_{i \in \Lambda_{2k} \setminus \Lambda_k} a_i\right) = \frac{1}{2k} \sum_{i \in \Lambda_{2k}} a_i
\end{aligned}$$

$2 \leq k$ として $n = k-1$ のとき, $a_k = \dfrac{1}{k-1} \displaystyle\sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i$ とおくと, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i \in \Lambda_k} a_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \sum_{i \in \Lambda_k} a_i &\Leftrightarrow \left(\left(\prod_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \right) \frac{1}{k-1} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \left(\sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i + \frac{1}{k-1} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\left(\prod_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \right) \frac{1}{k-1} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i + \frac{1}{k} \frac{1}{k-1} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \\ &\quad \leq \frac{1}{k} \frac{1}{k-1} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \leq \frac{1}{k-1} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \\ &\Leftrightarrow \left(\prod_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \right) \frac{1}{k-1} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \leq \left(\frac{1}{k-1} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \right)^k \\ &\Leftrightarrow \prod_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \leq \left(\frac{1}{k-1} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \right)^{k-1} \\ &\Leftrightarrow \left(\prod_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \right)^{\frac{1}{k-1}} \leq \frac{1}{k-1} \sum_{i \in \Lambda_{k-1}} a_i \end{aligned}$$

以上より, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, n つの非負実数たち a_i が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\left(\prod_{i \in \Lambda_n} a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in \Lambda_n} a_i$$

また, $\forall i, j \in \Lambda_n$ に対し, $a_i = a_j$ が成り立つなら, $a_i = a$ とおけば, 次のようになる.

$$\left(\prod_{i \in \Lambda_n} a_i \right)^{\frac{1}{n}} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a = \frac{na}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i \in \Lambda_n} a_i$$

□

定理 3.1.5 (重み付き相加相乗平均の不等式). $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, n つの非負実数たち a_i と次式を満たす n つの正の非負実数たち w_i が与えられたとき,

$$\sum_{i \in \Lambda_n} w_i = 1$$

次式が成り立つ.

$$\prod_{i \in \Lambda_n} a_i^{w_i} \leq \sum_{i \in \Lambda_n} w_i a_i$$

この不等式を重み付き相加相乗平均の不等式という.

証明. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, n つの非負実数たち a_i と次式を満たす n つの正の非負実数たち w_i が与えられたとき,

$$\sum_{i \in \Lambda_n} w_i = 1$$

$w_i \in \mathbb{Q}$ のとき, $\exists p_i, q \in \mathbb{N}$ に対し, $w_i = \dfrac{p_i}{q}$ とおくことができるので, そうすると, 次式が成り立つ.

$$\sum_{i \in \varLambda_n} p_i = q \sum_{i \in \varLambda_n} \frac{p_i}{q} = q \sum_{i \in \varLambda_n} w_i = q$$

これに注意すれば, 定理 3.1.4, 即ち, 相加相乗平均の不等式より次のようになる.

$$\begin{aligned}\prod_{i \in \varLambda_n} a_i^{w_i} &= \prod_{i \in \varLambda_n} a_i^{\frac{p_i}{q}} \\ &= \left(\prod_{i \in \varLambda_n} a_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{1}{q} \sum_{i \in \varLambda_n} p_i a_i \\ &= \sum_{i \in \varLambda_n} \frac{p_i}{q} a_i \\ &= \sum_{i \in \varLambda_n} w_i a_i\end{aligned}$$

$w_i \in \mathbb{R}$ のとき, ある有理数列 $\left(q_{in} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して, $\lim_{n \to \infty} q_{in} = w_i$ が成り立つので, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, 上記の議論により次式が成り立つ.

$$\prod_{i \in \varLambda_n} a_i^{q_{in}} \leq \sum_{i \in \varLambda_n} q_{in} a_i$$

したがって, $n \to \infty$ とすれば, 次式が成り立つ.

$$\prod_{i \in \varLambda_n} a_i^{w_i} \leq \sum_{i \in \varLambda_n} w_i a_i$$

□

定理 3.1.6 (積の抑え込みに関する Young の不等式)**.** $\forall a, b, p, q \in \mathbb{R}$ に対し, $1 < p$ かつ $1 < q$ かつ $0 \leq a$ かつ $0 \leq b$ が成り立つかつ, 次式が成り立つとき,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

次の不等式が成り立つ.

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

この不等式を積の抑え込みに関する Young の不等式という.

証明. $\forall a, b, p, q \in \mathbb{R}$ に対し, $1 < p$ かつ $1 < q$ かつ $0 \leq a$ かつ $0 \leq b$ が成り立つかつ, 次式が成り立つとき,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

3.1.5, 即ち, 重み付きの相加相乗平均の不等式より次のようになる.

$$ab = \left(a^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(b^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

□

定理 3.1.7. norm 空間の族 $\left\{\left(V_{i},\varphi_{i}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{n}}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{v}_{i}\in V_{i}\forall p\in\mathbb{R}$ に対し, $1\leq p$ が成り立つとする. このとき, $\forall i\in\varLambda_{n}$ に対し, $\mathbf{v}_{i}=\mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り, $\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}=0$ が成り立つ.

証明. norm 空間の族 $\left\{\left(V_{i},\varphi_{i}\right)\right\}_{i\in\varLambda_{n}}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{v}_{i}\in V_{i}\forall p\in\mathbb{R}$ に対し, $1\leq p$ が成り立つとする. このとき, $\forall i\in\varLambda_{n}$ に対し, $\mathbf{v}_{i}=\mathbf{0}$ が成り立つなら, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\forall i\in\varLambda_{n}\left[\mathbf{v}_{i}=\mathbf{0}\right]&\Leftrightarrow\forall i\in\varLambda_{n}\left[\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)=\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)^{p}=0\right]\\&\Rightarrow\sum_{i\in\varLambda_{n}}\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)^{p}=0\\&\Leftrightarrow\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}=0\end{aligned}$$

逆に, $\forall\mathbf{v}_{i}\in V_{i}$ に対し, $\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}=0$ が成り立つなら, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}=0&\Leftrightarrow\forall i\in\varLambda_{n}\left[0\leq\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)^{p}\leq\sum_{i\in\varLambda_{n}}\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)^{p}=0\right]\\&\Rightarrow\forall i\in\varLambda_{n}\left[0\leq\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)\leq0\right]\\&\Leftrightarrow\forall i\in\varLambda_{n}\left[\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)=0\right]\\&\Leftrightarrow\forall i\in\varLambda_{n}\left[\mathbf{v}_{i}=\mathbf{0}\right]\end{aligned}$$

以上より, $\forall i\in\varLambda_{n}$ に対し, $\mathbf{v}_{i}=\mathbf{0}$ が成り立つならそのときに限り, $\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\varphi_{i}\left(\mathbf{v}_{i}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}=0$ が成り立つ. □

定理 3.1.8 (Hölder の不等式)**.** $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, $\forall n\in\mathbb{N}\forall\left(a_{i}\right)_{i\in\varLambda_{n}},\left(b_{i}\right)_{i\in\varLambda_{n}}\in K^{n}\forall p,q\in\mathbb{R}$ に対し, $1<p$ かつ $1<q$ が成り立つかつ, 次式が成り立つとき,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

次の不等式が成り立つ. この不等式を Hölder の不等式という.

$$\sum_{i\in\varLambda_{n}}\left|a_{i}b_{i}\right|\leq\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\left|a_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\left|b_{i}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

証明. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, $\forall n\in\mathbb{N}\forall\left(a_{i}\right)_{i\in\varLambda_{n}},\left(b_{i}\right)_{i\in\varLambda_{n}}\in K^{n}\forall p,q\in\mathbb{R}$ に対し, $1<p$ かつ $1<q$ が成り立つかつ, 次式が成り立つとき,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$\left(a_{i}\right)_{i\in\varLambda_{n}}=(0)_{i\in\varLambda_{n}}$ または $\left(b_{i}\right)_{i\in\varLambda_{n}}=(0)_{i\in\varLambda_{n}}$ のときは定理 3.1.7 より明らかである. そうでないとき, 定理 3.1.6, 即ち, 積の抑え込みに関する Young の不等式と定理 3.1.7 より $\forall i\in\varLambda_{n}$ に対し, 次のようになる.

$$\left|a_{i}b_{i}\right|=\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\left|a_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\left|b_{i}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{\left|a_{i}\right|}{\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\left|a_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}}\frac{\left|b_{i}\right|}{\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\left|b_{i}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad\left(\frac{1}{p}\left(\frac{|a_i|}{\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{|b_i|}{\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^q\right)\\
&=\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{p}\frac{|a_i|^p}{\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p}+\frac{1}{q}\frac{|b_i|^q}{\sum_{i\in\Lambda_n}|b_i|^q}\right)
\end{aligned}
$$

したがって, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in\Lambda_n}|a_ib_i| &\leq \sum_{i\in\Lambda_n}\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad\left(\frac{1}{p}\frac{|a_i|^p}{\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p}+\frac{1}{q}\frac{|b_i|^q}{\sum_{i\in\Lambda_n}|b_i|^q}\right)\\
&=\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad\left(\frac{1}{p}\frac{\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p}{\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p}+\frac{1}{q}\frac{\sum_{i\in\Lambda_n}|b_i|^q}{\sum_{i\in\Lambda_n}|b_i|^q}\right)\\
&=\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\\
&=\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

□

定理 3.1.9 (Minkowski の不等式)**.** norm 空間の族 $\left\{(V_i,\varphi_i)\right\}_{i\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i\in V_i\forall p\in\mathbb{R}$ に対し, $1\leq p$ が成り立つとき, 次の不等式が成り立つ. この不等式を Minkowski の不等式という.

$$
\left(\sum_{i\in\Lambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i\in\Lambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i\in\Lambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}
$$

証明. norm 空間の族 $\left\{(V_i,\varphi_i)\right\}_{i\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i\in V_i\forall p\in\mathbb{R}$ に対し, $1\leq p$ が成り立つとき, $p=1$ のときは norm の定義より明らかである. $\forall i\in\Lambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$ が成り立つ, または, $\forall i\in\Lambda_n$ に対し, $\mathbf{w}_i=\mathbf{0}$ が成り立つときは定理 3.1.7 より明らかである. 以下, $1<p$ が成り立つかつ, $\exists i\in\Lambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i\neq\mathbf{0}$ が成り立つかつ, $\exists i\in\Lambda_n$ に対し, $\mathbf{w}_i\neq\mathbf{0}$ が成り立つときで議論する. したがって, $\forall i\in\Lambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$
\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p=\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^{p-1}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)\leq\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^{p-1}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)+\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^{p-1}\varphi_i\left(\mathbf{w}_i\right)
$$

したがって, 次のようになる.

$$
\sum_{i\in\Lambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p\leq\sum_{i\in\Lambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^{p-1}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)+\sum_{i\in\Lambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^{p-1}\varphi_i\left(\mathbf{w}_i\right)
$$

そこで, 定理 3.1.8, 即ち, Hölder の不等式より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^{p-1} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right) &\leq \left(\sum_{i \in \varLambda_n}\left(\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^{p-1} \varphi_i\left(\mathbf{w}_i\right) &\leq \left(\sum_{i \in \varLambda_n}\left(\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
\left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{-\frac{p-1}{p}} \sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p \\
&\leq \left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{-\frac{p-1}{p}}\left(\left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\quad \left.+\left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

□

3.1.3 norm 空間の生成

定理 3.1.10. norm 空間の族 $\left\{\left(V_i, \varphi_i\right)\right\}_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, $\sum_{i \in \varLambda_n} V_i = \bigoplus_{i \in \varLambda_n} V_i$ が成り立つなら, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, $\mathbf{v}_i \in V_i$ として次のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p : \bigoplus_{i \in \varLambda_n} V_i \rightarrow \mathbb{R}; \sum_{i \in \varLambda_n} \mathbf{v}_i \mapsto \left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

その組 $\left(\bigoplus_{i \in \varLambda_n} V_i, \varphi_p\right)$ は norm 空間をなす.

証明. norm 空間の族 $\left\{\left(V_i, \varphi_i\right)\right\}_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, $\sum_{i \in \varLambda_n} V_i = \bigoplus_{i \in \varLambda_n} V_i$ が成り立つなら, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, $\mathbf{v}_i \in V_i$ として次のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p : \bigoplus_{i \in \varLambda_n} V_i \rightarrow \mathbb{R}; \sum_{i \in \varLambda_n} \mathbf{v}_i \mapsto \left(\sum_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

定義より直ちに $\forall \sum_{i \in \varLambda_n} \mathbf{v}_i \in \bigoplus_{i \in \varLambda_n} V_i$ に対し, $0 \leq \varphi_p\left(\sum_{i \in \varLambda_n} \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.

$\forall \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i \in \bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i$ に対し, $\mathbf{v}_i \in V_i$ として $\varphi_p \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i \right) = 0$ が成り立つなら, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_p \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i \right) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{v}_i \right)^p = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \Lambda_n \left[0 \leq \varphi_i \left(\mathbf{v}_i \right)^p \leq \sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{v}_i \right)^p = 0 \right] \\
&\Rightarrow \forall i \in \Lambda_n \left[0 \leq \varphi_i \left(\mathbf{v}_i \right) \leq 0 \right] \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \Lambda_n \left[\varphi_i \left(\mathbf{v}_i \right) = 0 \right]
\end{aligned}$$

ここで, norm の定義より $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つので, $\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つ. 逆に, $\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\sum_{i \in \Lambda_n} V_i = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i$ より $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つことになるので, あとは明らかであろう.

$\forall k \in K \forall \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i \in \bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i$ に対し, $\mathbf{v}_i \in V_i$ として次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_p \left(k \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i \right) &= \varphi_p \left(\sum_{i \in \Lambda_n} k\mathbf{v}_i \right) = \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(k\mathbf{v}_i \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \left(|k| \varphi_i \left(\mathbf{v}_i \right) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|k|^p \sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{v}_i \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = |k| \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{v}_i \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = |k| \varphi_p \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i \right)
\end{aligned}$$

$\forall \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i, \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{w}_i \in \bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i$ に対し, $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i \in V_i$ として次のようになる.

$$\varphi_p \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{w}_i \right) = \varphi_p \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \left(\mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \right) \right) = \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ここで, 定理 3.1.9, 即ち, Mikowski の不等式より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_p \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{w}_i \right) &\leq \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{v}_i \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{w}_i \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \varphi_p \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i \right) + \varphi_p \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{w}_i \right)
\end{aligned}$$

以上より, その組 $\left(\bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i, \varphi_p \right)$ は norm 空間をなす. □

定理 3.1.11. norm 空間の族 $\left\{ \left(V_i, \varphi_i \right) \right\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, $\mathbf{v}_i \in V_i$ として次のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p : \prod_{i \in \Lambda_n} V_i \rightarrow \mathbb{R}; \left(\mathbf{v}_i \right)_{i \in \Lambda_n} \mapsto \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{v}_i \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

その組 $\left(\prod_{i \in \Lambda_n} V_i, \varphi_p \right)$ は norm 空間をなす.

証明. norm 空間の族 $\left\{\left(V_i,\varphi_i\right)\right\}_{i\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, $\forall p\in\mathbb{R}$ に対し, $1\leq p$ が成り立つなら, $\mathbf{v}_i\in V_i$ として次のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p:\prod_{i\in\varLambda_n}V_i\rightarrow\mathbb{R};\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\mapsto\left(\sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

定義より直ちに $\forall\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\in\prod_{i\in\varLambda_n}V_i$ に対し, $0\leq\varphi_p\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}$ が成り立つ.

$\forall\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\in\prod_{i\in\varLambda_n}V_i$ に対し, $\varphi_p\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}=0$ が成り立つなら, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_p\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}=0&\Leftrightarrow\sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p=0\\&\Leftrightarrow\forall i\in\varLambda_n\left[0\leq\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\leq\sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p=0\right]\\&\Rightarrow\forall i\in\varLambda_n\left[0\leq\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\leq0\right]\\&\Leftrightarrow\forall i\in\varLambda_n\left[\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)=0\right]\end{aligned}$$

ここで, norm の定義より $\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$ が成り立つので, $\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}=\left(\mathbf{0}\right)_{i\in\varLambda_n}$ が成り立つ. 逆に, $\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}=\left(\mathbf{0}\right)_{i\in\varLambda_n}$ が成り立つなら, $\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$ が成り立つことになるので, あとは明らかであろう.

$\forall k\in K\forall\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\in\prod_{i\in\varLambda_n}V_i$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_p\left(k\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\right)&=\varphi_p\left(k\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\\&=\left(\sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_i\left(k\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\sum_{i\in\varLambda_n}\left(|k|\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(|k|^p\sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=|k|\left(\sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=|k|\varphi_p\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\end{aligned}$$

$\forall\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n},\left(\mathbf{w}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\in\prod_{i\in\varLambda_n}V_i$ に対し, 次のようになる.

$$\varphi_p\left(\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}+\left(\mathbf{w}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\right)=\varphi_p\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)_{i\in\varLambda_n}=\left(\sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ここで, 定理 3.1.9, 即ち, Mikowski の不等式より次のようになる.

$$\varphi_p\left(\sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{v}_i+\sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{w}_i\right)\leq\left(\sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_i\left(\mathbf{w}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \varphi_p (\mathbf{v}_i)_{i \in \Lambda_n} + \varphi_p (\mathbf{w}_i)_{i \in \Lambda_n}$$

以上より, その組 $\left(\prod_{i \in \Lambda_n} V_i, \varphi_p \right)$ は norm 空間をなす. □

3.1.4 Banach 空間

この節を述べる前に幾何学の距離空間論に関する概念をいくつか述べておこう.

定義 3.1.3 (Cauchy 列)**.** 距離空間 (S, d) とその集合 S の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}$ に対し, $n_0 < m$ かつ $n_0 < n$ が成り立つなら, $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ が成り立つようなその元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をその距離空間 (S, d) における Cauchy 列, 基本点列などという.

定理 3.1.12 (収束列は Cauchy 列である)**.** 距離空間 (S, d) におけるその集合 S の元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するとき, その元の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である.

ここで, 任意の Cauchy 列は収束するとは限らないことに注意されたい.

定義 3.1.4 (完備距離空間)**.** 距離空間 (S, d) において任意の Cauchy 列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するとき, その距離空間 (S, d) は完備であるといい, そのような距離空間 (S, d) を完備距離空間という.

さて, 下準備が終わったので, 本題を述べよう.

定義 3.1.5 (Banach 空間)**.** norm 空間 (V, φ) が与えられたとき, その norm 空間 (V, φ) から誘導される距離空間 (V, d_φ) が完備であるとき, その norm 空間 (V, φ) を Banach 空間という.

定理 3.1.13. Banach 空間の族 $\{(V_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\sum_{i \in \Lambda_n} V_i = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i$ が成り立つなら, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, $\mathbf{v}_i \in V_i$ として次のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p : \bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i \to \mathbb{R}; \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i \mapsto \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i (\mathbf{v}_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

その組 $\left(\bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i, \varphi_p \right)$ は Banach 空間をなす.

証明. Banach 空間の族 $\{(V_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\sum_{i \in \Lambda_n} V_i = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i$ が成り立つなら, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, $\mathbf{v}_i \in V_i$ として次のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p : \bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i \to \mathbb{R}; \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i \mapsto \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i (\mathbf{v}_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

その組 $\left(\bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i, \varphi_p \right)$ が norm 空間をなすことはすでに定理 3.1.10 でみた.

直和空間 $\bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i$ の任意の Cauchy 列 $\left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{im} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ が $\mathbf{v}_{im} \in V_i$ として与えられたとき, 仮定よりその norm 空間 $\left(\bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i, \varphi_p \right)$ から誘導される距離空間 $\left(\bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i, d_{\varphi_p} \right)$ が考えられれば, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists m_0 \in$

$\mathbb{N}\forall l, m \in \mathbb{N}$ に対し, $m_0 \leq l$ かつ $m_0 \leq m$ が成り立つなら, $d_{\varphi_p}\left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{il}, \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{im} \right) < \varepsilon$ が成り立つ. したがって, その Banach 空間 (V_i, φ_i) から誘導される距離空間 (V_i, d_{φ_i}) が考えられれば, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} d_{\varphi_i}(\mathbf{v}_{il}, \mathbf{v}_{im}) &= \varphi_i(\mathbf{v}_{im} - \mathbf{v}_{il}) \\ &= \left(\varphi_i(\mathbf{v}_{im} - \mathbf{v}_{il})^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i(\mathbf{v}_{im} - \mathbf{v}_{il})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \varphi_p\left(\sum_{i \in \Lambda_n} (\mathbf{v}_{im} - \mathbf{v}_{il}) \right) \\ &= \varphi_p\left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{im} - \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{il} \right) \\ &= d_{\varphi_p}\left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{il}, \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{im} \right) < \varepsilon \end{aligned}$$

ゆえに, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, その vector 空間 V_i の元の列 $(\mathbf{v}_{im})_{m \in \mathbb{N}}$ も Cauchy 列である.

ここで, 仮定より $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, その元の列 $(\mathbf{v}_{im})_{m \in \mathbb{N}}$ はその距離空間 (V_i, d_{φ_i}) の意味で収束することになりその極限を $\mathbf{a}_i$ とおく. このとき, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists m_0 \in \mathbb{N}\forall m \in \mathbb{N}$ に対し, $m_0 \leq m$ が成り立つなら, $d_{\varphi_i}(\mathbf{v}_{im}, \mathbf{a}_i) < \varepsilon$ が成り立つ. したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} d_{\varphi_p}\left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{im}, \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{a}_i \right) &= \varphi_p\left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{a}_i - \sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{im} \right) \\ &= \varphi_p\left(\sum_{i \in \Lambda_n} (\mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{im}) \right) \\ &= \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i(\mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{im})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i \in \Lambda_n} d_{\varphi_i}(\mathbf{v}_{im}, \mathbf{a}_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varepsilon^p \right)^{\frac{1}{p}} = (n\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\varepsilon \end{aligned}$$

以上より, その元の列 $\left(\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{im} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ はその距離空間 $\left(\bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i, d_{\varphi_p} \right)$ の意味で vector $\sum_{i \in \Lambda_n} \mathbf{a}_i$ に収束することになる. これはその距離空間 $\left(\bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i, d_{\varphi_p} \right)$ が完備であることになる. よって, その組 $\left(\bigoplus_{i \in \Lambda_n} V_i, \varphi_p \right)$ は Banach 空間をなす. □

定理 3.1.14. Banach 空間の族 $\{(V_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら,

$\mathbf{v}_i \in V_i$ として次のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p : \prod_{i \in \Lambda_n} V_i \rightarrow \mathbb{R}; \left(\mathbf{v}_i\right)_{i \in \Lambda_n} \mapsto \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

その組 $\left(\prod_{i \in \Lambda_n} V_i, \varphi_p\right)$ は Banach 空間をなす.

証明. Banach 空間の族 $\left\{\left(V_i, \varphi_i\right)\right\}_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, $\mathbf{v}_i \in V_i$ として次のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p : \prod_{i \in \Lambda_n} V_i \rightarrow \mathbb{R}; \left(\mathbf{v}_i\right)_{i \in \Lambda_n} \mapsto \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{v}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

その組 $\left(\prod_{i \in \Lambda_n} V_i, \varphi_p\right)$ が norm 空間をなすことはすでに定理 3.1.11 でみた.

直積 $\prod_{i \in \Lambda_n} V_i$ の任意の Cauchy 列 $\left(\left(\mathbf{v}_{im}\right)_{i \in \Lambda_n}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき, 仮定よりその norm 空間 $\left(\prod_{i \in \Lambda_n} V_i, \varphi_p\right)$ から誘導される距離空間 $\left(\prod_{i \in \Lambda_n} V_i, d_{\varphi_p}\right)$ が考えられれば, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall l, m \in \mathbb{N}$ に対し, $m_0 \leq l$ かつ $m_0 \leq m$ が成り立つなら, $d_{\varphi_p}\left(\left(\mathbf{v}_{il}\right)_{i \in \Lambda_n}, \left(\mathbf{v}_{im}\right)_{i \in \Lambda_n}\right) < \varepsilon$ が成り立つ. したがって, その Banach 空間 $\left(V_i, \varphi_i\right)$ から誘導される距離空間 $\left(V_i, d_{\varphi_i}\right)$ が考えられれば, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
d_{\varphi_i}\left(\mathbf{v}_{il}, \mathbf{v}_{im}\right) &= \varphi_i\left(\mathbf{v}_{im} - \mathbf{v}_{il}\right) \\
&= \left(\varphi_i\left(\mathbf{v}_{im} - \mathbf{v}_{il}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_{im} - \mathbf{v}_{il}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \varphi_p\left(\mathbf{v}_{im} - \mathbf{v}_{il}\right)_{i \in \Lambda_n} \\
&= \varphi_p\left(\left(\mathbf{v}_{im}\right)_{i \in \Lambda_n} - \left(\mathbf{v}_{il}\right)_{i \in \Lambda_n}\right) \\
&= d_{\varphi_p}\left(\left(\mathbf{v}_{il}\right)_{i \in \Lambda_n}, \left(\mathbf{v}_{im}\right)_{i \in \Lambda_n}\right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

ゆえに, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, その vector 空間 V_i の元の列 $\left(\mathbf{v}_{im}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ も Cauchy 列である.

ここで, 仮定より $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, その元の列 $\left(\mathbf{v}_{im}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ はその距離空間 $\left(V_i, d_{\varphi_i}\right)$ の意味で収束することになりその極限を $\mathbf{a}_i$ とおく. このとき, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}$ に対し, $m_0 \leq m$ が成り立つなら, $d_{\varphi_i}\left(\mathbf{v}_{im}, \mathbf{a}_i\right) < \varepsilon$ が成り立つ. したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
d_{\varphi_p}\left(\left(\mathbf{v}_{im}\right)_{i \in \Lambda_n}, \left(\mathbf{a}_i\right)_{i \in \Lambda_n}\right) &= \varphi_p\left(\left(\mathbf{a}_i\right)_{i \in \Lambda_n} - \left(\mathbf{v}_{im}\right)_{i \in \Lambda_n}\right) \\
&= \varphi_p\left(\mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{im}\right)_{i \in \Lambda_n} \\
&= \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{im}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i \in \Lambda_n} d_{\varphi_i}\left(\mathbf{v}_{im}, \mathbf{a}_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$< \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \varepsilon^p \right)^{\frac{1}{p}} = (n\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\varepsilon$$

以上より, その元の列 $\left((\mathbf{v}_{im})_{i \in \Lambda_n} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ はその距離空間 $\left(\prod_{i \in \Lambda_n} V_i, d_{\varphi_p} \right)$ の意味で $\mathrm{vector}(\mathbf{a}_i)_{i \in \Lambda_n}$ に収束することになる. これはその距離空間 $\left(\prod_{i \in \Lambda_n} V_i, d_{\varphi_p} \right)$ が完備であることになる. よって, その組 $\left(\prod_{i \in \Lambda_n} V_i, \varphi_p \right)$ は Banach 空間をなす. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p111,275-285 ISBN978-4-00-029871-1

[2] 受験の月. "n 変数の相加平均と相乗平均の関係の証明（特殊な数学的帰納法）". 受験の月. `https://examist.jp/mathematics/expression-proof/n-soukasoujyou-syoumei/` (2021-12-28 18:34 閲覧)

[3] らっこ. "重みつき相加相乗平均の不等式 - 思考力を鍛える数学". 思考力を鍛える数学. `http://www.mathlion.jp/article/ar127.html` (2021-12-28 18:32 閲覧)

[4] 難波博之. "ヤングの不等式の 3 通りの証明 - 高校数学の美しい物語". 高校数学の美しい物語. `https://manabitimes.jp/math/715` (2021-12-28 18:35 閲覧)

[5] 伊藤健一. "関数解析学 講義スライド 担当教員：伊藤健一". 東京大学. `https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~ito/notes_functional_analysis_20180511.pdf` (2021-12-29 15:39 取得)

3.2 n 次元 l_p-norm 空間

3.2.1 n 次元 l_p-norm 空間

定理 3.2.1. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n が与えられたとき, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ のとき, 次式のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p : K^n \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{a} = \left(a_i\right)_{i \in \Lambda_n} \mapsto \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \left|a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

その組 $\left(K^n, \varphi_p\right)$ は norm 空間をなす.

定義 3.2.1. 上で定義された norm 空間 $\left(K^n, \varphi_p\right)$ をその体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n から誘導される n 次元 l_p-norm 空間という.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n が与えられたとき, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ のとき, 次式のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p : K^n \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{a} = \left(a_i\right)_{i \in \Lambda_n} \mapsto \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \left|a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\forall \mathbf{a} \in K^n$ に対し, $\mathbf{a} = \left(a_i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, $0 \leq \left|a_i\right|$ が成り立つので, $1 \leq p$ に注意すれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\forall i \in \Lambda_n \left[0 \leq \left|a_i\right|\right] &\Leftrightarrow \forall i \in \Lambda_n \left[0 \leq \left|a_i\right|^p\right] \\
&\Rightarrow 0 \leq \sum_{i \in \Lambda_n} \left|a_i\right|^p \\
&\Leftrightarrow 0 \leq \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \left|a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

よって, $0 \leq \varphi_p(\mathbf{a})$ が成り立つ.

$\forall \mathbf{a} \in K^n$ に対し, 定理 3.1.7 より $\varphi_p(\mathbf{a}) = 0$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ が成り立つ.

$\forall k \in K \forall \mathbf{a} \in K^n$ に対し, $\mathbf{a} = \left(a_i\right)_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_p(k\mathbf{a}) &= \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \left|ka_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|k|^p \sum_{i \in \Lambda_n} \left|a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |k| \left(\sum_{i \in \Lambda_n} \left|a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |k| \varphi_p(\mathbf{a})
\end{aligned}$$

したがって, $\varphi_p(k\mathbf{a}) = |k| \varphi_p(\mathbf{a})$ が成り立つ.

$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in K^n$ に対し, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \varLambda_n}$, $\mathbf{b} = (b_i)_{i \in \varLambda_n}$ とおくと, 定理 3.1.9, 即ち, Minkowski の不等式より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_p(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \left(\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i \in \varLambda_n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \varphi_p(\mathbf{a}) + \varphi_p(\mathbf{b})
\end{aligned}$$

したがって, $\varphi_p(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \leq \varphi_p(\mathbf{a}) + \varphi_p(\mathbf{b})$ が成り立つ. □

定理 3.2.2. n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ における n 次元 l_2-norm 空間から誘導される距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_2})$ は n 次元 Euclid 空間 E^n となる.

証明. 定理 3.2.1 の norm の定め方により直ちにわかる. □

定理 3.2.3. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n が与えられたとき, $\forall p, q \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p \leq q$ のとき, $\varphi_q \leq \varphi_p$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n が与えられたとき, $\forall p, q \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p \leq q$ が成り立つとすると, $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し, $0 \leq a \leq 1$ が成り立つなら, $a^q \leq a^p$ が成り立つので, $\forall \mathbf{a} \in K^n$ に対し, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \varLambda_n}$ とおくと, 次式が成り立つことに注意すれば,

$$|a_i| = (|a_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{|a_i|}{\left(\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \right)^q \leq \left(\frac{|a_i|}{\left(\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \right)^p &\Leftrightarrow \frac{|a_i|^q}{\left(\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^p\right)^{\frac{q}{p}}} \leq \frac{|a_i|^p}{\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^p} \\
&\Rightarrow \frac{\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^q}{\left(\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^p\right)^{\frac{q}{p}}} \leq \frac{\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^p}{\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^p} = 1 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^q \leq \left(\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i \in \varLambda_n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\Leftrightarrow \varphi_q(\mathbf{a}) \leq \varphi_p(\mathbf{a})
\end{aligned}$$

よって, $\varphi_q \leq \varphi_p$ が成り立つ. □

3.2.2 一様 norm 空間

定義 3.2.2. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n が与えられたとき, 次式のような写像 φ_C をここではその n 次元 vector 空間 K^n における一様 norm ということにする.

$$\varphi_C : K^n \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{a} = (a_i)_{i \in \Lambda_n} \mapsto \max\left\{|a_i|\right\}_{i \in \Lambda_n}$$

定理 3.2.4. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n が与えられたとき, これにおける一様 normφ_C を用いた組 (K^n, φ_C) は norm 空間をなす.

定義 3.2.3. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n が与えられたとき, norm 空間 (K^n, φ_{D_C}) が構成されることができる. このようにして得られた norm 空間 (K^n, φ_C) をここではその n 次元 vector 空間 K^n における一様 norm 空間ということにする.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n が与えられたとき, これにおける一様 normφ_C を用いた組 (K^n, φ_C) において, $\forall \mathbf{a} \in K^n$ に対し, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, 定義より直ちに $0 \leq \varphi_C(\mathbf{a})$ が成り立つことがわかる.

$\forall \mathbf{a} \in K^n$ に対し, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, $\varphi_C(\mathbf{a}) = 0$ が成り立つなら, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $|a_i| = 0$ が成り立つ, 即ち, $a_i = 0$ が成り立つので, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ が成り立つ. 逆は明らかである.

$\forall \mathbf{a} \in K^n \forall k \in K$ に対し, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_C(k\mathbf{a}) &= \max\left\{|ka_i|\right\}_{i \in \Lambda_n} \\
&= |k| \max\left\{|a_i|\right\}_{i \in \Lambda_n} \\
&= |k| \varphi_C(\mathbf{a})
\end{aligned}$$

$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in K^n$ に対し, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \Lambda_n}$, $\mathbf{b} = (b_i)_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, 次のようになり,

$$\varphi_C(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \max\left\{|a_i + b_i|\right\}_{i \in \Lambda_n}$$

ここで, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, 次式が成り立つので,

$$|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_C(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \max\left\{|a_i + b_i|\right\}_{i \in \Lambda_n} \\
&\leq \max\left\{|a_i|\right\}_{i \in \Lambda_n} + \max\left\{|b_i|\right\}_{i \in \Lambda_n} \\
&= \varphi_C(\mathbf{a}) + \varphi_C(\mathbf{b})
\end{aligned}$$

よって, その組 (K^n, φ_C) は norm 空間をなす. □

定義 3.2.4. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n が与えられたとき, これにおける一様 norm 空間 (K^n, φ_C) から誘導される距離空間 (K^n, d_{φ_C}) をその n 次元 vector 空間 K^n における Chebyshev 距離空間という. また, その距離関数 d_{φ_C} をその n 次元 vector 空間 K^n における Chebyshev 距離関数という.

定理 3.2.5. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n を用いた一様 norm 空間 (K^n, φ_C) が与えられたとき, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, その体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n における n 次元 l_p-norm 空間 (K^n, φ_p) において, $\varphi_C \leq \varphi_p$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n を用いた一様 norm 空間 (K^n, φ_C) が与えられたとき, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, その体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n における n 次元 l_p-norm 空間

(K^n,φ_p) において, $\forall \mathbf{a}\in K^n$ に対し, $\mathbf{a}=(a_i)_{i\in\Lambda_n}$ とおくと, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_C(\mathbf{a})&=\max\{|a_i|\}_{i\in\Lambda_n}\\&=\left(\max\{|a_i|^p\}_{i\in\Lambda_n}\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\varphi_p(\mathbf{a})\end{aligned}$$

よって, $\varphi_C\leq\varphi_p$ が成り立つ. □

定理 3.2.6. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n を用いた一様 norm 空間 (K^n,φ_C) が与えられたとき, その体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n における n 次元 l_p-norm 空間 (K^n,φ_p) において, $\lim_{p\to\infty}\varphi_p=\varphi_C$ が成り立つ.

証明. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n を用いた一様 norm 空間 (K^n,φ_C) が与えられたとき, その体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n における n 次元 l_p-norm 空間 (K^n,φ_p) において, $\forall \mathbf{a}\in K^n$ に対し, $\mathbf{a}=(a_i)_{i\in\Lambda_n}$ とおくと, 定理 3.2.5 より次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_C(\mathbf{a})&\leq\varphi_p(\mathbf{a})\\&=\left(\sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq\left(\sum_{i\in\Lambda_n}\left(\max\{|a_i|\}_{i\in\Lambda_n}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(n\left(\max\{|a_i|\}_{i\in\Lambda_n}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=n^{\frac{1}{p}}\max\{|a_i|\}_{i\in\Lambda_n}\\&=n^{\frac{1}{p}}\varphi_C(\mathbf{a})\end{aligned}$$

ここで, はさみうちの原理より $p\to\infty$ のとき, $n^{\frac{1}{p}}\to 1$ となるので, $\varphi_C(\mathbf{a})=\varphi_p(\mathbf{a})$ が成り立つ. □

定理 3.2.7. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n を用いた Chebyshev 距離空間 (K^n,d_{φ_C}) が与えられたとき, $\forall p\in\mathbb{R}$ に対し, $1\leq p$ が成り立つなら, その体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n における n 次元 l_p-norm 空間 (K^n,φ_p) から誘導される距離空間 $\left(K^n,d_{\varphi_p}\right)$ において, その vector 空間 K^n の任意の元の列 $(\mathbf{a}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ に対し, $\lim_{m\to\infty}d_{\varphi_p}(\mathbf{a}_m,\mathbf{a})=0$ が成り立つならそのときに限り, $\lim_{m\to\infty}d_{\varphi_C}(\mathbf{a}_m,\mathbf{a})=0$ が成り立つ.

証明. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n を用いた Chebyshev 距離空間 (K^n,d_{φ_C}) が与えられたとき, $\forall p\in\mathbb{R}$ に対し, $1\leq p$ が成り立つなら, その体 K 上の n 次元 vector 空間 K^n における n 次元 l_p-norm 空間 (K^n,φ_p) から誘導される距離空間 $\left(K^n,d_{\varphi_p}\right)$ において, その vector 空間 K^n の任意の元の列 $(\mathbf{a}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ に対し, $\lim_{m\to\infty}d_{\varphi_p}(\mathbf{a}_m,\mathbf{a})=0$ が成り立つなら, $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists m_0\in\mathbb{N}\forall m\in\mathbb{N}$ に対し, $m_0\leq m$ が成り立つなら, $d_{\varphi_p}(\mathbf{a}_m,\mathbf{a})<\varepsilon$ が成り立つ. ここで, 定理 3.2.5 より次のようになる.

$$\begin{aligned}d_{\varphi_p}(\mathbf{a}_m,\mathbf{a})<\varepsilon&\Leftrightarrow\varphi_p(\mathbf{a}-\mathbf{a}_m)<\varepsilon\\&\Leftrightarrow\varphi_C(\mathbf{a}-\mathbf{a}_m)\leq\varphi_p(\mathbf{a}-\mathbf{a}_m)<\varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \varphi_{C}\left(\mathbf{a}-\mathbf{a}_{m}\right)<\varepsilon\\
&\Leftrightarrow d_{\varphi_{C}}\left(\mathbf{a}_{m},\mathbf{a}\right)<\varepsilon
\end{aligned}$$

よって, $\lim_{m\rightarrow\infty} d_{\varphi_{C}}\left(\mathbf{a}_{m},\mathbf{a}\right)=0$ が成り立つ.

逆に, $\lim_{m\rightarrow\infty} d_{\varphi_{C}}\left(\mathbf{a}_{m},\mathbf{a}\right)=0$ が成り立つなら, $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists m_{0}\in\mathbb{N}\forall m\in\mathbb{N}$ に対し, $m_{0}\leq m$ が成り立つなら, $d_{\varphi_{C}}\left(\mathbf{a}_{m},\mathbf{a}\right)<\varepsilon$ が成り立つ. $\mathbf{a}_{m}=\left(a_{im}\right)_{i\in\varLambda_{n}}$, $\mathbf{a}=\left(a_{i}\right)_{i\in\varLambda_{n}}$ とおくと, したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
d_{\varphi_{p}}\left(\mathbf{a}_{m},\mathbf{a}\right)&=\varphi_{p}\left(\mathbf{a}-\mathbf{a}_{m}\right)\\
&=\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\left|a_{i}-a_{im}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\left(\sum_{i\in\varLambda_{n}}\left(\max\left\{\left|a_{i}-a_{im}\right|\right\}_{i\in\varLambda_{n}}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(n\left(\max\left\{\left|a_{i}-a_{im}\right|\right\}_{i\in\varLambda_{n}}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=n^{\frac{1}{p}}\max\left\{\left|a_{i}-a_{im}\right|\right\}_{i\in\varLambda_{n}}<n^{\frac{1}{p}}\varepsilon
\end{aligned}$$

よって, $\lim_{m\rightarrow\infty} d_{\varphi_{p}}\left(\mathbf{a}_{m},\mathbf{a}\right)=0$ が成り立つ. □

定理 3.2.8. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 K^{n} が与えられたとき, $\forall p,q\in\mathbb{R}$ に対し, $1\leq p$ かつ $1\leq q$ が成り立つなら, その体 K 上の n 次元 vector 空間 K^{n} における n 次元 l_{p}-norm 空間 $\left(K^{n},\varphi_{p}\right)$ から誘導される距離空間 $\left(K^{n},d_{\varphi_{p}}\right)$, n 次元 l_{q}-norm 空間 $\left(K^{n},\varphi_{q}\right)$ から誘導される距離空間 $\left(K^{n},d_{\varphi_{q}}\right)$ において, その vector 空間 K^{n} の任意の元の列 $\left(\mathbf{a}_{m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ に対し, $\lim_{m\rightarrow\infty} d_{\varphi_{p}}\left(\mathbf{a}_{m},\mathbf{a}\right)=0$ が成り立つならそのときに限り, $\lim_{m\rightarrow\infty} d_{\varphi_{q}}\left(\mathbf{a}_{m},\mathbf{a}\right)=0$ が成り立つ.

証明. 定理 3.2.7 より直ちにわかる. □

3.2.3 n 次元 l_{p}-norm 空間と Banach 空間

これから述べる $\forall p\in\mathbb{R}$ に対し, $1\leq p$ が成り立つなら, n 次元数空間 $\mathbb{R}^{n}$ における n 次元 l_{p}-norm 空間 $\left(\mathbb{R}^{n},\varphi_{p}\right)$ は Banach 空間であることを示すのに必要な概念たちや定理たちをまず挙げておこう.

定義 3.2.5 (一様連続写像)**.** 2 つの距離空間たち (S,d), (T,e) とこれらの間の写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとする. $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}\forall a,b\in S$ に対し, $d(a,b)<\delta$ が成り立つなら, $e\left(f(a),f(b)\right)<\varepsilon$ が成り立つとき, その写像 f はその距離空間 (S,d) からその距離空間 (T,e) へ一様連続であるといいこのような写像を一様連続写像という.

定義 3.2.6 (一様同相写像)**.** 2 つの距離空間たち (S,d), (T,e) とこれらの間の写像 $f:S\rightarrow T$ が与えられたとする. この写像 f が全単射であるかつ, それらの写像たち f, f^{-1} がどちらも一様連続であるとき, その写像 f をその距離空間 (S,d) からその距離空間 (T,e) への一様同相写像, 一様位相写像などという.

定義 3.2.7 (一様同相)**.** 2 つの距離空間たち (S,d), (T,e) が与えられたとき, これらの間に一様同相写像が存在するとき, これらの距離空間たち (S,d), (T,e) は一様同相である, 一様同位相であるなどといい, ここでは, $(S,d)\approx_{U}(T,e)$ と書くことにする.

定理 3.2.9. その関係 $\approx_{U}$ は同値関係である, 即ち, 次のことが成り立つ.

- その関係 $\approx_U$ は反射的である, 即ち, $(S,d) \approx_U (S,d)$ が成り立つ.
- その関係 $\approx_U$ は対称的である, 即ち, $(S,d) \approx_U (T,e)$ が成り立つなら, $(T,e) \approx_U (S,d)$ が成り立つ.
- その関係 $\approx_U$ は推移的である, 即ち, $(R,c) \approx_U (S,d)$ が成り立つかつ, $(S,d) \approx_U (T,e)$ が成り立つなら, $(R,c) \approx_U (T,e)$ が成り立つ.

定理 3.2.10. 完備距離空間 (S^*,d^*) に一様同相な距離空間 (S,d) は完備である.

ここで, 同相であるのみの場合では, 成り立たない場合があることに注意されたい.

定理 3.2.11. n 次元 Euclid 空間 E^n は完備である.

さて, 下準備が終わったので, 本題を述べよう.

定理 3.2.12. $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ における n 次元 l_p-norm 空間 $(\mathbb{R}^n, \varphi_p)$ から誘導される距離空間 $\left(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_p}\right)$ とその n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ を用いた Chebyshev 距離空間 (K^n, d_{φ_C}) は一様同相である.

証明. $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ における n 次元 l_p-norm 空間 $(\mathbb{R}^n, \varphi_p)$ から誘導される距離空間 $\left(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_p}\right)$ とその n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ を用いた Chebyshev 距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_C})$ において, $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し, $\delta = \varepsilon$ とおけば, たしかに, 正の実数 δ が存在して, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \Lambda_n}$, $\mathbf{b} = (b_i)_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, $d_{\varphi_p}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \delta$ が成り立つなら, 次のようになる.

$$\begin{aligned} d_{\varphi_p}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \delta &\Leftrightarrow \left(\sum_{i \in \Lambda_n} |b_i - a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \delta \\ &\Leftrightarrow \max\{|b_i - a_i|\}^p \leq \sum_{i \in \Lambda_n} |b_i - a_i|^p < \delta^p \\ &\Rightarrow \max\{|b_i - a_i|\} < \delta \\ &\Leftrightarrow d_{\varphi_C}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

以上より, その恒等写像 $I_{\mathbb{R}^n}$ はその距離空間 $\left(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_p}\right)$ からその距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_C})$ へ一様連続である.

逆に, $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し, $\delta = n^{-\frac{1}{p}}\varepsilon$ とおけば, たしかに, 正の実数 δ が存在して, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \Lambda_n}$, $\mathbf{b} = (b_i)_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, $d_{\varphi_C}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \delta$ が成り立つなら, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} d_{\varphi_C}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \delta &\Leftrightarrow |b_i - a_i| \leq \max\{|b_i - a_i|\} < \delta \\ &\Rightarrow |b_i - a_i|^p < \delta^p \\ &\Rightarrow \sum_{i \in \Lambda_n} |b_i - a_i|^p < \sum_{i \in \Lambda_n} \delta^p = n\delta^p \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{i \in \Lambda_n} |b_i - a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < n^{\frac{1}{p}}\delta \\ &\Leftrightarrow d_{\varphi_p}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < n^{\frac{1}{p}}\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

以上より, その恒等写像 $I_{\mathbb{R}^n}$ はその距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_C})$ からその距離空間 $\left(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_p}\right)$ へ一様連続である.

これにより, その恒等写像 $I_{\mathbb{R}^n}$ はその距離空間 $\left(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_p}\right)$ からその距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_C})$ への一様同相写像なので, これらの距離空間たち $\left(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_p}\right)$, $(\mathbb{R}^n, d_{\varphi_C})$ は一様同相である. □

定理 3.2.13. n 次元 Euclid 空間 E^n とその n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ を用いた Chebyshev 距離空間 (K^n, d_{φ_C}) は一様同相である.

証明. 定理 3.2.2 と定理 3.2.12 より明らかである. □

定理 3.2.14. n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ における一様 norm 空間 $(\mathbb{R}^n, \varphi_C)$ は Banach 空間である.

証明. n 次元 Euclid 空間 E^n は完備であるので, 完備距離空間 (S^*, d^*) に一様同相な距離空間 (S, d) は完備であることにより, その n 次元 Euclid 空間 E^n に一様同相な距離空間は完備となる. したがって, 定理 3.2.13 よりその n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ における一様 norm 空間 $(\mathbb{R}^n, \varphi_C)$ は Banach 空間である. □

定理 3.2.15. $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ における n 次元 l_p-norm 空間 $(\mathbb{R}^n, \varphi_p)$ は Banach 空間である.

証明. 完備距離空間 (S^*, d^*) に一様同相な距離空間 (S, d) は完備であることにより, そのその n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ を用いた Chebyshev 距離空間 (K^n, d_{φ_C}) に一様同相な距離空間は完備となる. あとは, 定理 3.2.12 による. □

定理 3.2.16. 集合 $\mathbb{C}^n$ における一様 norm 空間 $(\mathbb{C}^n, \varphi_C)$ は Banach 空間である.

証明. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ とみればよい. □

定理 3.2.17. $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ が成り立つなら, 集合 $\mathbb{C}^n$ における n 次元 l_p-norm 空間 $(\mathbb{C}^n, \varphi_p)$ は Banach 空間である.

証明. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ とみればよい. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p111,275-285 ISBN978-4-00-029871-1

3.3 数列空間

3.3.1 数列空間

定理 3.3.1. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, 写像 $\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ 全体の集合 $\mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ において, 次のように定義されれば,

- $\forall k,l \in K \forall \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ に対し, $k\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + l\left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(ka_{n} + lb_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が成り立つ.

その集合 $\mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ は vector 空間をなす.

定義 3.3.1. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, vector 空間 $\mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ をその体 K 上の数列空間という.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, 写像 $\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ 全体の集合 $\mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ において, 次のように定義されれば,

- $\forall k,l \in K \forall \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ に対し, $k\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + l\left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(ka_{n} + lb_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が成り立つ.

$\forall \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(c_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ に対し, 次のことが成り立つかつ,

$$\begin{aligned}
\left(\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + \left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) + \left(c_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} &= \left(a_{n} + b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + \left(c_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \\
&= \left(\left(a_{n} + b_{n} \right) + c_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \\
&= \left(a_{n} + \left(b_{n} + c_{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \\
&= \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + \left(b_{n} + c_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \\
&= \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + \left(\left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + \left(c_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)
\end{aligned}$$

$\exists (0)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}, K) \forall \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ に対し, 次のことが成り立つかつ,

$$\begin{aligned}
\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + (0)_{n \in \mathbb{N}} = \left(a_{n} + 0 \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \\
(0)_{n \in \mathbb{N}} + \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(0 + a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}
\end{aligned}$$

$\forall \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}, K) \exists \left(- a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ に対し, 次のことが成り立つので,

$$\begin{aligned}
\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + \left(- a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(a_{n} - a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}} \\
\left(- a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(- a_{n} + a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}
\end{aligned}$$

その集合 $\mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ は加法について可換群 $\left(\mathfrak{F}(\mathbb{N}, K), + \right)$ をなす.

もちろん, $\forall k \in K \forall \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ に対し, scalar 倍が定義されており, $\forall k \in K \forall \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
k\left(\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + \left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) &= k\left(a_{n} + b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(k\left(a_{n} + b_{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(ka_{n} + kb_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \\
&= \left(ka_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + \left(kb_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = k\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + k\left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}
\end{aligned}$$

$\forall k,l \in K \forall \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}, K)$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
(k + l)\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} &= \left((k + l)a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(ka_{n} + la_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \\
&= \left(ka_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + \left(la_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = k\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + l\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}
\end{aligned}$$

$\forall k,l \in K\forall \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}\left(\mathbb{N},K \right)$ に対し, 次のようになる.

$$\left(kl \right)\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left((kl)a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(k\left(la_{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} = k\left(la_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = k\left(l\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)$$

$\exists 1 \in K\forall \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}\left(\mathbb{N},K \right)$ に対し, 次のようになる.

$$1\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

以上より, その集合 $\mathfrak{F}\left(\mathbb{N},K \right)$ は vector 空間をなす. □

定理 3.3.2. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, その体 K 上の数列空間 $\mathfrak{F}\left(\mathbb{N},K \right)$ の元のうち norm 空間 $(K, |\bullet|)$ から誘導される距離空間の意味で収束するもの全体 c_{K} はその数列空間 $\mathfrak{F}\left(\mathbb{N},K \right)$ の部分 vector 空間である.

証明. $\subseteq \mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, その体 K 上の数列空間 $\mathfrak{F}\left(\mathbb{N},K \right)$ の元のうち norm 空間 $(K, |\bullet|)$ から誘導される距離空間の意味で収束するもの全体 c_{K} は明らかにその数列空間 $\mathfrak{F}\left(\mathbb{N},K \right)$ の部分集合である. そこで, もちろん, $(0)_{n \in \mathbb{N}} \in c_{K}$ が成り立つかつ, $\forall k,l \in K\forall \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}},\left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in c_{K}$ に対し, 定義よりあるその体の元々 α, β が存在して, $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\exists n_{0} \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, $n_{0} \leq n$ が成り立つなら, $\left| a_{n} - \alpha \right| < \varepsilon$ かつ $\left| b_{n} - \beta \right| < \varepsilon$ が成り立つとしてもよい. このとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\left| \left(ka_{n} + lb_{n} \right) - \left(k\alpha + l\beta \right) \right| &= \left| k\left(a_{n} - \alpha \right) + l\left(b_{n} - \beta \right) \right| \\
&\leq \left| k\left(a_{n} - \alpha \right) \right| + \left| l\left(b_{n} - \beta \right) \right| \\
&= |k|\left| a_{n} - \alpha \right| + |l|\left| b_{n} - \beta \right| \\
&< |k|\varepsilon + |l|\varepsilon \\
&= \left(|k| + |l| \right)\varepsilon
\end{aligned}$$

よって, その元の列 $k\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + l\left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ はその体 K の元 $k\alpha + l\beta$ に収束するので, $k\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} + l\left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in c_{K}$ が成り立つ. 以上, 定理 1.1.9 よりその集合 c_{K} はその数列空間 $\mathfrak{F}\left(\mathbb{N},K \right)$ の部分 vector 空間である. □

3.3.2 l_{p}-norm 空間

定義 3.3.2. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ として次式のように定義される集合 l_{p} をその体 K 上の l_{p} 空間という.

$$l_{p} = \left\{ \left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}\left(\mathbb{N},K \right) \middle| \sum_{n \in \mathbb{N}}\left| a_{n} \right|^{p} < \infty \right\}$$

定理 3.3.3. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ としてその体 K 上の l_{p} 空間は集合 c_{K} の部分 vector 空間であり, さらに, $\forall\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in l_{p}$ に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty}a_{n} = 0$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ としてその体 K 上の l_{p} 空間において, $\forall\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in l_{p}$ に対し, $\sum_{n \in \mathbb{N}}\left| a_{n} \right|^{p} < \infty$ が成り立つので, 実数列 $\left(\sum_{i \in \Lambda_{n}}\left| a_{i} \right|^{p} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列でないといけない[*16]. したがって, $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\exists n_{0} \in \mathbb{N}\forall m,n \in \mathbb{N}$ に対し, $n_{0} \leq m$ かつ $n_{0} \leq n$ が成り立つなら,

[*16] 次のことを主張する定理を用いた.
距離空間 (S,d) におけるその集合 S の元の列 $\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するとき, その元の列 $\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である.

$\left|\sum_{i\in\varLambda_n}|a_i|^p-\sum_{i\in\varLambda_m}|a_i|^p\right|<\varepsilon$ が成り立つ. したがって, $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し, $n_0\leq n<n+1$ が成り立つなら, 次のようになる.

$$\begin{aligned}|a_{n+1}|^p&=||a_{n+1}|^p|\\&=\left||a_{n+1}|^p+\sum_{i\in\varLambda_n}|a_i|^p-\sum_{i\in\varLambda_n}|a_i|^p\right|\\&=\left|\sum_{i\in\varLambda_{n+1}}|a_i|^p-\sum_{i\in\varLambda_n}|a_i|^p\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

これにより, $|a_{n+1}|<\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ が成り立つので, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ が成り立つ. ゆえに, $l_p\subseteq c_K$ が成り立つ.

一方で, もちろん, $(0)_{n\in\mathbb{N}}\in l_p$ が成り立つかつ, $\forall k,l\in K\forall\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\in l_p$ に対し, 次式が成り立つことに注意すれば,

$$|ka_i+lb_i|\leq|ka_i|+|lb_i|\leq 2\max\left\{|ka_i|,|lb_i|\right\}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\varLambda_n}|ka_i+lb_i|^p&\leq\sum_{i\in\varLambda_n}\left(2\max\left\{|ka_i|,|lb_i|\right\}\right)^p\\&=2^p\sum_{i\in\varLambda_n}\max\left\{|ka_i|,|lb_i|\right\}^p\\&\leq 2^p\sum_{i\in\varLambda_n}\left(|ka_i|^p+|lb_i|^p\right)\\&=2^p\left(\sum_{i\in\varLambda_n}|ka_i|^p+\sum_{i\in\varLambda_n}|lb_i|^p\right)\\&=2^p|k|^p\sum_{i\in\varLambda_n}|a_i|^p+2^p|l|^p\sum_{i\in\varLambda_n}|b_i|^p<\infty\end{aligned}$$

したがって, $k\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}+l\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\in l_p$ が成り立つので, 定理 1.1.9 よりその l_p 空間はその集合 c_K の部分 vector 空間である. □

定理 3.3.4. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, $\forall p\in\mathbb{R}$ に対し, $1\leq p$ としてその体 K 上の l_p 空間が与えられたとき, 次式のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p:K^n\rightarrow\mathbb{R};\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

その組 $\left(l_p,\varphi_p\right)$ は norm 空間をなす.

定義 3.3.3. 上で定義された norm 空間 $\left(l_p,\varphi_p\right)$ をその体 K 上の l_p-norm 空間という.

証明. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K が与えられたとき, $\forall p\in\mathbb{R}$ に対し, $1\leq p$ としてその体 K 上の l_p 空間が与えられたとき, 次式のように写像 φ_p が定義されれば,

$$\varphi_p:K^n\rightarrow\mathbb{R};\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

定義より直ちに $\forall \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ に対し, $0 \leq \varphi_p \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つことがわかる.

$\forall \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ に対し, $\varphi_p \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ が成り立つなら, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_p \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= 0 \Leftrightarrow 0 \leq \left|a_n\right|^p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n\right|^p = 0\\ &\Rightarrow 0 \leq \left|a_n\right| \leq 0 \Leftrightarrow a_n = \left|a_n\right| = 0\end{aligned}$$

したがって, $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる. 逆に, $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つなら, 直ちに $\varphi_p \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ が成り立つことがわかる.

$\forall k \in K \forall \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_p \left(k \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) &= \varphi_p \left(k a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|k a_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(|k|^p \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= |k| \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= |k| \varphi_p \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

したがって, $\varphi_p \left(k \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) = |k| \varphi \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つ.

$\forall \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ に対し, 定理 3.1.9, 即ち, Mikowski の不等式より次のようになる.

$$\left(\sum_{i\in\varLambda_n} \left|a_i + b_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i\in\varLambda_n} \left|a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in\varLambda_n} \left|b_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

あとは, $n \to \infty$ とすれば, l_p 空間の定義に注意すれば, 次式のようになるので,

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n + b_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|b_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\varphi_p \left(\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) \leq \varphi \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \varphi \left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つ.

ゆえに, その組 $\left(l_p, \varphi_p\right)$ は norm 空間をなす. □

3.3.3 l_p-norm 空間と Banach 空間

定理 3.3.5. $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ として集合 $\mathbb{R}$ 上の l_p-norm 空間 $\left(l_p, \varphi_p\right)$ は Banach 空間である.

証明. $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ として集合 $\mathbb{R}$ 上の l_p-norm 空間 $\left(l_p, \varphi_p\right)$ が与えられたとき, その l_p 空間の任意の Cauchy 列 $\left(\left(a_{mn}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ に対し, Cauchy 列の定義より $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall l, m \in \mathbb{N}$ に対し, $m_0 \leq l$ かつ $m_0 \leq m$ が成り立つなら, 次式が成り立つ.

$$d_{\varphi_p} \left(\left(a_{\ln}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(a_{mn}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) < \varepsilon$$

したがって, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\left(\left|a_{mn} - a_{\ln}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \left|a_{mn} - a_{\ln}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \varphi_{p}\left(a_{mn} - a_{\ln}\right)_{n \in \mathbb{N}} \\
&= \varphi_{p}\left(\left(a_{mn}\right)_{n \in \mathbb{N}} - \left(a_{\ln}\right)_{n \in \mathbb{N}}\right) \\
&= d_{\varphi_{p}}\left(\left(a_{\ln}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(a_{mn}\right)_{n \in \mathbb{N}}\right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

これにより, 集合 $\mathbb{R}$ 上の L_{p}-norm 空間 $\left(\mathbb{R}, \varphi_{p}\right)$ が考えられれば, これから誘導される距離空間 $\left(\mathbb{R}, d_{\varphi_{p}}\right)$ の意味で $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+} \exists m_{0} \in \mathbb{N} \forall l, m \in \mathbb{N}$ に対し, $m_{0} \leq l$ かつ $m_{0} \leq m$ が成り立つなら, 次のようになるので,

$$d_{\varphi_{p}}\left(a_{\ln}, a_{mn}\right) = \varphi_{p}\left(a_{mn} - a_{\ln}\right) = \left(\left|a_{mn} - a_{\ln}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

その元の列 $\left(a_{mn}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である.

そこで, 定理 3.2.15 よりその norm 空間 $\left(\mathbb{R}, \varphi_{p}\right)$ は Banach 空間であるから, これから誘導される距離空間 $\left(\mathbb{R}, d_{\varphi_{p}}\right)$ は完備である, 即ち, その距離空間 $\left(\mathbb{R}, d_{\varphi_{p}}\right)$ の意味で任意の Cauchy 列は収束するので, 先ほどの元の列 $\left(a_{mn}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ はその距離空間 $\left(\mathbb{R}, d_{\varphi_{p}}\right)$ の意味で収束することになる. 以下, その極限を a_{n} とおく.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+} \exists m_{0} \in \mathbb{N} \forall l, m \in \mathbb{N}$ に対し, $m_{0} \leq l$ かつ $m_{0} \leq m$ が成り立つなら, 仮定より次のようになる.

$$\begin{aligned}
d_{\varphi_{p}}\left(\left(a_{\ln}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(a_{mn}\right)_{n \in \mathbb{N}}\right) &= \varphi_{p}\left(\left(a_{mn}\right)_{n \in \mathbb{N}} - \left(a_{\ln}\right)_{n \in \mathbb{N}}\right) \\
&= \varphi_{p}\left(a_{mn} - a_{\ln}\right)_{n \in \mathbb{N}} \\
&= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \left|a_{mn} - a_{\ln}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

したがって, $\forall h \in \mathbb{N}$ に対し, 次のようになる.

$$\sum_{i \in \Lambda_{h}} \left|a_{mi} - a_{li}\right|^{p} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left|a_{mn} - a_{\ln}\right|^{p} < \varepsilon^{p}$$

ここで, $l \rightarrow \infty$ とすれば, $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{li} = a_{i}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i \in \Lambda_{h}} \left|a_{mi} - a_{li}\right|^{p} &= \sum_{i \in \Lambda_{h}} \lim_{l \rightarrow \infty} \left|a_{mi} - a_{li}\right|^{p} \\
&= \sum_{i \in \Lambda_{h}} \left|a_{mi} - \lim_{l \rightarrow \infty} a_{li}\right|^{p} \\
&= \sum_{i \in \Lambda_{h}} \left|a_{mi} - a_{i}\right|^{p} \leq \varepsilon^{p}
\end{aligned}$$

そこで, $h \rightarrow \infty$ とすれば, 次のようになる.

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{i \in \Lambda_{h}} \left|a_{mi} - a_{i}\right|^{p} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left|a_{mn} - a_{n}\right|^{p} \leq \varepsilon^{p}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\left|a_{n}\right|^{p} &= \left|a_{mn} - a_{mn} + a_{n}\right|^{p} \\
&= \left|a_{mn} - \left(a_{mn} - a_{n}\right)\right|^{p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (|a_{mn}| + |a_{mn} - a_n|)^p \\
&\leq (2\max\{|a_{mn}|, |a_{mn} - a_n|\})^p \\
&= 2^p \max\{|a_{mn}|, |a_{mn} - a_n|\}^p \\
&\leq 2^p |a_{mn}|^p + 2^p |a_{mn} - a_n|^p \\
&= 2^p (|a_{mn}|^p + |a_{mn} - a_n|^p)
\end{aligned}
$$

$(a_{mn})_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ が成り立つことに注意すれば, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{mn}|^p < \infty$ が成り立つので, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (2^p |a_{mn}|^p + 2^p |a_{mn} - a_n|^p) \\
&= 2^p \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{mn}|^p + 2^p \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{mn} - a_n|^p \\
&< 2^p \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{mn}|^p + 2^p \varepsilon^p < \infty
\end{aligned}
$$

これにより, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ が成り立つ.

さらに, 上記の議論により次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
d_{\varphi_p}\left((a_{mn})_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) &= \varphi_p\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}} - (a_{mn})_{n\in\mathbb{N}}\right) \\
&= \varphi_p (a_{mn} - a_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{mn} - a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\lim_{m\to\infty} d_{\varphi_p}\left((a_{mn})_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = 0$ が成り立つ, 即ち, その l_p-norm 空間 (l_p, φ_p) から誘導される距離空間 $\left(l_p, d_{\varphi_p}\right)$ の意味で $\lim_{m\to\infty} (a_{mn})_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が成り立つ.

これにより, その距離空間 $\left(l_p, d_{\varphi_p}\right)$ の任意の Cauchy 列は収束することになるので, その l_p-norm 空間 (l_p, φ_p) は Banach 空間である. □

次の定理を述べる前に必要となる次の定理をまず述べておこう.

定理 3.3.6 (距離空間の極限による特徴づけ)**.** 距離空間 (S, d) が与えられたとき, $\forall a \in S \forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し, 次のことが成り立つ.

- その元 a がその部分集合 M の触点である, 即ち, $a \in \mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り, その元 a がその集合 M のある元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在してこれの極限となる. [*17]
- その元 a がその部分集合 M の内点である, 即ち, $a \in \mathrm{int}M$ が成り立つならそのときに限り, その元 a が極限であるようなその集合 S の任意の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し, ある自然数 n_0 が存在して, 任意の自然数 n に対し, $n_0 < n$ が成り立つなら, $a_n \in M$ が成り立つ.
- その元 a がその部分集合 M の集積点であるならそのときに限り, 任意の自然数 n に対し, $a_n \neq a$ なるその集合 M のある元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限がその元 a である.

[*17] この定理と位相空間論における閉包作用子による位相空間の特徴づけにより, 距離空間 (S, d) が与えられたとき, $\forall M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し, その集合 M の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限全体の集合を $\mathrm{cl}M$ とおき, 写像 $\mathrm{cl}: \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S); M \mapsto \mathrm{cl}M$ が与えられれば, その写像 cl を閉包作用子とする位相が構成されることもできる.

- その元 a がその部分集合 M の孤立点であるならそのときに限り, その元 a が極限であるようなその集合 M の任意の元の列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し, ある自然数 n_0 が存在して, 任意の自然数 n に対し, $n_0 < n$ が成り立つなら, $a_n = a$ が成り立つ.

このことは幾何学の距離空間論の議論のみによって示されることができる.
さて, 本題を述べよう.

定理 3.3.7. $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ として集合 $\mathbb{R}$ 上の l_p-norm 空間 $\left(l_p, \varphi_p\right)$ から誘導される距離空間 $\left(l_p, d_{\varphi_p}\right)$ から誘導される位相空間 $\left(l_p, \mathfrak{O}_{d_{\varphi_p}}\right)$ は可分である.

証明. $\forall p \in \mathbb{R}$ に対し, $1 \leq p$ として集合 $\mathbb{R}$ 上の l_p-norm 空間 $\left(l_p, \varphi_p\right)$ から誘導される距離空間 $\left(l_p, d_{\varphi_p}\right)$ から誘導される位相空間 $\left(l_p, \mathfrak{O}_{d_{\varphi_p}}\right)$ において, 次のように集合 M が定義されよう.

$$M = \left\{\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p \middle| a_n \in \mathbb{Q} \land \exists n_0 \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}\left[n_0 < n \Rightarrow a_n = 0\right]\right\}$$

このとき, そのような集合 M はたかだか可算でもちろん $\mathrm{cl}M \subseteq \mathrm{cl}l_p = l_p$ が成り立つ.
逆に, $\exists\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ に対し, ある正の実数 ε が存在して, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ に対し, 次式が成り立つと仮定すると,

$$\varepsilon \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\varLambda_{n_0}} \left|a_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

次のようになる.

$$\varepsilon^p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\varLambda_{n_0}} \left|a_n\right|^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n\right|^p - \sum_{n\in\varLambda_{n_0}} \left|a_n\right|^p$$

ここで, $n_0 \rightarrow \infty$ とすれば, 次式のようになるが,

$$\begin{aligned}
0 < \varepsilon^p &= \lim_{n_0\rightarrow\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n\right|^p - \sum_{n\in\varLambda_{n_0}} \left|a_n\right|^p\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n\right|^p - \lim_{n_0\rightarrow\infty}\sum_{n\in\varLambda_{n_0}} \left|a_n\right|^p \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n\right|^p - \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n\right|^p = 0
\end{aligned}$$

これは矛盾している. ゆえに, $\forall\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し, ある自然数 n_0 が存在して, 次式が成り立つ.

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\varLambda_{n_0}} \left|a_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

そこで, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, $n \leq n_0$ が成り立つなら, $a_n' = a_n$ が成り立ち, $n_0 < n$ が成り立つなら, $a_n' = 0$ が成り立つような元の列 $\left(a_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が考えられれば, もちろん, 次式が成り立つので,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n'\right|^p = \sum_{i\in\varLambda_{n_0}} \left|a_i\right|^p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n\right|^p < \infty$$

$(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ が成り立つ. さらに, $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\forall n \in N$ に対し, 有理数の稠密性よりある集合 $\mathbb{Q}$ の元の列 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, $n_0 < n$ が成り立つなら, $q_n = 0$ となるようにされるかつ, $|q_n - a'_n| < \varepsilon$ が成り立つようにすることができるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |q_n - a'_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{n\in\varLambda_{n_0}} |q_n - a'_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &< \left(\sum_{n\in\varLambda_{n_0}} \varepsilon^p\right)^{\frac{1}{p}} = (n_0\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} = n_0^{\frac{1}{p}}\varepsilon\end{aligned}$$

さらに, 上記の議論により $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |a'_n|^p < \infty$ が成り立つので, もちろん, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} |q_n|^p &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |q_n - a'_n + a'_n|^p\\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |q_n - a'_n|^p + \sum_{n\in\mathbb{N}} |a'_n|^p\\ &< \left(n_0^{\frac{1}{p}}\varepsilon\right)^p + \sum_{n\in\mathbb{N}} |a'_n|^p\\ &= n_0\varepsilon^p + \sum_{n\in\mathbb{N}} |a'_n|^p < \infty\end{aligned}$$

これにより, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ が成り立つ.

以上より, $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し, ある自然数 n_0 が存在して, これを用いたその l_p 空間の元 $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が考えられれば, その集合 M に元 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して, 次のようになる.

$$\begin{aligned}d_{\varphi_p}\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) &\leq d_{\varphi_p}\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) + d_{\varphi_p}\left((a'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\\ &= \varphi_p\left((a'_n)_{n\in\mathbb{N}} - (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) + \varphi_p\left((q_n)_{n\in\mathbb{N}} - (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\\ &= \varphi_p\left(a'_n - a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \varphi_p\left(q_n - a'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a'_n - a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |q_n - a'_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\sum_{n\in\varLambda_{n_0}} |a'_n - a_n|^p + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\varLambda_{n_0}} |a'_n - a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |q_n - a'_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\sum_{n\in\varLambda_{n_0}} |a_n - a_n|^p + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\varLambda_{n_0}} |0 - a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |q_n - a'_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\varLambda_{n_0}} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |q_n - a'_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &< \varepsilon + n_0^{\frac{1}{p}}\varepsilon = \left(1 + n_0^{\frac{1}{p}}\right)\varepsilon\end{aligned}$$

これにより, その元の列 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ごとに自然数を割り当てることで, その元 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 M のある元

の列 $\left((q_{mn})_{n\in\mathbb{N}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ が存在してこれの極限となる. そこで, 先に述べた定理より[*18]その元 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその部分集合 M の触点である, 即ち, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{cl}M$ が成り立つならそのときに限り, その元 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 M のある元の列が存在してこれの極限となるので, $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ に対し, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{cl}M$ が成り立つ.

これで, $l_p \subseteq \mathrm{cl}M$ が成り立つことがいえたので, $l_p = \mathrm{cl}M$ が成り立つことになる. これにより, その l_p 空間において稠密であるかつ, たかだか可算集合である集合 M が存在するので, その位相空間 $\left(l_p, \mathfrak{O}_{d_{\varphi_p}}\right)$ は可分である. □

参考文献

[1] 松坂和夫, "集合・位相入門", 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p111,275-285 ISBN978-4-00-029871-1

[2] harlekin. "Showing the inequality $|\alpha + \beta|^p \leq 2^{p-1}(|\alpha|^p + |\beta|^p)$". StackExchange. `https://math.stackexchange.com/questions/143173/showing-the-inequality-alpha-betap-leq-2p-1-alphap-betap` (2021-12-30 1:17 閲覧)

[3] 倉田和浩. "解析学概論 (1)(解析学特別講義 I) 倉田　和浩 2019.4.15（第 2 回講義ノート）". 東京都立大学. `https://www.comp.tmu.ac.jp/tmu-kurata/lectures/fun19/note-2.pdf` (2021-12-30 21:59 取得)

[*18] 距離空間の極限による特徴づけのこと.

3.4 双線形形式

3.4.1 双線形形式

公理 3.4.1 (双線形形式の公理)**.** 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 次のことを満たすような写像 $B:V\times V\rightarrow K$ をその vector 空間 V 上の双線形形式, 双 1 次形式という.

- $\forall a,b\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, $B\left(a\mathbf{u}+b\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=aB\left(\mathbf{u},\mathbf{w}\right)+bB\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ が成り立つ.
- $\forall a,b\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, $B\left(\mathbf{u},a\mathbf{v}+b\mathbf{w}\right)=aB\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)+bB\left(\mathbf{u},\mathbf{w}\right)$ が成り立つ.

定義 3.4.2. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 双線形形式 $B:V\times V\rightarrow K$ が次のことを満たすとき, その双線形形式 B を対称双線形形式という.

- $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, $B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=B\left(\mathbf{w},\mathbf{v}\right)$ が成り立つ.

定義 3.4.3. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 次のことを満たすような写像 $B:V\times V\rightarrow K$ をその vector 空間 V 上の共役双線形形式, 共役双 1 次形式という.

- $\forall a,b\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, $B\left(a\mathbf{u}+b\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=\overline{a}B\left(\mathbf{u},\mathbf{w}\right)+\overline{b}B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ が成り立つ.
- $\forall a,b\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, $B\left(\mathbf{u},a\mathbf{v}+b\mathbf{w}\right)=aB\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)+bB\left(\mathbf{u},\mathbf{w}\right)$ が成り立つ.

定義 3.4.4. 体 $\mathbb{C}$ 上の vector 空間 V が与えられたとき, 双線形形式 $B:V\times V\rightarrow K$ が次のことを満たすとき, その双線形形式 B を Hermite 双線形形式, 歪対称双線形形式という.

- $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, $B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=\overline{B\left(\mathbf{w},\mathbf{v}\right)}$ が成り立つ.

ここで, 体 K が $K\subseteq\mathbb{R}$ を満たすとき, 双線形形式と共役双線形形式とは一致することに注意されたい.

定理 3.4.1. 体 K 上の vector 空間 V 上の任意の双線形形式 B が与えられたとき, その体 K の任意の族々 $\left\{a_i\right\}_{i\in\Lambda_m}$, $\left\{b_i\right\}_{i\in\Lambda_m}$, その vector 空間の任意の族々 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\Lambda_m}$, $\left\{\mathbf{w}_i\right\}_{i\in\Lambda_m}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$B\left(\sum_{i\in\Lambda_m}a_i\mathbf{v}_i,\sum_{i\in\Lambda_n}b_i\mathbf{w}_i\right)=\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}a_ib_jB\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)$$

このとき, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $B\left(\mathbf{v},\mathbf{0}\right)=B\left(\mathbf{0},\mathbf{v}\right)=0$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V 上の任意の双線形形式 B が与えられたとき, これ上の任意の双線形形式 B, その体 K の任意の族々 $\left\{a_i\right\}_{i\in\Lambda_m}$, $\left\{b_i\right\}_{i\in\Lambda_n}$, その vector 空間の任意の族々 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\Lambda_m}$, $\left\{\mathbf{w}_i\right\}_{i\in\Lambda_n}$ に対し, 数学的帰納法により直ちにわかるように次のようになる.

$$\begin{aligned}B\left(\sum_{i\in\Lambda_m}a_i\mathbf{v}_i,\sum_{i\in\Lambda_n}b_i\mathbf{w}_i\right)&=\sum_{i\in\Lambda_m}a_iB\left(\mathbf{v}_i,\sum_{j\in\Lambda_n}b_j\mathbf{w}_j\right)\\&=\sum_{i\in\Lambda_m}\sum_{j\in\Lambda_n}a_ib_jB\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\\&=\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}a_ib_jB\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\end{aligned}$$

このとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになるので,

$$\begin{aligned} B(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = B(\mathbf{v}, 0\mathbf{v}) = 0B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \\ B(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = B(0\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

$B(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = B(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = 0$ が成り立つ □

定理 3.4.2. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の任意の共役双線形形式 B が与えられたとき, その体 K の任意の族々 $\{a_i\}_{i \in \Lambda_m}$, $\{b_i\}_{i \in \Lambda_m}$, その vector 空間の任意の族々 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_m}$, $\{\mathbf{w}_i\}_{i \in \Lambda_m}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$B\left(\sum_{i \in \Lambda_m} a_i \mathbf{v}_i, \sum_{i \in \Lambda_n} b_i \mathbf{w}_i\right) = \sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \overline{a_i} b_j B(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j)$$

このとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $B(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = B(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = 0$ が成り立つ.

証明. 定理 3.4.1 と同様にして示される. □

定理 3.4.3. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 定義より $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \overline{B(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ が成り立つので, $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とおくと, $\alpha + \beta i = \alpha - \beta i$ が成り立つことになり, 即ち, $\beta = -\beta$ が成り立つ. ゆえに, $\beta = 0$ が得られるので, $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \alpha \in \mathbb{R}$ が成り立つ. □

定理 3.4.4. 体 K 上の vector 空間 V 上の任意の双線形形式たち B, C が与えられたとき, $\forall k, l \in K$ に対し, 写像 $kB + lC : V \times V \to K$ もその vector 空間 V の双線形形式である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V 上の任意の双線形形式たち B, C が与えられたとき, $\forall k, l \in K$ に対し, 写像 $kB + lC : V \times V \to K$ において, $\forall a, b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} (kB + lC)(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= kB(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) + lC(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= k(aB(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + bB(\mathbf{v}, \mathbf{w})) + l(aC(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + bC(\mathbf{v}, \mathbf{w})) \\ &= akB(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + bkB(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + alC(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + blC(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= a(kB(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + lC(\mathbf{u}, \mathbf{w})) + b(kB(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + lC(\mathbf{v}, \mathbf{w})) \\ &= a(kB + lC)(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(kB + lC)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ (kB + lC)(\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) &= kB(\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) + lC(\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) \\ &= k(aB(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + bB(\mathbf{u}, \mathbf{w})) + l(aC(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + bC(\mathbf{u}, \mathbf{w})) \\ &= akB(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + bkB(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + alC(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + blC(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ &= a(kB(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + lC(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(kB(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + lC(\mathbf{u}, \mathbf{w})) \\ &= a(kB + lC)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(kB + lC)(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

よって, その写像 $kB + lC : V \times V \to K$ もその vector 空間 V の双線形形式である. □

定理 3.4.5. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の任意の共役双線形形式たち B, C が与えられたとき, $\forall k, l \in K$ に対し, 写像 $kB + lC : V \times V \to K$ もその vector 空間 V の共役双線形形式である.

証明. 定理 3.4.4 と同様にして示される. □

定理 3.4.6. 体 K 上の vector 空間 V 上の任意の双線形形式 B が与えられたとき, 次式のように写像 C が定義されると,

$$C : V \times V \rightarrow K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto B(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

その写像 C もその vector 空間 V 上の双線形形式で, さらに, その写像 $B + C$ はその vector 空間 V 上の対称双線形形式である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V 上の任意の双線形形式 B が与えられたとき, 次式のように写像 C が定義されると,

$$C : V \times V \rightarrow K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto B(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

$\forall a, b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} C(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= B(\mathbf{w}, a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \\ &= aB(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + bB(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ &= aC(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + bC(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ C(\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) &= B(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{u}) \\ &= aB(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + bB(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \\ &= aC(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + bC(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

よって, その写像 C もその vector 空間 V の双線形形式である.

さらに, 定理 3.4.4 よりその写像 $B + C$ もその vector 空間 V の双線形形式であり, さらに, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} (B + C)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + C(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= C(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ &= B(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + C(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ &= (B + C)(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

よって, その写像 $B + C$ はその vector 空間 V 上の対称双線形形式である. □

定理 3.4.7. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の任意の共役双線形形式 B が与えられたとき, 次式のように写像 C が定義されると,

$$C : V \times V \rightarrow K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto B(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

その写像 C もその vector 空間 V 上の共役双線形形式で, さらに, その写像 $B + C$ はその vector 空間 V 上の Hermite 双線形形式である.

証明. 定理 3.4.6 と同様にして示される. □

3.4.2 双線形形式の表現行列

定義 3.4.5. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の双線形形式 B が与えられたとき, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられれば, 次式のように定義されるその集合 $\mathrm{M}(n, n, K)$ における行列 A を

その双線形形式 B のその基底 α に関する表現行列, 表現などといい,

$$A = \left(B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right) \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$$

以下, その行列 A を $[B]_\alpha$ とかく.

定義 3.4.6. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の共役双線形形式 B が与えられたとき, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられれば, 次式のように定義されるその集合 $\mathrm{M}(n, n, K)$ における行列 A をその共役双線形形式 B のその基底 α に関する表現行列, 表現などといい,

$$A = \left(B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right) \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$$

以下, その行列 A を $[B]_\alpha$ とかく.

定理 3.4.8. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の双線形形式 B が与えられたとき, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられ, さらに, その双線形形式 B のその基底 α に関する表現行列 $[B]_\alpha$ が $[B]_\alpha = \left(B_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$ と成分表示されれば, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, その体 K の族々 $\left\{ a_i \right\}_{i \in \varLambda_n}$, $\left\{ b_i \right\}_{i \in \varLambda_n}$ を用いて次のようにおくと,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_n} b_i \mathbf{v}_i$$

その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いれば, 次式が成り立つ.

$$B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right) = \sum_{i,j \in \varLambda_n} a_i b_j B_{ij} = {}^t\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v} \right) [B]_\alpha \varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{w} \right)$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の双線形形式 B が与えられたとき, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられ, さらに, その双線形形式 B のその基底 α に関する表現行列 $[B]_\alpha$ が $[B]_\alpha = \left(B_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$ と成分表示されれば, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, その体 K の族々 $\left\{ a_i \right\}_{i \in \varLambda_n}$, $\left\{ b_i \right\}_{i \in \varLambda_n}$ を用いて次のようにおくと,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_n} b_i \mathbf{v}_i$$

定理 3.4.1 より次のようになる.

$$B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right) = B\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{v}_i, \sum_{i \in \varLambda_n} b_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i,j \in \varLambda_n} a_i b_j B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right)$$

そこで, 双線形形式の表現行列の定義より $B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right) = B_{ij}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right) = \sum_{i,j \in \varLambda_n} a_i b_j B_{ij}$$

また, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いれば, 次のようになるので,

$$\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{w} \right) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
{}^{t}\varphi_{\alpha}^{-1}\left(\mathbf{v}\right)\left[B\right]_{\alpha}\varphi_{\alpha}^{-1}\left(\mathbf{w}\right) &= {}^{t}\begin{pmatrix} a_{1} \\ a_{2} \\ \vdots \\ a_{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1} \\ b_{2} \\ \vdots \\ b_{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{1} & a_{2} & \cdots & a_{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1} \\ b_{2} \\ \vdots \\ b_{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{1} & a_{2} & \cdots & a_{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{j \in \varLambda_{n}} b_{j}B_{1j} \\ \sum_{j \in \varLambda_{n}} b_{j}B_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j \in \varLambda_{n}} b_{j}B_{nj} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{n}} \sum_{j \in \varLambda_{n}} a_{i}b_{j}B_{ij} = \sum_{i,j \in \varLambda_{n}} a_{i}b_{j}B_{ij}
\end{aligned}$$

よって, 次式が成り立つ.

$$B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) = \sum_{i,j \in \varLambda_{n}} a_{i}b_{j}B_{ij} = {}^{t}\varphi_{\alpha}^{-1}\left(\mathbf{v}\right)\left[B\right]_{\alpha}\varphi_{\alpha}^{-1}\left(\mathbf{w}\right)$$

□

定理 3.4.9. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の共役双線形形式 B が与えられたとき, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_{i} \right\rangle_{i \in \varLambda_{n}}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられ, さらに, その共役双線形形式 B のその基底 α に関する表現行列 $\left[B\right]_{\alpha}$ が $\left[B\right]_{\alpha} = \left(B_{ij}\right)_{(i,j) \in \varLambda_{n}^{2}}$ と成分表示されれば, $\forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ に対し, その体 K の族々 $\left\{ a_{i} \right\}_{i \in \varLambda_{n}}$, $\left\{ b_{i} \right\}_{i \in \varLambda_{n}}$ を用いて次のようにおくと,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_{n}} a_{i}\mathbf{v}_{i}, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_{n}} b_{i}\mathbf{v}_{i}$$

その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_{α} を用いれば, 次式が成り立つ.

$$B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) = \sum_{i,j \in \varLambda_{n}} \overline{a_{i}}b_{j}B_{ij} = {}^{t}\overline{\varphi_{\alpha}^{-1}\left(\mathbf{v}\right)}\left[B\right]_{\alpha}\varphi_{\alpha}^{-1}\left(\mathbf{w}\right)$$

証明. 定理 3.4.8 と同様にして示される. □

定理 3.4.10. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_{i} \right\rangle_{i \in \varLambda_{n}}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられて, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_{α} を用いて次式のような写像 B_{A} を考えよう.

$$B_{A}: V \times V \rightarrow K; \left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) \mapsto {}^{t}\varphi_{\alpha}^{-1}\left(\mathbf{v}\right)A\varphi_{\alpha}^{-1}\left(\mathbf{w}\right)$$

このとき, 次のことが成り立つ.

- その写像 B_A はその vector 空間 V 上の双線形形式である.
- $A = \left(a_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$ とおかれれば, $\forall i,j \in \varLambda_n$ に対し, $B_A \left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right) = a_{ij}$ が成り立つ.
- $\left[B_A \right]_\alpha = A$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられれば, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いて次式のような写像 B_A を考えよう.

$$B_A : V \times V \rightarrow K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w})$$

このとき, $\forall a,b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
B_A (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= {}^t\varphi_\alpha^{-1}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) \\
&= \left(a^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{u}) + b^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \right) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) \\
&= a^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{u}) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) + b^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) \\
&= aB_A(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + bB_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
B_A (\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) &= {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{u}) A \varphi_\alpha^{-1}(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) \\
&= {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{u}) A \left(a\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) + b\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) \right) \\
&= a^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{u}) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) + b^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{u}) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) \\
&= aB_A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + bB_A(\mathbf{u}, \mathbf{w})
\end{aligned}$$

よって, その写像 B_A はその vector 空間 V 上の双線形形式である.

$A = \left(a_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$ とおかれれば, $\forall i,j \in \varLambda_n$ に対し, vector 空間 K^n の標準基底のうち第 i' 成分が 1 でこれ以外の成分が 0 であるような vector$\mathbf{e}_{i'} = \left(\begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = i' \\ 0 & \text{if} \quad i \neq i' \end{cases} \right)_{i \in \varLambda_n}$ を用いて次のようになる.

$$\begin{aligned}
B_A \left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right) &= {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}_i) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}_j) \\
&= {}^t\mathbf{e}_i A \mathbf{e}_j \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}
\end{aligned}$$

あとは, 表現行列の定義より明らかに $\left[B_A \right]_\alpha = A$ が成り立つ. □

定理 3.4.11. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられて, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いて次式のような写像 B_A を考えよう.

$$B_A : V \times V \rightarrow K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto {}^t\overline{\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})} A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w})$$

このとき, 次のことが成り立つ.

- その写像 B_A はその vector 空間 V 上の共役双線形形式である.
- $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$ とおかれれば, $\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し, $B_A(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = a_{ij}$ が成り立つ.
- $[B_A]_\alpha = A$ が成り立つ.

証明. 定理 3.4.10 と同様にして示される. □

定理 3.4.12. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の双線形形式 B が与えられたとき, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられれば, その双線形形式 B が対称双線形形式となるならそのときに限り, その双線形形式 B の基底 α に関する表現行列 $[B]_\alpha$ が対称行列となる, 即ち, $[B]_\alpha = {}^t[B]_\alpha$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の双線形形式 B が与えられたとき, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられれば, その双線形形式 B が対称双線形形式となるなら, $\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し, $B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = B(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i)$ が成り立つ. ここで, $[B]_\alpha = (B_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$ と成分表示されれば, 次のようになるので,

$$B_{ij} = B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = B(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) = B_{ji}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
[B]_\alpha &= (B_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \\
&= (B_{ji})_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \\
&= {}^t (B_{ji})_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \\
&= {}^t[B]_\alpha
\end{aligned}$$

逆に, その双線形形式 B の基底 α に関する表現行列 $[B]_\alpha$ が対称行列となる, 即ち, $[B]_\alpha = {}^t[B]_\alpha$ が成り立つなら, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いて, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 定理 3.4.8 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) [B]_\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) \\
&= {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) {}^{tt}[B]_\alpha {}^{tt}\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) \\
&= {}^t \left({}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) {}^t[B]_\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \right) \\
&= {}^t \left({}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) [B]_\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \right) \\
&= {}^tB(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\
&= B(\mathbf{w}, \mathbf{v})
\end{aligned}$$

□

定理 3.4.13. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の共役双線形形式 B が与えられたとき, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられれば, その双線形形式 B が Hermite 双線形形式となるならそのときに限り, その双線形形式 B の基底 α に関する表現行列 $[B]_\alpha$ が Hermite 行列となる, 即ち, $[B]_\alpha = [B]_\alpha^*$ が成り立つ.

証明. 定理 3.4.12 と同様にして示される. □

定理 3.4.14. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の双線形形式 B が与えられたとき, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\beta = \left\langle \mathbf{w}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底たち α, β がとられれば, 次式が成り立つ.

$$[B]_\alpha = {}^t \left[I_V \right]_\alpha^\beta [B]_\beta \left[I_V \right]_\alpha^\beta$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の双線形形式 B が与えられたとき, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\beta = \left\langle \mathbf{w}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底たち α, β がとられれば, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いて, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 定理 3.4.8 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= {}^t \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{v}) [B]_\beta \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}) \\
&= {}^t \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) [B]_\beta \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) \\
&= {}^t \varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \left(\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \right) [B]_\beta \varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \left(\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) \right) \\
&= {}^t \left(\left[I_V \right]_\alpha^\beta \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \right) [B]_\beta \left(\left[I_V \right]_\alpha^\beta \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w}) \right) \\
&= {}^t \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) {}^t \left[I_V \right]_\alpha^\beta [B]_\beta \left[I_V \right]_\alpha^\beta \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w})
\end{aligned}$$

ここで, 定理 3.4.10 より次式が成り立つ.

$$[B]_\alpha = {}^t \left[I_V \right]_\alpha^\beta [B]_\beta \left[I_V \right]_\alpha^\beta$$

□

定理 3.4.15. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の共役双線形形式 B が与えられたとき, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\beta = \left\langle \mathbf{w}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底たち α, β がとられれば, 次式が成り立つ.

$$[B]_\alpha = \left[I_V \right]_\alpha^{\beta *} [B]_\beta \left[I_V \right]_\alpha^\beta$$

証明. 定理 3.4.14 と同様にして示される. □

定理 3.4.16. 体 K 上の vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \left(B(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \right)$$

証明. 体 K 上の vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) &= B(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) + B(\mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\
&= B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + 2B(\mathbf{v}, \mathbf{w})
\end{aligned}$$

次式が成り立つ.

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \left(B(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \right)$$

□

定理 3.4.17. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{Re}B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) = \frac{1}{2}\left(B\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) - B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\right)$$

証明. $\forall a \in \mathbb{C}$ に対し, $a + \overline{a} = 2\mathrm{Re}a$ が成り立つことに注意すれば, 定理 3.4.16 と同様にして示される. □

3.4.3 2 次形式と Hermite 形式

定義 3.4.7. 体 K 上の vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B が与えられたとき, 次式のように定義される写像 q をその対称双線形形式 B から定まるその vector 空間 V 上の 2 次形式という.

$$q : V \to K; \mathbf{v} \mapsto B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$$

逆に, その対称双線形形式 B をその 2 次形式 q の極形式という.

定義 3.4.8. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B が与えられたとき, 次式のように定義される写像 q をその Hermite 双線形形式 B から定まるその vector 空間 V 上の Hermite 形式という.

$$q : V \to K; \mathbf{v} \mapsto B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$$

逆に, その Hermite 双線形形式 B をその Hermite 形式 q の極形式という.

もちろん, $K \subseteq \mathbb{R}$ のときは 2 次形式と Hermite 形式とは一致する.

定理 3.4.18. 体 K 上の vector 空間 V 上の任意の 2 次形式 q が与えられたとき, ある極形式, 即ち, 対称双線形形式 B が一意的に存在して, その 2 次形式 q がその極形式 B から定まるその vector 空間 V 上の 2 次形式である. また, その極形式 B は次のように与えられる.

$$B : V \times V \to K; \left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \mapsto \frac{1}{2}\left(q\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - q\left(\mathbf{v}\right) - q\left(\mathbf{w}\right)\right)$$

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の任意の 2 次形式 q が与えられたとき, 定義よりその vector 空間 V 上のある対称双線形形式が存在して, 次式が成り立つ.

$$q : V \to K; \mathbf{v} \mapsto B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$$

このとき, 定理 3.4.16 より $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= \frac{1}{2}\left(B\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) - B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(q\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - q\left(\mathbf{v}\right) - q\left(\mathbf{w}\right)\right) \end{aligned}$$

□

定理 3.4.19. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の任意の Hermite 形式 q が与えられたとき, ある極形式, 即ち, Hermite 双線形形式 B が一意的に存在して, その Hermite 形式 q がその極形式 B から定まるその vector 空間 V 上の Hermite 形式である. また, その極形式 B は次のように与えられる.

$$B : V \times V \to K; \left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \mapsto \frac{1}{2}\left(q\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - q\left(\mathbf{v}\right) - q\left(\mathbf{w}\right) + iq\left(i\mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - iq\left(i\mathbf{v}\right) - iq\left(\mathbf{w}\right)\right)$$

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の任意の Hermite 形式 q が与えられたとき, 定義よりその vector 空間 V 上のある Hermite 双線形形式が存在して, 次式が成り立つ.

$$q : V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$$

$K \subseteq \mathbb{R}$ のとき, 定理 3.4.17 より $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= \mathrm{Re} B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(B\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) - B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(q\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - q\left(\mathbf{v}\right) - q\left(\mathbf{w}\right)\right) \end{aligned}$$

一方で, $\mathbb{R} \subset K$ のとき, 定理 3.4.17 より $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つかつ,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= \frac{1}{2}\left(B\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) - B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(q\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - q\left(\mathbf{v}\right) - q\left(\mathbf{w}\right)\right) \end{aligned}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= \mathrm{Re}\left(-iB\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right)\right) \\ &= \mathrm{Re}\bar{i}B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \\ &= \mathrm{Re} B\left(i\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(B\left(i\mathbf{v}+\mathbf{w}, i\mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - B\left(i\mathbf{v}, i\mathbf{v}\right) - B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(q\left(i\mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - q\left(i\mathbf{v}\right) - q\left(\mathbf{w}\right)\right) \end{aligned}$$

以上より, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようにおかれればよい.

$$B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) = \frac{1}{2}\left(q\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - q\left(\mathbf{v}\right) - q\left(\mathbf{w}\right) + iq\left(i\mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - iq\left(i\mathbf{v}\right) - iq\left(\mathbf{w}\right)\right)$$

□

3.4.4 2 次形式と Hermite 形式の表現行列

定義 3.4.9. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の 2 次形式 q が与えられたとき, これの極形式を B とおくと, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられれば, 次式のように定義されるその集合 $\mathrm{M}(n, n, K)$ における行列 A をその 2 次形式 q のその基底 α に関する表現行列, 表現などといい,

$$A = \left(B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right)\right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$$

以下, その行列 A を $[q]_\alpha$ とかく.

定義 3.4.10. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の Hermite 形式 q が与えられたとき, これの極形式を B とおくと, $\alpha = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられれば, 次式のように定義されるその集合 $\mathrm{M}(n, n, K)$ における行列 A をその Hermite 形式 q のその基底 α に関する表現行列, 表現などといい,

$$A = \left(B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right)\right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$$

以下, その行列 A を $[q]_\alpha$ とかく.

定理 3.4.20. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の 2 次形式 q が与えられたとき, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられ, さらに, その 2 次形式 q のその基底 α に関する表現行列 $[q]_\alpha$ が $[q]_\alpha = \left(q_{ij} \right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2}$ と成分表示されれば, これは対称行列であり, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その体 K の族々 $\left\{ a_i \right\}_{i \in \Lambda_n}$ を用いて次のようにおくと,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{v}_i$$

その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いれば, 次式が成り立つ.

$$q(\mathbf{v}) = \sum_{i,j \in \Lambda_n} a_i a_j q_{ij} =^t \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) [q]_\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})$$

逆に, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が対称行列であるとき, 次式のような写像 q_A を考えよう.

$$q_A : V \to K; \mathbf{v} \mapsto^t \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})$$

このとき, その写像 q_A はその vector 空間 V 上の 2 次形式である.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の 2 次形式 q が与えられたとき, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられ, さらに, その 2 次形式 q のその基底 α に関する表現行列 $[q]_\alpha$ が $[q]_\alpha = \left(q_{ij} \right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2}$ と成分表示されれば, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その体 K の族々 $\left\{ a_i \right\}_{i \in \Lambda_n}$ を用いて次のようにおくと,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{v}_i$$

その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いれば, 定義よりその 2 次形式 q の極形式 B を用いて定義より $[q]_\alpha = [B]_\alpha$ が成り立つので, 定理 3.4.8 より次のようになる.

$$\begin{aligned} q(\mathbf{v}) &= B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= \sum_{i,j \in \Lambda_n} a_i a_j q_{ij} \\ &=^t \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) [q]_\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

さらに, 定理 3.4.12 よりその 2 次形式 q のその基底 α に関する表現行列 $[q]_\alpha$ は対称行列である.

逆に, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が対称行列であるとき, 次式のような写像 q_A を考えよう.

$$q_A : V \to K; \mathbf{v} \mapsto^t \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})$$

これの代わりに次式のような写像 B_A が考えられれば,

$$B_A : V \times V \to K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto^t \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{w})$$

定理 3.4.10 より次のことが成り立つ.

- その写像 B_A はその vector 空間 V 上の双線形形式である.
- $A = \left(a_{ij} \right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2}$ とおかれれば, $\forall i,j \in \Lambda_n$ に対し, $B_A(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = a_{ij}$ が成り立つ.
- $\left[B_A \right]_\alpha = A$ が成り立つ.

さらに, 定理 3.4.12 よりその双線形形式 B_A は対称双線形形式でもある. 以上より, 定義から直ちにその対称双線形形式 B_A から定まる 2 次形式がまさしく先ほどの写像 q_A となる. $\square$

定理 3.4.21. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の任意の Hermite 形式 q が与えられたとき, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられ, さらに, その Hermite 形式 q のその基底 α に関する表現行列 $[q]_\alpha$ が $[q]_\alpha = (q_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$ と成分表示されれば, これは Hermite 行列であり, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その体 K の族々 $\{a_i\}_{i \in \varLambda_n}$ を用いて次のようにおくと,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{v}_i$$

その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いれば, 次式が成り立つ.

$$q(\mathbf{v}) = \sum_{i,j \in \varLambda_n} \overline{a_i} a_j q_{ij} = {}^t\overline{\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})}[q]_\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})$$

逆に, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が Hermite 行列であるとき, 次式のような写像 q_A を考えよう.

$$q_A : V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto {}^t\overline{\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})} A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})$$

このとき, その写像 q_A はその vector 空間 V 上の Hermite 形式である.

証明. 定理 3.4.20 と同様にして示される. □

定理 3.4.22. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられ, さらに, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が対称行列であるとき, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いた次式のような写像たち q_A, q_B が考えられれば,

$$\begin{aligned}
q_A &: V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \\
q_B &: V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) B \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

$q_A = q_B$ が成り立つなら, $A = B$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられ, さらに, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が対称行列であるとき, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いた次式のような写像たち q_A, q_B が考えられれば,

$$\begin{aligned}
q_A &: V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) A \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \\
q_B &: V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) B \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

これらは定理 3.4.20 よりその vector 空間 V 上の 2 次形式となり, $q_A = q_B$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $q_A(\mathbf{v}) = q_B(\mathbf{v})$ が成り立つことになり, 定理 3.4.18 よりそれらの 2 次形式たち q_A, q_B の極形式 B_A, B_B について, $\forall(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times V$ に対し, 次式が成り立つことから,

$$\begin{aligned}
B_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \frac{1}{2}(q_A(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - q_A(\mathbf{v}) - q_A(\mathbf{w})) \\
&= \frac{1}{2}(q_B(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - q_B(\mathbf{v}) - q_B(\mathbf{w})) \\
&= B_B(\mathbf{v}, \mathbf{w})
\end{aligned}$$

$B_A = B_B$ が成り立つ. したがって, 定義より次のようになるので,

$$A = (B_A(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(B_B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right)\right)_{(i,j)\in\Lambda_n^2} \\
&= B
\end{aligned}
$$

$A = B$ が得られる. □

定理 3.4.23. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\alpha = \langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられ, さらに, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が Hermite 行列であるとき, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いた次式のような写像たち q_A, q_B が考えられれば,

$$
\begin{aligned}
q_A &: V \to K; \mathbf{v} \mapsto {}^t\overline{\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v}\right)}A\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v}\right) \\
q_B &: V \to K; \mathbf{v} \mapsto {}^t\overline{\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v}\right)}B\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}
$$

$q_A = q_B$ が成り立つなら, $A = B$ が成り立つ.

証明. 定理 3.4.22 と同様にして示される. □

定理 3.4.24. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, これ上の任意の双線形形式 B を用いて次式のように写像 q が定義されれば,

$$
q: V \to K; \mathbf{v} \mapsto B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)
$$

その写像 q は 2 次形式であり, さらに, その極形式 C は次式のように与えられる.

$$
C: V \times V \to K; \left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \mapsto \frac{1}{2}\left(B\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) - B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\right)
$$

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, これ上の任意の双線形形式 B を用いて次式のように写像 q が定義されよう.

$$
q: V \to K; \mathbf{v} \mapsto B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)
$$

このとき, 次式のような写像 C が考えられれば,

$$
C: V \times V \to K; \left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \mapsto \frac{1}{2}\left(B\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\right) - B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) - B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\right)
$$

$\forall a, b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになるかつ,

$$
\begin{aligned}
C\left(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= \frac{1}{2}\left(B\left(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+\mathbf{w}, a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)\right. \\
&\quad \left. -B\left(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}, a\mathbf{u}+b\mathbf{v}\right) - B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(a^2B\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}\right) + abB\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) + aB\left(\mathbf{u}, \mathbf{w}\right) + abB\left(\mathbf{v}, \mathbf{u}\right) + b^2B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) \\
&\quad + bB\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) + aB\left(\mathbf{w}, \mathbf{u}\right) + bB\left(\mathbf{w}, \mathbf{v}\right) + B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right) \\
&\quad -a^2B\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}\right) - abB\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) - abB\left(\mathbf{v}, \mathbf{u}\right) - b^2B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) - B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(aB\left(\mathbf{u}, \mathbf{w}\right) + bB\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) + aB\left(\mathbf{w}, \mathbf{u}\right) + bB\left(\mathbf{w}, \mathbf{v}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(aB\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}\right) + aB\left(\mathbf{u}, \mathbf{w}\right) + aB\left(\mathbf{w}, \mathbf{u}\right) + aB\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right) - aB\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}\right) - aB\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\right. \\
&\quad \left. +bB\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) + bB\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) + bB\left(\mathbf{w}, \mathbf{v}\right) + bB\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right) - bB\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) - bB\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(aB\left(\mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{u}+\mathbf{w}\right) - aB\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}\right) - aB\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+bB(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})-bB(\mathbf{v},\mathbf{v})-bB(\mathbf{w},\mathbf{w}))\\
&=a\cdot\frac{1}{2}(B(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{u}+\mathbf{w})-B(\mathbf{u},\mathbf{u})-B(\mathbf{w},\mathbf{w}))\\
&\quad+b\cdot\frac{1}{2}(B(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})-B(\mathbf{v},\mathbf{v})-B(\mathbf{w},\mathbf{w}))\\
&=aC(\mathbf{u},\mathbf{w})+bC(\mathbf{v},\mathbf{w})
\end{aligned}
$$

$\forall a,b\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
C(\mathbf{u},a\mathbf{v}+b\mathbf{w})&=\frac{1}{2}(B(\mathbf{u}+a\mathbf{v}+b\mathbf{w},\mathbf{u}+a\mathbf{v}+b\mathbf{w})-B(\mathbf{u},\mathbf{u})-B(a\mathbf{v}+b\mathbf{w},a\mathbf{v}+b\mathbf{w}))\\
&=\frac{1}{2}(B(\mathbf{u},\mathbf{u})+aB(\mathbf{u},\mathbf{v})+bB(\mathbf{u},\mathbf{w})+aB(\mathbf{v},\mathbf{u})\\
&\quad+a^2B(\mathbf{v},\mathbf{v})+abB(\mathbf{v},\mathbf{w})+bB(\mathbf{w},\mathbf{u})+abB(\mathbf{w},\mathbf{v})+b^2B(\mathbf{w},\mathbf{w})\\
&\quad-B(\mathbf{u},\mathbf{u})-a^2B(\mathbf{v},\mathbf{v})-abB(\mathbf{v},\mathbf{w})-abB(\mathbf{w},\mathbf{v})-b^2B(\mathbf{w},\mathbf{w})\big)\\
&=\frac{1}{2}(aB(\mathbf{u},\mathbf{v})+bB(\mathbf{u},\mathbf{w})+aB(\mathbf{v},\mathbf{u})+bB(\mathbf{w},\mathbf{u}))\\
&=\frac{1}{2}(aB(\mathbf{u},\mathbf{u})+aB(\mathbf{u},\mathbf{v})+aB(\mathbf{v},\mathbf{u})+aB(\mathbf{v},\mathbf{v})-aB(\mathbf{u},\mathbf{u})-aB(\mathbf{v},\mathbf{v})\\
&\quad+bB(\mathbf{u},\mathbf{u})+bB(\mathbf{u},\mathbf{w})+bB(\mathbf{w},\mathbf{u})+bB(\mathbf{w},\mathbf{w})-bB(\mathbf{u},\mathbf{u})-bB(\mathbf{w},\mathbf{w}))\\
&=\frac{1}{2}(aB(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v})-aB(\mathbf{u},\mathbf{u})-aB(\mathbf{v},\mathbf{v})\\
&\quad+bB(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{u}+\mathbf{w})-bB(\mathbf{u},\mathbf{u})-bB(\mathbf{w},\mathbf{w}))\\
&=a\cdot\frac{1}{2}(B(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v})-B(\mathbf{u},\mathbf{u})-B(\mathbf{v},\mathbf{v}))\\
&\quad+b\cdot\frac{1}{2}(B(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{u}+\mathbf{w})-B(\mathbf{u},\mathbf{u})-B(\mathbf{w},\mathbf{w}))\\
&=aC(\mathbf{u},\mathbf{v})+bC(\mathbf{u},\mathbf{w})
\end{aligned}
$$

その写像 C は双線形形式である.

さらに, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次のようになることから,

$$
\begin{aligned}
C(\mathbf{v},\mathbf{w})&=\frac{1}{2}(B(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})-B(\mathbf{v},\mathbf{v})-B(\mathbf{w},\mathbf{w}))\\
&=\frac{1}{2}(B(\mathbf{w}+\mathbf{v},\mathbf{w}+\mathbf{v})-B(\mathbf{w},\mathbf{w})-B(\mathbf{v},\mathbf{v}))\\
&=C(\mathbf{w},\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

その双線形形式 C は対称双線形形式でもある.

そこで, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次のようになることから,

$$
\begin{aligned}
q(\mathbf{v})&=B(\mathbf{v},\mathbf{v})\\
&=\frac{1}{2}\cdot 2B(\mathbf{v},\mathbf{v})\\
&=\frac{1}{2}(4B(\mathbf{v},\mathbf{v})-2B(\mathbf{v},\mathbf{v}))\\
&=\frac{1}{2}(B(\mathbf{v}+\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{v})-B(\mathbf{v},\mathbf{v})-B(\mathbf{v},\mathbf{v}))=C(\mathbf{v},\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

その写像 q はその vector 空間 V 上の 2 次形式となり, その対称双線形形式 C がその 2 次形式の極形式である. $\square$

定理 3.4.25. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, これ上の任意の共役双線形形式 B を用いて次式のように写像 q が定義されれば,

$$q : V \to K; \mathbf{v} \mapsto B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

その写像 q は Hermite 形式であり, さらに, その極形式 C は次式のように与えられる.

$$C : V \times V \to K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \frac{1}{2}\left(B(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + iB(i\mathbf{v}+\mathbf{w}, i\mathbf{v}+\mathbf{w}) - iB(i\mathbf{v}, i\mathbf{v}) - iB(\mathbf{w}, \mathbf{w})\right)$$

証明. 定理 3.4.24 と同様にして示される. □

3.4.5 直交基底

定義 3.4.11. 体 K 上の vector 空間 V 上の対称双線形形式 B が与えられたとき, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ なる vectors$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ が $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ を満たすとき, その vecotrs$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ はその対称双線形形式 B に関して直交するという.

定義 3.4.12. 体 K 上の vector 空間 V 上の対称双線形形式 B が与えられたとき, その vector 空間 V の基底 $\mathcal{B}$ に属するどの 2 つの vectors がその対称双線形形式 B に関して直交しているとき, その基底 $\mathcal{B}$ をその vector 空間 V のその対称双線形形式 B に関する直交基底という.

定義 3.4.13. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の Hermite 双線形形式 B が与えられたとき, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ なる vectors$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ が $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ を満たすとき, その vecotrs$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ はその Hermite 双線形形式 B に関して直交するという.

定義 3.4.14. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の Hermite 双線形形式 B が与えられたとき, その vector 空間 V の基底 $\mathcal{B}$ に属するどの 2 つの vectors がその Hermite 双線形形式 B に関して直交しているとき, その基底 $\mathcal{B}$ をその vector 空間 V のその Hermite 双線形形式 B に関する直交基底という.

定理 3.4.26. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の対称双線形形式 B が与えられたとき, その vector 空間 V の基底 α がその対称双線形形式 B に関する直交基底であるならそのときに限り, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれれば, その基底 α に関するその対称双線形形式 B の表現行列 $[B]_\alpha$ が次式のような対角行列である.

$$[B]_\alpha = \begin{pmatrix} B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & & & O \\ & B(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{pmatrix}$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の対称双線形形式 B が与えられたとき, その vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ がその対称双線形形式 B に関する直交基底であるなら, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれ定理 3.4.8, 定理 3.4.10 よりその基底 α に関するその対称双線形形式 B の表現行列 $[B]_\alpha$ が $[B]_\alpha = (B_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_n^2}$ とおかれれば, $\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し, $B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = B_{ij}$ が成り立つ. そこで, $i \neq j$ が成り立つなら, $B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ が成り立つかつ, $i = j$ が成り立つなら, $B_{ij} = B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ が成り立つので, その基底 α に関するその対称双線形形式 B の表現行列 $[B]_\alpha$ が次式のような対角行列である.

$$[B]_\alpha = \begin{pmatrix} B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & & & O \\ & B(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{pmatrix}$$

逆に, その基底 α に関するその対称双線形形式 B の表現行列 $[B]_\alpha$ が次式のような対角行列であるなら,

$$[B]_\alpha = \begin{pmatrix} B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & & & O \\ & B(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{pmatrix}$$

定理 3.4.8, 定理 3.4.10 より $\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し, $B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = B_{ij}$ が成り立ち, そこで, $i \neq j$ が成り立つなら, $B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ が成り立つので, その vector 空間 V の基底 α がその対称双線形形式 B に関する直交基底である. □

定理 3.4.27. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の Hermite 双線形形式 B が与えられたとき, その vector 空間 V の基底 α がその Hermite 双線形形式 B に関する直交基底であるならそのときに限り, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれれば, その基底 α に関するその Hermite 双線形形式 B の表現行列 $[B]_\alpha$ が次式のような対角行列である.

$$[B]_\alpha = \begin{pmatrix} B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & & & O \\ & B(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{pmatrix}$$

なお, 定理 3.4.3 よりその対角行列の対角成分いづれも実数であることに注意しておこう.

証明. 定理 3.4.26 と同様にして示される. □

定理 3.4.28. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底が存在する.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間上の任意の対称双線形形式 B に対し, $n = 1$ のときは明らかである. $n = k$ のとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底が存在すると仮定しよう. $n = k + 1$ のとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 定理 3.4.16 より次のようになる.

$$\begin{aligned} B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\left(B(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{w}, \mathbf{w})\right) \\ &= \frac{1}{2}(0 - 0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

これにより, もちろん, その vector 空間 V の基底がどのようにとられてもこれは直交基底となる.

$\exists \mathbf{v} \in V$ に対し, $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$ が成り立つなら, その元が $\mathbf{v}'$ とおかれ, さらに, 次式のようにおかれれば,

$$W = \{\mathbf{w} \in V | B(\mathbf{v}', \mathbf{w}) = 0\}$$

もちろん, $\mathbf{0} \in W$ が成り立つかつ, $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ に対し, 次のようになることから,

$$B(\mathbf{v}', k\mathbf{v} + l\mathbf{w}) = kB(\mathbf{v}', \mathbf{v}) + lB(\mathbf{v}', \mathbf{w}) = 0$$

$k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \in W$ が成り立つので, 定理 1.1.9 よりその集合 W はその vector 空間 V の部分 vector 空間である. そこで, $B(\mathbf{v}', \mathbf{v}') \neq 0$ が成り立つことに注意すれば, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$B\left(\mathbf{v}', \mathbf{v} - \frac{B(\mathbf{v}', \mathbf{v})}{B(\mathbf{v}', \mathbf{v}')}\mathbf{v}'\right) = B(\mathbf{v}', \mathbf{v}) - \frac{B(\mathbf{v}', \mathbf{v})}{B(\mathbf{v}', \mathbf{v}')}B(\mathbf{v}', \mathbf{v}')$$

$$= B(\mathbf{v}', \mathbf{v}) - B(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = 0$$

これにより, $\mathbf{v} - \dfrac{B(\mathbf{v}', \mathbf{v})}{B(\mathbf{v}', \mathbf{v}')}\mathbf{v}' \in W$ が成り立つので, $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\{\mathbf{v}'\} + W$ が得られる. これにより, $V \subseteq \mathrm{span}\{\mathbf{v}'\} + W$ が成り立つ. もちろん, $\mathrm{span}\{\mathbf{v}'\} + W \subseteq V$ が成り立つので, $V = \mathrm{span}\{\mathbf{v}'\} + W$ が得られる. そこで, $B(\mathbf{v}', \mathbf{v}') \neq 0$ が成り立つので, $\mathbf{v}' \notin W$ が成り立つことから, $\mathrm{span}\{\mathbf{v}'\} \cap W = \{\mathbf{0}\}$ が得られ, したがって, $V = \mathrm{span}\{\mathbf{v}'\} \oplus W$ が成り立つ. ゆえに, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\dim W &= \dim \mathrm{span}\{\mathbf{v}'\} + \dim W - \dim \mathrm{span}\{\mathbf{v}'\} \\
&= \dim \mathrm{span}\{\mathbf{v}'\} \oplus W - 1 \\
&= \dim V - 1 \\
&= k + 1 - 1 = k
\end{aligned}$$

仮定よりその vector 空間 W のその対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が存在する. しかも, その基底に含まれる任意の vectors はその vector$\mathbf{v}'$ とその対称双線形形式 B と直交するので, その基底 $\mathcal{B}$ にその vector$\mathbf{v}'$ を付け加えたものがその vector 空間 V の直交基底となる.

以上, いかなる場合でも, その $k+1$ 次元 vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底が存在するので, 数学的帰納法により n 次元 vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底が存在することが示された. □

定理 3.4.29. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B に関する直交基底が存在する.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間上の任意の Hermite 双線形形式 B に対し, $n=1$ のときは明らかである. $n=k$ のとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B に関する直交基底が存在すると仮定しよう. $n=k+1$ のとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 定理 3.4.17 より次のようになることから,

$$\mathrm{Re}B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\left(B(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{w}, \mathbf{w})\right)$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathrm{Re}B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + i\mathrm{Im}B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
&= \mathrm{Re}B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + i\mathrm{Re}\left(-iB(\mathbf{v}, \mathbf{w})\right) \\
&= \mathrm{Re}B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + i\mathrm{Re}B(i\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
&= \frac{1}{2}\left(B(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{w}, \mathbf{w})\right) \\
&\quad + \frac{i}{2}\left(B(i\mathbf{v}+\mathbf{w}, i\mathbf{v}+\mathbf{w}) - B(i\mathbf{v}, i\mathbf{v}) - B(\mathbf{w}, \mathbf{w})\right) \\
&= \frac{1}{2}(0-0-0) + \frac{i}{2}(0-0-0) = 0
\end{aligned}$$

これにより, もちろん, その vector 空間 V の基底がどのようにとられてもこれは直交基底となる.

$\exists \mathbf{v} \in V$ に対し, $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$ が成り立つなら, その元が $\mathbf{v}'$ とおかれ, さらに, 次式のようにおかれれば,

$$W = \left\{\mathbf{w} \in V \middle| B(\mathbf{v}', \mathbf{w}) = 0\right\}$$

もちろん, $\mathbf{0}\in W$ が成り立つかつ, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, 次のようになることから,

$$B\left(\mathbf{v}',k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\right)=kB\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}\right)+lB\left(\mathbf{v}',\mathbf{w}\right)=0$$

$k\mathbf{v}+l\mathbf{w}\in W$ が成り立つので, その集合 W はその vector 空間 V の部分 vector 空間である. そこで, $B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}'\right)\neq 0$ が成り立つことに注意すれば, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}-\frac{B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}\right)}{B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}'\right)}\mathbf{v}'\right)&=B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}\right)-\frac{B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}\right)}{B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}'\right)}B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}'\right)\\&=B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}\right)-B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}\right)=0\end{aligned}$$

これにより, $\mathbf{v}-\dfrac{B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}\right)}{B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}'\right)}\mathbf{v}'\in W$ が成り立つので, $\mathbf{v}\in\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}'\right\}+W$ が得られる. これにより, $V\subseteq\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}'\right\}+W$ が成り立つ. もちろん, $\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}'\right\}+W\subseteq V$ が成り立つので, $V=\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}'\right\}+W$ が得られる. そこで, $B\left(\mathbf{v}',\mathbf{v}'\right)\neq 0$ が成り立つので, $\mathbf{v}'\notin W$ が成り立つことから, $\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}'\right\}\cap W=\{\mathbf{0}\}$ が得られ, したがって, $V=\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}'\right\}\oplus W$ が成り立つ. ゆえに, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}\dim W&=\dim\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}'\right\}+\dim W-\dim\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}'\right\}\\&=\dim\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}'\right\}\oplus W-1\\&=\dim V-1\\&=k+1-1=k\end{aligned}$$

仮定よりその vector 空間 W のその Hermite 双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が存在する. しかも, その基底に含まれる任意の vectors はその vector$\mathbf{v}'$ とその Hermite 双線形形式 B と直交するので, その基底 $\mathcal{B}$ にその vector$\mathbf{v}'$ を付け加えたものがその vector 空間 V の直交基底となる.

以上, いかなる場合でも, その $k+1$ 次元 vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B に関する直交基底が存在するので, 数学的帰納法により n 次元 vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B に関する直交基底が存在することが示された. □

定理 3.4.30. 体 K 上で $\forall A\in\mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が対称行列であるとき, $\exists P\in\mathrm{GL}(n,K)$ に対し, 行列 ${}^tPAP$ は対角行列となる.

証明. 体 K 上で $\forall A\in\mathrm{M}(n,n,K)$ に対し, その行列 A が対称行列であるとき, 次式のような写像 B_A を考えよう.

$$B_A:K^n\times K^n\rightarrow K;(\mathbf{v},\mathbf{w})\mapsto^t\mathbf{v}A\mathbf{w}$$

このとき, 定理 3.4.10 より次のことが成り立つ.

- その写像 B_A はその vector 空間 K^n 上の双線形形式である.
- 標準直交基底 ε を用いた $\left[B_A\right]_\varepsilon=A$ が成り立つ.

そこで, 定理 3.4.12 よりその双線形形式 B_A が対称双線形形式となるならそのときに限り, その双線形形式 B_A の表現行列 $\left[B_A\right]_\varepsilon$ が対称行列となるのであったので, その双線形形式 B_A は対称双線形形式となる. そこで, 定理 3.4.28 よりその vector 空間 K^n 上のその対称双線形形式 B_A に関する直交基底が存在するので, これが $\mathcal{B}$ とおかれると, 定理 3.4.26 よりその基底 $\mathcal{B}$ がその対称双線形形式 B_A に関する直交基底であるならその

ときに限り, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれれば, その基底 $\mathcal{B}$ に関するその対称双線形形式 B_A の表現行列 $[B_A]_{\mathcal{B}}$ が次式のような対角行列である.

$$[B_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B_A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & & & O \\ & B_A(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_A(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{pmatrix}$$

定理 3.4.14 より次式が成り立つので,

$$[B_A]_{\mathcal{B}} = {}^t [I_{K^n}]_{\mathcal{B}}^{\varepsilon} [B_A]_{\varepsilon} [I_{K^n}]_{\mathcal{B}}^{\varepsilon}$$

その行列 $[I_{K^n}]_{\mathcal{B}}^{\varepsilon}$ が $[I_{K^n}]_{\mathcal{B}}^{\varepsilon} \in \mathrm{GL}(n, K)$ を満たす, 即ち, 正則行列であることに注意すれば, これを P とおくことで, 次式が得られる.

$${}^t PAP = \begin{pmatrix} B_A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & & & O \\ & B_A(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_A(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{pmatrix}$$

よって, $\exists P \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, その行列 ${}^t PAP$ は対角行列となる. □

定理 3.4.31. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上で $\forall A \in \mathrm{M}(n, n, K)$ に対し, その行列 A が Hermite 行列であるとき, $\exists P \in \mathrm{GL}(n, K)$ に対し, 行列 $P^* AP$ は対角行列となる.

証明. 定理 3.4.30 と同様にして示される. □

定理 3.4.32. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれると, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようにおかれれば,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_n} b_i \mathbf{v}_i$$

次式が成り立つ.

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i b_i B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$$

特に, 次式が成り立つ.

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i^2 B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれると, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようにおかれれば,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_n} b_i \mathbf{v}_i$$

$\forall (i, j) \in \Lambda_n^2$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになる.

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B\left(\sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{v}_i, \sum_{i \in \Lambda_n} b_i \mathbf{v}_i \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \Lambda_n} \sum_{j \in \Lambda_n} a_i b_j B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) \\
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda_n^2, i=j} a_i b_j B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) + \sum_{(i,j) \in \Lambda_n^2, i \neq j} a_i b_j B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) \\
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda_n^2, i=j} a_i b_j B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) + \sum_{(i,j) \in \Lambda_n^2, i \neq j} a_i b_j 0 \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} a_i b_i B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)
\end{aligned}
$$

特に, 次式が成り立つ.

$$
B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i^2 B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)
$$

□

定理 3.4.33. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれると, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようにおかれれば,

$$
\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_n} b_i \mathbf{v}_i
$$

次式が成り立つ.

$$
B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i \in \Lambda_n} \overline{a_i} b_i B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)
$$

特に, 次式が成り立つ.

$$
B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i \in \Lambda_n} \left|v_i\right|^2 B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)
$$

証明. 定理 3.4.32 と同様にして示される. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p319-333 ISBN978-4-00-029872-8

3.5 Sylvester の慣性法則

3.5.1 Sylvester の慣性法則

定義 3.5.1. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B について, もちろん, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ が成り立つので, 次のように定義されよう[*19].

- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 \leq B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つとき, その対称双線形形式 B は半正値であるという.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $0 < B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つとき, その対称双線形形式 B は正値であるという.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 \geq B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つとき, その対称双線形形式 B は半負値であるという.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $0 > B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つとき, その対称双線形形式 B は負値であるという.

定義 3.5.2. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B について, 定理 3.4.3 より $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ が成り立つ. これにより, 大小関係で比較できることになるので, 次のように定義されよう[*20].

- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 \leq B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つとき, その Hermite 双線形形式 B は半正値であるという.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $0 < B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つとき, その Hermite 双線形形式 B は正値であるという.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 \geq B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つとき, その Hermite 双線形形式 B は半負値であるという.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $0 > B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つとき, その Hermite 双線形形式 B は負値であるという.

定理 3.5.1. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, 次のことが成り立つ.

- その対称双線形形式 B が半正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ が成り立つ.
- その対称双線形形式 B が正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 < B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ が成り立つ.
- その対称双線形形式 B が半負値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \geq B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ が成り立つ.
- その対称双線形形式 B が負値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 > B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, その対称双線形形式 B が半正値であるなら, もちろん, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ が成り立つ. 逆に, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ が成り立つなら,

[*19] $\mathbb{R} \subset K$ のときでは, $\forall a \in K$ に対し, $0 \leq a^2$ が成り立つとはいえないので, あまりうまく定義されない. なお, 書籍によっては半正値, 正値, 半負値, 負値をそれぞれ正値, 真正値, 負値, 真負値としていることもある.

[*20] これも同様に, 書籍によっては半正値, 正値, 半負値, 負値をそれぞれ正値, 真正値, 負値, 真負値としていることもある.

$\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようにおかれれば,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{v}_i$$

$\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq a_i^2$ が成り立つので, $0 \leq a_i^2 B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が得られる. これにより, $0 \leq \sum_{i \in \varLambda_n} a_i^2 B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が得られ, 定理 3.4.32 より次式が成り立つので,

$$B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i^2 B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$$

$\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 \leq B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$ が成り立つ, 即ち, その対称双線形形式 B は半正値である.

その対称双線形形式 B が正値であるなら, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ が成り立つので, $0 < B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ. 逆に, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 < B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようにおかれれば,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{v}_i$$

$\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq a_i^2$ が成り立つので, $0 \leq a_i^2 B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が得られる. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\exists i \in \varLambda_n$ に対し, $a_i \neq 0$ が成り立つことに注意すると, $\exists i \in \varLambda_n$ に対し, $0 < a_i^2 B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ. これにより, $0 < \sum_{i \in \varLambda_n} a_i^2 B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が得られ, 定理 3.4.32 より次式が成り立つので,

$$B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i^2 B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$$

$\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 < B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$ が成り立つ, 即ち, その対称双線形形式 B は正値である.

以上の議論により, 次のことが成り立つ.

- その対称双線形形式 B が半正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.
- その対称双線形形式 B が正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 < B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.

同様にして, 次のことが示される.

- その対称双線形形式 B が半負値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \geq B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.
- その対称双線形形式 B が負値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 > B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.

□

定理 3.5.2. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, 次のことが成り立つ.

- その Hermite 双線形形式 B が半正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.
- その Hermite 双線形形式 B が正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 < B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.

- その Hermite 双線形形式 B が半負値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \geq B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.
- その Hermite 双線形形式 B が負値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 > B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.

証明. 定理 3.5.1 と同様にして示される. □

定理 3.5.3 (Sylvester の慣性法則)**.** $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, $0 < B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$, $0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$, $0 > B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ なる添数 i の個数がそれぞれ π, ξ, ν と $\pi + \xi + \nu = n$ が成り立つようにおかれれば, その組 (π, ξ, ν) は, その対称双線形形式 B に関するものであるなら, その直交基底 $\mathcal{B}$ に依らず, その対称双線形形式 B に対し, 一意的に確定する.

この定理を Sylvester の慣性法則という.

証明. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底たち $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ が $\mathcal{B} = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\mathcal{C} = \left\langle \mathbf{w}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, $0 < B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$, $0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$, $0 > B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ なる添数 i の個数がそれぞれ $\pi_{\mathcal{B}}$, $\xi_{\mathcal{B}}$, $\nu_{\mathcal{B}}$ と $\pi_{\mathcal{B}} + \xi_{\mathcal{B}} + \nu_{\mathcal{B}} = n$ が成り立つように, $0 < B\left(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i\right)$, $0 = B\left(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i\right)$, $0 > B\left(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i\right)$ なる添数 i の個数がそれぞれ $\pi_{\mathcal{C}}$, $\xi_{\mathcal{C}}$, $\nu_{\mathcal{C}}$ と $\pi_{\mathcal{C}} + \xi_{\mathcal{C}} + \nu_{\mathcal{C}} = n$ が成り立つようにおかれ, 必要があれば, 添数を付け替えることで, $\forall i \in \varLambda_{\pi_{\mathcal{B}}}$ に対し, $0 < B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$, $\forall i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{\pi_{\mathcal{B}}}$ に対し, $0 \geq B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$, $\forall i \in \varLambda_{\pi_{\mathcal{C}}}$ に対し, $0 < B\left(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i\right)$, $\forall i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{\pi_{\mathcal{C}}}$ に対し, $0 \geq B\left(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i\right)$ とおかれてもよいので, そうして, 次式のようにおかれれば,

$$V_{\mathcal{B}} = \operatorname{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \varLambda_{\pi_{\mathcal{B}}}}, \quad W_{\mathcal{C}} = \operatorname{span}\left\{\mathbf{w}_i\right\}_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{\pi_{\mathcal{C}}}}$$

その組 $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_{\pi_{\mathcal{B}}}}$ がその vector 空間 $V_{\mathcal{B}}$ 上のその対称双線形形式 B に関する直交基底をなしており, $\forall i \in \varLambda_{\pi_{\mathcal{B}}}$ に対し, $0 < B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = B|\left(V_{\mathcal{B}} \times V_{\mathcal{B}}\right)\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つので, 定理 3.5.1 よりその対称双線形形式 $B|\left(V_{\mathcal{B}} \times V_{\mathcal{B}}\right)$ は正値である. 同様に, その組 $\left\langle \mathbf{w}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{\pi_{\mathcal{C}}}}$ がその vector 空間 $W_{\mathcal{C}}$ 上のその対称双線形形式 B に関する直交基底をなしており, $\forall i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{\pi_{\mathcal{C}}}$ に対し, $0 \geq B\left(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i\right) = B|\left(W_{\mathcal{C}} \times W_{\mathcal{C}}\right)\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つので, 定理 3.5.1 よりその対称双線形形式 $B|\left(W_{\mathcal{C}} \times W_{\mathcal{C}}\right)$ は半負値である.

このとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \in V_{\mathcal{B}} \cap W_{\mathcal{C}}$ が成り立つかつ, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つと仮定すると, 次のようになるかつ,

$$B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) = B|\left(V_{\mathcal{B}} \times V_{\mathcal{B}}\right)\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) \geq 0$$

次のようになるので,

$$B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) = B|\left(W_{\mathcal{C}} \times W_{\mathcal{C}}\right)\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) < 0$$

$0 \leq B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) \leq 0$ が得られるが, これは矛盾している. したがって, $\mathbf{v} \in V_{\mathcal{B}} \cap W_{\mathcal{C}}$ が成り立つなら, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ. もちろん, $\{\mathbf{0}\} \subseteq V_{\mathcal{B}} \cap W_{\mathcal{C}}$ が成り立つので, $\{\mathbf{0}\} = V_{\mathcal{B}} \cap W_{\mathcal{C}}$ が成り立つ. したがって, $V_{\mathcal{B}} \oplus W_{\mathcal{C}} \subseteq V$ が得られたので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathcal{B}} &= \pi_{\mathcal{B}} + n - n + \pi_{\mathcal{C}} - \pi_{\mathcal{C}} \\
&= \pi_{\mathcal{B}} + \left(n - \pi_{\mathcal{C}}\right) - n + \pi_{\mathcal{C}} \\
&= \dim V_{\mathcal{B}} + \dim W_{\mathcal{C}} - \dim V + \pi_{\mathcal{C}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \dim V_{\mathcal{B}} \oplus W_{\mathcal{C}} - \dim V + \pi_{\mathcal{C}} \\
&\leq \dim V - \dim V + \pi_{\mathcal{C}} = \pi_{\mathcal{C}}
\end{aligned}
$$

これにより, $\pi_{\mathcal{B}} \leq \pi_{\mathcal{C}}$ が得られる.

同様にして, $\pi_{\mathcal{C}} \leq \pi_{\mathcal{B}}$ が得られるので, $\pi_{\mathcal{B}} = \pi_{\mathcal{C}}$ が成り立つ. さらに, 同様にして, $\nu_{\mathcal{B}} = \nu_{\mathcal{C}}$ が得られるので, $\xi_{\mathcal{B}} = \xi_{\mathcal{C}}$ も得られる. よって, その組 $(\pi_{\mathcal{B}}, \xi_{\mathcal{B}}, \nu_{\mathcal{B}})$ は, その対称双線形形式 B に関するものであるなら, その直交基底 $\mathcal{B}$ に依らず, その対称双線形形式 B に対し, 一意的に確定する. □

定理 3.5.4 (Sylvester の慣性法則)**.** $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれると, $0 < B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 = B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 > B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ なる添数 i の個数がそれぞれ π, ξ, ν と $\pi + \xi + \nu = n$ が成り立つようにおかれれば, その組 (π, ξ, ν) は, その Hermite 双線形形式 B に関するものであるなら, その直交基底 $\mathcal{B}$ に依らず, その Hermite 双線形形式 B に対し, 一意的に確定する. この定理も Sylvester の慣性法則という.

証明. 定理 3.5.3 と同様にして示される. □

定義 3.5.3. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれ, $0 < B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 = B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 > B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ なる添数 i の個数がそれぞれ π, ξ, ν と $\pi + \xi + \nu = n$ が成り立つようにおかれたとき, その組 (π, ν) をその対称双線形形式 B の符号という.

定義 3.5.4. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれ, $0 < B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 = B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 > B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ なる添数 i の個数がそれぞれ π, ξ, ν と $\pi + \xi + \nu = n$ が成り立つようにおかれたとき, その組 (π, ν) をその Hermite 双線形形式 B の符号という.

定理 3.5.5. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれ, $0 < B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 = B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 > B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ なる添数 i の個数がそれぞれ π, ξ, ν と $\pi + \xi + \nu = n$ が成り立つようにおかれれば, 次のことが成り立つ.

- その対称双線形形式 B が半正値であるならそのときに限り, その対称双線形形式 B の符号が $(\pi, 0)$ である.
- その対称双線形形式 B が正値であるならそのときに限り, その対称双線形形式 B の符号が $(n, 0)$ である.
- その対称双線形形式 B が半負値であるならそのときに限り, その対称双線形形式 B の符号が $(0, \nu)$ である.
- その対称双線形形式 B が負値であるならそのときに限り, その対称双線形形式 B の符号が $(0, n)$ である.

証明. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれ, $0 < B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 = B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 > B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ なる添数 i の個数がそれぞれ π, ξ, ν と $\pi + \xi + \nu = n$ が成り立つようにおかれれば, その対称双線形形式 B が半正値であるなら, 定理 3.5.1 より $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $0 \leq B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ が成り立つ, 即ち, $\nu = 0$ が得られるので, その対称双線形形式 B の符号が $(\pi, 0)$ である. 逆に, その対称双線形形式 B の符号が $(\pi, 0)$ であるなら,

$\nu = 0$ が成り立つので, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ が成り立つ. そこで, 定理 3.5.1 よりその対称双線形形式 B が半正値である.

また, その対称双線形形式 B が正値であるなら, 定理 3.5.1 より $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ が成り立つことに注意すれば, $0 < B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ が成り立つ, 即ち, $\pi = n$ かつ $\nu = 0$ が得られるので, その対称双線形形式 B の符号が $(n, 0)$ である. 逆に, その対称双線形形式 B の符号が $(n, 0)$ であるなら, $\pi = n$ かつ $\nu = 0$ が成り立つので, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 < B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ が成り立つ. そこで, 定理 3.5.1 よりその対称双線形形式 B が正値である.

以上の議論により, 次のことが成り立つ.

- その対称双線形形式 B が半正値であるならそのときに限り, その対称双線形形式 B の符号が $(\pi, 0)$ である.
- その対称双線形形式 B が正値であるならそのときに限り, その対称双線形形式 B の符号が $(n, 0)$ である.

同様にして, 次のことが示される.

- その対称双線形形式 B が半負値であるならそのときに限り, その対称双線形形式 B の符号が $(0, \nu)$ である.
- その対称双線形形式 B が負値であるならそのときに限り, その対称双線形形式 B の符号が $(0, n)$ である.

□

定理 3.5.6. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれ, $0 < B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 = B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 > B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ なる添数 i の個数がそれぞれ π, ξ, ν と $\pi + \xi + \nu = n$ が成り立つようにおかれれば, 次のことが成り立つ.

- その Hermite 双線形形式 B が半正値であるならそのときに限り, その Hermite 双線形形式 B の符号が $(\pi, 0)$ である.
- その Hermite 双線形形式 B が正値であるならそのときに限り, その Hermite 双線形形式 B の符号が $(n, 0)$ である.
- その Hermite 双線形形式 B が半負値であるならそのときに限り, その Hermite 双線形形式 B の符号が $(0, \nu)$ である.
- その Hermite 双線形形式 B が負値であるならそのときに限り, その Hermite 双線形形式 B の符号が $(0, n)$ である.

証明. 定理 3.5.5 と同様にして示される. □

定義 3.5.5. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれ, $0 < B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 = B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$, $0 > B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$ なる添数 i の個数がそれぞれ π, ξ, ν と $\pi + \xi + \nu = n$ が成り立つようにおかれたとき, 自然数たち $\pi + \nu$, ξ をそれぞれその対称双線形形式 B の階数, 退化次数といい, それぞれ $\mathrm{rank} B$, $\mathrm{nullity} B$ と書くことにする.

定義 3.5.6. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意

の Hermite 双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B}=\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$ とおかれ, $0<B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$, $0=B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$, $0>B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$ なる添数 i の個数がそれぞれ π, ξ, ν と $\pi+\xi+\nu=n$ が成り立つようにおかれたとき, 自然数たち $\pi+\nu$, ξ をそれぞれその Hermite 双線形形式 B の階数, 退化次数といい, それぞれ $\mathrm{rank}B$, $\mathrm{nullity}B$ と書くことにする.

定理 3.5.7. $K\subseteq\mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B について, 次のことが成り立つ.

- その対称双線形形式 B の任意の基底 α に関する表現行列 $[B]_\alpha$ を用いて次のように線形写像 $L_{[B]_\alpha}$ がおかれれば,
$$L_{[B]_\alpha}:K^n\rightarrow K^n;\mathbf{v}\mapsto[B]_\alpha\mathbf{v}$$
次式が成り立つ.
$$\mathrm{nullity}B=\mathrm{nullity}L_{[B]_\alpha}$$
- その対称双線形形式 B の任意の基底 α に関する表現行列 $[B]_\alpha$ を用いれば, 次式が成り立つ.
$$\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}[B]_\alpha$$
- $\mathrm{nullity}B=0$ が成り立つならそのときに限り, その対称双線形形式 B の任意の基底 α に関する表現行列 $[B]_\alpha$ が正則行列である.

証明. $K\subseteq\mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B}=\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$ とおかれ, $0<B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$, $0=B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$, $0>B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$ なる添数 i の個数がそれぞれ π, ξ, ν と $\pi+\xi+\nu=n$ が成り立つようにおかれることで, その対称双線形形式 B のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[B]_\mathcal{B}$ を用いて次のように線形写像 $L_{[B]_\mathcal{B}}$ が考えられよう.
$$L_{[B]_\mathcal{B}}:K^n\rightarrow K^n;\mathbf{v}\mapsto[B]_\mathcal{B}\mathbf{v}$$
$0=B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$ なる任意の添数 i に対する vector$\mathbf{v}_i$ 全体から生成される部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)}}$ について, これの基底として $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)}}$ があげられるので, $\dim\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)}}=\xi=\mathrm{nullity}B$ が成り立つ. その表現行列 $[B]_\mathcal{B}$ が $[B]_\mathcal{B}=(B_{ij})_{(i,j)\in\Lambda_n^2}$ と成分表示されれば, 定理 3.4.8 より $B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)=B_{ii}=0$ が成り立つ. さらに, その基底 $\mathcal{B}$ が直交基底なので, $\forall j\in\Lambda_n$ に対し, $i\neq j$ が成り立つなら, 定理 3.4.8 より $B(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_i)=B_{ji}=0$ が成り立つ. その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_\mathcal{B}$ を用いれば, 組 $\left\langle\varphi_\mathcal{B}^{-1}(\mathbf{v}_i)\right\rangle_{i\in\Lambda_n}$ もその vector 空間 K^n の基底で次元公式より次式が成り立つので,
$$\begin{aligned}\dim V\left(\varphi_\mathcal{B}^{-1}|\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)}}\right)&=\dim\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)}}\\&\quad-\dim\ker\varphi_\mathcal{B}^{-1}|\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)}}\\&=\dim\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)}}-0\\&=\dim\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)}}\\&=\xi=\mathrm{nullity}B\end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, $\mathbf{v} \in V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}|\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i \in \Lambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}}\right)$ が成り立つなら, 次のようにおかれれば,

$$\mathbf{v} = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\sum_{\substack{i \in \Lambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}} a_i \mathbf{v}_i\right)$$

次のようになることから,

$$\begin{aligned}
L_{[B]_{\mathcal{B}}}\left(\mathbf{v}\right) &= L_{[B]_{\mathcal{B}}}\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\sum_{\substack{i \in \Lambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}} a_i \mathbf{v}_i\right)\right)\\
&= L_{[B]_{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\sum_{\substack{i \in \Lambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}} a_i \mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{\substack{i \in \Lambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}} a_i L_{[B]_{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{\substack{i \in \Lambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}} a_i L_{[B]_{\mathcal{B}}}\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{v}_i\right)\right)\\
&= \sum_{\substack{i \in \Lambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}} a_i [B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{\substack{i \in \Lambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}} a_i \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1i} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{i1} & \cdots & B_{ii} & \cdots & B_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{ni} & \cdots & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\\
&= \sum_{\substack{i \in \Lambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}} a_i \begin{pmatrix} B_{1i} \\ \vdots \\ B_{ii} \\ \vdots \\ B_{ni} \end{pmatrix}\\
&= \sum_{\substack{i \in \Lambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}} a_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i \in \Lambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}} a_i \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}|\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\right)}}\right)\subseteq\ker L_{[B]_{\mathcal{B}}}$ が得られる．これにより, 次のようになる．

$$\mathrm{nullity}B=\dim V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}|\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\right)}}\right)\leq\dim\ker L_{[B]_{\mathcal{B}}}=\mathrm{nullity}L_{[B]_{\mathcal{B}}}$$

逆に, $\forall\mathbf{v}\in K^n$ に対し, $\mathbf{v}\notin V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}|\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\right)}}\right)$ が成り立つなら, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$ とおかれれば, 次のようになり,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\\&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\right)\\&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\sum_{i\in\Lambda_n}v_i\mathbf{v}_i\right)\end{aligned}$$

$\sum_{i\in\Lambda_n}v_i\mathbf{v}_i\notin\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i\in\Lambda_n\\0=B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\right)}}$ が得られる．

そこで, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}L_{[B]_{\mathcal{B}}}\left(\mathbf{v}\right)&=[B]_{\mathcal{B}}\mathbf{v}\\&=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1n}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B_{n1}&B_{n2}&\cdots&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}v_1B_{11}+v_2B_{12}+\cdots+v_nB_{1n}\\v_1B_{21}+v_2B_{22}+\cdots+v_nB_{2n}\\\vdots\\v_1B_{n1}+v_2B_{n2}+\cdots+v_nB\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\forall i\in\Lambda_n$ に対し, 定義より次のようになり,

$$\begin{aligned}v_1B_{i1}+v_2B_{i2}+\cdots+v_nB_{in}&=\sum_{j\in\Lambda_n}v_jB_{ij}\\&=\sum_{\substack{j\in\Lambda_n\\i=j}}v_jB_{ij}+\sum_{\substack{j\in\Lambda_n\\i\neq j}}v_jB_{ij}\\&=\sum_{\substack{j\in\Lambda_n\\i=j}}v_jB\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\right)+\sum_{\substack{j\in\Lambda_n\\i\neq j}}v_jB\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\right)\end{aligned}$$

上記のように, その基底 $\mathcal{B}$ が直交基底なので, $\forall j \in \varLambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $B\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i\right) = 0$ が成り立つので, 次のようになる.

$$v_1 B_{i1} + v_2 B_{i2} + \cdots + v_n B_{in} = \sum_{\substack{j \in \varLambda_n \\ i = j}} v_j B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) = v_i B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$$

そこで, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $v_i B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0$ が成り立つと仮定しよう. このとき, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
v_i B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0 &\Leftrightarrow v_i = 0 \vee B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(v_i = 0 \vee B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0\right) \wedge \top \\
&\Leftrightarrow \left(v_i = 0 \vee B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0\right) \\
&\quad \wedge \left(B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) \neq 0 \vee B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(v_i = 0 \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) \neq 0\right) \vee B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(v_i = 0 \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) \neq 0\right) \vee \left(\top \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(v_i = 0 \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) \neq 0\right) \\
&\quad \vee \left(\left(v_i \neq 0 \vee v_i = 0\right) \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(v_i = 0 \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) \neq 0\right) \\
&\quad \vee \left(v_i \neq 0 \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0\right) \\
&\quad \vee \left(v_i = 0 \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0\right)
\end{aligned}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \varLambda_n} v_i \mathbf{v}_i &= \sum_{\substack{i \in \varLambda_n \\ v_i = 0 \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) \neq 0}} v_i \mathbf{v}_i + \sum_{\substack{i \in \varLambda_n \\ v_i \neq 0 \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0}} v_i \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \varLambda_n, v_i = 0 \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0} v_i \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{\substack{i \in \varLambda_n \\ v_i \neq 0 \wedge B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0}} v_i \mathbf{v}_i \in \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i \in \varLambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}}
\end{aligned}$$

しかしながら, これは $\sum_{i \in \varLambda_n} v_i \mathbf{v}_i \notin \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i \in \varLambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}}$ が成り立つことに矛盾している.

したがって, $\exists i \in \varLambda_n$ に対し, $v_i = 0$ かつ $B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) = 0$ が成り立つことになる. ゆえに, $\exists i \in \varLambda_n$ に対し, $v_i B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right) \neq 0$ が成り立つことになるので,

$$\begin{aligned}
L_{[B]_{\mathcal{B}}}\left(\mathbf{v}\right) &= \begin{pmatrix} v_1 B_{11} + v_2 B_{12} + \cdots + v_n B_{1n} \\ v_1 B_{21} + v_2 B_{22} + \cdots + v_n B_{2n} \\ \vdots \\ v_1 B_{n1} + v_2 B_{n2} + \cdots + v_n B \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_1 B\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\right) \\ v_2 B\left(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\right) \\ \vdots \\ v_n B\left(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n\right) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$\mathbf{v} \notin \ker L_{[B]_{\mathcal{B}}}$ が得られ, したがって, $V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}|\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i \in \varLambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}}\right) \supseteq \ker L_{[B]_{\mathcal{B}}}$ が得られる. これにより, 次のようになる.

$$\mathrm{nullity} B = \dim V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}|\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{\substack{i \in \varLambda_n \\ 0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)}}\right)$$

$$\geq \dim\ker L_{[B]_{\mathcal{B}}}$$
$$= \mathrm{nullity} L_{[B]_{\mathcal{B}}}$$

よって, $\mathrm{nullity}B = \mathrm{nullity}L_{[B]_{\mathcal{B}}}$ が得られた.

そこで, その vector 空間 V 上の任意の基底 α に対し, 定理 3.4.14 より次式が成り立つ.

$$[B]_{\mathcal{B}} = {}^t\left[I_V \right]_{\mathcal{B}}^{\alpha} [B]_\alpha \left[I_V \right]_{\mathcal{B}}^{\alpha}$$

そこで, その行列 $\left[I_V \right]_{\mathcal{B}}^{\alpha}$ は定理 1.5.9 よりその基底 $\mathcal{B}$ からその基底 α への基底変換行列そのものでありこれは正則行列である. さらに, その行列 ${}^t\left[I_V \right]_{\mathcal{B}}^{\alpha}$ もまた正則行列である[*21]. また, 定理 1.7.10 よりある 2 つの正則行列たち $\left[I_V \right]_{\mathcal{B}}^{\alpha}$, ${}^t\left[I_V \right]_{\mathcal{B}}^{\alpha}$ が存在して, $[B]_{\mathcal{B}} = {}^t\left[I_V \right]_{\mathcal{B}}^{\alpha} [B]_\alpha \left[I_V \right]_{\mathcal{B}}^{\alpha}$ が成り立つならそのときに限り, その行列 $[B]_{\mathcal{B}}$ が行列の変形でその行列 $[B]_\alpha$ に変形されることができる. 定理 1.7.4 よりその行列 $[B]_{\mathcal{B}}$ が行列の基本変形をされたとしても, その行列の階数は一定であるので, $\mathrm{rank}[B]_{\mathcal{B}} = \mathrm{rank}[B]_\alpha$ が得られる. したがって, 次元公式より次式のような線形写像が考えられれば,

$$L_{[B]_\alpha} : K^n \to K^n; \mathbf{v} \mapsto [B]_\alpha \mathbf{v}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{nullity}B &= \mathrm{nullity}L_{[B]_{\mathcal{B}}} \\
&= n - \mathrm{rank}L_{[B]_{\mathcal{B}}} \\
&= n - \mathrm{rank}[B]_{\mathcal{B}} \\
&= n - \mathrm{rank}[B]_\alpha \\
&= n - \mathrm{rank}L_{[B]_\alpha} \\
&= \mathrm{nullity}L_{[B]_\alpha}
\end{aligned}$$

また, 次元公式より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}B &= \pi + \nu \\
&= \pi + \xi + \nu - \xi \\
&= n - \xi \\
&= n - \mathrm{nullity}L_{[B]_\alpha} \\
&= \mathrm{rank}L_{[B]_\alpha} \\
&= \mathrm{rank}[B]_\alpha
\end{aligned}$$

$\mathrm{nullity}B = 0$ が成り立つならそのときに限り, 上記の議論により $\mathrm{nullity}L_{[B]_\alpha} = 0$ が成り立つので, 次元公式より次のようになる.

$$n = \mathrm{rank}L_{[B]_\alpha} = \mathrm{rank}[B]_\alpha$$

これが成り立つならそのときに限り, その表現行列 $[B]_\alpha$ は正則行列である. □

定理 3.5.8. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B について, 次のことが成り立つ.

[*21] 手っ取り早い示し方としては, $\det {}^t\left[I_V \right]_{\mathcal{B}}^{\alpha} = \det\left[I_V \right]_{\mathcal{B}}^{\alpha} \neq 0$ によるものがあげられる.

- その Hermite 双線形形式 B の任意の基底 α に関する表現行列 $[B]_{\alpha}$ を用いて次のように線形写像 $L_{[B]_{\alpha}}$ がおかれれば,

$$L_{[B]_{\alpha}}:K^{n}\rightarrow K^{n};\mathbf{v}\mapsto[B]_{\alpha}\mathbf{v}$$

次式が成り立つ.

$$\mathrm{nullity}B=\mathrm{nullity}L_{[B]_{\alpha}}$$

- その Hermite 双線形形式 B のその基底 α に関する表現行列 $[B]_{\alpha}$ を用いれば, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}[B]_{\alpha}$$

- $\mathrm{nullity}B=0$ が成り立つならそのときに限り, その Hermite 双線形形式 B のその基底 α に関する表現行列 $[B]_{\alpha}$ が正則行列である.

証明. 定理 3.5.7 と同様にして示される. □

定義 3.5.7. $K\subseteq\mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B について, 次式のような集合 $\ker B$ をその対称双線形形式 B の核という.

$$\ker B=\{\mathbf{w}\in V|\forall\mathbf{v}\in V\left[B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=0\right]\}$$

定義 3.5.8. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B について, 次式のような集合 $\ker B$ をその Hermite 双線形形式 B の核という.

$$\ker B=\{\mathbf{w}\in V|\forall\mathbf{v}\in V\left[B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=0\right]\}$$

定理 3.5.9. $K\subseteq\mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B について, その対称双線形形式 B の核 $\ker B$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間であり, さらに, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{nullity}B=\dim\ker B$$

証明. $K\subseteq\mathbb{R}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の対称双線形形式 B の核 $\ker B$ について, もちろん, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $B\left(\mathbf{v},\mathbf{0}\right)=0$ が成り立つので, $\mathbf{0}\in\ker B$ が成り立つ. $\forall k,l\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{w}\in\ker B$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\begin{cases}\forall\mathbf{v}\in V\left[B\left(\mathbf{v},\mathbf{u}\right)=0\right]\\\forall\mathbf{v}\in V\left[B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=0\right]\end{cases}&\Rightarrow\begin{cases}\forall\mathbf{v}\in V\left[kB\left(\mathbf{v},\mathbf{u}\right)=0\right]\\\forall\mathbf{v}\in V\left[lB\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=0\right]\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}\forall\mathbf{v}\in V\left[B\left(\mathbf{v},k\mathbf{u}\right)=0\right]\\\forall\mathbf{v}\in V\left[B\left(\mathbf{v},l\mathbf{w}\right)=0\right]\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\forall\mathbf{v}\in V\left[B\left(\mathbf{v},k\mathbf{u}\right)=0\wedge B\left(\mathbf{v},l\mathbf{w}\right)=0\right]\\
&\Rightarrow\forall\mathbf{v}\in V\left[B\left(\mathbf{v},k\mathbf{u}\right)+B\left(\mathbf{v},l\mathbf{w}\right)=0\right]\\
&\Leftrightarrow\forall\mathbf{v}\in V\left[B\left(\mathbf{v},k\mathbf{u}+l\mathbf{w}\right)=0\right]
\end{aligned}$$

$k\mathbf{u}+l\mathbf{w}\in\ker B$ が成り立つ. 定理 1.1.9 よりその核 $\ker B$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間であることが示された.

その対称双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ と与えられたとき, その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ を用いれば, 組 $\left\langle \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{v}_i\right) \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ もその vector 空間 K^n の基底であるので, $\dim \ker B = \dim V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} | \ker B\right)$ が得られる.

その対称双線形形式 B のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[B]_{\mathcal{B}}$ を用いて次のように線形写像 $L_{[B]_{\mathcal{B}}}$ が考えられよう.

$$L_{[B]_{\mathcal{B}}} : K^n \rightarrow K^n ; \mathbf{v} \mapsto [B]_{\mathcal{B}} \mathbf{v}$$

$\forall \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \in V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} | \ker B\right)$ に対し, $\mathbf{w} \in \ker B$ が成り立つので, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ が成り立ち, そこで, 定理 3.4.8 より ${}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})[B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) = 0$ が成り立つ. そこで, その線形写像 $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ は線形同型写像であるので, $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, ${}^t\mathbf{v}[B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) = 0$ が成り立つ. ここで, $[B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \neq \mathbf{0}$ が成り立つと仮定すると, その vector$[B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w})$ が $\left(b_i\right)_{i \in \Lambda_n}$ と成分表示されれば, $\exists j \in \Lambda_n$ に対し, $b_j \neq 0$ が成り立つので, ある vector$\left(\delta_{ij}\right)_{i \in \Lambda_n}$ が存在して, 次式が成り立つ.

$${}^t\left(\delta_{ij}\right)_{i \in \Lambda_n}[B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_j \neq 0$$

しかしながら, これは, $\forall \mathbf{v} \in K^n$ に対し, ${}^t\mathbf{v}[B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) = 0$ が成り立つことに矛盾している. したがって, $[B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ が成り立つ. このとき, 次のようになっているので,

$$L_{[B]_{\mathcal{B}}}\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w})\right) = [B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$$

$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \in \ker L_{[B]_{\mathcal{B}}}$ が成り立つ. これにより, $V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} | \ker B\right) \subseteq \ker L_{[B]_{\mathcal{B}}}$ が得られる.

逆に, $\mathbf{w} \in \ker L_{[B]_{\mathcal{B}}}$ が成り立つなら, $\mathbf{w} = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\right)$ が成り立つことにより次のようになっているので,

$$L_{[B]_{\mathcal{B}}}(\mathbf{w}) = [B]_{\mathcal{B}} \mathbf{w} = [B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\right) = \mathbf{0}$$

$\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになるので,

$$B\left(\mathbf{v}, \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\right) ={}^t \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})[B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\right) = 0$$

$\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) \in \ker B$ が得られる. ゆえに, $\mathbf{w} \in V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} | \ker B\right)$ が成り立つ. これにより, $V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} | \ker B\right) \supseteq \ker L_{[B]_{\mathcal{B}}}$ が得られる.

以上の議論により, $V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} | \ker B\right) = \ker L_{[B]_{\mathcal{B}}}$ が成り立つので, 定理 3.5.7 より次のようになる.

$$\dim \ker B = \dim V\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} | \ker B\right) = \operatorname{nullity} L_{[B]_{\mathcal{B}}} = \operatorname{nullity} B$$

□

定理 3.5.10. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B について, その Hermite 双線形形式 B の核 $\ker B$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間であり, さらに, 次式が成り立つ.

$$\operatorname{nullity} B = \dim \ker B$$

証明. 定理 3.5.9 と同様にして示される. □

参考文献

[1] 松坂和夫, "線型代数入門", 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p333-336 ISBN978-4-00-029872-8

3.6 内積空間

3.6.1 内積空間

公理 3.6.1 (内積空間の公理). $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の正値な Hermite 双線形形式 $\varPhi$ が与えられたとき, 即ち, 次のことをみたす写像 $\varPhi : V \times V \rightarrow K$ が与えられたとき,

- $\forall a, b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{a}\varPhi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \overline{b}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が成り立つ.
- $\forall a, b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\varPhi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b\varPhi(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ が成り立つ[*22].
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $0 < \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つ.

その写像 $\varPhi$ をその vector 空間 V 上の Hermite 内積, または単に, 内積といい, その組 $(V, \varPhi)$ をその体 K 上のその vector 空間 V とその内積 $\varPhi$ からなる内積空間, 計量 vector 空間などという.

例えば, $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 K^n に対し, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \varLambda_n}$, $\mathbf{b} = (b_i)_{i \in \varLambda_n}$ として, 次のような写像 $\varPhi$ はその vector 空間 K^n 上の内積となる.

$$\varPhi : K^n \times K^n \rightarrow K; (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \sum_{i \in \varLambda_n} \overline{a_i} b_i$$

このような内積を特に標準内積, 自然内積といい, 値 $\varPhi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ などと書き, $K \subseteq \mathbb{R}$ が成り立つとき, $(\mathbf{a}|\mathbf{b})$ などと書く. さらに, その vector 空間 K^n と標準内積 $\langle \bullet | \bullet \rangle$ とを組にした内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ をその体 K 上の標準内積空間ということにする.

定理 3.6.1. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 写像 $\varPhi : V \times V \rightarrow K$ が内積であるならそのときに限り, その写像 $\varPhi$ はその vector 空間 V 上の正値な Hermite 双線形形式である.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, 写像 $\varPhi : V \times V \rightarrow K$ が内積であるなら, 次の条件たちを満たすことになる.

- $\forall a, b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{a}\varPhi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \overline{b}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が成り立つ.
- $\forall a, b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\varPhi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b\varPhi(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $0 < \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つ.

次の条件たちにより

- $\forall a, b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{a}\varPhi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \overline{b}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が成り立つ.
- $\forall a, b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\varPhi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b\varPhi(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ が成り立つ.

その写像 $\varPhi$ が共役双線形形式であることが分かる. さらに, 次の条件により

- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$ が成り立つ.

[*22] 実はこの主張はなくても大丈夫で左辺が与えられたとき, 次の 3 つ目の主張より共役複素数をとって上の 1 つ目の主張にしたがって式変形して再び次の 3 つ目の主張に基づけば右辺が得られる.

その写像 Φ が Hermite 双線形形式であることが分かる. さらに, 次の条件により

- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $0 < \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つ.

その写像 Φ が正値な Hermite 双線形形式であることが分かる. 以上の議論により, その写像 Φ が内積である.

逆に, その写像 Φ が内積であるなら, その写像 Φ は正値な Hermite 双線形形式であるから, 次の条件たちを満たす.

- $\forall a, b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\Phi(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{a}\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \overline{b}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が成り立つ.
- $\forall a, b \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\Phi(\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $0 < \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ が成り立つ.

よって, その写像 Φ は内積である. □

定理 3.6.2 (Schwarz の不等式)**.** $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$|\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2 \leq \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v})\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})$$

この不等式を Schwarz の不等式という.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ のときは明らかであるので, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ のとき, $0 < \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになり,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Phi\left(\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})\mathbf{v} - \overline{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})}\mathbf{w}, \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})\mathbf{v} - \overline{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})}\mathbf{w}\right) \\
&= \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})\overline{\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \overline{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
&\quad - \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})\overline{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})}\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})^2\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - |\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&\quad - |\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + |\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})^2\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - |\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})\left(\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v})\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - |\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2\right)
\end{aligned}$$

これが成り立つならそのときに限り, $0 \leq \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v})\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - |\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2$ が得られる. よって, $|\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2 \leq \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v})\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})$ が得られた. □

定理 3.6.3. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, 次式のような写像 φ_Φ が考えられよう.

$$\varphi_\Phi : V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto \sqrt{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$$

このとき, その写像 φ_Φ がその vector 空間 V 上の norm となり, したがって, その組 (V, φ_Φ) は norm 空間をなす.

定義 3.6.2. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, 次式のような写像 φ_Φ をその内積 Φ から誘導される norm といい,

$$\varphi_\Phi : V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto \sqrt{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$$

さらに, その norm 空間 (V,φ_{Φ}) をその内積空間 (V,Φ) から誘導される norm 空間という.

特に, $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の標準内積空間 $(K^n,\langle\bullet|\bullet\rangle)$ から誘導される norm の値 $\varphi_{\langle\bullet|\bullet\rangle}\left(a_i\right)_{i\in\Lambda_n}$ を $\left\|(a_i)_{i\in\Lambda_n}\right\|$, $\|a_i\|_{i\in\Lambda_n}$, $|a_i|_{i\in\Lambda_n}$ と書くことがある.

証明. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V,Φ) が与えられたとき, 次式のような写像 φ_{Φ} が考えられよう.

$$\varphi_{\Phi}:V\rightarrow K;\mathbf{v}\mapsto\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)}$$

$\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 内積は正値な Hermite 双線形形式なので, 定理 3.4.3 より $0\leq\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)$ が成り立つので, $0\leq\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)}=\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}\right)$ が得られる.

$\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}\right)=0$ が成り立つなら, 内積が正値であることに注意すれば, $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ が成り立つ. 逆に, $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ が成り立つなら, 明らかに $\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}\right)=0$ が成り立つ.

$\forall k\in K\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_{\Phi}\left(k\mathbf{v}\right)&=\sqrt{\Phi\left(k\mathbf{v},k\mathbf{v}\right)}\\&=\sqrt{k^2\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)}\\&=|k|\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)}\\&=|k|\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}\right)\end{aligned}$$

最後に, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)&=\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)}\\&=\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)+\Phi\left(\mathbf{w},\mathbf{v}\right)+\Phi\left(\mathbf{w},\mathbf{w}\right)}\\&=\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)+\overline{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)}+\Phi\left(\mathbf{w},\mathbf{w}\right)}\\&=\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+2\mathrm{Re}\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)+\Phi\left(\mathbf{w},\mathbf{w}\right)}\end{aligned}$$

ここで, Schwarz の不等式より次式が成り立つことに注意すれば,

$$\mathrm{Re}\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)^2\leq\mathrm{Re}\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)^2+\mathrm{Im}\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)^2=\left|\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\right|^2\leq\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\Phi\left(\mathbf{w},\mathbf{w}\right)$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)&\leq\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)+2\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\Phi\left(\mathbf{w},\mathbf{w}\right)}+\Phi\left(\mathbf{w},\mathbf{w}\right)}\\&=\sqrt{\left(\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)}\right)^2+2\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)}\sqrt{\Phi\left(\mathbf{w},\mathbf{w}\right)}+\left(\sqrt{\Phi\left(\mathbf{w},\mathbf{w}\right)}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)}+\sqrt{\Phi\left(\mathbf{w},\mathbf{w}\right)}\right)^2}\\&=\sqrt{\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)}+\sqrt{\Phi\left(\mathbf{w},\mathbf{w}\right)}\\&=\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}\right)+\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{w}\right)\end{aligned}$$

以上の議論により, 次のことが示されたので,

- $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $0\leq\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}\right)$ が成り立つ.
- $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}\right)=0$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ が成り立つ.
- $\forall k\in K\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $\varphi_{\Phi}\left(k\mathbf{v}\right)=|k|\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}\right)$ が成り立つ.

- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \leq \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})$ が成り立つ.

その写像 $\varphi_{\varPhi}$ がその vector 空間 V 上の norm となり, したがって, その組 $(V, \varphi_{\varPhi})$ は norm 空間をなす. □

定理 3.6.4 (Schwarz の不等式の系)**.** $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$|\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})$$

この不等式も Schwarz の不等式という.

証明. 定理 3.6.2 の式の両辺に平方根をとればよい. □

定理 3.6.5. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ において, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ が成り立つなら, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ において, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ が成り立つなら, 特に, $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ とすれば, $\varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$ が得られるので, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ が成り立つ. □

定理 3.6.6 (中線定理)**.** $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_{\varPhi})$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 = 2\left(\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\right)$$

この定理を平行四辺形の法則, 中線定理という.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_{\varPhi})$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 &= \varPhi(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) + \varPhi(\mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{v}-\mathbf{w})\\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w})\\
&= 2\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2\varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w})\\
&= 2\left(\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w})\right)\\
&= 2\left(\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\right)
\end{aligned}$$

よって, 次式が成り立つ.

$$\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 = 2\left(\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\right)$$

□

定理 3.6.7. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_{\varPhi})$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のことは同値である.

- $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ が成り立つ, または, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立って, $\exists k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ に対し, $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ が成り立つ, または, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ が成り立って, $\exists k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ に対し, $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$ が成り立つ.
- $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})$ が成り立つ.
- $\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_{\varPhi})$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ が成り立つときは明らかである. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立って, $\exists k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ に対し, $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ が成り立つとき, 次のようになる.

$$\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varPhi(\mathbf{v}, k\mathbf{v}) = k\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = k\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(k\mathbf{v}) = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})$$

$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ が成り立って, $\exists k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ に対し, $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$ が成り立つときも同様にして示される.

逆に, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ で, $\forall k \in \mathbb{R}^+$ に対し, $\mathbf{w} \neq k\mathbf{v}$ が成り立つなら, それらの vectors$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ は線形独立であるので, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ が成り立つ. このとき, $0 < \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2$ が成り立つことに注意すれば, $\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\mathbf{v} - \overline{\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})}\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ が成り立つので, 次のようになり,

$$\begin{aligned}
0 &< \varPhi\left(\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\mathbf{v} - \overline{\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})}\mathbf{w}, \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\mathbf{v} - \overline{\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})}\mathbf{w}\right) \\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\overline{\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \overline{\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})}\,\overline{\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
&\quad - \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})\,\overline{\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})}\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2 \\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^4\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - |\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2 \\
&\quad - |\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2 + |\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2 \\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^4\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - |\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2 \\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\left(\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2 - |\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2\right)
\end{aligned}$$

これが成り立つならそのときに限り, $0 < \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2 - |\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2$ が得られる. よって, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})$ が得られた. 対偶律により $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})$ が成り立つなら, $\exists k \in \mathbb{R}^+$ に対し, $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ が成り立つ.

$\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})$ が成り立つなら, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 &= \varPhi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \overline{\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2\mathrm{Re}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2\mathrm{Re}\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + 2\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w}) + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2 \\
&= (\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w}))^2
\end{aligned}$$

したがって, $\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})$ が成り立つ.

逆に, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})$ が成り立つなら, Schwarz の不等式より次式が成り立つことに注意すれば,

$$\mathrm{Re}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})^2 \leq \mathrm{Re}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})^2 + \mathrm{Im}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})^2 = |\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})|^2 < \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v})\,\varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2$$

次式が得られるので,

$$-\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w}) < \mathrm{Re}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) < \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})$$

次のようになる.

$$\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 = \varPhi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$
\begin{aligned}
&= \Phi(\mathbf{v},\mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{w},\mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{w},\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v},\mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \overline{\Phi(\mathbf{v},\mathbf{w})} + \Phi(\mathbf{w},\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v},\mathbf{v}) + 2\mathrm{Re}\Phi(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{w},\mathbf{w}) \\
&< \Phi(\mathbf{v},\mathbf{v}) + 2\varphi_\Phi(\mathbf{v})\varphi_\Phi(\mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{w},\mathbf{w}) \\
&= \varphi_\Phi(\mathbf{v})^2 + 2\varphi_\Phi(\mathbf{v})\varphi_\Phi(\mathbf{w}) + \varphi_\Phi(\mathbf{w})^2 \\
&= (\varphi_\Phi(\mathbf{v}) + \varphi_\Phi(\mathbf{w}))^2
\end{aligned}
$$

したがって, $\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \neq \varphi_\Phi(\mathbf{v}) + \varphi_\Phi(\mathbf{w})$ が成り立つ. 対偶律により $\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \varphi_\Phi(\mathbf{v}) + \varphi_\Phi(\mathbf{w})$ が成り立つなら, $\Phi(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \varphi_\Phi(\mathbf{v})\varphi_\Phi(\mathbf{w})$ が成り立つ. □

定理 3.6.8. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V,Φ) から誘導される norm 空間 (V,φ_Φ) が与えられたとき, その vector 空間 V の添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\varLambda_n}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$
\varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{v}_i\right) \leq \sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_\Phi(\mathbf{v}_i)
$$

また, $2 \leq n$ のとき, 次のことは同値である.

- $\varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{v}_i\right) = \sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_\Phi(\mathbf{v}_i)$ が成り立つ.
- $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つ, または, $\exists i' \in \varLambda_n$ に対し, $\mathbf{v}_{i'} \neq \mathbf{0}$ が成り立ってこれ以外のすべての vectors$\mathbf{v}_i$ は, ある非負実数 k_i が存在して, $\mathbf{v}_i = k_i\mathbf{v}_{i'}$ を満たす.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V,Φ) から誘導される norm 空間 (V,φ_Φ) が与えられたとき, その vector 空間 V の任意の添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\varLambda_n}$ に対し, $n=1$ のときでは明らかである. $n=2$ のときでは定理 3.6.3 より直ちにわかる. $n=k$ のとき, $\varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\varLambda_k}\mathbf{v}_i\right) \leq \sum_{i\in\varLambda_k}\varphi_\Phi(\mathbf{v}_i)$ が成り立つと仮定しよう. $n=k+1$ のとき, 定理 3.6.3 より次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\varLambda_{k+1}}\mathbf{v}_i\right) &\leq \varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\varLambda_k}\mathbf{v}_i\right) + \varphi_\Phi(\mathbf{v}_{k+1}) \\
&\leq \sum_{i\in\varLambda_k}\varphi_\Phi(\mathbf{v}_i) + \varphi_\Phi(\mathbf{v}_{k+1}) \\
&= \sum_{i\in\varLambda_{k+1}}\varphi_\Phi(\mathbf{v}_i)
\end{aligned}
$$

数学的帰納法によりその vector 空間 V の任意の添数集合 $\varLambda_n$ によって添数づけられた族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\varLambda_n}$ に対し, 次式が成り立つことが示された.

$$
\varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\varLambda_n}\mathbf{v}_i\right) \leq \sum_{i\in\varLambda_n}\varphi_\Phi(\mathbf{v}_i)
$$

そこで, $n=2$ のとき, 定理 3.6.7 より次のことは同値である.

- $\varphi_\Phi(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \varphi_\Phi(\mathbf{v}_1) + \varphi_\Phi(\mathbf{v}_2)$ が成り立つ.
- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ が成り立つ, または, $\exists i \in \{1,2\}$ に対し, $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ が成り立ってこれ以外の vector$\mathbf{v}_j$ は, ある非負実数 k が存在して, $\mathbf{v}_j = k\mathbf{v}_i$ を満たす.

$2 \leq n = k$ のとき, 次のことは同値であると仮定しよう.

- $\varphi_\Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_k} \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i \in \Lambda_k} \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.
- $\forall i \in \Lambda_k$ に対し, $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つ, または, $\exists i' \in \Lambda_k$ に対し, $\mathbf{v}_{i'} \neq \mathbf{0}$ が成り立ってこれ以外のすべての vectors$\mathbf{v}_i$ は, ある非負実数 k_i が存在して, $\mathbf{v}_i = k_i \mathbf{v}_{i'}$ を満たす.

$n = k + 1$ のとき, $\exists i \in \Lambda_{k+1}$ に対し, $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ が成り立つかつ, $\forall i \in \Lambda_{k+1}$ に対し, $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つなら, ある vectors と線形独立であるとする.

$\exists i \in \Lambda_k$ に対し, $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つとき, $\exists i \in \Lambda_k$ に対し, $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つかつ, $\forall i \in \Lambda_k$ に対し, $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つなら, ある vectors と線形独立であることは成り立つので, 数学的帰納法の仮定に対偶律を適用することで, $\varphi_\Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_k} \mathbf{v}_i\right) \neq \sum_{i \in \Lambda_k} \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ. したがって, 上記の議論により次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varphi_\Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \mathbf{v}_i\right) &\leq \varphi_\Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_k} \mathbf{v}_i\right) + \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_{k+1}\right) \\
&< \sum_{i \in \Lambda_k} \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_i\right) + \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_{k+1}\right) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_i\right)
\end{aligned}$$

$\varphi_\Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \mathbf{v}_i\right) \neq \sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.

$\forall i \in \Lambda_k$ に対し, $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ が成り立つとき, 仮定より $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}$ が成り立って, さらに, $\exists i' \in \Lambda_k$ に対し, その vector$\mathbf{v}_{i'}$ と線形独立であることになる. したがって, 定理 3.6.7 に対偶律を適用することにより次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varphi_\Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \mathbf{v}_i\right) &= \varphi_\Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_k \setminus \{i'\}} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i'} + \mathbf{v}_{k+1}\right) \\
&\leq \sum_{i \in \Lambda_k \setminus \{i'\}} \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_i\right) + \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_{i'} + \mathbf{v}_{k+1}\right) \\
&< \sum_{i \in \Lambda_k \setminus \{i'\}} \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_i\right) + \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_{i'}\right) + \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_{k+1}\right) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_i\right)
\end{aligned}$$

$\varphi_\Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \mathbf{v}_i\right) \neq \sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.

いづれにせよ, $\varphi_\Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \mathbf{v}_i\right) \neq \sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_i\right)$ が成り立つので, 対偶律により $\varphi_\Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i \in \Lambda_{k+1}} \varphi_\Phi\left(\mathbf{v}_i\right)$ が成り立つなら, $\forall i \in \Lambda_{k+1}$ に対し, $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つ, または, $\exists i' \in \Lambda_{k+1}$ に対し, $\mathbf{v}_{i'} \neq \mathbf{0}$ が成り立ってこれ以外のすべての vectors$\mathbf{v}_i$ は, ある非負実数 k_i が存在して, $\mathbf{v}_i = k_i \mathbf{v}_{i'}$ を満たす.

逆に, $\forall i \in \varLambda_{k+1}$ に対し, $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つ, または, $\exists i' \in \varLambda_{k+1}$ に対し, $\mathbf{v}_{i'} \neq \mathbf{0}$ が成り立ってこれ以外のすべての vectors$\mathbf{v}_i$ は, ある非負実数 k_i が存在して, $\mathbf{v}_i = k_i \mathbf{v}_{i'}$ を満たすなら, $\forall i \in \varLambda_{k+1}$ に対し, $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つとき, 明らかに $\varphi_\varPhi \left(\sum_{i \in \varLambda_{k+1}} \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} \varphi_\varPhi \left(\mathbf{v}_i \right)$ が成り立つので, $\exists i' \in \varLambda_{k+1}$ に対し, $\mathbf{v}_{i'} \neq \mathbf{0}$ が成り立ってこれ以外のすべての vectors$\mathbf{v}_i$ は, ある非負実数 k_i が存在して, $\mathbf{v}_i = k_i \mathbf{v}_{i'}$ を満たすとしよう. このとき, $k_{i'} = 1$ とおいて, $\left| \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} k_i \right| = \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} k_i = \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} |k_i|$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varphi_\varPhi \left(\sum_{i \in \varLambda_{k+1}} \mathbf{v}_i \right) &= \varphi_\varPhi \left(\sum_{i \in \varLambda_{k+1}} k_i \mathbf{v}_{i'} \right) \\
&= \left| \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} k_i \right| \varphi_\varPhi \left(\mathbf{v}_{i'} \right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} |k_i| \varphi_\varPhi \left(\mathbf{v}_{i'} \right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} \varphi_\varPhi \left(k_i \mathbf{v}_{i'} \right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} \varphi_\varPhi \left(\mathbf{v}_i \right)
\end{aligned}$$

$\varphi_\varPhi \left(\sum_{i \in \varLambda_{k+1}} \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i \in \varLambda_{k+1}} \varphi_\varPhi \left(\mathbf{v}_i \right)$ が成り立つ.

以上の議論により, $n = k + 1$ のときでも, 成り立つので, 数学的帰納法により示すべきことが示された. □

定理 3.6.9. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_\varPhi)$ について, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, 次式が成り立つ.

$$-1 \leq \frac{\varPhi \left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right)}{\varphi_\varPhi \left(\mathbf{v} \right) \varphi_\varPhi \left(\mathbf{w} \right)} \leq 1$$

なお, $\mathbb{R} \subset K$ のときでは, 必ずしも成り立たない. 例えば, 標準内積で vectors$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ について考えれば, $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = i$ となり大小関係がそもそも定義できなくなっている.

定義 3.6.3. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_\varPhi)$ について, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ が成り立つとき, 実数 $\mathrm{Arccos} \frac{\varPhi \left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right)}{\varphi_\varPhi \left(\mathbf{v} \right) \varphi_\varPhi \left(\mathbf{w} \right)}$ をそれらの vectors$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ のなす角という. 逆余接関数の定義より次式が成り立つ.

$$0 \leq \mathrm{Arccos} \frac{\varPhi \left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right)}{\varphi_\varPhi \left(\mathbf{v} \right) \varphi_\varPhi \left(\mathbf{w} \right)} \leq \pi$$

証明. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_\varPhi)$ について, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\varphi_\varPhi \left(\mathbf{v} \right) \varphi_\varPhi \left(\mathbf{w} \right) \neq 0$ が成り立つことに注意すれば, 定理 3.6.4 の Schwarz の不等式より次のようになる.

$$\left| \varPhi \left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right) \right| \leq \varphi_\varPhi \left(\mathbf{v} \right) \varphi_\varPhi \left(\mathbf{w} \right) \Leftrightarrow -\varphi_\varPhi \left(\mathbf{v} \right) \varphi_\varPhi \left(\mathbf{w} \right) \leq \varPhi \left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right) \leq \varphi_\varPhi \left(\mathbf{v} \right) \varphi_\varPhi \left(\mathbf{w} \right)$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\varphi_\Phi(\mathbf{v}) \varphi_\Phi(\mathbf{w})} \leq 1$$

□

3.6.2 正規直交基底

定義 3.6.4. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, その vector 空間の族 $\{\mathbf{v}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対し, $\mathbf{v}_\lambda \neq \mathbf{0}$ が成り立つかつ, $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$ に対し, $\lambda \neq \mu$ が成り立つなら, それらの vectors$\mathbf{v}_\lambda$, $\mathbf{v}_\mu$ が直交するとき, 即ち, $\Phi(\mathbf{v}_\lambda, \mathbf{v}_\mu) = 0$ が成り立つとき, その集合 $\{\mathbf{v}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をその内積空間 (V, Φ) 上の直交系といい, 特に, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対し, その内積空間 (V, Φ) から誘導される norm 空間 (V, φ_Φ) について, $\varphi_\Phi(\mathbf{v}_i) = 1$ が成り立つとき, その直交系をその内積空間 (V, Φ) 上の正規直交系という.

定義 3.6.5. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, その vector 空間 V の基底のうち, その内積空間 (V, Φ) 上の直交系, 正規直交系であるものをそれぞれその内積空間 (V, Φ) 上の直交基底, 正規直交基底という.

例えば, $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の標準内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ において, 標準直交基底 $\left\langle (\delta_{ij})_{j \in \Lambda_n} \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ は正規直交基底となっている.

定理 3.6.10. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V, Φ) 上の直交系 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ をなす vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立である.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V, Φ) 上の直交系 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ をなす vectors$\mathbf{v}_i$ において, $\sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つかつ, $\exists i \in \Lambda_n$ に対し, $c_i \neq 0$ が成り立つと仮定しよう. このような添数を i' とすると, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} c_i \mathbf{v}_i + c_{i'} \mathbf{v}_{i'} = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow c_{i'} \mathbf{v}_{i'} = - \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} c_i \mathbf{v}_i \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v}_{i'} = \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \left(-\frac{c_i}{c_{i'}} \right) \mathbf{v}_i
\end{aligned}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{v}_{i'}, \mathbf{v}_{i'}) &= \Phi\left(\mathbf{v}_{i'}, \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \left(-\frac{c_i}{c_{i'}} \right) \mathbf{v}_i \right) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \left(-\frac{c_i}{c_{i'}} \right) \Phi(\mathbf{v}_{i'}, \mathbf{v}_i) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \{i'\}} \left(-\frac{c_i}{c_{i'}} \right) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

一方で, その族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ は直交系なので, $\mathbf{v}_{i'} \neq \mathbf{0}$ が成り立つ. したがって, $\Phi(\mathbf{v}_{i'}, \mathbf{v}_{i'}) \neq 0$ が成り立つことになるが, これは上記の議論に矛盾している. 以上の議論により, $\sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ, 即ち, その直交系 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \Lambda_n}$ をなす vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立である. □

定理 3.6.11 (Gram-Schmidt の正規直交化法)**.** $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_\varPhi)$, その vector 空間 V の任意の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, 次のように vector$\mathbf{o}_i$ がおかれると,

$$\mathbf{o}_i = \frac{\mathbf{v}_i - \sum_{j \in \varLambda_{i-1}} \varPhi\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i\right) \mathbf{o}_j}{\varphi_\varPhi\left(\mathbf{v}_i - \sum_{j \in \varLambda_{i-1}} \varPhi\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i\right) \mathbf{o}_j\right)}$$

即ち, 次のようにおかれると,

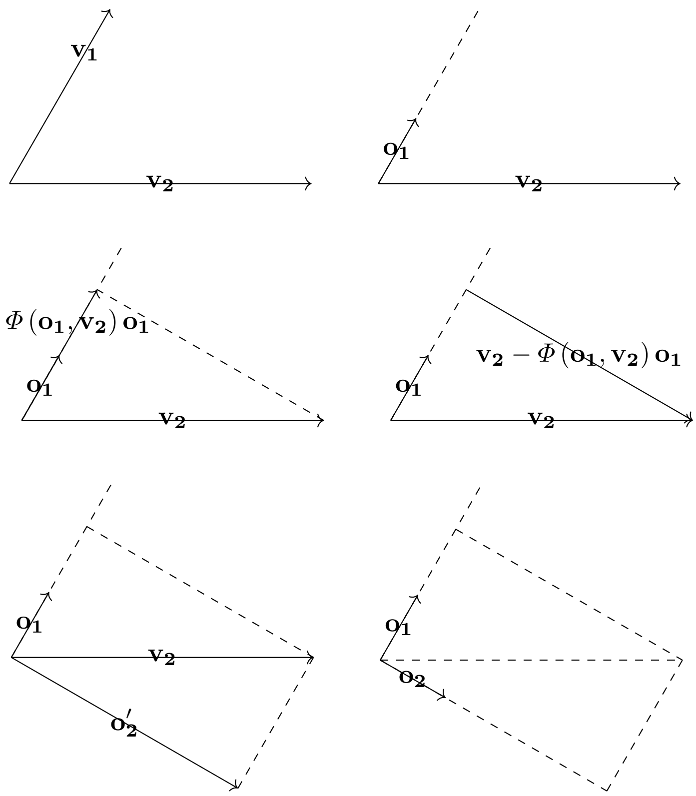
$$\begin{aligned}
\mathbf{o}_1' &= \mathbf{v}_1 & \mathbf{o}_1 &= \mathbf{o}_1' / \varphi_\varPhi\left(\mathbf{o}_1'\right) \\
\mathbf{o}_2' &= \mathbf{v}_2 - \varPhi\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right) \mathbf{o}_1 & \mathbf{o}_2 &= \mathbf{o}_2' / \varphi_\varPhi\left(\mathbf{o}_2'\right) \\
\mathbf{o}_3' &= \mathbf{v}_3 - \varPhi\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\right) \mathbf{o}_1 - \varPhi\left(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\right) \mathbf{o}_2 & \mathbf{o}_3 &= \mathbf{o}_3' / \varphi_\varPhi\left(\mathbf{o}_3'\right) \\
&\vdots & &\vdots \\
\mathbf{o}_n' &= \mathbf{v}_n - \varPhi\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n\right) \mathbf{o}_1 - \cdots - \varPhi\left(\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n\right) \mathbf{o}_{n-1} & \mathbf{o}_n &= \mathbf{o}_n' / \varphi_\varPhi\left(\mathbf{o}_n'\right)
\end{aligned}$$

その組 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその内積空間 $(V, \varPhi)$ 上の正規直交基底をなす. さらに, $\forall k \in \varLambda_n$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \varLambda_k} = \operatorname{span}\left\{\mathbf{o}_i\right\}_{i \in \varLambda_k}$$

この定理を Gram-Schmidt の正規直交化法という.

この定理は次の図のようにして考えられれば, 心象しやすかろう.



証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_\varPhi)$, その vector 空間 V の任意の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, 次のように vector$\mathbf{o}_i$ がおかれ

ると,

$$\mathbf{o}_i = \frac{\mathbf{v}_i - \sum_{j \in \varLambda_{i-1}} \varPhi\left(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_i \right) \mathbf{o}_j}{\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v}_i - \sum_{j \in \varLambda_{i-1}} \varPhi\left(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_i \right) \mathbf{o}_j \right)}$$

$n = 1$ のときでは明らかなので, $2 \leq n = l$ のとき, その組 $\left\langle \mathbf{o}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_l}$ はその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{ \mathbf{v}_i \right\}_{i \in \varLambda_l}$ 上の基底をなし, さらに, $\forall k \in \varLambda_l$ に対し, 次式が成り立つと仮定しよう.

$$\mathrm{span}\left\{ \mathbf{v}_i \right\}_{i \in \varLambda_k} = \mathrm{span}\left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_k}$$

$n = l + 1$ のとき, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{o}_{l+1}' = \mathbf{v}_{l+1} - \sum_{j \in \varLambda_l} \varPhi\left(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_{l+1} \right) \mathbf{o}_j$$

次のようになるかつ,

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_{l+1}' &= \mathbf{v}_{l+1} - \sum_{j \in \varLambda_l} \varPhi\left(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_{l+1} \right) \mathbf{o}_j \\ &= - \sum_{j \in \varLambda_l} \varPhi\left(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_{l+1} \right) \mathbf{o}_j + \mathbf{v}_{l+1} \end{aligned}$$

次のようになるので,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{l+1} &= \mathbf{v}_{l+1} - \sum_{j \in \varLambda_l} \varPhi\left(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_{l+1} \right) \mathbf{o}_j + \sum_{j \in \varLambda_l} \varPhi\left(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_{l+1} \right) \mathbf{o}_j \\ &= \sum_{j \in \varLambda_l} \varPhi\left(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_{l+1} \right) \mathbf{o}_j + \mathbf{o}_{l+1}' \end{aligned}$$

次式が成り立つ.

$$\mathbf{o}_{l+1}' \in \mathrm{span}\left\{ \mathbf{o}_j \right\}_{j \in \varLambda_l} \cup \left\{ \mathbf{v}_{l+1} \right\}, \quad \mathbf{v}_{l+1} \in \mathrm{span}\left\{ \mathbf{o}_j \right\}_{j \in \varLambda_l} \cup \left\{ \mathbf{o}_{l+1}' \right\}$$

これにより, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\left\{ \mathbf{o}_j \right\}_{j \in \varLambda_l} \cup \left\{ \mathbf{v}_{l+1} \right\}$ が成り立つなら, 次のように表されることができるので,

$$\mathbf{v} = \sum_{j \in \varLambda_l} a_j \mathbf{o}_j + a_{l+1} \mathbf{v}_{l+1}, \quad \mathbf{v}_{l+1} = \sum_{j \in \varLambda_l} b_j \mathbf{o}_j + b_{l+1} \mathbf{o}_{l+1}'$$

次のようになり,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{j \in \varLambda_l} a_j \mathbf{o}_j + a_{l+1} \mathbf{v}_{l+1} \\ &= \sum_{j \in \varLambda_l} a_j \mathbf{o}_j + a_{l+1} \left(\sum_{j \in \varLambda_l} b_j \mathbf{o}_j + b_{l+1} \mathbf{o}_{l+1}' \right) \\ &= \sum_{j \in \varLambda_l} a_j \mathbf{o}_j + \sum_{j \in \varLambda_l} a_{l+1} b_j \mathbf{o}_j + a_{l+1} b_{l+1} \mathbf{o}_{l+1}' \\ &= \sum_{j \in \varLambda_l} \left(a_j + a_{l+1} b_j \right) \mathbf{o}_j + a_{l+1} b_{l+1} \mathbf{o}_{l+1}' \end{aligned}$$

したがって, $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\{\mathbf{o}_j\}_{j \in \Lambda_l} \cup \left\{\mathbf{o}'_{l+1}\right\}$ が得られるかつ, $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\{\mathbf{o}_j\}_{j \in \Lambda_l} \cup \left\{\mathbf{o}'_{l+1}\right\}$ が成り立つなら, 次のように表されることができるので,

$$\mathbf{v} = \sum_{j \in \Lambda_l} a_j \mathbf{o}_j + a_{l+1}\mathbf{o}'_{l+1}, \quad \mathbf{o}'_{l+1} = \sum_{j \in \Lambda_l} b_j \mathbf{o}_j + b_{l+1}\mathbf{v}_{l+1}$$

次のようになり,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \sum_{j \in \Lambda_l} a_j \mathbf{o}_j + a_{l+1}\mathbf{o}'_{l+1}\\
&= \sum_{j \in \Lambda_l} a_j \mathbf{o}_j + a_{l+1}\left(\sum_{j \in \Lambda_l} b_j \mathbf{o}_j + b_{l+1}\mathbf{v}_{l+1}\right)\\
&= \sum_{j \in \Lambda_l} a_j \mathbf{o}_j + \sum_{j \in \Lambda_l} a_{l+1} b_j \mathbf{o}_j + a_{l+1} b_{l+1}\mathbf{v}_{l+1}\\
&= \sum_{j \in \Lambda_l} \left(a_j + a_{l+1} b_j\right)\mathbf{o}_j + a_{l+1} b_{l+1}\mathbf{v}_{l+1}
\end{aligned}$$

したがって, $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\{\mathbf{o}_j\}_{j \in \Lambda_l} \cup \{\mathbf{v}_{l+1}\}$ が得られる. これにより, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{span}\{\mathbf{o}_j\}_{j \in \Lambda_l} \cup \{\mathbf{v}_{l+1}\} = \mathrm{span}\{\mathbf{o}_j\}_{j \in \Lambda_l} \cup \left\{\mathbf{o}'_{l+1}\right\}$$

さらに, $\sum_{j \in \Lambda_l} c_j \mathbf{o}_j + c_{l+1}\mathbf{o}'_{l+1} = \mathbf{0}$ が成り立つなら, 数学的帰納法の仮定より $\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_l} = \mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_i\right\}_{i \in \Lambda_l}$ が成り立つので, $\forall j \in \Lambda_l$ に対し, $o_{l+1,j} = 0$ とおくと, 次のように表されることができるので,

$$\mathbf{o}_j = \sum_{i \in \Lambda_{l+1}} o_{ij}\mathbf{v}_i, \quad \mathbf{o}'_{l+1} = \sum_{i \in \Lambda_{l+1}} o_{i,l+1}\mathbf{v}_i$$

次のようになり,

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \sum_{j \in \Lambda_l} c_j \mathbf{o}_j + c_{l+1}\mathbf{o}'_{l+1}\\
&= \sum_{j \in \Lambda_l} c_j \sum_{i \in \Lambda_{l+1}} o_{ij}\mathbf{v}_i + c_{l+1}\sum_{i \in \Lambda_{l+1}} o_{i,l+1}\mathbf{v}_i\\
&= \sum_{i \in \Lambda_{l+1}} \sum_{j \in \Lambda_l} c_j o_{ij}\mathbf{v}_i + \sum_{i \in \Lambda_{l+1}} c_{l+1} o_{i,l+1}\mathbf{v}_i\\
&= \sum_{i \in \Lambda_{l+1}} \sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{ij}\mathbf{v}_i
\end{aligned}$$

これらの vectors$\mathbf{v}_i$ は線形独立であるので, $\forall i \in \Lambda_{l+1}$ に対し, $\sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{ij} = 0$ が成り立つ. これにより, 次のようになる.

$$\begin{cases}
\sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{1j} = 0\\
\sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{2j} = 0\\
\quad\vdots\\
\sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{lj} = 0\\
\sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{l+1,j} = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
c_1 o_{11} + c_2 o_{12} + \cdots + c_l o_{1l} + c_{l+1} o_{1,l+1} = 0\\
c_1 o_{21} + c_2 o_{22} + \cdots + c_l o_{2l} + c_{l+1} o_{2,l+1} = 0\\
\vdots\\
c_1 o_{l1} + c_2 o_{l2} + \cdots + c_l o_{ll} + c_{l+1} o_{l,l+1} = 0\\
c_1 o_{l+1,1} + c_2 o_{l+1,2} + \cdots + c_l o_{l+1,1} + c_{l+1} o_{l+1,l+1} = 0
\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 o_{11} + c_2 o_{12} + \cdots + c_l o_{1l} + c_{l+1} o_{1,l+1} \\ c_1 o_{21} + c_2 o_{22} + \cdots + c_l o_{2l} + c_{l+1} o_{2,l+1} \\ \vdots \\ c_1 o_{l1} + c_2 o_{l2} + \cdots + c_l o_{ll} + c_{l+1} o_{l,l+1} \\ c_1 o_{l+1,1} + c_2 o_{l+1,2} + \cdots + c_l o_{l+1,1} + c_{l+1} o_{l+1,l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & \cdots & o_{1l} & o_{1,l+1} \\ o_{21} & o_{22} & \cdots & o_{2l} & o_{2,l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ o_{l1} & o_{l2} & \cdots & o_{ll} & o_{l,l+1} \\ o_{l+1,1} & o_{l+1,2} & \cdots & o_{l+1,l} & o_{l+1,l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \\ c_{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & \cdots & o_{1l} & 0 \\ o_{21} & o_{22} & \cdots & o_{2l} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ o_{l1} & o_{l2} & \cdots & o_{ll} & 0 \\ o_{l+1,1} & o_{l+1,2} & \cdots & o_{l+1,l} & o_{l+1,l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \\ c_{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

そこで, 基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_l}$ が α とおかれると, $\forall j \in \Lambda_l$ に対し, $f(\mathbf{v}_j) = \mathbf{o}_j$ なる線形写像 $f : \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_l} \rightarrow \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i \in \Lambda_l}$ が考えられると, これは線形同型写像であり, 基底変換における線形同型写像 φ_α を用いて線形写像 $\varphi_\alpha^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha : K^l \rightarrow K^l$ が考えられれば, その vector 空間 K^l の標準直交基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \Lambda_l}$ を用いて次のようになることから,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha (\mathbf{e}_j) &= \varphi_\alpha^{-1} \left(f \left(\varphi_\alpha (\mathbf{e}_j) \right) \right) \\ &= \varphi_\alpha^{-1} \left(f (\mathbf{v}_j) \right) \\ &= \varphi_\alpha^{-1} (\mathbf{o}_j) \\ &= \varphi_\alpha^{-1} \left(\sum_{i \in \Lambda_{l+1}} o_{ij} \mathbf{v}_i \right) \\ &= \varphi_\alpha^{-1} \left(\sum_{i \in \Lambda_l} o_{ij} \mathbf{v}_i + o_{l+1,j} \mathbf{v}_{l+1} \right) \\ &= \varphi_\alpha^{-1} \left(\sum_{i \in \Lambda_l} o_{ij} \mathbf{v}_i \right) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_l} o_{ij} \varphi_\alpha^{-1} (\mathbf{v}_i) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_l} o_{ij} \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} o_{1j} \\ o_{2j} \\ \vdots \\ o_{lj} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

その線形写像 f のその基底 α に関する表現行列 $[f]_\alpha^\alpha$ が次を満たす.

$$[f]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & \cdots & o_{1l} \\ o_{21} & o_{22} & \cdots & o_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{l1} & o_{l2} & \cdots & o_{ll} \end{pmatrix}$$

その線形写像 f が線形同型写像となっているので, その行列 $[f]_\alpha^\alpha$ は正則行列である. したがって, ある正則行

列 P が存在して, $P[f]_\alpha^\alpha = I_l$ が成り立つ. 次のようにおかれると,

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1l} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{l1} & p_{l2} & \cdots & p_{ll} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} o_{l+1,1} & o_{l+1,2} & \cdots & o_{l+1,l} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \\ c_{l+1} \end{pmatrix}$$

行列 $\begin{pmatrix} P & \\ & 1 \end{pmatrix}$ も正則行列となるので[*23], 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{1j} = 0 \\ \sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{2j} = 0 \\ \quad\vdots \\ \sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{lj} = 0 \\ \sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{l+1,j} = 0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & \cdots & o_{1l} & 0 \\ o_{21} & o_{22} & \cdots & o_{2l} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ o_{l1} & o_{l2} & \cdots & o_{ll} & 0 \\ o_{l+1,1} & o_{l+1,2} & \cdots & o_{l+1,l} & o_{l+1,l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \\ c_{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} [f]_\alpha^\alpha & \\ \mathbf{c} & o_{l+1,l+1} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} P & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [f]_\alpha^\alpha & \\ \mathbf{c} & o_{l+1,l+1} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} P[f]_\alpha^\alpha & \\ \mathbf{c} & o_{l+1,l+1} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_l & \\ \mathbf{c} & o_{l+1,l+1} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

そこで, 行の基本変形により $\begin{pmatrix} I_l & \\ \mathbf{c} & o_{l+1,l+1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_l & \\ & o_{l+1,l+1} \end{pmatrix}$ とすることができるので, そうすれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{1j} = 0 \\ \sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{2j} = 0 \\ \quad\vdots \\ \sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{lj} = 0 \\ \sum_{j \in \Lambda_{l+1}} c_j o_{l+1,j} = 0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_l & \\ \mathbf{c} & o_{l+1,l+1} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_l & \\ & o_{l+1,l+1} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

[*23] 逆行列が $\begin{pmatrix} P^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}$ と与えられることから分かる.

ここで, $o_{l+1,l+1}=0$ と仮定すると, $\mathbf{o}'_{l+1}=\sum_{i\in\varLambda_{l+1}} o_{i,l+1}\mathbf{v}_i=\sum_{i\in\varLambda_l} o_{i,l+1}\mathbf{v}_i$ より $\mathbf{o}'_{l+1}=\mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_j\right\}_{j\in\varLambda_l}$ が得られる．そこで, $\mathbf{v}_{l+1}\in\mathrm{span}\{\mathbf{o}_j\}_{j\in\varLambda_l}\cup\left\{\mathbf{o}'_{l+1}\right\}$ が成り立つかつ, 数学的帰納法の仮定より $\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_l}=\mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_j\right\}_{j\in\varLambda_l}$ が成り立つので, $\mathbf{v}_{l+1}\in\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_l}$ となってその vector$\mathbf{v}_{l+1}$ は $i\in\varLambda_l$ なるそれらの vectors$\mathbf{v}_i$ の線形結合であり, したがって, $i\in\varLambda_{l+1}$ なるこれらの vectors$\mathbf{v}_i$ は線形従属となるが, これはこれらの vectors$\mathbf{v}_i$ がその vector 空間 V の基底をなすことに矛盾している．

したがって, $o_{l+1,l+1}\neq 0$ が成り立ち行の基本変形により次のようになるので,

$$\begin{pmatrix} I_l & \\ & o_{l+1,l+1}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} I_l & \\ & 1\end{pmatrix}=I_{l+1}$$

次のようになり,

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}
\sum_{j\in\varLambda_{l+1}} c_j o_{1j}=0\\
\sum_{j\in\varLambda_{l+1}} c_j o_{2j}=0\\
\quad\vdots\\
\sum_{j\in\varLambda_{l+1}} c_j o_{lj}=0\\
\sum_{j\in\varLambda_{l+1}} c_j o_{l+1,j}=0
\end{cases}
\Leftrightarrow\begin{pmatrix} I_l & \\ & o_{l+1,l+1}\end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}\\
&\Leftrightarrow I_{l+1}\mathbf{x}=\mathbf{x}=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

したがって, $\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_l\\ c_{l+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}$ が得られる．これにより, $i\in\varLambda_l$ なるそれらの vectors$\mathbf{o}_i$, $\mathbf{o}'_{l+1}$ は線形独立である．

したがって, $\mathbf{o}'_{l+1}\neq\mathbf{0}$ が成り立つので, $\varphi_\varPhi\left(\mathbf{o}'_{l+1}\right)\neq 0$ が得られる．そこで, $\mathbf{o}_{l+1}=\dfrac{\mathbf{o}'_{l+1}}{\varphi_\varPhi\left(\mathbf{o}'_{l+1}\right)}$ とおかれれば, もちろん, $\forall i\in\varLambda_{l+1}$ に対し, それらの vectors$\mathbf{o}_i$ は線形独立であり, さらに, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_{l+1}}&=\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_l}\oplus\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_{l+1}\right\}\\
&=\mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_j\right\}_{j\in\varLambda_l}\oplus\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_{l+1}\right\}\\
&=\mathrm{span}\{\mathbf{o}_j\}_{j\in\varLambda_l}\cup\left\{\mathbf{v}_{l+1}\right\}\\
&=\mathrm{span}\{\mathbf{o}_j\}_{j\in\varLambda_l}\cup\left\{\mathbf{o}'_{l+1}\right\}\\
&=\mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_j\right\}_{j\in\varLambda_l}\oplus\mathrm{span}\left\{\mathbf{o}'_{l+1}\right\}\\
&=\mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_j\right\}_{j\in\varLambda_l}\oplus\mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_{l+1}\right\}\\
&=\mathrm{span}\{\mathbf{o}_j\}_{j\in\varLambda_l}\cup\left\{\mathbf{o}_{l+1}\right\}\\
&=\mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_j\right\}_{j\in\varLambda_{l+1}}
\end{aligned}$$

$j\in\varLambda_{l+1}$ なるこれらの vectors$\mathbf{o}_j$ はその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_{l+1}}$ を生成する．以上の議論により, その組 $\langle\mathbf{o}_j\rangle_{j\in\varLambda_{l+1}}$ はその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_{l+1}}$ の基底をなす．

また, $\forall i,j \in \varLambda_{l+1}$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
i,j \in \varLambda_{l+1} &\Leftrightarrow i \in \varLambda_{l+1} \wedge j \in \varLambda_{l+1}\\
&\Leftrightarrow (i \in \varLambda_l \vee i = l+1) \wedge (j \in \varLambda_l \vee j = l+1)\\
&\Leftrightarrow (i \in \varLambda_l \wedge j \in \varLambda_l) \vee (i \in \varLambda_l \wedge j = l+1) \vee (i = l+1 \wedge j \in \varLambda_l) \vee (i = l+1 \wedge j = l+1)\\
&\Leftrightarrow i,j \in \varLambda_l \vee (i \in \varLambda_l \wedge j = l+1) \vee (i = l+1 \wedge j \in \varLambda_l) \vee i = j = l+1
\end{aligned}$$

$i = j$ のとき, $i \in \varLambda_l$ かつ $j = l+1$, あるいは, $i = l+1$ かつ $j \in \varLambda_l$ が成り立つことはない. $i,j \in \varLambda_l$ のとき, 数学的帰納法の仮定により, $\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j) = 1$ が成り立っている. $i = j = l+1$ のとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j) &= \varPhi(\mathbf{o}_{l+1}, \mathbf{o}_{l+1})\\
&= \varPhi\left(\frac{\mathbf{o}'_{l+1}}{\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})}, \frac{\mathbf{o}'_{l+1}}{\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})}\right)\\
&= \frac{1}{\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})^2}\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1}, \mathbf{o}'_{l+1})\\
&= \frac{1}{\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})^2}\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})^2 = 1
\end{aligned}$$

$i \neq j$ のとき, $i,j \in \varLambda_l$ のとき, 数学的帰納法の仮定により, $\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j) = 0$ が成り立っている. $i \in \varLambda_l$ かつ $j = l+1$ のとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j) &= \varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_{l+1})\\
&= \varPhi\left(\mathbf{o}_i, \frac{\mathbf{o}'_{l+1}}{\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})}\right)\\
&= \frac{1}{\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})}\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}'_{l+1})\\
&= \frac{1}{\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})}\varPhi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}_{l+1} - \sum_{j \in \varLambda_l}\varPhi(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_{l+1})\mathbf{o}_j\right)\\
&= \frac{1}{\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})}\left(\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}_{l+1}) - \sum_{j \in \varLambda_l}\varPhi(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_{l+1})\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j)\right)\\
&= \frac{1}{\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})}\left(\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}_{l+1}) - \sum_{\substack{j \in \varLambda_l\\ i \neq j}}\varPhi(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_{l+1})\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j) - \varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}_{l+1})\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_i)\right)\\
&= \frac{1}{\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})}\left(\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}_{l+1}) - \sum_{\substack{j \in \varLambda_l\\ i \neq j}}\varPhi(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}_{l+1}) \cdot 0 - \varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}_{l+1}) \cdot 1\right)\\
&= \frac{1}{\varphi_\varPhi(\mathbf{o}'_{l+1})}(\varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}_{l+1}) - \varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}_{l+1})) = 0
\end{aligned}$$

$i = l+1$ かつ $j \in \varLambda_l$ のときも同様にして示される. これにより, その組 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_{l+1}}$ はその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \varLambda_{l+1}}$ 上の直交基底をなしている.

さらに, $\forall i \in \varLambda_{l+1}$ に対し, $i \in \varLambda_l$ のとき, 数学的帰納法の仮定より $\varphi_\varPhi\left(\mathbf{o}_i\right) = 1$ が成り立つ. $i = l+1$ のとき, 定義より次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_\varPhi\left(\mathbf{o}_{l+1}\right) &= \varphi_\varPhi\left(\frac{\mathbf{o}'_{l+1}}{\varphi_\varPhi\left(\mathbf{o}'_{l+1}\right)}\right)\\ &= \frac{1}{\varphi_\varPhi\left(\mathbf{o}'_{l+1}\right)}\varphi_\varPhi\left(\mathbf{o}'_{l+1}\right) = 1\end{aligned}$$

これにより, その組 $\left\langle\mathbf{o}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_{l+1}}$ はその部分 vector 空間 $\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_{l+1}}$ 上の正規直交基底をなしている.

以上, 数学的帰納法により, $\forall k \in \varLambda_n$ に対し, その組 $\left\langle\mathbf{o}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_k}$ はその部分 vector 空間 $\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_k}$ 上の正規直交基底をなし, さらに, 次式が成り立つ.

$$\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_k} = \operatorname{span}\left\{\mathbf{o}_i\right\}_{i\in\varLambda_k}$$

特に, $V = \operatorname{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_n}$ が成り立つので, その組 $\left\langle\mathbf{o}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ はその vector 空間 V 上の正規直交基底をなす. さらに, $\forall k \in \varLambda_n$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_k} = \operatorname{span}\left\{\mathbf{o}_i\right\}_{i\in\varLambda_k}$$

$\square$

例えば, 体 $\mathbb{R}$ 上の vector 空間 $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ の標準内積空間 $\left(\mathbb{R}^n,(\bullet|\bullet)\right)$ における正規直交基底を Gram-Schmidt の正規直交化法で求めよう. まず, その vector 空間 $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ の基底を求めよう. このとき, 次のようになることから,

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&1&2\\0&1&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定理 1.8.9 よりその vector 空間 $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ の基底が $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ と与えられる. これから, Gram-Schmidt の正規直交化法により, 次のようになるので,

$$\mathbf{o}'_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{o}_1 = \frac{\mathbf{o}_1'}{\|\mathbf{o}_1'\|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{array}{cc} & 1\cdot 1\\ + & 1\cdot 1\\ + & 0\cdot 0\\ + & 1\cdot 1\end{array}}} = 1/\sqrt{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{o}_2' = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \left(\begin{array}{cc} & \left(1/\sqrt{3}\right)\cdot 1\\ + & \left(1/\sqrt{3}\right)\cdot 2\\ + & 0\cdot 1\\ + & \left(1/\sqrt{3}\right)\cdot 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - 4/\sqrt{3}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4/3\\4/3\\0\\4/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{o}_2 = \frac{\mathbf{o}_2'}{\|\mathbf{o}_2'\|} = \frac{\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}\right)}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{array}{cc} & (-1/3)\cdot(-1/3)\\ + & (2/3)\cdot(2/3)\\ + & 1\cdot 1\\ + & (-1/3)\cdot(-1/3)\end{array}}} = \sqrt{3/5}\begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{15}\\2/\sqrt{15}\\3/\sqrt{15}\\-1/\sqrt{15}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{o}'_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -1/\sqrt{15} \\ 2/\sqrt{15} \\ \sqrt{3}/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{15} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1/\sqrt{15} \\ 2/\sqrt{15} \\ \sqrt{3}/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{15} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & \left(1/\sqrt{3}\right) \cdot 0 \\ + & \left(1/\sqrt{3}\right) \cdot 1 \\ + & 0 \cdot 0 \\ + & \left(1/\sqrt{3}\right) \cdot 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(-1/\sqrt{15}\right) \cdot 0 \\ + \left(2/\sqrt{15}\right) \cdot 1 \\ + \left(\sqrt{3}/\sqrt{5}\right) \cdot 0 \\ + \left(-1/\sqrt{15}\right) \cdot 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{15} \\ 2/\sqrt{15} \\ \sqrt{3}/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{15} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} - 2/\sqrt{15} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{15} \\ 2/\sqrt{15} \\ \sqrt{3}/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{15} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/15 \\ 4/15 \\ 2/5 \\ -2/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{o}_3 &= \frac{\mathbf{o}'_3}{\|\mathbf{o}'_3\|} = \frac{\begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \right)}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{matrix} & (-1/5) \cdot (-1/5) \\ + & (2/5) \cdot (2/5) \\ + & (-2/5) \cdot (-2/5) \\ + & (-1/5) \cdot (-1/5) \end{matrix}}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} \\ -2/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

求めるその vector 空間 $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ の正規直交基底が $\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{15} \\ 2/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} \\ -2/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \right\rangle$ と与えられる.

定理 3.6.12. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_\varPhi)$, その vector 空間 V の $r \leq n$ なる正規直交系 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_r}$ が与えられたとき, $i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r$ なる適切な $n - r$ つの vectors$\mathbf{o}_i$ を付け加えた組 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ がその vector 空間 V の正規直交基底をなすようにすることができる.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_\varPhi)$,

その vector 空間 V の $r \leq n$ なる正規直交系 $\left\langle \mathbf{o}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_r}$ が与えられたとき, 定理 3.6.10 よりそれらの vectors$\mathbf{o}_i$ は線形独立であるので, その組 $\left\langle \mathbf{o}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_r}$ はそれらの vectors$\mathbf{o}_i$ から生成される部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_r}$ のその内積 $\varPhi$ における正規直交基底をなす. したがって, $\mathbf{o}_i = \mathbf{v}_i$ として定理 1.1.22 よりその基底 $\left\langle \mathbf{o}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_r}$ を拡大したその vector 空間 V の基底 $\left\langle \mathbf{o}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ が存在する. そこで, Gram-Schmidt の正規直交化法により, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, 次のように vector$\mathbf{p}_i$ がおかれると,

$$\mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{v}_i - \sum_{j \in \varLambda_{i-1}} \varPhi\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \right) \mathbf{p}_j}{\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v}_i - \sum_{j \in \varLambda_{i-1}} \varPhi\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \right) \mathbf{p}_j \right)}$$

その組 $\left\langle \mathbf{p}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその内積空間 $(V, \varPhi)$ 上の正規直交基底をなす. ここで, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v}_i \right) = \varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{o}_i \right) = 1$ が成り立つかつ, $\forall j \in \varLambda_{i-1}$ に対し, $i \neq j$ が成り立つので, $\varPhi\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \right) = \varPhi\left(\mathbf{o}_j, \mathbf{o}_i \right) = 0$ が得られる. したがって, 次のようになることから,

$$\mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{v}_i - \sum_{j \in \varLambda_{i-1}} 0\mathbf{p}_j}{\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v}_i - \sum_{j \in \varLambda_{i-1}} 0\mathbf{p}_j \right)} = \frac{\mathbf{v}_i}{\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v}_i \right)} = \frac{\mathbf{o}_i}{\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{o}_i \right)} = \frac{\mathbf{o}_i}{1} = \mathbf{o}_i$$

$\forall i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r$ に対し, $\mathbf{o}_i = \mathbf{p}_i$ とおけば, よって, $i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r$ なる適切な $n - r$ つの vectors$\mathbf{o}_i$ を付け加えた組 $\left\langle \mathbf{o}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ がその vector 空間 V の正規直交基底をなすようにすることができる. □

3.6.3 Pythagoras の定理

定理 3.6.13 (Pythagoras の定理)**.** $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_{\varPhi})$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, それらの vectors$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ が直交する, 即ち, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ が成り立つなら, 次式が成り立つ.

$$\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2$$

この定理を Pythagoras の定理という.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_{\varPhi})$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, それらの vectors$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ が直交する, 即ち, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ が成り立つなら, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 &= \varPhi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \overline{\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 0 + \overline{0} + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2
\end{aligned}$$

□

定理 3.6.14 (Pythagoras の定理の逆)**.** $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_{\varPhi})$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つなら,

$$\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2$$

それらの vectors$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ が直交する, 即ち, $\Phi(\mathbf{v},\mathbf{w})=0$ が成り立つ. この定理を Pythagoras の定理の逆という.

なお, $\mathbb{R}\subset K$ のときでは必ずしも成り立たない. 例えば, 標準内積空間 $(\mathbb{C}^n, \langle\bullet|\bullet\rangle)$ で vectors$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$ について考えればよい.

証明. $K\subseteq\mathbb{R}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 (V,Φ) から誘導される norm 空間 (V,φ_Φ) が与えられたとき, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次式が成り立つなら,

$$\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2=\varphi_\Phi(\mathbf{v})^2+\varphi_\Phi(\mathbf{w})^2$$

$\Phi(\mathbf{v},\mathbf{w})\in\mathbb{R}$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2&=\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})\\&=\Phi(\mathbf{v},\mathbf{v})+\Phi(\mathbf{v},\mathbf{w})+\Phi(\mathbf{w},\mathbf{v})+\Phi(\mathbf{w},\mathbf{w})\\&=\Phi(\mathbf{v},\mathbf{v})+\Phi(\mathbf{v},\mathbf{w})+\overline{\Phi(\mathbf{v},\mathbf{w})}+\Phi(\mathbf{w},\mathbf{w})\\&=\varphi_\Phi(\mathbf{v})^2+2\Phi(\mathbf{v},\mathbf{w})+\varphi_\Phi(\mathbf{w})^2\end{aligned}$$

$\varphi_\Phi(\mathbf{v})^2+\varphi_\Phi(\mathbf{w})^2=\varphi_\Phi(\mathbf{v})^2+2\Phi(\mathbf{v},\mathbf{w})+\varphi_\Phi(\mathbf{w})^2$ が得られる. これにより, $\Phi(\mathbf{v},\mathbf{w})=0$ が成り立つので, それらの vectors$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ が直交する. □

定理 3.6.15. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 (V,Φ) から誘導される norm 空間 (V,φ_Φ) が与えられたとき, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, それらの vectors$\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ が直交するなら, $\varphi_\Phi(\mathbf{v})=\varphi_\Phi(\mathbf{w})$ が成り立つ.

証明. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 (V,Φ) から誘導される norm 空間 (V,φ_Φ) が与えられたとき, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, それらの vectors$\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ が直交するなら, 定理 3.6.13 より次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2+\varphi_\Phi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2&=\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{v}-\mathbf{w})^2\\&=\varphi_\Phi(2\mathbf{v})^2=4\varphi_\Phi(\mathbf{v})^2\end{aligned}$$

$\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{w}-\mathbf{v})=-\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}-\mathbf{w})=0$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2+\varphi_\Phi(\mathbf{w}-\mathbf{v})^2&=\varphi_\Phi(\mathbf{w}+\mathbf{v}+\mathbf{w}-\mathbf{v})^2\\&=\varphi_\Phi(2\mathbf{w})^2=4\varphi_\Phi(\mathbf{w})^2\end{aligned}$$

$\varphi_\Phi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2=\varphi_\Phi(\mathbf{w}-\mathbf{v})^2$ が成り立つことにより $4\varphi_\Phi(\mathbf{v})^2=4\varphi_\Phi(\mathbf{w})^2$ が得られる. よって, $\varphi_\Phi(\mathbf{v})=\varphi_\Phi(\mathbf{w})$ が成り立つ. □

定理 3.6.16. $K\subseteq\mathbb{R}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 (V,Φ) から誘導される norm 空間 (V,φ_Φ) が与えられたとき, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, $\varphi_\Phi(\mathbf{v})=\varphi_\Phi(\mathbf{w})$ が成り立つなら, それらの vectors$\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ が直交する.

なお, $\mathbb{R}\subset K$ のときでは必ずしも成り立たない. 例えば, 標準内積空間 $(\mathbb{C}^n, \langle\bullet|\bullet\rangle)$ で vectors$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}$ について考えればよい.

証明. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 (V, Φ) から誘導される norm 空間 (V, φ_Φ) が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varphi_\Phi(\mathbf{v}) = \varphi_\Phi(\mathbf{w})$ が成り立つなら, $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \in \mathbb{R}$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varphi_\Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} - \mathbf{w})^2 &= \Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\
&\quad + \Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\
&\quad + \overline{\Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w})} + \Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\
&\quad + 2\Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\
&\quad + 2(\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}, -\mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{w}, -\mathbf{w})) \\
&= \Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\
&\quad + 2\left(\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \overline{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} - \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w})\right) \\
&= \varphi_\Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 + \varphi_\Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w})^2 \\
&\quad + 2\left(\varphi_\Phi(\mathbf{v})^2 - \varphi_\Phi(\mathbf{w})^2 + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})\right) \\
&= \varphi_\Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 + \varphi_\Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w})^2 + 2 \cdot 0 \\
&= \varphi_\Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 + \varphi_\Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w})^2
\end{aligned}$$

以上の議論により, 次式が成り立つなら,

$$\varphi_\Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} - \mathbf{w})^2 = \varphi_\Phi(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 + \varphi_\Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w})^2$$

定理 3.6.14, 即ち, Pythagoras の定理の逆よりそれらの vectors$\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ が直交する. □

3.6.4 内積空間と標準内積

定理 3.6.17. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の内積空間 (V, Φ), その vector 空間 V の正規直交基底 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{o}_i$$

$\forall i \in \Lambda_n$ に対し, 次式が成り立つ.

$$a_i = \Phi(\mathbf{o}_i, \mathbf{v})$$

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の内積空間 (V, Φ), その vector 空間 V の正規直交基底 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{o}_i$$

$\forall i \in \Lambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) &= \Phi\left(\mathbf{o}_i, \sum_{j \in \Lambda_n} a_j \mathbf{o}_j\right)\\
&= \sum_{j \in \Lambda_n} a_j \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right)\\
&= \sum_{\substack{j \in \Lambda_n\\ i \neq j}} a_j \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right) + a_i \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_i\right)\\
&= \sum_{\substack{j \in \Lambda_n\\ i \neq j}} a_j \cdot 0 + a_i \cdot 1 = a_i
\end{aligned}$$

□

定理 3.6.18. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の内積空間 (V, Φ), その vector 空間 V の正規直交基底 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{o}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_n} b_i \mathbf{o}_i$$

次式が成り立つ.

$$\Phi\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) = \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \cdots & \overline{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元 vector 空間 V 上の内積空間 (V, Φ), その vector 空間 V の正規直交基底 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{o}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_n} b_i \mathbf{o}_i$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= \Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{o}_i, \sum_{j \in \Lambda_n} b_j \mathbf{o}_j\right)\\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} \sum_{j \in \Lambda_n} \overline{a_i} b_j \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right)\\
&= \sum_{i, j \in \Lambda_n} \overline{a_i} b_j \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right)\\
&= \sum_{\substack{i, j \in \Lambda_n\\ i \neq j}} \overline{a_i} b_j \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right) + \sum_{\substack{i, j \in \Lambda_n\\ i = j}} \overline{a_i} b_j \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right)\\
&= \sum_{\substack{i, j \in \Lambda_n\\ i \neq j}} \overline{a_i} b_j \cdot 0 + \sum_{\substack{i, j \in \Lambda_n\\ i = j}} \overline{a_i} b_j \cdot 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{i,j \in \Lambda_n \\ i=j}} \overline{a_i} b_j \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} \overline{a_i} b_j \\
&= \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \cdots & \overline{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

3.6.5 norm 空間から誘導される内積空間

定理 3.6.19. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 (V, Φ) から誘導される norm 空間 (V, φ_Φ) について, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{4}\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi_\Phi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2$$

証明. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 (V, Φ) から誘導される norm 空間 (V, φ_Φ) について, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 &= \Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \overline{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varphi_\Phi(\mathbf{v})^2 + 2\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_\Phi(\mathbf{w})^2 \\
\varphi_\Phi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 &= \Phi(\mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{v}-\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}, -\mathbf{w}) + \Phi(-\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \Phi(-\mathbf{w}, -\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \overline{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varphi_\Phi(\mathbf{v})^2 - 2\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_\Phi(\mathbf{w})^2
\end{aligned}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \varphi_\Phi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 &= \varphi_\Phi(\mathbf{v})^2 + 2\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_\Phi(\mathbf{w})^2 - \varphi_\Phi(\mathbf{v})^2 + 2\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \varphi_\Phi(\mathbf{w})^2 \\
&= 2\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + 2\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_\Phi(\mathbf{v})^2 - \varphi_\Phi(\mathbf{v})^2 + \varphi_\Phi(\mathbf{w})^2 - \varphi_\Phi(\mathbf{w})^2 \\
&= 4\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})
\end{aligned}$$

よって, 次式が成り立つ.

$$\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{4}\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi_\Phi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2$$

□

定理 3.6.20. $\mathbb{R} \subset K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 (V, Φ) から誘導される norm 空間 (V, φ_Φ) について, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{4}\varphi_\Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi_\Phi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 - \frac{i}{4}\varphi_\Phi(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{4}\varphi_\Phi(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2$$

証明. $\mathbb{R} \subset K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の内積空間 (V, Φ) から誘導される norm 空間 (V, φ_{Φ}) について, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\Phi}(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 &= \Phi(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \overline{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Re}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2 \\
\varphi_{\Phi}(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 &= \Phi(\mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{v}-\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}, -\mathbf{w}) + \Phi(-\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \Phi(-\mathbf{w}, -\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \overline{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 - 2\mathrm{Re}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2 \\
\varphi_{\Phi}(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2 &= \Phi(\mathbf{v}+i\mathbf{w}, \mathbf{v}+i\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}, i\mathbf{w}) + \Phi(i\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \Phi(i\mathbf{w}, i\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + i\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - i\overline{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 - 2\mathrm{Im}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2 \\
\varphi_{\Phi}(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2 &= \Phi(\mathbf{v}-i\mathbf{w}, \mathbf{v}-i\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}, -i\mathbf{w}) + \Phi(-i\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \Phi(-i\mathbf{w}, -i\mathbf{w}) \\
&= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - i\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + i\overline{\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Im}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2
\end{aligned}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\Phi}(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \varphi_{\Phi}(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 &= \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Re}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2 \\
&\quad - \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Re}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2 \\
&= 2\mathrm{Re}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + 2\mathrm{Re}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
&\quad + \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 - \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 + \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2 - \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2 \\
&= 4\mathrm{Re}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
&= \varphi_{\Phi}(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2 - \varphi_{\Phi}(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2 \\
&= \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 - 2\mathrm{Im}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2 \\
&\quad - \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 - 2\mathrm{Im}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2 \\
&= -2\mathrm{Im}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - 2\mathrm{Im}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
&\quad + \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 - \varphi_{\Phi}(\mathbf{v})^2 + \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2 - \varphi_{\Phi}(\mathbf{w})^2 \\
&= -4\mathrm{Im}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})
\end{aligned}$$

これにより, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathrm{Re}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + i\mathrm{Im}\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
&= \frac{1}{4}\left(\varphi_{\Phi}(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \varphi_{\Phi}(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2\right) - \frac{i}{4}\left(\varphi_{\Phi}(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2 - \varphi_{\Phi}(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\varphi_{\Phi}(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi_{\Phi}(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 - \frac{i}{4}\varphi_{\Phi}(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{4}\varphi_{\Phi}(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2
\end{aligned}$$

□

定理 3.6.21. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の norm 空間 (V,φ) について, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つなら,

$$\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 = 2\left(\varphi(\mathbf{v})^2 + \varphi(\mathbf{w})^2\right)$$

次のように写像 $\varPhi_\varphi$ が定義されれば,

$$\varPhi_\varphi : V \times V \to K; (\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2$$

その写像 $\varPhi_\varphi$ は内積となり, したがって, その組 $(V,\varPhi_\varphi)$ はその vector 空間 V 上の内積空間をなす. さらに, その内積空間 $(V,\varPhi_\varphi)$ から誘導される norm 空間はその norm 空間 (V,φ) である.

定義 3.6.6. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の norm 空間 (V,φ) について, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つとき,

$$\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 = 2\left(\varphi(\mathbf{v})^2 + \varphi(\mathbf{w})^2\right)$$

次のような内積 $\varPhi_\varphi$ が定義される.

$$\varPhi_\varphi : V \times V \to K; (\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2$$

その内積 $\varPhi_\varphi$ をその normφ から誘導される内積, その内積空間 $(V,\varPhi_\varphi)$ をその norm 空間 (V,φ) から誘導される内積空間という.

証明. $K \subseteq \mathbb{R}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の norm 空間 (V,φ) について, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つとき,

$$\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 = 2\left(\varphi(\mathbf{v})^2 + \varphi(\mathbf{w})^2\right)$$

次のように写像 $\varPhi_\varphi$ が定義されよう.

$$\varPhi_\varphi : V \times V \to K; (\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2$$

まずは, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ に対し, 次のことが成り立つことを示しておこう.

$$\varPhi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v})^2, \quad \varPhi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \varPhi_\varphi(\mathbf{w},\mathbf{v}), \quad \varPhi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{0}) = 0,$$

$$\varPhi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\varPhi_\varphi(\mathbf{v},2\mathbf{w}), \quad \varPhi_\varphi(\mathbf{v},-\mathbf{w}) = -\varPhi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

実際, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つことに注意すれば,

$$\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 = 2\left(\varphi(\mathbf{v})^2 + \varphi(\mathbf{w})^2\right)$$

その写像 $\varPhi_\varphi$ の定義より次のようになる.

$$\begin{aligned}\varPhi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{v}) &= \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{v})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{v})^2 \\ &= \frac{1}{4}\varphi(2\mathbf{v})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{0})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \cdot 4\varphi\left(\mathbf{v}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot 0\\
&= \varphi\left(\mathbf{v}\right)^2 - 0 = \varphi\left(\mathbf{v}\right)^2\\
\varPhi_\varphi\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{w} + \mathbf{v}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(-\left(\mathbf{w} - \mathbf{v}\right)\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{w} + \mathbf{v}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{w} - \mathbf{v}\right)^2\\
&= \varPhi_\varphi\left(\mathbf{w}, \mathbf{v}\right)\\
\varPhi_\varphi\left(\mathbf{v}, \mathbf{0}\right) &= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{0}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{0}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}\right)^2 = 0\\
\varPhi_\varphi\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2 + \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2 + \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{0} + \mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{0} - \mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{8} \cdot 2\left(\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)^2 + \varphi\left(\mathbf{0} + \mathbf{w}\right)^2\right) - \frac{1}{8} \cdot 2\left(\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2 + \varphi\left(\mathbf{0} - \mathbf{w}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{8} \cdot \left(\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{0} + 2\mathbf{w}\right)^2 + \varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{0}\right)^2\right) - \frac{1}{8} \cdot \left(\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{0} - 2\mathbf{w}\right)^2 + \varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{0}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{0} + 2\mathbf{w}\right)^2 + \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{0}\right)^2 - \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{0} - 2\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{0}\right)^2\\
&= \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{0} + 2\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{0} - 2\mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{0} + 2\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{0} - 2\mathbf{w}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\varPhi_\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{0}, 2\mathbf{w}\right) = \frac{1}{2}\varPhi_\varphi\left(\mathbf{v}, 2\mathbf{w}\right)\\
\varPhi_\varphi\left(\mathbf{v}, -\mathbf{w}\right) &= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)^2\\
&= -\frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)^2 + \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2\\
&= -\left(\frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2\right)\\
&= -\varPhi_\varphi\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right)
\end{aligned}$$

次に, $\forall\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi_\varphi\left(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}\right) = \varPhi_\varphi\left(\mathbf{u}, \mathbf{w}\right) + \varPhi_\varphi\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right)$ が成り立つことを示そう. $\forall\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次式が成り立つことに注意すれば,

$$\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)^2 + \varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2 = 2\left(\varphi\left(\mathbf{v}\right)^2 + \varphi\left(\mathbf{w}\right)^2\right)$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi_\varphi\left(\mathbf{u}, \mathbf{w}\right) + \varPhi_\varphi\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{u} + \mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{u} - \mathbf{w}\right)^2\\
&\quad + \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{8} \cdot 2\left(\varphi\left(\mathbf{u} + \mathbf{w}\right)^2 + \varphi\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{8} \cdot 2 \left(\varphi\left(\mathbf{u} - \mathbf{w} \right)^2 + \varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w} \right)^2 \right)\\
&= \frac{1}{8} \cdot \left(\varphi\left(\mathbf{u} + \mathbf{v} + 2\mathbf{w} \right)^2 + \varphi\left(\mathbf{u} - \mathbf{v} \right)^2 \right)\\
&\quad - \frac{1}{8} \cdot \left(\varphi\left(\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} \right)^2 + \varphi\left(\mathbf{u} - \mathbf{v} \right)^2 \right)\\
&= \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u} + \mathbf{v} + 2\mathbf{w} \right)^2 + \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u} - \mathbf{v} \right)^2\\
&\quad - \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} \right)^2 - \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u} - \mathbf{v} \right)^2\\
&= \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u} + \mathbf{v} + 2\mathbf{w} \right)^2 - \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} \right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{u} + \mathbf{v} + 2\mathbf{w} \right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} \right)^2 \right)\\
&= \frac{1}{2}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{u} + \mathbf{v}, 2\mathbf{w} \right) = \varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \right)
\end{aligned}$$

次に, $\forall m \in \mathbb{N}$ に対し, 数学的帰納法により次のようになる.

$$\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, m\mathbf{w} \right) = \varPhi_{\varphi}\left(m\mathbf{w}, \mathbf{v} \right) = m\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{w}, \mathbf{v} \right) = m\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{w}, \mathbf{v} \right) = m\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right)$$

したがって, $\forall r \in \mathbb{Q}$ に対し, $r < 0$ のとき, 2 つの自然数たち m, n を用いて $r = -\dfrac{m}{n}$ とおかれることができるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, r\mathbf{w} \right) &= \varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, -\frac{m}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= -\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \frac{m}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= -\frac{n}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \frac{m}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= -\frac{m}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \frac{n}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= -\frac{m}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right)\\
&= r\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right)
\end{aligned}$$

$r = 0$ のときでは明らかである. $0 < r$ のとき, 2 つの自然数たち m, n を用いて $r = \dfrac{m}{n}$ とおかれることができるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, r\mathbf{w} \right) &= \varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \frac{m}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= \frac{n}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \frac{m}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= \frac{m}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \frac{n}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= \frac{m}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right)\\
&= r\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right)
\end{aligned}$$

いづれにせよ, $\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, r\mathbf{w} \right) = r\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right)$ が成り立つ. さらに, $\mathbb{Q} \subset K$ のとき, $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し, その集合 $\mathbb{Q}$ のある元の列 $\left(r_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して, $\lim_{n \to \infty} r_n = a$ が成り立ち, 定理 3.1.1 より次式のように写像 d_{φ} が定義されれば,

$$d_{\varphi} : V \times V \to \mathbb{R}; \left(\mathbf{v}, \mathbf{w} \right) \mapsto \varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w} \right)$$

その組 (V,d_{φ}) は距離空間をなすので, 次のようになる[*24].

$$\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},a\mathbf{w}) &= \varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\lim_{n\to\infty}r_n\mathbf{w}\right)\\
&= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+\lim_{n\to\infty}r_n\mathbf{w}\right)^2-\frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-\lim_{n\to\infty}r_n\mathbf{w}\right)^2\\
&\quad -\frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+i\lim_{n\to\infty}r_n\mathbf{w}\right)^2+\frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-i\lim_{n\to\infty}r_n\mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}d_{\varphi}\left(\mathbf{v},-\lim_{n\to\infty}r_n\mathbf{w}\right)^2-\frac{1}{4}d_{\varphi}\left(\mathbf{v},\lim_{n\to\infty}r_n\mathbf{w}\right)^2\\
&\quad -\frac{i}{4}d_{\varphi}\left(\mathbf{v},-i\lim_{n\to\infty}r_n\mathbf{w}\right)^2+\frac{i}{4}d_{\varphi}\left(\mathbf{v},i\lim_{n\to\infty}r_n\mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}d_{\varphi}\left(\lim_{n\to\infty}\mathbf{v},\lim_{n\to\infty}(-r_n\mathbf{w})\right)^2-\frac{1}{4}d_{\varphi}\left(\lim_{n\to\infty}\mathbf{v},\lim_{n\to\infty}r_n\mathbf{w}\right)^2\\
&\quad -\frac{i}{4}d_{\varphi}\left(\lim_{n\to\infty}\mathbf{v},\lim_{n\to\infty}(-ir_n\mathbf{w})\right)^2+\frac{i}{4}d_{\varphi}\left(\lim_{n\to\infty}\mathbf{v},\lim_{n\to\infty}ir_n\mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\left(\lim_{n\to\infty}d_{\varphi}(\mathbf{v},-r_n\mathbf{w})\right)^2-\frac{1}{4}\left(\lim_{n\to\infty}d_{\varphi}(\mathbf{v},r_n\mathbf{w})\right)^2\\
&\quad -\frac{i}{4}\left(\lim_{n\to\infty}d_{\varphi}(\mathbf{v},-ir_n\mathbf{w})\right)^2+\frac{i}{4}\left(\lim_{n\to\infty}d_{\varphi}(\mathbf{v},ir_n\mathbf{w})\right)^2\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}d_{\varphi}(\mathbf{v},-r_n\mathbf{w})^2-\frac{1}{4}d_{\varphi}(\mathbf{v},r_n\mathbf{w})^2-\frac{i}{4}d_{\varphi}(\mathbf{v},-ir_n\mathbf{w})^2+\frac{i}{4}d_{\varphi}(\mathbf{v},ir_n\mathbf{w})^2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+r_n\mathbf{w})^2-\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-r_n\mathbf{w})^2-\frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+ir_n\mathbf{w})^2+\frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-ir_n\mathbf{w})^2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},r_n\mathbf{w})=\lim_{n\to\infty}r_n\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{w})=a\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{w})
\end{aligned}$$

以上の議論により, $\forall a,b\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi}(a\mathbf{u}+b\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \varPhi_{\varphi}(a\mathbf{u},\mathbf{w})+\varPhi_{\varphi}(b\mathbf{v},\mathbf{w})\\
&= \varPhi_{\varphi}(\mathbf{w},a\mathbf{u})+\varPhi_{\varphi}(\mathbf{w},b\mathbf{v})\\
&= a\varPhi_{\varphi}(\mathbf{w},\mathbf{u})+b\varPhi_{\varphi}(\mathbf{w},\mathbf{v})\\
&= a\varPhi_{\varphi}(\mathbf{u},\mathbf{w})+b\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{w})
\end{aligned}$$

$\forall a,b\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi}(\mathbf{u},a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) &= \varPhi_{\varphi}(a\mathbf{v}+b\mathbf{w},\mathbf{u})\\
&= \varPhi_{\varphi}(a\mathbf{v},\mathbf{u})+\varPhi_{\varphi}(b\mathbf{w},\mathbf{u})\\
&= \varPhi_{\varphi}(\mathbf{u},a\mathbf{v})+\varPhi_{\varphi}(\mathbf{u},b\mathbf{w})\\
&= a\varPhi_{\varphi}(\mathbf{u},\mathbf{v})+b\varPhi_{\varphi}(\mathbf{u},\mathbf{w})
\end{aligned}$$

$\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 上記の議論により $\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\varPhi_{\varphi}(\mathbf{w},\mathbf{v})$ が成り立つかつ, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ が成り立つなら, $0<\varphi(\mathbf{v})$ が成り立つので, $0<\varphi(\mathbf{v})^2=\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{v})$ が成り立つ. 以上, 定理 3.6.1 よりその写像 $\varPhi_{\varphi}$ は内積となり, したがって, その組 $(V,\varPhi_{\varphi})$ はその vector 空間 V 上の内積空間をなす.

[*24] ここで, 距離空間 (S,d) が与えられたとき, その集合 S の元の列たち $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限が存在するとすれば, 次式が成り立つという定理を用いた.

$$\lim_{n\to\infty}d(a_n,b_n)=d\left(\lim_{n\to\infty}a_n,\lim_{n\to\infty}b_n\right)$$

さらに, その内積空間 (V,Φ_{φ}) から誘導される norm 空間 $\left(V,\varphi_{\Phi_{\varphi}}\right)$ について, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次のようになるので,

$$\varphi_{\Phi_{\varphi}}(\mathbf{v})=\sqrt{\Phi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{v})}=\sqrt{\varphi(\mathbf{v})^2}=\varphi(\mathbf{v})$$

$\varphi_{\Phi_{\varphi}}=\varphi$ が得られ, よって, その norm 空間 $\left(V,\varphi_{\Phi_{\varphi}}\right)$ はその norm 空間 (V,φ) である. □

定理 3.6.22. $\mathbb{R}\subset K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の norm 空間 (V,φ) について, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次式が成り立つなら,

$$\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2+\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2=2\left(\varphi(\mathbf{v})^2+\varphi(\mathbf{w})^2\right)$$

次のように写像 Φ_{φ} が定義されれば,

$$\Phi_{\varphi}:V\times V\rightarrow K;(\mathbf{v},\mathbf{w})\mapsto\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2-\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2-\frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2+\frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2$$

その写像 Φ_{φ} は内積となり, したがって, その組 (V,Φ_{φ}) はその vector 空間 V 上の内積空間をなす. さらに, その内積空間 (V,Φ_{φ}) から誘導される norm 空間はその norm 空間 (V,φ) である.

定義 3.6.7. $\mathbb{R}\subset K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の norm 空間 (V,φ) について, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次式が成り立つとき,

$$\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2+\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2=2\left(\varphi(\mathbf{v})^2+\varphi(\mathbf{w})^2\right)$$

次のような内積 Φ_{φ} が定義される.

$$\Phi_{\varphi}:V\times V\rightarrow K;(\mathbf{v},\mathbf{w})\mapsto\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2-\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2-\frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2+\frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2$$

その内積 Φ_{φ} をその normφ から誘導される内積, その内積空間 (V,Φ_{φ}) をその norm 空間 (V,φ) から誘導される内積空間という.

証明. $\mathbb{R}\subset K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の vector 空間 V 上の norm 空間 (V,φ) について, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次式が成り立つとき,

$$\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2+\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2=2\left(\varphi(\mathbf{v})^2+\varphi(\mathbf{w})^2\right)$$

次のように写像 Φ_{φ} が定義されよう.

$$\Phi_{\varphi}:V\times V\rightarrow K;(\mathbf{v},\mathbf{w})\mapsto\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2-\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2-\frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2+\frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2$$

まずは, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次のことが成り立つことを示しておこう.

$$\Phi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{v})=\varphi(\mathbf{v})^2,\quad\Phi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\overline{\Phi_{\varphi}(\mathbf{w},\mathbf{v})},\quad\Phi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{0})=0,$$
$$\Phi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\frac{1}{2}\Phi_{\varphi}(\mathbf{v},2\mathbf{w}),\quad\Phi_{\varphi}(\mathbf{v},-\mathbf{w})=-\Phi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{w}),\quad\Phi_{\varphi}(\mathbf{v},i\mathbf{w})=i\Phi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

実際, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次式が成り立つことに注意すれば,

$$\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2+\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2=2\left(\varphi(\mathbf{v})^2+\varphi(\mathbf{w})^2\right)$$

その写像$\varPhi_{\varphi}$の定義より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{v}) &= \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{v})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{v})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+i\mathbf{v})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-i\mathbf{v})^2 \\
&= \frac{1}{4}\varphi(2\mathbf{v})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{0})^2 - \frac{i}{4}\varphi((1+i)\mathbf{v})^2 + \frac{i}{4}\varphi((1-i)\mathbf{v})^2 \\
&= \frac{1}{4}\cdot 4\varphi(\mathbf{v})^2 - \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{i}{4}\cdot 4\varphi(\mathbf{v})^2 + \frac{i}{4}\cdot 4\varphi(\mathbf{v})^2 \\
&= \varphi(\mathbf{v})^2 - 0 - i\varphi(\mathbf{v})^2 + i\varphi(\mathbf{v})^2 = \varphi(\mathbf{v})^2 \\
\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2 \\
&= \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{w}+\mathbf{v})^2 - \frac{1}{4}\varphi(-(\mathbf{w}-\mathbf{v}))^2 - \frac{i}{4}\varphi(i(\mathbf{w}-i\mathbf{v}))^2 + \frac{i}{4}\varphi(-i(\mathbf{w}+i\mathbf{v}))^2 \\
&= \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{w}+\mathbf{v})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{w}-\mathbf{v})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{w}+i\mathbf{v})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{w}-i\mathbf{v})^2 \\
&= \overline{\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{w}+\mathbf{v})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{w}-\mathbf{v})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{w}+i\mathbf{v})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{w}-i\mathbf{v})^2} \\
&= \overline{\varPhi_{\varphi}(\mathbf{w},\mathbf{v})} \\
\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{0}) &= \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{0})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+i\mathbf{0})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-i\mathbf{0})^2 \\
&= \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v})^2 = 0 \\
\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2 \\
&= \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{w})^2 - \frac{i}{4}\varphi(i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{4}\varphi(i\mathbf{w})^2 \\
&= \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{0}+\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{0}-\mathbf{w})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{0}+i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{0}-i\mathbf{w})^2 \\
&= \frac{1}{8}\cdot 2\left(\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{0}+\mathbf{w})^2\right) - \frac{1}{8}\cdot 2\left(\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{0}-\mathbf{w})^2\right) \\
&\quad - \frac{i}{8}\cdot 2\left(\varphi(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{0}+i\mathbf{w})^2\right) + \frac{i}{8}\cdot 2\left(\varphi(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{0}-i\mathbf{w})^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\cdot\left(\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}+2\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{v}-\mathbf{0})^2\right) - \frac{1}{8}\cdot\left(\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}-2\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{v}-\mathbf{0})^2\right) \\
&\quad - \frac{i}{8}\cdot\left(\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}+2i\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{v}-\mathbf{0})^2\right) + \frac{i}{8}\cdot\left(\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}-2i\mathbf{w})^2 + \varphi(\mathbf{v}-\mathbf{0})^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}+2\mathbf{w})^2 + \frac{1}{8}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{0})^2 - \frac{1}{8}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}-2\mathbf{w})^2 - \frac{1}{8}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{0})^2 \\
&\quad - \frac{i}{8}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}+2i\mathbf{w})^2 - \frac{i}{8}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{0})^2 + \frac{i}{8}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}-2i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{8}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{0})^2 \\
&= \frac{1}{8}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}+2\mathbf{w})^2 - \frac{1}{8}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}-2\mathbf{w})^2 - \frac{i}{8}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}+2i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{8}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}-2i\mathbf{w})^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}+2\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}-2\mathbf{w})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}+2i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{0}-2i\mathbf{w})^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v}+\mathbf{0},2\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},2\mathbf{w}) \\
\varPhi_{\varphi}(\mathbf{v},-\mathbf{w}) &= \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 - \frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 - \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-i\mathbf{w})^2 + \frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+i\mathbf{w})^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)^2 + \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)^2 + \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+i\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-i\mathbf{w}\right)^2\\
&= -\left(\frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+i\mathbf{w}\right)^2 + \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-i\mathbf{w}\right)^2\right)\\
&= -\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\\
\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},i\mathbf{w}\right) &= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+i\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-i\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+i^2\mathbf{w}\right)^2 + \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-i^2\mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+i\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-i\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)^2 + \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i^2}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+i\mathbf{w}\right)^2 + \frac{i^2}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-i\mathbf{w}\right)^2\\
&= i\left(\frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+i\mathbf{w}\right)^2 + \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-i\mathbf{w}\right)^2\right)\\
&= i\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)
\end{aligned}
$$

次に, $\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, $\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{u},\mathbf{w}\right)+\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ が成り立つことを示そう. $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次式が成り立つことに注意すれば,

$$
\varphi\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)^2+\varphi\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)^2=2\left(\varphi\left(\mathbf{v}\right)^2+\varphi\left(\mathbf{w}\right)^2\right)
$$

次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{u},\mathbf{w}\right)+\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) &= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{u}-\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{u}+i\mathbf{w}\right)^2 + \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{u}-i\mathbf{w}\right)^2\\
&\quad + \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}+i\mathbf{w}\right)^2 + \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v}-i\mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{8}\cdot 2\left(\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{w}\right)^2+\varphi\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)^2\right) - \frac{1}{8}\cdot 2\left(\varphi\left(\mathbf{u}-\mathbf{w}\right)^2+\varphi\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)^2\right)\\
&\quad - \frac{i}{8}\cdot 2\left(\varphi\left(\mathbf{u}+i\mathbf{w}\right)^2+\varphi\left(\mathbf{v}+i\mathbf{w}\right)^2\right) + \frac{i}{8}\cdot 2\left(\varphi\left(\mathbf{u}-i\mathbf{w}\right)^2+\varphi\left(\mathbf{v}-i\mathbf{w}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{8}\cdot\left(\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}+2\mathbf{w}\right)^2+\varphi\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2\right) - \frac{1}{8}\cdot\left(\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}-2\mathbf{w}\right)^2+\varphi\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2\right)\\
&\quad - \frac{i}{8}\cdot\left(\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}+2i\mathbf{w}\right)^2+\varphi\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2\right) + \frac{i}{8}\cdot\left(\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}-2i\mathbf{w}\right)^2+\varphi\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}+2\mathbf{w}\right)^2 + \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2 - \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}-2\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2\\
&\quad - \frac{i}{8}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}+2i\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i}{8}\varphi\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2 + \frac{i}{8}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}-2i\mathbf{w}\right)^2 + \frac{i}{8}\varphi\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2\\
&= \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}+2\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{8}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}-2\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i}{8}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}+2i\mathbf{w}\right)^2 + \frac{i}{8}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}-2i\mathbf{w}\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}+2\mathbf{w}\right)^2 - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}-2\mathbf{w}\right)^2 - \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}+2i\mathbf{w}\right)^2 + \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}-2i\mathbf{w}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{u}+\mathbf{v},2\mathbf{w}\right)=\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}\right)
\end{aligned}
$$

次に, $\forall m\in\mathbb{N}$ に対し, 数学的帰納法により次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},m\mathbf{w}\right) &= \overline{\varPhi_{\varphi}\left(m\mathbf{w},\mathbf{v}\right)}\\
&= \overline{m\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{w},\mathbf{v}\right)}\\
&= m\overline{\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{w},\mathbf{v}\right)}\\
&= m\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)
\end{aligned}
$$

したがって, $\forall r \in \mathbb{Q}$ に対し, $r < 0$ のとき, 2 つの自然数たち m, n を用いて $r = -\dfrac{m}{n}$ とおかれることができるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},r\mathbf{w} \right) &= \varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},-\frac{m}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= -\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\frac{m}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= -\frac{n}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\frac{m}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= -\frac{m}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\frac{n}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= -\frac{m}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right)\\
&= r\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right)
\end{aligned}$$

$r = 0$ のときでは明らかである. $0 < r$ のとき, 2 つの自然数たち m, n を用いて $r = \dfrac{m}{n}$ とおかれることができるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},r\mathbf{w} \right) &= \varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\frac{m}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= \frac{n}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\frac{m}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= \frac{m}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\frac{n}{n}\mathbf{w} \right)\\
&= \frac{m}{n}\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right)\\
&= r\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right)
\end{aligned}$$

いづれにせよ, $\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},r\mathbf{w} \right) = r\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right)$ が成り立つ. さらに, $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し, その集合 $\mathbb{Q}$ のある元の列 $\left(r_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して, $\lim_{n \to \infty} r_{n} = a$ が成り立ち, 定理 3.1.1 より次式のように写像 d_{φ} が定義されれば,

$$d_{\varphi}:V \times V \rightarrow \mathbb{R};\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right) \mapsto \varphi\left(\mathbf{v} - \mathbf{w} \right)$$

その組 $\left(V,d_{\varphi} \right)$ は距離空間をなすので, 次のようになる[*25].

$$\begin{aligned}
\varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},a\mathbf{w} \right) &= \varPhi_{\varphi}\left(\mathbf{v},\lim_{n \to \infty}r_{n}\mathbf{w} \right)\\
&= \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + \lim_{n \to \infty}r_{n}\mathbf{w} \right)^{2} - \frac{1}{4}\varphi\left(\mathbf{v} - \lim_{n \to \infty}r_{n}\mathbf{w} \right)^{2}\\
&\quad - \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v} + i\lim_{n \to \infty}r_{n}\mathbf{w} \right)^{2} + \frac{i}{4}\varphi\left(\mathbf{v} - i\lim_{n \to \infty}r_{n}\mathbf{w} \right)^{2}\\
&= \frac{1}{4}d_{\varphi}\left(\mathbf{v},-\lim_{n \to \infty}r_{n}\mathbf{w} \right)^{2} - \frac{1}{4}d_{\varphi}\left(\mathbf{v},\lim_{n \to \infty}r_{n}\mathbf{w} \right)^{2}\\
&\quad - \frac{i}{4}d_{\varphi}\left(\mathbf{v},-i\lim_{n \to \infty}r_{n}\mathbf{w} \right)^{2} + \frac{i}{4}d_{\varphi}\left(\mathbf{v},i\lim_{n \to \infty}r_{n}\mathbf{w} \right)^{2}\\
&= \frac{1}{4}d_{\varphi}\left(\lim_{n \to \infty}\mathbf{v},\lim_{n \to \infty}\left(-r_{n}\mathbf{w} \right) \right)^{2} - \frac{1}{4}d_{\varphi}\left(\lim_{n \to \infty}\mathbf{v},\lim_{n \to \infty}r_{n}\mathbf{w} \right)^{2}
\end{aligned}$$

[*25] ここで, 距離空間 (S,d) が与えられたとき, その集合 S の元の列たち $\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(b_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限が存在するとすれば, 次式が成り立つという定理を用いた.

$$\lim_{n \to \infty}d\left(a_{n},b_{n} \right) = d\left(\lim_{n \to \infty}a_{n},\lim_{n \to \infty}b_{n} \right)$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{i}{4}d_\varphi\left(\lim_{n\to\infty}\mathbf{v},\lim_{n\to\infty}(-ir_n\mathbf{w})\right)^2+\frac{i}{4}d_\varphi\left(\lim_{n\to\infty}\mathbf{v},\lim_{n\to\infty}ir_n\mathbf{w}\right)^2\\
&=\frac{1}{4}\left(\lim_{n\to\infty}d_\varphi(\mathbf{v},-r_n\mathbf{w})\right)^2-\frac{1}{4}\left(\lim_{n\to\infty}d_\varphi(\mathbf{v},r_n\mathbf{w})\right)^2\\
&\quad-\frac{i}{4}\left(\lim_{n\to\infty}d_\varphi(\mathbf{v},-ir_n\mathbf{w})\right)^2+\frac{i}{4}\left(\lim_{n\to\infty}d_\varphi(\mathbf{v},ir_n\mathbf{w})\right)^2\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}d_\varphi(\mathbf{v},-r_n\mathbf{w})^2-\frac{1}{4}d_\varphi(\mathbf{v},r_n\mathbf{w})^2-\frac{i}{4}d_\varphi(\mathbf{v},-ir_n\mathbf{w})^2+\frac{i}{4}d_\varphi(\mathbf{v},ir_n\mathbf{w})^2\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}+r_n\mathbf{w})^2-\frac{1}{4}\varphi(\mathbf{v}-r_n\mathbf{w})^2-\frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}+ir_n\mathbf{w})^2+\frac{i}{4}\varphi(\mathbf{v}-ir_n\mathbf{w})^2\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\Phi_\varphi(\mathbf{v},r_n\mathbf{w})=\lim_{n\to\infty}r_n\Phi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})=a\Phi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})
\end{aligned}$$

最後に, $\forall z\in K$ に対し, 実数たち a, b を用いて $z=a+ib$ とおかれると, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\Phi_\varphi(\mathbf{v},z\mathbf{w})&=\Phi_\varphi(\mathbf{v},(a+ib)\mathbf{w})\\
&=\Phi_\varphi(\mathbf{v},a\mathbf{w}+ib\mathbf{w})\\
&=\overline{\Phi_\varphi(a\mathbf{w}+ib\mathbf{w},\mathbf{v})}\\
&=\overline{\Phi_\varphi(a\mathbf{w},\mathbf{v})+\Phi_\varphi(ib\mathbf{w},\mathbf{v})}\\
&=\overline{\Phi_\varphi(a\mathbf{w},\mathbf{v})}+\overline{\Phi_\varphi(ib\mathbf{w},\mathbf{v})}\\
&=\Phi_\varphi(\mathbf{v},a\mathbf{w})+\Phi_\varphi(\mathbf{v},ib\mathbf{w})\\
&=a\Phi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})+ib\Phi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})\\
&=(a+ib)\Phi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})=z\Phi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})
\end{aligned}$$

以上の議論により, $\forall a,b\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\Phi_\varphi(a\mathbf{u}+b\mathbf{v},\mathbf{w})&=\Phi_\varphi(a\mathbf{u},\mathbf{w})+\Phi_\varphi(b\mathbf{v},\mathbf{w})\\
&=\overline{\Phi_\varphi(\mathbf{w},a\mathbf{u})}+\overline{\Phi_\varphi(\mathbf{w},b\mathbf{v})}\\
&=\overline{a\Phi_\varphi(\mathbf{w},\mathbf{u})}+\overline{b\Phi_\varphi(\mathbf{w},\mathbf{v})}\\
&=\overline{a}\Phi_\varphi(\mathbf{u},\mathbf{w})+\overline{b}\Phi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})
\end{aligned}$$

$\forall a,b\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\Phi_\varphi(\mathbf{u},a\mathbf{v}+b\mathbf{w})&=\overline{\Phi_\varphi(a\mathbf{v}+b\mathbf{w},\mathbf{u})}\\
&=\overline{\Phi_\varphi(a\mathbf{v},\mathbf{u})+\Phi_\varphi(b\mathbf{w},\mathbf{u})}\\
&=\overline{\Phi_\varphi(a\mathbf{v},\mathbf{u})}+\overline{\Phi_\varphi(b\mathbf{w},\mathbf{u})}\\
&=\Phi_\varphi(\mathbf{u},a\mathbf{v})+\Phi_\varphi(\mathbf{u},b\mathbf{w})\\
&=a\Phi_\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v})+b\Phi_\varphi(\mathbf{u},\mathbf{w})
\end{aligned}$$

$\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 上記の議論により $\Phi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})=\overline{\Phi_\varphi(\mathbf{w},\mathbf{v})}$ が成り立つかつ, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ が成り立つなら, $0<\varphi(\mathbf{v})$ が成り立つので, $0<\varphi(\mathbf{v})^2=\Phi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{v})$ が成り立つ. 以上, 定理 3.6.1 よりその写像 Φ_φ は内積となり, したがって, その組 (V,Φ_φ) はその vector 空間 V 上の内積空間をなす.

さらに, その内積空間 (V,Φ_φ) から誘導される norm 空間 $\left(V,\varphi_{\Phi_\varphi}\right)$ について, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次のようになるので,

$$\varphi_{\Phi_\varphi}(\mathbf{v})=\sqrt{\Phi_\varphi(\mathbf{v},\mathbf{v})}=\sqrt{\varphi(\mathbf{v})^2}=\varphi(\mathbf{v})$$

$\varphi_{\Phi_\varphi}=\varphi$ が得られ, よって, その norm 空間 $\left(V,\varphi_{\Phi_\varphi}\right)$ はその norm 空間 (V,φ) である. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p336-347 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 桂田祐史. "関数解析入門 I 内積空間ノート". 明治大学. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/functional-analysis-1.pdf (2022-10-16 22:04 閲覧)

[3] 藤田博司. "ヒルベルト空間". 藤田博司. http://tenasaku.com/academia/notes/hilbert-space-notes.pdf (2022-10-16 22:06 閲覧)

[4] 平場誠示. "Analysis III Functional Analysis 解析学 III 関数解析". 東京理科大学. https://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/sh/pdfdvi/13fa-s.pdf (2022-10-16 22:08 閲覧)

[5] 渚勝. "1 Banach 空間, Hilbert 空間". 千葉大学. http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~nagisa/siryo/nyuumon.pdf (2022-10-16 22:10 閲覧)

[6] 伊東裕也. "§ 2　数学的準備". 電気通信大学. http://www.ito.e-one.uec.ac.jp/lect17/signal/2.pdf (2022-10-16 22:12 閲覧)

[7] 伊藤健一. "関数解析学 講義スライド". 東京大学. https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~ito/notes_functional_analysis_20220224.pdf (2022-10-16 22:14 閲覧)

[8] 倉田和浩. "解析学概論 (1)(解析学特別講義 I)". 東京都立大学. https://www.comp.tmu.ac.jp/tmu-kurata/lectures/fun19/note-3.pdf (2022-3-2 22:18 閲覧)

[9] 黒田成俊, 関数解析, 共立出版, 1980. 初版第 18 刷 p14-16 ISBN978-4-320-01106-9

3.7 等長写像

3.7.1 等長写像

公理 3.7.1 (等長写像の公理)**.** $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間たち $(V, \varPhi)$, (W, X) が与えられたとする. 写像 $f : V \rightarrow W$ のうち次のことを満たすとき, その写像をその内積空間 $(V, \varPhi)$ からその内積空間 (W, X) への等長写像, 計量同型写像, 内積空間として線形同型写像, unitary 写像などという.

- その写像 f はその vector 空間 V からその vector 空間 W への線形同型写像である.
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $X\left(f\left(\mathbf{v}\right), f\left(\mathbf{w}\right)\right) = \varPhi\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right)$ が成り立つ.

定義 3.7.2. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間たち $(V, \varPhi)$, (W, X) が与えられたとする. その内積空間 $(V, \varPhi)$ からその内積空間 (W, X) への等長写像が存在するとき, これらの内積空間たち $(V, \varPhi)$, (W, X) は計量同型である, 内積空間として同型であるなどといい, ここでは, $(V, \varPhi) \cong_{\mathrm{isometry}} (W, X)$ と書くことにする.

定理 3.7.1. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間たち $(U, \varPhi)$, (V, X), $(W, \varPsi)$ が与えられたとする. その内積空間 $(U, \varPhi)$ からその内積空間 (V, X) への等長写像 f, その内積空間 (V, X) からその内積空間 $(W, \varPsi)$ への等長写像 g との合成写像 $g \circ f$ もその内積空間 $(U, \varPhi)$ からその内積空間 $(W, \varPsi)$ への等長写像となる.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間たち $(U, \varPhi)$, (V, X), $(W, \varPsi)$ が与えられたとする. その内積空間 $(U, \varPhi)$ からその内積空間 (V, X) への等長写像 f, その内積空間 (V, X) からその内積空間 $(W, \varPsi)$ への等長写像 g との合成写像 $g \circ f$ について, もちろん, その写像 $g \circ f$ はその vector 空間 U からその vector 空間 W への線形同型写像である. そこで, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned} \varPsi\left(g \circ f\left(\mathbf{v}\right), g \circ f\left(\mathbf{w}\right)\right) &= \varPsi\left(g\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right), g\left(f\left(\mathbf{w}\right)\right)\right) \\ &= X\left(f\left(\mathbf{v}\right), f\left(\mathbf{w}\right)\right) \\ &= \varPhi\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \end{aligned}$$

その合成写像 $g \circ f$ もその内積空間 $(U, \varPhi)$ からその内積空間 $(W, \varPsi)$ への等長写像となる. □

定理 3.7.2. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間たち $(V, \varPhi)$, (W, X) が与えられたとする. その内積空間 $(V, \varPhi)$ からその内積空間 (W, X) への等長写像 f が存在するとき, これの逆写像 f^{-1} が存在して, これがその内積空間 (W, X) からその内積空間 $(V, \varPhi)$ への等長写像となる.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間たち $(V, \varPhi)$, (W, X) が与えられたとする. その内積空間 $(V, \varPhi)$ からその内積空間 (W, X) への等長写像 f が存在するとき, その写像 f は線形同型写像であるので, 逆写像 f^{-1} が存在して, これも線形同型写像となる. さらに, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned} \varPhi\left(f^{-1}\left(\mathbf{v}\right), f^{-1}\left(\mathbf{w}\right)\right) &= X\left(f\left(f^{-1}\left(\mathbf{v}\right)\right), f\left(f^{-1}\left(\mathbf{w}\right)\right)\right) \\ &= X\left(f \circ f^{-1}\left(\mathbf{v}\right), f \circ f^{-1}\left(\mathbf{w}\right)\right) \\ &= X\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \end{aligned}$$

その逆写像 f^{-1} がその内積空間 (W, X) からその内積空間 $(V, \varPhi)$ への等長写像となる. □

定理 3.7.3. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間たちが与えられたとき, その関係 $\cong_{\mathrm{isometry}}$ は同値関係となる.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, 恒等写像 I_V が考えられれば, $(V, \varPhi) \cong_{\text{isometry}} (V, \varPhi)$ が成り立つ. 内積空間たち $(V, \varPhi)$, (W, X) が与えられたとき, 定理 3.7.2 より $(V, \varPhi) \cong_{\text{isometry}} (W, X)$ が成り立つなら, $(W, X) \cong_{\text{isometry}} (V, \varPhi)$ も成り立つ. 内積空間たち $(U, \varPhi)$, (V, X), $(W, \varPsi)$ が与えられたとき, $(U, \varPhi) \cong_{\text{isometry}} (V, X)$ かつ $(V, X) \cong_{\text{isometry}} (W, \varPsi)$ が成り立つなら, 定理 3.7.1 より $(U, \varPhi) \cong_{\text{isometry}} (W, \varPsi)$ が成り立つ. 以上の議論により, その関係 $\cong_{\text{isometry}}$ は同値関係となる. □

定理 3.7.4. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間たち $(V, \varPhi)$, (W, X), これらから誘導される norm 空間たち $(V, \varphi_\varPhi)$, (W, φ_X), 線形写像 $f : V \rightarrow W$ が与えられ, さらに, $\dim V = \dim W = n$ が成り立つとき, 次のことは同値である.

- その写像 f が等長写像である.
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))$ が成り立つ.
- $\varphi_\varPhi = \varphi_X \circ f$ が成り立つ.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi_\varPhi(\mathbf{v}) = 1$ が成り立つなら, $\varphi_X \circ f(\mathbf{v}) = 1$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間たち $(V, \varPhi)$, (W, X), これらから誘導される norm 空間たち $(V, \varphi_\varPhi)$, (W, φ_X), 線形写像 $f : V \rightarrow W$ が与えられ, さらに, $\dim V = \dim W = n$ が成り立つとき, その写像 f が等長写像であるなら, 定義より直ちに, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))$ が成り立つ.

$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになることから,

$$\varphi_\varPhi(\mathbf{v}) = \sqrt{\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = \sqrt{X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v}))} = \varphi_X(f(\mathbf{v})) = \varphi_X \circ f(\mathbf{v})$$

$\varphi_\varPhi = \varphi_X \circ f$ が成り立つ.

逆に, $\varphi_\varPhi = \varphi_X \circ f$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_\varPhi(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 &= \varPhi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \overline{\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\
&= \varphi_\varPhi(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Re}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_\varPhi(\mathbf{w})^2 \\
\varphi_\varPhi(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 &= \varphi_X \circ f(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 \\
&= \varphi_X(f(\mathbf{v} + \mathbf{w}))^2 \\
&= \varphi_X(f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}))^2 \\
&= X(f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}), f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})) \\
&= X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v})) + X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + X(f(\mathbf{w}), f(\mathbf{v})) + X(f(\mathbf{w}), f(\mathbf{w})) \\
&= X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v})) + X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + \overline{X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))} + X(f(\mathbf{w}), f(\mathbf{w})) \\
&= \varphi_X(f(\mathbf{v}))^2 + 2\mathrm{Re}X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + \varphi_X(f(\mathbf{w}))^2 \\
&= \varphi_X \circ f(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Re}X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + \varphi_X \circ f(\mathbf{w})^2 \\
&= \varphi_\varPhi(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Re}X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + \varphi_\varPhi(\mathbf{w})^2
\end{aligned}$$

$\varphi_\varPhi(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Re}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_\varPhi(\mathbf{w})^2 = \varphi_\varPhi(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Re}X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + \varphi_\varPhi(\mathbf{w})^2$ が得られ, したがって, $\mathrm{Re}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathrm{Re}X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))$ が成り立つ. $K \subseteq \mathbb{R}$ のとき, 次のようになる.

$$\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathrm{Re}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathrm{Re}X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) = X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))$$

$\mathbb{R} \subset K \subseteq \mathbb{C}$ のとき, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\varPhi}(i\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 &= \varPhi(i\mathbf{v}+\mathbf{w}, i\mathbf{v}+\mathbf{w})\\
&= \varPhi(i\mathbf{v}, i\mathbf{v}) + \varPhi(i\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varPhi(\mathbf{w}, i\mathbf{v}) + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w})\\
&= \varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varPhi(i\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \overline{\varPhi(i\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \varPhi(\mathbf{w}, \mathbf{w})\\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Re}\varPhi(i\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Re}(-i\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})) + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Im}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2\\
\varphi_{\varPhi}(i\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 &= \varphi_X \circ f(i\mathbf{v}+\mathbf{w})^2\\
&= \varphi_X(f(i\mathbf{v}+\mathbf{w}))^2\\
&= \varphi_X(f(i\mathbf{v})+f(\mathbf{w}))^2\\
&= X(f(i\mathbf{v})+f(\mathbf{w}), f(i\mathbf{v})+f(\mathbf{w}))\\
&= X(f(i\mathbf{v}), f(i\mathbf{v})) + X(f(i\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + X(f(\mathbf{w}), f(i\mathbf{v})) + X(f(\mathbf{w}), f(\mathbf{w}))\\
&= X(if(\mathbf{v}), if(\mathbf{v})) + X(if(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + \overline{X(if(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))} + X(f(\mathbf{w}), f(\mathbf{w}))\\
&= \varphi_X(f(\mathbf{v}))^2 + 2\mathrm{Re}X(if(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + \varphi_X(f(\mathbf{w}))^2\\
&= \varphi_X \circ f(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Re}X(-i(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))) + \varphi_X \circ f(\mathbf{w})^2\\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Im}X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2
\end{aligned}$$

$\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Im}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2 = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})^2 + 2\mathrm{Im}X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + \varphi_{\varPhi}(\mathbf{w})^2$ が得られ, したがって, $\mathrm{Im}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathrm{Im}X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))$ が成り立つ. 以上の議論により, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathrm{Re}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + i\mathrm{Im}\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})\\
&= \mathrm{Re}X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) + i\mathrm{Im}X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))\\
&= X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))
\end{aligned}$$

$\varphi_{\varPhi} = \varphi_X \circ f$ が成り立つとき, 直ちに, $\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) = 1$ が成り立つなら, $\varphi_X \circ f(\mathbf{v}) = 1$ が成り立つ.

逆に, $\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) = 1$ が成り立つなら, $\varphi_X \circ f(\mathbf{v}) = 1$ が成り立つとき, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ のときでは明らかなので, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) \neq 0$ が成り立つので, 次のようになり,

$$\varphi_{\varPhi}\left(\frac{\mathbf{v}}{\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})}\right) = \frac{1}{\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})} \cdot \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) = 1$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_X \circ f(\mathbf{v}) &= \frac{\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})}{\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})}\varphi_X \circ f(\mathbf{v})\\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\,\varphi_X \circ f\left(\frac{\mathbf{v}}{\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})}\right)\\
&= \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) \cdot 1 = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

これにより, $\varphi_{\varPhi} = \varphi_X \circ f$ が得られる.

$\varphi_{\varPhi} = \varphi_X \circ f$ が成り立つなら, $\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $0 \neq \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v}) = \varphi_X \circ f(\mathbf{v}) = \varphi_X(f(\mathbf{v}))$ が得られるので, $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ が成り立つ. 対偶律により $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ が得られるので, 定理 1.2.12 よ

りその線形写像 f は単射である．そこで, $\dim V = \dim W$ が成り立つので, 定理 1.2.15 よりその線形写像 f は全単射である, 即ち, 線形同型写像である．これにより, その写像 f は等長写像である． $\square$

定理 3.7.5. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間たち $(V, \varPhi)$, (W, X), 線形写像 $f : V \rightarrow W$, その内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられ, さらに, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおき, $\dim V = \dim W = n$ が成り立つとき, 次のことは同値である．

- その写像 f が等長写像である．
- その組 $\langle f(\mathbf{o}_i) \rangle_{i \in \varLambda_n}$ がその内積空間 (W, X) の正規直交基底をなす．

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間たち $(V, \varPhi)$, (W, X), これらから誘導される norm 空間たち $(V, \varphi_{\varPhi})$, (W, φ_X), 線形写像 $f : V \rightarrow W$, その内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられ, さらに, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおき, $\dim V = \dim W = n$ が成り立つとき, その写像 f が等長写像であるなら, 定理 3.7.4 より次のことは同値であるのであった．

- その写像 f が等長写像である．
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))$ が成り立つ．
- $\varphi_{\varPhi} = \varphi_X \circ f$ が成り立つ．

そこで, 定理 1.2.6 よりその等長写像 f は線形同型写像でもあるので, その組 $\langle f(\mathbf{o}_i) \rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその vector 空間 W の基底をなす．さらに, $\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, 次のようになることから,

$$X(f(\mathbf{o}_i), f(\mathbf{o}_j)) = \varPhi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j) = 0$$

その組 $\langle f(\mathbf{o}_i) \rangle_{i \in \varLambda_n}$ がその内積空間 $(V, \varPhi)$ の直交基底をなす．さらに, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, 次のようになることから,

$$\varphi_X(f(\mathbf{o}_i)) = \varphi_X \circ f(\mathbf{o}_i) = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{o}_i) = 1$$

その組 $\langle f(\mathbf{o}_i) \rangle_{i \in \varLambda_n}$ がその内積空間 (W, X) の正規直交基底をなす．

逆に, その組 $\langle f(\mathbf{o}_i) \rangle_{i \in \varLambda_n}$ がその内積空間 (W, X) の正規直交基底をなすなら, もちろん, その写像 f は線形同型写像である．さらに, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_n} b_i \mathbf{o}_i$$

次のようになり,

$$f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i\right) = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i f(\mathbf{o}_i)$$

$$f(\mathbf{w}) = f\left(\sum_{i \in \varLambda_n} b_i \mathbf{o}_i\right) = \sum_{i \in \varLambda_n} b_i f(\mathbf{o}_i)$$

定理 3.6.17 より次のようになることから,

$$\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \cdots & \overline{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) = \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \cdots & \overline{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が成り立つ. □

定理 3.7.6. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の $\dim V = \dim W$ なる任意の内積空間たち (V, Φ), (W, X) が与えられたとき, これらは計量同型である, 即ち, $(V, \Phi) \cong_{\mathrm{isometry}} (W, X)$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の $\dim V = \dim W = n$ なる任意の内積空間たち (V, Φ), (W, X) が与えられたとき, Gram-Schmidt の直交化法によりこれらの正規直交基底たち $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{p}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が存在して, 線形写像 $f : V \to W$ で, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $f(\mathbf{o}_i) = \mathbf{p}_i$ とすれば, 次式が成り立ち,

$$\langle \mathbf{p}_i \rangle_{i \in \Lambda_n} = \langle f(\mathbf{o}_i) \rangle_{i \in \Lambda_n}$$

定理 3.7.5 よりその写像 f はその内積空間 (V, Φ) からその内積空間 (W, X) への等長写像である. □

定理 3.7.7. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の $\dim V = n$ なる任意の内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, これは標準内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ と計量同型である. さらに, 等長写像として, その内積空間 (V, Φ) の正規直交基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像の逆写像 $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} : V \to K^n$ があげられる.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の $\dim V = n$ なる任意の内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, これは標準内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ と計量同型であることは定理 3.7.6 から直ちにわかる. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{o}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_n} b_i \mathbf{o}_i$$

定理 3.6.18 より次のようになることから,

$$\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \cdots & \overline{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) | \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) \rangle$$

等長写像として, その内積空間 (V, Φ) の正規直交基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像の逆写像 $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} : V \to K^n$ があげられる. □

定理 3.7.8. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の $\dim V = \dim W = n$ なる任意の内積空間たち (V, Φ), (W, X) が与えられたとき, 写像 $f : V \to W$ が, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ を満たすなら[*26], その写像 f は等長写像である.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の $\dim V = \dim W = n$ なる任意の内積空間たち (V, Φ), (W, X), これらから誘導される norm 空間たち (V, φ_Φ), (W, φ_X) が与えられたとき, 写像 $f : V \to W$ が, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $X(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ を満たすなら, その vector 空間 V の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ と与えられたとき, $\forall i, j \in \Lambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つかつ, $f(\mathbf{o}_i) = f(\mathbf{o}_j)$ が成り立つと仮定しよう. このとき, $\Phi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j) = 0$ が成り立つので, 次のようになる.

$$1 = \Phi(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_i)$$

*26 その写像 f が線形的であるという仮定は入ってないことに注意しよう.

$$\begin{aligned}&= X\left(f\left(\mathbf{o}_i\right), f\left(\mathbf{o}_i\right)\right)\\&= X\left(f\left(\mathbf{o}_i\right), f\left(\mathbf{o}_j\right)\right)\\&= \varPhi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right) = 0\end{aligned}$$

これは矛盾しているので, $i \neq j$ が成り立つなら, $f\left(\mathbf{o}_i\right) \neq f\left(\mathbf{o}_j\right)$ が成り立つ. さらに, $\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $X\left(f\left(\mathbf{o}_i\right), f\left(\mathbf{o}_j\right)\right) = \varPhi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right) = 0$ が成り立つので, その族 $\left\{f\left(\mathbf{o}_i\right)\right\}_{i \in \varLambda_n}$ は直交系をなす. 定理 3.6.9 より直交系 $\left\{f\left(\mathbf{o}_i\right)\right\}_{i \in \varLambda_n}$ をなすこれらの vectors$f\left(\mathbf{o}_i\right)$ は線形独立である. したがって, その組 $\left\langle f\left(\mathbf{o}_i\right)\right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその部分 vector 空間 $\operatorname{span}\left\{f\left(\mathbf{o}_i\right)\right\}_{i \in \varLambda_n}$ の基底をなし, $\operatorname{span}\left\{f\left(\mathbf{o}_i\right)\right\}_{i \in \varLambda_n} \subseteq W$ かつ $\dim \operatorname{span}\left\{f\left(\mathbf{o}_i\right)\right\}_{i \in \varLambda_n} = n = \dim W$ が成り立つので, $\operatorname{span}\left\{f\left(\mathbf{o}_i\right)\right\}_{i \in \varLambda_n} = W$ が得られる. これにより, その組 $\left\langle f\left(\mathbf{o}_i\right)\right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその vector 空間 W の基底をなす. 特に, $\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $X\left(f\left(\mathbf{o}_i\right), f\left(\mathbf{o}_j\right)\right) = \varPhi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right) = 0$ が成り立つかつ, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\varphi_X\left(f\left(\mathbf{o}_i\right)\right) = \sqrt{X\left(f\left(\mathbf{o}_i\right), f\left(\mathbf{o}_i\right)\right)} = \sqrt{\varPhi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_i\right)} = 1$ が成り立つので, その基底 $\left\langle f\left(\mathbf{o}_i\right)\right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその内積空間 (W, X) の正規直交基底をなす.

次に, $\forall \mathbf{v} \in W$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} b_i f\left(\mathbf{o}_i\right)$$

次のようになることから,

$$\begin{aligned}X\left(f\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i\right) - \sum_{i \in \varLambda_n} a_i f\left(\mathbf{o}_i\right), \mathbf{v}\right) &= X\left(f\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i\right) - \sum_{i \in \varLambda_n} a_i f\left(\mathbf{o}_i\right), \sum_{i \in \varLambda_n} b_i f\left(\mathbf{o}_i\right)\right)\\&= X\left(f\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i\right), \sum_{i \in \varLambda_n} b_i f\left(\mathbf{o}_i\right)\right)\\&\quad - X\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i f\left(\mathbf{o}_i\right), \sum_{i \in \varLambda_n} b_i f\left(\mathbf{o}_i\right)\right)\\&= \sum_{j \in \varLambda_n} b_j X\left(f\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i\right), f\left(\mathbf{o}_j\right)\right)\\&\quad - \sum_{i \in \varLambda_n} \sum_{j \in \varLambda_n} \overline{a_i} b_j X\left(f\left(\mathbf{o}_i\right), f\left(\mathbf{o}_j\right)\right)\\&= \sum_{j \in \varLambda_n} b_j \varPhi\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right) - \sum_{j \in \varLambda_n} \sum_{i \in \varLambda_n} \overline{a_i} b_j \varPhi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right)\\&= \sum_{j \in \varLambda_n} b_j \sum_{i \in \varLambda_n} \overline{a_i} \varPhi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right) - \sum_{j \in \varLambda_n} \sum_{i \in \varLambda_n} \overline{a_i} b_j \varPhi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right)\\&= \sum_{j \in \varLambda_n} b_j \left(\sum_{i \in \varLambda_n} \overline{a_i} \varPhi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right) - \sum_{i \in \varLambda_n} \overline{a_i} \varPhi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right)\right)\\&= \sum_{j \in \varLambda_n} b_j \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

定理 3.6.5 より $f\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i\right) - \sum_{i \in \varLambda_n} a_i f\left(\mathbf{o}_i\right) = \mathbf{0}$ が成り立つ. そこで, $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i f\left(\mathbf{o}_i\right), \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_n} b_i f\left(\mathbf{o}_i\right)$$

次のようになることから,

$$\begin{aligned}
f(k\mathbf{v}+l\mathbf{w}) &= f\left(k\sum_{i\in\varLambda_n} a_i f(\mathbf{o}_i) + l\sum_{i\in\varLambda_n} b_i f(\mathbf{o}_i)\right)\\
&= f\left(\sum_{i\in\varLambda_n} (ka_i+lb_i) f(\mathbf{o}_i)\right)\\
&= f\left(\sum_{i\in\varLambda_n} (ka_i+lb_i) f(\mathbf{o}_i)\right)\\
&\quad - \sum_{i\in\varLambda_n} (ka_i+lb_i) f(\mathbf{o}_i) + \sum_{i\in\varLambda_n} (ka_i+lb_i) f(\mathbf{o}_i)\\
&= \mathbf{0} + \sum_{i\in\varLambda_n} (ka_i+lb_i) f(\mathbf{o}_i)\\
&= \sum_{i\in\varLambda_n} (ka_i+lb_i) f(\mathbf{o}_i)\\
&= k\sum_{i\in\varLambda_n} a_i f(\mathbf{o}_i) + l\sum_{i\in\varLambda_n} b_i f(\mathbf{o}_i)\\
&= k\mathbf{v}+l\mathbf{w}
\end{aligned}$$

その写像 f は線形写像である.

以上の議論と定理 3.7.4 よりその写像 f は等長写像である. □

3.7.2 直交空間

定義 3.7.3. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる内積空間 $(V,\varPhi)$, $S \neq \emptyset$ なるその vector 空間 V の部分集合 S が与えられたとき, $\forall\mathbf{s} \in S$ に対し, $\varPhi(\mathbf{s},\mathbf{v}) = 0$ なる vector$\mathbf{v}$ 全体の集合を $S^{\perp}$ とおく, 即ち, 次式のようにおく.

$$S^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V | \forall\mathbf{s} \in S\,[\varPhi(\mathbf{s},\mathbf{v}) = 0]\}$$

その集合 $S^{\perp}$ をその集合 S のその内積空間 $(V,\varPhi)$ における直交空間という.

定理 3.7.9. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる内積空間 $(V,\varPhi)$, $S \neq \emptyset$ なるその vector 空間 V の部分集合 S が与えられたとき, その集合 S のその内積空間 $(V,\varPhi)$ における直交空間 $S^{\perp}$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間をなす.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる内積空間 $(V,\varPhi)$, $S \neq \emptyset$ なるその vector 空間 V の部分集合 S が与えられたとき, その集合 S のその内積空間 $(V,\varPhi)$ における直交空間 $S^{\perp}$ について, もちろん, $\mathbf{0} \in S^{\perp}$ が成り立つ. さらに, $\forall k,l \in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in S^{\perp}$ に対し, 直交空間の定義より $\forall\mathbf{s} \in S$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varPhi(\mathbf{s},k\mathbf{v}+l\mathbf{w}) &= k\varPhi(\mathbf{s},\mathbf{w}) + l\varPhi(\mathbf{s},\mathbf{w})\\
&= k\cdot 0 + l\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

$k\mathbf{v}+l\mathbf{w} \in S^{\perp}$ が成り立つ. 定理 1.1.9 よりその集合 S のその内積空間 $(V,\varPhi)$ における直交空間 $S^{\perp}$ はその vector 空間 V の部分 vector 空間をなす. □

定理 3.7.10. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V,\varPhi)$, $\dim W = r$ なるその vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $V = W \oplus W^{\perp}$ が成り立つ. さらに, 次式が成り立つ.

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$$

この定理により $V = W \oplus W^{\perp}$ が成り立つことから, その直交空間 $W^{\perp}$ はその部分 vector 空間 W の補空間となっている. そのような意味でその直交空間 $W^{\perp}$ をその部分 vector 空間 W の直交補空間ともいう.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$, $\dim W = r$ なるその vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 定理 3.6.12 よりその部分 vector 空間 W の正規直交基底 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_r}$ が与えられれば, $i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r$ なる適切な $n-r$ つの vectors$\mathbf{o}_i$ を付け加えた組 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ がその vector 空間 V の正規直交基底をなすようにすることができる. そこで, 次式が成り立つことから,

$$V = \operatorname{span} \left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_n}, \quad W = \operatorname{span} \left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_r},$$
$$\operatorname{span} \left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_n} = \operatorname{span} \left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_r} \oplus \operatorname{span} \left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r}$$

$W^{\perp} = \operatorname{span} \left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r}$ が成り立つことを示せばよい.

実際, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i$$

$\mathbf{v} \notin \operatorname{span} \left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r}$ が成り立つなら, $\exists i \in \varLambda_r$ に対し, $a_i \neq 0$ が成り立つ. したがって, この添数を i' とすると, $\mathbf{o}_{i'} \in \operatorname{span} \left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_r}$ が成り立つかつ, $\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $\varPhi \left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j \right) = 0$ が成り立つかつ, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\varPhi \left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \right) = 1$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varPhi \left(\mathbf{o}_{i'}, \mathbf{v} \right) &= \varPhi \left(\mathbf{o}_{i'}, \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i \right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \varPhi \left(\mathbf{o}_{i'}, \mathbf{o}_i \right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} a_i \varPhi \left(\mathbf{o}_{i'}, \mathbf{o}_i \right) + a_{i'} \varPhi \left(\mathbf{o}_{i'}, \mathbf{o}_{i'} \right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \{i'\}} a_i \cdot 0 + a_{i'} \cdot 1 = a_{i'} \neq 0
\end{aligned}$$

$\exists \mathbf{w} \in W$ に対し, $\varPhi (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \neq 0$ が成り立つので, $\mathbf{v} \notin W^{\perp}$ が成り立つ. 対偶律により, $W^{\perp} \subseteq \operatorname{span} \left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r}$ が成り立つ.

逆に, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \in \operatorname{span} \left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r}$ が成り立つなら, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} a_i \mathbf{o}_i$$

$\forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $W = \operatorname{span} \left\{ \mathbf{o}_i \right\}_{i \in \varLambda_r}$ が成り立つことに注意すれば, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_r} b_i \mathbf{o}_i$$

$\forall i, j \in \varLambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $\varPhi \left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j \right) = 0$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varPhi (\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \varPhi \left(\sum_{i \in \varLambda_r} b_i \mathbf{o}_i, \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} a_i \mathbf{o}_i \right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_r} \sum_{j \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} a_j \overline{b_i} \varPhi \left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i \in \Lambda_r} \sum_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} a_j \overline{b_i} \cdot 0 = 0$$

$\mathbf{v} \in W^{\perp}$ が成り立つ．これにより, $\mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_i\right\}_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} \subseteq W^{\perp}$ が得られる．

以上の議論により, $W^{\perp} = \mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_i\right\}_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r}$ が得られるので, 次のようになる．

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_i\right\}_{i \in \Lambda_n} \\ &= \mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_i\right\}_{i \in \Lambda_r} \oplus \mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_i\right\}_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} \\ &= W \oplus W^{\perp} \end{aligned}$$

さらに, 次のようになる．

$$\dim V = \dim W \oplus W^{\perp} = \dim W + \dim W^{\perp}$$

□

定理 3.7.11. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ), $\dim W = r$ なるその vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $W^{\perp\perp} = W$ が成り立つ．

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ), $\dim W = r$ なるその vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 定理 3.7.10 より $V = W \oplus W^{\perp}$ が成り立つので, その直交空間 $W^{\perp}$ の直交補空間が W と与えられることから従う． □

定理 3.7.12. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, その vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W について, $U \subseteq W$ が成り立つなら, $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$ が成り立つ．

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, その vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W について, $U \subseteq W$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \in W^{\perp}$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ が成り立つことになる．そこで, $\forall \mathbf{u} \in U$ に対し, $\mathbf{u} \in U \subseteq W$ が成り立つので, $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ が成り立つ．よって, $\mathbf{v} \in U^{\perp}$ が成り立つので, $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$ が得られる． □

定理 3.7.13. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, その vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W について, 次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} (U + W)^{\perp} &= U^{\perp} \cap W^{\perp} \\ (U \cap W)^{\perp} &= U^{\perp} + W^{\perp} \end{aligned}$$

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, その vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W について, もちろん, $U \subseteq U + W$ が成り立つので, 定理 3.7.12 より $(U + W)^{\perp} \subseteq U^{\perp}$ が成り立つ．同様にして, $(U + W)^{\perp} \subseteq W^{\perp}$ が得られるので, 次のようになる．

$$(U + W)^{\perp} = (U + W)^{\perp} \cap (U + W)^{\perp} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$$

逆に, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$ が成り立つなら, $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in W$ として, $\forall \mathbf{u} + \mathbf{w} \in U + W$ に対し, $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ が成り立つので, 次のようになる．

$$\Phi(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0 + 0 = 0$$

ゆえに, $\mathbf{v} \in (U+W)^{\perp}$ が成り立つので, $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$ が得られる.

また, 上記の議論により, $\left(U^{\perp}+W^{\perp}\right)^{\perp} = U^{\perp\perp} \cap W^{\perp\perp}$ が成り立つので, 定理 3.7.11 より $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$ が得られる. □

定理 3.7.14 (Bessel-Parseval の不等式). $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ) から誘導される norm 空間 (V, φ_{Φ}), この内積空間 (V, Φ) における正規直交系 $\{\mathbf{o}_i\}_{i \in \Lambda_r}$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\sum_{i \in \Lambda_r} \left|\Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right)\right|^2 \leq \varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}\right)^2$$

さらに, その内積空間 (V, Φ) の正規直交基底 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\sum_{i \in \Lambda_n} \left|\Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right)\right|^2 = \varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}\right)^2$$

その不等式を Bessel-Parseval の不等式という.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ) から誘導される norm 空間 (V, φ_{Φ}), この内積空間 (V, Φ) における正規直交系 $\{\mathbf{o}_i\}_{i \in \Lambda_r}$ が与えられたとき, 定理 3.6.12 より $\imath \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r$ なる適切な $n-r$ つの vectors$\mathbf{o}_i$ を付け加えた組 $\langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ がその vector 空間 V の正規直交基底をなすようにすることができる. $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} a_i \mathbf{o}_i$$

定理 3.6.17 より $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $v_i = \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right)$ が成り立つので, 次式が得られる.

$$\sum_{i \in \Lambda_r} \left|\Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right)\right|^2 \leq \sum_{i \in \Lambda_r} \left|\Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right)\right|^2 + \varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v} - \sum_{i \in \Lambda_r} a_i \mathbf{o}_i\right)^2$$

そこで, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v} - \sum_{i \in \Lambda_r} a_i \mathbf{o}_i\right)^2 &= \varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v} - \sum_{i \in \Lambda_r} \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \mathbf{o}_i\right)^2 \\
&= \Phi\left(\mathbf{v} - \sum_{i \in \Lambda_r} \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \mathbf{o}_i, \mathbf{v} - \sum_{i \in \Lambda_r} \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \mathbf{o}_i\right) \\
&= \Phi\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) - \Phi\left(\mathbf{v}, \sum_{i \in \Lambda_r} \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \mathbf{o}_i\right) - \Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_r} \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \\
&\quad + \Phi\left(\sum_{i \in \Lambda_r} \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \mathbf{o}_i, \sum_{i \in \Lambda_r} \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \mathbf{o}_i\right) \\
&= \Phi\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) - \sum_{i \in \Lambda_r} \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \Phi\left(\mathbf{v}, \mathbf{o}_i\right) - \sum_{i \in \Lambda_r} \overline{\Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right)} \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \\
&\quad + \sum_{i \in \Lambda_r} \sum_{j \in \Lambda_r} \overline{\Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right)} \Phi\left(\mathbf{o}_j, \mathbf{v}\right) \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j\right) \\
&= \Phi\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) - \sum_{i \in \Lambda_r} \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \overline{\Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right)} - \sum_{i \in \Lambda_r} \Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right) \overline{\Phi\left(\mathbf{o}_i, \mathbf{v}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i,j\in\Lambda_r}\Phi\left(\mathbf{o}_j,\mathbf{v}\right)\overline{\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)}\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{o}_j\right)\\
&=\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)-2\sum_{i\in\Lambda_r}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2\\
&\quad+\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_r\\ i\neq j}}\Phi\left(\mathbf{o}_j,\mathbf{v}\right)\overline{\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)}\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{o}_j\right)+\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_r\\ i=j}}\Phi\left(\mathbf{o}_j,\mathbf{v}\right)\overline{\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)}\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{o}_j\right)\\
&=\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)-2\sum_{i\in\Lambda_r}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2\\
&\quad+\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_r\\ i\neq j}}\Phi\left(\mathbf{o}_j,\mathbf{v}\right)\overline{\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)}\cdot 0+\sum_{\substack{i,j\in\Lambda_r\\ i=j}}\Phi\left(\mathbf{o}_j,\mathbf{v}\right)\overline{\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)}\cdot 1\\
&=\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)-2\sum_{i\in\Lambda_r}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2+\sum_{i\in\Lambda_r}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2\\
&=\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)-\sum_{i\in\Lambda_r}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2
\end{aligned}
$$

次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in\Lambda_r}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2&\leq\sum_{i\in\Lambda_r}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2+\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)-\sum_{i\in\Lambda_r}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2\\
&=\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)=\varphi_\Phi\left(\mathbf{v}\right)^2
\end{aligned}
$$

よって, 次式が成り立つ.

$$\sum_{i\in\Lambda_r}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2\leq\varphi_\Phi\left(\mathbf{v}\right)^2$$

さらに, その内積空間 (V,Φ) の正規直交基底 $\left\langle\mathbf{o}_i\right\rangle_{i\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v}=\sum_{i\in\Lambda_n}a_i\mathbf{o}_i$$

定理 3.6.17 より $\forall i\in\Lambda_n$ に対し, $v_i=\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)$ が成り立つかつ, 次のようになるので,

$$\varphi_\Phi\left(\mathbf{v}-\sum_{i\in\Lambda_n}a_i\mathbf{o}_i\right)=\varphi_\Phi\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}\right)=\varphi_\Phi\left(\mathbf{0}\right)=0$$

次式が得られる.

$$\sum_{i\in\Lambda_n}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2=\sum_{i\in\Lambda_n}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2+\varphi_\Phi\left(\mathbf{v}-\sum_{i\in\Lambda_n}a_i\mathbf{o}_i\right)^2$$

そこで, 上記の議論により次のようになることから,

$$\varphi_\Phi\left(\mathbf{v}-\sum_{i\in\Lambda_n}a_i\mathbf{o}_i\right)^2=\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)-\sum_{i\in\Lambda_n}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2$$

次のようになる.

$$\sum_{i\in\Lambda_n}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2=\sum_{i\in\Lambda_n}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2+\Phi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)-\sum_{i\in\Lambda_n}\left|\Phi\left(\mathbf{o}_i,\mathbf{v}\right)\right|^2$$

$$= \varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right) = \varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v}\right)^{2}$$

よって, 次式が成り立つ.

$$\sum_{i \in \varLambda_{n}} \left|\varPhi\left(\mathbf{o}_{i},\mathbf{v}\right)\right|^{2} = \varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v}\right)^{2}$$

□

3.7.3 正射影

定義 3.7.4. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V,\varPhi)$, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $V = W \oplus W^{\perp}$ が成り立つのであった. このとき, その vector 空間 V からその直和因子 W への直和分解から定まる射影をその直交空間 $W^{\perp}$ に沿うその vector 空間 V からその部分 vector 空間 W への正射影という. 特に, 射影子でもあるような正射影を正射影子という. 以下ここでは, その正射影を P_{W} と書くことにする.

定理 3.7.15. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{p} \in V$ に対し, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, その vector 空間 V からその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{p}\right\}$ への正射影 $P_{\mathrm{span}\{\mathbf{p}\}}$ について, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次式が成り立つ.

$$P_{\mathrm{span}\{\mathbf{p}\}}\left(\mathbf{v}\right) = \frac{\varPhi\left(\mathbf{p},\mathbf{v}\right)}{\varPhi\left(\mathbf{p},\mathbf{p}\right)}\mathbf{p}$$

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V,\varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V,\varphi_{\varPhi})$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{p} \in V$ に対し, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{p}\right) \neq 0$ が成り立つので, その vector 空間 V からその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{p}\right\}$ への正射影 $P_{\mathrm{span}\{\mathbf{p}\}}$ について, $\mathbf{o}_{1} = \dfrac{\mathbf{p}}{\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{p}\right)}$ とおかれれば, その組 $\left\langle \mathbf{o}_{1} \right\rangle$ がその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\mathbf{p}\right\}$ の正規直交基底をなす. そこで, 定理 3.6.12 より $\scriptstyle 1$ $\in \varLambda_{n} \setminus \{1\}$ なる適切な $n-1$ つの vectors$\mathbf{o}_{i}$ を付け加えた組 $\left\langle \mathbf{o}_{i} \right\rangle_{i \in \varLambda_{n}}$ がその vector 空間 V の正規直交基底をなすようにすることができるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
V &= \mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_{i}\right\}_{i \in \varLambda_{n}} \\
&= \mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_{1}\right\} \oplus \mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_{i}\right\}_{i \in \varLambda_{n} \setminus \{1\}} \\
&= \mathrm{span}\left\{\mathbf{p}\right\} \oplus \mathrm{span}\left\{\mathbf{o}_{i}\right\}_{i \in \varLambda_{n} \setminus \{1\}}
\end{aligned}$$

そこで, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_{n}} a_{i}\mathbf{o}_{i}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{span}\{\mathbf{p}\}}\left(\mathbf{v}\right) &= P_{\mathrm{span}\{\mathbf{p}\}}\left(\sum_{i \in \varLambda_{n}} a_{i}\mathbf{o}_{i}\right) \\
&= P_{\mathrm{span}\{\mathbf{p}\}}\left(a_{1}\mathbf{o}_{1} + \sum_{i \in \varLambda_{n} \setminus \{1\}} a_{i}\mathbf{o}_{i}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P_{\mathrm{span}\{\mathbf{p}\}}\left(\frac{a_1}{\varphi_\Phi(\mathbf{p})}\mathbf{p} + \sum_{i\in\Lambda_n\setminus\{1\}} a_i\mathbf{o}_i\right)\\
&= \frac{a_1}{\varphi_\Phi(\mathbf{p})}\ \mathbf{p}
\end{aligned}
$$

そこで, 定理 3.6.17 より $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $v_i = \Phi(\mathbf{o}_i, \mathbf{v})$ が成り立つので, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{span}\{\mathbf{p}\}}(\mathbf{v}) &= \frac{\Phi(\mathbf{o}_1, \mathbf{v})}{\varphi_\Phi(\mathbf{p})}\mathbf{p}\\
&= \frac{\Phi\left(\frac{\mathbf{p}}{\varphi_\Phi(\mathbf{p})}, \mathbf{v}\right)}{\varphi_\Phi(\mathbf{p})}\mathbf{p}\\
&= \frac{\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{v})}{\varphi_\Phi(\mathbf{p})^2}\mathbf{p}\\
&= \frac{\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{v})}{\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p})}\mathbf{p}
\end{aligned}
$$

□

定理 3.7.16. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ) から誘導される norm 空間 (V, φ_Φ) が与えられたとき, その vector 空間 V からその vector 空間 V の部分 vector 空間 W への正射影 P_W において, 次のことが成り立つ.

- $\varphi_\Phi \circ P_W \leq \varphi_\Phi$ が成り立つ.
- $\forall\mathbf{v} \in V\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, $\varphi_\Phi(\mathbf{v} - P_W(\mathbf{v})) \leq \varphi_\Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ が成り立つ.
- $\forall\mathbf{v} \in V\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, $\varphi_\Phi(\mathbf{v} - P_W(\mathbf{v})) = \varphi_\Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{w} = P_W(\mathbf{v})$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ) から誘導される norm 空間 (V, φ_Φ) が与えられたとき, その vector 空間 V からその vector 空間 V の部分 vector 空間 W への正射影 P_W において, 定理 3.6.12 よりその部分 vector 空間 W の正規直交基底 $\langle\mathbf{o}_i\rangle_{i\in\Lambda_r}$ が与えられれば, $\imath \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r$ なる適切な $n - r$ つの vectors$\mathbf{o}_i$ を付け加えた組 $\langle\mathbf{o}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$ がその vector 空間 V の正規直交基底をなすようにすることができる. $\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$
\mathbf{v} = \sum_{i\in\Lambda_n} a_i\mathbf{o}_i
$$

次式が成り立つことから,

$$
V = \mathrm{span}\{\mathbf{o}_i\}_{i\in\Lambda_n} = \mathrm{span}\{\mathbf{o}_i\}_{i\in\Lambda_r} \oplus \mathrm{span}\{\mathbf{o}_i\}_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_r}, \quad W = \mathrm{span}\{\mathbf{o}_i\}_{i\in\Lambda_r}
$$

次のようになる.

$$
\begin{aligned}
P_W(\mathbf{v}) &= P_W\left(\sum_{i\in\Lambda_n} a_i\mathbf{o}_i\right)\\
&= P_W\left(\sum_{i\in\Lambda_r} a_i\mathbf{o}_i + \sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_r} a_i\mathbf{o}_i\right)\\
&= \sum_{i\in\Lambda_r} a_i\mathbf{o}_i
\end{aligned}
$$

したがって, 定理 3.6.17 より次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_\Phi \circ P_W(\mathbf{v})^2 &= \varphi_\Phi(P_W(\mathbf{v}))^2\\
&= \varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\Lambda_r} a_i\mathbf{o}_i\right)^2\\
&= \Phi\left(\sum_{i\in\Lambda_r} a_i\mathbf{o}_i, \sum_{i\in\Lambda_r} a_i\mathbf{o}_i\right)\\
&= \begin{pmatrix}\overline{a_1} & \cdots & \overline{a_r} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \sum_{i\in\Lambda_r}|a_i|^2\\
&\leq \sum_{i\in\Lambda_n}|a_i|^2\\
&= \begin{pmatrix}\overline{a_1} & \overline{a_2} & \cdots & \overline{a_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\\
&= \Phi\left(\sum_{i\in\Lambda_n} a_i\mathbf{o}_i, \sum_{i\in\Lambda_n} a_i\mathbf{o}_i\right)\\
&= \varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\Lambda_n} a_i\mathbf{o}_i\right)^2 = \varphi_\Phi(\mathbf{v})^2
\end{aligned}$$

$\varphi_\Phi \circ P_W \leq \varphi_\Phi$ が成り立つ.

さらに, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \sum_{i\in\Lambda_n} a_i\mathbf{o}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i\in\Lambda_r} b_i\mathbf{o}_i$$

定理 3.6.17 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_\Phi(\mathbf{v} - P_W(\mathbf{v}))^2 &= \varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\Lambda_n} a_i\mathbf{o}_i - P_W\left(\sum_{i\in\Lambda_n} a_i\mathbf{o}_i\right)\right)^2\\
&= \varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\Lambda_n} a_i\mathbf{o}_i - \sum_{i\in\Lambda_r} a_i\mathbf{o}_i\right)^2\\
&= \varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\Lambda_r} a_i\mathbf{o}_i + \sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_r} a_i\mathbf{o}_i - \sum_{i\in\Lambda_r} a_i\mathbf{o}_i\right)^2\\
&= \varphi_\Phi\left(\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_r} a_i\mathbf{o}_i\right)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varPhi\left(\sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} a_i \mathbf{o}_i, \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} a_i \mathbf{o}_i\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \overline{a_{r+1}} & \cdots & \overline{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} \left|a_i\right|^2 \\
\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2 &= \varphi_{\varPhi}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i - \sum_{i \in \varLambda_r} b_i \mathbf{o}_i\right)^2 \\
&= \varphi_{\varPhi}\left(\sum_{i \in \varLambda_r} a_i \mathbf{o}_i - \sum_{i \in \varLambda_r} b_i \mathbf{o}_i + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} a_i \mathbf{o}_i\right)^2 \\
&= \varphi_{\varPhi}\left(\sum_{i \in \varLambda_r} \left(a_i - b_i\right) \mathbf{o}_i + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} a_i \mathbf{o}_i\right)^2 \\
&= \varPhi\left(\sum_{i \in \varLambda_r} \left(a_i - b_i\right) \mathbf{o}_i + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} a_i \mathbf{o}_i, \sum_{i \in \varLambda_r} \left(a_i - b_i\right) \mathbf{o}_i + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} a_i \mathbf{o}_i\right) \\
&= \begin{pmatrix} \overline{a_1 - b_1} & \cdots & \overline{a_r - b_r} & \overline{a_{r+1}} & \cdots & \overline{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_r - b_r \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_r} \left|a_i - b_i\right|^2 + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} \left|a_i\right|^2
\end{aligned}
$$

ここで, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $0 \leq \left|a_i - b_i\right|^2$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v} - P_W\left(\mathbf{v}\right)\right)^2 &= \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} \left|a_i\right|^2 \\
&\leq \sum_{i \in \varLambda_r} \left|a_i - b_i\right|^2 + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_r} \left|a_i\right|^2 \\
&= \varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)^2
\end{aligned}
$$

よって, $\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v} - P_W\left(\mathbf{v}\right)\right) \leq \varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}\right)$ が成り立つ.

さらに, $\mathbf{w} \neq P_W\left(\mathbf{v}\right)$ が成り立つなら, 次式が成り立つことから,

$$\mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_r} b_i \mathbf{o}_i, \quad P_W\left(\mathbf{v}\right) = \sum_{i \in \varLambda_r} a_i \mathbf{o}_i$$

係数を比較して, $\exists i \in \varLambda_r$ に対し, $a_i \neq b_i$ が成り立つことから, $0 < \left|a_i - b_i\right|^2$ が成り立つ. したがって, 上記の

議論により次のようになることから,

$$\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}-P_W\left(\mathbf{v}\right)\right)^2=\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_r}\left|a_i\right|^2<\sum_{i\in\Lambda_r}\left|a_i-b_i\right|^2+\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_r}\left|a_i\right|^2=\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)^2$$

$\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}-P_W\left(\mathbf{v}\right)\right)<\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)$ が成り立つ. 対偶律により $\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}-P_W\left(\mathbf{v}\right)\right)=\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)$ が成り立つなら, $\mathbf{w}=P_W\left(\mathbf{v}\right)$ が成り立つ. 逆に, $\mathbf{w}=P_W\left(\mathbf{v}\right)$ が成り立つなら, 明らかに $\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}-P_W\left(\mathbf{v}\right)\right)=\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)$ が成り立つので, よって, $\forall\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, $\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}-P_W\left(\mathbf{v}\right)\right)=\varphi_{\Phi}\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{w}=P_W\left(\mathbf{v}\right)$ が成り立つ. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p347-353 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 木村一輝. ”ベッセルの不等式・パーセバルの等式とは：有限のケースで証明”. 趣味の大学数学. `https://math-fun.net/20210625/15588/` (2022-3-4 19:24 閲覧)

3.8 等長変換

3.8.1 等長変換

定義 3.8.1. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V, Φ) が与えられたとする．その内積空間 (V, Φ) からその内積空間 (V, Φ) 自身への等長写像を等長変換, unitary 変換などという．

定理 3.8.1. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の標準内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$, 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n$, これの行列 A が与えられ, さらに, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とおくとき, 次のことは同値である．

- その写像 L_A が等長変換である．
- その組 $\langle \mathbf{a}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ がその内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ の正規直交基底をなす．
- その行列 A が unitary 行列である, 即ち, $A^{-1} = A^*$ が成り立つ．

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の標準内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$, 線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n$, これの行列 A が与えられ, さらに, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とおくとき, その内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ における正規直交基底として標準直交基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ があげられる．このとき, 定理 3.7.5 より次のことは同値である．

- その写像 L_A が等長変換である．
- その組 $\langle L_A (\mathbf{e}_i) \rangle_{i \in \Lambda_n}$ がその内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ の正規直交基底をなす．

ここで, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $L_A (\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$ が成り立つので, 次のことは同値

- その写像 L_A が等長変換である．
- その組 $\langle \mathbf{a}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ がその内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ の正規直交基底をなす．

ここで, その組 $\langle \mathbf{a}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ がその内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ の正規直交基底をなすなら, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
A^* A &= \begin{pmatrix} {}^t\overline{\mathbf{a}_1} \\ {}^t\overline{\mathbf{a}_2} \\ \vdots \\ {}^t\overline{\mathbf{a}_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^t\overline{\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 & {}^t\overline{\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t\overline{\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_n \\ {}^t\overline{\mathbf{a}_2}\mathbf{a}_1 & {}^t\overline{\mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t\overline{\mathbf{a}_2}\mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t\overline{\mathbf{a}_n}\mathbf{a}_1 & {}^t\overline{\mathbf{a}_n}\mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t\overline{\mathbf{a}_n}\mathbf{a}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_n \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_n | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_n | \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_n | \mathbf{a}_n \rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n
\end{aligned}$$

$A^* A = I_n$ が得られる．同様にして, $AA^* = I_n$ も得られるので, その行列 A が unitary 行列である, 即ち,

$A^{-1}=A^*$ が成り立つ.

逆に, $A^{-1}=A^*$ が成り立つなら, $A^*A=I_n$ が成り立つので, 上記の議論により次のようになる.

$$A^*A=\begin{pmatrix}\langle\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_1\rangle & \langle\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2\rangle & \cdots & \langle\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_n\rangle \\ \langle\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_1\rangle & \langle\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_2\rangle & \cdots & \langle\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\mathbf{a}_n|\mathbf{a}_1\rangle & \langle\mathbf{a}_n|\mathbf{a}_2\rangle & \cdots & \langle\mathbf{a}_n|\mathbf{a}_n\rangle\end{pmatrix}$$

これにより, その族 $\{\mathbf{a}_i\}_{i\in\varLambda_n}$ は正規直交系をなす. このとき, 定理 3.6.10 よりその正規直交系 $\{\mathbf{a}_i\}_{i\in\varLambda_n}$ をなす vectors$\mathbf{a}_i$ は線形独立であるので, これらから生成される部分 vector 空間 $\operatorname{span}\{\mathbf{a}_i\}_{i\in\varLambda_n}$ の正規直交基底としてその組 $\langle\mathbf{a}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ があげられる. このとき, 次式が成り立つことから,

$$\dim K^n=n=\dim\operatorname{span}\{\mathbf{a}_i\}_{i\in\varLambda_n}$$

$K^n=\operatorname{span}\{\mathbf{a}_i\}_{i\in\varLambda_n}$ が得られ, したがって, その組 $\langle\mathbf{a}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ がその内積空間 $(K^n,\langle\bullet|\bullet\rangle)$ の正規直交基底をなす.

以上の議論により, よって, 次のことが同値であることが示された.

- その写像 L_A が等長変換である.
- その組 $\langle\mathbf{a}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ がその内積空間 $(K^n,\langle\bullet|\bullet\rangle)$ の正規直交基底をなす.
- その行列 A が unitary 行列である, 即ち, $A^{-1}=A^*$ が成り立つ.

□

定理 3.8.2. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V,\varPhi)$, 線形写像 $f:V\rightarrow V$, その内積空間 $(V,\varPhi)$ の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられ, さらに, $\mathcal{B}=\langle\mathbf{o}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ とおくとき, 次のことは同値である.

- その写像 f が等長変換である.
- その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が unitary 行列である, 即ち, ${[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{-1}={[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^*$ が成り立つ.

証明. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V,\varPhi)$, 線形写像 $f:V\rightarrow V$, その内積空間 $(V,\varPhi)$ の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられ, さらに, $\mathcal{B}=\langle\mathbf{o}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ とおくとき, その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ について考えると, もちろん, その写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ はその vector 空間 K^n からその vector 空間 V への線形同型写像である. さらに, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in K^n$ に対し, その vector 空間 K^n の標準直交基底 $\langle\mathbf{e}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ を用いて次のようにおくと,

$$\mathbf{v}=(a_i)_{i\in\varLambda_n}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{w}=(b_i)_{i\in\varLambda_n}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

定理 3.6.17 より次のようになるので,

$$\begin{aligned}\varPhi\left(\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}),\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\right)&=\varPhi\left(\varphi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i\in\varLambda_n}a_i\mathbf{e}_i\right),\varphi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i\in\varLambda_n}b_i\mathbf{e}_i\right)\right)\\&=\varPhi\left(\sum_{i\in\varLambda_n}a_i\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_i),\sum_{i\in\varLambda_n}b_i\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_i)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varPhi\left(\sum_{i\in\varLambda_n} a_i\mathbf{o}_i, \sum_{i\in\varLambda_n} b_i\mathbf{o}_i\right)\\
&= \begin{pmatrix}\overline{a_1} & \overline{a_2} & \cdots & \overline{a_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\right\rangle = \langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle
\end{aligned}$$

次のことが成り立つ.

- その写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ はその vector 空間 K^n からその vector 空間 V への線形同型写像である.
- $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in K^n$ に対し, $\varPhi\left(\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}),\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\right) = \langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle$ が成り立つ.

これにより, その写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ はその内積空間 $\left(K^n,\langle\bullet|\bullet\rangle\right)$ からその内積空間 $(V,\varPhi)$ への等長写像となっている.

したがって, その写像 $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}$ もその内積空間 $\left(K^n,\langle\bullet|\bullet\rangle\right)$ からその内積空間 $\left(K^n,\langle\bullet|\bullet\rangle\right)$ への等長写像となっているので, 定理 3.8.1 よりその線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が unitary 行列である, 即ち, ${[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{-1} = {[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{*}$ が成り立つ.

逆に, その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が unitary 行列であるなら, 上記の議論と同様にして, その写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ がその内積空間 $\left(K^n,\langle\bullet|\bullet\rangle\right)$ からその内積空間 $(V,\varPhi)$ への等長写像となっていることが示されることができることに注意すれば, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
f &= \left(\varphi_{\mathcal{B}}\circ\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\right)\circ f\circ\left(\varphi_{\mathcal{B}}\circ\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\right)\\
&= \varphi_{\mathcal{B}}\circ\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\right)\circ\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}
\end{aligned}$$

その写像 f は等長変換である. □

定理 3.8.3. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V,\varPhi)$, 等長変換 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, その等長変換 f の任意の固有値 λ は, もしこれが存在するなら, $|\lambda|=1$ を満たす.

証明. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 $(V,\varPhi)$, 等長変換 $f:V\rightarrow V$ が与えられたとき, その等長変換 f の任意の固有値 λ は, もしこれが存在するなら, ある $\mathbf{0}$ でないその vector 空間 V の vector$\mathbf{v}$ が存在して, $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ が成り立つ. このとき, その内積空間 $(V,\varPhi)$ から誘導される norm$\varphi_{\varPhi}$ を用いて $\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\neq 0$ が成り立つことに注意すれば, 定理 3.7.4 より $\varphi_{\varPhi} = \varphi_{\varPhi}\circ f$ が成り立つので, 次のようになり,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\varPhi}(f(\mathbf{v})) &= \varphi_{\varPhi}\circ f(\mathbf{v}) = \varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})\\
\varphi_{\varPhi}(f(\mathbf{v})) &= \varphi_{\varPhi}(\lambda\mathbf{v}) = |\lambda|\varphi_{\varPhi}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

したがって, $|\lambda|=1$ が得られる. □

3.8.2 随伴変換

定理 3.8.4. $K\subseteq\mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V,\varPhi)$, この内積空間 $(V,\varPhi)$ における正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, $\mathcal{B} = \langle\mathbf{o}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ とおかれると, その vector 空間 V のある基底 α がその内積空間 $(V,\varPhi)$ の正規

直交基底をなすならそのときに限り, その基底 $\mathcal{B}$ からその基底 α への基底変換行列 $[I_V]_{\mathcal{B}}^{\alpha}$ が unitary 行列である.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_{\varPhi})$, この内積空間 $(V, \varPhi)$ における正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, その vector 空間 V のある基底 α がその内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底をなすなら, それらの基底たち $\mathcal{B}$, α に関する基底変換における線形同型写像たち $\varphi_{\mathcal{B}}$, φ_α を用いて考えれば, その線形写像 $\varphi_\alpha \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ について, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\varphi_\alpha \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_i) = \mathbf{v}_i$ が成り立つので, その組 $\left\langle \varphi_\alpha \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_i) \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ がその内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底をなすことになる. そこで, 定理 3.8.2 よりその線形写像 $\varphi_\alpha \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ のその基底 α に関する表現行列 $\left[\varphi_\alpha \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\right]_\alpha^\alpha$ が unitary 行となるので, $A \in \mathrm{M}(n, n, K)$ なる行列 A が対応する行列となっている線形写像が $L_A : K^n \to K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ とおかれると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} L_{\left[\varphi_\alpha \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\right]_\alpha^\alpha} &= \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_\alpha \\ &= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_\alpha \\ &= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \\ &= L_{[I_V]_\alpha^{\mathcal{B}}} \end{aligned}$$

これにより, $\left[\varphi_\alpha \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\right]_\alpha^\alpha = [I_V]_\alpha^{\mathcal{B}}$ が成り立つので, $[I_V]_\alpha^{\mathcal{B}} = [I_V]_{\mathcal{B}}^{\alpha\,-1}$ が成り立つことに注意すれば, その基底 $\mathcal{B}$ からその基底 α への基底変換行列 $[I_V]_{\mathcal{B}}^\alpha$ が unitary 行列である.

逆に, その基底 $\mathcal{B}$ からその基底 α への基底変換行列 $[I_V]_{\mathcal{B}}^\alpha$ が unitary 行列であるなら, 上記の議論によりその行列 $\left[\varphi_\alpha \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\right]_\alpha^\alpha$ も unitary 行列である. 定理 3.8.2 よりその組 $\left\langle \varphi_\alpha \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_i) \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ がその内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底をなすことになる. そこで, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $\varphi_\alpha \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_i) = \mathbf{v}_i$ が成り立つので, その α がその内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底をなす. □

定理 3.8.5. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, $\forall f \in L(V, V)$ に対し, $g \in L(V, V)$ なるある線形写像 g が一意的に存在して, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(g(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \varPhi(\mathbf{v}, f(\mathbf{w}))$ が成り立つ. さらにいえば, その内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, その線形写像 g のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ は $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}$ を満たす.

定義 3.8.2. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, $\forall f \in L(V, V) \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(g(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \varPhi(\mathbf{v}, f(\mathbf{w}))$ が成り立つようなその線形写像 $g : V \to V$ をその内積空間 $(V, \varPhi)$ におけるその線形写像 f の随伴変換といい, 以下これ g を f^* と書くことにする.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, $\forall f \in L(V, V)$ に対し, その内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, その線形写像 f のその正規直交基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ の随伴行列がある線形写像のその正規直交基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列となるようなその線形写像が $g : V \to V \in L(V, V)$ とおかれよう. もちろん, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*} = [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つ. このとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 定理 3.6.18 より標準内積空間 $(K^n, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ とその基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ を用いて次のようになることから,

$$\begin{aligned} \varPhi(\mathbf{v}, f(\mathbf{w})) &= \left\langle \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \middle| \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(f(\mathbf{w})) \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \middle| \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \middle| \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w})\right) \right\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \middle| [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \right\rangle \\
&= {}^t\overline{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \\
&= {}^t\overline{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})}\, {}^t\overline{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \\
&= {}^t\overline{[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \\
&= \left\langle [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \middle| \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \right\rangle \\
&= \left\langle \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ g \circ \varphi_{\mathcal{B}} \left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \middle| \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \right\rangle \\
&= \left\langle \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ g \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \middle| \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \right\rangle \\
&= \left\langle \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(g(\mathbf{v})) \middle| \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{w}) \right\rangle \\
&= \varPhi(g(\mathbf{v}), \mathbf{w})
\end{aligned}
$$

$g \in L(V,V)$ なるある線形写像 g が存在して, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(g(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \varPhi(\mathbf{v}, f(\mathbf{w}))$ が成り立つことが示された.

このような線形写像 g がほかに g' と与えられたとき, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(g(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \varPhi(g'(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \varPhi(\mathbf{v}, f(\mathbf{w}))$ が成り立つので, $\varPhi(g(\mathbf{v}) - g'(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = 0$ が得られる. 定理 3.6.5 より $g(\mathbf{v}) - g'(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つので, $g = g'$ が得られる. よって, $g \in L(V,V)$ なるある線形写像 g が一意的に存在して, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(g(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \varPhi(\mathbf{v}, f(\mathbf{w}))$ が成り立つ.

さらにいえば, 上記の議論により直ちにわかるようにその内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, その線形写像 g のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ は $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}$ を満たす. □

定理 3.8.6. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- $\forall f, g \in L(V,V) \forall a, b \in K$ に対し, $(af + bg)^* = \overline{a} f^* + \overline{b} g^*$ が成り立つ.
- $\forall f, g \in L(V,V)$ に対し, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ が成り立つ.
- $\forall f \in L(V,V)$ に対し, $f^{**} = f$ が成り立つ.
- $\forall f \in L(V,V)$ に対し, その線形写像 f が線形同型写像であるなら, $f^{-1*} = f^{*-1}$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$, これにおける正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, $\forall f, g \in L(V,V) \forall a, b \in K$ に対し, $A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる行列 A が対応する行列となっている線形写像が $L_A : K^n \to K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ とおかれると, $\forall f, g \in L(V,V) \forall a, b \in K$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
(af + bg)^* &= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ (af + bg)^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[af+bg]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{\left(a[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} + b[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^*} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{\overline{a}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*} + \overline{b}[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \left(\overline{a} L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} + \overline{b} L_{[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \right) \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \overline{a} \left(\varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \right) + \overline{b} \left(\varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \right) \\
&= \overline{a} \left(\varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \right) + \overline{b} \left(\varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ g^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \right) \\
&= \overline{a} f^* + \overline{b} g^*
\end{aligned}
$$

また, $\forall f, g \in L(V,V)$ に対し, 次のようになる.

$$
(g \circ f)^* = \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ (g \circ f)^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{\left([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^*} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ L_{[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ L_{[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ g^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= f^* \circ g^*
\end{aligned}
$$

また, $\forall f \in L(V,V)$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
f^{**} &= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^{**} \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}**}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= f
\end{aligned}
$$

また, $\forall f \in L(V,V)$ に対し, その線形写像 f が線形同型写像であるなら, 逆写像 f^{-1} が存在して, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
f^{-1*} &= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^{-1*} \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}-1*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*-1}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}-1}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{\left[f^{*-1}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^{*-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= f^{*-1}
\end{aligned}
$$

□

定理 3.8.7. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V, Φ), 線形写像 $f: V \rightarrow V$, その内積空間 (V, Φ) の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられ, さらに, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおくとき, 次のことは同値である.

- その写像 f が等長変換である.
- その組 $\langle f(\mathbf{o}_i) \rangle_{i \in \Lambda_n}$ がその内積空間 (V, Φ) の正規直交基底をなす.
- その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が unitary 行列である, 即ち, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}-1} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}$ が成り立つ.
- $f^* = f^{-1}$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の内積空間 (V, Φ), 線形写像 $f: V \rightarrow V$, その内積空間 (V, Φ) の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられ, さらに, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおくとき, 定理 3.7.5, 定理 3.8.2 より次のことは同値である.

- その写像 f が等長変換である.
- その組 $\langle f(\mathbf{o}_i)\rangle_{i\in\Lambda_n}$ がその内積空間 (V,Φ) の正規直交基底をなす.
- その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が unitary 行列である, 即ち, ${[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{-1} = {[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{*}$ が成り立つ.

このとき, $A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる行列 A が対応する行列となっている線形写像が $L_A : K^n \rightarrow K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ とおかれると, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
f^* &= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{-1}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}\right)^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^{-1} \circ \left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\right)^{-1}\right) \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\\
&= f^{-1}
\end{aligned}$$

$f^* = f^{-1}$ が成り立つ.

逆に, $f^* = f^{-1}$ が成り立つなら, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
L_{{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{-1}} &= L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{-1}\\
&= \left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}\right)^{-1}\\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^{-1} \circ \left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\right)^{-1}\\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}\\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^{*} \circ \varphi_{\mathcal{B}}\\
&= L_{{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{*}}
\end{aligned}$$

その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が unitary 行列である, 即ち, ${[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{-1} = {[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{*}$ が成り立つ.

以上の議論により, 次のことは同値である.

- その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が unitary 行列である, 即ち, ${[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{-1} = {[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}^{*}$ が成り立つ.
- $f^* = f^{-1}$ が成り立つ.

□

定理 3.8.8. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V,Φ) が与えられたとき, $\forall f \in L(V,V)$ に対し, 次式が成り立つ.

$$V(f)^{\perp} = \ker f^*, \quad (\ker f)^{\perp} = V\left(f^*\right)$$

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V,Φ) が与えられたとき, $\forall f \in L(V,V)$ に対し, その線形写像 f

の随伴変換 f^* が定義され, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 定理 3.4.1, 定理 3.6.5, 随伴変換の定義より次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \in V(f)^{\perp} &\Leftrightarrow \mathbf{v} \in \{\mathbf{v} \in V | \forall f(\mathbf{w}) \in V(f) [\varPhi(f(\mathbf{w}), \mathbf{v}) = 0]\} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} \in V \wedge \forall f(\mathbf{w}) \in V(f) [\varPhi(\mathbf{v}, f(\mathbf{w})) = 0] \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} \in V \wedge \forall \mathbf{w} \in V [\varPhi(f^*(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = 0] \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} \in V \wedge f^*(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} \in \{\mathbf{v} \in V | f^*(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} \in \ker f^*
\end{aligned}$$

$V(f)^{\perp} = \ker f^*$ が成り立つ.

あとは, 上記の議論, 定理 3.7.11, 定理 3.8.5 より次のようになる.

$$(\ker f)^{\perp} = (\ker f^{**})^{\perp} = V(f^*)^{\perp\perp} = V(f^*)$$

□

3.8.3 Hermite 変換

定義 3.8.3. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, $\forall f \in L(V, V)$ に対し, $f^* = f$ が成り立つような線形写像 f をその内積空間 $(V, \varPhi)$ における Hermite 変換という.

定理 3.8.9. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$, その内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, $\forall f \in L(V, V)$ に対し, 次のことは同値である.

- その写像 f が Hermite 変換である.
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(f(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \varPhi(\mathbf{v}, f(\mathbf{w}))$ が成り立つ.
- その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が Hermite 行列である, 即ち, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$, その内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, $\forall f \in L(V, V)$ に対し, その写像 f が Hermite 変換であるなら, $f^* = f$ が成り立つので, これが成り立つならそのときに限り, 随伴変換の定義から明らかに, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(f(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \varPhi(\mathbf{v}, f(\mathbf{w}))$ が成り立つ.

その写像 f が Hermite 変換であるなら, $f^* = f$ が成り立つ. $A \in \mathrm{M}(n, n, K)$ なる行列 A が対応する行列となっている線形写像が $L_A : K^n \rightarrow K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ とおかれると, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} &= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \\
&= L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}
\end{aligned}$$

その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が Hermite 行列である, 即ち, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つ.

逆に, その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が Hermite 行列である, 即ち, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つなら, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
f^* &= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= f
\end{aligned}
$$

$f^* = f$ が成り立つ.

以上の議論により, 次のことは同値である.

- その写像 f が Hermite 変換である.
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi\left(f\left(\mathbf{v}\right), \mathbf{w}\right) = \varPhi\left(\mathbf{v}, f\left(\mathbf{w}\right)\right)$ が成り立つ.
- その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が Hermite 行列である, 即ち, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つ.

□

定理 3.8.10. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, $f \in L(V, V)$ なる任意の Hermite 変換 f の固有値はすべて実数である. 特に, Hermite 行列の固有値はすべて実数である.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_\varPhi)$ が与えられたとき, $f \in L(V, V)$ なる任意の Hermite 変換 f の固有値, 固有 vector の 1 つをそれぞれ λ, $\mathbf{v}$ とおかれると, $f\left(\mathbf{v}\right) = \lambda\mathbf{v}$ が成り立つ. したがって, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\varPhi\left(f\left(\mathbf{v}\right), \mathbf{v}\right) = \varPhi\left(\lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) = \overline{\lambda}\varPhi\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) = \overline{\lambda}\varphi_\varPhi\left(\mathbf{v}\right)^2 \\
\varPhi\left(\mathbf{v}, f\left(\mathbf{v}\right)\right) = \varPhi\left(\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v}\right) = \lambda\varPhi\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) = \lambda\varphi_\varPhi\left(\mathbf{v}\right)^2
\end{aligned}
$$

定理 3.8.9 より $\lambda\varphi_\varPhi\left(\mathbf{v}\right)^2 = \overline{\lambda}\varphi_\varPhi\left(\mathbf{v}\right)^2$ が得られ, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つことに注意すれば, $\varphi_\varPhi\left(\mathbf{v}\right)^2 \neq 0$ が成り立つので, $\lambda = \overline{\lambda}$ が得られる. これにより, $\lambda \in \mathbb{R}$ が得られ, よって, $f \in L(V, V)$ なる任意の Hermite 変換 f の固有値はすべて実数である. □

定理 3.8.11. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W について, 定理 3.7.10 より $V = W \oplus W^\perp$ が成り立つ. このとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{u} \in W$, $\mathbf{u}' \in W^\perp$ なる vectors$\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ を用いて $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}'$ とおかれ, 次のように写像 f がおかれれば,

$$
f : V \rightarrow V; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} - \mathbf{u}'
$$

その写像 f は線形写像であるどころが, 等長変換でもあるかつ, Hermite 変換でもある.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W について, 定理 3.7.10 より $V = W \oplus W^\perp$ が成り立つ. このとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{u} \in W$, $\mathbf{u}' \in W^\perp$ なる vectors$\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ を用いて $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}'$ とおかれ, 次のように写像 f がおかれれば,

$$
f : V \rightarrow V; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} - \mathbf{u}'
$$

$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\mathbf{t}, \mathbf{u} \in W$, $\mathbf{t}', \mathbf{u}' \in W^\perp$ なる vectors$\mathbf{t}$, $\mathbf{t}'$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ を用いて $\mathbf{v} = \mathbf{t} + \mathbf{t}'$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{u}'$ とおかれれば, 直交空間の定義に注意して次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\varPhi\left(f\left(\mathbf{v}\right), f\left(\mathbf{w}\right)\right) &= \varPhi\left(\mathbf{t} - \mathbf{t}', \mathbf{u} - \mathbf{u}'\right) \\
&= \varPhi\left(\mathbf{t}, \mathbf{u}\right) - \varPhi\left(\mathbf{t}, \mathbf{u}'\right) - \varPhi\left(\mathbf{t}', \mathbf{u}\right) + \varPhi\left(\mathbf{t}', \mathbf{u}'\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}) - \overline{\Phi(\mathbf{u}',\mathbf{t})} - \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}) + \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}) + \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}) + \overline{\Phi(\mathbf{u}',\mathbf{t})} + \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}) + \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}) + \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}') + \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}) + \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{t}+\mathbf{t}',\mathbf{u}+\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{v},\mathbf{w})
\end{aligned}
$$

定理 3.7.8 よりその写像 f は線形写像であるどころが, 等長変換でもある.

さらに, 直交空間の定義に注意して次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
\Phi(f(\mathbf{v}),\mathbf{w}) &= \Phi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',\mathbf{u}+\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}) + \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}') - \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}) + \overline{\Phi(\mathbf{u}',\mathbf{t})} - \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}) - \overline{\Phi(\mathbf{u}',\mathbf{t})} + \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{t},\mathbf{u}') + \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{t}',\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{t}+\mathbf{t}',\mathbf{u}-\mathbf{u}') \\
&= \Phi(\mathbf{v},f(\mathbf{w}))
\end{aligned}
$$

定理 3.8.9 よりその等長変換 f は Hermite 変換でもある. □

定理 3.8.12. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V,Φ) が与えられたとき, 等長変換でもあるかつ, Hermite 変換でもあるような線形写像 $f: V \to V$ について, 次のように集合 W がおかれれば,

$$
W = \left\{ \frac{\mathbf{v}+f(\mathbf{v})}{2} \in V \middle| \mathbf{v} \in V \right\}, \quad W' = \left\{ \frac{\mathbf{v}+f(\mathbf{v})}{2} \in V \middle| \mathbf{v} \in V \right\}
$$

それらの集合たち W, W' はその vector 空間 V の部分 vector 空間であり $V = W \oplus W'$ が成り立つ. さらに, $W' = W^{\perp}$ かつ $W = W'^{\perp}$ が成り立つ. このとき, $\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{u} \in W$, $\mathbf{u}' \in W'$ なる vectors$\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ を用いて $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}'$ とおかれれば, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} - \mathbf{u}'$ が成り立つ.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V,Φ) が与えられたとき, 等長変換でもあるかつ, Hermite 変換でもあるような線形写像 $f: V \to V$ について, 次のように集合 W がおかれれば,

$$
W = \left\{ \frac{\mathbf{v}+f(\mathbf{v})}{2} \in V \middle| \mathbf{v} \in V \right\}
$$

もちろん, $\mathbf{0} \in W$ が成り立つ. $\forall a,b \in K \forall\mathbf{t},\mathbf{u} \in W$ に対し, $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ なる vectors$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ を用いて次のようにおかれれば,

$$
\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}+f(\mathbf{v})}{2}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}+f(\mathbf{w})}{2}
$$

次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
a\mathbf{t}+b\mathbf{u} &= a\frac{\mathbf{v}+f(\mathbf{v})}{2} + b\frac{\mathbf{w}+f(\mathbf{w})}{2} \\
&= \frac{a(\mathbf{v}+f(\mathbf{v})) + b(\mathbf{w}+f(\mathbf{w}))}{2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a\mathbf{v}+b\mathbf{w} + af\left(\mathbf{v} \right) + bf\left(\mathbf{w} \right)}{2}\\
&= \frac{\left(a\mathbf{v}+b\mathbf{w} \right) + f\left(a\mathbf{v}+b\mathbf{w} \right)}{2}
\end{aligned}$$

$a\mathbf{t} + b\mathbf{u} \in W$ が成り立つ. 以上, 定理 1.1.9 よりその集合 W はその vector 空間 V の部分 vector 空間である.

次のように集合 W' がおかれれば,

$$W' = \left\{ \frac{\mathbf{v} - f\left(\mathbf{v} \right)}{2} \in V \middle| \mathbf{v} \in V \right\}$$

同様にして, その集合 W' もその vector 空間 V の部分 vector 空間であることが示される.

ここで, $\forall\mathbf{v} \in W\forall\mathbf{w} \in W'$ に対し, 次のようにおかれると,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{t} + f\left(\mathbf{t} \right)}{2}, \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} - f\left(\mathbf{u} \right)}{2}$$

その線形写像 f は等長変換でも Hermite 変換でもあることに注意すれば, 次式が成り立つので,

$$\begin{aligned}
\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right) &= \varPhi\left(\frac{\mathbf{t} + f\left(\mathbf{t} \right)}{2},\frac{\mathbf{u} - f\left(\mathbf{u} \right)}{2} \right)\\
&= \frac{1}{4}\varPhi\left(\mathbf{t} + f\left(\mathbf{t} \right),\mathbf{u} - f\left(\mathbf{u} \right) \right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\varPhi\left(\mathbf{t},\mathbf{u} \right) - \varPhi\left(\mathbf{t},f\left(\mathbf{u} \right) \right) + \varPhi\left(f\left(\mathbf{t} \right),\mathbf{u} \right) - \varPhi\left(f\left(\mathbf{t} \right),f\left(\mathbf{u} \right) \right) \right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\varPhi\left(\mathbf{t},\mathbf{u} \right) - \varPhi\left(f\left(\mathbf{t} \right),f\left(\mathbf{u} \right) \right) + \varPhi\left(f\left(\mathbf{t} \right),\mathbf{u} \right) - \varPhi\left(\mathbf{t},f\left(\mathbf{u} \right) \right) \right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\varPhi\left(\mathbf{t},\mathbf{u} \right) - \varPhi\left(\mathbf{t},\mathbf{u} \right) + \varPhi\left(f\left(\mathbf{t} \right),\mathbf{u} \right) - \varPhi\left(f\left(\mathbf{t} \right),\mathbf{u} \right) \right)\\
&= \frac{1}{4} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

$\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \in W' &\Leftrightarrow \mathbf{v} \in \left\{ \frac{\mathbf{t} - f\left(\mathbf{t} \right)}{2} \in V \middle| \mathbf{t} \in V \right\}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} = \frac{\mathbf{t} - f\left(\mathbf{t} \right)}{2} \in V \land \mathbf{t} \in V \land \forall\mathbf{w} \in W\left[\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right) = 0 \right]\\
&\Rightarrow \mathbf{v} \in V \land \forall\mathbf{w} \in W\left[\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right) = 0 \right]\\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} \in \left\{ \mathbf{v} \in V \middle| \forall\mathbf{w} \in W\left[\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right) = 0 \right] \right\}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} \in W^{\perp}
\end{aligned}$$

これにより, $W' \subseteq W^{\perp}$ が成り立つ.

もちろん, $W + W' \subseteq V$ が成り立つ一方で, $\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになるので,

$$\mathbf{v} = \frac{2\mathbf{v}}{2} = \frac{\mathbf{v} + f\left(\mathbf{v} \right) + \mathbf{v} - f\left(\mathbf{v} \right)}{2} = \frac{\mathbf{v} + f\left(\mathbf{v} \right)}{2} + \frac{\mathbf{v} - f\left(\mathbf{v} \right)}{2}$$

$V \subseteq W + W'$ が得られる. これにより, $V = W + W'$ が成り立つ. そこで, 定理 3.7.10 より $\left\{ \mathbf{0} \right\} \subseteq W \cap W' \subseteq W \cap W^{\perp} = \left\{ \mathbf{0} \right\}$ が成り立つので, $W \cap W' = \left\{ \mathbf{0} \right\}$ が得られ, したがって, $V = W \oplus W'$ が成り立つ.

定理 3.7.10 より $V = W \oplus W' = W \oplus W^{\perp}$ が成り立つことにより, 次のようになるので,

$$\dim W' = \dim W + \dim W' - \dim W$$

$$\begin{aligned}
&= \dim W \oplus W' - \dim W \\
&= \dim V - \dim W \\
&= \dim W \oplus W^{\perp} - \dim W \\
&= \dim W + \dim W^{\perp} - \dim W \\
&= \dim W^{\perp}
\end{aligned}$$

$W' = W^{\perp}$ が得られる．同様にして, $W = W'^{\perp}$ が得られる．

このとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{u} \in W$, $\mathbf{u}' \in W'$ なる vectors$\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ を用いて $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}'$ とおかれれば, 次のようにおかれることができて,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + f(\mathbf{v})}{2}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{v} - f(\mathbf{v})}{2}$$

次のようになる．

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{v}) &= \frac{2f(\mathbf{v})}{2} = \frac{f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v})}{2} \\
&= \frac{\mathbf{v} + f(\mathbf{v}) - \mathbf{v} + f(\mathbf{v})}{2} \\
&= \frac{\mathbf{v} + f(\mathbf{v})}{2} - \frac{\mathbf{v} - f(\mathbf{v})}{2} \\
&= \mathbf{u} - \mathbf{u}'
\end{aligned}$$

□

3.8.4 正規変換

定義 3.8.4. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, $\forall f \in L(V, V)$ に対し, $f^* \circ f = f \circ f^*$ が成り立つような線形写像 f をその内積空間 (V, Φ) における正規変換という．

定理 3.8.13. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, その内積空間 (V, Φ) における等長変換や Hermite 変換は正規変換である．

証明. 等長変換の場合, $f^* \circ f = f^{-1} \circ f = I_V$, $f \circ f^* = f \circ f^{-1} = I_V$, Hermite 変換の場合, $f^* \circ f = f \circ f$, $f \circ f^* = f \circ f$ と考えれば, 明らかである． □

定理 3.8.14. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ) から誘導される norm 空間 (V, φ_Φ), その内積空間 (V, Φ) の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, $\forall f \in L(V, V)$ に対し, 次のことは同値である．

- その写像 f が正規変換である．
- その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}$ が $[f]_\mathcal{B}^{\mathcal{B}^*}[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = [f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}[f]_\mathcal{B}^{\mathcal{B}^*}$ を満たす．
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\Phi(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})) = \Phi(f^*(\mathbf{v}), f^*(\mathbf{w}))$ が成り立つ．
- $\varphi_\Phi \circ f = \varphi_\Phi \circ f^*$ が成り立つ．

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ かつ $\dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ), その内積空間 (V, Φ) の正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, $\forall f \in L(V, V)$ に対し, その写像 f が正規変換であるなら, $f^* \circ f = f \circ f^*$ が成り立つ．そこで, その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_\mathcal{B}^\mathcal{B}$ について, $A \in \mathrm{M}(n, n, K)$ なる行列 A が対応する行列となって

いる線形写像が $L_A : K^n \rightarrow K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ とおかれると, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} &= L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ f^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \\
&= L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}} \\
&= L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}}
\end{aligned}$$

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}$ が成り立つ.

逆に, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}$ が成り立つなら, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
f^* \circ f &= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^* \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \\
&= f \circ f^*
\end{aligned}$$

$f^* \circ f = f \circ f^*$ が成り立つ. よって, その写像 f が正規変換である.

また, その写像 f が正規変換であるなら, $f^* \circ f = f \circ f^*$ が成り立つので, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 定理 3.8.6 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi\left(f\left(\mathbf{v}\right), f\left(\mathbf{w}\right)\right) &= \varPhi\left(\mathbf{v}, f^* \circ f\left(\mathbf{w}\right)\right) \\
&= \varPhi\left(\mathbf{v}, f \circ f^*\left(\mathbf{w}\right)\right) \\
&= \varPhi\left(\mathbf{v}, f^{**} \circ f^*\left(\mathbf{w}\right)\right) \\
&= \varPhi\left(f^*\left(\mathbf{v}\right), f^*\left(\mathbf{w}\right)\right)
\end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi\left(f\left(\mathbf{v}\right), f\left(\mathbf{w}\right)\right) = \varPhi\left(f^*\left(\mathbf{v}\right), f^*\left(\mathbf{w}\right)\right)$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\varPhi} \circ f\left(\mathbf{v}\right) &= \varphi_{\varPhi}\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right) \\
&= \sqrt{\varPhi\left(f\left(\mathbf{v}\right), f\left(\mathbf{v}\right)\right)} \\
&= \sqrt{\varPhi\left(f^*\left(\mathbf{v}\right), f^*\left(\mathbf{v}\right)\right)} \\
&= \varphi_{\varPhi}\left(f^*\left(\mathbf{v}\right)\right) \\
&= \varphi_{\varPhi} \circ f^*\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}$$

$\varphi_{\varPhi} \circ f = \varphi_{\varPhi} \circ f^*$ が成り立つ.

$\varphi_{\varPhi} \circ f = \varphi_{\varPhi} \circ f^*$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 定理 3.8.6 より次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varPhi\left(\mathbf{v}, \left(f^* \circ f - f \circ f^*\right)\left(\mathbf{v}\right)\right) &= \varPhi\left(\mathbf{v}, f^* \circ f\left(\mathbf{v}\right) - f^{**} \circ f^*\left(\mathbf{v}\right)\right) \\
&= \varPhi\left(\mathbf{v}, f^* \circ f\left(\mathbf{v}\right)\right) - \varPhi\left(\mathbf{v}, f^{**} \circ f^*\left(\mathbf{v}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varPhi\left(f\left(\mathbf{v}\right), f\left(\mathbf{v}\right)\right) - \varPhi\left(f^{*}\left(\mathbf{v}\right), f^{*}\left(\mathbf{v}\right)\right)\\
&= \varphi_{\varPhi}\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right)^{2} - \varphi_{\varPhi}\left(f^{*}\left(\mathbf{v}\right)\right)^{2}\\
&= \varphi_{\varPhi} \circ f\left(\mathbf{v}\right)^{2} - \varphi_{\varPhi} \circ f^{*}\left(\mathbf{v}\right)^{2}\\
&= \varphi_{\varPhi} \circ f\left(\mathbf{v}\right)^{2} - \varphi_{\varPhi} \circ f\left(\mathbf{v}\right)^{2} = 0
\end{aligned}
$$

定理 3.6.5 より $\left(f^{*} \circ f - f \circ f^{*}\right)\left(\mathbf{v}\right) = \mathbf{0}$ が成り立つ．これにより，$f^{*} \circ f - f \circ f^{*} = 0$ が成り立ち，したがって，$f^{*} \circ f = f \circ f^{*}$ が得られる．よって，その線形写像 f は正規変換である． □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p354-363 ISBN978-4-00-029872-8

3.9 spectrum 分解

3.9.1 Toeplitz の定理

定義 (定義 2.4.3 の再掲)**.** 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f: V \to V$ が与えられたとき, $V(f|W) \subseteq W$ が成り立つなら, その部分 vector 空間 W は f-不変であるという.

定理 3.9.1. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, $\forall f, g \in L(V, V)$ に対し, $g \circ f = f \circ g$ が成り立つなら, $\exists \mathbf{v} \in V$ に対し, その vector$\mathbf{v}$ がそれらの線形写像たち f, g どちらとものの固有 vector となる.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, $\forall f, g \in L(V, V)$ に対し, $g \circ f = f \circ g$ が成り立つなら, 定理 2.2.5, 定理 2.2.6 よりそれらの線形写像たち f, g どちらとも固有値たちと固有 vector を必ずもつ. その線形写像 f の固有値 λ に対する固有空間を $W_f(\lambda)$ とおくと, $\{\mathbf{0}\} \subset W_f(\lambda)$ が成り立ち, $\forall \mathbf{v} \in W_f(\lambda)$ に対し, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
(\lambda I_V - f)(g(\mathbf{v})) &= (\lambda I_V - f) \circ g(\mathbf{v}) \\
&= (\lambda I_V \circ g - f \circ g)(\mathbf{v}) \\
&= \lambda g(\mathbf{v}) - f \circ g(\mathbf{v}) \\
&= \lambda g(\mathbf{v}) - g \circ f(\mathbf{v}) \\
&= \lambda g(\mathbf{v}) - g \circ (-\lambda I_V + f + \lambda I_V)(\mathbf{v}) \\
&= \lambda g(\mathbf{v}) + g \circ (\lambda I_V - f)(\mathbf{v}) - g \circ \lambda I_V(\mathbf{v}) \\
&= \lambda g(\mathbf{v}) + g((\lambda I_V - f)(\mathbf{v})) - g(\lambda I_V(\mathbf{v})) \\
&= \lambda g(\mathbf{v}) + g(\mathbf{0}) - \lambda g(\mathbf{v}) \\
&= g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$V(g|W_f(\lambda)) \subseteq W_f(\lambda)$ が成り立つ. ゆえに, その固有空間 $W_f(\lambda)$ は g-不変である.

これにより, 定理 2.2.5, 定理 2.2.6 よりその線形写像 $g|W_f(\lambda)$ の固有 vector$\mathbf{w}$ が存在する. もちろん, その固有 vector$\mathbf{w}$ はその線形写像 g の固有 vector でもあるし, さらにいえば, $\mathbf{w} \in W_f(\lambda)$ が成り立つので, その固有 vector$\mathbf{w}$ はその線形写像 f の固有 vector でもある. □

定理 3.9.2. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, $\forall f, g \in L(V, V)$ に対し, $g \circ f = f \circ g$ が成り立つなら, その vector 空間 V のある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して, これに関するそれらの線形写像たち f, g の表現行列たち $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が上三角行列となる.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, $\forall f, g \in L(V, V)$ に対し, $g \circ f = f \circ g$ が成り立つなら, $n = 1$ のときでは明らかであるので, $n = k$ のときその vector 空間 V のある正規直交基底が存在して, これに関するそれらの線形写像たち f, g の表現行列たちが上三角行列となると仮定しよう.

$n = k + 1$ のとき, 次のようになるので,

$$g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

定理 3.9.1 よりそれらの線形写像たち f^*, g^* どちらとものの固有 vector$\widetilde{\mathbf{v}}$ が存在する. このとき, 定理 3.7.10 よ

り $V=\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}\oplus\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\dim\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}&=\dim\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}+\dim\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}-\dim\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}\\&=\dim\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}\oplus\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}-\dim\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}\\&=\dim V-\dim\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}\\&=k+1-1=k\end{aligned}$$

さらに, $\forall\mathbf{v}\in\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}$ に対し, その固有 vector$\widetilde{\mathbf{v}}$ に対する固有値を λ とおくと, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}\varPhi\left(\widetilde{\mathbf{v}},f\left(\mathbf{v}\right)\right)&=\varPhi\left(f^{*}\left(\widetilde{\mathbf{v}}\right),\mathbf{v}\right)\\&=\varPhi\left(f^{*}\left(\widetilde{\mathbf{v}}\right),\mathbf{v}\right)\\&=\varPhi\left(\lambda\widetilde{\mathbf{v}},\mathbf{v}\right)\\&=\overline{\lambda}\varPhi\left(\widetilde{\mathbf{v}},\mathbf{v}\right)\\&=\overline{\lambda}\cdot 0=0\end{aligned}$$

$V\left(f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}\right)\subseteq\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}$ が成り立つ. ゆえに, その直交空間 $\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}$ は f-不変である. 同様にして, その直交空間 $\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}$ は g-不変であることも示される.

これにより, 線形写像たち $f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}$, $g|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}$ が考えられれば, $g\circ f=f\circ g$ が成り立つかつ, $\dim\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}=k$ が成り立つので, 仮定よりその部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}$ のある正規直交基底 $\widetilde{\mathcal{B}}$ が存在して, これに関するそれらの線形写像たち $f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}$, $g|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}$ の表現行列たち $\left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}\right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}}$, $\left[g|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}\right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}}$ が上三角行列となる.

そこで, $\widetilde{\mathbf{v}}\neq\mathbf{0}$ が成り立つことに注意すれば, その内積空間 $(V,\varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V,\varphi_{\varPhi})$ において, $\mathcal{B}=\left\langle\widetilde{\mathcal{B}}\quad\frac{\widetilde{\mathbf{v}}}{\varphi_{\varPhi}\left(\widetilde{\mathbf{v}}\right)}\right\rangle$, $\widetilde{\mathcal{B}}=\left\langle\mathbf{o}_{i}\right\rangle_{i\in\varLambda_{k}}$ とおかれると, その組 $\mathcal{B}$ はその vector 空間 V の基底で, $\forall i\in\varLambda_{k}$ に対し, $\mathbf{o}_{i}\in\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp}$ が成り立つことから次のようになるので,

$$\varPhi\left(\frac{\widetilde{\mathbf{v}}}{\varphi_{\varPhi}\left(\widetilde{\mathbf{v}}\right)},\mathbf{o}_{i}\right)=\frac{\varPhi\left(\widetilde{\mathbf{v}},\mathbf{o}_{i}\right)}{\varphi_{\varPhi}\left(\widetilde{\mathbf{v}}\right)}=\frac{0}{\varphi_{\varPhi}\left(\widetilde{\mathbf{v}}\right)}=0,\quad\varphi_{\varPhi}\left(\frac{\widetilde{\mathbf{v}}}{\varphi_{\varPhi}\left(\widetilde{\mathbf{v}}\right)}\right)=\frac{\varphi_{\varPhi}\left(\widetilde{\mathbf{v}}\right)}{\varphi_{\varPhi}\left(\widetilde{\mathbf{v}}\right)}=1$$

その基底 $\mathcal{B}$ はその vector 空間 V の正規直交基底をなす.

さらに, $A\in\mathrm{M}\left(n,n,\mathbb{C}\right)$ なる行列 A が対応する行列となっている線形写像が $L_{A}:\mathbb{C}^{n}\rightarrow\mathbb{C}^{n};\mathbf{v}\mapsto A\mathbf{v}$ とおかれ, $\forall\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{k+1}$ に対し, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}\mathbf{w}\\v\end{pmatrix}$ とおかれると, その vector 空間 $\mathbb{C}^{k+1}$ の標準直交基底を $\left\langle\mathbf{e}_{i}\right\rangle_{i\in\varLambda_{k+1}}$ として次のようになるので,

$$\begin{aligned}L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}\left(\mathbf{v}\right)&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{v}\right)\\&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}\mathbf{w}\\v\end{pmatrix}\\&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{w}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\v\end{pmatrix}\right)\\&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}\mathbf{w}\\0\end{pmatrix}+\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\v\end{pmatrix}\\&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\left(\varphi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}\mathbf{w}\\0\end{pmatrix}\right)+v\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\1\end{pmatrix}\\&=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\left(\varphi_{\widetilde{\mathcal{B}}}\left(\mathbf{w}\right)\right)+v\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \circ \varphi_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\mathbf{w}) + v\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \left(f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \circ \varphi_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\mathbf{w}) \right) + v\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{-1} \left(f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \circ \varphi_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\mathbf{w}) \right) \\ 0 \end{pmatrix} + v\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{-1} \circ f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \circ \varphi_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\mathbf{w}) \\ 0 \end{pmatrix} + v\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}} \mathbf{w} \\ 0 \end{pmatrix} + v[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}} \\ O \end{pmatrix} \mathbf{w} + [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0 + \begin{pmatrix} \left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}} \\ O \end{pmatrix} \mathbf{0} + [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} v \\
&= \begin{pmatrix} \left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}} & [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\ O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}} & [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\ O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}} & [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\ O \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ v \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}} & [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\ O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}} & [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\ O \end{pmatrix} \mathbf{v} \\
&= L_{\begin{pmatrix} \left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}} & [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\ O \end{pmatrix}}(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}} & [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\ O \end{pmatrix}$ が得られる．ここで，その行列 $\left[f|\mathrm{span}\left\{\widetilde{\mathbf{v}}\right\}^{\perp} \right]_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\widetilde{\mathcal{B}}}$ は上三角行列であるので，その行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ も上三角行列である．その線形写像 g についても同様にして示される．

以上数学的帰納法により，$g \circ f = f \circ g$ が成り立つなら，その vector 空間 V のある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して，これに関するそれらの線形写像たち f, g の表現行列たち $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が上三角行列となることが示された． □

定理 3.9.3. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき，$\forall f \in L(V,V)$ に対し，その vector 空間 V のある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して，これに関するそれらの線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が上三角行列となる．

証明. 定理 3.9.2 における線形写像 g を $g = f$ または $g = I_V$ とおかれればよい． □

定理 3.9.4 (Toeplitz の定理)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき，$\forall f \in L(V,V)$ に対し，その vector 空間 V のある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して，これに関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となるならそのときに限り，その線形写像 f が正規変換である．この定理を Toeplitz の

定理という.

この主張を行列で考えられれば, $\forall A \in \mathrm{M}(n,n,\mathbb{C})$ に対し, ある n 次 unitary 行列 U が存在して, その行列 U^*AU が対角行列となるならそのときに限り, $A^*A = AA^*$ が成り立つことになる.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 (V,Φ) が与えられたとき, $\forall f \in L(V,V)$ に対し, その vector 空間 V のある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して, これに関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となるなら, 定義より $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*} = [f^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つので, その行列 $[f^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ も対角行列となって $[f^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[f^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, 即ち, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}$ が成り立つ. 定理 3.8.8 よりよって, その線形写像 f が正規変換である.

逆に, その線形写像 f が正規変換であるなら, $f^* \circ f = f \circ f^*$ が成り立つので, 定理 3.9.2 よりその vector 空間 V のある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して, これに関するそれらの線形写像たち f, f^* の表現行列たち $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, $[f^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が上三角行列となる. このとき, 定理 3.8.5 より $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [f^{**}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [f^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}$ が成り立つので, その行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ は下三角行列でもある. ゆえに, その行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ は対角行列となる. □

定理 3.9.5. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 (V,Φ) が与えられたとき, $\forall f \in L(V,V)$ に対し, その線形写像 f が正規変換であるとき, その線形写像 f の固有値たち λ がすべて $|\lambda| = 1$ を満たすなら, その線形写像 f は等長変換であり, その線形写像 f の固有値たち λ がすべて $\lambda = \pm 1$ を満たすなら, その線形写像 f は Hermite 変換である.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 (V,Φ) が与えられたとき, $\forall f \in L(V,V)$ に対し, その線形写像 f が正規変換であるとき, その線形写像 f の固有値たち λ がすべて $|\lambda| = 1$ を満たすなら, 定理 3.9.4, 即ち, Toeplitz の定理よりその vector 空間 V のある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して, これに関するそれらの線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となるようにすることができる. そこで, 定理 2.2.12 よりその表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ の対角成分がその線形写像 f の固有値であるので, 次のようにおかれれば,

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

次のようになるので,

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & & O \\ & \overline{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & & O \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix} = I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & & O \\ & \overline{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left|\lambda_1\right|^2 & & & O \\ & \left|\lambda_2\right|^2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \left|\lambda_n\right|^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix} = I_n
\end{aligned}$$

その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が unitary 行列である, 即ち, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}-1} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*}$ が成り立ち, 定理 3.8.6 よりしたがって, その線形写像 f は等長変換である.

その線形写像 f の固有値たち λ がすべて $\lambda = \pm 1$ を満たすなら, その線形写像 f のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が Hermite 行列である, 即ち, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}*} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つので, 定理 3.8.8 よりしたがって, その線形写像 f は Hermite 変換である. □

3.9.2 内積空間と対角化

定理 3.9.6. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$, $f \in L(V, V)$ なる正規変換 f が与えられたとき, 定理 2.3.1 よりその線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ がその線形写像 f の互いに異なる s つの固有値たち λ_i を用いて次式のように表されることができるので, そうするなら,

$$\varPhi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}, \quad \sum_{i \in \varLambda_s} n_i = n$$

次のことが成り立つ.

- その vector 空間 V のある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して, これに含まれる任意の vector はある固有空間 $W_f(\lambda_i)$ に属し, さらに, その基底 $\mathcal{B}$ に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となる.
- その固有値 λ_i に対する固有空間たち $W_f(\lambda_i)$ すべての和空間は直和空間でこれはその vector 空間 V に等しい, 即ち, その vector 空間 V は次式を満たす.

$$V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f(\lambda_i)$$

- $\forall i, j \in \varLambda_s$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $\varPhi | W_f(\lambda_i) \times W_f(\lambda_j) = 0$ が成り立つ.
- 次式が成り立ち,

$$W_f(\lambda_i)^{\perp} = \bigoplus_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} W_f(\lambda_{i'})$$

したがって, 上の直和分解から定まるその vector 空間 V からその固有空間 $W_f(\lambda_i)$ への射影はその vector 空間 V からその固有空間 $W_f(\lambda_i)$ への正射影である.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 (V, Φ), $f \in L(V,V)$ なる正規変換 f が与えられたとき, 定理 2.3.1 よりその線形写像 f の固有多項式 Φ_f がその線形写像 f の互いに異なる s つの固有値たち λ_i を用いて次式のように表されることができるので, そうするなら,

$$\Phi_f = \prod_{i \in \Lambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}, \quad \sum_{i \in \Lambda_s} n_i = n$$

定理 3.9.4, 即ち, Toeplitz の定理より $\forall f \in L(V,V)$ に対し, その線形写像 f が正規変換であるならそのときに限り, その vector 空間 V のある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して, これに関するそれらの線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となる. そこで, その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$, その vector 空間 $\mathbb{C}^n$ の標準直交基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, 線形写像 $L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n; \mathbf{v} \mapsto [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \mathbf{v}$ について, 定理 2.4.15 より $\dim W_f(\lambda_i) = n_i$ が成り立つので, 次の表のように $\forall i' \in \Lambda_n$ に対し, $\sum_{j' \in \Lambda_i} n_{j'} < i' \leq \sum_{j' \in \Lambda_{i+1}} n_{j'}$ が成り立つような自然数 i を用いて $j = i' - \sum_{j' \in \Lambda_i} n_{j'}$ とおかれることで, その正規直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{o}_{ij} \rangle_{(i,j) \in \Lambda_s \times \Lambda_{n_i}}$ とおかれることができる.

(i,j)	i'
$(1,1)$	1
$(1,2)$	2
$\vdots$	$\vdots$
$(1,n_1)$	n_1
$(2,1)$	n_1+1
$(2,2)$	n_1+2
$\vdots$	$\vdots$
$(2,n_2)$	n_1+n_2
$\vdots$	$\vdots$
$(s,1)$	$n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}+1$
$(s,2)$	$n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}+1$
$\vdots$	$\vdots$
(s,n_s)	$n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}+n_s$

このとき, 定理 2.2.12 よりその表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ の対角成分がその線形写像 f の固有値であるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
(\lambda_i I_V - f)(\mathbf{o}_{ij}) &= \lambda_i I_V(\mathbf{o}_{ij}) - f(\mathbf{o}_{ij}) \\
&= \lambda_i \mathbf{o}_{ij} - \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_{ij}) \\
&= \lambda_i \mathbf{o}_{ij} - \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_{ij}) \\
&= \lambda_i \mathbf{o}_{ij} - \varphi_{\mathcal{B}}\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_{ij})\right) \\
&= \lambda_i \mathbf{o}_{ij} - \varphi_{\mathcal{B}}\left(\lambda_i \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_{ij})\right) \\
&= \lambda_i \mathbf{o}_{ij} - \lambda_i \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_{ij}) \\
&= \lambda_i \mathbf{o}_{ij} - \lambda_i \mathbf{o}_{ij} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

これにより, $\mathbf{o}_{ij} \in \ker\left(\lambda_i I_V - f\right) \setminus \{\mathbf{0}\} = W_f\left(\lambda_i\right)$ が得られる.
　また, 定理 2.4.15 より次のことは同値である.

- その線形写像 f は対角化可能である.
- その vector 空間 V はその固有値 λ_i に対する固有空間 $W_f\left(\lambda_i\right)$ を用いて次式が成り立つ.

$$V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f\left(\lambda_i\right)$$

これにより, その固有値 λ_i に対する固有空間たち $W_f\left(\lambda_i\right)$ すべての和空間は直和空間でこれはその vector 空間 V に等しい, 即ち, その vector 空間 V は次式を満たす.

$$V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f\left(\lambda_i\right)$$

　$\forall i, j \in \varLambda_s$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $\forall\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) \in W_f\left(\lambda_i\right) \times W_f\left(\lambda_j\right)$ に対し, 上記の議論により次のようにおかれることができて,

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k \in \varLambda_{n_i}} v_{ik}\mathbf{o}_{ik}, \quad \mathbf{v}_j = \sum_{l \in \varLambda_{n_j}} v_{jl}\mathbf{o}_{jl}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi|W_f\left(\lambda_i\right) \times W_f\left(\lambda_j\right)\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) &= \varPhi\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) \\
&= \varPhi\left(\sum_{k \in \varLambda_{n_i}} v_{ik}\mathbf{o}_{ik}, \sum_{l \in \varLambda_{n_j}} v_{jl}\mathbf{o}_{jl}\right) \\
&= \sum_{k \in \varLambda_{n_i}} \sum_{l \in \varLambda_{n_j}} \overline{v_{ik}} v_{jl} \varPhi\left(\mathbf{o}_{ik}, \mathbf{o}_{jl}\right) \\
&= \sum_{k \in \varLambda_{n_i}} \sum_{l \in \varLambda_{n_j}} \overline{v_{ik}} v_{jl} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

よって, $\varPhi|W_f\left(\lambda_i\right) \times W_f\left(\lambda_j\right) = 0$ が成り立つ.
　上の直和分解から定まるその vector 空間 V からその固有空間 $W_f\left(\lambda_i\right)$ への射影 P_i について, $\forall \mathbf{v} \in W_f\left(\lambda_i\right) \forall \mathbf{w} \in \bigoplus_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} W_f\left(\lambda_{i'}\right)$ に対し, 次のようにおかれることができて,

$$\mathbf{v} = \sum_{j \in \varLambda_{n_i}} v_{ij}\mathbf{o}_{ij}, \quad \mathbf{w} = \sum_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} \sum_{j' \in \varLambda_{n_{i'}}} v_{i'j'}\mathbf{o}_{i'j'}$$

次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varPhi\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= \varPhi\left(\sum_{j \in \varLambda_{n_i}} v_{ij}\mathbf{o}_{ij}, \sum_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} \sum_{j' \in \varLambda_{n_{i'}}} v_{i'j'}\mathbf{o}_{i'j'}\right) \\
&= \sum_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} \sum_{j' \in \varLambda_{n_{i'}}} \sum_{j \in \varLambda_{n_i}} \overline{v_{ij}} v_{i'j'} \varPhi\left(\mathbf{o}_{ij}, \mathbf{o}_{i'j'}\right) \\
&= \sum_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} \sum_{j' \in \varLambda_{n_{i'}}} \sum_{j \in \varLambda_{n_i}} \overline{v_{ij}} v_{i'j'} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

$\bigoplus_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} W_f\left(\lambda_{i'}\right) \subseteq W_f\left(\lambda_i\right)^\perp$ が成り立つ. そこで, 定理 3.7.10 より次式が成り立つことにより,

$$V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f\left(\lambda_i\right) = W_f\left(\lambda_i\right) \oplus \bigoplus_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} W_f\left(\lambda_{i'}\right), \quad V = W_f\left(\lambda_i\right) \oplus W_f\left(\lambda_i\right)^\perp$$

次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\dim \bigoplus_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} W_f\left(\lambda_{i'}\right) &= \dim W_f\left(\lambda_i\right) + \dim \bigoplus_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} W_f\left(\lambda_{i'}\right) - \dim W_f\left(\lambda_i\right) \\
&= \dim W_f\left(\lambda_i\right) \oplus \bigoplus_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} W_f\left(\lambda_{i'}\right) - \dim W_f\left(\lambda_i\right) \\
&= \dim V - \dim W_f\left(\lambda_i\right) \\
&= \dim W_f\left(\lambda_i\right) \oplus W_f\left(\lambda_i\right)^\perp - \dim W_f\left(\lambda_i\right) \\
&= \dim W_f\left(\lambda_i\right) + \dim W_f\left(\lambda_i\right)^\perp - \dim W_f\left(\lambda_i\right) \\
&= \dim W_f\left(\lambda_i\right)^\perp
\end{aligned}$$

$\bigoplus_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} W_f\left(\lambda_{i'}\right) = W_f\left(\lambda_i\right)^\perp$ が得られる. したがって, 上の直和分解から定まるその vector 空間 V からその固有空間 $W_f\left(\lambda_i\right)$ への射影はその vector 空間 V からその固有空間 $W_f\left(\lambda_i\right)$ への正射影である. □

3.9.3 spectrum 分解

定理 3.9.7. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W について, 定理 2.1.11 より $V = U \oplus W$ とおかれれば, その直和分解から定まるその vector 空間 V からその部分 vector 空間 W への射影 P が正射影であるならそのときに限り, その射影 P が Hermite 変換である, 即ち, $P = P^*$ が成り立つ.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W について, 定理 2.1.11 より $V = U \oplus W$ とおかれれば, その直和分解から定まるその vector 空間 V からその部分 vector 空間 W への射影 P が正射影であるなら, $U = W^\perp$ が成り立つことになり, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\mathbf{u_v}, \mathbf{u_w} \in U$, $\mathbf{w_v}, \mathbf{w_w} \in W$ なる vectors を用いて $\mathbf{v} = \mathbf{u_v} \oplus \mathbf{w_v}$, $\mathbf{w} = \mathbf{u_w} \oplus \mathbf{w_w}$ とおかれれば, 次のようになるので

$$\begin{aligned}
\varPhi\left(P\left(\mathbf{v}\right), \mathbf{w}\right) &= \varPhi\left(P\left(\mathbf{u_v} \oplus \mathbf{w_v}\right), \mathbf{u_w} \oplus \mathbf{w_w}\right) \\
&= \varPhi\left(\mathbf{w_v}, \mathbf{u_w} \oplus \mathbf{w_w}\right) \\
&= \varPhi\left(\mathbf{w_v}, \mathbf{u_w}\right) + \varPhi\left(\mathbf{w_v}, \mathbf{w_w}\right) \\
&= \varPhi\left(\mathbf{w_v}, \mathbf{w_w}\right) \\
\varPhi\left(\mathbf{v}, P\left(\mathbf{w}\right)\right) &= \varPhi\left(\mathbf{u_v} \oplus \mathbf{w_v}, P\left(\mathbf{u_w} \oplus \mathbf{w_w}\right)\right) \\
&= \varPhi\left(\mathbf{u_v} \oplus \mathbf{w_v}, \mathbf{w_w}\right) \\
&= \varPhi\left(\mathbf{u_v}, \mathbf{w_w}\right) + \varPhi\left(\mathbf{w_v}, \mathbf{w_w}\right) \\
&= \varPhi\left(\mathbf{w_v}, \mathbf{w_w}\right)
\end{aligned}$$

$\varPhi\left(P\left(\mathbf{v}\right), \mathbf{w}\right) = \varPhi\left(\mathbf{v}, P\left(\mathbf{w}\right)\right)$ が得られる. したがって, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになるので

$$\varPhi\left(\mathbf{v}, \left(P - P^*\right)\left(\mathbf{w}\right)\right) = \varPhi\left(\mathbf{v}, P\left(\mathbf{w}\right) - P^*\left(\mathbf{w}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}&= \varPhi\left(\mathbf{v}, P\left(\mathbf{w}\right)\right) - \varPhi\left(\mathbf{v}, P^{*}\left(\mathbf{w}\right)\right)\\&= \varPhi\left(P\left(\mathbf{v}\right), \mathbf{w}\right) - \varPhi\left(P\left(\mathbf{v}\right), \mathbf{w}\right) = 0\end{aligned}$$

$\left(P - P^{*}\right)\left(\mathbf{w}\right) = \mathbf{0}$ が成り立つ. その vector$\mathbf{w}$ の任意性により $P - P^{*} = 0$, 即ち, $P = P^{*}$ が成り立つ. これにより, その射影 P は Hermite 変換である.

逆に, その射影 P が Hermite 変換であるなら, $\forall\mathbf{u} \in U\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, 定理 3.8.5 より次のようになるので,

$$\begin{aligned}\varPhi\left(\mathbf{u}, \mathbf{w}\right) &= \varPhi\left(\mathbf{u}, P\left(\mathbf{w}\right)\right)\\&= \varPhi\left(\mathbf{u}, P^{**}\left(\mathbf{w}\right)\right)\\&= \varPhi\left(P^{*}\left(\mathbf{u}\right), \mathbf{w}\right)\\&= \varPhi\left(P\left(\mathbf{u}\right), \mathbf{w}\right)\\&= \varPhi\left(\mathbf{0}, \mathbf{w}\right) = 0\end{aligned}$$

$\mathbf{u} \in W^{\perp}$ が得られ, したがって, $U \subseteq W^{\perp}$ が成り立つ. そこで, 定理 3.7.10 より $V = U \oplus W = W \oplus W^{\perp}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\dim U &= \dim W + \dim U - \dim W\\&= \dim U \oplus W - \dim W\\&= \dim V - \dim W\\&= \dim W \oplus W^{\perp} - \dim W\\&= \dim W + \dim W^{\perp} - \dim W\\&= \dim W^{\perp}\end{aligned}$$

これにより, $U = W^{\perp}$ が得られ, その射影 P はその直和分解から定まるその vector 空間 V からその部分 vector 空間 W への射影 P が正射影である. □

ここで, 次の定理を再掲しておこう.

定理 (定理 2.1.8 の再掲)**.** 体 K 上の vector 空間 V がこれの部分 vector 空間たちの添数集合 $\varLambda_{n}$ によって添数づけられた族 $\left\{W_{i}\right\}_{i \in \varLambda_{n}}$ に直和分解されるとき, 次のことが成り立つ.

- $\forall i \in \varLambda_{n}$ に対し, その vector 空間 V からその直和因子 W_{i} への直和分解から定まる射影 P_{i} はその vector 空間 V の射影子である.
- $\forall i \in \varLambda_{n}$ に対し, その vector 空間 V からその直和因子 W_{i} への直和分解から定まる射影 P_{i} について, $V\left(P_{i}\right) = W_{i}$ が成り立つ.
- $\forall i, j \in \varLambda_{n}$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, その vector 空間 V からその直和因子 W_{i}, W_{j} への直和分解から定まる射影たちそれぞれ P_{i}, P_{j} について, $P_{j} \circ P_{i} = 0$ が成り立つ.
- $i \in \varLambda_{n}$ なるその vector 空間 V からその直和因子 W_{i} への直和分解から定まる射影たち P_{i} について, その vector 空間 V の恒等写像 I_{V} を用いて $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_{n}} P_{i} = I_{V}$ が成り立つ.
- $\forall i' \in \varLambda_{n}$ に対し, その vector 空間 V からその直和因子 $W_{i'}$ への直和分解から定まる射影 $P_{i'}$ について, $\displaystyle\ker P_{i'} = \bigoplus_{i \in \varLambda_{s} \setminus \left\{i'\right\}} W_{i}$ が成り立つ.

定理 3.9.8 (spectrum 分解)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$, $f \in L(V, V)$ なる正規変換 f が与えられたとき, 定理 2.3.1 よりその線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ がその線形写像 f の互いに異なる s つの固有値たち λ_i を用いて次式のように表されることができるので, そうするなら,

$$\varPhi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}, \quad \sum_{i \in \varLambda_s} n_i = n$$

定理 3.9.6 よりその固有値 λ_i に対する固有空間たち $W_f(\lambda_i)$ すべての和空間は直和空間でこれはその vector 空間 V に等しいのであった. このとき, その直和分解から定まるその vector 空間 V からその固有空間 $W_f(\lambda_i)$ への射影 P_i は正射影子 $P_{W_f(\lambda_i)}$ であって次式が成り立つ.

$$f = \sum_{i \in \varLambda_s} \lambda_i P_{W_f(\lambda_i)}$$

上の式をその正規変換 f の spectrum 分解という.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$, $f \in L(V, V)$ なる正規変換 f が与えられたとき, 定理 2.3.1 よりその線形写像 f の固有多項式 $\varPhi_f$ がその線形写像 f の互いに異なる s つの固有値たち λ_i を用いて次式のように表されることができるので, そうするなら,

$$\varPhi_f = \prod_{i \in \varLambda_s} (X - \lambda_i)^{n_i}, \quad \sum_{i \in \varLambda_s} n_i = n$$

定理 3.9.6 より次式のようにその固有値 λ_i に対する固有空間たち $W_f(\lambda_i)$ すべての和空間は直和空間で

$$V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} W_f(\lambda_i)$$

これはその vector 空間 V に等しいのであった. このとき, 定理 3.9.6 より次式が成り立ち,

$$W_f(\lambda_i)^{\perp} = \bigoplus_{i' \in \varLambda_s \setminus \{i\}} W_f(\lambda_{i'})$$

したがって, 上の直和分解から定まるその vector 空間 V からその固有空間 $W_f(\lambda_i)$ への射影 P_i はその vector 空間 V からその固有空間 $W_f(\lambda_i)$ への正射影 $P_{W_f(\lambda_i)}$ である. さらに, 定理 2.1.8 よりその射影 P_i はその vector 空間 V の射影子でもあるので, その直和分解から定まるその vector 空間 V からその固有空間 $W_f(\lambda_i)$ への射影 P_i は正射影子 $P_{W_f(\lambda_i)}$ である.

また, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i$, $\mathbf{w}_i \in W_f(\lambda_i)$ とおかれれば, $(\lambda_i I_V - f)(\mathbf{w}_i) = \mathbf{0}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{v}) &= f\left(\sum_{i \in \varLambda_s} \mathbf{w}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} f(\mathbf{w}_i) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} (\lambda_i I_V(\mathbf{w}_i) - \lambda_i I_V(\mathbf{w}_i) + f(\mathbf{w}_i)) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} (\lambda_i I_V(\mathbf{w}_i) - (\lambda_i I_V - f)(\mathbf{w}_i))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \Lambda_s} (\lambda_i \mathbf{w}_i - \mathbf{0}) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_s} \lambda_i P_{W_f(\lambda_i)} \left(\sum_{i \in \Lambda_s} \mathbf{w}_i \right) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_s} \lambda_i P_{W_f(\lambda_i)} (\mathbf{v}) \\
&= \left(\sum_{i \in \Lambda_s} \lambda_i P_{W_f(\lambda_i)} \right) (\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

よって, 次式が成り立つ.

$$
f = \sum_{i \in \Lambda_s} \lambda_i P_{W_f(\lambda_i)}
$$

□

例えば, 次の正規変換 A の固有値, これを対角化させる unitary 行列 U, spectrum 分解を求めよう.

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}
$$

その行列の固有多項式 Φ_A を求めると, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\Phi_A = |XI - A| &= \begin{vmatrix} X & -i & 1 \\ i & X & i \\ 1 & -i & X \end{vmatrix} \\
&= X^3 + 1 + 1 - X - X - X \\
&= X^3 - 3X + 2 \\
&= (X + 2)(X - 1)^2
\end{aligned}
$$

定理 2.2.6 よりその固有多項式 Φ_A の根がその行列 A の固有値なので, その行列 A の固有値が -2, 1 と挙げられる.

このとき, これらの固有空間たち $W_A(-2)$, $W_A(1)$ について, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
W_A(-2) = \ker(-2I - A) &= \ker \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ i & -2 & i \\ 1 & -i & -2 \end{pmatrix} \\
W_A(1) = \ker(I - A) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで, 次のようになることから,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ i & -2 & i \\ 1 & -i & -2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & -2 \\ i & -2 & i \\ -2 & -i & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & -2 \\ 0 & -3 & 3i \\ 0 & -3i & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -i & -2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

次のようになる.

$$W_A(-2) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ i & -2 & i \\ 1 & -i & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$W_A(1) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

そこで, その固有空間 $W_A(-2)$ の基底として $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ が与えられるので, Gram-Schmidt の正規直交化法により次のようになるので,

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{matrix} & 1 \cdot 1 \\ + & -i \cdot i \\ + & i \cdot 1 \end{matrix}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

その固有空間 $W_A(-2)$ の正規直交基底として $\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle$ が与えられる.

一方で, その固有空間 $W_A(1)$ の基底として $\left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ が与えられるので, Gram-Schmidt の正規直交化法により次のようになるので,

$$\frac{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}} = \frac{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{matrix} & -i \cdot i \\ + & 1 \cdot 1 \\ + & 0 \cdot 0 \end{matrix}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & \left(-i/\sqrt{2}\right) \cdot (-1) \\ + & 1/\sqrt{2} \cdot 0 \\ + & 0 \cdot 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -i/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} -1/2 \\ -i/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1/2 \\ -i/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} -1/2 \\ -i/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ -i/2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1/2 \\ -i/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -1/2 \\ -i/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{matrix} & (-1/2) \cdot (-1/2) \\ + & i/2 \cdot (-i/2) \\ + & 1 \cdot 1 \end{matrix}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -i/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

その固有空間 $W_A(1)$ の正規直交基底として $\left\langle \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle$ が与えられる.

定理 3.9.6 より $\mathbb{C}^3 = W_A(-2) \oplus W_A(1)$ が成り立ち, その vector 空間 $\mathbb{C}^3$ の正規直交基底として $\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle$ が与えられる. 定理 3.8.6 より行列 $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ が unitary 行列となって次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right. \\
&\qquad \left. \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1} \left(-2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad 1 \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1} \left(-2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. 0 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad 0 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & O \\ & 1 & \\ O & & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & & O \\ & 1 & \\ O & & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって, $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ が得られる.

$\mathbb{C}^3 = W_A(-2) \oplus W_A(1)$ よりその vector 空間 $\mathbb{C}^3$ からそれらの固有空間たち $W_A(-2), W_A(1)$ への正射影子たちそれぞれを $P_{W_A(-2)}, P_{W_A(1)}$ とおくと, 次のようになるので,

$$
\begin{cases}
P_{W_A(-2)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
P_{W_A(-2)} \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
P_{W_A(-2)} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P_{W_A(-2)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\
&= \left(P_{W_A(-2)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad P_{W_A(-2)} \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_{W_A(-2)} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow P_{W_A(-2)} = P_{W_A(-2)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^* \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & i/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -i/3 & 1/3 \\ i/3 & 1/3 & i/3 \\ 1/3 & -i/3 & 1/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{cases} P_{W_A(1)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ P_{W_A(1)} \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ P_{W_A(1)} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow P_{W_A(1)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \left(P_{W_A(1)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad P_{W_A(1)} \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_{W_A(1)} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow P_{W_A(1)} = P_{W_A(1)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^* \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & i/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & i/3 & -1/3 \\ -i/3 & 2/3 & -i/3 \\ -1/3 & i/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

spectrum 分解により次式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1/3 & -i/3 & 1/3 \\ i/3 & 1/3 & i/3 \\ 1/3 & -i/3 & 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & i/3 & -1/3 \\ -i/3 & 2/3 & -i/3 \\ -1/3 & i/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

3.9.4 正規変換と正射影子

定理 3.9.9. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$, $f \in L(V,V)$ なる正規変換 f について, その正規変換 f の固有値 λ が与えられたとき, その複素数 $\overline{\lambda}$ はその随伴変換 f^* の固有値である. さらに, 固有空間について, $W_f(\lambda) = W_{f^*}\left(\overline{\lambda}\right)$ が成り立つ.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$, $f \in L(V,V)$ なる正規変換 f について, その正規変換 f の固有値 λ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in W_f(\lambda)$ に対し, $A \in \mathrm{M}(n,n,\mathbb{C})$ なる行列 A が対応する行列となっている線形写像が $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ とおかれれば, 次式が成り立つので,

$$L_{[I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ I_V \circ \varphi_{\mathcal{B}} = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}} = I_{K^n}$$

$[I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$ が成り立つ. これにより, $[I_V^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*} = [I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$ が成り立つことになり, したがって, 定理 3.8.5 より $(\lambda I_V - f)^* = \overline{\lambda} I_V^* - f^* = \overline{\lambda} I_V - f^*$ が成り立つ.

また, 次のようになるので,

$$\begin{aligned} (\lambda I_V - f)^* \circ (\lambda I_V - f) &= \left(\overline{\lambda} I_V - f^*\right) \circ (\lambda I_V - f) \\ &= \overline{\lambda} I_V \circ \lambda I_V - \overline{\lambda} I_V \circ f - f^* \circ \lambda I_V - f^* \circ f \\ &= |\lambda|^2 \lambda I_V - \overline{\lambda} f - \lambda f^* - f^* \circ f \\ &= |\lambda|^2 \lambda I_V - \lambda f^* - \overline{\lambda} f - f \circ f^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda I_V \circ \overline{\lambda} I_V - \lambda I_V \circ f^* - f \circ \lambda I_V - f \circ f^* \\
&= (\lambda I_V - f) \circ \left(\overline{\lambda} I_V - f^*\right) \\
&= (\lambda I_V - f) \circ (\lambda I_V - f)^*
\end{aligned}$$

その線形写像 $\lambda I_V - f$ は正規変換でもある.

そこで, 定理 3.8.8 よりその内積空間 $(V, \varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V, \varphi_\varPhi)$ について, $\varphi_\varPhi \circ (\lambda I_V - f) = \varphi_\varPhi \circ (\lambda I_V - f)^*$ が成り立つことになる. これにより, $\forall \mathbf{v} \in W_f(\lambda)$ に対し, $(\lambda I_V - f)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_\varPhi\left(\left(\overline{\lambda} I_V - f^*\right)(\mathbf{v})\right) &= \varphi_\varPhi\left((\lambda I_V - f)^*(\mathbf{v})\right) \\
&= \varphi_\varPhi \circ (\lambda I_V - f)^*(\mathbf{v}) \\
&= \varphi_\varPhi \circ (\lambda I_V - f)(\mathbf{v}) \\
&= \varphi_\varPhi\left((\lambda I_V - f)(\mathbf{v})\right) \\
&= \varphi_\varPhi(\mathbf{0}) = 0
\end{aligned}$$

これにより, $\left(\overline{\lambda} I_V - f^*\right)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つので, その複素数 $\overline{\lambda}$ はその随伴変換 f^* の固有値である. なお, $W_f(\lambda) \subseteq W_{f^*}\left(\overline{\lambda}\right)$ が成り立つ.

一方で, $\forall \mathbf{v} \in W_{f^*}\left(\overline{\lambda}\right)$ に対し, $(\lambda I_V - f)^*(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_\varPhi\left((\lambda I_V - f)(\mathbf{v})\right) &= \varphi_\varPhi \circ (\lambda I_V - f)(\mathbf{v}) \\
&= \varphi_\varPhi \circ (\lambda I_V - f)^*(\mathbf{v}) \\
&= \varphi_\varPhi\left((\lambda I_V - f)^*(\mathbf{v})\right) \\
&= \varphi_\varPhi(\mathbf{0}) = 0
\end{aligned}$$

これにより, $(\lambda I_V - f)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つので, $W_f(\lambda) \supseteq W_{f^*}\left(\overline{\lambda}\right)$ が成り立つ. 以上の議論により, $W_f(\lambda) = W_{f^*}\left(\overline{\lambda}\right)$ が成り立つ. □

定理 3.9.10. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W について, $P \in L(V, V)$ なる線形写像 P がその部分 vector 空間 W への正射影子であるならそのときに限り, その線形写像 P の固有値が 0 か 1 の Hermite 変換である.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W について, $P \in L(V, V)$ なる線形写像 P がその部分 vector 空間 W への正射影子であるなら, その線形写像 P は正射影であるかつ, 射影子でもある. 定理 3.9.7 よりその線形写像 P が正射影であるならそのときに限り, その射影 P が Hermite 変換である. 一方で, 定理 2.1.11 よりある補空間 U が存在して, $V = U \oplus W$ が成り立つので, $\dim U = r$ としこれらの部分 vector 空間たち U, W の基底をそれぞれ α, β とおき, $\mathcal{B} = \left\langle \alpha \quad \beta \right\rangle$ とおかれると, 定理 2.1.5 よりこれはその vector 空間 V の基底をなす. そこで, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, その vector 空間 $\mathbb{C}^n$ の標準直交基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ を用いて $A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{C})$ なる行列 A が対応する行列となっている線形写像が $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ とおかれれば, その射影 P の固有多項式 $\varPhi_P$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi_P &= \det\left[X I_V - P\right]_\mathcal{B}^\mathcal{B} \\
&= \det\begin{pmatrix} L_{[XI_V - P]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}(\mathbf{e}_1) & \cdots & L_{[XI_V - P]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}(\mathbf{e}_r) & L_{[XI_V - P]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}(\mathbf{e}_{r+1}) & \cdots & L_{[XI_V - P]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \\
&= \det\left(\varphi_\mathcal{B}^{-1} \circ (X I_V - P) \circ \varphi_\mathcal{B}(\mathbf{e}_1) \quad \cdots \quad \varphi_\mathcal{B}^{-1} \circ (X I_V - P) \circ \varphi_\mathcal{B}(\mathbf{e}_r) \right. \\
&\qquad \left. \varphi_\mathcal{B}^{-1} \circ (X I_V - P) \circ \varphi_\mathcal{B}(\mathbf{e}_{r+1}) \quad \cdots \quad \varphi_\mathcal{B}^{-1} \circ (X I_V - P) \circ \varphi_\mathcal{B}(\mathbf{e}_n)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ XI_V \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_1) - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ P \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_1) \quad \cdots \right.\\
&\quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ XI_V \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_r) - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ P \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_r)\\
&\quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ XI_V \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_{r+1}) - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ P \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_{r+1})\\
&\quad \left. \cdots \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ XI_V \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_n) - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ P \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_n)\right)\\
&= \det\left(X\mathbf{e}_1 - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(P(\mathbf{o}_1)) \quad \cdots \quad X\mathbf{e}_r - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(P(\mathbf{o}_r)) \right.\\
&\quad \left. X\mathbf{e}_{r+1} - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(P(\mathbf{o}_{r+1})) \quad \cdots \quad X\mathbf{e}_n - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(P(\mathbf{o}_n))\right)\\
&= \det\left(X\mathbf{e}_1 - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{0}) \quad \cdots \quad X\mathbf{e}_r - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{0}) \quad X\mathbf{e}_{r+1} - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_{r+1}) \quad \cdots \quad X\mathbf{e}_n - \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_n)\right)\\
&= \det\left(X\mathbf{e}_1 - \mathbf{0} \quad \cdots \quad X\mathbf{e}_r - \mathbf{0} \quad X\mathbf{e}_{r+1} - \mathbf{e}_{r+1} \quad \cdots \quad X\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_n\right)\\
&= \det\left(X\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad X\mathbf{e}_r \quad (X-1)\mathbf{e}_{r+1} \quad \cdots \quad (X-1)\mathbf{e}_n\right)\\
&= \begin{vmatrix} X & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & X & & & \\ & & & X-1 & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & X-1 \end{vmatrix} = X^r(X-1)^{n-r}
\end{aligned}$$

定理 2.2.6 よりその線形写像 P の固有値が 0 か 1 のみとなる.

逆に, $P \in L(V,V)$ なる線形写像 P がこれの固有値が 0 か 1 の Hermite 変換であるなら, 定理 3.9.7 よりその線形写像 P が Hermite 変換であるならそのときに限り, その線形写像 P が正射影である. これにより, その vector 空間 V がそれらの部分 vector 空間たち W, $W^{\perp}$ に直和分解されたとき, その vector 空間 V からその部分 vector 空間 W への正射影 P_W がその線形写像 P そのものである. さらに, 定理 2.1.8 よりその射影 P_W は射影子でもある. よって, その線形写像 P はその部分 vector 空間 W への正射影子である. □

定理 3.9.11. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, その vector 空間 V の 2 つの正射影子たち P, Q について, 次のことは同値である.

- $\varPhi|V(P) \times V(Q) = 0$ が成り立つ.
- $P \circ Q = 0$ が成り立つ.
- $Q \circ P = 0$ が成り立つ.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, その vector 空間 V の 2 つの正射影子たち P, Q について, $\varPhi|V(P) \times V(Q) = 0$ が成り立つなら, 定理 3.9.10 より $\forall P(\mathbf{v}) \in V(P) \forall Q(\mathbf{w}) \in V(Q)$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi|V(P) \times V(Q)\,(P(\mathbf{v}), Q(\mathbf{w})) &= \varPhi(P(\mathbf{v}), Q(\mathbf{w}))\\
&= \varPhi(\mathbf{v}, P^* \circ Q(\mathbf{w}))\\
&= \varPhi(\mathbf{v}, P \circ Q(\mathbf{w})) = 0
\end{aligned}$$

これが成り立つならそのときに限り, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\varPhi(\mathbf{v}, P \circ Q(\mathbf{w})) = 0$ が成り立つことになり, 定理 3.6.5 より $P \circ Q = 0$ が成り立つ.

逆に, $P \circ Q = 0$ が成り立つなら, $\forall P(\mathbf{v}) \in V(P) \forall Q(\mathbf{w}) \in V(Q)$ に対し, 定理 3.9.10 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi|V(P) \times V(Q)\,(P(\mathbf{v}), Q(\mathbf{w})) &= \varPhi(P(\mathbf{v}), Q(\mathbf{w}))\\
&= \varPhi(\mathbf{v}, P^* \circ Q(\mathbf{w}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varPhi\left(\mathbf{v}, P \circ Q\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&= \varPhi\left(\mathbf{v}, 0\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&= \varPhi\left(\mathbf{v}, \mathbf{0}\right) = 0
\end{aligned}
$$

よって, $\varPhi|V(P) \times V(Q) = 0$ が成り立つ.

同様にして, $\varPhi|V(P) \times V(Q) = 0$ が成り立つならそのときに限り, $Q \circ P = 0$ が成り立つことも示される. □

定理 3.9.12. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, vector 空間 V の正射影子 $P_i : V \rightarrow V$ の添数集合 $\varLambda_s$ によって添数づけられた族 $\left\{P_i\right\}_{i \in \varLambda_s}$ が与えられたとき, 次のことを満たすなら,

- $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, $P_i \neq 0$ が成り立つ.
- $\forall i, j \in \varLambda_s$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $P_j \circ P_i = 0$ が成り立つ.
- $i \in \varLambda_s$ なるそれらの線形写像たち P_i について, その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_s} P_i = I_V$ が成り立つ.

複素数たち a_i を用いた線形写像 $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i$ は正規変換である. さらに, その線形写像 $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i$ の spectrum 分解がまさに $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i$ のことである, 即ち, それらの複素数たち a_i がその線形写像 $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i$ の固有値たちでその射影 P_i がその vector 空間 V からその固有空間 $W_{\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i}\left(a_i\right)$ への正射影子である.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の $1 \leq \dim V = n$ なる内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, vector 空間 V の正射影子 $P_i : V \rightarrow V$ の添数集合 $\varLambda_s$ によって添数づけられた族 $\left\{P_i\right\}_{i \in \varLambda_s}$ が与えられたとき, 次のことを満たすなら,

- $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, $P_i \neq 0$ が成り立つ.
- $\forall i, j \in \varLambda_s$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $P_j \circ P_i = 0$ が成り立つ.
- $i \in \varLambda_s$ なるそれらの線形写像たち P_i について, その vector 空間 V の恒等写像 I_V を用いて $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_s} P_i = I_V$ が成り立つ.

定理 3.9.10 よりそれらの線形写像たち P_i はこれの固有値が 0 か 1 の Hermite 変換である. したがって, 複素数たち a_i を用いた線形写像 $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i$ が f とおかれると, 次のようになるので,

$$
\begin{aligned}
f^* \circ f &= \left(\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i\right)^* \circ \left(\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i\right)\\
&= \left(\sum_{j \in \varLambda_s} \overline{a_j} P_j^*\right) \circ \left(\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i\right)\\
&= \sum_{i, j \in \varLambda_s} \overline{a_j} a_i P_j^* \circ P_i\\
&= \sum_{i, j \in \varLambda_s} \overline{a_j} a_i P_j \circ P_i\\
&= \sum_{\substack{i, j \in \varLambda_s \\ i = j}} \overline{a_j} a_i P_j \circ P_i + \sum_{\substack{i, j \in \varLambda_s \\ i \neq j}} \overline{a_j} a_i P_j \circ P_i
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \overline{a_i} a_i P_i \circ P_i + \sum_{\substack{i, j \in \varLambda_s \\ i \neq j}} \overline{a_j} a_i 0 \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \overline{a_i} a_i P_i \circ P_i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \overline{a_i} a_i P_i \circ P_i + \sum_{\substack{i, j \in \varLambda_s \\ i \neq j}} \overline{a_j} a_i 0 \\
&= \sum_{\substack{i, j \in \varLambda_s \\ i = j}} \overline{a_j} a_i P_i \circ P_j + \sum_{\substack{i, j \in \varLambda_s \\ i \neq j}} \overline{a_j} a_i P_i \circ P_j \\
&= \sum_{i,j \in \varLambda_s} \overline{a_j} a_i P_i \circ P_j \\
&= \sum_{i,j \in \varLambda_s} \overline{a_j} a_i P_i \circ P_j^* \\
&= \left(\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i \right) \circ \left(\sum_{j \in \varLambda_s} \overline{a_j} P_j^* \right) \\
&= \left(\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i \right) \circ \left(\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i \right)^* \\
&= f \circ f^*
\end{aligned}$$

その線形写像 f は正規変換である.

定理 2.1.10 より次式が成り立ち,

$$V = \bigoplus_{i \in \varLambda_s} V(P_i)$$

さらに, $\forall i \in \varLambda_s$ に対し, その線形写像 P_i はいづれもその vector 空間 V からその直和因子 $V(P_i)$ への直和分解から定まる射影でもある. これらの部分 vector 空間たち $V(P_i)$ の次元を n_i としこれの基底がそれぞれ $\langle \mathbf{v}_{ij} \rangle_{j \in \varLambda_{n_i}}$ とおかれると, 定理 2.1.5 よりその組 $\langle \mathbf{v}_{ij} \rangle_{(i,j) \in \varLambda_s \times \varLambda_{n_i}}$ はその vector 空間 V の基底をなす. そこで, これが $\mathcal{B}$ とおかれると, $\forall P(\mathbf{v}) \in V(P_i)$ に対し, 仮定と定理 2.1.8 より次のようになるので,

$$\begin{aligned}
(a_i I_V - f)(P_i(\mathbf{v})) &= \left(a_i I_V - \sum_{j \in \varLambda_s} a_j P_j \right) \circ P_i(\mathbf{v}) \\
&= \left(a_i I_V \circ P_i - \sum_{j \in \varLambda_s} a_j P_j \circ P_i \right)(\mathbf{v}) \\
&= \left(a_i I_V \circ P_i - \sum_{\substack{j \in \varLambda_s \\ i \neq j}} a_j P_j \circ P_i - a_i P_i \circ P_i \right)(\mathbf{v}) \\
&= \left(a_i P_i - \sum_{\substack{j \in \varLambda_s \\ i \neq j}} a_j 0 - a_i P_i \right)(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{\substack{j \in \Lambda_s \\ i \neq j}} a_j 0 (\mathbf{v}) = -0 (\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

$P(\mathbf{v}) \in W_f(a_i)$ が成り立つ. これにより, $V(P_i) \subseteq W_f(a_i)$ が成り立つかつ, それらの複素数たち a_i がその線形写像 f の固有値たちとなっている.

逆に, $\forall \mathbf{v} \in W_f(a_i)$ に対し, 上記の議論によりその線形写像 f は正規変換であるので, 定理 3.9.6 よりその固有値 a_i に対する固有空間たち $W_f(a_i)$ すべての和空間は直和空間であるから, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ のとき, もちろん, $\mathbf{v} \in V(P_i)$ が成り立つ. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ のとき, $(a_i I_V - f)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ より $f(\mathbf{v}) = a_i \mathbf{v}$ が成り立つことになり, 上記の議論により $V = \bigoplus_{i \in \Lambda_s} V(P_i)$ が成り立つので, $\mathbf{v} = \sum_{j \in \Lambda_s} P_j(\mathbf{v}_j)$ とおかれることができる. したがって, 仮定と定理 2.1.8 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \Lambda_s} a_i P_j(\mathbf{v}_j) &= a_i \sum_{j \in \Lambda_s} P_j(\mathbf{v}_j) \\
&= a_i \mathbf{v} \\
&= f(\mathbf{v}) \\
&= \left(\sum_{k \in \Lambda_s} a_k P_k \right) \left(\sum_{j \in \Lambda_s} P_j(\mathbf{v}_j) \right) \\
&= \sum_{j \in \Lambda_s} \sum_{k \in \Lambda_s} a_k P_k \circ P_j(\mathbf{v}_j) \\
&= \sum_{j \in \Lambda_s} \left(\sum_{\substack{k \in \Lambda_s \\ j \neq k}} a_k P_k \circ P_j(\mathbf{v}_j) + a_k P_k \circ P_k(\mathbf{v}_k) \right) \\
&= \sum_{j \in \Lambda_s} \left(\sum_{\substack{k \in \Lambda_s \\ j \neq k}} a_k 0(\mathbf{v}_j) + a_k P_k(\mathbf{v}_k) \right) \\
&= \sum_{j \in \Lambda_s} a_j P_j(\mathbf{v}_j)
\end{aligned}$$

したがって, $\sum_{j \in \Lambda_s} (a_i - a_j) P_j(\mathbf{v}_j) = \mathbf{0}$ が得られ, 直和の定義より $\forall j \in \Lambda_s$ に対し, $(a_i - a_j) P_j(\mathbf{v}_j) = \mathbf{0}$ が得られる. そこで, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ より $\exists j' \in \Lambda_s$ に対し, $P_{j'}(\mathbf{v}_{j'}) \neq \mathbf{0}$ が成り立つので, $a_i = a_{j'}$ が成り立つ. そこで, 仮定より $i = j'$ が成り立つかつ, $\forall j \in \Lambda_s$ に対し, $j \neq j'$ が成り立つなら, $a_j \neq a_{j'} = a_i$ が成り立つので, $a_i - a_j \neq 0$ が成り立つ. これにより, $P_j(\mathbf{v}_j) = \mathbf{0}$ が成り立つ. したがって, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \sum_{j \in \Lambda_s} P_j(\mathbf{v}_j) \\
&= \sum_{\substack{j \in \Lambda_s \\ i \neq j}} P_j(\mathbf{v}_j) + P_i(\mathbf{v}_i) \\
&= \sum_{\substack{j \in \Lambda_s \\ i \neq j}} \mathbf{0} + P_i(\mathbf{v}_i) \\
&= P_i(\mathbf{v}_i) \in V(P_i)
\end{aligned}$$

$W_f(a_i) \subseteq V(P_i)$ が成り立つ.

以上の議論により, $V(P_i) = W_f(a_i)$ が成り立つので, その射影 P_i はまさしくその直和分解におけるその vector 空間 V からその固有空間 $W_f(a_i)$ への射影であるので, 定理 3.9.8 よりその射影 P_i は正射影子 $P_{W_f(a_i)}$ であって次式が成り立つ.

$$f = \sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_{W_f(a_i)}$$

よって, その線形写像 f の spectrum 分解がまさに $\sum_{i \in \varLambda_s} a_i P_i$ のことである, 即ち, それらの複素数たち a_i がその線形写像 f の固有値たちでその射影 P_i がその vector 空間 V からその固有空間 $W_f(a_i)$ への正射影子である. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p363-372 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 八起数学塾. "射影子とスペクトル分解". 八起数学塾. `https://www.yaokisj.com/doc/PrjSpcRsl.pdf` (2022-3-19 13:11 閲覧)

3.10 Hermite 双線形形式の標準形

3.10.1 共役双線形形式から誘導される線形写像

定理 3.10.1. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$, これの正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- $\forall f \in L(V,V)$ に対し, 次のように写像 B_f が定義されれば,
$$B_f : V \times V \rightarrow K; (\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \varPhi\left(\mathbf{v}, f\left(\mathbf{w}\right)\right)$$
その写像 B_f はその vector 空間 V 上の共役双線形形式である. また, その基底 $\mathcal{B}$ に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, その共役双線形形式 B_f の表現行列 $[B_f]_{\mathcal{B}}$ について, 次式が成り立つ.
$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [B_f]_{\mathcal{B}}$$
- その vector 空間 V 上の任意の共役双線形形式 B が与えられたとき, ある線形写像 $f_B : V \rightarrow V$ が一意的に存在して, 次式が成り立つ.
$$B : V \times V \rightarrow K; (\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \varPhi\left(\mathbf{v}, f_B\left(\mathbf{w}\right)\right)$$
また, その基底 $\mathcal{B}$ に関するその共役双線形形式 B の表現行列 $[B]_{\mathcal{B}}$, その線形写像 f_B の表現行列 $[f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ について, 次式が成り立つ.
$$[B]_{\mathcal{B}} = [f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

定義 3.10.1. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, $\forall f \in L(V,V)$ に対し, 次のような共役双線形形式 B_f をその線形写像 f から誘導される共役双線形形式といい,
$$B_f : V \times V \rightarrow K; (\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \varPhi\left(\mathbf{v}, f\left(\mathbf{w}\right)\right)$$
その vector 空間 V 上の任意の共役双線形形式 B が与えられたとき, 次式が成り立つような線形写像 $f_B : V \rightarrow V$ をその共役双線形形式 B から誘導される線形写像, 線形変換などという.
$$B : V \times V \rightarrow K; (\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \varPhi\left(\mathbf{v}, f_B\left(\mathbf{w}\right)\right)$$

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$, これの正規直交基底 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, $\forall f \in L(V,V)$ に対し, 次のように写像 B_f が定義されれば,
$$B_f : V \times V \rightarrow K; (\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \varPhi\left(\mathbf{v}, f\left(\mathbf{w}\right)\right)$$
$\forall a,b \in \mathbb{C}\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになるかつ,
$$\begin{aligned} B_f\left(a\mathbf{u}+b\mathbf{v},\mathbf{w}\right) &= \varPhi\left(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}, f\left(\mathbf{w}\right)\right) \\ &= \overline{a}\varPhi\left(\mathbf{u}, f\left(\mathbf{w}\right)\right) + \overline{b}\varPhi\left(\mathbf{v}, f\left(\mathbf{w}\right)\right) \\ &= \overline{a}B_f\left(\mathbf{u},\mathbf{w}\right) + \overline{b}B_f\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) \end{aligned}$$
$\forall a,b \in \mathbb{C}\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになるので,
$$B_f\left(\mathbf{u},a\mathbf{v}+b\mathbf{w}\right) = \varPhi\left(\mathbf{u}, f\left(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \varPhi\left(\mathbf{u}, af\left(\mathbf{v}\right) + bf\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&= a\varPhi\left(\mathbf{u}, f\left(\mathbf{v}\right)\right) + b\varPhi\left(\mathbf{u}, f\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&= aB_f\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) + bB_f\left(\mathbf{u}, \mathbf{w}\right)
\end{aligned}$$

その写像 B_f はその vector 空間 V 上の共役双線形形式である.

また, その基底 $\mathcal{B}$ に関するその線形写像 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, その共役双線形形式 B_f の表現行列 $\left[B_f\right]_{\mathcal{B}}$ について, その vector 空間 K^n の標準直交基底 $\left\langle \mathbf{e}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$, その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$, $A \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる行列 A が対応する行列となっている線形写像 $L_A : K^n \rightarrow K^n; \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ を用いて, $\mathcal{B} = \left\langle \mathbf{o}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれれば, 定理 3.4.8, 定理 3.6.18 より次のようになるので,

$$\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}\left(\mathbf{e}_1\right) & L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}\left(\mathbf{e}_2\right) & \cdots & L_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}\left(\mathbf{e}_n\right) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{e}_1\right) & \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{e}_2\right) & \cdots & \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{e}_n\right) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_1\right) & \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_2\right) & \cdots & \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_n\right) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{e}_1\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_1\right) & {}^t\mathbf{e}_1\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_2\right) & \cdots & {}^t\mathbf{e}_1\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_n\right)\\
{}^t\mathbf{e}_2\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_1\right) & {}^t\mathbf{e}_2\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_2\right) & \cdots & {}^t\mathbf{e}_2\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_n\right)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
{}^t\mathbf{e}_n\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_1\right) & {}^t\mathbf{e}_n\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_2\right) & \cdots & {}^t\mathbf{e}_n\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f\left(\mathbf{o}_n\right) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} {}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{o}_1\right)\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f\left(\mathbf{o}_1\right)\right) & {}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{o}_1\right)\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f\left(\mathbf{o}_2\right)\right) & \cdots & {}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{o}_1\right)\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f\left(\mathbf{o}_n\right)\right)\\
{}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{o}_2\right)\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f\left(\mathbf{o}_1\right)\right) & {}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{o}_2\right)\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f\left(\mathbf{o}_2\right)\right) & \cdots & {}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{o}_2\right)\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f\left(\mathbf{o}_n\right)\right)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
{}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{o}_n\right)\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f\left(\mathbf{o}_1\right)\right) & {}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{o}_n\right)\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f\left(\mathbf{o}_2\right)\right) & \cdots & {}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{o}_n\right)\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(f\left(\mathbf{o}_n\right)\right) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \varPhi\left(\mathbf{o}_1, f\left(\mathbf{o}_1\right)\right) & \varPhi\left(\mathbf{o}_1, f\left(\mathbf{o}_2\right)\right) & \cdots & \varPhi\left(\mathbf{o}_1, f\left(\mathbf{o}_n\right)\right)\\
\varPhi\left(\mathbf{o}_2, f\left(\mathbf{o}_1\right)\right) & \varPhi\left(\mathbf{o}_2, f\left(\mathbf{o}_2\right)\right) & \cdots & \varPhi\left(\mathbf{o}_2, f\left(\mathbf{o}_n\right)\right)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\varPhi\left(\mathbf{o}_n, f\left(\mathbf{o}_1\right)\right) & \varPhi\left(\mathbf{o}_n, f\left(\mathbf{o}_2\right)\right) & \cdots & \varPhi\left(\mathbf{o}_n, f\left(\mathbf{o}_n\right)\right) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} B_f\left(\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_1\right) & B_f\left(\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2\right) & \cdots & B_f\left(\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_n\right)\\
B_f\left(\mathbf{o}_2, \mathbf{o}_1\right) & B_f\left(\mathbf{o}_2, \mathbf{o}_2\right) & \cdots & B_f\left(\mathbf{o}_2, \mathbf{o}_n\right)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
B_f\left(\mathbf{o}_n, \mathbf{o}_1\right) & B_f\left(\mathbf{o}_n, \mathbf{o}_2\right) & \cdots & B_f\left(\mathbf{o}_n, \mathbf{o}_n\right) \end{pmatrix} = \left[B_f\right]_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[B_f\right]_{\mathcal{B}}$ が成り立つ.

また, その正規直交基底 $\mathcal{B}$ に関するその共役双線形形式 B の表現行列 $[B]_{\mathcal{B}}$, 線形写像 $\varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[B]_{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ について, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 定理 3.4.8, 定理 3.6.18 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
B\left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) &= {}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{v}\right)[B]_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{w}\right)\\
&= {}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{v}\right)L_{[B]_{\mathcal{B}}}\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&= {}^t\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{v}\right)\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[B]_{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{w}\right)\\
&= \varPhi\left(\mathbf{v}, \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[B]_{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{w}\right)\right)
\end{aligned}$$

よって, ある線形写像 $f_B : V \rightarrow V$ が存在して, 次式が成り立つ.

$$B : V \times V \rightarrow K; \left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \mapsto \varPhi\left(\mathbf{v}, f_B\left(\mathbf{w}\right)\right)$$

このような線形写像が f, g と 2 つ与えられたらば, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになるので,

$$\varPhi\left(\mathbf{v}, (f-g)\left(\mathbf{w}\right)\right) = \varPhi\left(\mathbf{v}, f\left(\mathbf{w}\right) - g\left(\mathbf{w}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Phi(\mathbf{v}, f(\mathbf{w})) - \Phi(\mathbf{v}, g(\mathbf{w})) \\
&= B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0
\end{aligned}
$$

定理 3.6.5 より $(f-g)(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ が成り立つ. これにより, $f=g$ が得られ, そのような線形写像たち f, g が一意的に存在することが示された.

そこで, 先ほどの線形写像 $\varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[B]_{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ について, $f_B = \varphi_{\mathcal{B}} \circ L_{[B]_{\mathcal{B}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ が成り立つので, $[B]_{\mathcal{B}} = [f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つ. □

定理 3.10.2. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, 共役双線形形式 B が Hermite 双線形形式であるならそのときに限り, その共役双線形形式 B から誘導される線形写像 $f_B : V \to V$ が Hermite 変換である.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, 共役双線形形式 B が Hermite 双線形形式であるならそのときに限り, 定理 3.4.13 よりその vector 空間 V の正規直交基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[B]_{\mathcal{B}}$ が Hermite 行列となる. これが成り立つならそのときに限り, 定理 3.10.1 よりその共役双線形形式 B から誘導される線形写像 $f_B : V \to V$ のその基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列 $[f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ について, $[B]_{\mathcal{B}} = [f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つので, その行列 $[f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ も Hermite 行列となる. これが成り立つならそのときに限り, 定理 3.8.9 よりその共役双線形形式 B から誘導される線形写像 $f_B : V \to V$ が Hermite 変換である. □

定理 3.10.3 (Euclid 幾何学の立場で標準的な正規直交基底の存在性)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, 任意の Hermite 双線形形式 B に対し, 次のことが成り立つようなその vector 空間 V の基底 $\mathcal{B}$ が存在する.

- その基底 $\mathcal{B}$ はその内積空間 (V, Φ) の正規直交基底である.
- その基底 $\mathcal{B}$ に関するその Hermite 双線形形式 B から誘導される線形写像 f_B の表現行列 $[f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となる.
- その基底 $\mathcal{B}$ はその Hermite 双線形形式に関する直交基底をなす.

定義 3.10.2. このような基底 $\mathcal{B}$ を, ここでは, その Hermite 双線形形式 B から誘導されるその内積空間 (V, Φ) の Euclid 幾何学の立場で標準的な正規直交基底ということにする.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, 任意の Hermite 双線形形式 B に対し, 定理 3.8.13, 定理 3.10.2 よりその Hermite 双線形形式 B から誘導される線形写像 f_B は正規変換である. したがって, 定理 3.9.4, 即ち, Toeplitz の定理よりその内積空間 (V, Φ) のある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して, これに関するその線形写像 f_B の表現行列 $[f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となる. これにより, その表現行列 $[f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ の対角成分以外の成分はすべて 0 となる. その正規直交基底が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ と与えられたらば, 定理 3.10.1 より $[B]_{\mathcal{B}} = \left(B(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j)\right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2} = [f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つので, $\forall i, j \in \Lambda_n$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, $B(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j) = 0$ が成り立つ. よって, その基底 $\mathcal{B}$ はその Hermite 双線形形式に関する直交基底をなす. □

3.10.2 Hermite 双線形形式の標準形

定理 3.10.4 (Euclid 幾何学の立場での標準形)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, 任意の Hermite 双線形形式 B から誘導される Hermite 変換 f_B の固有値たちからなる族を $\{\lambda_i\}_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, その Hermite 双線形形式 B から誘導されるその内積空間 (V, Φ) の Euclid 幾何学の立場で標準的な正規直交基底

$\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ を用いて, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) = (x_i)_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, その Hermite 双線形形式から定まる Hermite 形式 q は次式を満たす.

$$q(\mathbf{v}) = \sum_{i \in \varLambda_n} \lambda_i |x_i|^2 = \lambda_1 |x_1|^2 + \lambda_2 |x_2|^2 + \cdots + \lambda_n |x_n|^2$$

定義 3.10.3. 上の式の形をその Hermite 双線形形式 B の Euclid 幾何学の立場での標準形という.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, 任意の Hermite 双線形形式 B から誘導される Hermite 変換 f_B の固有値たちからなる族を $\{\lambda_i\}_{i \in \varLambda_n}$ とおくと, その Hermite 双線形形式 B から誘導されるその内積空間 $(V, \varPhi)$ の Euclid 幾何学の立場で標準的な正規直交基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ を用いて, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) = (x_i)_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, 定理 3.10.3 よりその基底 $\mathcal{B}$ に関するその Hermite 双線形形式 B から誘導される線形写像 f_B の表現行列 $[f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となり定理 2.2.12 より次式のように与えられるかつ,

$$[f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

定理 3.10.1 よりその基底 $\mathcal{B}$ に関するその Hermite 双線形形式 B の表現行列 $[B]_{\mathcal{B}}$ について, $[B]_{\mathcal{B}} = [f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つので, 定理 3.4.9 より次のようになる.

$$\begin{aligned} q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= {}^t\overline{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})}[B]_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \\ &= {}^t\overline{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})}\,[f_B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\,\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \\ &= \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \cdots & \overline{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \cdots & \overline{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} \\ &= \overline{x_1}\lambda_1 x_1 + \overline{x_2}\lambda_2 x_2 + \cdots + \overline{x_n}\lambda_n x_n \\ &= \lambda_1 |x_1|^2 + \lambda_2 |x_2|^2 + \cdots + \lambda_n |x_n|^2 \end{aligned}$$

□

定理 3.10.5. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, 任意の Hermite 双線形形式 B から誘導される Hermite 変換 f_B の固有値たちからなる族を $\{\lambda_i\}_{i \in \varLambda_n}$ とおき, さらに, その Hermite 双線形形式 B の符号を (π, ν) とおくと, これらの自然数たち π, $n - \pi - \nu$, ν はそれぞれ $\lambda_i > 0$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_i < 0$ なる固有値たち λ_i の個数に等しい, 即ち, 次のことが成り立つ.

- その Hermite 双線形形式 B が半正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq \lambda_i$ が成り立つ.
- その Hermite 双線形形式 B が正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 < \lambda_i$ が成り立つ.
- その Hermite 双線形形式 B が半負値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \geq \lambda_i$ が成り立つ.

- その Hermite 双線形形式 B が正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 > \lambda_i$ が成り立つ.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, 任意の Hermite 双線形形式 B から誘導される Hermite 変換 f_B の固有値たちからなる族を $\{\lambda_i\}_{i \in \varLambda_n}$ とおき, さらに, その Hermite 双線形形式 B の符号を (π, ν) とおくと, その Hermite 双線形形式 B から誘導されるその内積空間 $(V, \varPhi)$ の Euclid 幾何学の立場で標準的な正規直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれれば, 定義より $B(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_i) > 0$, $B(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_i) = 0$, $B(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_i) < 0$ となるような vectors$\mathbf{o}_i$ の個数がそれぞれ π, $n - \pi - \nu$, ν と与えられる. そこで, 定理 2.2.12, 定理 3.10.1, 定理 3.10.4 より次式が成り立つので,

$$[B]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$B(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_i) = \lambda_i$ が成り立つ. よって, これらの自然数たち π, $n - \pi - \nu$, ν はそれぞれ $\lambda_i > 0$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_i < 0$ なる固有値たち λ_i の個数に等しい, 即ち, 次のことが成り立つ.

- その Hermite 双線形形式 B が半正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq \lambda_i$ が成り立つ.
- その Hermite 双線形形式 B が正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 < \lambda_i$ が成り立つ.
- その Hermite 双線形形式 B が半負値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \geq \lambda_i$ が成り立つ.
- その Hermite 双線形形式 B が正値であるならそのときに限り, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 > \lambda_i$ が成り立つ.

□

定理 3.10.6 (affine 幾何学の立場での標準形)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V, \varPhi)$ について, 任意の Hermite 双線形形式 B の符号が (π, ν) と与えられたとき, ある直交基底 $\mathcal{C}$ が存在して, その基底 $\mathcal{C}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{C}}$ を用いて, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbf{v}) = (x_i)_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, その Hermite 双線形形式から定まる Hermite 形式 q は次式を満たす.

$$q(\mathbf{v}) = \sum_{i \in \varLambda_\pi} |x_i|^2 - \sum_{i \in \varLambda_\nu} |x_i|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_\pi|^2 - |x_{\pi+1}|^2 - |x_{\pi+2}|^2 - \cdots - |x_{\pi+\nu}|^2$$

定義 3.10.4. 上の式の形をその Hermite 双線形形式 B の affine 幾何学の立場での標準形という.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V, \varPhi)$ について, 任意の Hermite 双線形形式 B の符号が (π, ν) と与えられたとき, 定理 3.10.4 よりその Hermite 双線形形式 B から誘導される Hermite 変換 f_B の固有値たちからなる族を $\{\lambda_i\}_{i \in \varLambda_n}$ とおくと, その Hermite 双線形形式 B から誘導されるその内積空間 $(V, \varPhi)$ の Euclid 幾何学の立場で標準的な正規直交基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ を用いて, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) = (y_i)_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, その Hermite 双線形形式から定まる Hermite 形式 q は次式を満たす.

$$q(\mathbf{v}) = \sum_{i \in \varLambda_n} \lambda_i |y_i|^2 = \lambda_1 |y_1|^2 + \lambda_2 |y_2|^2 + \cdots + \lambda_n |y_n|^2$$

また, これらの自然数たち π, $n - \pi - \nu$, ν はそれぞれ $\lambda_i > 0$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_i < 0$ なる固有値たち λ_i の個数に等しい. そこで, 必要があれば, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $1 \leq i \leq \pi$ のとき, $\lambda_i > 0$, $\pi + 1 \leq i \leq \pi + \nu$ のとき, $\lambda_i < 0$, $\pi + \nu + 1 \leq i \leq n$ のとき, $\lambda_i = 0$ と添数をつけかえてもよい. そこで, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{o}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, 次のよう

にして組 $\left(\mathbf{v}_i\right)_{i \in \varLambda_n}$ が定義されれば,

$$\mathbf{v}_i = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{o}_i}{\sqrt{\lambda_i}} & \text{if} \quad 1 \leq i \leq \pi \\ \dfrac{\mathbf{o}_i}{\sqrt{-\lambda_i}} & \text{if} \quad \pi + 1 \leq i \leq \pi + \nu \\ \mathbf{o}_i & \text{if} \quad \pi + \nu + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

これらは直交基底をなす. したがって, $\mathcal{C} = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれ, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbf{v}) = \left(x_i\right)_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, その基底 $\mathcal{C}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{C}}$, その基底 $\mathcal{C}$ からその基底 $\mathcal{B}$ への基底変換行列 $\left[I_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ を用いて, 次のようになり,

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) &= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{C}} \circ \varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbf{v}) \\ &= \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ I_V \circ \varphi_{\mathcal{C}} \circ \varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbf{v}) \\ &= \left[I_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

その vector 空間 $\mathbb{C}^n$ の標準直交基底 $\left\langle \mathbf{e}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ を用いれば, 次のようになるので,

$$\begin{aligned} \left[I_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} \left[I_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \mathbf{e}_1 & \cdots & \left[I_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \mathbf{e}_\pi & \left[I_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \mathbf{e}_{\pi+1} & \cdots & \left[I_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \mathbf{e}_{\pi+\nu} & \left[I_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \mathbf{e}_{\pi+\nu+1} & \cdots & \left[I_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ I_V \circ \varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_1) \quad \cdots \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ I_V \circ \varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_\pi)\right. \\ &\quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ I_V \circ \varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\pi+1}) \quad \cdots \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ I_V \circ \varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\pi+\nu}) \\ &\quad \left.\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ I_V \circ \varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\pi+\nu+1}) \quad \cdots \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ I_V \circ \varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_n)\right) \\ &= \left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_1)\right) \quad \cdots \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_\pi)\right) \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\pi+1})\right)\right. \\ &\quad \left.\cdots \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\pi+\nu})\right) \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_{\pi+\nu+1})\right) \quad \cdots \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{C}}(\mathbf{e}_n)\right)\right) \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}_1) & \cdots & \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}_\pi) & \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}_{\pi+1}) & \cdots & \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}_{\pi+\nu}) & \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}_{\pi+\nu+1}) & \cdots & \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix} \\ &= \left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\frac{\mathbf{o}_1}{\sqrt{\lambda_1}}\right) \quad \cdots \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\frac{\mathbf{o}_\pi}{\sqrt{\lambda_\pi}}\right) \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\frac{\mathbf{o}_{\pi+1}}{\sqrt{-\lambda_{\pi+1}}}\right)\right. \\ &\quad \left.\cdots \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\frac{\mathbf{o}_{\pi+\nu}}{\sqrt{-\lambda_{\pi+\nu}}}\right) \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_{\pi+\nu+1}) \quad \cdots \quad \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_n)\right) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_1)}{\sqrt{\lambda_1}} & \cdots & \dfrac{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_\pi)}{\sqrt{\lambda_\pi}} & \dfrac{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_{\pi+1})}{\sqrt{-\lambda_{\pi+1}}} & \cdots & \dfrac{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_{\pi+\nu})}{\sqrt{-\lambda_{\pi+\nu}}} & \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_{\pi+\nu+1}) & \cdots & \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{o}_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\mathbf{e}_1}{\sqrt{\lambda_1}} & \cdots & \dfrac{\mathbf{e}_\pi}{\sqrt{\lambda_\pi}} & \dfrac{\mathbf{e}_{\pi+1}}{\sqrt{-\lambda_{\pi+1}}} & \cdots & \dfrac{\mathbf{e}_{\pi+\nu}}{\sqrt{-\lambda_{\pi+\nu}}} & \mathbf{e}_{\pi+\nu+1} & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & O \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_\pi}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{\pi+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{\pi+\nu}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ O & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) &= [I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbf{v}) \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & O \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & \frac{1}{\sqrt{\lambda_\pi}} & & & & & & \\
& & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{\pi+1}}} & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{\pi+\nu}}} & & & \\
& & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
O & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\pi \\ x_{\pi+1} \\ \vdots \\ x_{\pi+\nu} \\ x_{\pi+\nu+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}} \\ \vdots \\ \frac{x_\pi}{\sqrt{\lambda_\pi}} \\ \frac{x_{\pi+1}}{\sqrt{-\lambda_{\pi+1}}} \\ \vdots \\ \frac{x_{\pi+\nu}}{\sqrt{-\lambda_{\pi+\nu}}} \\ x_{\pi+\nu+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

したがって, その Hermite 双線形形式から定まる Hermite 形式 q は次のようになる.

$$\begin{aligned}
q(\mathbf{v}) &= \sum_{i \in \varLambda_n} \lambda_i |y_i|^2 \\
&= \lambda_1 |y_1|^2 + \cdots + \lambda_\pi |y_\pi|^2 + \lambda_{\pi+1} |y_{\pi+1}|^2 + \cdots \\
&\quad + \lambda_{\pi+\nu} |y_{\pi+\nu+1}|^2 + \lambda_{\pi+\nu+1} |x_{\pi+\nu+1}|^2 + \cdots + \lambda_n |x_n|^2 \\
&= \lambda_1 \left| \frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}} \right|^2 + \cdots + \lambda_\pi \left| \frac{x_\pi}{\sqrt{\lambda_\pi}} \right|^2 + \lambda_{\pi+1} \left| \frac{x_{\pi+1}}{\sqrt{-\lambda_{\pi+1}}} \right|^2 + \cdots \\
&\quad + \lambda_{\pi+\nu} \left| \frac{x_{\pi+\nu}}{\sqrt{-\lambda_{\pi+\nu}}} \right|^2 + \lambda_{\pi+\nu+1} |x_{\pi+\nu+1}|^2 + \cdots + \lambda_n |x_n|^2 \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1} |x_1|^2 + \cdots + \frac{\lambda_\pi}{\lambda_\pi} |x_\pi|^2 + \frac{\lambda_{\pi+1}}{-\lambda_{\pi+1}} |x_{\pi+1}|^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{\lambda_{\pi+\nu}}{-\lambda_{\pi+\nu}} |x_{\pi+\nu}|^2 + 0 |x_{\pi+\nu+1}|^2 + \cdots + 0 |x_n|^2 \\
&= |x_1|^2 + \cdots + |x_\pi|^2 - |x_{\pi+1}|^2 - \cdots - |x_{\pi+\nu}|^2
\end{aligned}$$

□

3.10.3 Hermite 双線形形式と行列式

定義 3.10.5. 体 $\mathbb{C}$ 上の行列 B が $B=\left(B_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_n^2}$ と与えられたとき, $\forall k\in\varLambda_n$ に対し, 次のような写像 P_k によるその行列 B の像を k 次首座小行列という.

$$P_k:\mathrm{M}\left(n,n,\mathbb{C}\right)\rightarrow\mathrm{M}\left(k,k,\mathbb{C}\right);B\mapsto\left(B_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_k^2}$$

定理 3.10.7. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B のその vector 空間 V の基底 α に関する表現行列 $[B]_\alpha$ が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- その Hermite 双線形形式 B が半正値であるならそのときに限り, $\forall k\in\varLambda_n$ に対し, $\det P_k\left([B]_\alpha\right)\geq 0$ が成り立つ.
- その Hermite 双線形形式 B が正値であるならそのときに限り, $\forall k\in\varLambda_n$ に対し, $\det P_k\left([B]_\alpha\right)>0$ が成り立つ.
- その Hermite 双線形形式 B が半負値であるならそのときに限り, $\forall k\in\varLambda_n$ に対し, $(-1)^k\det P_k\left([B]_\alpha\right)\geq 0$ が成り立つ.
- その Hermite 双線形形式 B が負値であるならそのときに限り, $\forall k\in\varLambda_n$ に対し, $(-1)^k\det P_k\left([B]_\alpha\right)>0$ が成り立つ.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B の $\alpha=\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α に関する表現行列 $[B]_\alpha$ が $[B]_\alpha=\left(B_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_n^2}$ とおかれると, その Hermite 双線形形式 B が正値であるなら, $\forall k\in\varLambda_n$ に対し, 次のようにおかれれば,

$$V_k=\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_k},\quad\alpha_k=\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_k}$$

次のようになる.

$$\left[B|V_k\times V_k\right]_{\alpha_k}=\left(B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\right)\right)_{(i,j)\in\varLambda_k^2}=P_k\left([B]_\alpha\right)$$

もちろん, その Hermite 双線形形式 $B|V_k\times V_k$ も正値であるから, $0<B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\right)$, $0=B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\right)$, $0>B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\right)$ なる添数 i の個数がそれぞれ π, ξ, ν と $\pi+\xi+\nu=k$ が成り立つようにおかれれば, 定理 3.5.6 よりその Hermite 双線形形式 $B|V_k\times V_k$ の符号が $(k,0)$ である. その Hermite 双線形形式 $B|V_k\times V_k$ から誘導される Hermite 変換 $f_{B|V_k\times V_k}$ の固有値たちからなる族を $\left\{\lambda_i\right\}_{i\in\varLambda_k}$ とおくと, 定理 3.10.4 よりこれらの自然数たち π, ξ, ν がそれぞれ $\lambda_i>0$, $\lambda_i=0$, $\lambda_i<0$ なる固有値たち λ_i の個数に等しい. 定理 3.10.1 より $\mathcal{B}=\left\langle\mathbf{o}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ なるその内積空間 $(V,\varPhi)$ の Euclid 幾何学の立場で標準的な正規直交基底 $\mathcal{B}$ を用いれば, これに関するそれらの Hermite 双線形形式, Hermite 形式の表現行列たちについて, $\forall k\in\varLambda_n$ に対し, 次のようにおかれれると,

$$\mathcal{B}_k=\left\langle\mathbf{o}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$$

次式が成り立つ.

$$\left[B|V_k\times V_k\right]_{\mathcal{B}_k}=\left[f_{B|V_k\times V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{B}_k}$$

したがって, 定理 1.5.7, 定理 1.5.9, 定理 2.2.12, 定理 3.4.15, 定理 3.10.3 より次のようになるので,

$$0<\prod_{i\in\varLambda_k}\lambda_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \det\left[f_{B|V_k\times V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{B}_k}\\
&= \det\left[B|V_k\times V_k\right]_{\mathcal{B}_k}\\
&= \det\left[I_{V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\alpha_k *}\left[B|V_k\times V_k\right]_{\alpha_k}\left[I_{V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\alpha_k}\\
&= \det\left[I_{V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\alpha_k *}\det\left[B|V_k\times V_k\right]_{\alpha_k}\det\left[I_{V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\alpha_k}\\
&= \det{}^t\overline{\left[I_{V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\alpha_k}}\det\left[B|V_k\times V_k\right]_{\alpha_k}\det\left[I_{V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\alpha_k}\\
&= \det\left[I_{V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\alpha_k}\overline{\det\left[I_{V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\alpha_k}}\det\left[B|V_k\times V_k\right]_{\alpha_k}\\
&= \left|\det\left[I_{V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\alpha_k}\right|^2\det\left[B|V_k\times V_k\right]_{\alpha_k}
\end{aligned}
$$

$\forall k\in\varLambda_n$ に対し, $\det P_k\left([B]_\alpha\right)>0$ が成り立つ.

逆に, $\forall k\in\varLambda_n$ に対し, $\det P_k\left([B]_\alpha\right)>0$ が成り立つなら, $n=1$ のときでは明らかに $\det P_1\left([B]_\alpha\right)=\det[B]_\alpha=B\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\right)$ が成り立つので, その Hermite 双線形形式 B が正値である. $n=l$ のとき, その Hermite 双線形形式 B が正値であると仮定しよう. $n=l+1$ のとき, $\det[B]_\alpha>0$ が成り立つので, 定理 3.10.1 より $[B]_{\mathcal{B}}=\left[f_B\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が成り立つことから, 定理 1.5.7, 定理 1.5.9, 定理 3.4.15 より次のようになる.

$$
\begin{aligned}
0&<\det[B]_\alpha\\
&=\det\left[I_V\right]_\alpha^{\mathcal{B}*}[B]_{\mathcal{B}}\left[I_V\right]_\alpha^{\mathcal{B}}\\
&=\det\left[I_V\right]_\alpha^{\mathcal{B}*}\det[B]_{\mathcal{B}}\det\left[I_V\right]_\alpha^{\mathcal{B}}\\
&=\det{}^t\overline{\left[I_V\right]_\alpha^{\mathcal{B}}}\det[B]_{\mathcal{B}}\det\left[I_V\right]_\alpha^{\mathcal{B}}\\
&=\overline{\det\left[I_V\right]_\alpha^{\mathcal{B}}}\det[B]_{\mathcal{B}}\det\left[I_V\right]_\alpha^{\mathcal{B}}\\
&=\left|\det\left[I_V\right]_\alpha^{\mathcal{B}}\right|^2\det[B]_{\mathcal{B}}\\
&=\left|\det\left[I_V\right]_\alpha^{\mathcal{B}}\right|^2\det\left[f_B\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}
\end{aligned}
$$

したがって, $\det\left[f_B\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\neq 0$ が成り立つので, その線形写像 f_B は線形同型写像でもある. また, $V=V_l\oplus V_l{}^\perp$ が成り立つので, 次のようになり,

$$
\begin{aligned}
\dim V_l{}^\perp&=\dim V_l+\dim V_l{}^\perp-\dim V_l\\
&=\dim V_l\oplus V_l{}^\perp-\dim V_l\\
&=\dim V-\dim V_l\\
&=l+1-l=1
\end{aligned}
$$

したがって, $\exists\mathbf{v}_{l+1}'\in V$ に対し, $\mathbf{v}_{l+1}'\neq\mathbf{0}$ かつ $V_l{}^\perp=\operatorname{span}\left\{\mathbf{v}_{l+1}'\right\}$ が成り立つ. さらに, その線形写像 f_B が全単射なので, $\exists f_B^{-1}\left(\mathbf{v}_{l+1}'\right)\in V$ に対し, $f_B^{-1}\left(\mathbf{v}_{l+1}'\right)\neq\mathbf{0}$ かつ $f_B\left(f_B^{-1}\left(\mathbf{v}_{l+1}'\right)\right)=\mathbf{v}_{l+1}'$ が成り立つ. したがって, $\forall\mathbf{v}\in V_l$ に対し, 定理 3.10.1 より次のようになる.

$$
B\left(\mathbf{v},f_B^{-1}\left(\mathbf{v}_{l+1}'\right)\right)=\varPhi\left(\mathbf{v},f_B\left(f_B^{-1}\left(\mathbf{v}_{l+1}'\right)\right)\right)=\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{v}_{l+1}'\right)=0
$$

これにより, $0<B\left(\mathbf{v},f_B^{-1}\left(\mathbf{v}_{l+1}'\right)\right)$ が成り立たないので, 対偶律により $f_B^{-1}\left(\mathbf{v}_{l+1}'\right)\notin V_l$ が成り立つ. したがって, $f_B^{-1}\left(\mathbf{v}_{l+1}'\right)\in V_l{}^\perp$ が成り立ちその組 $\left\langle\begin{matrix}\alpha_l\\ f_B^{-1}\left(\mathbf{v}_{l+1}'\right)\end{matrix}\right\rangle$ もその vector 空間 V の基底をなす. 以下, これが β とおかれよう.

そこで, $\forall i,j\in\varLambda_{l+1}$ に対し, $i,j\in\varLambda_l$ が成り立つなら, $B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\right)=B_{ij}$, $i\in\varLambda_l$ かつ $j=l+1$ が成り立つ, または, $i=l+1$ かつ $j\in\varLambda_l$ が成り立つなら, $B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\right)=0$ が成り立つので, その基底 β に関するその

Hermite 双線形形式 B の表現行列 $[B]_\beta$ は次のようになる.

$$[B]_\beta = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1l} & \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2l} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & O \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{ll} & \\ & O & & & B\left(f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right), f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right)\right) \end{pmatrix}$$

したがって, 定理 1.5.7, 定理 1.5.9, 定理 3.4.15 より次のようになるので,

$$\begin{aligned} 0 &< \det[B]_\alpha \\ &= \det\left[I_V\right]_\alpha^{\beta *}[B]_\beta\left[I_V\right]_\alpha^\beta \\ &= \det\left[I_V\right]_\alpha^{\beta *}\det[B]_\beta\det\left[I_V\right]_\alpha^\beta \\ &= \det{}^t\overline{\left[I_V\right]_\alpha^\beta}\det[B]_\beta\det\left[I_V\right]_\alpha^\beta \\ &= \overline{\det\left[I_V\right]_\alpha^\beta}\det[B]_\beta\det\left[I_V\right]_\alpha^\beta \\ &= \left|\det\left[I_V\right]_\alpha^\beta\right|^2\det[B]_\beta \end{aligned}$$

次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} 0 &< \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1l} & \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2l} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & O \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{ll} & \\ & O & & & B\left(\mathbf{v}_{l+1}, \mathbf{v}_{l+1}\right) \end{vmatrix} \\ &= B\left(f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right), f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right)\right)\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1l} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{ll} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$0 < \det\left(B_{ij}\right)_{(i,j)\in\Lambda_l}$ が成り立つので, $0 < B\left(f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right), f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right)\right)$ も成り立つ.

さて, $\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, $V = V_l \oplus V_l^\perp$ が成り立つので, $\mathbf{w} \in V_l$ かつ $a \in C$ なる元々 $\mathbf{w}$, a を用いて $\mathbf{v} = \mathbf{w} + af_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right)$ と一意的に表されることができる. そこで, 次のようになる.

$$\begin{aligned} B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) &= B\left(\mathbf{w} + af_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right), \mathbf{w} + af_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right)\right) \\ &= B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right) + aB\left(\mathbf{w}, f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right)\right) + \overline{a}B\left(f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right), \mathbf{w}\right) \\ &\quad + |a|^2 B\left(f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right), f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right)\right) \\ &= B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right) + a\cdot 0 + \overline{a}\cdot 0 + |a|^2 B\left(f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right), f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right)\right) \\ &= B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right) + |a|^2 B\left(f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right), f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right)\right) \end{aligned}$$

$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ または $a \neq 0$ が成り立つので, $0 < B\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}\right)$ または $0 < |a|^2$ が成り立ち, $0 < B\left(f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right), f_B^{-1}\left(\mathbf{v}'_{l+1}\right)\right)$ が成り立つことに注意されれば, $0 < B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$ が成り立つ. よって, 数学的帰納法によりその Hermite 双線形形式 B が正値であることが示された.

その Hermite 双線形形式 B が半正値であるなら, 次のようになり,

$$\left[B|V_k \times V_k\right]_{\alpha_k} = \left(B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right)\right)_{(i,j)\in\Lambda_k^2} = P_k\left([B]_\alpha\right)$$

もちろん, その Hermite 双線形形式 $B|V_k \times V_k$ も半正値であるから, 定理 3.5.6 よりその Hermite 双線形形式 $B|V_k \times V_k$ の符号が $(\pi, 0)$ である. 定理 3.10.4 よりこれらの自然数たち π, ξ, ν がそれぞれ $\lambda_i > 0$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_i < 0$ なる固有値たち λ_i の個数に等しい. 定理 3.10.1 よりこれに関するそれらの Hermite 双線形形式, Hermite 形式の表現行列たちについて, 次式が成り立つ.

$$[B|V_k \times V_k]_{\mathcal{B}_k} = \left[f_{B|V_k \times V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{B}_k}$$

したがって, 上記の議論と同様にして, $0 \leq \prod_{i \in \varLambda_k} \lambda_i = \left|\det \left[I_{V_k}\right]_{\mathcal{B}_k}^{\alpha_k}\right|^2 \det \left[B|V_k \times V_k\right]_{\alpha_k}$ が成り立つので, $\forall k \in \varLambda_n$ に対し, $\det P_k\left([B]_\alpha\right) \geq 0$ が成り立つ.

逆に, $\forall k \in \varLambda_n$ に対し, $\det P_k\left([B]_\alpha\right) \geq 0$ が成り立つなら, $n = 1$ のときでは明らかに $\det P_1\left([B]_\alpha\right) = \det[B]_\alpha = B\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\right)$ が成り立つので, その Hermite 双線形形式 B が半正値である. $n = l$ のとき, その Hermite 双線形形式 B が正値であると仮定しよう. $n = l + 1$ のとき, $\det[B]_\alpha > 0$ が成り立つなら, 定理 1.11.15 よりその行列 $[B]_\alpha$ は正則行列なので, 再び定理 1.11.15 より $\mathrm{rank}[B]_\alpha = l + 1$ が成り立つ. 定理 1.11.19 より $\forall k \in \varLambda_n$ に対し, $\det P_k\left([B]_\alpha\right) \neq 0$ が成り立つので, $\det P_k\left([B]_\alpha\right) > 0$ が成り立つ. 上記の議論によりその Hermite 双線形形式 B は正値なので, これは半正値でもある.

$\det[B]_\alpha = 0$ が成り立つなら, $\mathrm{rank} P_k\left([B]_\alpha\right) < l + 1$ が成り立つので, $r = \mathrm{rank} P_k\left([B]_\alpha\right)$ とおかれると, $\forall k \in \varLambda_r$ に対し, 定理 1.11.15 より $\det P_k\left([B]_\alpha\right) > 0$ が成り立ち, 上記の議論により, その Hermite 双線形形式 $B|V_k \times V_k$ が正値である. さらに, $\forall k \in \varLambda_{l+1} \setminus \varLambda_r$ に対し, 定理 1.11.15 より $\det\left(B_{ij}\right)_{(i,j) \in \varLambda_r \cup \{k\}} = 0$ が成り立つ. $V = V_r \oplus V_r^\perp$ が成り立ち, そこで, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\dim V_r^\perp &= \dim V_r + \dim V_r^\perp - \dim V_r \\
&= \dim V_r \oplus V_r^\perp - \dim V_r \\
&= \dim V - \dim V_r \\
&= l + 1 - r = l - r + 1
\end{aligned}$$

その直交空間 $V_r^\perp$ の直交基底 $\left\langle \mathbf{w}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_{l-r+1}}$ を用いて, $\beta = \left\langle \alpha_r \quad \left\langle \mathbf{w}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_{l-r+1}} \right\rangle = \left\langle \mathbf{v}_i' \right\rangle_{i \in \varLambda_{l+1}}$ とおかれると, 定理 2.1.5 よりこれはその vector 空間 V の基底で, $\forall i \in \varLambda_r \forall j \in \varLambda_{l+1} \setminus \varLambda_r$ に対し, $B\left(\mathbf{v}_i', \mathbf{v}_j'\right) = 0$ が成り立ち, $\forall i \in \varLambda_{l+1} \setminus \varLambda_r \forall j \in \varLambda_r$ に対し, $B\left(\mathbf{v}_i', \mathbf{v}_j'\right) = 0$ が成り立つので, $\forall k \in \varLambda_{l+1} \setminus \varLambda_r$ に対し, 次のようにおかれれば,

$$[B]_\beta = \left(B_{ij}'\right)_{(i,j) \in \varLambda_{l+1}^2}, \quad V_k' = \mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_i'\right\}_{i \in \varLambda_r} \cup \left\{\mathbf{v}_k'\right\}, \quad \alpha_k' = \left\langle \alpha_r \quad \mathbf{v}_k' \right\rangle, \quad \beta_k' = \left\langle \alpha_r \quad \mathbf{v}_k' \right\rangle$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
0 &= \det\left(B_{ij}\right)_{(i,j) \in \varLambda_r \cup \{k\}} \\
&= \det[B]_{\alpha_k'} \\
&= \det \left[I_{V_k'}\right]_{\alpha_k'}^{\beta_k'}{}^* [B]_{\beta_k'} \left[I_{V_k'}\right]_{\alpha_k'}^{\beta_k'} \\
&= \det \left[I_{V_k'}\right]_{\alpha_k'}^{\beta_k'}{}^* \det[B]_{\beta_k'} \det \left[I_{V_k'}\right]_{\alpha_k'}^{\beta_k'} \\
&= \det {}^t\overline{\left[I_{V_k'}\right]_{\alpha_k'}^{\beta_k'}} \det[B]_{\beta_k'} \det \left[I_{V_k'}\right]_{\alpha_k'}^{\beta_k'} \\
&= \overline{\det \left[I_{V_k'}\right]_{\alpha_k'}^{\beta_k'}} \det[B]_{\beta_k'} \det \left[I_{V_k'}\right]_{\alpha_k'}^{\beta_k'}
\end{aligned}$$

$$= \left| \det \left[I_{V'_k} \right]_{\alpha'_k}^{\beta'_k} \right|^2 \det [B]_{\beta'_k}$$

そこで, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\det [B]_{\beta'_k} &= \begin{vmatrix} B'_{11} & \cdots & B'_{1r} & B'_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B'_{r1} & \cdots & B'_{rr} & B'_{rk} \\ B'_{k1} & \cdots & B'_{kr} & B'_{kk} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rr} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B'_{kk} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \begin{matrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rr} \end{matrix} & O \\ O & B'_{kk} \end{vmatrix} \\
&= B'_{kk} \begin{vmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rr} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

次式が成り立つことに注意すれば,

$$0 < \left| \det \left[I_V \right]_\alpha^\beta \right|^2, \quad 0 < \begin{vmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rr} \end{vmatrix}$$

$B'_{kk} = B\left(\mathbf{v}'_k, \mathbf{v}'_k\right) = 0$ が成り立つので, $\forall \mathbf{w} \in V_r^\perp$ に対し, $\mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_{l-r+1}} a_i \mathbf{w}_i$ とおかれれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) &= B\left(\sum_{i \in \varLambda_{l-r+1}} a_i \mathbf{w}_i, \sum_{i \in \varLambda_{l-r+1}} a_i \mathbf{w}_i \right) \\
&= \sum_{i,j \in \varLambda_{l-r+1}} \overline{a_i} a_j B\left(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j\right) \\
&= \sum_{\substack{i,j \in \varLambda_{l-r+1} \\ i=j}} \overline{a_i} a_j B\left(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j\right) + \sum_{\substack{i,j \in \varLambda_{l-r+1} \\ i \neq j}} \overline{a_i} a_j B\left(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j\right) \\
&= \sum_{k \in \varLambda_{l+1} \setminus \varLambda_r} \left| a_{r+k} \right|^2 B\left(\mathbf{v}'_k, \mathbf{v}'_k\right) + \sum_{\substack{i,j \in \varLambda_{l+1} \setminus \varLambda_r \\ i \neq j}} \overline{a_{r+i}} a_{r+j} B\left(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j\right) \\
&= \sum_{k \in \varLambda_{l+1} \setminus \varLambda_r} \left| a_{r+k} \right|^2 \cdot 0 + \sum_{\substack{i,j \in \varLambda_{l+1} \setminus \varLambda_r \\ i \neq j}} \overline{a_{r+i}} a_{r+j} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

したがって, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $V = V_r \oplus V_r^\perp$ が成り立つので, $\mathbf{u} \in V_r$, $\mathbf{w} \in V_r^\perp$ なる vectors$\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ を用いて $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ と一意的に表されることができて次のようになる.

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w})$$

$$
\begin{aligned}
&= B(\mathbf{u},\mathbf{u}) + B(\mathbf{u},\mathbf{w}) + B(\mathbf{w},\mathbf{u}) + B(\mathbf{w},\mathbf{w}) \\
&= B(\mathbf{u},\mathbf{u}) + 0 + 0 + B(\mathbf{w},\mathbf{w}) \\
&= B(\mathbf{u},\mathbf{u}) + B(\mathbf{w},\mathbf{w}) \\
&= B(\mathbf{u},\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ または $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ が成り立つので, $0 < B(\mathbf{u},\mathbf{u})$ または $0 = B(\mathbf{v},\mathbf{v})$ が成り立ち $0 \leq B(\mathbf{v},\mathbf{v})$ が成り立つ. よって, 数学的帰納法によりその Hermite 双線形形式 B が半正値であることが示された.

その Hermite 双線形形式 B が負値であるならそのときに限り, その Hermite 双線形形式 $-B$ が正値である. これが成り立つならそのときに限り, $\forall k \in \Lambda_n$ に対し, $\det P_k(-[B]_\alpha) > 0$ が成り立つ. これが成り立つならそのときに限り, $\forall k \in \Lambda_n$ に対し, $(-1)^k \det P_k([B]_\alpha) > 0$ が成り立つ.

その Hermite 双線形形式 B が半負値であるならそのときに限り, その Hermite 双線形形式 $-B$ が半正値である. これが成り立つならそのときに限り, $\forall k \in \Lambda_n$ に対し, $\det P_k(-[B]_\alpha) \geq 0$ が成り立つ. これが成り立つならそのときに限り, $\forall k \in \Lambda_n$ に対し, $(-1)^k \det P_k([B]_\alpha) \geq 0$ が成り立つ. □

3.10.4 Hermite 双線形形式の符号に関する定理

ここで, 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B の符号に関する議論をまとめたものを定理として掲げておこう.

定理 3.10.8 (Hermite 双線形形式の符号に関する定理)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B について, 定理 3.4.3 より $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $B(\mathbf{v},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ が成り立つ. このことに注意すれば, その Hermite 双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ と, $0 < B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$, $0 = B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$, $0 > B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$ なる添数 i の個数が $\pi + \xi + \nu = n$ が成り立つようにそれぞれ π, ξ, ν とおかれ, その Hermite 双線形形式 B から誘導される Hermite 変換 f_B の固有値たちからなる族が $\{\lambda_i\}_{i \in \Lambda_n}$ と, その Hermite 双線形形式 B のその vector 空間 V の基底 α に関する表現行列が $[B]_\alpha$ とおかれれば, その Hermite 双線形形式 B の符号 (π, ν) について, これらの自然数たち π, $n - \pi - \nu$, ν はそれぞれ $\lambda_i > 0$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_i < 0$ なる固有値たち λ_i の個数に等しく, さらに, 次のことが成り立つ.

- 次のことは同値である.
  - その Hermite 双線形形式 B は半正値である.
  - $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 \leq B(\mathbf{v},\mathbf{v})$ が成り立つ.
  - $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $0 \leq B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$ が成り立つ.
  - その Hermite 双線形形式 B の符号が $(\pi, 0)$ である.
  - $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $0 \leq \lambda_i$ が成り立つ.
  - $\forall k \in \Lambda_n$ に対し, $\det P_k([B]_\alpha) \geq 0$ が成り立つ.
- 次のことは同値である.
  - その Hermite 双線形形式 B は正値である.
  - $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $0 < B(\mathbf{v},\mathbf{v})$ が成り立つ.
  - $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $0 < B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)$ が成り立つ.
  - その Hermite 双線形形式 B の符号が $(n, 0)$ である.
  - $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $0 < \lambda_i$ が成り立つ.

- $\forall k \in \varLambda_n$ に対し, $\det P_k\left([B]_\alpha\right) > 0$ が成り立つ.

- 次のことは同値である.
  - その Hermite 双線形形式 B は半負値である.
  - $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 \geq B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$ が成り立つ.
  - $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \geq B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.
  - その Hermite 双線形形式 B の符号が $(0, \nu)$ である.
  - $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \geq \lambda_i$ が成り立つ.
  - $\forall k \in \varLambda_n$ に対し, $(-1)^k \det P_k\left([B]_\alpha\right) \geq 0$ が成り立つ.
- 次のことは同値である.
  - その Hermite 双線形形式 B は負値である.
  - $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $0 > B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$ が成り立つ.
  - $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 > B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.
  - その Hermite 双線形形式 B の符号が $(0, n)$ である.
  - $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 > \lambda_i$ が成り立つ.
  - $\forall k \in \varLambda_n$ に対し, $(-1)^k \det P_k\left([B]_\alpha\right) > 0$ が成り立つ.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V 上の任意の Hermite 双線形形式 B について, 定理 3.4.3 より $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) \in \mathbb{R}$ が成り立つ. このことに注意すれば, その Hermite 双線形形式 B に関する直交基底 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B} = \left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ と, $0 < B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$, $0 = B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$, $0 > B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ なる添数 i の個数が $\pi + \xi + \nu = n$ が成り立つようにそれぞれ π, ξ, ν とおかれ, その Hermite 双線形形式 B から誘導される Hermite 変換 f_B の固有値たちからなる族が $\left\{\lambda_i\right\}_{i \in \varLambda_n}$ と, その Hermite 双線形形式 B のその vector 空間 V の基底 α に関する表現行列が $[B]_\alpha$ とおかれれば, 定理 3.10.5 よりその Hermite 双線形形式 B の符号 (π, ν) について, これらの自然数たち π, $n - \pi - \nu$, ν はそれぞれ $\lambda_i > 0$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_i < 0$ なる固有値たち λ_i の個数に等しく, さらに, 定義より次のことは同値である.

- その Hermite 双線形形式 B は半正値である.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 \leq B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$ が成り立つ.

さらに, 定理 3.5.2 より次のことは同値である.

- その Hermite 双線形形式 B は半正値である.
- $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.

定理 3.5.6 より次のことは同値である.

- その Hermite 双線形形式 B は半正値である.
- その Hermite 双線形形式 B の符号が $(\pi, 0)$ である.

定理 3.10.5 より次のことは同値である.

- その Hermite 双線形形式 B は半正値である.
- $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq \lambda_i$ が成り立つ.

定理 3.10.7 より次のことは同値である.

- その Hermite 双線形形式 B は半正値である.
- $\forall k \in \varLambda_n$ に対し, $\det P_k\left([B]_\alpha\right) \geq 0$ が成り立つ.

以上より次のことは同値である.

- その Hermite 双線形形式 B は半正値である.
- $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $0 \leq B\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$ が成り立つ.
- $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq B\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.
- その Hermite 双線形形式 B の符号が $(\pi, 0)$ である.
- $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $0 \leq \lambda_i$ が成り立つ.
- $\forall k \in \varLambda_n$ に対し, $\det P_k\left([B]_\alpha\right) \geq 0$ が成り立つ.

他の場合も同様にして示される. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p376-387 ISBN978-4-00-029872-8

3.11 特異値分解

3.11.1 線形同型写像の極分解

定理 3.11.1. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, 任意の線形写像 $f:V \rightarrow V$ に対し, 線形写像たち $f \circ f^*$, $f^* \circ f$ はいづれも Hermite 変換であり, これらから誘導される Hermite 双線形形式たち $B_{f \circ f^*}$, $B_{f^* \circ f}$ はいづれも半正値である. 特に, その線形写像 f が線形同型写像であるなら, それらの Hermite 双線形形式たち $B_{f \circ f^*}$, $B_{f^* \circ f}$ はいづれも正値である.

証明. $K \subseteq \mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, 任意の線形写像 $f:V \rightarrow V$ に対し, 定理 3.8.6 より次のようになる.

$$\left(f \circ f^* \right)^* = f^{**} \circ f^* = f \circ f^*$$
$$\left(f^* \circ f \right)^* = f^* \circ f^{**} = f^* \circ f$$

よって, 線形写像たち $f \circ f^*$, $f^* \circ f$ はいづれも Hermite 変換である. このとき, これらから誘導される双線形形式たち $B_{f \circ f^*}$, $B_{f^* \circ f}$ について, 定理 3.10.2 よりこれらは Hermite 双線形形式であり, その内積空間 $(V,\varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V,\varphi_\varPhi)$ について, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次式が成り立つことから,

$$\varPhi\left(\mathbf{v}, f \circ f^*(\mathbf{v}) \right) = \varPhi\left(f^*(\mathbf{v}), f^*(\mathbf{v}) \right) = \varphi_\varPhi\left(f^*(\mathbf{v}) \right)^2 = \varphi_\varPhi \circ f^*(\mathbf{v})^2 \geq 0$$
$$\varPhi\left(\mathbf{v}, f^* \circ f(\mathbf{v}) \right) = \varPhi\left(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v}) \right) = \varphi_\varPhi\left(f(\mathbf{v}) \right)^2 = \varphi_\varPhi \circ f(\mathbf{v})^2 \geq 0$$

これらから誘導される Hermite 双線形形式たち $B_{f \circ f^*}$, $B_{f^* \circ f}$ はいづれも半正値である.

特に, その線形写像 f が線形同型写像であるなら, その線形写像 f^* も線形同型写像で $\ker f = \ker f^* = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つことから, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ かつ $f^*(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ が成り立つので, 次式が成り立つことから,

$$\varPhi\left(\mathbf{v}, f \circ f^*(\mathbf{v}) \right) = \varphi_\varPhi\left(f^*(\mathbf{v}) \right)^2 > 0, \quad \varPhi\left(\mathbf{v}, f^* \circ f(\mathbf{v}) \right) = \varphi_\varPhi\left(f(\mathbf{v}) \right)^2 > 0$$

これらから誘導される Hermite 双線形形式たち $B_{f \circ f^*}$, $B_{f^* \circ f}$ はいづれも正値である. □

定理 3.11.2. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, 任意の Hermite 変換 $f:V \rightarrow V$ に対し, $i \in \varLambda_n$ なるその線形写像 f の固有値たちが λ_i とおかれれば, 次のことが成り立つ.

- これから誘導される Hermite 双線形形式が半正値であるなら, ある Hermite 変換 g が一意的に存在して, これから誘導される Hermite 双線形形式が半正値で $i \in \varLambda_n$ なるその Hermite 変換 g の固有値たちが $\sqrt{\lambda_i}$ と与えられ $f = g \circ g$ が成り立つ.
- これから誘導される Hermite 双線形形式が正値であるなら, ある Hermite 変換 g が一意的に存在して, これから誘導される Hermite 双線形形式が正値で $i \in \varLambda_n$ なるその Hermite 変換 g の固有値たちが $\sqrt{\lambda_i}$ と与えられ $f = g \circ g$ が成り立つ.
- これから誘導される Hermite 双線形形式が半負値であるなら, ある Hermite 変換 g が一意的に存在して, これから誘導される Hermite 双線形形式が半負値で $i \in \varLambda_n$ なるその Hermite 変換 g の固有値たちが $-\sqrt{-\lambda_i}$ と与えられ $f = g \circ g$ が成り立つ.

- これから誘導される Hermite 双線形形式が負値であるなら, ある Hermite 変換 g が一意的に存在して, これから誘導される Hermite 双線形形式が負値で $i \in \varLambda_n$ なるその Hermite 変換 g の固有値たちが $-\sqrt{-\lambda_i}$ と与えられ $f = g \circ g$ が成り立つ.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, 任意の Hermite 変換 $f : V \rightarrow V$ に対し, $i \in \varLambda_n$ なるその線形写像 f の固有値たちが λ_i とおかれれば, これから誘導される Hermite 双線形形式 B_f が半正値であるなら, 定理 3.10.3 より次のことが成り立つようなその vector 空間 V の基底 $\mathcal{B}$ が存在する.

- その基底 $\mathcal{B}$ はその内積空間 $(V, \varPhi)$ の正規直交基底である.
- その基底 $\mathcal{B}$ に関するその Hermite 変換 f の表現行列 $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となる.
- その基底 $\mathcal{B}$ はその Hermite 双線形形式 B_f に関する直交基底をなす.

そこで, 第 (i, i) 成分が $\sqrt{\lambda_i}$ の対角行列をその基底 $\mathcal{B}$ に関するある Hermite 変換 g の表現行列 $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ となるようなその Hermite 変換 g が考えられれば, 定理 3.10.4 よりこれから誘導される Hermite 双線形形式 B_g が半正値であり, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, その基底 $\mathcal{B}$ に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ を用いて次のようになることから,

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{v}) &= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})\right)\right) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})\right)\right) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}\left([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})\right)\right) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ g \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ g \circ \varphi_{\mathcal{B}}\left(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v})\right)\right) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ g \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ g \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{v}) \\
&= g \circ g(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

$f = g \circ g$ が成り立つ. また, 定理 2.2.12 よりその Hermite 変換 g の固有値たちが $\sqrt{\lambda_i}$ と与えられる.

そこで, ある Hermite 変換たち g, h が存在して, これらから誘導される Hermite 双線形形式が半正値で $f = g \circ g = h \circ h$ が成り立つとすれば, 定理 3.8.13 よりこれらは正規変換であるので, 定理 3.9.8 より次のように spectrum 分解されることができる.

$$g = \sum_{i \in \varLambda_s} \mu_i P_{W_g(\mu_i)}, \quad h = \sum_{i \in \varLambda_t} \nu_i P_{W_h(\nu_i)}$$

このとき, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
f &= g \circ g \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \mu_i P_{W_g(\mu_i)} \circ \sum_{i \in \varLambda_s} \mu_i P_{W_g(\mu_i)} \\
&= \sum_{i,j \in \varLambda_s} \mu_i \mu_j P_{W_g(\mu_i)} \circ P_{W_g(\mu_j)} \\
&= \sum_{\substack{i, j \in \varLambda_s \\ i = j}} \mu_i \mu_j P_{W_g(\mu_i)} \circ P_{W_g(\mu_j)} + \sum_{\substack{i, j \in \varLambda_s \\ i \neq j}} \mu_i \mu_j P_{W_g(\mu_i)} \circ P_{W_g(\mu_j)} \\
&= \sum_{i \in \varLambda_s} \mu_i^2 P_{W_g(\mu_i)}
\end{aligned}$$

定理 3.9.12 よりその線形写像 f の固有値たち λ_i が μ_i^2 と与えられる. 同様にして, その線形写像 f の固有値たち λ_i が ν_i^2 とも与えられることが示される. そこで, 固有値たちの順序に注意すれば, $\lambda_i = \mu_i^2 = \nu_i^2$ が成り立つとしてもよい. その Hermite 変換たち g, h は半正値なので, 定理 3.10.4 より $\mu_i = \nu_i$ が成り立つ. このとき, 定理 3.9.12 より次のように spectrum 分解されるなら,

$$g = \sum_{i \in \Lambda_s} \mu_i P_{W_g(\mu_i)}, \quad h = \sum_{i \in \Lambda_t} \nu_i P_{W_h(\nu_i)}$$

$g = h$ が成り立つ.

以下, 同様に第 (i,i) 成分が $\sqrt{\lambda_i}$, $\sqrt{\lambda_i}$, $-\sqrt{-\lambda_i}$, $-\sqrt{-\lambda_i}$ の対角行列をその基底 $\mathcal{B}$ に関するある Hermite 変換 g の表現行列 $[g]_\mathcal{B}^\mathcal{B}$ となるようなその Hermite 変換 g が考えられれば, それぞれ次のことが成り立つことが示される.

- これから誘導される Hermite 双線形形式が半正値であるなら, ある Hermite 変換 g が一意的に存在して, これから誘導される Hermite 双線形形式が半正値で $i \in \Lambda_n$ なるその Hermite 変換 g の固有値たちが $\sqrt{\lambda_i}$ と与えられ $f = g \circ g$ が成り立つ.
- これから誘導される Hermite 双線形形式が正値であるなら, ある Hermite 変換 g が一意的に存在して, これから誘導される Hermite 双線形形式が正値で $i \in \Lambda_n$ なるその Hermite 変換 g の固有値たちが $\sqrt{\lambda_i}$ と与えられ $f = g \circ g$ が成り立つ.
- これから誘導される Hermite 双線形形式が半負値であるなら, ある Hermite 変換 g が一意的に存在して, これから誘導される Hermite 双線形形式が半負値で $i \in \Lambda_n$ なるその Hermite 変換 g の固有値たちが $-\sqrt{-\lambda_i}$ と与えられ $f = g \circ g$ が成り立つ.
- これから誘導される Hermite 双線形形式が負値であるなら, ある Hermite 変換 g が一意的に存在して, これから誘導される Hermite 双線形形式が負値で $i \in \Lambda_n$ なるその Hermite 変換 g の固有値たちが $-\sqrt{-\lambda_i}$ と与えられ $f = g \circ g$ が成り立つ.

□

定理 3.11.3 (左極分解)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, 任意の線形同型写像 $f : V \to V$ に対し, ある Hermite 変換 H と等長変換 U が一意的に存在して, その Hermite 変換 H から誘導される Hermite 双線形形式が正値で $f = H \circ U$ が成り立つ.

この定理をその線形同型写像 f の左極分解という.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 (V, Φ) が与えられたとき, 任意の線形同型写像 $f : V \to V$ に対し, 定理 3.11.1 よりその線形写像 $f \circ f^*$ はいづれも Hermite 変換であり, これらから誘導される Hermite 双線形形式たち $B_{f \circ f^*}$ は正値である. 定理 3.11.2 よりある Hermite 変換 H が一意的に存在して, これから誘導される Hermite 双線形形式が正値で $f \circ f^* = H \circ H$ が成り立つ. ここで, 定理 3.10.4 よりその Hermite 変換の固有値たちいづれも正の実数なので, 定理 3.8.13 よりその Hermite 変換 H は正規変換で定理 3.9.4, 即ち, Toeplitz の定理よりある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して, これに関する表現行列 $[H]_\mathcal{B}^\mathcal{B}$ が対角行列となる. このとき, 定理 2.2.12 よりその対角行列 $[H]_\mathcal{B}^\mathcal{B}$ の対角成分がその Hermite 変換 H の固有値でありいづれも正の実数なので, その対角行列の対角成分の逆数を対角成分とする対角行列が考えられれば, これがその対角行列 $[H]_\mathcal{B}^\mathcal{B}$ の逆行列となるので, その対角行列 $[H]_\mathcal{B}^\mathcal{B}$ の逆行列 ${[H]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}^{-1}$ が存在する. このとき, 定理 1.5.16 よりその Hermite 変換 H は線形同型写像となって $\left[H^{-1}\right]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = {[H]_\mathcal{B}^\mathcal{B}}^{-1}$ が成り立つので, $U = H^{-1} \circ f$ とおかれれば,

定理 3.8.6 より次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
U\circ U^{*} &= H^{-1}\circ f\circ\left(H^{-1}\circ f\right)^{*}\\
&= H^{-1}\circ\left(f\circ f^{*}\right)\circ {H^{-1}}^{*}\\
&= H^{-1}\circ\left(H\circ H\right)\circ {H^{*}}^{-1}\\
&= H^{-1}\circ H\circ H\circ H^{-1} = I_{V}\\
U^{*}\circ U &= \left(H^{-1}\circ f\right)^{*}\circ H^{-1}\circ f\\
&= f^{*}\circ {H^{-1}}^{*}\circ H^{-1}\circ f\\
&= f^{*}\circ {H^{*}}^{-1}\circ H^{-1}\circ f\\
&= f^{*}\circ H^{-1}\circ H^{-1}\circ f\\
&= f^{*}\circ\left(H\circ H\right)^{-1}\circ f\\
&= f^{*}\circ\left(f\circ f^{*}\right)^{-1}\circ f\\
&= f^{*}\circ {f^{*}}^{-1}\circ f^{-1}\circ f = I_{V}
\end{aligned}$$

このとき, 定理 3.8.7 よりその線形写像 U は等長変換である.

さらに, $f=H\circ T=H\circ U$ なる等長変換たち T, U が存在するなら, その Hermite 変換 H は線形同型写像でもあるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
T &= H^{-1}\circ H\circ T\\
&= H^{-1}\circ f\\
&= H^{-1}\circ H\circ U = U
\end{aligned}$$

ある Hermite 変換 H と等長変換 U が一意的に存在して, その Hermite 変換 H から誘導される Hermite 双線形形式が正値で $f=H\circ U$ が成り立つ. □

定理 3.11.4 (右極分解)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, 任意の線形同型写像 $f:V\rightarrow V$ に対し, ある Hermite 変換 H と等長変換 U が一意的に存在して, その Hermite 変換 H から誘導される Hermite 双線形形式が正値で $f=U\circ H$ が成り立つ.

この定理をその線形同型写像 f の右極分解という.

証明. 定理 3.11.3 と同様にして示される. □

3.11.2 線形同型写像の極分解

定理 3.11.5. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, 任意の線形写像 $f:V\rightarrow V$ に対し, $\ker f^{*}\circ f=\ker f$ が成り立つ.

証明. $K\subseteq\mathbb{C}$ なる体 K 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, 任意の線形写像 $f:V\rightarrow V$ に対し, もちろん, $\ker f\subseteq\ker f^{*}\circ f$ が成り立つ. 一方で, $\forall\mathbf{v}\in\ker f^{*}\circ f$ に対し, その内積空間 $(V,\varPhi)$ から誘導される norm 空間 $(V,\varphi_{\varPhi})$ について, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\varPhi}\left(f\left(\mathbf{v}\right)\right) &= \sqrt{\varPhi\left(f\left(\mathbf{v}\right),f\left(\mathbf{v}\right)\right)}\\
&= \sqrt{\varPhi\left(f^{*}\circ f\left(\mathbf{v}\right),\mathbf{v}\right)}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\varPhi\left(\mathbf{0}, \mathbf{v} \right)} = 0$$

$f\left(\mathbf{v} \right) = 0$ が成り立ち, したがって, $\mathbf{v} \in \ker f$ が得られる. よって, $\ker f^{*} \circ f = \ker f$ が成り立つ. □

定理 3.11.6 (左極分解)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, 任意の線形写像 $f:V \rightarrow V$ に対し, ある Hermite 変換 H と等長変換 U が存在して, その Hermite 変換 H から誘導される Hermite 双線形形式が正値で $f = H \circ U$ が成り立つ.

この定理をその線形写像 f の左極分解という.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, 任意の線形写像 $f:V \rightarrow V$ に対し, 定理 3.11.1 よりその線形写像 $f \circ f^{*}$ は Hermite 変換であり, これらから誘導される Hermite 双線形形式たち $B_{f \circ f^{*}}$ は半正値である. このとき, 定理 3.11.2 よりある Hermite 変換 H が一意的に存在して, これから誘導される Hermite 双線形形式が半正値で $f \circ f^{*} = H \circ H$ が成り立つ. さらに, 定理 3.8.13 よりこの Hermite 変換 H は正規変換であるので, 定理 3.9.4, 即ち, Toeplitz の定理よりある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して, これに関するその Hermite 変換 H の表現行列 $[H]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となる. このとき, 定理 2.2.12 よりその対角行列 $[H]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ の対角成分 λ_{i} がその Hermite 変換 H の固有値であり定理 3.10.4 よりいづれも非負実数なので, その Hermite 双線形形式 B_{H} の符号が定理 3.5.6 より $(\pi,0)$ と与えられたらば, $\forall i \in \varLambda_{\pi}$ に対し, $0 < \lambda_{i}$, $\forall i \in \varLambda_{n} \setminus \varLambda_{\pi}$ に対し, $0 = \lambda_{i}$ と与えられるとしてもよい. 以下, その Hermite 変換 H の互いに異なる固有値たちの族が $\left\{ \sqrt{\lambda_{i'}'} \right\}_{i' \in \varLambda_{s}}$ と与えられよう. $f \circ f^{*} = H \circ H$ が成り立つことから定理 2.3.7, 即ち, Frobenius の定理よりその Hermite 変換 $f \circ f^{*}$ の互いに異なる固有値たちの族が $\left\{ \lambda_{i'}' \right\}_{i' \in \varLambda_{s}}$ と与えられる. それらの Hermite 変換たち $f \circ f^{*}$, H は定理 3.8.13 より正規変換であるので, 定理 3.9.8 より次のように spectrum 分解されることができる.

$$f \circ f^{*} = \sum_{i' \in \varLambda_{s}} \lambda_{i'}' P_{W_{f \circ f^{*}}\left(\lambda_{i'}' \right)}, \quad H = \sum_{i' \in \varLambda_{s}} \sqrt{\lambda_{i'}'} P_{W_{H}\left(\sqrt{\lambda_{i'}'} \right)}$$

$\mathcal{B} = \left\langle \mathbf{o}_{i} \right\rangle_{i \in \varLambda_{n}}$ とおかれれば, $\mathbf{o}_{i} \in W_{H}\left(\sqrt{\lambda_{i'}'} \right)$ が成り立つようなその基底 $\mathcal{B}$ をなす vector$\mathbf{o}_{i}$ について, $f \circ f^{*} = H \circ H$ が成り立つことから定理 2.3.8 より $\mathbf{o}_{i} \in W_{f \circ f^{*}}\left(\lambda_{i'}' \right)$ が成り立つ. $\forall i \in \varLambda_{\pi}$ に対し, $\mathbf{p}_{i} = \dfrac{f^{*}\left(\mathbf{o}_{i} \right)}{\sqrt{\lambda_{i}}}$ とおかれれば, 部分 vector 空間 $\mathrm{span}\left\{ \mathbf{p}_{i} \right\}_{i \in \varLambda_{\pi}}$ について, $\forall i,j \in \varLambda_{\pi}$ に対し, $i \neq j$ が成り立つなら, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\varPhi\left(\mathbf{p}_{i},\mathbf{p}_{j} \right) &= \varPhi\left(\frac{f^{*}\left(\mathbf{o}_{i} \right)}{\sqrt{\lambda_{i}}},\frac{f^{*}\left(\mathbf{o}_{j} \right)}{\sqrt{\lambda_{j}}} \right)\\
&= \frac{\varPhi\left(f^{*}\left(\mathbf{o}_{i} \right),f^{*}\left(\mathbf{o}_{j} \right) \right)}{\sqrt{\lambda_{i}\lambda_{j}}}\\
&= \frac{\varPhi\left(\mathbf{o}_{i},f^{**} \circ f^{*}\left(\mathbf{o}_{j} \right) \right)}{\sqrt{\lambda_{i}\lambda_{j}}}\\
&= \frac{\varPhi\left(\mathbf{o}_{i},f \circ f^{*}\left(\mathbf{o}_{j} \right) \right)}{\sqrt{\lambda_{i}\lambda_{j}}}\\
&= \frac{\varPhi\left(\mathbf{o}_{i},\lambda_{j}\mathbf{o}_{j} \right)}{\sqrt{\lambda_{i}\lambda_{j}}}\\
&= \frac{\lambda_{j}\varPhi\left(\mathbf{o}_{i},\mathbf{o}_{j} \right)}{\sqrt{\lambda_{i}\lambda_{j}}} = 0
\end{aligned}$$

$\forall i \in \varLambda_{\pi}$ に対し, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{p}_{i}\right) &= \sqrt{\varPhi\left(\frac{f^{*}\left(\mathbf{o}_{i}\right)}{\sqrt{\lambda_{i}}}, \frac{f^{*}\left(\mathbf{o}_{i}\right)}{\sqrt{\lambda_{i}}}\right)}\\
&= \sqrt{\frac{\varPhi\left(f^{*}\left(\mathbf{o}_{i}\right), f^{*}\left(\mathbf{o}_{i}\right)\right)}{\lambda_{i}}}\\
&= \sqrt{\frac{\varPhi\left(\mathbf{o}_{i}, f^{**} \circ f^{*}\left(\mathbf{o}_{i}\right)\right)}{\lambda_{i}}}\\
&= \sqrt{\frac{\varPhi\left(\mathbf{o}_{i}, f \circ f^{*}\left(\mathbf{o}_{i}\right)\right)}{\lambda_{i}}}\\
&= \sqrt{\frac{\varPhi\left(\mathbf{o}_{i}, \lambda_{i}\mathbf{o}_{i}\right)}{\lambda_{i}}}\\
&= \sqrt{\frac{\lambda_{i}\varPhi\left(\mathbf{o}_{i}, \mathbf{o}_{i}\right)}{\lambda_{i}}}\\
&= \sqrt{\varPhi\left(\mathbf{o}_{i}, \mathbf{o}_{i}\right)}\\
&= \varphi_{\varPhi}\left(\mathbf{o}_{i}\right) = 1
\end{aligned}$$

その組 $\left\langle\mathbf{p}_{i}\right\rangle_{i \in \varLambda_{\pi}}$ はその部分 vector 空間 $\operatorname{span}\left\{\mathbf{p}_{i}\right\}_{i \in \varLambda_{\pi}}$ の正規直交基底をなす. そこで, 定理 3.6.12 よりその組 $\left\langle\mathbf{p}_{i}\right\rangle_{i \in \varLambda_{n}}$ がその vector 空間 V の正規直交基底をなすようにすることができる. これが $\mathcal{C}$ とおかれよう.

このとき, それらの基底たち $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ に関する基底変換における線形同型写像たち $\varphi_{\mathcal{B}}$, $\varphi_{\mathcal{C}}$ を用いれば, $\mathbf{p}_{i} = \varphi_{\mathcal{C}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\mathbf{o}_{i}\right)$ が成り立ち, 定理 3.7.5 よりその線形写像 $\varphi_{\mathcal{C}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ は等長変換である. これが U^{*} とおかれよう.

$\mathbf{o}_{i} \in W_{H}\left(\sqrt{\lambda_{i'}'}\right)$ が成り立つようなその基底 $\mathcal{B}$ をなす vector$\mathbf{o}_{i}$ について, $f \circ f^{*} = H \circ H$ が成り立つことから定理 2.3.8 より $\mathbf{o}_{i} \in W_{f \circ f^{*}}\left(\lambda_{i'}'\right)$ が成り立つ. $\lambda_{i}' \neq 0$ のとき, 次のようになり,

$$\begin{aligned}
U^{*} \circ H\left(\mathbf{o}_{i}\right) &= U^{*} \circ \sum_{i \in \varLambda_{s}} \sqrt{\lambda_{i}'} P_{W_{H}\left(\sqrt{\lambda_{i}'}\right)}\left(\mathbf{o}_{i}\right)\\
&= U^{*}\left(\sum_{i \in \varLambda_{s}} \sqrt{\lambda_{i}'} P_{W_{H}\left(\sqrt{\lambda_{i}'}\right)}\left(\mathbf{o}_{i}\right)\right)\\
&= U^{*}\left(\sqrt{\lambda_{i}'} P_{W_{H}\left(\sqrt{\lambda_{i}'}\right)}\left(\mathbf{o}_{i}\right)\right)\\
&= U^{*}\left(\sqrt{\lambda_{i}'}\mathbf{o}_{i}\right)\\
&= \sqrt{\lambda_{i}'} U^{*}\left(\mathbf{o}_{i}\right)\\
&= \sqrt{\lambda_{i}'} \frac{f^{*}\left(\mathbf{o}_{i}\right)}{\sqrt{\lambda_{i}'}} = f^{*}\left(\mathbf{o}_{i}\right)
\end{aligned}$$

$\lambda_{i}' = 0$ のとき, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
W_{H}(0) &= \ker\left(0I_{V} - H\right)\\
&= \ker H\\
&= \ker H^{*} \circ H\\
&= \ker H \circ H
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ker f \circ f^* \\
&= \ker f^{**} \circ f^* \\
&= \ker f^*
\end{aligned}
$$

$\mathbf{o}_i \in \ker f^*$ が成り立つので, 次のようになる.

$$U^* \circ H\left(\mathbf{o}_i\right) = U^*\left(0\mathbf{o}_i\right) = \mathbf{0} = f^*\left(\mathbf{o}_i\right)$$

以上の議論により, $\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i$ とおかれれば, 次のようになることから,

$$
\begin{aligned}
U^* \circ H\left(\mathbf{v}\right) &= U^* \circ H\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_i U^* \circ H\left(\mathbf{o}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} a_i f^*\left(\mathbf{o}_i\right) \\
&= f^*\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{o}_i\right) = f^*\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}
$$

次のようになる.

$$f = f^{**} = \left(U^* \circ H\right)^* = H^* \circ U^{**} = H \circ U$$

定理 3.8.7 より $U^{**} = {U^*}^{-1}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$U^* = U^{***} = {{U^*}^{-1}}^* = {U^{-1}}^{**} = U^{-1}$$

再び定理 3.8.7 よりその線形写像 U も等長変換である. よって, 任意の線形写像 $f : V \rightarrow V$ に対し, ある Hermite 変換 H と等長変換 U が存在して, その Hermite 変換 H から誘導される Hermite 双線形形式が正値で $f = H \circ U$ が成り立つ. □

定理 3.11.7 (右極分解)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, 任意の線形写像 $f : V \rightarrow V$ に対し, ある Hermite 変換 H と等長変換 U が存在して, その Hermite 変換 H から誘導される Hermite 双線形形式が正値で $f = U \circ H$ が成り立つ.

この定理をその線形写像 f の右極分解という.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V, \varPhi)$ が与えられたとき, 任意の線形写像 $f : V \rightarrow V$ に対し, ある Hermite 変換 H と等長変換 U^* が存在して, その Hermite 変換 H から誘導される Hermite 双線形形式が正値で $f^* = H \circ U^*$ が成り立つ. したがって, 次のようになる.

$$f = f^{**} = \left(H \circ U^*\right)^* = U^{**} \circ H^* = U \circ H$$

定理 3.8.7 より $U^{**} = {U^*}^{-1}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$U^* = U^{***} = {{U^*}^{-1}}^* = {U^{-1}}^{**} = U^{-1}$$

再び定理 3.8.7 よりその線形写像 U も等長変換である. よって, ある Hermite 変換 H と等長変換 U が存在して, その Hermite 変換 H から誘導される Hermite 双線形形式が正値で $f = U \circ H$ が成り立つ. □

3.11.3 特異値分解

定理 3.11.8 (特異値分解)**.** 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, 任意の線形写像 $f:V\rightarrow V$ に対し, ある等長写像たち $S:K^n\rightarrow V$, $T:K^n\rightarrow V$ が存在して, 線形写像 $S^{-1}\circ f\circ T:K^n\rightarrow K^n$ に対応する行列が対角成分が非負実数の対角行列となる.

この定理をその線形写像 f の特異値分解という.

証明. 体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $(V,\varPhi)$ が与えられたとき, 任意の線形写像 $f:V\rightarrow V$ に対し, 定理 3.11.6, 即ち, 左極分解よりある Hermite 変換 H と等長変換 U が存在して, その Hermite 変換 H から誘導される Hermite 双線形形式が正値で $f=H\circ U$ が成り立つ. このとき, $H=f\circ U^*$ が成り立ち, 定理 3.8.13 よりこの Hermite 変換 H は正規変換であるので, 定理 3.9.4, 即ち, Toeplitz の定理よりある正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在して, これに関するその Hermite 変換 H の表現行列 $[H]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ が対角行列となる. このとき, 定理 2.2.12 よりその対角行列 $[H]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ の対角成分 λ_i がその Hermite 変換 H の固有値であり定理 3.10.4 よりいづれも非負実数となる. そこで, 次式が成り立つことから,

$$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ H\circ\varphi_{\mathcal{B}}=\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ f\circ U^*\circ\varphi_{\mathcal{B}}$$

$S=\varphi_{\mathcal{B}}$, $T=U^*\circ\varphi_{\mathcal{B}}$ とおかれれば, これらは線形同型写像でその線形写像 $S^{-1}\circ f\circ T:K^n\rightarrow K^n$ に対応する行列がその行列 $[H]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ であり対角成分が非負実数の対角行列となる.

そこで, 標準内積空間 $(\mathbb{C}^n,\langle\bullet|\bullet\rangle)$ について, その基底 $\mathcal{B}$ に関するその内積 $\varPhi$ の表現行列が単位行列となっていることに注意すれば, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 定理 3.4.8, 定理 3.8.7 より次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varPhi\left(S\left(\mathbf{v}\right),S\left(\mathbf{w}\right)\right)&=\varPhi\left(\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{v}\right),\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&={}^t\,\overline{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{v}\right)\right)}[\varPhi]_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&={}^t\,\overline{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{v}\right)}I_n\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{w}\right)\\
&={}^t\,\overline{\mathbf{v}}\mathbf{w}=\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle\\
\varPhi\left(T\left(\mathbf{v}\right),T\left(\mathbf{w}\right)\right)&=\varPhi\left(U^*\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{v}\right),U^*\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&=\varPhi\left(\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{v}\right),U^{**}\circ U^*\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&=\varPhi\left(\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{v}\right),U\circ U^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&=\varPhi\left(\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{v}\right),\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&={}^t\,\overline{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{v}\right)\right)}[\varPhi]_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{w}\right)\right)\\
&={}^t\,\overline{\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{v}\right)}I_n\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{B}}\left(\mathbf{w}\right)\\
&={}^t\,\overline{\mathbf{v}}\mathbf{w}=\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle
\end{aligned}$$

これらの線形同型写像たち S, T は等長写像である. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p396-398 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 日野正訓. "解析学 I(Lebesgue 積分論)". 京都大学. `https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~hino/jugyoufile/AnalysisI210710.pdf` (2022-4-4 4:05 取得)

[3] 小川朋宏. "量子情報数理特論 (第 8 回) 部分トレース，極分解，特異値分解". 電気通信大学. http://www.quest.lab.uec.ac.jp/ogawa/qmath2020/qmath20200701.pdf (2022-4-10 4:55 取得)
[4] 理数アラカルト. "行列の極分解". 理数アラカルト. https://risalc.info/src/polar-decomposition.html (2022-4-10 4:56 閲覧)

第 4 部　tensor 空間論

ここからは, tensor 空間について述べていこう．これは与えられた vector 空間から新たな vector 空間を作り出す方法のうち最も基本的なものである tensor 積から得られる vector 空間である．これの下準備として商 vector 空間や双対空間を導入し自然な線形同型という概念を用いて tensor 積を議論し, 最後に, これの応用として対称化作用素, 交代化作用素や対称代数, 外積代数も触れることにしよう．集合に関する概念がいくらか出てくるため, 集合論に関する知識はある程度仮定したものの, norm 空間や内積空間で仮定した実数や複素数, 距離空間論の知識は仮定しておかないようにしておいた.

4.1　商 vector 空間

4.1.1　商 vector 空間

定義 4.1.1. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W$ が成り立つことを $\mathbf{v} \equiv \mathbf{w} \bmod W$ と書くことにする.

定理 4.1.1. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 上記の関係 $\equiv \bmod W$ は同値関係である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} \in W$ が成り立つので, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v} \bmod W$ が成り立つ．$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ に対し, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{w} \bmod W$ が成り立つなら, $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W$ が成り立ち, したがって, $\mathbf{w} - \mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{w} = -(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in W$ が成り立つので, $\mathbf{w} \equiv \mathbf{v} \bmod W$ が成り立つ. 最後に, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} \bmod W$ かつ $\mathbf{v} \equiv \mathbf{w} \bmod W$ が成り立つなら, $\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \in W$ が成り立つので, $\mathbf{u} - \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v} - \mathbf{w} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in W$ が成り立つ．したがって, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{w} \bmod W$ が成り立つ．以上より, その関係 $\equiv \bmod W$ は同値関係である. □

定理 4.1.2. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall k, l \in K$ に対し, $k \neq 0$ または $l \neq 0$ が成り立つなら, $kW + lW = W$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ に対し, $k \neq 0$ または $l \neq 0$ が成り立つなら, $k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \in kW + lW$ が成り立ち, これより明らかに, $k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \in W$ も成り立つので, $kW + lW \subseteq W$ が成り立つ．一方で, $\forall \mathbf{v} \in W$ に対し, $k \neq 0$ としても一般性は失われなく, このとき, $\dfrac{1}{k}\mathbf{v} \in W$ が成り立つので, $\mathbf{v} = k\dfrac{1}{k}\mathbf{v} + l\mathbf{0} \in kW + lW$ が成り立つ．以上より, $kW + lW = W$ が成り立つ. □

定理 4.1.3. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 上記の議論により商集合 $V/\equiv \bmod W$ が定義される．このとき, $\forall C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v}) \in V/\equiv \bmod W$ に対し, $C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + W$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 上記の議論により商集合 $V/\equiv \bmod W$ が定義される．このとき, $\forall C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v}) \in V/\equiv \bmod W \forall \mathbf{w} \in C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v})$ に対し, $\mathbf{v} \equiv$

$\mathbf{w}\ \mathrm{mod}W$ が成り立つので, $\mathbf{v}-\mathbf{w}\in W$ が成り立つ. ここで, $-\mathbf{u}=\mathbf{v}-\mathbf{w}$ とおかれると, $\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ が成り立つかつ, $\mathbf{u},-\mathbf{u}\in W$ が成り立つので, $\mathbf{w}\in\mathbf{v}+W$ が成り立つ. 逆に, $\forall\mathbf{v}+\mathbf{w}\in\mathbf{v}+W$ に対し, $\mathbf{w}\in W$ が成り立つので, $\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{w}-\mathbf{v}=(\mathbf{v}+\mathbf{w})-\mathbf{v}\in W$ となり, したがって, $\mathbf{v}+\mathbf{w}\equiv\mathbf{v}\ \mathrm{mod}W$ が成り立ち, これにより, $\mathbf{v}+\mathbf{w}\in C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{v})$ が成り立つ. 以上より, $C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{v})=\mathbf{v}+W$ が成り立つ. □

定理 4.1.4. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $W=C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{0})\in V/\equiv\ \mathrm{mod}W$ が成り立つ.

証明. $W=\mathbf{0}+W$ が成り立つことによる. □

定理 4.1.5. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, $\mathbf{v}\equiv\mathbf{w}\ \mathrm{mod}W$ が成り立つなら, $\mathbf{v}+W=\mathbf{w}+W$ が成り立ち, そうでないなら, $\mathbf{v}+W\cap\mathbf{w}+W=\emptyset$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, $\mathbf{v}\equiv\mathbf{w}\ \mathrm{mod}W$ が成り立つなら, $\mathbf{v}\in C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{w})=\mathbf{w}+W$ が成り立つので, $\forall\mathbf{v}+\mathbf{u}\in\mathbf{v}+W$ に対し, あるその部分 vector 空間 W の元 $\mathbf{u}'$ が存在して $\mathbf{v}=\mathbf{w}+\mathbf{u}'$ が成り立ち, したがって, $\mathbf{v}+\mathbf{u}=\mathbf{w}+(\mathbf{u}'+\mathbf{u})\in\mathbf{w}+W$ が成り立つ. ゆえに, $\mathbf{v}+W\subseteq\mathbf{w}+W$ が成り立つ. 同様にして, $\mathbf{v}+W\supseteq\mathbf{w}+W$ が成り立つので, $\mathbf{v}+W=\mathbf{w}+W$ が成り立つ.

$\mathbf{v}+W\cap\mathbf{w}+W\neq\emptyset$ が成り立つなら, $\mathbf{u}\in\mathbf{v}+W\cap\mathbf{w}+W$ なるその集合 $\mathbf{v}+W\cap\mathbf{w}+W$ の元 $\mathbf{u}$ が存在して, $\exists\mathbf{u}',\mathbf{u}''\in W$ に対し, $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{u}'=\mathbf{w}+\mathbf{u}''$ が成り立つので, $\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{w}\in W$ が成り立つ. このとき, $\mathbf{u}\equiv\mathbf{v}\ \mathrm{mod}W$ かつ $\mathbf{u}\equiv\mathbf{w}\ \mathrm{mod}W$ が成り立つので, $\mathbf{v}\equiv\mathbf{w}\ \mathrm{mod}W$ が成り立つ. 対偶律より $\mathbf{v}\equiv\mathbf{w}\ \mathrm{mod}W$ が成り立たないなら, $\mathbf{v}+W\cap\mathbf{w}+W=\emptyset$ が成り立つ. □

定理 4.1.6. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 上記の議論により商集合 $V/\equiv\ \mathrm{mod}W$ が定義される. このとき, $\forall k\in K\forall C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{v})\in V/\equiv\ \mathrm{mod}W$ に対し, 次式のように定義されると,

$$kC_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{v})=C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(k\mathbf{v})$$

その集合 $V/\equiv\ \mathrm{mod}W$ は体 K 上の vector 空間をなす.

定義 4.1.2. このようにして構成された vector 空間 $V/\equiv\ \mathrm{mod}W$ をその vector 空間 V のその部分 vector 空間 W による商 vector 空間, 商線形空間, 商空間といい, V/W と書く.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 上記の議論により商集合 $V/\equiv\ \mathrm{mod}W$ が定義される. このとき, $\forall k\in K\forall C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{v})\in V/\equiv\ \mathrm{mod}W$ に対し, 次式のように定義されると,

$$kC_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{v})=C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(k\mathbf{v})$$

$\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}(C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{u})+C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{v}))+C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{w})&=(\mathbf{u}+W+\mathbf{v}+W)+\mathbf{w}+W\\&=\mathbf{u}+W+(\mathbf{v}+W+\mathbf{w}+W)\\&=C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{u})+(C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{v})+C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{w}))\\C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{v})+C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{0})&=\mathbf{v}+W+\mathbf{0}+W=\mathbf{v}+W+W\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{v}+W = C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v})\\
C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v})+C_{\equiv \bmod W}(-\mathbf{v}) &= \mathbf{v}+W-\mathbf{v}+W = \mathbf{v}-\mathbf{v}+W+W\\
&= \mathbf{0}+W = C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{0})\\
C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v})+C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{w}) &= \mathbf{v}+W+\mathbf{w}+W\\
&= \mathbf{w}+W+\mathbf{v}+W\\
&= C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{w})+C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

その組 $(V/\equiv \ \bmod W,+)$ は可換群をなす.

このとき, $\forall k,l\in K$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
k\left(C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v})+C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{w})\right) &= k(\mathbf{v}+W+\mathbf{w}+W)\\
&= k(\mathbf{v}+\mathbf{w}+W)\\
&= kC_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v}+\mathbf{w})\\
&= C_{\equiv \bmod W}(k(\mathbf{v}+\mathbf{w}))\\
&= C_{\equiv \bmod W}(k\mathbf{v}+k\mathbf{w})\\
&= k\mathbf{v}+k\mathbf{w}+W\\
&= k\mathbf{v}+W+k\mathbf{w}+W\\
&= C_{\equiv \bmod W}(k\mathbf{v})+C_{\equiv \bmod W}(k\mathbf{w})\\
&= kC_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v})+kC_{\equiv \bmod W}(\mathbf{w})\\
(k+l)C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v}) &= C_{\equiv \bmod W}((k+l)\mathbf{v})\\
&= C_{\equiv \bmod W}(k\mathbf{v}+l\mathbf{v})\\
&= k\mathbf{v}+l\mathbf{v}+W\\
&= k\mathbf{v}+W+l\mathbf{v}+W\\
&= C_{\equiv \bmod W}(k\mathbf{v})+C_{\equiv \bmod W}(l\mathbf{v})\\
&= kC_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v})+lC_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v})\\
(kl)C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v}) &= C_{\equiv \bmod W}((kl)\mathbf{v})\\
&= C_{\equiv \bmod W}(k(l\mathbf{v}))\\
&= kC_{\equiv \bmod W}(l\mathbf{v})\\
1C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v}) &= C_{\equiv \bmod W}(1\mathbf{v})\\
&= C_{\equiv \bmod W}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

その集合 $V/\equiv \ \bmod W$ は体 K 上の vector 空間をなす. □

定理 4.1.7. 体 K 上の有限次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, これの基底が $\langle \mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_r}$ とおかれれば, 次のことは同値である.

- $i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_r$ なる vectors$\mathbf{v}_i+W$ が線形独立である.
- $i\in\Lambda_n$ なる vectors$\mathbf{v}_i$ が線形独立である.

証明. 体 K 上の有限次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, これの基底が $\langle \mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_r}$ とおかれれば, $i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_r$ なる vectors$\mathbf{v}_i+W$ が線形独立であるなら, $\displaystyle\sum_{i\in\Lambda_n} c_i\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$ とおくと, 次のようになるので,

$$\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_r} c_i\mathbf{v}_i-\mathbf{0}=\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_r} c_i\mathbf{v}_i$$

$$= -\sum_{i \in \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i \in W$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} c_i (\mathbf{v}_i + W) &= \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i + W\\ &= \mathbf{0} + W = W\end{aligned}$$

ゆえに, $\forall i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ. このとき, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}\sum_{i \in \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i &= \sum_{i \in \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i - \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i\\ &= \sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i - \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} 0 \mathbf{v}_i\\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

それらの vectors$\mathbf{v}_i$ が線形独立であることにより $\forall i \in \Lambda_r$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ. 以上の議論により, $i \in \Lambda_n$ なる vectors$\mathbf{v}_i$ が線形独立である.

逆に, $i \in \Lambda_n$ なる vectors$\mathbf{v}_i$ が線形独立であるなら, $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} c_i (\mathbf{v}_i + W) = W$ のとき, 次のようになることから,

$$\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i + W = \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} c_i (\mathbf{v}_i + W) = W$$

$\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i = \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i - \mathbf{0} \in W$ が成り立つ. ゆえに, $\sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i = \sum_{i \in \Lambda_r} (-c_i) \mathbf{v}_i$ とおくことができて, 次式が得られる.

$$\sum_{i \in \Lambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \sum_{i \in \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i + \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

そこで, 仮定より $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が得られるので, 特に, $\forall i \in \Lambda_r$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ. よって, $i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r$ なる vectors$\mathbf{v}_i + W$ が線形独立である. □

定理 4.1.8. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 次式のような写像 φ は全射な線形写像である.

$$\varphi : V \rightarrow V/W; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + W$$

定義 4.1.3. 上記のような線形写像 φ をその vector 空間 V からその部分 vector 空間 W によるその商 vector 空間 V/W への自然な全射線形写像という.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 次式のような写像 φ について,

$$\varphi : V \rightarrow V/W; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + W$$

$\forall \mathbf{v} + W \in V/W$ に対し, 定義よりその vector 空間 V の元 $\mathbf{v}$ が存在して $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + W$ が成り立つので, その写像 φ は全射である.

このとき, $\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}\varphi\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}\right) &= \left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}\right) + W\\ &= k\mathbf{v} + W + l\mathbf{w} + W\\ &= k\left(\mathbf{v} + W\right) + l\left(\mathbf{w} + W\right)\\ &= k\varphi\left(\mathbf{v}\right) + l\varphi\left(\mathbf{w}\right)\end{aligned}$$

その写像 φ は全射な線形写像である. □

定理 4.1.9. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, その vector 空間 V からその部分 vector 空間 W によるその商 vector 空間 V/W への自然な全射線形写像 φ の核 $\ker\varphi$ について, $\ker\varphi = W$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, その vector 空間 V からその部分 vector 空間 W によるその商 vector 空間 V/W への自然な全射線形写像 φ の核 $\ker\varphi$ について, $\forall\mathbf{v} \in \ker\varphi$ に対し, $\varphi\left(\mathbf{v}\right) = \mathbf{v} + W = W$ が成り立つので, $\mathbf{v} \in W$ が成り立つ. 逆に, $\forall\mathbf{v} \in W$ に対し, $\varphi\left(\mathbf{v}\right) = \mathbf{v} + W = W$ が成り立つので, $\mathbf{v} \in \ker\varphi$ が成り立つ. よって, $\ker\varphi = W$ が成り立つ. □

定理 4.1.10. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\dim V/W = \dim V - \dim W$$

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, その vector 空間 V からその部分 vector 空間 W によるその商 vector 空間 V/W への自然な全射線形写像 φ について次元公式より次式が成り立つ.

$$\dim V = \mathrm{rank}\varphi + \mathrm{nullity}\varphi = \dim V(\varphi) + \dim\ker\varphi$$

ここで, $V(\varphi) = V/W$ が成り立つかつ, 定理 4.1.9 より次式が成り立つ.

$$\dim V/W = \dim V - \dim W$$

□

定理 4.1.11 (線形的な意味での準同型定理)**.** 体 K 上の 2 つの vector 空間たち V, W の間の線形写像 $f : V \to W$ が与えられたとき, 次式のような写像 g は線形同型写像である.

$$g : V/\ker f \to V(f); \mathbf{v} + \ker f \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)$$

この定理を線形的な意味での準同型定理ということにする.

証明. 体 K 上の 2 つの vector 空間たち V, W の間の線形写像 $f : V \to W$ が与えられたとき, 次式のような写像 g について,

$$g : V/\ker f \to V(f); \mathbf{v} + \ker f \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)$$

$\forall k, l \in K \forall\mathbf{v} + \ker f, \mathbf{w} + \ker f \in V/\ker f$ に対し, 次のようになるので,

$$g\left(k\left(\mathbf{v} + \ker f\right) + l\left(\mathbf{w} + \ker f\right)\right) = g\left(k\mathbf{v} + \ker f + l\mathbf{w} + \ker f\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= g\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w} + \ker f\right) \\
&= f\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}\right) \\
&= kf\left(\mathbf{v}\right) + lf\left(\mathbf{w}\right) \\
&= kg\left(\mathbf{v} + \ker f\right) + lg\left(\mathbf{w} + \ker f\right)
\end{aligned}
$$

その写像 g は線形的である．ここで，$\forall f\left(\mathbf{v}\right) \in V(f)$ に対し，その vector 空間 V の元 $\mathbf{v}$ が存在して，これのその vector 空間 V からその部分 vector 空間 W によるその商 vector 空間 V/W への自然な全射線形写像 φ による像が $\mathbf{v} + W$ であるから，確かにその線形写像 g は全射である．このとき，定理 1.2.15 よりその線形写像 g は線形同型写像でもある． □

参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p52-59 ISBN978-4-00-029871-1

[2] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 1976. 新装版第 1 刷 p182-191 ISBN978-4-00-029873-5

[3] 池田岳, テンソル代数と表現論, 東京大学出版会, 2022. 第 2 刷 p25-33 ISBN978-4-13-062929-4

4.2 双対空間

4.2.1 線形写像の主な定理たち

双対空間が述べられる前に代表的な定理が先に挙げておかれよう.

定理 (定理 1.2.3 の再掲)**.** 体 K 上の vector 空間 U, V, W が与えられたとき, 2 つの線形写像 $f:U\rightarrow V$, $g:V\rightarrow W$ において, その合成写像 $g\circ f:U\rightarrow W$ もその体 K 上で線形的である.

定理 (定理 1.2.6 の再掲)**.** 体 K 上の $\dim V=n$ なる 2 つの任意の vector 空間たち V, W に対し, 次のことが成り立つ.

- $V\cong W$ が成り立つなら, ある線形同型写像 $f:V\overset{\sim}{\rightarrow}W$ が存在して, その vector 空間 V の基底 $\left\langle \mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ を用いた組 $\left\langle f\left(\mathbf{v}_i\right)\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ がその vector 空間 W の基底をなし, さらに, $\dim V=\dim W$ が成り立つ.
- $\dim V=\dim W$ が成り立つなら, それらの vector 空間たち V, W の基底たち $\left\langle \mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$, $\left\langle \mathbf{w}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ を用いて, $\forall i\in\varLambda_n$ に対し, $f\left(\mathbf{v}_i\right)=\mathbf{w}_i$ なる線形写像 $f:V\rightarrow W$ が定義されれば, その線形写像 f は線形同型写像で, さらに, $V\cong W$ が成り立つ.

これにより, 体 K 上の任意の n 次元の vector 空間 V において $V\cong K^n$ が成り立つので, その体 K 上の任意の m 次元の vector 空間 V から任意の n 次元 vector 空間 W への任意の線形写像 $f:V\rightarrow W$ は全て線形写像 $f':K^m\rightarrow K^n$ へ帰着できる.

定義 (定義 1.2.3 の再掲)**.** 体 K 上の任意の 2 つの vector 空間 V, W が与えられたとき, その vector 空間 V からその vector 空間 W への線形写像全体の集合を $L(V,W)$ とおき, ここで, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v}\in V\forall f,g\in L(V,W)$ に対し, 次のように定義する.

$$(kf+lg)\left(\mathbf{v}\right)=kf\left(\mathbf{v}\right)+lg\left(\mathbf{v}\right)$$

定理 (定理 1.2.7 の再掲)**.** 体 K 上の任意の 2 つの vector 空間 V, W が与えられたとき, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v}\in V\forall f,g\in L(V,W)$ に対し, 写像 $kf+lg$ は線形的である.

定理 (定理 1.2.8 の再掲)**.** 体 K 上の任意の 2 つの vector 空間 V, W が与えられたとき, その集合 $L(V,W)$ はその体 K 上の vector 空間である.

定理 (定理 1.2.9 の再掲)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\dim L(V,W)=mn$ が成り立つ.

さらにいえば, これらの vector 空間たち V, W の基底として $\left\langle \mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\left\langle \mathbf{w}_j\right\rangle_{j\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, 組 $\left\langle \varphi_{ij}:V\rightarrow W;\sum_{i'\in\varLambda_m}k_{i'}\mathbf{v}_{i'}\mapsto k_i\mathbf{w}_j\right\rangle_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ がその vector 空間 $L(V,W)$ の基底をなす.

定理 (定理 1.2.10 の再掲)**.** 体 K 上の 3 つの vector 空間たち U, V, W が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- $\forall f,g\in L(U,V)\forall h\in L(V,W)$ に対し, $h\circ(f+g)=h\circ f+h\circ g$ が成り立つ.

- $\forall f \in L(U,V)\forall g,h \in L(V,W)$ に対し, $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$ が成り立つ.
- $\forall k \in K\forall f \in L(U,V)\forall g \in L(V,W)$ に対し, $g \circ (kf) = (kg) \circ f = k(g \circ f)$ が成り立つ.
- $\exists I_V \in L(V,V)\exists I_W \in L(W,W)\forall f \in L(V,W)$ に対し, $I_W \circ f = f \circ I_V = f$ が成り立つ.

これにより, 写像の乗法 $\cdot$ を写像の合成 $\circ$ とするとき, 集合 $L(V,V)$ は環をなす.

定理 (定理 1.2.12 の再掲)**.** 体 K 上の 2 つの vector 空間 V, W を用いて線形写像 $f : V \to W$ が与えられたとき, その写像 f が単射であるならそのときに限り, $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.

定理 (定理 1.5.16 の再掲)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つをそれぞれ α, β とし, それらの基底たち α,β に関する線形写像 $f : V \to W$ の $[f]_\alpha^\beta \in \mathrm{M}(n,n,K)$ なる表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ を用いて写像 $F_{\alpha\to\beta}$ が次式のように定義されれば,

$$F_{\alpha\to\beta} : L(V,W) \to \mathrm{M}(n,n,K); f \mapsto [f]_\alpha^\beta$$

$\forall f \in L(V,W)$ に対し, 次のことは同値である.

- その写像 f は線形同型写像である.
- その写像 f は全射 $f : V \twoheadrightarrow W$ である.
- その写像 f は単射 $f : V \rightarrowtail W$ である.
- $n = \mathrm{rank} f = \dim V(f)$ が成り立つ.
- $\mathrm{nullity} f = \dim\ker f = 0$ が成り立つ.
- それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f : V \to W$ の表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ は正則行列である, 即ち, $[f]_\alpha^\beta \in \mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.
- その行列 $F_{\alpha\to\beta}(f)$ は正則行列である, 即ち, $F_{\alpha\to\beta}(f) \in \mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.

このとき, 次式が成り立つ.

$$f^{-1} = F_{\beta\to\alpha}^{-1}\left(F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}\right) : W \to V,$$
$$\left[f^{-1}\right]_\alpha^\beta = [f]_\alpha^{\beta\,-1}, \quad F_{\beta\to\alpha}\left(f^{-1}\right) = F_{\alpha\to\beta}(f)^{-1}$$

4.2.2 線形環

定義 4.2.1. 体 K 上の vector 空間 A が与えられたとき, 積 $\cdot : A \times A \to A; (\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \mathbf{vw}$ が定義されていてその集合 A が環をなすかつ, $\forall k \in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in A$ に対し, 次式が成り立つとき,

$$(k\mathbf{v})\,\mathbf{w} = \mathbf{v}\,(k\mathbf{w}) = k\,(\mathbf{vw})$$

その vector 空間 A をその体 K 上の線形環, 多元環, 代数などという.

定義 4.2.2. 体 K 上の線形環 A が与えられたとき, 線形写像 $D : A \to A$ のうち $\forall\mathbf{v},\mathbf{w} \in A$ に対し, 次式が成り立つようなものを微分作用素といいこれ全体の集合を $\mathrm{Der}\,(A)$ と書くことにする.

$$D\,(\mathbf{vw}) = D\,(\mathbf{v})\,\mathbf{w} + \mathbf{v}D\,(\mathbf{w})$$

定理 4.2.1. 体 K 上の vector 空間 V における線形写像 $f : V \to V$ 全体の集合 $L(V,V)$ は写像の合成 $\circ$ を積とすれば, その集合 $L(V,V)$ はその体 K 上の線形環である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V における線形写像 $f:V\rightarrow V$ 全体の集合 $L(V,V)$ は写像の合成 $\circ$ を積とすれば, 定理 1.2.8 よりその集合 $L(V,V)$ はその体 K 上の vector 空間であり, さらに, 定理 1.2.10 よりその集合 $L(V,V)$ は環でもある. ここで, $\forall k\in K\forall f,g\in L(V,V)\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}(kf)g\left(\mathbf{v}\right)&=(kf)\circ g\left(\mathbf{v}\right)\\&=kf\left(g\left(\mathbf{v}\right)\right)\\&=f\left(kg\left(\mathbf{v}\right)\right)\\&=f\circ(kg)\left(\mathbf{v}\right)\\&=f(kg)\left(\mathbf{v}\right)\\(kf)g\left(\mathbf{v}\right)&=(kf)\circ g\left(\mathbf{v}\right)\\&=kf\left(g\left(\mathbf{v}\right)\right)\\&=k(f\circ g)\left(\mathbf{v}\right)\\&=k(fg)\left(\mathbf{v}\right)\end{aligned}$$

$(kf)g=f(kg)=k(fg)$ が成り立つ. よって, その集合 $L(V,V)$ はその体 K 上の線形環である. □

4.2.3 双対空間

定義 4.2.3. 体 K 上の vector 空間 V における線形写像 $f:V\rightarrow K$ 全体の集合 $L(V,K)$, 即ち, 線形形式全体の集合をその vector 空間 V の双対空間といい V^{*} と書き, これの元を線形形式, 線形汎関数, 共変 vector, 余 vector, 1 次形式などという.

定理 4.2.2. 体 K 上の vector 空間 V の双対空間 V^{*} はその体 K 上の vector 空間である.

証明. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, その体 K 自身もその体 K 上の vector 空間であるから, 定理 1.2.8 よりその vector 空間 V の双対空間 V^{*} もその体 K 上の vector 空間である. □

定理 4.2.3. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\left\langle\mathbf{v}_{i}\right\rangle_{i\in\Lambda_{n}}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{a}\in K^{n}\forall i\in\Lambda_{n}$ に対し, $\mathbf{a}=\left(a_{i}\right)_{i\in\Lambda_{n}}$ とおくと, $\lambda_{\mathbf{a}}\left(\mathbf{v}_{i}\right)=a_{i}$ なる線形形式 $\lambda_{\mathbf{a}}:V\rightarrow K$ について, 次式のような写像 $\varPhi$ は線形同型写像である.

$$\varPhi:K^{n}\rightarrow V^{*};\mathbf{a}\mapsto\lambda_{\mathbf{a}}$$

定義 4.2.4. 定理 4.2.3 のような線形同型写像 $\varPhi$ を, ここでは, その vector 空間 V の基底 $\left\langle\mathbf{v}_{i}\right\rangle_{i\in\Lambda_{n}}$ から誘導される線形同型写像ということにする.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\left\langle\mathbf{v}_{i}\right\rangle_{i\in\Lambda_{n}}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{a}\in K^{n}\forall i\in\Lambda_{n}$ に対し, $\lambda_{\mathbf{a}}\left(\mathbf{v}_{i}\right)=a_{i}$ なる線形形式 $\lambda_{\mathbf{a}}:V\rightarrow K$ について, 次式のような写像 $\varPhi$ について,

$$\varPhi:K^{n}\rightarrow V^{*};\mathbf{a}\mapsto\lambda_{\mathbf{a}}$$

$\forall k,l\in K\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in K^{n}$ に対し, $\mathbf{a}=\left(a_{i}\right)_{i\in\Lambda_{n}}$, $\mathbf{b}=\left(b_{i}\right)_{i\in\Lambda_{n}}$ とおくと, 次のようになり,

$$\varPhi\left(k\mathbf{a}+l\mathbf{b}\right)=\lambda_{k\mathbf{a}+l\mathbf{b}}$$

ここで, $\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ とおかれると, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\lambda_{k\mathbf{a}+l\mathbf{b}}\left(\mathbf{v}\right) &= \lambda_{k\mathbf{a}+l\mathbf{b}}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \lambda_{k\mathbf{a}+l\mathbf{b}}\left(\mathbf{v}_i\right)\\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \left(ka_i + lb_i\right)\\
&= k\sum_{i \in \varLambda_n} k_i a_i + l\sum_{i \in \varLambda_n} k_i b_i\\
&= k\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \lambda_{\mathbf{a}}\left(\mathbf{v}_i\right) + l\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \lambda_{\mathbf{b}}\left(\mathbf{v}_i\right)\\
&= k\lambda_{\mathbf{a}}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i\right) + l\lambda_{\mathbf{b}}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i\right)\\
&= k\lambda_{\mathbf{a}}\left(\mathbf{v}\right) + l\lambda_{\mathbf{b}}\left(\mathbf{v}\right)\\
&= \left(k\lambda_{\mathbf{a}} + l\lambda_{\mathbf{b}}\right)\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varPhi\left(k\mathbf{a}+l\mathbf{b}\right) &= \lambda_{k\mathbf{a}+l\mathbf{b}}\\
&= k\lambda_{\mathbf{a}} + l\lambda_{\mathbf{b}}\\
&= k\varPhi\left(\mathbf{a}\right) + l\varPhi\left(\mathbf{b}\right)
\end{aligned}$$

以上より, その写像 $\varPhi$ は線形写像である.

ここで, $\forall\mathbf{a},\mathbf{b} \in K^n$ に対し, $\mathbf{a} = \left(a_i\right)_{i \in \varLambda_n}$, $\mathbf{b} = \left(b_i\right)_{i \in \varLambda_n}$ とおくとき, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ が成り立つなら, $\exists i \in \varLambda_n$ に対し, $a_i \neq b_i$ が成り立つ. ここで, このような添数 i を i' とおくと, 次のようになる.

$$\varPhi\left(\mathbf{a}\right)\left(\mathbf{v}_{i'}\right) = \lambda_{\mathbf{a}}\left(\mathbf{v}_{i'}\right) = a_{i'} \neq b_{i'} = \lambda_{\mathbf{b}}\left(\mathbf{v}_{i'}\right) = \varPhi\left(\mathbf{b}\right)\left(\mathbf{v}_{i'}\right)$$

これにより, $\varPhi\left(\mathbf{a}\right) \neq \varPhi\left(\mathbf{b}\right)$ が成り立つので, その写像 $\varPhi$ は単射である. よって, 定理 1.5.16 よりその写像 $\varPhi$ は線形同型写像となる. □

定理 4.2.4. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* が与えられたとき, $\dim V^* = \dim V = n$ が成り立つかつ, $V \cong V^* \cong K^n$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* が与えられたとき, 定理 4.2.3 より $V^* \cong K^n$ が成り立つかつ, 定理 1.2.6 より $\dim V = n = \dim K^n$ が成り立つので, 定理 1.2.6 より $\dim V^* = \dim V = n$ が成り立つかつ, $V \cong V^* \cong K^n$ が成り立つ. □

定理 4.2.5. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* が与えられたとき, vector 空間 K^n の標準直交基底 $\left\langle \mathbf{e}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ のその vector 空間 V の基底 $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ から誘導される線形同型写像 $\varPhi$ による像 $\varPhi\left(\mathbf{e}_i\right) = \phi_i : V \rightarrow K$ の組 $\left\langle \phi_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその双対空間 V^* の基底となる.

定義 4.2.5. このような体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* のその vector 空間 V の基底 $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ から誘導される線形同型写像 $\varPhi$ による像 $\phi_i : V \rightarrow K$ からなる基底 $\left\langle \phi_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ をその基底 $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ の双対基底という.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* が与えられたとき, vector 空間 K^n の標準直交基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ のその vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ から誘導される線形同型写像 $\varPhi$ による像 $\varPhi(\mathbf{e}_i) = \phi_i : V \to K$ の組 $\langle \phi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ について, 定理 4.2.3 より $\forall f \in V^* \exists \mathbf{a} \in K^n$ に対し, $\varPhi(\mathbf{a}) = f$ が成り立つ. ここで, $\mathbf{a} = \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{e}_i$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned} f &= \varPhi(\mathbf{a}) \\ &= \varPhi\left(\sum_{i \in \varLambda_n} a_i \mathbf{e}_i \right) \\ &= \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \varPhi(\mathbf{e}_i) \\ &= \sum_{i \in \varLambda_n} a_i \phi_i \end{aligned}$$

その双対空間 V^* は $i \in \varLambda_n$ なる vectorsϕ_i から生成される.

ここで, $0 = \sum_{i \in \varLambda_n} c_i \phi_i \in V^*$ について, 定理 4.2.3 より逆写像 $\varPhi^{-1} : V^* \to K^n$ が存在して線形同型写像でもあるので, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \varPhi^{-1}(0) \\ &= \varPhi^{-1}\left(\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \phi_i \right) \\ &= \sum_{i \in \varLambda_n} c_i \varPhi^{-1}(\phi_i) \\ &= \sum_{i \in \varLambda_n} c_i \varPhi^{-1} \circ \varPhi(\mathbf{e}_i) \\ &= \sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

このとき, $i \in \varLambda_n$ なる vectors$\mathbf{e}_i$ は線形独立なので, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が成り立つ. これにより, $i \in \varLambda_n$ なる vectors$\lambda_{\mathbf{e}_i}$ は互いに線形独立である.

以上より, vector 空間 K^n の標準直交基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ のその vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ から誘導される線形同型写像 $\varPhi$ による像 $\phi_i : V \to K$ の組 $\langle \phi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ はその双対空間 V^* の基底となる. □

定理 4.2.6. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* が与えられたとき, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, その vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ の双対基底 $\langle \phi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ をなす vectorϕ_i によるその vector 空間 V の任意の元 $\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ の像は $\phi_i\left(\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i \right) = k_i$ を満たす. 特に, $\forall j \in \varLambda_n$ に対し, $\phi_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* が与えられたとき, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, その vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ の双対基底 $\langle \phi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ をなす vectorϕ_i によるその vector 空間 V の任意の元 $\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ の像について, 定義よりしたがって, 次のようになる.

$$\phi_i\left(\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i' \in \varLambda_n} k_{i'} \phi_i(\mathbf{v}_{i'})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i' \in \varLambda_n \setminus \{i\}} k_{i'} \phi_i \left(\mathbf{v}_{i'} \right) + k_i \phi_i \left(\mathbf{v}_i \right) \\
&= \sum_{i' \in \varLambda_n \setminus \{i\}} k_{i'} \lambda_{\mathbf{e}_i} \left(\mathbf{v}_{i'} \right) + k_i \lambda_{\mathbf{e}_i} \left(\mathbf{v}_i \right) \\
&= \sum_{i' \in \varLambda_n \setminus \{i\}} k_{i'} 0 + k_i 1 = k_i
\end{aligned}$$

特に, $\forall j \in \varLambda_n$ に対し, $\phi_i \left(\mathbf{v}_j \right) = \lambda_{\mathbf{e}_i} \left(\mathbf{v}_j \right) = \delta_{ij}$ が成り立つ. □

定理 4.2.7. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\forall f \in V^*$ に対し, $f(\mathbf{v}) = 0$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つなら, その vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ の双対基底 $\langle \phi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ を用いて $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ とおかれると, $k_i \neq 0$ なる添数 i が存在するので, このような添数を i' とおくと, 次のようになる.

$$\phi_{i'} \left(\mathbf{v} \right) = \phi_{i'} \left(\sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i \right) = k_{i'} \neq 0$$

これにより, $\exists f \in V^*$ に対し, $f(\mathbf{v}) \neq 0$ が成り立つ. 対偶律より, $\forall f \in V^*$ に対し, $f(\mathbf{v}) = 0$ が成り立つなら, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ. 逆に, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall f \in V^*$ に対し, その写像 f は線形的なので, $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{0}) = 0$ が成り立つ. よって, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\forall f \in V^*$ に対し, $f(\mathbf{v}) = 0$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ. □

4.2.4 再双対空間

定義 4.2.6. 体 K 上の vector 空間 V の双対空間 V^* の双対空間 V^{**} をその vector 空間 V の再双対空間という.

定理 4.2.8. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^*, 再双対空間 V^{**} について, $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**} = n$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^*, 再双対空間 V^{**} について, 定理 4.2.4 より $\dim V = \dim V^* = n$ が成り立つかつ, $\dim V^* = \dim V^{**}$ が成り立つので, $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**} = n$ が成り立つ. □

定理 4.2.9. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^*, 再双対空間 V^{**} について, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次式のような写像 $\widehat{\mathbf{v}}$ が定義されるとき,

$$\widehat{\mathbf{v}} : V^* \rightarrow K; f \mapsto f(\mathbf{v})$$

次式のような写像 φ が考えられると,

$$\varphi : V \rightarrow V^{**}; \mathbf{v} \mapsto \widehat{\mathbf{v}}$$

その写像 φ は線形同型写像である[*27].

[*27] この定理によりしばしば $V = V^{**}$ が成り立つものとみなされるときもある. 詳しくは後述する.

定義 4.2.7. このような線形同型写像 φ を再双対空間での自然な線形同型写像, 再双対空間での標準的線形同型写像という[*28].

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^{*}, 再双対空間 V^{**} について, $\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, 次式のような写像 $\widehat{\mathbf{v}}$ が定義されるとき,

$$\widehat{\mathbf{v}} : V^{*} \rightarrow K; f \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)$$

次式のような写像 φ が考えられると,

$$\varphi : V \rightarrow V^{**}; \mathbf{v} \mapsto \widehat{\mathbf{v}}$$

$\forall k, l \in K \forall\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \forall f \in V^{*}$ に対し, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}\right)\left(f\right) &= \widehat{k\mathbf{v} + l\mathbf{w}}(f) \\
&= f\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}\right) \\
&= kf\left(\mathbf{v}\right) + lf\left(\mathbf{w}\right) \\
&= k\widehat{\mathbf{v}}(f) + l\widehat{\mathbf{w}}(f) \\
&= k\varphi\left(\mathbf{v}\right)\left(f\right) + l\varphi\left(\mathbf{w}\right)\left(f\right) \\
&= \left(k\varphi\left(\mathbf{v}\right) + l\varphi\left(\mathbf{w}\right)\right)\left(f\right)
\end{aligned}$$

$\varphi\left(k\mathbf{v} + l\mathbf{w}\right) = k\varphi\left(\mathbf{v}\right) + l\varphi\left(\mathbf{w}\right)$ が成り立つ. ゆえに, その写像 φ は線形的である.

ここで, $\forall f \in V^{*}$ に対し, 次のようになるので,

$$\varphi\left(\mathbf{0}\right)\left(f\right) = \widehat{\mathbf{0}}(f) = f\left(\mathbf{0}\right) = 0$$

$\{\mathbf{0}\} \subseteq \ker\varphi$ が成り立つ. 一方で, $\forall\mathbf{v} \in \ker\varphi$ に対し, $\varphi\left(\mathbf{v}\right) = 0$ が成り立つので, $\forall f \in V^{*}$ に対し, 次のようになる.

$$\varphi\left(\mathbf{v}\right)\left(f\right) = \widehat{\mathbf{v}}(f) = f\left(\mathbf{v}\right) = 0$$

定理 4.2.7 より $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ. これにより, $\{\mathbf{0}\} = \ker\varphi$ が成り立つ. このとき, 定理 1.2.12 よりその線形写像 φ は単射である. ここで, 定理 1.5.16 よりその線形写像 φ は線形同型写像である. □

4.2.5 直交空間

定義 4.2.8. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^{*} について, $\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, $f\left(\mathbf{w}\right) = 0$ なるその線形形式 f 全体の集合をその部分 vector 空間 W の直交空間といい $W^{\perp}$ と書く.

定理 4.2.10. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W について, この部分 vector 空間 W の直交空間 $W^{\perp}$ はその双対空間 V^{*} の部分 vector 空間である.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W について, この部分 vector 空間 W の直交空間 $W^{\perp}$ が与えられたとき, もちろん, $\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, $0\left(\mathbf{w}\right) = 0$ が成り立つので, $0 \in W^{\perp}$ が成り立つ. さらに, $\forall k, l \in K \forall f, g \in W^{\perp} \forall\mathbf{w} \in W$ に対し, 次のようになるので,

$$\left(kf + lg\right)\left(\mathbf{w}\right) = kf\left(\mathbf{w}\right) + lg\left(\mathbf{w}\right) = k0 + l0 = 0$$

[*28] ここでいう自然とはその線形写像が特徴づけられるとき, あらかじめ始終集合となす vector 空間の基底を選んでおく必要がないような意味だと思っていただければいいかと.

$kf+lg \in W^{\perp}$ が成り立つ. 以上, 定理 1.1.9 よりその直交空間 $W^{\perp}$ はその双対空間 V^* の部分 vector 空間である. □

定理 4.2.11. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W について, $U \subseteq W$ が成り立つなら, $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W について, $U \subseteq W$ が成り立つなら, その vector 空間 V の双対空間 V^* を用いて, $\forall f \in V^*$ に対し, $f \in W^{\perp}$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $f(\mathbf{w}) = 0$ が成り立つことになる. そこで, $\forall \mathbf{u} \in U$ に対し, $\mathbf{u} \in U \subseteq W$ が成り立つので, $f(\mathbf{u}) = 0$ が成り立つ. よって, $f \in U^{\perp}$ が成り立つので, $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$ が得られる. □

定理 4.2.12. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $r = \dim W$ としてその vector 空間 W の基底を $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_r}$ とおかれれば, 定理 1.1.22 よりその vector 空間 V の基底として $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおくことができる. この基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ の双対基底 $\langle \phi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ を用いて, $\forall f \in V^*$ に対し, $f = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \phi_i$ とおくと, $f \in W^{\perp}$ が成り立つならそのときに限り, $\forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $f(\mathbf{w}) = 0$ が成り立つ. もちろん, これが成り立つなら, $\forall i \in \Lambda_r$ に対し, $f(\mathbf{v}_i) = 0$ が成り立つ. 逆に, $\mathbf{w} = \sum_{i \in \Lambda_r} l_i \mathbf{v}_i$ とおかれれば, $\forall i \in \Lambda_n$ に対し, $f(\mathbf{v}_i) = 0$ が成り立つなら, 次のようになる.

$$f(\mathbf{w}) = f\left(\sum_{i \in \Lambda_r} l_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i \in \Lambda_r} l_i f(\mathbf{v}_i) = \sum_{i \in \Lambda_r} l_i 0 = 0$$

ゆえに, $\forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $f(\mathbf{w}) = 0$ が成り立つことと, $\forall i \in \Lambda_r$ に対し, $f(\mathbf{v}_i) = 0$ が成り立つことは同値である. そこで, $\forall i \in \Lambda_r$ に対し, $f(\mathbf{v}_i) = 0$ が成り立つならそのときに限り, 次のようになる.

$$f(\mathbf{v}_i) = \left(\sum_{i' \in \Lambda_n} k_{i'} \phi_{i'}\right)(\mathbf{v}_i) = \sum_{i' \in \Lambda_n} k_{i'} \phi_{i'}(\mathbf{v}_i) = k_i \phi_i(\mathbf{v}_i) = k_i = 0$$

これにより, これが成り立つならそのときに限り, 次式が成り立つ.

$$f = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \phi_i = \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} k_i \phi_i + \sum_{i \in \Lambda_r} k_i \phi_i = \sum_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r} k_i \phi_i \in \operatorname{span}\{\phi_i\}_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r}$$

ゆえに, その直交空間 $W^{\perp}$ の基底として $\langle \phi_i \rangle_{i \in \Lambda_n \setminus \Lambda_r}$ があげられるので, $\dim W^{\perp} = n - r$ が得られる. よって, $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$ が成り立つ. □

定理 4.2.13. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, $W^{**} = W^{\perp\perp}$ が成り立つ[*29].

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 定義より $W^{\perp\perp} \subseteq W^{**}$ が成り立つ. あとは, $\dim W^{\perp\perp} = \dim W^{**}$ が成り立つことを示せばよくて, 実際, 定理 4.2.4, 定理 4.2.13 より次

[*29] この定理により定理 4.2.9 と合わせて, $W = W^{**} = W^{\perp\perp}$ が成り立つとみなされるときもある.

のようになる.

$$\begin{aligned}\dim W^{\perp\perp} &= \dim V^* - \dim W^{\perp}\\ &= \dim V^* - (\dim V - \dim W)\\ &= \dim V - \dim V + \dim W\\ &= \dim W\\ &= \dim W^*\\ &= \dim W^{**}\end{aligned}$$

定理 1.1.22 より, よって, $W^{**} = W^{\perp\perp}$ が成り立つ. □

定理 4.2.14. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W が与えられたとき, 次式が成り立つ[*30].

$$(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$$
$$(U^{**} \cap W^{**})^{\perp} = \left(U^{\perp} + W^{\perp}\right)^{**}$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W が与えられたとき, もちろん, $U \subseteq U+W$ が成り立つので, 定理 4.2.11 より $(U+W)^{\perp} \subseteq U^{\perp}$ が成り立つ. 同様にして, $(U+W)^{\perp} \subseteq W^{\perp}$ が得られるので, 次のようになる.

$$(U+W)^{\perp} = (U+W)^{\perp} \cap (U+W)^{\perp} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$$

逆に, $\forall f \in V^*$ に対し, $f \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$ が成り立つなら, $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in W$ として, $\forall \mathbf{u} + \mathbf{w} \in U + W$ に対し, $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{w}) = 0$ が成り立つので, 次のようになる.

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{w}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{w}) = 0 + 0 = 0$$

ゆえに, $f \in (U+W)^{\perp}$ が成り立つので, $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$ が得られる.

また, 上記の議論により, $\left(U^{\perp} + W^{\perp}\right)^{\perp} = U^{\perp\perp} \cap W^{\perp\perp}$ が成り立つので, 定理 4.2.13 より $(U^{**} \cap W^{**})^{\perp} = \left(U^{\perp} + W^{\perp}\right)^{**}$ が得られる. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p52-59 ISBN978-4-00-029871-1

[2] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 1976. 新装版第 1 刷 p182-191 ISBN978-4-00-029873-5

[3] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958. 第 53 版 p193-197 ISBN4-7853-1301-3

[*30] 定理 4.2.13 に従えば, 次式が成り立つとみなされるときもある.

$$(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$$

4.3 双対性を表す内積

4.3.1 形式的な双線形形式

公理 4.3.1. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 写像 $B:V\times W\rightarrow K$ のうち次の性質を満たすものをその vector 空間 V とその vector 空間 W との形式的な双線形形式という.

- $\forall k,l\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, $B\left(k\mathbf{u}+l\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=kB\left(\mathbf{u},\mathbf{w}\right)+lB\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ が成り立つ.
- $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{u},\mathbf{w}\in W$ に対し, $B\left(\mathbf{v},k\mathbf{u}+l\mathbf{w}\right)=kB\left(\mathbf{v},\mathbf{u}\right)+lB\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ が成り立つ.

定義 4.3.2. 体 K 上の vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V とその vector 空間 V との形式的な双線形形式 $B:V\times V\rightarrow K$ のうち次を満たすものを形式的な対称双線形形式という.

- $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$ に対し, $B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=B\left(\mathbf{w},\mathbf{v}\right)$ が成り立つ.

定理 4.3.1. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V と n 次元 vector 空間 W との形式的な双線形形式 $B:V\times W\rightarrow K$ が与えられたとき, その体 K の任意の族々 $\left\{a_{i}\right\}_{i\in\varLambda_{r}}$, $\left\{b_{i}\right\}_{i\in\varLambda_{s}}$, それらの vector 空間たち V, W の任意の族々 $\left\{\mathbf{v}_{i}\right\}_{i\in\varLambda_{r}}$, $\left\{\mathbf{w}_{i}\right\}_{i\in\varLambda_{s}}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$B\left(\sum_{i\in\varLambda_{r}}a_{i}\mathbf{v}_{i},\sum_{i\in\varLambda_{s}}b_{i}\mathbf{w}_{i}\right)=\sum_{(i,j)\in\varLambda_{r}\times\varLambda_{s}}a_{i}b_{j}B\left(\mathbf{v}_{i},\mathbf{w}_{j}\right)$$

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V と n 次元 vector 空間 W との形式的な双線形形式 $B:V\times W\rightarrow K$ が与えられたとき, その体 K の任意の族々 $\left\{a_{i}\right\}_{i\in\varLambda_{r}}$, $\left\{b_{i}\right\}_{i\in\varLambda_{s}}$, それらの vector 空間たち V, W の任意の族々 $\left\{\mathbf{v}_{i}\right\}_{i\in\varLambda_{r}}$, $\left\{\mathbf{w}_{i}\right\}_{i\in\varLambda_{s}}$ に対し, 数学的帰納法により直ちにわかるように次のようになる.

$$\begin{aligned}B\left(\sum_{i\in\varLambda_{r}}a_{i}\mathbf{v}_{i},\sum_{i\in\varLambda_{s}}b_{i}\mathbf{w}_{i}\right)&=\sum_{i\in\varLambda_{r}}a_{i}B\left(\mathbf{v}_{i},\sum_{j\in\varLambda_{s}}b_{j}\mathbf{w}_{j}\right)\\&=\sum_{i\in\varLambda_{r}}\sum_{j\in\varLambda_{s}}a_{i}b_{j}B\left(\mathbf{v}_{i},\mathbf{w}_{j}\right)\\&=\sum_{(i,j)\in\varLambda_{r}\times\varLambda_{s}}a_{i}b_{j}B\left(\mathbf{v}_{i},\mathbf{w}_{j}\right)\end{aligned}$$

□

定理 4.3.2. 体 K 上の vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式たち $B:V\times W\rightarrow K$, $C:V\times W\rightarrow K$ が与えられたとき, $\forall a,b\in K$ に対し, 写像 $aB+bC:V\times W\rightarrow K$ もそれらの vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式である.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式たち $B:V\times W\rightarrow K$, $C:V\times W\rightarrow K$ が与えられたとき, $\forall a,b\in K$ に対し, 写像 $aB+bC:V\times W\rightarrow K$ について, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\left(aB+bC\right)\left(k\mathbf{u}+l\mathbf{v},\mathbf{w}\right)&=aB\left(k\mathbf{u}+l\mathbf{v},\mathbf{w}\right)+bC\left(k\mathbf{u}+l\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\\&=a\left(kB\left(\mathbf{u},\mathbf{w}\right)+lB\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\right)+b\left(kC\left(\mathbf{u},\mathbf{w}\right)+lC\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= akB(\mathbf{u},\mathbf{w}) + alB(\mathbf{v},\mathbf{w}) + bkC(\mathbf{u},\mathbf{w}) + blC(\mathbf{v},\mathbf{w}) \\
&= k(aB(\mathbf{u},\mathbf{w}) + bC(\mathbf{u},\mathbf{w})) + l(aB(\mathbf{v},\mathbf{w}) + bC(\mathbf{v},\mathbf{w})) \\
&= k(aB+bC)(\mathbf{u},\mathbf{w}) + l(aB+bC)(\mathbf{v},\mathbf{w})
\end{aligned}
$$

また, $\forall k,l \in K \forall \mathbf{v} \in V \forall \mathbf{u},\mathbf{w} \in W$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
(aB+bC)(\mathbf{u},k\mathbf{v}+l\mathbf{w}) &= aB(\mathbf{u},k\mathbf{v}+l\mathbf{w}) + bC(\mathbf{u},k\mathbf{v}+l\mathbf{w}) \\
&= a(kB(\mathbf{u},\mathbf{v}) + lB(\mathbf{u},\mathbf{w})) + b(kC(\mathbf{u},\mathbf{v}) + lC(\mathbf{u},\mathbf{w})) \\
&= akB(\mathbf{u},\mathbf{v}) + alB(\mathbf{u},\mathbf{w}) + bkC(\mathbf{u},\mathbf{v}) + blC(\mathbf{u},\mathbf{w}) \\
&= k(aB(\mathbf{u},\mathbf{v}) + bC(\mathbf{u},\mathbf{v})) + l(aB(\mathbf{u},\mathbf{w}) + bC(\mathbf{u},\mathbf{w})) \\
&= k(aB+bC)(\mathbf{u},\mathbf{v}) + l(aB+bC)(\mathbf{u},\mathbf{w})
\end{aligned}
$$

よって, その写像 $kB+lC : V \times V \rightarrow K$ もそれらの vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式である. □

定義 4.3.3. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V と n 次元 vector 空間 W との形式的な双線形形式 $B : V \times W \rightarrow K$ が与えられたとき, それらの vector 空間たち V, W の $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_m}$, $\beta = \langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なる基底たちそれぞれ α, β がとられれば, 次式のように定義されるその集合 $\mathrm{M}(m,n,K)$ における行列 A をその双線形形式 B のその基底の組 (α,β) に関する表現行列, 表現などといい,

$$
A = (B(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j))_{(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n}
$$

以下, その行列 A を $[B]_{(\alpha,\beta)}$ とかく.

定理 4.3.3. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V と n 次元 vector 空間 W との形式的な双線形形式 $B : V \times W \rightarrow K$ が与えられたとき, それらの vector 空間たち V, W の $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_m}$, $\beta = \langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なる基底たちそれぞれ α, β がとられ, さらに, その双線形形式 B のその基底の組 (α,β) に関する表現行列 $[B]_{(\alpha,\beta)}$ が $[B]_{(\alpha,\beta)} = (B_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n}$ と成分表示されれば, $\forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ に対し, その体 K の族々 $\{a_i\}_{i \in \varLambda_m}$, $\{b_i\}_{i \in \varLambda_n}$ を用いて次のようにおくと,

$$
\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_m} a_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_n} b_i \mathbf{v}_i
$$

それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β を用いれば, 次式が成り立つ.

$$
B(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n} a_i b_j B_{ij} = {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) [B]_{(\alpha,\beta)} \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})
$$

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V と n 次元 vector 空間 W との形式的な双線形形式 $B : V \times W \rightarrow K$ が与えられたとき, それらの vector 空間たち V, W の $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_m}$, $\beta = \langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ なる基底たちそれぞれ α, β がとられ, さらに, その双線形形式 B のその基底の組 (α,β) に関する表現行列 $[B]_{(\alpha,\beta)}$ が $[B]_{(\alpha,\beta)} = (B_{ij})_{(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n}$ と成分表示されれば, $\forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ に対し, その体 K の族々 $\{a_i\}_{i \in \varLambda_m}$, $\{b_i\}_{i \in \varLambda_n}$ を用いて次のようにおくと,

$$
\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_m} a_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i \in \varLambda_n} b_i \mathbf{v}_i
$$

定理 4.3.1 より次のようになる.

$$B(\mathbf{v},\mathbf{w}) = B\left(\sum_{i\in\Lambda_m} a_i\mathbf{v}_i, \sum_{i\in\Lambda_n} b_i\mathbf{v}_i\right) = \sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n} a_ib_jB(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)$$

そこで, 双線形形式の表現行列の定義より $B(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j) = B_{ij}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$B(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n} a_ib_jB_{ij}$$

また, それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β を用いれば, 次のようになるので,

$$\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
{}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})[B]_{(\alpha,\beta)}\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}) &= {}^t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j\in\Lambda_n} b_jB_{1j} \\ \sum_{j\in\Lambda_n} b_jB_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j\in\Lambda_n} b_jB_{mj} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i\in\Lambda_m}\sum_{j\in\Lambda_n} a_ib_jB_{ij} = \sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n} a_ib_jB_{ij}
\end{aligned}$$

よって, 次式が成り立つ.

$$B(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n} a_ib_jB_{ij} = {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})[B]_{(\alpha,\beta)}\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})$$

□

定理 4.3.4. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V と n 次元 vector 空間 W との形式的な双線形形式 $B: V\times W \to K$ が与えられたとき, それらの vector 空間たち V, W の $\alpha = \langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_m}$, $\beta = \langle\mathbf{w}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$ なる基底たちそれぞれ α, β がとられて, $\forall A \in \mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β を用いて次式のような写像 B_A を考えよう.

$$B_A : V\times W \to K; (\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto {}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})A\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})$$

このとき, 次のことが成り立つ.

- その写像 B_A はそれらの vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式である.
- $A=\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ とおかれれば, $\forall i\in\varLambda_m\forall j\in\varLambda_n$ に対し, $B_A\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\right)=a_{ij}$ が成り立つ.
- $\left[B_A\right]_{(\alpha,\beta)}=A$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V と n 次元 vector 空間 W との形式的な双線形形式 $B:V\times W\rightarrow K$ が与えられたとき, それらの vector 空間たち V, W の $\alpha=\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\beta=\left\langle\mathbf{w}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ なる基底たちそれぞれ α, β がとられて, $\forall A\in\mathrm{M}(m,n,K)$ に対し, それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β を用いて次式のような写像 B_A を考えよう.

$$B_A:V\times W\rightarrow K;(\mathbf{v},\mathbf{w})\mapsto{}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})\,A\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})$$

このとき, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
B_A(k\mathbf{u}+l\mathbf{v},\mathbf{w})&={}^t\varphi_\alpha^{-1}(k\mathbf{u}+l\mathbf{v})\,A\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})\\
&=\left(k^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{u})+l^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})\right)A\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})\\
&=k^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{u})\,A\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})+l^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})\,A\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})\\
&=kB_A(\mathbf{u},\mathbf{w})+lB_A(\mathbf{v},\mathbf{w})
\end{aligned}$$

また, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{u},\mathbf{w}\in W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
B_A(\mathbf{v},k\mathbf{u}+l\mathbf{w})&={}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})\,A\varphi_\beta^{-1}(k\mathbf{u}+l\mathbf{w})\\
&={}^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})\,A\left(k\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{u})+l\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})\right)\\
&=k^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})\,A\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{u})+l^t\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v})\,A\varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w})\\
&=kB_A(\mathbf{v},\mathbf{u})+lB_A(\mathbf{v},\mathbf{w})
\end{aligned}$$

よって, その写像 B_A はその vector 空間 V 上の双線形形式である.

$A=\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ とおかれれば, $\forall i\in\varLambda_m\forall j\in\varLambda_n$ に対し, vector 空間 K^m, K^n の標準基底のうち第 i' 成分が 1 でこれ以外の成分が 0 であるような vectors$\mathbf{d}_{i'}$, $\mathbf{e}_{i'}$ を用いて次のようになる.

$$\begin{aligned}
B_A\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\right)&={}^t\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v}_i\right)A\varphi_\beta^{-1}\left(\mathbf{v}_j\right)\\
&={}^t\mathbf{d}_iA\mathbf{e}_j\\
&=\begin{pmatrix}0&\cdots&1&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{i1}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mj}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}0&\cdots&1&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{1j}\\\vdots\\a_{ij}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}=a_{ij}
\end{aligned}$$

あとは, 表現行列の定義より明らかに $\left[B_A\right]_{(\alpha,\beta)}=A$ が成り立つ. □

定理 4.3.5. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V とその vector 空間 V との形式的な双線形形式 $B:V\times V\rightarrow K$ が与えられたとき, $\alpha=\left\langle \mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられれば, その形式的な双線形形式 B が形式的な対称双線形形式となるならそのときに限り, その双線形形式 B のその基底の組 (α,α) に関する表現行列 $[B]_{(\alpha,\alpha)}$ が対称行列となる, 即ち, $[B]_{(\alpha,\alpha)}={}^t[B]_{(\alpha,\alpha)}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, その vector 空間 V とその vector 空間 V との形式的な双線形形式 $B:V\times V\rightarrow K$ が与えられたとき, $\alpha=\left\langle \mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_n}$ なるその vector 空間 V の基底 α がとられれば, その形式的な双線形形式 B が形式的な対称双線形形式となるなら, $\forall i,j\in\varLambda_n$ に対し, $B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\right)=B\left(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ. ここで, $[B]_{(\alpha,\alpha)}=\left(B_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_n^2}$ と成分表示されれば, 次のようになるので,

$$B_{ij}=B\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\right)=B\left(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_i\right)=B_{ji}$$

次のようになる.

$$[B]_{(\alpha,\alpha)}=\left(B_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_n^2}=\left(B_{ji}\right)_{(i,j)\in\varLambda_n^2}={}^t\left(B_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_n^2}={}^t[B]_{(\alpha,\alpha)}$$

逆に, その双線形形式 B のその基底の組 (α,α) に関する表現行列 $[B]_{(\alpha,\alpha)}$ が対称行列となる, 即ち, $[B]_{(\alpha,\alpha)}={}^t[B]_{(\alpha,\alpha)}$ が成り立つなら, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いて, $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ に対し, 定理 4.3.3 より次のようになる.

$$\begin{aligned}B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)&={}^t\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v}\right)[B]_{(\alpha,\alpha)}\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{w}\right)\\&={}^t\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v}\right){}^{tt}[B]_{(\alpha,\alpha)}{}^{tt}\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{w}\right)\\&={}^t\left({}^t\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{w}\right){}^t[B]_{(\alpha,\alpha)}\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v}\right)\right)\\&={}^t\left({}^t\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{w}\right)[B]_{(\alpha,\alpha)}\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{v}\right)\right)\\&={}^tB\left(\mathbf{w},\mathbf{v}\right)=B\left(\mathbf{w},\mathbf{v}\right)\end{aligned}$$

□

4.3.2 非退化な双線形形式

定義 4.3.4. 体 K 上の vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式 $B:V\times W\rightarrow K$ が与えられたとき, これが次のことを満たすとき, その双線形形式 B は非退化であるという[*31].

- $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=0$ が成り立つなら, $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ が成り立つ.
- $\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, $B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=0$ が成り立つなら, $\mathbf{v}=0$ が成り立つ.

定義 4.3.5. 体 K 上の vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式 $B:V\times W\rightarrow K$ が与えられたとき, これから $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{w}\in W$ を用いて次式のように定義される線形写像 $\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{w}\right)$, $\varPhi_{B,r}\left(\mathbf{v}\right)$ を, ここでは, それぞれその vector 空間 V 上のその形式的な双線形形式 B からその vector$\mathbf{w}$ によって誘導される左の線形形式, その vector 空間 W 上のその形式的な双線形形式 B からその vector$\mathbf{v}$ によって誘導される右の線形形式ということにする.

$$\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{w}\right):V\rightarrow K;\mathbf{v}\mapsto B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$$

[*31] 論理式に直すと, $\forall\mathbf{v}\in V\left[B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=0\right]\Rightarrow\mathbf{w}=\mathbf{0}$ となっていることに注意されたい.

$$\Phi_{B,r}\left(\mathbf{v} \right) : V \rightarrow K ; \mathbf{w} \mapsto B\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right)$$

定理 4.3.6. 体 K 上の vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式 $B:V \times W \rightarrow K$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{v} \in V\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, その vector 空間 V 上のその形式的な双線形形式 B からその vector$\mathbf{w}$ によって誘導される左の線形形式 $\Phi_{B,l}\left(\mathbf{w} \right)$, その vector 空間 W 上のその形式的な双線形形式 B からその vector$\mathbf{v}$ によって誘導される右の線形形式 $\Phi_{B,r}\left(\mathbf{v} \right)$ はいずれも線形写像である.

これゆえに, $\forall\mathbf{v} \in V\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, $\Phi_{B,l}\left(\mathbf{w} \right) \in V^{*}$ かつ $\Phi_{B,r}\left(\mathbf{v} \right) \in W^{*}$ が成り立ちこのような呼び方でも混乱は生じなかろう.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式 $B:V \times W \rightarrow K$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, その vector 空間 V 上のその形式的な双線形形式 B からその vector$\mathbf{w}$ によって誘導される左の線形形式 $\Phi_{B,l}\left(\mathbf{w} \right)$ について, $\forall k,l \in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\Phi_{B,l}\left(\mathbf{w} \right)\left(k\mathbf{u} + l\mathbf{v} \right) &= B\left(k\mathbf{u} + l\mathbf{v},\mathbf{w} \right)\\
&= kB\left(\mathbf{u},\mathbf{w} \right) + lB\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right)\\
&= k\Phi_{B,l}\left(\mathbf{w} \right)\left(\mathbf{u} \right) + l\Phi_{B,l}\left(\mathbf{w} \right)\left(\mathbf{v} \right)
\end{aligned}$$

同様に, $\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, その vector 空間 W 上のその形式的な双線形形式 B からその vector$\mathbf{v}$ によって誘導される右の線形形式 $\Phi_{B,r}\left(\mathbf{v} \right)$ について, $\forall k,l \in K\forall\mathbf{u},\mathbf{w} \in W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\Phi_{B,r}\left(\mathbf{v} \right)\left(k\mathbf{u} + l\mathbf{w} \right) &= B\left(\mathbf{v},k\mathbf{u} + l\mathbf{w} \right)\\
&= kB\left(\mathbf{v},\mathbf{u} \right) + lB\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right)\\
&= k\Phi_{B,r}\left(\mathbf{v} \right)\left(\mathbf{u} \right) + l\Phi_{B,r}\left(\mathbf{v} \right)\left(\mathbf{w} \right)
\end{aligned}$$

□

定義 4.3.6. 体 K 上の vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式 $B:V \times W \rightarrow K$ が与えられたとき, その vector 空間 V 上のその形式的な双線形形式 B からその vector$\mathbf{w}$ によって誘導される左の線形形式 $\Phi_{B,l}\left(\mathbf{w} \right)$, その vector 空間 W 上のその形式的な双線形形式 B からその vector$\mathbf{v}$ によって誘導される右の線形形式 $\Phi_{B,r}\left(\mathbf{v} \right)$ を用いた次式のように定義される写像たち $\Phi_{B,l}$, $\Phi_{B,r}$ をそれぞれその形式的な双線形形式 B から左の線形形式に誘導する線形写像, その形式的な双線形形式 B から右の線形形式に誘導する線形写像ということにする.

$$\begin{aligned}
\Phi_{B,l} &: W \rightarrow V^{*};\mathbf{w} \mapsto \left(\Phi_{B,l}\left(\mathbf{w} \right) : V \rightarrow K;\mathbf{v} \mapsto B\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right) \right)\\
\Phi_{B,r} &: V \rightarrow W^{*};\mathbf{v} \mapsto \left(\Phi_{B,r}\left(\mathbf{v} \right) : W \rightarrow K;\mathbf{w} \mapsto B\left(\mathbf{v},\mathbf{w} \right) \right)
\end{aligned}$$

定理 4.3.7. 体 K 上の vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式 $B:V \times W \rightarrow K$ が与えられたとき, その形式的な双線形形式 B から左の線形形式に誘導する線形写像 $\Phi_{B,l}$, その形式的な双線形形式 B から右の線形形式に誘導する線形写像 $\Phi_{B,r}$ いづれも線形写像である.

これゆえに, このような呼び方でも混乱は生じなかろう.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W との形式的な双線形形式 $B:V \times W \rightarrow K$ が与えられたとき, その形式的な双線形形式 B から左の線形形式に誘導する線形写像 $\Phi_{B,l}$ について, $\forall k,l \in K\forall\mathbf{u},\mathbf{w} \in W$ に対し, そ

の vector 空間 V 上のその形式的な双線形形式 B からその vector$k\mathbf{u}+l\mathbf{w}$ によって誘導される左の線形形式 $\varPhi_{B,l}\left(k\mathbf{u}+l\mathbf{w}\right)$ が定義されて, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varPhi_{B,l}\left(k\mathbf{u}+l\mathbf{w}\right)\left(\mathbf{v}\right)&=B\left(\mathbf{v},k\mathbf{u}+l\mathbf{w}\right)\\&=kB\left(\mathbf{v},\mathbf{u}\right)+lB\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\\&=k\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{u}\right)\left(\mathbf{v}\right)+l\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{w}\right)\left(\mathbf{v}\right)\\&=\left(k\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{u}\right)+l\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{w}\right)\right)\left(\mathbf{v}\right)\end{aligned}$$

以上より, $\varPhi_{B,l}\left(k\mathbf{u}+l\mathbf{w}\right)=k\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{u}\right)+l\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{w}\right)$ が得られたので, その形式的な双線形形式 B から左の線形形式に誘導する線形写像 $\varPhi_{B,l}$ は線形写像である.

その形式的な双線形形式 B から右の線形形式に誘導する線形写像 $\varPhi_{B,r}$ についても同様にして示される. □

定理 4.3.8. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V と n 次元 vector 空間 W との形式的な双線形形式 $B:V\times W\rightarrow K$ が与えられたとき, 次のことは同値である.

- その双線形形式 B が非退化である.
- その形式的な双線形形式 B から左の線形形式に誘導する線形写像 $\varPhi_{B,l}$ が線形同型写像である.
- その形式的な双線形形式 B から右の線形形式に誘導する線形写像 $\varPhi_{B,r}$ が線形同型写像である.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V と n 次元 vector 空間 W との形式的な双線形形式 $B:V\times W\rightarrow K$ が与えられたとき, その双線形形式 B が非退化であるなら, その形式的な双線形形式 B から左の線形形式に誘導する線形写像 $\varPhi_{B,l}:W\rightarrow V^{*}$ が定義されて, $\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, $\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{w}\right)=\left(0:V\rightarrow K;\mathbf{v}\mapsto 0\right)$ が成り立つとすれば, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次のようになるので,

$$\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{w}\right)\left(\mathbf{v}\right)=B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=0$$

その双線形形式 B が非退化なので, $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ が得られる. ゆえに, $\ker\varPhi_{B,l}=\left\{\mathbf{0}\right\}$ が成り立ち定理 1.2.12 よりその線形写像 $\varPhi_{B,l}$ は単射であることになる. このとき, もちろん, $V\left(\varPhi_{B,l}\right)\subseteq V^{*}$ が成り立つので, 次元公式と定理 4.2.4 より次のようになる.

$$\dim W=\mathrm{rank}\varPhi_{B,l}+\mathrm{nullity}\varPhi_{B,l}=\dim V\left(\varPhi_{B,l}\right)\leq\dim V^{*}=\dim V$$

一方で, 上と同様にしてその形式的な双線形形式 B から右の線形形式に誘導する線形写像 $\varPhi_{B,r}$ が単射であることが示されるので, 次元公式と定理 1.2.12, 定理 4.2.4 より次のようになる.

$$\dim V=\mathrm{rank}\varPhi_{B,r}+\mathrm{nullity}\varPhi_{B,r}=\dim V\left(\varPhi_{B,r}\right)\leq\dim W^{*}=\dim W$$

以上の議論により $\dim V=\dim W$ が得られたので, 次式が成り立つ.

$$\dim V=\dim W=\dim V\left(\varPhi_{B,l}\right)\leq\dim V$$

以上より, $\dim V\left(\varPhi_{B,l}\right)=\dim V=\dim V^{*}$ が得られる. 定理 1.1.22 より $V\left(\varPhi_{B,l}\right)=V^{*}$ が成り立つので, 定理 1.5.16 よりその線形写像 $\varPhi_{B,l}$ は線形同型写像である.

その形式的な双線形形式 B から左の線形形式に誘導する線形写像 $\varPhi_{B,l}$ が線形同型写像であるとき, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $B\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=0$ が成り立つなら, $\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{w}\right)\left(\mathbf{v}\right)=0$ が成り立つことになり, $\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{w}\right)=0$ が得られる. そこで, 仮定よりその線形写像 $\varPhi_{B,l}$ は単射であるかつ, $\varPhi_{B,l}\left(\mathbf{0}\right)=0$ なので, $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ が成り立つ. ゆえに, その形式的な双線形形式 B は非退化であることが分かる.

同様にして, その形式的な双線形形式 B は非退化であるならそのときに限り, その形式的な双線形形式 B から右の線形形式に誘導する線形写像 $\varPhi_{B,r}$ も線形同型写像であることが示される. □

定理 4.3.9. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V と n 次元 vector 空間 W との形式的な双線形形式 $B:V\times W\rightarrow K$ が与えられたとき, その双線形形式 B が非退化であるなら, $m=n$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V と n 次元 vector 空間 W との形式的な双線形形式 $B:V\times W\rightarrow K$ が与えられたとき, その双線形形式 B が非退化であるなら, 定理 4.3.8 よりその形式的な双線形形式 B から左の線形形式に誘導する線形写像 $\varPhi_{B,l}$ が線形同型写像であるので, $W\cong V^*$ が成り立つ. そこで, 定理 4.2.4 より $\dim W=\dim V^*=\dim V$ が成り立つので, $m=n$ が成り立つ. □

4.3.3 双対性を表す内積

定義 4.3.7. 体 K 上の vector 空間 V の双対空間 V^* について, 次式のように定義される写像 D_V をその vector 空間 V とその双対空間 V^* との双対性を表す内積, pairing などという.

$$D_V:V\times V^*\rightarrow K;(\mathbf{v},f)\mapsto f(\mathbf{v})$$

定理 4.3.10. 体 K 上の vector 空間 V の双対空間 V^* について, その vector 空間 V とその双対空間 V^* との双対性を表す内積 D_V はその vector 空間 V とその双対空間 V^* との形式的な双線形形式でもある, 即ち, 次のことが成り立つ.

- $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V\forall f\in V^*$ に対し, $D_V(k\mathbf{v}+l\mathbf{w},f)=kD_V(\mathbf{v},f)+lD_V(\mathbf{w},f)$ が成り立つ.
- $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v}\in V\forall f,g\in V^*$ に対し, $D_V(\mathbf{v},kf+lg)=kD_V(\mathbf{v},f)+lD_V(\mathbf{v},g)$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の双対空間 V^* について, その vector 空間 V とその双対空間 V^* との双対性を表す内積 D_V が与えられたとき, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V\forall f\in V^*$ に対し, 次式が成り立つ.

$$D_V(k\mathbf{v}+l\mathbf{w},f)=f(k\mathbf{v}+l\mathbf{w})=kf(\mathbf{v})+lf(\mathbf{w})=kD_V(\mathbf{v},f)+lD_V(\mathbf{w},f)$$

同様に, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v}\in V\forall f,g\in V^*$ に対し, 次式が成り立つ.

$$D_V(\mathbf{v},kf+lg)=(kf+lg)(\mathbf{v})=kf(\mathbf{v})+lg(\mathbf{v})=kD_V(\mathbf{v},f)+lD_V(\mathbf{v},g)$$

以上より, その vector 空間 V とその双対空間 V^* との双対性を表す内積 D_V はその vector 空間 V とその双対空間 V^* との形式的な双線形形式でもあることが示された. □

定理 4.3.11. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* について, その vector 空間 V の基底 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$, その双対空間 V^* の基底 $\langle\lambda_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, これらを $\alpha=\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$, $\beta=\langle\lambda_i\rangle_{i\in\varLambda_n}$ とおかれると, その vector 空間 V とその双対空間 V^* との双対性を表す内積 D_V のその基底の組 (α,β) に関する表現行列 $[D_V]_{(\alpha,\beta)}$ は $[D_V]_{(\alpha,\beta)}=(\lambda_j(\mathbf{v}_i))_{(i,j)\in\varLambda_n^2}$ を満たす.

証明. 定義より次のようになることから,

$$[D_V]_{(\alpha,\beta)}=(D_V(\mathbf{v}_i,\lambda_j))_{(i,j)\in\varLambda_n^2}=(\lambda_j(\mathbf{v}_i))_{(i,j)\in\varLambda_n^2}$$

直ちにわかる. □

定理 4.3.12. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* について, その vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, これのその双対空間 V^* の双対基底 $\langle \phi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, これらを $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\alpha^* = \langle \phi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれると, その vector 空間 V とその双対空間 V^* との双対性を表す内積 D_V のその基底の組 (α, α^*) に関する表現行列 $[D_V]_{(\alpha,\alpha^*)}$ は $[D_V]_{(\alpha,\alpha^*)} = I_n$ を満たす.

逆に, その双対空間 V^* の基底 $\langle \lambda_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\beta = \langle \lambda_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, その vector 空間 V とその双対空間 V^* との双対性を表す内積 D_V のその基底の組 (α, β) に関する表現行列 $[D_V]_{(\alpha,\beta)}$ が $[D_V]_{(\alpha,\beta)} = I_n$ を満たすなら, その基底 β はその基底 α の双対基底である.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* について, その vector 空間 V の基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, これのその双対空間 V^* の双対基底 $\langle \phi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, これらを $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\alpha^* = \langle \phi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれると, その vector 空間 V とその双対空間 V^* との双対性を表す内積 D_V のその基底の組 (α, α^*) に関する表現行列 $[D_V]_{(\alpha,\alpha^*)}$ について, 定理 4.3.11 より次のようになる[*32].

$$[D_V]_{(\alpha,\alpha^*)} = \left(D_V\left(\mathbf{v}_i, \phi_i\right)\right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2} = \left(\phi_i\left(\mathbf{v}_i\right)\right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2} = \left(\delta_{ij}\right)_{(i,j) \in \Lambda_n^2} = I_n$$

逆に, 逆に, その双対空間 V^* の基底 $\langle \lambda_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\beta = \langle \lambda_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおくと, その vector 空間 V とその双対空間 V^* との双対性を表す内積 D_V のその基底の組 (α, β) に関する表現行列 $[D_V]_{(\alpha,\beta)}$ が $[D_V]_{(\alpha,\beta)} = I_n$ を満たすなら, 定理 4.3.11 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
[D_V]_{(\alpha,\beta)} = I_n &\Leftrightarrow \forall i, j \in \Lambda_n \left[\lambda_j\left(\mathbf{v}_i\right) = \delta_{ij}\right] \\
&\Leftrightarrow \forall i, j \in \Lambda_n \left[\lambda_j\left(\mathbf{v}_i\right) = \phi_j\left(\mathbf{v}_i\right)\right]
\end{aligned}$$

そこで, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ とおかれると, $\forall j \in \Lambda_n$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\lambda_j\left(\mathbf{v}\right) &= \lambda_j\left(\sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \lambda_j\left(\mathbf{v}_i\right) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \phi_j\left(\mathbf{v}_i\right) \\
&= \phi_j\left(\sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i\right) = \phi_j\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}$$

$\forall j \in \Lambda_n$ に対し, $\lambda_j = \phi_j$ が成り立つ, 即ち, その基底 β はその基底 α の双対基底である. □

定理 4.3.13. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* について, その vector 空間 V の基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, これらのその双対空間 V^* の双対基底たち $\langle \phi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\langle \chi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, これらを $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\beta = \langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\alpha^* = \langle \phi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\beta^* = \langle \chi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれると, その基底 α からその基底 β への基底変換行列 $[I_V]_\alpha^\beta$, その基底 α^* からその基底 β^* への基底変換行列 $[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*}$ は $[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*\,t} [I_V]_\alpha^\beta = I_n$ を満たす.

[*32] δ_{ij} は Kronecker の delta, 即ち, 写像 $\delta : \Lambda_m \times \Lambda_n \to R; (i,j) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$ の (i,j) による値.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* について, その vector 空間 V の基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, これらのその双対空間 V^* の双対基底たち $\langle \phi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\langle \chi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, これらを $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\beta = \langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\alpha^* = \langle \phi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\beta^* = \langle \chi_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおかれ, その基底 α からその基底 β への基底変換行列 $[I_V]_\alpha^\beta$, その基底 α^* からその基底 β^* への基底変換行列 $[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*}$ について, 次式のようにおかれると,

$$[I_V]_\alpha^{\beta^{-1}} = (p_{ij})_{(i,j) \in \Lambda_n^2}, \quad [I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^{*-1}} = (q_{ij})_{(i,j) \in \Lambda_n^2},$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i = \sum_{j \in \Lambda_n} l_j \mathbf{w}_j \in V, \quad f = \sum_{i \in \Lambda_n} k_i \phi_i = \sum_{j \in \Lambda_n} l_j \chi_j \in V^*$$

次式が成り立つことから,

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, tail, two heads, "\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha"] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] & K^n \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_\beta"] \\
V \arrow[r, tail, two heads, "I_V"] & V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, tail, two heads, "\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*}"] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_{\alpha^*}"] & K^n \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_{\beta^*}"] \\
V^* \arrow[r, tail, two heads, "I_{V^*}"] & V^*
\end{tikzcd}$$

標準直交基底を $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ とおいて $\forall j \in \Lambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_j &= I_V(\mathbf{w}_j) \\
&= \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ I_V^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}_j) \\
&= \varphi_\alpha \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \right)^{-1} \circ \varphi_\beta^{-1}(\mathbf{w}_j) \\
&= \varphi_\alpha \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \right)^{-1}(\mathbf{e}_j) \\
&= \varphi_\alpha \left([I_V]_\alpha^{\beta^{-1}} \mathbf{e}_j \right) \\
&= \varphi_\alpha \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{j1} & \cdots & p_{jj} & \cdots & p_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \varphi_\alpha \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix} \\
&= \varphi_\alpha \left(\sum_{i \in \Lambda_n} p_{ij} \mathbf{e}_i \right) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} p_{ij} \varphi_\alpha(\mathbf{e}_i) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_n} p_{ij} \mathbf{v}_i
\end{aligned}$$

同様にして, $\forall j \in \varLambda_n$ に対し, 次式が得られる.

$$\chi_j = \sum_{i \in \varLambda_n} q_{ij} \phi_i$$

したがって, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
I_n &= \left(\delta_{ij} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \\
&= \left(D_V \left(\mathbf{w}_i, \chi_j \right) \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \\
&= \left(D_V \left(\sum_{k \in \varLambda_n} p_{ki} \mathbf{v}_k, \sum_{l \in \varLambda_n} q_{lj} \phi_l \right) \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \\
&= \left(\sum_{k \in \varLambda_n} \sum_{l \in \varLambda_n} p_{ki} q_{lj} D_V \left(\mathbf{v}_k, \phi_l \right) \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \\
&= \left(\sum_{k \in \varLambda_n} \sum_{l \in \varLambda_n} p_{ki} q_{lj} \delta_{kl} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \\
&= \left(\sum_{k \in \varLambda_n} p_{ki} q_{kj} \right)_{(i,j) \in \varLambda_n^2} \\
&= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \\
&= {}^t\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \\
&= {}^t[I_V]_\alpha^{\beta\,-1} [I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*\,-1} \\
&= \left([I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*}\, {}^t[I_V]_\alpha^\beta \right)^{-1}
\end{aligned}$$

よって, $[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*}\, {}^t[I_V]_\alpha^\beta = I_n$ が得られる. □

定理 4.3.14. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* について, その vector 空間 V の基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, これらのその双対空間 V^* の双対基底たち $\langle \phi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\langle \chi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, これらを $\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\beta = \langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\alpha^* = \langle \phi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\beta^* = \langle \chi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ とおかれると, 次のことは同値である.

- それらの基底たち α, β, α^*, β^* の基底変換における線形同型写像がそれぞれ φ_α, φ_β, φ_{α^*}, φ_{β^*} とおかれると, $\varphi_{\alpha^*} \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{\beta^*} \circ \varphi_\beta^{-1}$ が成り立つ.
- その基底 α からその基底 β への基底変換行列 $[I_V]_\alpha^\beta$, その基底 α^* からその基底 β^* への基底変換行列 $[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*}$ について, $[I_V]_\alpha^\beta = {}^t[I_V]_\alpha^{\beta\,-1}$ が成り立つ.
- その基底 α からその基底 β への基底変換行列 $[I_V]_\alpha^\beta$, その基底 α^* からその基底 β^* への基底変換行列 $[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*}$ について, $[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*} = {}^t[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*\,-1}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^* について, その vector 空間 V の基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, これらのその双対空間 V^* の双対基底たち $\langle \phi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\langle \chi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, これらを

$\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\beta = \langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\alpha^* = \langle \phi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\beta^* = \langle \chi_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, それらの基底たち α, β, α^*, β^* の基底変換における線形同型写像がそれぞれ φ_α, φ_β, φ_{α^*}, φ_{β^*} とおかれると, 次式が成り立つことから,

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, tail, two heads, "\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha"] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] & K^n \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_\beta"] \\
V \arrow[r, tail, two heads, "I_V"] & V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, tail, two heads, "\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*}"] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_{\alpha^*}"] & K^n \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_{\beta^*}"] \\
V^* \arrow[r, tail, two heads, "I_{V^*}"] & V^*
\end{tikzcd}$$

次式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
& K^n \arrow[rr, tail, two heads, "\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\alpha^*}"] & & K^n \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_{\beta^*}"] \\
K^n \arrow[rr, tail, two heads, "\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] & & K^n \arrow[ur, tail, two heads, "I_{K^n}"] \arrow[dd, tail, two heads, "\varphi_\beta"] & \\
& V^* \arrow[rr, tail, two heads, "I_{V^*}"] & & V^* \\
V \arrow[ur, tail, two heads, "\varphi_{\alpha^*} \circ \varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[rr, tail, two heads, "I_V"] & & V \arrow[ur, tail, two heads, "\varphi_{\beta^*} \circ \varphi_\beta^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

これにより, 次式のようになる[*33].

$$\begin{aligned}
\varphi_{\beta^*} \circ \varphi_\beta^{-1} &= I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \circ \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \right)^{-1} \circ I_{K^n} \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \right) \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ I_V^{-1} \\
&= \varphi_{\alpha^*} \circ \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \right)^{-1} \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \right) \circ \varphi_\alpha^{-1}
\end{aligned}$$

したがって, $\varphi_{\alpha^*} \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{\beta^*} \circ \varphi_\beta^{-1}$ が成り立つなら, 上記の議論により次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha &= \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \right) \circ \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \right)^{-1} \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \right) \\
&= \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \right) \circ \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \right)^{-1} \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \right) \\
&= \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \right) \circ \varphi_{\alpha^*}^{-1} \circ \varphi_{\alpha^*} \circ \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \right)^{-1} \\
&\quad \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \right) \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha
\end{aligned}$$

[*33] 愚直に計算するなら, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\beta^*} \circ \varphi_\beta^{-1} &= \varphi_{\alpha^*} \circ \varphi_{\alpha^*}^{-1} \circ \varphi_{\beta^*}^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \\
&= I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \circ \varphi_{\alpha^*}^{-1} \circ I_{V^*}^{-1} \circ \varphi_{\beta^*} \circ I_{K^n} \circ \varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ I_V^{-1} \\
&= I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \circ \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*} \right)^{-1} \circ I_{K^n} \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \right) \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ I_V^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*}\right) \circ \varphi_{\alpha^*}^{-1} \circ \varphi_{\beta^*} \circ \varphi_{\beta}^{-1} \circ \varphi_{\alpha} \\
&= \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*}\right) \circ \varphi_{\alpha^*}^{-1} \circ \varphi_{\alpha^*} \circ \varphi_{\alpha}^{-1} \circ \varphi_{\alpha} \\
&= \varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*}
\end{aligned}
$$

ゆえに, $[I_V]_\alpha^\beta = [I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*}$ が得られる. その写像 $\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*}$ が線形同型写像であることに注意すれば, 定理 4.3.13 より $[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*} = {}^t[I_V]_\alpha^{\beta\,-1}$ が成り立つので, $[I_V]_\alpha^\beta = {}^t[I_V]_\alpha^{\beta\,-1}$ が成り立つ.

逆に, $[I_V]_\alpha^\beta = {}^t[I_V]_\alpha^{\beta\,-1}$ が成り立つなら, その写像 $\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*}$ が線形同型写像であることに注意すれば, 定理 4.3.13 より $[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*} = {}^t[I_V]_\alpha^{\beta\,-1} = [I_V]_\alpha^\beta$ が成り立つので, $\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha = \varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*}$ が成り立つことにより次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\alpha^*} \circ \varphi_\alpha^{-1} &= \varphi_{\alpha^*} \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha\right)^{-1} \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha\right) \circ \varphi_\alpha^{-1} \\
&= \varphi_{\alpha^*} \circ \left(\varphi_{\beta^*}^{-1} \circ I_{V^*} \circ \varphi_{\alpha^*}\right)^{-1} \circ \left(\varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha\right) \circ \varphi_\alpha^{-1} \\
&= \varphi_{\alpha^*} \circ \varphi_{\alpha^*}^{-1} \circ I_{V^*}^{-1} \circ \varphi_{\beta^*} \circ \varphi_\beta^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \\
&= \varphi_{\beta^*} \circ \varphi_\beta^{-1}
\end{aligned}
$$

$[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*} = {}^t[I_{V^*}]_{\alpha^*}^{\beta^*\,-1}$ が成り立つことについても同様にして示される. □

参考文献

[1] 松坂和夫, "線型代数入門", 岩波書店, 1980. 新装版第 2 刷 p319-333 ISBN978-4-00-029872-8

[2] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958. 第 53 版 p193-197,200-202 ISBN4-7853-1301-3

4.4 商 vector 空間と双対空間

4.4.1 商 vector 空間からの自然な線形写像

定理 4.4.1. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f:V\rightarrow U$ が与えられたとき, $W\subseteq\ker f$ が成り立つとき, $\mathbf{v}\equiv\mathbf{w}\ \mathrm{mod}W$ が成り立つなら, $f(\mathbf{v})=f(\mathbf{w})$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f:V\rightarrow U$ が与えられたとき, $W\subseteq\ker f$ が成り立つとき, $\mathbf{v}\equiv\mathbf{w}\ \mathrm{mod}W$ が成り立つなら, $\mathbf{v}-\mathbf{w}\in W$ が成り立つ. そこで, $W\subseteq\ker f$ が成り立つので, $f(\mathbf{v}-\mathbf{w})=f(\mathbf{v})-f(\mathbf{w})=\mathbf{0}$ が成り立つ. よって, $f(\mathbf{v})=f(\mathbf{w})$ が得られる. □

定理 4.4.2. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f:V\rightarrow U$ が与えられたとき, $W\subseteq\ker f$ が成り立つなら, $\forall\mathbf{v}+W\in V/W\exists!\mathbf{u}\in U$ に対し, $\mathbf{u}=f(\mathbf{v})$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f:V\rightarrow U$ が与えられたとき, $W\subseteq\ker f$ が成り立つなら, $\forall\mathbf{v}+W\in V/W\exists\mathbf{u}\in U$ に対し, $\mathbf{u}=f(\mathbf{v})$ が成り立つのは明らかである. そこで, $\forall\mathbf{w}+W\in V/W$ に対し, $\mathbf{v}+W=\mathbf{w}+W$ が成り立つかつ, $f(\mathbf{v})\neq f(\mathbf{w})$ が成り立つと仮定すると, $\mathbf{v}+W=\mathbf{w}+W$ が成り立つならそのときに限り, $\mathbf{v}\equiv\mathbf{w}\ \mathrm{mod}W$ が成り立つことになり, 定理 4.4.1 より $f(\mathbf{v})=f(\mathbf{w})$ が得られるが, これは仮定に矛盾する. よって, このような vector$f(\mathbf{v})$ はその vector 空間 U に一意的に存在する. □

定義 4.4.1. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f:V\rightarrow U$ が与えられたとする. $W\subseteq\ker f$ が成り立つとき, 定理 4.4.2 により次式のように写像 $\psi_W(f)$ が定義される.

$$\psi_W(f):V/W\rightarrow U;\mathbf{v}+W\mapsto f(\mathbf{v})$$

その写像 $\psi_W(f)$ をその線形写像 f によるその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像という.

定理 4.4.3. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f:V\rightarrow U$ が与えられたとする. $W\subseteq\ker f$ が成り立つとき, その線形写像 f によるその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像 $\psi_W(f)$ は線形写像である.

この定理によりその写像 $\psi_W(f)$ を商 vector 空間からの自然な線形写像と呼んでも混乱は生じなかろう.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f:V\rightarrow U$ が与えられたとする. $W\subseteq\ker f$ が成り立つとき, その線形写像 f によるその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像 $\psi_W(f)$ について, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{v}+W,\mathbf{w}+W\in V/W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\psi_W(f)(k(\mathbf{v}+W)+l(\mathbf{w}+W))&=\psi_W(f)(k\mathbf{v}+l\mathbf{w}+W)=f(k\mathbf{v}+l\mathbf{w})\\&=kf(\mathbf{v})+lf(\mathbf{w})=k\psi_W(f)(\mathbf{v}+W)+l\psi_W(f)(\mathbf{w}+W)\end{aligned}$$

よって, その商 vector 空間からの自然な線形写像 $\psi_W(f)$ は線形写像である. □

定理 4.4.4. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f:V\rightarrow U$ が与えられたとし, $W\subseteq\ker f$ が成り立つとする. $W=\ker f$ が成り立つならそのときに限り, その線形写像 f によるその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像 $\psi_W(f)$ は単射である.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f:V\rightarrow U$ が与えられたとし, $W\subseteq\ker f$ が成り立つとする. $W=\ker f$ が成り立つなら, その線形写像 f によるその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像 $\psi_W(f)$ について, $\forall\mathbf{v}+W,\mathbf{w}+W\in V/W$ に対し, $\mathbf{v}+W\neq\mathbf{w}+W$ が成り立つなら, $\mathbf{v}\equiv\mathbf{w}\ \mathrm{mod}W$ が成り立たない, 即ち, $\mathbf{v}-\mathbf{w}\notin W$ が成り立つことになり, したがって, $\ker f\subseteq W$ が成り立つことと対偶律により $f\left(\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)=f\left(\mathbf{v}\right)-f\left(\mathbf{w}\right)\neq\mathbf{0}$ が成り立つ. よって, $f\left(\mathbf{v}\right)\neq f\left(\mathbf{w}\right)$ が得られ, その線形写像 f によるその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像 $\psi_W(f)$ は単射であることが示された.

逆に, その線形写像 f によるその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像 $\psi_W(f)$ が単射であるとき, $\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, $\mathbf{v}\notin W$ が成り立つかつ, $\mathbf{v}\in\ker f$ が成り立つと仮定すると, $\mathbf{v}\equiv\mathbf{0}\ \mathrm{mod}W$ が成り立たない, 即ち, $\mathbf{v}+W\neq\mathbf{0}+W$ が成り立つ. 一方で, $f\left(\mathbf{v}\right)=f\left(\mathbf{v}-\mathbf{0}\right)=f\left(\mathbf{v}\right)-f\left(\mathbf{0}\right)=\mathbf{0}$ が成り立つことになり, したがって, $f\left(\mathbf{v}\right)=f\left(\mathbf{0}\right)$, 即ち, $\psi_W(f)\left(\mathbf{v}+W\right)=\psi_W(f)\left(\mathbf{0}+W\right)$ が成り立つことになるが, これはその線形写像 $\psi_W(f)$ が単射であることに矛盾する. したがって, $\mathbf{v}\notin\ker f$ が成り立つ. あとは, 対偶律より $\ker f\subseteq W$ が得られ, 仮定よりよって, $W=\ker f$ が成り立つ. □

定理 4.4.5. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f:V\rightarrow U$ が与えられたとする. $W=\ker f$ が成り立つなら, $V/\ker f\cong V(f)$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f:V\rightarrow U$ が与えられたとする. $W=\ker f$ が成り立つなら, その線形写像 f によるその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像 $\psi_W(f)$ は単射である. そこで, その線形写像 $\psi_W(f)$ の終集合を $V\left(\psi_W(f)\right)$ にしたものは線形同型写像であるので, $V/W\cong V\left(\psi(f)\right)$ が成り立つ. そこで, $\forall\mathbf{u}\in U$ に対し, $\mathbf{u}\in V\left(\psi_W(f)\right)$ が成り立つならそのときに限り, ある vector$\mathbf{v}+W$ がその商 vector 空間 V/W に存在して, $\mathbf{u}=\psi_W(f)\left(\mathbf{v}+W\right)=f\left(\mathbf{v}\right)$ が成り立つ. これが成り立つならそのときに限り, ある vector$\mathbf{v}$ がその vector 空間 V に存在して, $\mathbf{u}=\psi_W(f)\left(\mathbf{v}+W\right)=f\left(\mathbf{v}\right)$ が成り立つ. これにより, $\mathbf{u}\in V(f)$ が成り立つので, $V\left(\psi_W(f)\right)=V(f)$ が得られる. よって, 次式が成り立つ.

$$V/\ker f=V/W\cong V\left(\psi_W(f)\right)=V(f)$$

□

4.4.2 商 vector 空間からの自然な線形写像を誘導する写像

定義 4.4.2. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 次式のようにおくと,

$$D\left(\psi_W\right)=\{f\in L(V,U)|W\subseteq\ker f\}$$

次式のように写像 ψ_W が定義される.

$$\psi_W:D\left(\psi_W\right)\rightarrow L\left(V/W,U\right);f\mapsto\left(\psi_W(f):V/W\rightarrow U;\mathbf{v}+W\mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right)$$

この写像 ψ_W をそれらの vector 空間たち V, U 間のその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像を誘導する写像ということにする.

定理 4.4.6. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, その集合 $\{f \in L(V,U)|W \subseteq \ker f\}$ はその vector 空間 $L(V,U)$ の部分 vector 空間をなす.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, その集合 $\{f \in L(V,U)|W \subseteq \ker f\}$ において, その vector 空間 $L(V,U)$ の零 vector$0 : V \rightarrow U; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{0}$ はもちろん, $0 \in \{f \in L(V,U)|W \subseteq \ker f\}$ を満たす. さらに, $\forall k,l \in K \forall f,g \in \{f \in L(V,U)|W \subseteq \ker f\}$ に対し, 写像 $kf + lg$ は $kf + lg \in L(V,U)$ を満たすのであった. このとき, $\forall \mathbf{w} \in W$ に対し, 次のようになる.

$$(kf + lg)(\mathbf{w}) = kf(\mathbf{w}) + lg(\mathbf{w}) = k\mathbf{0} + l\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

ゆえに, $kf + lg \in \{f \in L(V,U)|W \subseteq \ker f\}$ が得られる. よって, 定理 1.1.9 よりその集合 $\{f \in L(V,U)|W \subseteq \ker f\}$ はその vector 空間 $L(V,U)$ の部分 vector 空間をなす. □

定理 4.4.7. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, それらの vector 空間たち V, U 間のその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像を誘導する写像 ψ_W は線形写像である.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, それらの vector 空間たち V, U 間のその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像を誘導する写像 ψ_W について, 定理 4.4.6 に注意すれば, 次式のようにおくと,

$$D(\psi_W) = \{f \in L(V,U)|W \subseteq \ker f\}$$

$\forall k,l \in K \forall f,g \in D(\psi_W)$ に対し, 線形写像 $\psi_W(kf + lg)$ が定義されて, $\forall \mathbf{v} + W \in V/W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \psi_W(kf + lg)(\mathbf{v} + W) &= (kf + lg)(\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v}) + lg(\mathbf{v}) \\ &= k\psi_W(f)(\mathbf{v} + W) + l\psi_W(g)(\mathbf{v} + W) \\ &= (k\psi_W(f) + l\psi_W(g))(\mathbf{v} + W) \end{aligned}$$

以上より, $\psi_W(kf + lg) = k\psi_W(f) + l\psi_W(g)$ が得られたので, それらの vector 空間たち V, U 間のその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像を誘導する写像 ψ_W は線形写像である. □

定理 4.4.8. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^* が与えられたとする. $\forall f \in V^*$ に対し, $f \in W^\perp$ が成り立つなら, $W \subseteq \ker f$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^* が与えられたとする. $\forall f \in V^*$ に対し, $f \in W^\perp$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $f(\mathbf{w}) = 0$ が成り立つ. ゆえに, $\mathbf{w} \in \ker f$ が得られ, よって, $W \subseteq \ker f$ が成り立つ. □

定理 4.4.9. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^* が与えられたとする. それらの vector 空間たち V, U 間のその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像を誘導する写像 ψ_W は次式のように与えられ,

$$\psi_W : W^\perp \rightarrow (V/W)^*; f \mapsto (\psi_W(f) : V/W \rightarrow K; \mathbf{v} + W \mapsto f(\mathbf{v}))$$

しかも, その写像 ψ_W は線形同型写像であり $W^{\perp} \cong (V/W)^*$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^* が与えられたとする. それらの vector 空間たち V, U 間のその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像を誘導する写像 ψ_W は, 定義より次式のようにおくと,

$$D\left(\psi_W\right) = \{f \in L(V,K) | W \subseteq \ker f\}$$

次式のように与えられる.

$$\psi_W : D\left(\psi_W\right) \rightarrow L\left(V/W, K\right); f \mapsto \left(\psi_W(f) : V/W \rightarrow K; \mathbf{v} + W \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right)$$

そこで, 双対空間の定義より $L\left(V/W, K\right) = (V/W)^*$ が成り立つので, 次式のようになる.

$$\psi_W : D\left(\psi_W\right) \rightarrow (V/W)^*; f \mapsto \left(\psi_W(f) : V/W \rightarrow K; \mathbf{v} + W \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right)$$

さらに, $L(V,K) = V^*$ が成り立つことに注意すれば, $\forall f \in V^*$ に対し, $f \in D\left(\psi_W\right)$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $\mathbf{w} \in \ker f$ が成り立つことから, $f\left(\mathbf{w}\right) = 0$ が成り立つ. ゆえに, $f \in W^{\perp}$ が得られる. 逆に, $f \in W^{\perp}$ が成り立つなら, $\forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $f\left(\mathbf{w}\right) = 0$ が成り立つことから, $\mathbf{w} \in \ker f$ が成り立つので, $W \subseteq \ker f$ が得られる. 以上より, $f \in D\left(\psi_W\right)$ が成り立つ. これにより, $D\left(\psi_W\right) = W^{\perp}$ が得られたので, 次式のようになる.

$$\psi_W : W^{\perp} \rightarrow (V/W)^*; f \mapsto \left(\psi_W(f) : V/W \rightarrow K; \mathbf{v} + W \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right)$$

定理 4.4.7 よりその写像 ψ_W は線形写像であることが分かるので, あとはこれが全単射であることを示せばよい. もちろん, $V\left(\psi_W\right) \subseteq (V/W)^*$ が成り立つので, 定理 4.2.4, 定理 4.2.12 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\dim (V/W)^* &= \dim V/W \\
&= \dim V - \dim W \\
&= \dim V - \left(\dim V - \dim W^{\perp}\right) \\
&= \dim V - \dim V + \dim W^{\perp} \\
&= \dim W^{\perp}
\end{aligned}$$

そこで, 次元公式より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\dim (V/W)^* &= \dim W^{\perp} \\
&= \mathrm{rank}\psi_W + \mathrm{nullity}\psi_W
\end{aligned}$$

そこで, $\ker \psi_W = \{0 : V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto 0\}$ が成り立つことが示されれば, $\mathrm{nullity}\psi_W = 0$ となり, $\dim (V/W)^* = \mathrm{rank}\psi_W$ が示される. $\forall f, g \in W^{\perp}$ に対し, $f \neq g$ が成り立つなら, $\exists \mathbf{v} \in V$ に対し, $f\left(\mathbf{v}\right) \neq g\left(\mathbf{v}\right)$ が成り立つので, $f\left(\mathbf{v}\right) = \psi_W(f)\left(\mathbf{v} + W\right)$ かつ $g\left(\mathbf{v}\right) = \psi_W(g)\left(\mathbf{v} + W\right)$ が成り立つことから, $\exists \mathbf{v} + W \in V/W$ に対し, $\psi_W(f)\left(\mathbf{v} + W\right) \neq \psi_W(g)\left(\mathbf{v} + W\right)$ が得られる. これにより, $\psi_W(f) \neq \psi_W(g)$ が成り立つので, その線形写像 ψ_W は単射であることが示された[*34]. 定理 1.3.17 より $\ker \psi_W = \{0 : V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto 0\}$ が成り立つことが

[*34] 実はこれとは別の方法があることに注意しよう. 次式が成り立つことに注意すれば,

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W = \dim V/W = \dim (V/W)^*$$

次の定理 1.5.16 より明らかだと思えるであろう.

分かり, したがって, nullity$\psi_W=0$ が得られ, $\dim(V/W)^*=\mathrm{rank}\psi_W$ が成り立つ. ゆえに, 定理 1.1.24 より $V(\psi_W)=(V/W)^*$ が成り立つ. これにより, その線形写像 ψ_W も全射であることが分かり, よって, その線形写像 ψ_W は線形同型写像であり $W^\perp\cong(V/W)^*$ が成り立つ. □

定理 4.4.10. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^* が与えられたとする. 次式のようなそれらの vector 空間たち V, U 間のその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像を誘導する写像 ψ_W は定理 4.4.9 より線形同型写像であった.

$$\psi_W:W^\perp\to(V/W)^*;f\mapsto(\psi_W(f):V/W\to K;\mathbf{v}+W\mapsto f(\mathbf{v}))$$

このとき, その集合 V からその集合 V/W への商写像 $C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}$ を用いてこれの逆写像 ψ_W^{-1} は次のように与えられる.

$$\psi_W^{-1}:(V/W)^*\to W^\perp;\mathit{\Lambda}\mapsto\mathit{\Lambda}\circ C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}$$

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^* が与えられたとする. 次式のようなそれらの vector 空間たち V, U 間のその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像を誘導する写像 ψ_W は定理 4.4.9 より線形同型写像であった.

$$\psi_W:W^\perp\to(V/W)^*;f\mapsto(\psi_W(f):V/W\to K;\mathbf{v}+W\mapsto f(\mathbf{v}))$$

このとき, その集合 V からその集合 V/W への商写像 $C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}$ を用いて次式のように写像 ψ' が定義されると,

$$\psi':(V/W)^*\to W^\perp;\mathit{\Lambda}\mapsto\mathit{\Lambda}\circ C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}$$

$\forall\mathit{\Lambda}\in(V/W)^*$ に対し, 定理 4.1.3 より次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}\psi_W\circ\psi'(\mathit{\Lambda})&=\psi_W(\psi'(\mathit{\Lambda}))\\&=\psi_W(\mathit{\Lambda}\circ C_{\equiv\ \mathrm{mod}W})\\&=\psi_W(\mathit{\Lambda}\circ C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}:V\to K;\mathbf{v}\mapsto\mathit{\Lambda}\circ C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}(\mathbf{v}))\\&=\psi_W(\mathit{\Lambda}\circ C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}:V\to K;\mathbf{v}\mapsto\mathit{\Lambda}(\mathbf{v}+W))\\&=\psi_W(\mathit{\Lambda}\circ C_{\equiv\ \mathrm{mod}W}):V/W\to K;\mathbf{v}+W\mapsto\mathit{\Lambda}(\mathbf{v}+W)\\&=\mathit{\Lambda}\end{aligned}$$

体 K 上の n 次元 vector 空間たち V, W の基底の 1 つをそれぞれ α, β とし, それらの基底たち α,β に関する線形写像 $f:V\to W$ の $[f]_\alpha^\beta\in\mathrm{M}(n,n,K)$ なる表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ を用いて写像 $F_{\alpha\to\beta}$ が次式のように定義されれば,

$$F_{\alpha\to\beta}:L(V,W)\to\mathrm{M}(n,n,K);f\mapsto[f]_\alpha^\beta$$

$\forall f\in L(V,W)$ に対し, 次のことは同値である.

- その写像 f は線形同型写像である.
- その写像 f は全射 $f:V\twoheadrightarrow W$ である.
- その写像 f は単射 $f:V\rightarrowtail W$ である.
- $n=\mathrm{rank}f=\dim V(f)$ が成り立つ.
- nullity$f=\dim\ker f=0$ が成り立つ.
- それらの基底たち α, β に関する線形写像 $f:V\to W$ の表現行列 $[f]_\alpha^\beta$ は正則行列である, 即ち, $[f]_\alpha^\beta\in\mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.
- その行列 $F_{\alpha\to\beta}(f)$ は正則行列である, 即ち, $F_{\alpha\to\beta}(f)\in\mathrm{GL}(n,K)$ が成り立つ.

$\forall f \in W^{\perp}$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\psi' \circ \psi_W(f) &= \psi'\left(\psi_W(f)\right) \\
&= \psi'\left(\psi_W\left(f : V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right)\right) \\
&= \psi'\left(\psi_W(f) : V/W \rightarrow K; \mathbf{v} + W \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right) \\
&= \psi'\left(\psi_W(f)\right) \\
&= \psi_W(f) \circ C_{\equiv \bmod W} \\
&= \psi_W(f) \circ C_{\equiv \bmod W} : V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto \psi_W(f) \circ C_{\equiv \bmod W}\left(\mathbf{v}\right) \\
&= \psi_W(f) \circ C_{\equiv \bmod W} : V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto \psi_W(f)\left(\mathbf{v} + W\right) \\
&= \psi_W(f) \circ C_{\equiv \bmod W} : V \rightarrow K; \mathbf{v} \mapsto f\left(\mathbf{v}\right) \\
&= f
\end{aligned}$$

よって, $\psi_W \circ \psi' = I_{(V/W)^*}$ かつ $\psi' \circ \psi_W = I_{W^{\perp}}$ が成り立つので, $\psi_W^{-1} = \psi'$ が得られる. □

定理 4.4.11. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^* が与えられたとき, $V^*/W^{\perp} \cong W^*$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^* が与えられたとき, 定理 4.2.4, 定理 4.2.13, 定理 4.4.9 より次のようになる.

$$V^*/W^{\perp} \cong \left(V^*/W^{\perp}\right)^{**} \cong \left(W^{\perp\perp}\right)^* \cong W^*$$

□

4.4.3 双対写像

定義 4.4.3. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ に対し, 次式のように写像 φ^* が定義される.

$$\varphi^* : W^* \rightarrow V^*; f \mapsto f \circ \varphi$$

その写像 φ^* をその線形写像 φ の双対写像という.

定理 4.4.12. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ の双対写像 φ^* は線形写像である.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ の双対写像 φ^* について, $\forall k, l \in K \forall f, g \in W^*$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi^*(kf + lg) &= (kf + lg) \circ \varphi \\
&= kf \circ \varphi + lg \circ \varphi \\
&= k\varphi^*(f) + l\varphi^*(g)
\end{aligned}$$

よって, $\varphi^*(kf + lg) = k\varphi^*(f) + l\varphi^*(g)$ が成り立つ. ゆえに, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ の双対写像 φ^* は線形写像である. □

定理 4.4.13. 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ の双対写像 φ^* が与えられたとき, その vector 空間 V とその双対空間 V^* との双対性を表す内積 D_V とその vector 空間 W とその双対空間 W^* との双対性を表す内積 D_W について, $\forall \mathbf{v} \in V \forall f \in W^*$ に対し, $D_W\left(\varphi\left(\mathbf{v}\right), f\right) = D_V\left(\mathbf{v}, \varphi^*(f)\right)$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ の双対写像 φ^* が与えられたとき, その vector 空間 V とその双対空間 V^* との双対性を表す内積 D_V とその vector 空間 W とその双対空間 W^* との双対性を表す内積 D_W について, $\forall \mathbf{v} \in V \forall f \in W^*$ に対し, 次のようになる.

$$D_W\left(\varphi\left(\mathbf{v}\right), f\right) = f\left(\varphi\left(\mathbf{v}\right)\right) = f \circ \varphi\left(\mathbf{v}\right) = \varphi^*(f)\left(\mathbf{v}\right) = D_V\left(\mathbf{v}, \varphi^*(f)\right)$$

□

定理 4.4.14. 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, 再双対空間での自然な線形同型写像 $\rho : V \rightarrow V^{**}; \mathbf{v} \mapsto \left(\widehat{\mathbf{v}} : V^* \rightarrow K; f \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right)$, $\sigma : W \rightarrow W^{**}; \mathbf{w} \mapsto \left(\widehat{\mathbf{w}} : W^* \rightarrow K; f \mapsto f\left(\mathbf{w}\right)\right)$ を用いれば $\sigma^{-1} \circ \varphi^{**} \circ \rho = \varphi$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, 再双対空間での自然な線形同型写像たち $\rho : V \rightarrow V^{**}; \mathbf{v} \mapsto \left(\widehat{\mathbf{v}} : V^* \rightarrow K; f \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right)$, $\sigma : W \rightarrow W^{**}; \mathbf{w} \mapsto \left(\widehat{\mathbf{w}} : W^* \rightarrow K; f \mapsto f\left(\mathbf{w}\right)\right)$ を用いれば, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1} \circ \varphi^{**} \circ \rho\left(\mathbf{v}\right) &= \sigma^{-1}\left(\varphi^{**}\left(\rho\left(\mathbf{v}\right)\right)\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(\varphi^{**}\left(\widehat{\mathbf{v}} : V^* \rightarrow K; f \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right)\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(\left(\widehat{\mathbf{v}} : V^* \rightarrow K; f \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right) \circ \varphi^*\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(\widehat{\mathbf{v}} \circ \varphi^* : W^* \rightarrow K; f \mapsto \widehat{\mathbf{v}} \circ \varphi^*(f)\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(\widehat{\mathbf{v}} \circ \varphi^* : W^* \rightarrow K; f \mapsto \widehat{\mathbf{v}} \circ \left(f \circ \varphi\right)\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(\widehat{\mathbf{v}} \circ \varphi^* : W^* \rightarrow K; f \mapsto \left(f \circ \varphi\right)\left(\mathbf{v}\right)\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(\widehat{\mathbf{v}} \circ \varphi^* : W^* \rightarrow K; f \mapsto f\left(\varphi\left(\mathbf{v}\right)\right)\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(\sigma\left(\varphi\left(\mathbf{v}\right)\right) : W^* \rightarrow K; f \mapsto \sigma\left(\varphi\left(\mathbf{v}\right)\right)\left(f\right)\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(\sigma\left(\varphi\left(\mathbf{v}\right)\right)\right) = \sigma^{-1} \circ \sigma \circ \varphi\left(\mathbf{v}\right) = \varphi\left(\mathbf{v}\right)
\end{aligned}$$

よって, $\sigma^{-1} \circ \varphi^{**} \circ \rho = \varphi$ が成り立つ. □

定理 4.4.15. 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\begin{gathered}
\ker \varphi^* = V(\varphi)^{\perp} \\
V\left(\varphi^*\right)^{\perp\perp} = \ker \varphi^{**\perp}
\end{gathered}$$

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, $\forall f \in W^*$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
f \in V(\varphi)^{\perp} &\Leftrightarrow \forall \varphi\left(\mathbf{v}\right) \in V(\varphi)\left[f\left(\varphi\left(\mathbf{v}\right)\right) = 0\right] \\
&\Leftrightarrow \forall \mathbf{v} \in V\left[f \circ \varphi\left(\mathbf{v}\right) = \varphi^*(f)\left(\mathbf{v}\right) = 0\right] \\
&\Leftrightarrow \varphi^*(f) = 0 \\
&\Leftrightarrow f \in \ker \varphi^*
\end{aligned}$$

$\ker\varphi^* = V(\varphi)^\perp$ が成り立つ. これにより, 次式が得られる.

$$\begin{aligned}
V\left(\varphi^*\right)^{\perp\perp} &= \left(V\left(\varphi^*\right)^\perp\right)^\perp \\
&= \left(\ker\left(\varphi^*\right)^*\right)^\perp \\
&= \ker\varphi^{**\perp}
\end{aligned}$$

□

定理 4.4.16. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, その線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ の双対写像 φ^* について, $\mathrm{rank}\varphi^* = \mathrm{rank}\varphi$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, その線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ の双対写像 φ^* について, 次元公式と定理 4.2.4, 定理 4.2.12, 定理 4.4.15 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}\varphi^* &= \dim V^* - \mathrm{nullity}\varphi^* \\
&= \dim V^* - \dim\ker\varphi^* \\
&= \dim V^* - \dim V(\varphi)^\perp \\
&= \dim V^* - (\dim V - \dim V(\varphi)) \\
&= \dim V^* - \dim V + \dim V(\varphi) \\
&= \dim V - \dim V + \mathrm{rank}\varphi \\
&= \mathrm{rank}\varphi
\end{aligned}$$

□

定理 4.4.17. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- その線形写像 φ が全射であるならそのときに限り, その双対写像 φ^* は単射である.
- その線形写像 φ が単射であるならそのときに限り, その双対写像 φ^* は全射である.
- その線形写像 φ が全単射であるならそのときに限り, その双対写像 φ^* は全単射である. このとき, $\varphi^{*-1} = \varphi^{-1*}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, その線形写像 φ が全射であるなら, $V(\varphi) = W$ が成り立つので, 定理 4.2.4, 定理 4.4.16 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}\varphi^* &= \mathrm{rank}\varphi \\
&= \dim W \\
&= \dim W^*
\end{aligned}$$

次元公式より $\mathrm{nullity}\varphi^* = 0$ が得られるので, $\ker\varphi^* = \{0 : W \rightarrow K; \mathbf{w} \mapsto 0\}$ が成り立つ. 定理 1.3.17 よりその双対写像 φ^* は単射である.

逆に, その双対写像 φ^* が単射であるなら, 定理 1.2.12 より $\ker\varphi^* = \{0 : W \rightarrow K; \mathbf{w} \mapsto 0\}$ が成り立つ. $V(\varphi) \subseteq W$ が成り立つのは明らかであるので, 次元公式と定理 4.2.4, 定理 4.4.16 より次のようになる.

$$\mathrm{rank}\varphi = \mathrm{rank}\varphi^*$$

$$\begin{aligned}
&= \dim W^* - \mathrm{nullity}\varphi^* \\
&= \dim W^* \\
&= \dim W
\end{aligned}$$

したがって, 定理 1.1.22 より $V(\varphi) = W$ が成り立つので, その線形写像 φ は全射である.

また, その線形写像 φ が単射であるなら, 定理 1.2.12 より $\ker\varphi = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. そこで, $V(\varphi^*) \subseteq V^*$ が成り立つのは明らかであるので, 次元公式と定理 4.2.4, 定理 4.4.16 より次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}\varphi^* &= \mathrm{rank}\varphi \\
&= \dim V - \mathrm{nullity}\varphi \\
&= \dim V \\
&= \dim V^*
\end{aligned}$$

したがって, 定理 1.1.22 より $V(\varphi^*) = V^*$ が成り立つので, その双対写像 φ^* は全射である.

逆に, その線形写像 φ^* が全射であるなら, $V(\varphi^*) = V^*$ が成り立つので, 定理 4.2.4, 定理 4.4.16 より次のようになる.

$$\dim V = \dim V^* = \mathrm{rank}\varphi^* = \mathrm{rank}\varphi$$

次元公式より $\mathrm{nullity}\varphi = 0$ が得られるので, $\ker\varphi = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. 定理 1.2.12 よりその線形写像 φ は単射である.

上の議論よりその線形写像 φ が全単射であるならそのときに限り, その双対写像 φ^* は全単射であることが分かる. このとき, $\forall f \in W^*$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\varphi^{-1^*} \circ \varphi^*(f) = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = f$$

$\forall f \in V^*$ に対し, 次のようになることから,

$$\varphi^* \circ \varphi^{-1^*}(f) = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = f$$

よって, ${\varphi^*}^{-1} = \varphi^{-1^*}$ が得られる. □

定理 4.4.18. 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- その vector 空間 V の部分 vector 空間 U が与えられたとき, $V(\varphi|U)^\perp = V\left({\varphi^*}^{-1}|U^\perp\right)$ が成り立つ.
- その vector 空間 W の部分 vector 空間 U が与えられたとき, $V\left({\varphi^{**}}^{-1}|U^{\perp\perp}\right)^\perp = V\left(\varphi^*|U^\perp\right)^{\perp\perp}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, $\forall f \in W^*$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
f \in V(\varphi|U)^\perp &\Leftrightarrow \forall\varphi(\mathbf{u}) \in V(\varphi|U)\left[f(\varphi(\mathbf{u})) = f \circ \varphi(\mathbf{u}) = 0\right] \\
&\Leftrightarrow \forall\mathbf{u} \in U\left[\varphi^*(f)(\mathbf{u}) = 0\right] \\
&\Leftrightarrow \varphi^*(f) \in U^\perp \Leftrightarrow \{\varphi^*(f)\} \subseteq U^\perp \\
&\Rightarrow f \in V\left({\varphi^*}^{-1}|\{\varphi^*(f)\}\right) \subseteq V\left({\varphi^*}^{-1}|U^\perp\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \in V\left(\varphi^{*-1}|U^{\perp}\right)$$

逆に, $f \in V\left(\varphi^{*-1}|U^{\perp}\right)$ が成り立つなら, $\varphi^{*}(f) \in V\left(\varphi^{*}|V\left(\varphi^{*-1}|U^{\perp}\right)\right) \subseteq U^{\perp}$, 即ち, $\{\varphi^{*}(f)\} \subseteq U^{\perp}$ が成り立つので, 以上の議論により, $\forall f \in W^{*}$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} f \in V\left(\varphi|U\right)^{\perp} &\Leftrightarrow \{\varphi^{*}(f)\} \subseteq U^{\perp} \\ &\Leftrightarrow f \in V\left(\varphi^{*-1}|U^{\perp}\right) \end{aligned}$$

よって, $V\left(\varphi|U\right)^{\perp} = V\left(\varphi^{*-1}|U^{\perp}\right)$ が成り立つ.

一方で, 上記の議論により直ちに $V\left(\varphi^{**-1}|U^{\perp\perp}\right)^{\perp} = V\left(\varphi^{*}|U^{\perp}\right)^{\perp\perp}$ が得られる. □

参考文献

[1] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 1976. 新装版第 1 刷 p182-191 ISBN978-4-00-029873-5

[2] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958. 第 53 版 p193-197 ISBN4-7853-1301-3

4.5 tensor 積

4.5.1 双線形写像

公理 4.5.1. 体 K 上の vector 空間たち U, V, W が与えられたとき, 次のことを満たすような写像 $\Phi : U \times V \rightarrow W$ をその直積 $U \times V$ からその vector 空間 W への K-双線形写像, または単に, 双線形写像という.

- $\forall k, l \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in U \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\Phi\left(k\mathbf{u} + l\mathbf{w}, \mathbf{v} \right) = k\Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + l\Phi\left(\mathbf{w}, \mathbf{v} \right)$ が成り立つ.
- $\forall k, l \in K \forall \mathbf{u} \in U \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, $\Phi\left(\mathbf{u}, k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \right) = k\Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + l\Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{w} \right)$ が成り立つ.

さらに, このような写像全体の集合を以下, $L(U, V; W)$ と書くことにする.

定理 4.5.1. 体 K 上の vector 空間たち U, V, W が与えられたとき, その直積 $U \times V$ からその vector 空間 W への双線形写像全体の集合 $L(U, V; W)$ は体 K 上の vector 空間をなす.

証明. 体 K 上の vector 空間たち U, V, W が与えられたとき, その直積 $U \times V$ からその vector 空間 W への双線形写像全体の集合 $L(U, V; W)$ について, $\forall \Phi, X \in L(U, V; W)$ に対し, $\Phi + X : U \times V \rightarrow W$ なる写像 $\Phi + X$ が定義されて, $\forall k, l \in K \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in U \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
(\Phi + X)\left(k\mathbf{u} + l\mathbf{w}, \mathbf{v} \right) &= \Phi\left(k\mathbf{u} + l\mathbf{w}, \mathbf{v} \right) + X\left(k\mathbf{u} + l\mathbf{w}, \mathbf{v} \right) \\
&= k\Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + l\Phi\left(\mathbf{w}, \mathbf{v} \right) + kX\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + lX\left(\mathbf{w}, \mathbf{v} \right) \\
&= k(\Phi + X)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + l(\Phi + X)\left(\mathbf{w}, \mathbf{v} \right) \\
(\Phi + X)\left(\mathbf{u}, k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \right) &= \Phi\left(\mathbf{u}, k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \right) + X\left(\mathbf{u}, k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \right) \\
&= k\Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + l\Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{w} \right) + kX\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + lX\left(\mathbf{u}, \mathbf{w} \right) \\
&= k(\Phi + X)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + l(\Phi + X)\left(\mathbf{u}, \mathbf{w} \right)
\end{aligned}$$

二項演算 $+ : L(U, V; W) \times L(U, V; W) \rightarrow L(U, V; W)$ が定義されて, このとき, $\forall \left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \in U \times V$ に対し, 次のような写像 0 が定義されることで,

$$0 : U \times V \rightarrow W; \left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \mapsto \mathbf{0}$$

これは直ちに $0 \in L(U, V; W)$ が成り立つことが分かり, $\forall \Phi, X, \Psi \in L(U, V; W)$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
((\Phi + X) + \Psi)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) &= (\Phi + X)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + \Psi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \\
&= \left(\Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + X\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \right) + \Psi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \\
&= \Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + \left(X\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + \Psi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \right) \\
&= \Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + (X + \Psi)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \\
&= (\Phi + (X + \Psi))\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right)
\end{aligned}$$

$\forall \Phi \in L(U, V; W)$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
(\Phi + 0)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) = \Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + 0\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) = \Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + \mathbf{0} = \Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \\
(0 + \Phi)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) = 0\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + \Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) = \mathbf{0} + \Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) = \Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right)
\end{aligned}$$

$\forall \Phi \in L(U, V; W)$ に対し, 次式のように写像 $-\Phi$ が定義されれば,

$$-\Phi : U \times V \rightarrow W; \left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \mapsto -\Phi\left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right)$$

次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}(\varPhi-\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})=\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})+(-\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})=\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})-\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{0}=0(\mathbf{u},\mathbf{v})\\(-\varPhi+\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})=(-\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})+\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})=-\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})+\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{0}=0(\mathbf{u},\mathbf{v})\end{aligned}$$

$\forall\varPhi,X\in L(U,V;W)$ に対し, 次のようになるので,

$$(\varPhi+X)(\mathbf{u},\mathbf{v})=\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})+X(\mathbf{u},\mathbf{v})=X(\mathbf{u},\mathbf{v})+\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})=(X+\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

その組 $(L(U,V;W),+)$ は可換群をなす.

さらに, $\forall\alpha\in K\forall\varPhi\in L(U,V;W)$ に対し, $\alpha\varPhi:U\times V\rightarrow W$ なる写像 $\alpha\varPhi$ が定義されて, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{w}\in U\forall\mathbf{v}\in V$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}(\alpha\varPhi)(k\mathbf{u}+l\mathbf{w},\mathbf{v})&=\alpha\varPhi(k\mathbf{u}+l\mathbf{w},\mathbf{v})\\&=\alpha(k\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})+l\varPhi(\mathbf{w},\mathbf{v}))\\&=k(\alpha\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})+l(\alpha\varPhi)(\mathbf{w},\mathbf{v})\\(\alpha\varPhi)(\mathbf{u},k\mathbf{v}+l\mathbf{w})&=\alpha\varPhi(\mathbf{u},k\mathbf{v}+l\mathbf{w})\\&=\alpha(k\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})+l\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{w}))\\&=k(\alpha\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})+l(\alpha\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{w})\end{aligned}$$

scalar 倍 $\cdot:K\times L(U,V;W)\rightarrow L(U,V;W)$ が定義されている.

したがって, $\forall k\in K\forall\varPhi,X\in L(U,V;W)\forall(\mathbf{u},\mathbf{v})\in U\times V$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}(k(\varPhi+X))(\mathbf{u},\mathbf{v})&=k(\varPhi+X)(\mathbf{u},\mathbf{v})\\&=k(\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})+X(\mathbf{u},\mathbf{v}))\\&=k\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})+kX(\mathbf{u},\mathbf{v})\\&=(k\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})+(kX)(\mathbf{u},\mathbf{v})\\&=(k\varPhi+kX)(\mathbf{u},\mathbf{v})\end{aligned}$$

$\forall k,l\in K\forall\varPhi\in L(U,V;W)\forall(\mathbf{u},\mathbf{v})\in U\times V$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}((k+l)\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})&=(k+l)\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})\\&=k\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})+l\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})\\&=(k\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})+(l\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})\\&=(k\varPhi+l\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})\end{aligned}$$

$\forall k,l\in K\forall\varPhi\in L(U,V;W)\forall(\mathbf{u},\mathbf{v})\in U\times V$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}((kl)\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})&=(kl)\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})=k(l\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v}))\\&=k(l\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})=(k(l\varPhi))(\mathbf{u},\mathbf{v})\end{aligned}$$

$\exists 1\in K\forall\varPhi\in L(U,V;W)$ に対し, 次のようになる.

$$(1\varPhi)(\mathbf{u},\mathbf{v})=1\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})=\varPhi(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

以上より, その直積 $U\times V$ からその vector 空間 W への双線形写像全体の集合 $L(U,V;W)$ は体 K 上の vector 空間をなす. □

4.5.2 tensor 積

公理 4.5.2. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, vector 空間 T が与えられたとき, 双線形写像 $\varPhi : V \times W \rightarrow T$ のうち次のことを満たすものを考えよう.

- その vector 空間 V の有限集合である族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectors$\mathbf{v}_i$ が線形独立であるなら, その vector 空間 W の有限集合である任意の族 $\left\{\mathbf{w}_i\right\}_{i\in\varLambda_r}$ に対し, $\sum_{i\in\varLambda_r}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $\mathbf{w}_i=\mathbf{0}$ が成り立つ.
- その vector 空間 W の有限集合である族 $\left\{\mathbf{w}_i\right\}_{i\in\varLambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectors$\mathbf{w}_i$ が線形独立であるなら, その vector 空間 V の有限集合である任意の族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_r}$ に対し, $\sum_{i\in\varLambda_r}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$ が成り立つ.
- その vector 空間 T は $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{w}\in W$ なる vector$\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ によって生成される.

このような組 $(T,\varPhi)$ をそれらの vector 空間たち V, W の tensor 積, その双線形写像 $\varPhi$ を tensor 積での自然な双線形写像などといい, これらが存在すれば, 混乱の恐れがないとき, これらのうち 1 つを $T=V\otimes W$, $\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}$, $\varPhi=\otimes$ と書く.

定理 4.5.2. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, vector 空間 T が与えられたとき, 双線形写像 $\varPhi : V \times W \rightarrow T$ が次のことを満たすならそのときに限り,

- その vector 空間 V の有限集合である族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectors$\mathbf{v}_i$ が線形独立であるなら, その vector 空間 W の有限集合である任意の族 $\left\{\mathbf{w}_i\right\}_{i\in\varLambda_r}$ に対し, $\sum_{i\in\varLambda_r}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $\mathbf{w}_i=\mathbf{0}$ が成り立つ.
- その vector 空間 T は $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{w}\in W$ なる vector$\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ によって生成される.

それらの vector 空間たち V, W の基底がそれぞれ $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\left\langle\mathbf{w}_j\right\rangle_{j\in\varLambda_n}$ と与えられたとき, その組 $\left\langle\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\right\rangle_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ がその vector 空間 T の基底となる.

同様に, その双線形写像 $\varPhi : V \times W \rightarrow T$ が次のことを満たすならそのときに限り,

- その vector 空間 W の有限集合である族 $\left\{\mathbf{w}_i\right\}_{i\in\varLambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectors$\mathbf{w}_i$ が線形独立であるなら, その vector 空間 V の有限集合である任意の族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_r}$ に対し, $\sum_{i\in\varLambda_r}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$ が成り立つ.
- その vector 空間 T は $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{w}\in W$ なる vector$\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ によって生成される.

それらの vector 空間たち V, W の基底がそれぞれ $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\left\langle\mathbf{w}_j\right\rangle_{j\in\varLambda_n}$ と与えられたとき, その組 $\left\langle\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\right\rangle_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ がその vector 空間 T の基底となる.

定義 4.5.3. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, それらの vector 空間たち V, W の基底たち $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\left\langle\mathbf{w}_j\right\rangle_{j\in\varLambda_n}$, これらの vector 空間たち V, W の tensor 積 $(T,\varPhi)$ が与えられたとき, 定理 4.5.2 よりその組 $\left\langle\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\right\rangle_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ がその vector 空間 T の基底となるのであった. そこで, これらの基底たち $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\left\langle\mathbf{w}_j\right\rangle_{j\in\varLambda_n}$ がそれぞれ α, β とおかれれば, このような基底 $\left\langle\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\right\rangle_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ をこれらの基底たち $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\left\langle\mathbf{w}_j\right\rangle_{j\in\varLambda_n}$ からその tensor 積 $(T,\varPhi)$ によって誘導される基底ということにし, これらが存在

すれば, 混乱の恐れがないとき, これらのうち 1 つを $\langle \varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\rangle_{(i,j)\in \varLambda_m\times\varLambda_n}=\alpha\otimes\beta$ と書くことにする[*35].

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, vector 空間 T が与えられたとき, 双線形写像 $\varPhi:V\times W\rightarrow T$ が次のことを満たすなら,

- その vector 空間 V の有限集合である族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectors$\mathbf{v}_i$ が線形独立であるなら, その vector 空間 W の有限集合である任意の族 $\left\{\mathbf{w}_i\right\}_{i\in\varLambda_r}$ に対し, $\sum_{i\in\varLambda_r}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i\in\varLambda_r$ に対し, $\mathbf{w}_i=\mathbf{0}$ が成り立つ.
- その vector 空間 T は $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{w}\in W$ なる vector$\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ によって生成される.

それらの vector 空間たち V, W の基底がそれぞれ $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\varLambda_n}$ と与えられたとき, その vector 空間 T はその族 $\left\{\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\right\}_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ によって生成されることは直ちにわかるであろう. そこで, $\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, 次のようになり,

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)&=\sum_{i\in\varLambda_m}\sum_{j\in\varLambda_n}\xi_{ij}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\\&=\sum_{i\in\varLambda_m}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\sum_{j\in\varLambda_n}\xi_{in}\mathbf{w}_j\right)=\mathbf{0}\end{aligned}$$

そこで, それらの族々 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\varLambda_m}$, $\left\{\mathbf{w}_j\right\}_{j\in\varLambda_n}$ が線形独立であるので, $\forall i\in\varLambda_m$ に対し, $\sum_{j\in\varLambda_n}\xi_{ij}\mathbf{w}_j=\mathbf{0}$ が成り立ち, したがって, $\forall(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n$ に対し, $\xi_{ij}=0$ が成り立つ, 即ち, その族 $\left\{\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\right\}_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ は線形独立である. ゆえに, その組 $\langle\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\rangle_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ がその vector 空間 T の基底となる.

一方で, それらの vector 空間たち V, W の基底がそれぞれ $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\varLambda_n}$ と与えられたとき, その組 $\langle\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\rangle_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ がその vector 空間 T の基底となるなら, その vector 空間 T は $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{w}\in W$ なる vector$\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ によって生成されるのは明らかであろう. その vector 空間 V の有限集合である族 $\left\{\mathbf{v}_i'\right\}_{i\in\varLambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectors$\mathbf{v}_i'$ が線形独立であるなら, その vector 空間 W の有限集合である任意の族 $\left\{\mathbf{w}_i'\right\}_{i\in\varLambda_r}$ に対し, 次式のようにおかれると,

$$\mathbf{v}_i'=\sum_{j\in\varLambda_m}k_{ij}\mathbf{v}_j,\quad\mathbf{w}_i'=\sum_{j\in\varLambda_n}l_{ij}\mathbf{w}_j$$

$\sum_{i\in\varLambda_r}\varPhi\left(\mathbf{v}_i',\mathbf{w}_i'\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, その族 $\left\{\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\right\}_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ は線形独立なので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=\sum_{i\in\varLambda_r}\varPhi\left(\mathbf{v}_i',\mathbf{w}_i'\right)\\&=\sum_{h\in\varLambda_r}\varPhi\left(\sum_{i\in\varLambda_m}k_{hi}\mathbf{v}_i,\sum_{j\in\varLambda_n}l_{hj}\mathbf{w}_j\right)\\&=\sum_{h\in\varLambda_r}\sum_{i\in\varLambda_m}\sum_{j\in\varLambda_n}k_{hi}l_{hj}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\\&=\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\sum_{h\in\varLambda_r}k_{hi}l_{hj}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\end{aligned}$$

[*35] なお, $\forall\mathbf{t}\in V\otimes W$ に対し, $\mathbf{t}=\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}$ と書かれることができるとは限らないことに注意されたい.

したがって, $\forall(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n$ に対し, $\sum_{h \in \varLambda_r} k_{hi} l_{hj} = 0$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} l_{11} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \vdots \\ k_{1m} \end{pmatrix} + \cdots + l_{r1} \begin{pmatrix} k_{r1} \\ k_{r2} \\ \vdots \\ k_{rm} \end{pmatrix} & \cdots & l_{1n} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \vdots \\ k_{1m} \end{pmatrix} + \cdots + l_{rn} \begin{pmatrix} k_{r1} \\ k_{r2} \\ \vdots \\ k_{rm} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{r1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1m} & k_{2m} & \cdots & k_{rm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & l_{rn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_{11}l_{11} + \cdots + k_{r1}l_{r1} & \cdots & k_{11}l_{1n} + \cdots + k_{r1}l_{rn} \\ k_{12}l_{11} + \cdots + k_{r2}l_{r1} & \cdots & k_{12}l_{1n} + \cdots + k_{r2}l_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1m}l_{11} + \cdots + k_{rm}l_{r1} & \cdots & k_{1m}l_{1n} + \cdots + k_{rm}l_{rn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\forall j \in \varLambda_n$ に対し, 次式が成り立つ.

$$l_{1j} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \vdots \\ k_{1m} \end{pmatrix} + l_{2j} \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{2m} \end{pmatrix} + \cdots + l_{rj} \begin{pmatrix} k_{r1} \\ k_{r2} \\ \vdots \\ k_{rm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

そこで, それらの vectors$\mathbf{v}'_i$ が線形独立であるので, それらの vectors $\begin{pmatrix} k_{h1} \\ k_{h2} \\ \vdots \\ k_{hm} \end{pmatrix}$ も線形独立である. したがって, $\forall h \in \varLambda_r \forall j \in \varLambda_n$ に対し, $l_{hj} = 0$ が成り立つ. 以上より, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $\mathbf{w}'_i = \mathbf{0}$ が得られる. よって, 次のことが成り立つ.

- その vector 空間 V の有限集合である族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \varLambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectors$\mathbf{v}_i$ が線形独立であるなら, その vector 空間 W の有限集合である任意の族 $\{\mathbf{w}_i\}_{i \in \varLambda_r}$ に対し, $\sum_{i \in \varLambda_r} \varPhi(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i) = \mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$ が成り立つ.
- その vector 空間 T は $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$ なる vector$\varPhi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ によって生成される.

□

定理 4.5.3. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W がどのように与えられたとしても, これらの vector 空間たち V, W の tensor 積 $(T, \varPhi)$ が必ず存在する, 即ち, ある vector 空間 T とある双線形写像 $\varPhi : V \times W \to T$ が必ず存在して, 次のことを満たす.

- その vector 空間 V の有限集合である族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \varLambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectors$\mathbf{v}_i$ が線形独立

であるなら, その vector 空間 W の有限集合である任意の族 $\left\{\mathbf{w}_i\right\}_{i\in\Lambda_r}$ に対し, $\sum_{i\in\Lambda_r}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i\in\Lambda_r$ に対し, $\mathbf{w}_i=\mathbf{0}$ が成り立つ.

- その vector 空間 W の有限集合である族 $\left\{\mathbf{w}_i\right\}_{i\in\Lambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectors$\mathbf{w}_i$ が線形独立であるなら, その vector 空間 V の有限集合である任意の族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\Lambda_r}$ に対し, $\sum_{i\in\Lambda_r}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i\in\Lambda_r$ に対し, $\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$ が成り立つ.
- その vector 空間 T は $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{w}\in W$ なる vector$\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ によって生成される.

しかも, このような組 $(T,\varPhi)$ について, 任意の vector 空間 U と任意の双線形写像 $X:V\times W\rightarrow U$ が与えられたとしても, ある線形写像 $\rho:T\rightarrow U$ が一意的に存在して, $X=\rho\circ\varPhi$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, これらの基底たちがそれぞれ $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\Lambda_m}$, $\left\langle\mathbf{w}_j\right\rangle_{j\in\Lambda_n}$ と任意の mn 次元 vector 空間 T の基底が $\left\langle\mathbf{t}_{ij}\right\rangle_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}$ と与えられたとすれば, 次式のようにおかれると,

$$\mathbf{v}=\sum_{i\in\Lambda_m}l_i\mathbf{v}_i,\quad\mathbf{w}=\sum_{j\in\Lambda_n}m_j\mathbf{w}_j$$

次の写像 $\varPhi$ を用いた組 $(T,\varPhi)$ が求める組である.

$$\varPhi:V\times W\rightarrow T;(\mathbf{v},\mathbf{w})\mapsto\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}l_im_j\mathbf{t}_{ij}$$

実際, $\forall k,l\in K\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, $\mathbf{u}=\sum_{i\in\Lambda_m}k_i\mathbf{v}_i$ とおかれれば, 次のようになるし,

$$\begin{aligned}\varPhi\left(k\mathbf{u}+l\mathbf{v},\mathbf{w}\right)&=\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\left(kk_i+ll_i\right)m_j\mathbf{t}_{ij}\\&=k\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}k_il_j\mathbf{t}_{ij}+l\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}k_il_j\mathbf{t}_{ij}\\&=k\varPhi\left(\mathbf{u},\mathbf{w}\right)+l\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\end{aligned}$$

$\forall k,l\in K\forall\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{u},\mathbf{w}\in W$ に対し, $\mathbf{u}=\sum_{j\in\Lambda_n}n_j\mathbf{w}_j$ とおかれれば, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}\varPhi\left(\mathbf{v},k\mathbf{w}+l\mathbf{u}\right)&=\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}k_i\left(km_j+ln_j\right)\mathbf{t}_{ij}\\&=k\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}k_im_j\mathbf{t}_{ij}+l\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}k_in_j\mathbf{t}_{ij}\\&=k\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)+l\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{u}\right)\end{aligned}$$

その写像 $\varPhi$ は双線形写像である.

さらに, $\forall(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n$ に対し, $\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)=\mathbf{t}_{ij}$ が成り立つことから, その組 $\left\langle\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\right\rangle_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}$ がその vector 空間 T の基底となっている. したがって, 定理 4.5.2 より次のことが成り立つ.

- その vector 空間 V の有限集合である族 $\left\{\mathbf{v}_i\right\}_{i\in\Lambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectors$\mathbf{v}_i$ が線形独立であるなら, その vector 空間 W の有限集合である任意の族 $\left\{\mathbf{w}_i\right\}_{i\in\Lambda_r}$ に対し, $\sum_{i\in\Lambda_r}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら, $\forall i\in\Lambda_r$ に対し, $\mathbf{w}_i=\mathbf{0}$ が成り立つ.

- その vector 空間 W の有限集合である族 $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in\Lambda_r}$ が与えられたとする．それらの vectors$\mathbf{w}_i$ が線形独立であるなら，その vector 空間 V の有限集合である任意の族 $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\Lambda_r}$ に対し，$\sum_{i\in\Lambda_r}\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_i\right)=\mathbf{0}$ が成り立つなら，$\forall i\in\Lambda_r$ に対し，$\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$ が成り立つ．
- その vector 空間 T は $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{w}\in W$ なる vector$\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)$ によって生成される．

よって，これらの vector 空間たち V, W の tensor 積 $(T,\varPhi)$ が必ず存在する．逆に，このような条件を満たす組 $(T,\varPhi)$ はこのようにして得られる．

また，このような組 $(T,\varPhi)$ について，任意の vector 空間 U と任意の双線形写像 $X:V\times W\rightarrow U$ が与えられたとしても，$\mathbf{t}=\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}\mathbf{t}_{ij}$ として線形写像 ρ が次式を満たすようにとられ，

$$\rho:T\rightarrow U;\mathbf{t}\mapsto\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}X\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)$$

$\forall\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{w}\in W$ に対し，次式のようにおかれると，

$$\mathbf{v}=\sum_{i\in\Lambda_m}k_i\mathbf{v}_i,\quad\mathbf{w}=\sum_{j\in\Lambda_n}l_j\mathbf{w}_j$$

次のようになることから，

$$\begin{aligned}X\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)&=X\left(\sum_{i\in\Lambda_m}k_i\mathbf{v}_i,\sum_{j\in\Lambda_n}l_j\mathbf{w}_j\right)\\&=\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}k_il_jX\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\\&=\rho\left(\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}k_il_j\mathbf{t}_{ij}\right)\\&=\rho\left(\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}k_il_j\varPhi\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)\right)\\&=\rho\left(\varPhi\left(\sum_{i\in\Lambda_m}k_i\mathbf{v}_i,\sum_{j\in\Lambda_n}l_j\mathbf{w}_j\right)\right)\\&=\rho\left(\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\right)=\rho\circ\varPhi\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\end{aligned}$$

ある線形写像 $\rho:T\rightarrow U$ が存在して，$X=\rho\circ\varPhi$ が成り立つ．さらに，このような線形写像 ρ がほかに σ と与えられたとき，$\forall\mathbf{t}\in T$ に対し，$\mathbf{t}=\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}\mathbf{t}_{ij}$ として次のようになるので，

$$\rho\left(\mathbf{t}\right)=\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}X\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j\right)=\sigma\left(\mathbf{t}\right)$$

$\rho=\sigma$ が得られる．よって，ある線形写像 $\rho:T\rightarrow U$ が一意的に存在して，$X=\rho\circ\varPhi$ が成り立つ． □

定理 4.5.4. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき，それらの vector 空間たち V, W の tensor 積が $(T,\varPhi)$, (U,X) と与えられて $X=\rho\circ\varPhi$, $\varPhi=\sigma\circ X$ と与えられたとき，$\sigma=\rho^{-1}$ が成り立ち，さらに，$T\cong U$ が成り立つ．

　こういった議論により, 先ほどのようにそれらの vector 空間たち V, W の tensor 積 $(T,\varPhi)$ を $T=V\otimes W$, $\varPhi(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}$, $\varPhi=\otimes$ と書くことにしても, vector 空間としての構造が保てるので, 混乱は生じなかろう.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, それらの vector 空間たち V, W の tensor 積が $(T,\varPhi)$, (U,X) と与えられて $X=\rho\circ\varPhi$, $\varPhi=\sigma\circ X$ と与えられたとき, $\varPhi=\sigma\circ X=\sigma\circ\rho\circ\varPhi$ が成り立つことから, $V(\varPhi)=T$ より, それらの vector 空間たち V, W の基底たちがそれぞれ $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\varLambda_n}$ とおかれると, $\forall\mathbf{t}\in T$ に対し, 定理 4.5.2 より $\mathbf{t}=\displaystyle\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\varPhi(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j)$ として次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathbf{t}&=\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\varPhi(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j)\\&=\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\sigma\circ\rho\circ\varPhi(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j)\\&=\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\sigma\circ\rho\left(\varPhi(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j)\right)\\&=\sigma\circ\rho\left(\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\varPhi(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j)\right)\\&=\sigma\circ\rho(\mathbf{t})\end{aligned}$$

ゆえに, $\sigma\circ\rho=I_T$ が得られる. 同様にして $\rho\circ\sigma=I_U$ も得られるので, $\sigma=\rho^{-1}$ が成り立ち, その線形写像 $\rho:T\to U$ は線形同型写像なので, $T\cong U$ が成り立つ. □

定理 4.5.5. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\dim V\otimes W=\dim V\dim W=mn$$

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 定理 4.5.3 の証明での議論によりこれらの基底たちがそれぞれ $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\varLambda_n}$ と任意の mn 次元 vector 空間 T の基底が $\langle\mathbf{t}_{ij}\rangle_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ と与えられたとすれば, $\forall\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, 次式のようにおかれると,

$$\mathbf{v}=\sum_{i\in\varLambda_m}k_i\mathbf{v}_i,\quad\mathbf{w}=\sum_{j\in\varLambda_n}l_j\mathbf{w}_j$$

次の写像 $\varPhi$ を用いた組 $(T,\varPhi)$ がその tensor 積である.

$$\varPhi:V\times W\to T;(\mathbf{v},\mathbf{w})\mapsto\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}k_il_j\mathbf{t}_{ij}$$

さらに, 定理 4.5.4 に注意すれば, 次式が成り立つ.

$$\dim V\otimes W=\dim V\dim W=mn$$

□

4.5.3 双対空間の線形形式の像倍

定義 4.5.4. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式のような写像 $\psi_{V,W}$ をここではその vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像とい

うことにし, これの像 $\psi_{V,W}(\mathbf{w},f)$ をその vector 空間 W の vector$\mathbf{w}$ のその双対空間 V^* の線形形式の像倍ということにする.

$$\psi_{V,W}: W \times V^* \to L(V,W); (\mathbf{w},f) \mapsto (\psi_{V,W}(\mathbf{w},f): V \to W; \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v})\mathbf{w})$$

定理 4.5.6. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, その vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ は双線形写像である.

これにより, その写像 $\psi_{V,W}$ をこのように呼んでも混乱は生じなかろう.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, その vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ について, $\forall k,l \in K \forall \mathbf{u},\mathbf{w} \in W \forall f \in V^*$ に対し, 線形写像 $\psi_{V,W}(k\mathbf{u}+l\mathbf{w},f)$ が定義されて, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\psi_{V,W}(k\mathbf{u}+l\mathbf{w},f)(\mathbf{v}) &= f(\mathbf{v})(k\mathbf{u}+l\mathbf{w}) \\
&= kf(\mathbf{v})\mathbf{u}+lf(\mathbf{v})\mathbf{w} \\
&= k\psi_{V,W}(\mathbf{u},f)(\mathbf{v})+l\psi_{V,W}(\mathbf{w},f)(\mathbf{v}) \\
&= (k\psi_{V,W}(\mathbf{u},f)+l\psi_{V,W}(\mathbf{w},f))(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

以上より, $\psi_{V,W}(k\mathbf{u}+l\mathbf{w},f) = k\psi_{V,W}(\mathbf{u},f)+l\psi_{V,W}(\mathbf{w},f)$ が得られる.

$\forall k,l \in K \forall \mathbf{w} \in W \forall f,g \in V^*$ に対し, 線形写像 $\psi_{V,W}(\mathbf{w},kf+lg)$ が定義されて, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\psi_{V,W}(\mathbf{w},kf+lg)(\mathbf{v}) &= (kf+lg)(\mathbf{v})\mathbf{w} \\
&= (kf(\mathbf{v})+lg(\mathbf{v}))\mathbf{w} \\
&= kf(\mathbf{v})\mathbf{w}+lg(\mathbf{v})\mathbf{w} \\
&= k\psi_{V,W}(\mathbf{w},f)(\mathbf{v})+l\psi_{V,W}(\mathbf{w},g)(\mathbf{v}) \\
&= (k\psi_{V,W}(\mathbf{w},f)+l\psi_{V,W}(\mathbf{w},g))(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

以上より, $\psi_{V,W}(\mathbf{w},kf+lg) = k\psi_{V,W}(\mathbf{w},f)+l\psi_{V,W}(\mathbf{w},g)$ が得られる.

よって, その vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ は双線形写像である. □

定理 4.5.7. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, その vector 空間 $L(V,W)$ とその vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ との組 $(L(V,W),\psi_{V,W})$ はそれらの vector 空間たち W, V^* の tensor 積である. さらに, 次式が成り立つ.

$$L(V,W) \cong W \otimes V^*$$

このとき, ある線形同型写像 $\rho: W \otimes V^* \overset{\sim}{\to} L(V,W)$ が存在して, $\psi_{V,W} = \rho \circ \otimes$ が成り立ち, その線形写像 ρ は $\rho(\mathbf{w} \otimes f): V \to W; \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v})\mathbf{w}$ を満たす.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, その vector 空間 $L(V,W)$ とその vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ との組 $(L(V,W),\psi_{V,W})$ について, その写像 $\psi_{V,W}$ は定理 4.5.6 より双線形写像であった.

そこで, これらの vector 空間たち V, W の基底たちがそれぞれ $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\Lambda_n}$, その双対空間 V^* の基底がその基底 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_m}$ の双対基底 $\langle\phi_i\rangle_{i\in\Lambda_m}$ と与えられたとき, これらの基底たち $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\Lambda_n}$

がそれぞれ α, β とおかれれば, $\forall i,k \in \varLambda_m \forall j \in \varLambda_n$ に対し, その線形写像 $\psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_j, \phi_i \right)$ のそれらの基底たち α, β に関する表現行列 $\left[\psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_j, \phi_i \right) \right]_\alpha^\beta$ について, その vector 空間 K^m の標準直交基底 $\left\langle \mathbf{e}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_m}$, その vector 空間 K^n の標準直交基底 $\left\langle \mathbf{e}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$, それらの基底たち α, β に関する基底変換における線形同型写像 $\varphi_\alpha : K^m \rightarrow V$, $\varphi_\beta : K^n \rightarrow W$ を用いて次式が成り立つことにより

$$\begin{tikzcd}
K^m \arrow[r, "\varphi_\beta^{-1} \circ \psi_{V,W}(\mathbf{w}_j, \phi_i) \circ \varphi_\alpha"] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] & K^n \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_\beta"] \\
V \arrow[r, "\psi_{V,W}(\mathbf{w}_j, \phi_i)"] & W
\end{tikzcd}$$

次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_\beta^{-1} \circ \psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_j, \phi_i \right) \circ \varphi_\alpha \left(\mathbf{e}_k \right) &= \varphi_\beta^{-1}\left(\psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_j, \phi_i \right)\left(\varphi_\alpha \left(\mathbf{e}_k \right) \right) \right) \\
&= \varphi_\beta^{-1}\left(\psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_j, \phi_i \right)\left(\mathbf{v}_k \right) \right) \\
&= \varphi_\beta^{-1}\left(\phi_i \left(\mathbf{v}_k \right) \mathbf{w}_j \right) = \varphi_\beta^{-1}\left(\delta_{ik} \mathbf{w}_j \right) \\
&= \delta_{ik} \varphi_\beta^{-1}\left(\mathbf{w}_j \right) = \delta_{ik} \mathbf{e}_j = \left(\delta_{ik} \delta_{jl} \right)_{l \in \varLambda_n}
\end{aligned}$$

$\left[\psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_j, \phi_i \right) \right]_\alpha^\beta = \left(\delta_{ik} \delta_{jl} \right)_{(k,l) \in \varLambda_m \times \varLambda_n}$ が成り立つ. そこで, 定理 1.5.14 よりその表現行列 $\left[\psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_j, \phi_i \right) \right]_\alpha^\beta$ を用いて次式のように定義される写像 F は vector 空間 $L(V,W)$ から vector 空間 $\mathrm{M}(n,m,K)$ への線形同型写像であるので,

$$F : L(V,W) \overset{\sim}{\rightarrow} \mathrm{M}(n,m,K); \psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_j, \phi_i \right) \mapsto \left[\psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_j, \phi_i \right) \right]_\alpha^\beta$$

その行列 $\left(\delta_{ik} \delta_{jl} \right)_{(k,l) \in \varLambda_m \times \varLambda_n}$ はその vector 空間 $\mathrm{M}(m,n,K)$ の基底であることに注意すれば, 定理 1.5.2 よりその組 $\left(\psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_j, \phi_i \right) \right)_{(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n}$ はその vector 空間 $L(V,W)$ の基底をなす.

あとは定理 4.5.2 より次のことが成り立つ.

- その vector 空間 W の有限集合である族 $\left\{ \mathbf{w}_i \right\}_{i \in \varLambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectors$\mathbf{w}_i$ が線形独立であるなら, その vector 空間 V^* の有限集合である任意の族 $\left\{ f_i \right\}_{i \in \varLambda_r}$ に対し, $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_r} \psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_i, f_i \right) = 0$ が成り立つなら, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $f_i = 0$ が成り立つ.
- その vector 空間 V^* の有限集合である族 $\left\{ f_i \right\}_{i \in \varLambda_r}$ が与えられたとする. それらの vectorsf_i が線形独立であるなら, その vector 空間 W の有限集合である任意の族 $\left\{ \mathbf{w}_i \right\}_{i \in \varLambda_r}$ に対し, $\displaystyle\sum_{i \in \varLambda_r} \psi_{V,W}\left(\mathbf{w}_i, f_i \right) = 0$ が成り立つなら, $\forall i \in \varLambda_r$ に対し, $f_i = 0$ が成り立つ.
- その vector 空間 $L(V,W)$ は $\mathbf{w} \in W$, $f \in V^*$ なる vector$\psi_{V,W}\left(\mathbf{w}, f \right)$ によって生成される.

これにより, その vector 空間 $L(V,W)$ とその vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ との組 $\left(L(V,W), \psi_{V,W} \right)$ はそれらの vector 空間たち W, V^* の tensor 積である.

このとき, 定理 4.5.3, 定理 4.5.4 よりある線形同型写像 $\rho : W \otimes V^* \overset{\sim}{\rightarrow} L(V,W)$ が存在して, $\psi_{V,W} = \rho \circ \otimes$ が成り立ち, その線形写像 ρ は $\rho\left(\mathbf{w} \otimes f \right) : V \rightarrow W; \mathbf{v} \mapsto f\left(\mathbf{v} \right) \mathbf{w}$ を満たす. したがって, $L(V,W) \cong W \otimes V^*$ が成り立つ. $\square$

定理 4.5.8. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- その vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ について, $\forall\mathbf{w}\in W\forall f\in V^*$ に対し, 再双対空間 W^{**} での自然な線形同型写像 φ を用いて $\varphi(\mathbf{w})=\widehat{\mathbf{w}}$ とおくと, $\psi_{V,W}^*(\mathbf{w},f)=\psi_{V^*,W^*}(f,\widehat{\mathbf{w}})$ が成り立つ.
- その vector 空間 V の vector のその双対空間 U^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{U,V}$, その vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{w}\in W\forall f\in U^*\forall g\in V^*$ に対し, $\psi_{V,W}(\mathbf{w},g)\circ\psi_{U,V}(\mathbf{v},f)=g(\mathbf{v})\,\psi_{U,W}(\mathbf{w},f)$ が成り立つ.
- その vector 空間 V の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,V}$ について, その vector 空間の基底 α がどのように与えられても, $\forall\mathbf{v}\in V\forall f\in V^*$ に対し, $\mathrm{tr}\left[\psi_{V,V}(\mathbf{v},f)\right]_\alpha^\alpha=f(\mathbf{v})$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, その vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ について, $\forall\mathbf{w}\in W\forall f\in V^*$ に対し, 再双対空間 W^{**} での自然な線形同型写像 φ を用いて $\varphi(\mathbf{w})=\widehat{\mathbf{w}}$ とおくと, $\forall\mathbf{v}\in V\forall g\in W^*$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\psi_{V,W}^*(\mathbf{w},f)(g)(\mathbf{v})&=g\circ\psi_{V,W}(\mathbf{w},f)(\mathbf{v})\\
&=g\left(\psi_{V,W}(\mathbf{w},f)(\mathbf{v})\right)\\
&=g\left(f(\mathbf{v})\,\mathbf{w}\right)\\
&=f(\mathbf{v})\,g(\mathbf{w})\\
&=\widehat{\mathbf{w}}(g)f(\mathbf{v})\\
&=\left(\widehat{\mathbf{w}}(g)f\right)(\mathbf{v})\\
&=\psi_{V^*,W^*}(f,\widehat{\mathbf{w}})(g)(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

以上より, $\psi_{V,W}^*(\mathbf{w},f)=\psi_{V,W}(f,\widehat{\mathbf{w}})$ が成り立つ.

その vector 空間 V の vector のその双対空間 U^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{U,V}$, その vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{w}\in W\forall f\in U^*\forall g\in V^*$ に対し, その合成写像 $\psi_{V,W}(\mathbf{w},g)\circ\psi_{U,V}(\mathbf{v},f)$ が定義されて, $\forall\mathbf{u}\in U$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\psi_{V,W}(\mathbf{w},g)\circ\psi_{U,V}(\mathbf{v},f)(\mathbf{u})&=\psi_{V,W}(\mathbf{w},g)\left(\psi_{U,V}(\mathbf{v},f)(\mathbf{u})\right)\\
&=\psi_{V,W}(\mathbf{w},g)\left(f(\mathbf{u})\,\mathbf{v}\right)\\
&=g\left(f(\mathbf{u})\,\mathbf{v}\right)\mathbf{w}\\
&=f(\mathbf{u})\,g(\mathbf{v})\,\mathbf{w}\\
&=g(\mathbf{v})\left(f(\mathbf{u})\,\mathbf{w}\right)\\
&=g(\mathbf{v})\,\psi_{U,W}(\mathbf{w},f)(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

よって, $\psi_{V,W}(\mathbf{w},g)\circ\psi_{U,V}(\mathbf{v},f)=g(\mathbf{v})\,\psi_{U,W}(\mathbf{w},f)$ が得られる.

その vector 空間 V の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,V}$ について, その vector 空間の基底が α と与えられたらば, $\forall\mathbf{v}\in V\forall f\in V^*$ に対し, その基底 α に関する基底変換における線形同型写像 φ_α を用いて次式が成り立つので,

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "\varphi_\alpha^{-1}\circ\psi_{V,V}(\mathbf{v},f)\circ\varphi_\alpha"] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] & K^n \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_\alpha"] \\
V \arrow[r, "\psi_{V,V}(\mathbf{v},f)"] & V
\end{tikzcd}$$

その vector 空間 K^n の標準直交基底 $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i\in\Lambda_n}$ を用いて次式のようにおかれると,

$$\alpha = \langle \mathbf{v}_i \rangle_{i\in\Lambda_n}, \quad \mathbf{v} = \sum_{i\in\Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i$$

$\forall i \in \Lambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha^{-1}\circ\psi_{V,V}(\mathbf{v},f)\circ\varphi_\alpha(\mathbf{e}_i) &= \varphi_\alpha^{-1}\left(\psi_{V,V}(\mathbf{v},f)\left(\varphi_\alpha(\mathbf{e}_i)\right)\right) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}\left(\psi_{V,V}(\mathbf{v},f)(\mathbf{v}_i)\right) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}\left(f(\mathbf{v}_i)\mathbf{v}\right) \\
&= f(\mathbf{v}_i)\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}) \\
&= f(\mathbf{v}_i)\varphi_\alpha^{-1}\left(\sum_{j\in\Lambda_n} k_j \mathbf{v}_j\right) \\
&= \sum_{j\in\Lambda_n} k_j f(\mathbf{v}_i)\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{v}_j) \\
&= \sum_{j\in\Lambda_n} k_j f(\mathbf{v}_i)\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} k_1 f(\mathbf{v}_i) \\ k_2 f(\mathbf{v}_i) \\ \vdots \\ k_n f(\mathbf{v}_i) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以上より, その線形同型写像 $\psi_{V,V}(\mathbf{v},f)$ のその基底 α に関する表現行列 $\left[\psi_{V,V}(\mathbf{v},f)\right]_\alpha^\alpha$ は, 次のようになることから,

$$\left[\psi_{V,V}(\mathbf{v},f)\right]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} k_1 f(\mathbf{v}_1) & k_1 f(\mathbf{v}_2) & \cdots & k_1 f(\mathbf{v}_n) \\ k_2 f(\mathbf{v}_1) & k_2 f(\mathbf{v}_2) & \cdots & k_2 f(\mathbf{v}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n f(\mathbf{v}_1) & k_n f(\mathbf{v}_2) & \cdots & k_n f(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix}$$

次のようになる.

$$\operatorname{tr}\left[\psi_{V,V}(\mathbf{v},f)\right]_\alpha^\alpha = \sum_{i\in\Lambda_n} k_i f(\mathbf{v}_i) = f\left(\sum_{i\in\Lambda_n} k_i \mathbf{v}_i\right) = f(\mathbf{v})$$

□

4.5.4 線形写像の tensor 積

定理 4.5.9. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall\varphi \in L(T,V)\forall\chi \in L(U,W)$ に対し, 次式のような写像 $\Phi(\varphi,\chi)$ は双線形写像である.

$$\Phi(\varphi,\chi) : T\times U \to V\otimes W; (\mathbf{t},\mathbf{u}) \mapsto \varphi(\mathbf{t})\otimes\chi(\mathbf{u})$$

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall\varphi \in L(T,V)\forall\chi \in L(U,W)$ に対し, 次式のような写像 $\Phi(\varphi,\chi)$ について,

$$\Phi(\varphi,\chi) : T \times U \rightarrow V \otimes W; (\mathbf{t},\mathbf{u}) \mapsto \varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(\mathbf{u})$$

$\forall k,l \in K\forall\mathbf{t},\mathbf{v} \in T\forall\mathbf{u} \in U$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi,\chi)(k\mathbf{t}+l\mathbf{v},\mathbf{u}) &= \varphi(k\mathbf{t}+l\mathbf{v}) \otimes \chi(\mathbf{u})\\ &= (k\varphi(\mathbf{t})+l\varphi(\mathbf{v})) \otimes \chi(\mathbf{u})\\ &= k\varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(\mathbf{u}) + l\varphi(\mathbf{v}) \otimes \chi(\mathbf{u})\\ &= k\Phi(\varphi,\chi)(\mathbf{t},\mathbf{u}) + l\Phi(\varphi,\chi)(\mathbf{v},\mathbf{u})\end{aligned}$$

同様に, $\forall k,l \in K\forall\mathbf{t} \in T\forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in U$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi,\chi)(\mathbf{t},k\mathbf{u}+l\mathbf{v}) &= \varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(k\mathbf{u}+l\mathbf{v})\\ &= \varphi(\mathbf{t}) \otimes (k\chi(\mathbf{u})+l\chi(\mathbf{v}))\\ &= k\varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(\mathbf{u}) + l\varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(\mathbf{v})\\ &= k\Phi(\varphi,\chi)(\mathbf{t},\mathbf{u}) + l\Phi(\varphi,\chi)(\mathbf{t},\mathbf{v})\end{aligned}$$

よって, $\forall\varphi \in L(T,V)\forall\chi \in L(U,W)$ に対し, その写像 $\Phi(\varphi,\chi)$ は双線形写像である. □

定理 4.5.10. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall\varphi \in L(T,V)\forall\chi \in L(U,W)$ に対し, 次式のような双線形写像 $\Phi(\varphi,\chi)$ について,

$$\Phi(\varphi,\chi) : T \times U \rightarrow V \otimes W; (\mathbf{t},\mathbf{u}) \mapsto \varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(\mathbf{u})$$

ある線形写像 $\rho(\varphi,\chi) : T \otimes U \rightarrow V \otimes W$ が一意的に存在して, $\forall(\mathbf{t},\mathbf{u}) \in T \times U$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\rho(\varphi,\chi)(\mathbf{t} \otimes \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(\mathbf{u})$$

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall\varphi \in L(T,V)\forall\chi \in L(U,W)$ に対し, 次式のような双線形写像 $\Phi(\varphi,\chi)$ について,

$$\Phi(\varphi,\chi) : T \times U \rightarrow V \otimes W; (\mathbf{t},\mathbf{u}) \mapsto \varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(\mathbf{u})$$

$\forall(\mathbf{t},\mathbf{u}) \in T \times U$ に対し, $\rho(\varphi,\chi)(\mathbf{t} \otimes \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(\mathbf{u})$ なる線形写像 $\rho(\varphi,\chi) : T \otimes U \rightarrow V \otimes W$ が考えられそれらの vector 空間たち T, U の基底たち $\langle\mathbf{t}_i\rangle_{i\in\Lambda_m}$, $\langle\mathbf{u}_j\rangle_{j\in\Lambda_n}$ を用いて, $\forall(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n$ に対し, 次式のようにおかれれば,

$$\mathbf{t} = \sum_{i\in\Lambda_m} t_i\mathbf{t}_i, \quad \mathbf{u} = \sum_{j\in\Lambda_n} u_j\mathbf{u}_j$$

次のようになることから,

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi,\chi)(\mathbf{t},\mathbf{u}) &= \varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(\mathbf{u})\\ &= \varphi\left(\sum_{i\in\Lambda_m} t_i\mathbf{t}_i\right) \otimes \chi\left(\sum_{j\in\Lambda_n} u_j\mathbf{u}_j\right)\\ &= \sum_{j\in\Lambda_n} t_i\varphi(\mathbf{t}_i) \otimes \sum_{j\in\Lambda_n} u_j\chi(\mathbf{u}_j)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\in\Lambda_m}\sum_{j\in\Lambda_n} t_iu_j\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_j\right)\\
&= \sum_{i\in\Lambda_m}\sum_{j\in\Lambda_n} t_iu_j\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)\\
&= \rho(\varphi,\chi)\left(\sum_{i\in\Lambda_m}\sum_{j\in\Lambda_n} t_iu_j\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)\\
&= \rho(\varphi,\chi)\left(\sum_{i\in\Lambda_m} t_i\mathbf{t}_i\otimes\sum_{j\in\Lambda_n} u_j\mathbf{u}_j\right)\\
&= \rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{t}\otimes\mathbf{u}\right) = \rho(\varphi,\chi)\circ\otimes\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right)
\end{aligned}
$$

定理 4.5.3 よりある線形写像 $\rho(\varphi,\chi):T\otimes U\rightarrow V\otimes W$ が一意的に存在して, $\Phi(\varphi,\chi)=\rho(\varphi,\chi)\circ\otimes$ が成り立つ. □

定理 4.5.11. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall\varphi\in L(T,V)\forall\chi\in L(U,W)\forall\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right)\in T\times U$ に対し, $\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{t}\otimes\mathbf{u}\right)=\varphi\left(\mathbf{t}\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}\right)$ なる線形写像 $\rho(\varphi,\chi):T\otimes U\rightarrow V\otimes W$ を用いた次式のような写像 ρ は双線形写像である.

$$
\rho:L(T,V)\times L(U,W)\rightarrow L(T\otimes U,V\otimes W);(\varphi,\chi)\mapsto\rho(\varphi,\chi)
$$

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall\varphi\in L(T,V)\forall\chi\in L(U,W)\forall\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right)\in T\times U$ に対し, $\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{t}\otimes\mathbf{u}\right)=\varphi\left(\mathbf{t}\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}\right)$ なる線形写像 $\rho(\varphi,\chi):T\otimes U\rightarrow V\otimes W$ を用いた次式のような写像 ρ について,

$$
\rho:L(T,V)\times L(U,W)\rightarrow L(T\otimes U,V\otimes W);(\varphi,\chi)\mapsto\rho(\varphi,\chi)
$$

$\forall k,l\in K\forall\varphi,\psi\in L(T,V)\forall\chi\in L(U,W)$ に対し, 線形写像 $\rho(k\varphi+l\psi,\chi)$ が定義されて, $\forall\mathbf{T}\in T\otimes U$ に対し, それらの vector 空間たち T, U の基底たち $\left\langle\mathbf{t}_i\right\rangle_{i\in\Lambda_m}$, $\left\langle\mathbf{u}_j\right\rangle_{j\in\Lambda_n}$ を用いて定理 4.5.2 より $\mathbf{T}=\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\in T\otimes U$ とおかれると, 次のようになるかつ,

$$
\begin{aligned}
\rho(k\varphi+l\psi,\chi)\left(\mathbf{T}\right) &= \rho(k\varphi+l\psi,\chi)\left(\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}\rho(k\varphi+l\psi,\chi)\left(\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}(k\varphi+l\psi)\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_j\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}\left(k\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)+l\psi\left(\mathbf{t}_i\right)\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_j\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}\left(k\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_j\right)+l\psi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_j\right)\right)\\
&= k\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_j\right)+l\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}\psi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_j\right)\\
&= k\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)+l\sum_{(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\xi_{ij}\rho(\psi,\chi)\left(\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= k\rho(\varphi,\chi)\left(\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)+l\rho(\psi,\chi)\left(\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)\\
&= k\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{T}\right)+l\rho(\psi,\chi)\left(\mathbf{T}\right)\\
&= \left(k\rho(\varphi,\chi)+l\rho(\psi,\chi)\right)\left(\mathbf{T}\right)
\end{aligned}$$

$\forall k,l\in K\forall\varphi\in L(T,V)\forall\chi,\psi\in L(U,W)$ に対し, 線形写像 $\rho(\varphi,k\chi+l\psi)$ が定義されて, $\forall\mathbf{T}\in T\otimes U$ に対し, 定理 4.5.2 より $\mathbf{T}=\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\in T\otimes U$ とおかれると, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi,k\chi+l\psi)\left(\mathbf{T}\right) &= \rho(\varphi,k\chi+l\psi)\left(\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\rho(\varphi,k\chi+l\psi)\left(\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\left(k\chi+l\psi\right)\left(\mathbf{u}_j\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\left(k\chi\left(\mathbf{u}_j\right)+l\psi\left(\mathbf{u}_j\right)\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\left(k\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_j\right)+l\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\psi\left(\mathbf{u}_j\right)\right)\\
&= k\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_j\right)+l\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\psi\left(\mathbf{u}_j\right)\\
&= k\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)+l\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\rho(\varphi,\psi)\left(\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)\\
&= k\rho(\varphi,\chi)\left(\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)+l\rho(\varphi,\psi)\left(\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\xi_{ij}\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)\\
&= k\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{T}\right)+l\rho(\varphi,\psi)\left(\mathbf{T}\right)\\
&= \left(k\rho(\varphi,\chi)+l\rho(\varphi,\psi)\right)\left(\mathbf{T}\right)
\end{aligned}$$

その写像 ρ は双線形写像である. □

定理 4.5.12. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, vector 空間 $L(T\otimes U,V\otimes W)$ を用いた, $\forall\varphi\in L(T,V)\forall\chi\in L(U,W)\forall\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right)\in T\times U$ に対し, $\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{t}\otimes\mathbf{u}\right)=\varphi\left(\mathbf{t}\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}\right)$ なる線形写像 $\rho(\varphi,\chi):T\otimes U\rightarrow V\otimes W$ を用いた次式のような写像 ρ との組 $(L(T\otimes U,V\otimes W),\rho)$ は tensor 積である.

$$\rho:L(T,V)\times L(U,W)\rightarrow L(T\otimes U,V\otimes W);(\varphi,\chi)\mapsto\rho(\varphi,\chi)$$

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, vector 空間 $L(T\otimes U,V\otimes W)$ を用いた, $\forall\varphi\in L(T,V)\forall\chi\in L(U,W)\forall\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right)\in T\times U$ に対し, $\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{t}\otimes\mathbf{u}\right)=\varphi\left(\mathbf{t}\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}\right)$ なる線形写像 $\rho(\varphi,\chi):T\otimes U\rightarrow V\otimes W$ を用いた次式のような写像 ρ との組 $(L(T\otimes U,V\otimes W),\rho)$ について, その写像 ρ が双線形写像となるのはすでに定理 4.5.11 でみた.

そこで, それらの vector 空間たち T, U, V, W の基底たち $\left\langle\mathbf{t}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\left\langle\mathbf{u}_j\right\rangle_{j\in\varLambda_n}$, $\left\langle\mathbf{v}_i\right\rangle_{i\in\varLambda_o}$, $\left\langle\mathbf{w}_j\right\rangle_{j\in\varLambda_p}$ を用いれば, 定理 4.5.2 よりそれらの組々 $\left\langle\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right\rangle_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$, $\left\langle\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j\right\rangle_{(i,j)\in\varLambda_o\times\varLambda_p}$ はそれぞれそれらの vector 空

間たち $T \otimes U$, $V \otimes W$ の基底となるので, $\forall e \in \Lambda_m \forall (i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_o$ に対し, $\varphi_{ij}\left(\mathbf{t}_e\right) = \delta_{ie}\mathbf{v}_j$ となる線形写像たち $\varphi_{ij} : T \to V$, $\forall g \in \Lambda_n \forall (k,l) \in \Lambda_n \times \Lambda_p$ に対し, $\chi_{kl}\left(\mathbf{u}_g\right) = \delta_{kg}\mathbf{w}_l$ となる線形写像たち $\chi_{kl} : U \to W$ が考えられれば, $\langle \mathbf{t}_i \rangle_{i \in \Lambda_m} = \alpha$, $\langle \mathbf{u}_j \rangle_{j \in \Lambda_n} = \beta$, $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_o} = \gamma$, $\langle \mathbf{w}_j \rangle_{j \in \Lambda_p} = \delta$ とおいて, vector 空間たち K^m, K^n, K^o, K^p の標準直交基底たち $\langle \mathbf{d}_e \rangle_{e \in \Lambda_m}$, $\langle \mathbf{e}_g \rangle_{g \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{f}_f \rangle_{f \in \Lambda_o}$, $\langle \mathbf{g}_h \rangle_{h \in \Lambda_p}$, それらの基底たち α, β, γ, δ の基底変換における線形同型写像たち φ_α, φ_β, φ_γ, φ_δ を用いて $\forall e \in \Lambda_m \forall g \in \Lambda_n$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_\gamma^{-1} \circ \varphi_{ij} \circ \varphi_\alpha\left(\mathbf{d}_e\right) &= \varphi_\gamma^{-1}\left(\varphi_{ij}\left(\varphi_\alpha\left(\mathbf{d}_e\right)\right)\right) \\
&= \varphi_\gamma^{-1}\left(\varphi_{ij}\left(\mathbf{t}_e\right)\right) \\
&= \varphi_\gamma^{-1}\left(\delta_{ie}\mathbf{v}_j\right) \\
&= \delta_{ie}\varphi_\gamma^{-1}\left(\mathbf{v}_j\right) \\
&= \delta_{ie}\mathbf{f}_j \\
&= \left(\delta_{ie}\delta_{jf}\right)_{f \in \Lambda_o} \\
\varphi_\gamma^{-1} \circ \chi_{kl} \circ \varphi_\alpha\left(\mathbf{e}_g\right) &= \varphi_\gamma^{-1}\left(\chi_{kl}\left(\varphi_\alpha\left(\mathbf{e}_g\right)\right)\right) \\
&= \varphi_\gamma^{-1}\left(\chi_{kl}\left(\mathbf{u}_g\right)\right) \\
&= \varphi_\gamma^{-1}\left(\delta_{kg}\mathbf{w}_l\right) \\
&= \delta_{kg}\varphi_\gamma^{-1}\left(\mathbf{w}_l\right) \\
&= \delta_{kg}\mathbf{g}_l \\
&= \left(\delta_{kg}\delta_{lh}\right)_{h \in \Lambda_p}
\end{aligned}$$

$\left[\varphi_{ij}\right]_\alpha^\gamma = \left(\delta_{ie}\delta_{jf}\right)_{(e,f) \in \Lambda_m \times \Lambda_o}$, $\left[\chi_{kl}\right]_\beta^\delta = \left(\delta_{kg}\delta_{lh}\right)_{(g,h) \in \Lambda_n \times \Lambda_p}$ が成り立つ. そこで, これらの行列たちがそれぞれそれらの vector 空間たち $\mathrm{M}(m,o,K)$, $\mathrm{M}(n,p,K)$ の基底たちであることに注意すれば, その vector 空間 T からその vector 空間 V への線形写像からそれらの基底たち α, γ に関する表現行列へ写す写像, その vector 空間 U からその vector 空間 W への線形写像からそれらの基底たち β, δ に関する表現行列へ写す写像がいずれも定理 1.5.14 より線形同型写像となっているので, 定理 1.5.2 よりその組々 $\left(\varphi_{ij}\right)_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_o}$, $\left(\chi_{kl}\right)_{(k,l) \in \Lambda_n \times \Lambda_p}$ はそれぞれ vector 空間たち $L(T,V)$, $L(U,W)$ の基底をなす.

したがって, $\forall (i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_o \forall (k,l) \in \Lambda_n \times \Lambda_p \forall e \in \Lambda_m \forall g \in \Lambda_n$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\rho\left(\varphi_{ij}, \chi_{kl}\right)\left(\mathbf{t}_e \otimes \mathbf{u}_g\right) &= \varphi_{ij}\left(\mathbf{t}_e\right) \otimes \chi_{kl}\left(\mathbf{u}_g\right) \\
&= \delta_{ie}\mathbf{v}_j \otimes \delta_{kg}\mathbf{w}_l \\
&= \delta_{ie}\delta_{kg}\mathbf{v}_j \otimes \mathbf{w}_l
\end{aligned}$$

そこで, それらの vector 空間たち $T \otimes U$, $V \otimes W$ の基底たちそれぞれ $\alpha \otimes \beta$, $\gamma \otimes \delta$, これらの基底たち $\alpha \otimes \beta$, $\gamma \otimes \delta$ に関する基底変換における線形同型写像たち $\varphi_{\alpha \otimes \beta}$, $\varphi_{\gamma \otimes \delta}$, それらの vector 空間たち K^{mn}, K^{op} の標準直交基底たち $\langle \mathbf{d}_{eg} \rangle_{(e,g) \in \Lambda_m \times \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{e}_{fh} \rangle_{(f,h) \in \Lambda_o \times \Lambda_p}$ が用いられると, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\gamma \otimes \delta}^{-1} \circ \rho\left(\varphi_{ij}, \chi_{kl}\right) \circ \varphi_{\alpha \otimes \beta}\left(\mathbf{d}_{eg}\right) &= \varphi_{\gamma \otimes \delta}^{-1}\left(\rho\left(\varphi_{ij}, \chi_{kl}\right)\left(\varphi_{\alpha \otimes \beta}\left(\mathbf{d}_{eg}\right)\right)\right) \\
&= \varphi_{\gamma \otimes \delta}^{-1}\left(\rho\left(\varphi_{ij}, \chi_{kl}\right)\left(\mathbf{t}_e \otimes \mathbf{u}_g\right)\right) \\
&= \varphi_{\gamma \otimes \delta}^{-1}\left(\delta_{ie}\delta_{kg}\mathbf{v}_j \otimes \mathbf{w}_l\right) \\
&= \delta_{ie}\delta_{kg}\varphi_{\gamma \otimes \delta}^{-1}\left(\mathbf{v}_j \otimes \mathbf{w}_l\right) \\
&= \delta_{ie}\delta_{kg}\mathbf{e}_{jl} \\
&= \left(\delta_{ie}\delta_{kg}\delta_{jf}\delta_{lh}\right)_{(f,h) \in \Lambda_o \times \Lambda_p}
\end{aligned}$$

$[\rho(\varphi_{ij}, \chi_{kl})]_{\alpha\otimes\beta}^{\gamma\otimes\delta} = (\delta_{ie}\delta_{kg}\delta_{jf}\delta_{lh})_{(e,f,g,h)\in\Lambda_m\times\Lambda_o\times\Lambda_n\times\Lambda_p}$ が成り立つ. そこで, これがその vector 空間 $K^{m\times o\times n\times p}$ の基底であることに注意すれば, その vector 空間 $T\otimes U$ からその vector 空間 $V\otimes W$ への線形写像からそれらの基底たち $\alpha\otimes\beta$, $\gamma\otimes\delta$ に関する表現行列へ写す写像が定理 1.5.14 より線形同型写像となっているので, 定理 1.5.2 よりその組 $(\rho(\varphi_{ij}, \chi_{kl}))_{(i,j,k,l)\in\Lambda_m\times\Lambda_o\times\Lambda_n\times\Lambda_p}$ はその vector 空間 $L(T\otimes U, V\otimes W)$ の基底をなす.

定理 4.5.2 よりよって, その線形写像 $\rho(\varphi,\chi): T\otimes U \to V\otimes W$ を用いたその写像 ρ との組 $(L(T\otimes U, V\otimes W), \rho)$ は tensor 積である. □

定理 4.5.13. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$L(T\otimes U, V\otimes W) \cong L(T,V)\otimes L(U,W)$$

このとき, ある線形同型写像 $\sigma: L(T,V)\otimes L(U,W) \xrightarrow{\sim} L(T\otimes U, V\otimes W)$ が一意的に存在して, $\forall(\varphi,\chi)\in L(T,V)\times L(U,W)\forall(\mathbf{t},\mathbf{u})\in T\times U$ に対し, $\varphi(\mathbf{t})\otimes\chi(\mathbf{u}) = \sigma(\varphi\otimes\chi)(\mathbf{t}\otimes\mathbf{u})$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 定理 4.5.12 より vector 空間 $L(T\otimes U, V\otimes W)$ を用いた, $\forall\varphi\in L(T,V)\forall\chi\in L(U,W)\forall(\mathbf{t},\mathbf{u})\in T\times U$ に対し, $\rho(\varphi,\chi)(\mathbf{t}\otimes\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{t})\otimes\chi(\mathbf{u})$ なる線形写像 $\rho(\varphi,\chi): T\otimes U\to V\otimes W$ を用いた次式のような写像 ρ との組 $(L(T\otimes U, V\otimes W), \rho)$ は tensor 積である. そこで, 定理 4.5.4 より次式が成り立つ.

$$L(T\otimes U, V\otimes W) \cong L(T,V)\otimes L(U,W)$$

また, 定理 4.5.3, 定理 4.5.4 よりある線形同型写像 $\sigma: L(T,V)\otimes L(U,W) \xrightarrow{\sim} L(T\otimes U, V\otimes W)$ が一意的に存在して, $\rho = \sigma\circ\otimes$ が成り立つので, $\forall(\varphi,\chi)\in L(T,V)\times L(U,W)\forall(\mathbf{t},\mathbf{u})\in T\times U$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{t})\otimes\chi(\mathbf{u}) &= \rho(\varphi,\chi)(\mathbf{t}\otimes\mathbf{u})\\ &= \sigma\circ\otimes(\varphi,\chi)(\mathbf{t}\otimes\mathbf{u})\\ &= \sigma(\varphi\otimes\chi)(\mathbf{t}\otimes\mathbf{u})\end{aligned}$$

□

4.5.5 tensor 積と線形同型

定理 4.5.14. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$(V\otimes W)^* \cong V^*\otimes W^*$$

このとき, ある線形同型写像 $\Sigma: V^*\otimes W^* \xrightarrow{\sim} (V\otimes W)^*$ が存在して, $\forall(\varphi,\chi)\in V^*\times W^*\forall(\mathbf{v},\mathbf{w})\in V\times W$ に対し, $\Sigma(\varphi\otimes\chi)(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v})\chi(\mathbf{w})$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 定理 4.5.13 より次式が成り立つ.

$$L(V\otimes W, K\otimes K) \cong L(V,K)\otimes L(W,K)$$

そこで, $V^* = L(V,K)$, $W^* = L(W,K)$ が成り立つことにより次式が成り立つ.

$$L(V\otimes W, K\otimes K) \cong V^*\otimes W^*$$

ところで, 組 $(K,\cdot)$ について, $\forall k,l \in K \forall \alpha,\beta,\gamma \in K$ に対し, 次のようになることから,

$$(k\alpha + l\gamma)\beta = k\alpha\beta + l\gamma\beta, \quad \alpha(k\beta + l\gamma) = k\alpha\beta + l\alpha\gamma$$

その写像 $\cdot : K \times K \to K; (\alpha,\beta) \mapsto \alpha\beta$ は双線形写像である. さらに, $\forall k \in K$ に対し, $k \neq 0$ のとき, $kl = lk = 0$ が成り立つなら, $l = 0$ が成り立つかつ, その vector 空間 K はその双線形写像 $\cdot$ の値域と等しいので, その組 $(K,\cdot)$ はそれらの vector 空間たち K の tensor 積である. また, 定理 4.5.3, 定理 4.5.4 より直ちにある線形同型写像 σ が一意的に存在して, $\cdot = \sigma \circ \otimes$ が成り立つ.

そこで, $\forall \mathbf{T} \in V \otimes W$ に対し, $\dim K \otimes K = 1$ に注意すれば, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}\sigma \circ f(\mathbf{T}) &= \sigma(k\alpha \otimes \beta)\\ &= k\sigma(\alpha \otimes \beta)\\ &= k\alpha\beta \in K\end{aligned}$$

次式のような写像 F が考えられれば,

$$F : L(V \otimes W, K \otimes K) \to (V \otimes W)^*; f \mapsto \sigma \circ f$$

$\forall k,l \in K \forall f,g \in L(V \otimes W, K \otimes K)$ に対し, $kf + lg \in L(V \otimes W, K \otimes K)$ が成り立って, $\forall \mathbf{T} \in V \otimes W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}F(kf+lg)(\mathbf{T}) &= \sigma \circ (kf+lg)(\mathbf{T})\\ &= \sigma\left(kf(\mathbf{T}) + lg(\mathbf{T})\right)\\ &= k\sigma\left(f(\mathbf{T})\right) + l\sigma\left(g(\mathbf{T})\right)\\ &= k\sigma \circ f(\mathbf{T}) + l\sigma \circ g(\mathbf{T})\\ &= kF(f)(\mathbf{T}) + lF(g)(\mathbf{T})\\ &= \left(kF(f) + lF(g)\right)(\mathbf{T})\end{aligned}$$

以上より, $F(kf+lg) = kF(f) + lF(g)$ が得られたので, その写像 F は線形写像である.

さらに, 次式のような写像 F' が考えられれば,

$$F' : (V \otimes W)^* \to L(V \otimes W, K \otimes K); f \mapsto \sigma^{-1} \circ f$$

$\forall f \in L(V \otimes W, K \otimes K)$ に対し, $F' \circ F(f) = \sigma^{-1} \circ \sigma \circ f = f$ が成り立つかつ, $\forall f \in (V \otimes W)^*$ に対し, $F \circ F'(f) = \sigma \circ \sigma^{-1} \circ f = f$ が成り立つので, $F' = F^{-1}$ が成り立つ. ゆえに, その写像 F は線形同型写像となるので, $L(V \otimes W, K \otimes K) \cong (V \otimes W)^*$ が成り立つ.

以上より, 次式が得られた.

$$(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$$

このとき, 定理 4.5.12 より $\forall(\varphi,\chi) \in V^* \times W^* \forall(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in V \times W$ に対し, $\rho(\varphi,\chi)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v}) \otimes \chi(\mathbf{w})$ なる線形写像 $\rho(\varphi,\chi) : V \otimes W \to K \otimes K$ を用いた次式のような写像 ρ との組 $(L(V \otimes W, K \otimes K), \rho)$ は tensor 積である.

$$\rho : V^* \times W^* \to L(V \otimes W, K \otimes K); (\varphi,\chi) \mapsto \rho(\varphi,\chi)$$

定理 4.5.3, 定理 4.5.4 よりある線形同型写像 G が存在して, $\rho = G \circ \otimes$ が成り立つので, 次式のように写像 Σ がおかれると,

$$\begin{tikzcd}
V^* \times W^* \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\otimes"'] & & L\left(V \otimes W, K \otimes K\right) \arrow[dr, "F"] & \\
& V^* \otimes W^* \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\varSigma"] & & \left(V \otimes W\right)^*
\end{tikzcd}$$

即ち, $\varSigma = F \circ G$ とおかれると, その写像 $\varSigma$ は線形同型写像であり, $\forall (\varphi, \chi) \in V^* \times W^* \forall \left(\mathbf{v}, \mathbf{w}\right) \in V \times W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varSigma(\varphi \otimes \chi)\left(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\right) &= (F \circ G)(\varphi \otimes \chi)\left(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\right) \\
&= (F \circ G \circ \otimes)(\varphi, \chi)\left(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\right) \\
&= (F \circ \rho)(\varphi, \chi)\left(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\right) \\
&= F\left(\rho(\varphi, \chi)\right)\left(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\right) \\
&= \left(\sigma \circ \rho(\varphi, \chi)\right)\left(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\right) \\
&= \sigma\left(\rho(\varphi, \chi)\left(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\right)\right) \\
&= \sigma\left(\varphi\left(\mathbf{v}\right) \otimes \chi\left(\mathbf{w}\right)\right) \\
&= \varphi\left(\mathbf{v}\right) \chi\left(\mathbf{w}\right)
\end{aligned}$$

□

定理 4.5.15. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, 組 $(V, \cdot)$ はそれらの vector 空間たち K, V の tensor 積である. なお, $\cdot$ は scalar 倍である. さらに, ある線形同型写像 $\rho : K \otimes V \rightarrow V$ が一意的に存在して, $\cdot = \rho \circ \otimes$ が成り立ち, その線形同型写像 ρ は, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\rho\left(\alpha \otimes \mathbf{v}\right) = \alpha \mathbf{v}$ を満たす. ゆえに, $K \otimes V \cong V$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\forall k, l \in K \forall \alpha, \beta \in K \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のようになるかつ,

$$(k\alpha + l\beta)\mathbf{v} = k\alpha\mathbf{v} + l\beta\mathbf{v}$$

$\forall k, l \in K \forall \alpha \in K \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対し, 次のようになるので,

$$\alpha(kv + lw) = k\alpha\mathbf{v} + l\alpha\mathbf{w}$$

scalar 倍 $\cdot : K \times V \rightarrow V$ は双線形写像である. さらに, その vector 空間 V の基底として $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$, その vector 空間 K の基底として $\alpha \neq 0$ なる vectorα が考えられれば, $\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \alpha \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が成り立つなら, 両辺に α で割ることで $\sum_{i \in \varLambda_n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ が得られる. 仮定より $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, $c_i = 0$ が得られるかつ, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} v_i \mathbf{v}_i$ とおかれれば, $\alpha \neq 0$ に注意して $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} \frac{v_i}{\alpha} \alpha \mathbf{v}_i$ が得られるので, その組 $\left\langle \alpha \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ もその vector 空間 V の基底となる. 定理 4.5.2 よりその組 $(V, \cdot)$ はそれらの vector 空間たち K, V の tensor 積である.

さらに, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\rho\left(\alpha \otimes \mathbf{v}\right) = \alpha \mathbf{v}$ を満たすような線形写像 $\rho : K \otimes V \rightarrow V$ が考えられれば,

$\forall (k,\mathbf{v}) \in K \times V$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i$ とおかれれば, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\cdot (k,\mathbf{v}) &= k\mathbf{v} = \frac{k}{\alpha}\alpha \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} \frac{kk_i}{\alpha}\alpha \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} \frac{kk_i}{\alpha}\rho (\alpha \otimes \mathbf{v}_i) \\
&= \sum_{i \in \varLambda_n} \rho (k \otimes k_i \mathbf{v}_i) \\
&= \rho \left(k \otimes \sum_{i \in \varLambda_n} k_i \mathbf{v}_i \right) \\
&= \rho (k \otimes \mathbf{v}) \\
&= \rho \circ \otimes (k,\mathbf{v})
\end{aligned}$$

ある線形写像 $\rho : K \otimes V \to V$ が存在して, $\cdot = \rho \circ \otimes$ が成り立つ. そこで, 定理 4.5.3 よりその線形写像 ρ は線形同型写像でありその存在は一意的である. ゆえに, $K \otimes V \cong V$ が成り立つ. □

定理 4.5.16. 体 K が与えられたとき, 組 $(K,\cdot)$ はそれらの vector 空間たち K 同士の tensor 積である. さらに, ある線形同型写像 $\rho : K \otimes K \overset{\sim}{\to} K$ が一意的に存在して, $\cdot = \rho \circ \otimes$ が成り立ち, その線形同型写像 ρ は $\rho(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$ を満たす. ゆえに, $K \otimes K \cong K$ が成り立つ.

証明. 定理 4.5.15 より明らかである. □

定理 4.5.17. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, ある線形同型写像 $\rho : V \otimes W \overset{\sim}{\to} W \otimes V$ が一意的に存在して, その線形同型写像 ρ は, $\forall (\mathbf{v},\mathbf{w}) \in V \times W$ に対し, $\rho (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$ を満たす. ゆえに, $V \otimes W \cong W \otimes V$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, これらの基底たちそれぞれ $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_m}$, $\langle \mathbf{w}_j \rangle_{j \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, 定理 4.5.2 よりそれらの vector 空間たち $V \otimes W$, $W \otimes V$ の基底たちがそれぞれ $\langle \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j \rangle_{(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_j \otimes \mathbf{v}_i \rangle_{(i,j) \in \varLambda_m \times \varLambda_n}$ と与えられる. したがって, $\forall (\mathbf{v},\mathbf{w}) \in V \times W$ に対し, $\rho (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$ を満たすような線形写像 $\rho : V \otimes W \to W \otimes V$ が考えられれば, $\forall \mathbf{v} \in V \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_m} k_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{w} = \sum_{j \in \varLambda_n} l_j \mathbf{w}_j$ として, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} \otimes \mathbf{v} &= \sum_{j \in \varLambda_n} l_j \mathbf{w}_j \otimes \sum_{i \in \varLambda_m} k_i \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_m} \sum_{j \in \varLambda_n} k_i l_j \mathbf{w}_j \otimes \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{i \in \varLambda_m} \sum_{j \in \varLambda_n} k_i l_j \rho (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j) \\
&= \rho \left(\sum_{i \in \varLambda_m} k_i \mathbf{v}_i \otimes \sum_{j \in \varLambda_n} l_j \mathbf{w}_j \right) \\
&= \rho (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})
\end{aligned}$$

定理 4.5.3 よりその線形写像 ρ は線形同型写像でありその存在は一意的である．ゆえに, $V \otimes W \cong W \otimes V$ が成り立つ． □

定理 4.5.18. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ．

$$L(U,W;W) \cong L(U \otimes V, W)$$

このとき, ある線形同型写像 $\otimes^* : L(U \otimes V, W) \overset{\sim}{\rightarrow} L(U,W;W)$ が存在して, $\otimes^*(\rho) = \rho \circ \otimes$ が成り立ち, $\otimes^*(\rho) : U \times V \rightarrow W; (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \rho\left(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}\right)$ が成り立つ．

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\otimes^*(\rho) = \rho \circ \otimes$ なる写像 $\otimes^* : L(U \otimes V, W) \rightarrow L(U,W;W)$ が考えられれば, $\forall k, l \in K \forall \rho, \sigma \in L(U \otimes V, W) \forall \left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) \in U \times V$ に対し, 次のようになる．

$$\begin{aligned}
\otimes^*(k\rho + l\sigma)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) &= \left(k\rho + l\sigma\right) \circ \otimes \left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) \\
&= \left(k\rho + l\sigma\right)\left(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}\right) \\
&= k\rho\left(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}\right) + l\sigma\left(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}\right) \\
&= k\rho \circ \otimes \left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) + l\sigma \circ \otimes \left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) \\
&= k \otimes^* (\rho)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) + l \otimes^* (\rho)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) \\
&= \left(k \otimes^* (\rho) + l \otimes^* (\rho)\right)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right)
\end{aligned}$$

これにより, その写像 $\otimes^*$ は線形写像である．

一方で, $\forall \Phi \in L(U,V;W)$ に対し, 定理 4.5.3 よりある線形写像 $\rho : U \otimes V \rightarrow W$ が一意的に存在して, $\Phi = \rho \circ \otimes$ が成り立つので, 写像 $\otimes' : L(U,W;W) \rightarrow L(U \otimes V, W); \Phi \mapsto \rho$ が定義されることができる．このとき, $\forall \Phi \in L(U,V;W)$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\otimes^* \circ \otimes'(\Phi) = \otimes^* \left(\otimes'(\Phi)\right) = \otimes^*(\rho) = \rho \circ \otimes = \Phi$$

$\forall \rho \in L(U \otimes V, W)$ に対し, 次のようになるので,

$$\otimes' \circ \otimes^*(\rho) = \otimes' \left(\otimes^*(\rho)\right) = \otimes'(\rho \circ \otimes) = \rho$$

$\otimes^* \circ \otimes' = I_{L(U,V;W)}$ かつ $\otimes' \circ \otimes^* = I_{L(U \otimes V,W)}$ が成り立つことになり, したがって, $\otimes' = \otimes^{*-1}$ が得られる．これにより, その線形写像 $\otimes^*$ は線形同型写像である． □

定理 4.5.19. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ．

$$L(U,V;W) \cong \left(U^* \otimes V^*\right) \otimes W$$

このとき, ある線形同型写像 $\varSigma : \left(U^* \otimes V^*\right) \otimes W \overset{\sim}{\rightarrow} L(U,V;W)$ が存在して, $\forall (f,g) \in U^* \times V^* \forall \left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) \in U \times V \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $\varSigma\left(\left(f \otimes g\right) \otimes \mathbf{w}\right)\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) = f\left(\mathbf{u}\right) g\left(\mathbf{v}\right) \mathbf{w}$ が成り立つ．

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 定理 4.5.18 よりある線形同型写像 $\otimes^* : L(U \otimes V, W) \overset{\sim}{\rightarrow} L(U,V;W)$ が存在して, $\otimes^*(\rho) = \rho \circ \otimes$ が成り立つ．また, 定理 4.5.7 よりその vector 空間 $L(U \otimes V, W)$ とその vector 空間 W の vector のその双対空間

$(U \otimes V)^*$ の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{U \otimes V, W}$ との組 $(L(U \otimes V, W), \psi_{U \otimes V, W})$ はそれらの vector 空間たち W, $(U \otimes V)^*$ の tensor 積であり, ある線形同型写像 $\rho : W \otimes (U \otimes V)^* \overset{\sim}{\rightarrow} L(U \otimes V, W)$ が存在して, $\psi_{U \otimes V, W} = \rho \circ \otimes$ が成り立つ. そこで, 定理 4.5.17 よりある線形同型写像 $\sigma : (U \otimes V)^* \otimes W \overset{\sim}{\rightarrow} W \otimes (U \otimes V)^*$ が一意的に存在して, その線形同型写像 σ は, $\forall (\tau, \mathbf{w}) \in (U \otimes V)^* \times W$ に対し, $\sigma (\tau \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{w} \otimes \tau$ を満たす. 以上の議論により, 次のようになる.

$$
\begin{tikzcd}
 & W \otimes (U \otimes V)^* \arrow[dr, "\rho"] & & L(U, V; W) \\
(U \otimes V)^* \otimes W \arrow[ur, "\sigma"] & & L(U \otimes V, W) \arrow[ur, "\otimes^*"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{w} \otimes \tau \arrow[dr, mapsto, "\rho"] & & \psi_{U \otimes V, W} \circ \otimes \\
\tau \otimes \mathbf{w} \arrow[ur, mapsto, "\sigma"] & & \psi_{U \otimes V, W} \arrow[ur, mapsto, "\otimes^*"] &
\end{tikzcd}
$$

また, 定理 4.5.14 よりある線形同型写像 $\Sigma' : V^* \otimes W^* \overset{\sim}{\rightarrow} (V \otimes W)^*$ が存在して, $\forall (\varphi, \chi) \in U^* \times V^* \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U \times V$ に対し, $\Sigma'(\varphi \otimes \chi)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) \chi(\mathbf{v})$ が成り立つ.

そこで, $\forall (f, g) \in U^* \times V^* \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $T((f \otimes g) \otimes \mathbf{w}) = \Sigma'(f \otimes g) \otimes \mathbf{w}$ が成り立つような写像 $T : (U^* \otimes V^*) \otimes W \rightarrow (U \otimes V)^* \otimes W$ が考えられよう. $\forall (\tau, \mathbf{w}) \in (U \otimes V)^* \times W$ に対し, $\Upsilon (\tau \otimes \mathbf{w}) = {\Sigma'}^{-1}(\tau) \otimes \mathbf{w}$ が成り立つような写像 $\Upsilon : (U \otimes V)^* \otimes W \rightarrow (U^* \otimes V^*) \otimes W$ が考えられれば, $\forall \mathbf{T} \in (U^* \otimes V^*) \otimes W$ に対し, それらの vector 空間たち U^*, V^*, W の基底たちそれぞれ $\langle \lambda_h \rangle_{h \in \Lambda_m}$, $\langle \mu_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_j \rangle_{j \in \Lambda_o}$ を用いれば, 定理 4.5.2 よりその組 $\langle \lambda_h \otimes \mu_i \rangle_{(h,i) \in \Lambda_m \times \Lambda_n}$ がその vector 空間 $U^* \otimes V^*$ の基底をなすので, 次のようにおかれることができて,

$$\mathbf{T} = \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} (\lambda_h \otimes \mu_i) \otimes \mathbf{w}_j$$

このとき, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\Upsilon \circ T(\mathbf{T}) &= \Upsilon \circ T \left(\sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} (\lambda_h \otimes \mu_i) \otimes \mathbf{w}_j \right) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} \Upsilon \circ T((\lambda_h \otimes \mu_i) \otimes \mathbf{w}_j) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} \Upsilon (T((\lambda_h \otimes \mu_i) \otimes \mathbf{w}_j)) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} \Upsilon (\Sigma'(\lambda_h \otimes \mu_i) \otimes \mathbf{w}_j) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} {\Sigma'}^{-1} \circ \Sigma'(\lambda_h \otimes \mu_i) \otimes \mathbf{w}_j \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} (\lambda_h \otimes \mu_i) \otimes \mathbf{w}_j = \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

一方で, $\forall \mathbf{U} \in (U \otimes V)^* \otimes W$ に対し, 定理 4.5.2 より次のようにおかれることができて,

$$\mathbf{U} = \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} o_{hij} \tau_{hi} \otimes \mathbf{w}_j$$

このとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
T \circ \Upsilon(\mathbf{U}) &= T \circ \Upsilon\left(\sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} o_{hij} \tau_{hi} \otimes \mathbf{w}_j\right) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} o_{hij} T \circ \Upsilon\left(\tau_{hi} \otimes \mathbf{w}_j\right) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} o_{hij} T\left(\Upsilon\left(\tau_{hi} \otimes \mathbf{w}_j\right)\right) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} o_{hij} T\left({\Sigma'}^{-1}\left(\tau_{hi}\right) \otimes \mathbf{w}_j\right) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} o_{hij} \Sigma' \circ {\Sigma'}^{-1}\left(\tau_{hi}\right) \otimes \mathbf{w}_j \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} o_{hij} \tau_{hi} \otimes \mathbf{w}_j = \mathbf{U}
\end{aligned}$$

以上より, $\Upsilon = T^{-1}$ が得られたので, その線形写像 T は線形同型写像である.
　以上の議論により次のようになる.

$$\begin{tikzcd}
(U^* \otimes V^*) \otimes W \arrow[dr, tail, two heads, "T"] & & W \otimes (U \otimes V)^* \arrow[dr, tail, two heads, "\rho"] & & L(U, V; W) \\
& (U \otimes V)^* \otimes W \arrow[ur, tail, two heads, "\sigma"] & & L(U \otimes V, W) \arrow[ur, tail, two heads, "\otimes^*"] &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
(f \otimes g) \otimes \mathbf{w} \arrow[dr, mapsto, "T"] & & \mathbf{w} \otimes \Sigma'(f \otimes g) \arrow[dr, mapsto, "\rho"] & & \psi_{U \otimes V, W} \circ \otimes \\
& \Sigma'(f \otimes g) \otimes \mathbf{w} \arrow[ur, mapsto, "\sigma"] & & \psi_{U \otimes V, W} \arrow[ur, mapsto, "\otimes^*"] &
\end{tikzcd}$$

そこで, 次式のように線形同型写像 $\Sigma : (U^* \times V^*) \otimes W \rightarrow L(U, V; W)$ がおかれ,

$$\begin{tikzcd}
& (U^* \otimes V^*) \otimes W \arrow[r, tail, two heads, "\Sigma"] \arrow[dl, tail, two heads, "T"] & L(U, V; W) & \\
(U \otimes V)^* \otimes W \arrow[dr, tail, two heads, "\sigma"] & & & L(U \otimes V, W) \arrow[ul, tail, two heads, "\otimes^*"] \\
& W \otimes (U \otimes V)^* \arrow[urr, tail, two heads, "\rho"] & &
\end{tikzcd}$$

$\forall(f, g) \in U^* \times V^* \forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U \times V \forall\mathbf{w} \in W$ に対し, 次のようにおくと,

$$f = \sum_{h \in \Lambda_m} k_h \lambda_h, \quad g = \sum_{i \in \Lambda_n} l_i \mu_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{j \in \Lambda_o} m_j \mathbf{w}_j$$

$\forall h \in \Lambda_m \forall i \in \Lambda_n \forall j \in \Lambda_o \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U \times V$ に対し, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\Sigma\left(\left(\lambda_h \otimes \mu_i\right) \otimes \mathbf{w}_j\right)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \left(\otimes^* \circ \rho \circ \sigma \circ T\right)\left(\left(\lambda_h \otimes \mu_i\right) \otimes \mathbf{w}_j\right)(\mathbf{u}, \mathbf{v})\\
&= \otimes^*\left(\rho\left(\sigma\left(T\left(\left(\lambda_h \otimes \mu_i\right) \otimes \mathbf{w}_j\right)\right)\right)\right)(\mathbf{u}, \mathbf{v})\\
&= \otimes^*\left(\rho\left(\sigma\left(\Sigma'\left(\lambda_h \otimes \mu_i\right) \otimes \mathbf{w}_j\right)\right)\right)(\mathbf{u}, \mathbf{v})\\
&= \otimes^*\left(\rho\left(\mathbf{w}_j \otimes \Sigma'\left(\lambda_h \otimes \mu_i\right)\right)\right)(\mathbf{u}, \mathbf{v})\\
&= \otimes^*\left(\rho \circ \otimes\left(\mathbf{w}_j, \Sigma'\left(\lambda_h \otimes \mu_i\right)\right)\right)(\mathbf{u}, \mathbf{v})\\
&= \otimes^*\left(\psi_{U \otimes V, W}\left(\mathbf{w}_j, \Sigma'\left(\lambda_h \otimes \mu_i\right)\right)\right)(\mathbf{u}, \mathbf{v})\\
&= \left(\psi_{U \otimes V, W}\left(\mathbf{w}_j, \Sigma'\left(\lambda_h \otimes \mu_i\right)\right)\right) \circ \otimes(\mathbf{u}, \mathbf{v})\\
&= \left(\psi_{U \otimes V, W}\left(\mathbf{w}_j, \Sigma'\left(\lambda_h \otimes \mu_i\right)\right)\right)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\\
&= \Sigma'\left(\lambda_h \otimes \mu_i\right)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{w}_j\\
&= \lambda_h(\mathbf{u}) \mu_i(\mathbf{v}) \mathbf{w}_j
\end{aligned}$$

$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U \times V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\Sigma((f \otimes g) \otimes \mathbf{w})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \Sigma\left(\left(\sum_{h \in \Lambda_m} k_h \lambda_h \otimes \sum_{i \in \Lambda_n} l_i \mu_i\right) \otimes \sum_{j \in \Lambda_o} m_j \mathbf{w}_j\right)(\mathbf{u}, \mathbf{v})\\
&= \sum_{h \in \Lambda_m} \sum_{i \in \Lambda_n} \sum_{j \in \Lambda_o} k_h l_i m_j \Sigma\left(\left(\lambda_h \otimes \mu_i\right) \otimes \mathbf{w}_j\right)(\mathbf{u}, \mathbf{v})\\
&= \sum_{h \in \Lambda_m} \sum_{i \in \Lambda_n} \sum_{j \in \Lambda_o} k_h l_i m_j \lambda_h(\mathbf{u}) \mu_i(\mathbf{v}) \mathbf{w}_j\\
&= \sum_{h \in \Lambda_m} k_h \lambda_h(\mathbf{u}) \sum_{i \in \Lambda_n} l_i \mu_i(\mathbf{v}) \sum_{j \in \Lambda_o} m_j \mathbf{w}_j\\
&= f(\mathbf{u}) g(\mathbf{v}) \mathbf{w}
\end{aligned}$$

よって, ある線形同型写像 $\Sigma : (U^* \otimes V^*) \otimes W \xrightarrow{\sim} L(U, V; W)$ が存在して, $\forall (f, g) \in U^* \times V^* \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U \times V \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $\Sigma((f \otimes g) \otimes \mathbf{w})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) g(\mathbf{v}) \mathbf{w}$ が成り立つ. □

定理 4.5.20. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$L(U, L(V, W)) \cong (U^* \otimes V^*) \otimes W$$

このとき, ある線形同型写像 $\Sigma : (U^* \otimes V^*) \otimes W \xrightarrow{\sim} L(U, L(V, W))$ が存在して, $\forall (f, g) \in U^* \times V^* \forall \mathbf{u} \in U \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $\Sigma((f \otimes g) \otimes \mathbf{w})(\mathbf{u}) = (V \rightarrow W; \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{u}) g(\mathbf{v}) \mathbf{w})$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall (f, g, \mathbf{w}) \in U^* \times V^* \times W$ に対し, $T((f \otimes g) \otimes \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \otimes g) \otimes f$ を満たすような線形写像 $\rho : (U^* \otimes V^*) \otimes W \rightarrow (W \otimes V^*) \otimes U^*$ が考えられれば, $\forall \mathbf{T} \in (W \otimes V^*) \otimes U^*$ に対し, それらの vector 空間たち U^*, V^*, W の基底たちそれぞれ $\langle \lambda_h \rangle_{h \in \Lambda_m}$, $\langle \mu_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_j \rangle_{j \in \Lambda_o}$ を用いれば, 定理 4.5.2 よりその組 $\langle (\mathbf{w}_j \otimes \mu_i) \otimes \lambda_h \rangle_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o}$ がその vector 空間 $(W \otimes V^*) \otimes U^*$ の基底をなすので, 次のようにおかれることができて,

$$\mathbf{T} = \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} \left(\mathbf{w}_j \otimes \mu_i\right) \otimes \lambda_h$$

このとき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o} \xi_{hij}\left(\mathbf{w}_j\otimes\mu_i\right)\otimes\lambda_h\\ &= \sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o} \xi_{hij}T\left(\left(\lambda_h\otimes\mu_i\right)\otimes\mathbf{w}_j\right)\\ &= T\left(\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o} \xi_{hij}\left(\lambda_h\otimes\mu_i\right)\otimes\mathbf{w}_j\right)\end{aligned}$$

ゆえに, その線形写像 T は全射であり, さらに, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}\dim\left(U^*\otimes V^*\right)\otimes W &= \dim U^*\otimes V^*\dim W\\ &= \dim U^*\dim V^*\dim W\\ &= \dim W\dim V^*\dim U^*\\ &= \dim W\otimes V^*\dim U^*\\ &= \dim\left(W\otimes V^*\right)\otimes U^*\end{aligned}$$

定理 1.5.16 よりその線形写像 T は線形同型写像である.

定理 4.5.7 よりある線形同型写像 $\rho : W\otimes V^*\to L(V,W)$ が存在して, $\forall(\mathbf{w},f)\in W\times V^*$ に対し, $\rho\left(\mathbf{w}\otimes f\right) : V\to W;\mathbf{v}\mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\mathbf{w}$ が成り立つ. そこで, $\forall(f,g,\mathbf{w})\in U^*\times V^*\times W$ に対し, $\Sigma'\left(\left(\mathbf{w}\otimes g\right)\otimes f\right)=\rho\left(\mathbf{w}\otimes g\right)\otimes f$ を満たすような線形写像 $\Sigma' : \left(W\otimes V^*\right)\otimes U^*\to L(V,W)\otimes U^*$ が考えられれば, $\forall\mathbf{T}\in L(V,W)\otimes U^*$ に対し, 定理 1.2.9 よりそれらの vector 空間たち U^*, $L(V,W)$ の基底たちそれぞれ $\langle\lambda_h\rangle_{h\in\Lambda_m}$, $\langle\varphi_{ij} : V\to W\rangle_{(i,j)\in\Lambda_n\times\Lambda_o}$ を用いれば, 定理 4.5.2 よりその組 $\langle\varphi_{ij}\otimes\lambda_h\rangle_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}$ がその vector 空間 $L(V,W)\otimes U^*$ の基底をなすので, 次のようにおくことができる.

$$\mathbf{T}=\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\varphi_{ij}\otimes\lambda_h$$

このとき, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\varphi_{ij}\otimes\lambda_h\\ &= \sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\rho\circ\rho^{-1}\left(\varphi_{ij}\right)\otimes\lambda_h\\ &= \sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\Sigma'\left(\rho^{-1}\left(\varphi_{ij}\right)\otimes\lambda_h\right)\\ &= \Sigma'\left(\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\rho^{-1}\left(\varphi_{ij}\right)\otimes\lambda_h\right)\end{aligned}$$

ゆえに, その線形写像 Σ' は全射であり, さらに, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}\dim\left(W\otimes V^*\right)\otimes U^* &= \dim W\otimes V^*\dim U^*\\ &= \dim W\dim V^*\dim U^*\\ &= \dim V\dim W\dim U^*\\ &= \dim L(V,W)\dim U^*\\ &= \dim L(V,W)\otimes U^*\end{aligned}$$

定理 1.5.16 よりその線形写像 $\varSigma'$ は線形同型写像である.

さらに, 定理 4.5.7 よりある線形同型写像 $\sigma : L(V,W) \otimes U^* \to L\left(U, L(V,W)\right)$ が存在して, $\forall(f,g) \in U^* \times L(V,W)$ に対し, $\sigma(g \otimes f) : U \to L(V,W); \mathbf{u} \mapsto f\left(\mathbf{u}\right) g$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{tikzcd}
 & (U^* \otimes V^*) \otimes W \arrow[dd, tail, two heads, "T"] & & L\left(U, L\left(V, W\right)\right) \\
(f \otimes g) \otimes \mathbf{w} \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[dd, mapsto, "T"] & & \sigma\left(\rho\left(\mathbf{w} \otimes g\right) \otimes f\right) \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & \\
 & (W \otimes V^*) \otimes U^* \arrow[rr, tail, two heads, "\varSigma'"] & & L\left(V, W\right) \otimes U^* \arrow[uu, tail, two heads, "\sigma"'] \\
(\mathbf{w} \otimes g) \otimes f \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, mapsto, "\varSigma'"] & & \rho\left(\mathbf{w} \otimes g\right) \otimes f \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] \arrow[uu, mapsto, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

そこで, 次のように線形同型写像 $\varSigma : (U^* \otimes V^*) \otimes W \to L\left(U, L(V,W)\right)$ がおかれれば,

$$\begin{tikzcd}
(U^* \otimes V^*) \otimes W \arrow[r, tail, two heads, "\varSigma"] \arrow[d, tail, two heads, "T"] & L\left(U, L\left(V, W\right)\right) \\
(W \otimes V^*) \otimes U^* \arrow[r, tail, two heads, "\varSigma'"] & L\left(V, W\right) \otimes U^* \arrow[u, tail, two heads, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

$\forall(f,g) \in U^* \times V^* \forall\mathbf{u} \in U \forall\mathbf{w} \in W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varSigma\left(\left(f \otimes g\right) \otimes \mathbf{w}\right)\left(\mathbf{u}\right) &= \left(\sigma \circ \varSigma' \circ T\right)\left(\left(f \otimes g\right) \otimes \mathbf{w}\right)\left(\mathbf{u}\right) \\
&= \sigma\left(\varSigma'\left(T\left(\left(f \otimes g\right) \otimes \mathbf{w}\right)\right)\right)\left(\mathbf{u}\right) \\
&= \sigma\left(\varSigma'\left(\left(\mathbf{w} \otimes g\right) \otimes f\right)\right)\left(\mathbf{u}\right) \\
&= \sigma\left(\rho\left(\mathbf{w} \otimes g\right) \otimes f\right)\left(\mathbf{u}\right) \\
&= \sigma\left(\rho\left(\mathbf{w} \otimes g\right) \otimes f\right)\left(\mathbf{u}\right) \\
&= \sigma\left(\left(V \to W; \mathbf{v} \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\mathbf{w}\right) \otimes f\right)\left(\mathbf{u}\right) \\
&= \left(V \to W; \mathbf{v} \mapsto f\left(\mathbf{u}\right) g\left(\mathbf{v}\right)\mathbf{w}\right)
\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958. 第 53 版 p202-207 ISBN4-7853-1301-3

[2] 土屋卓也. ”1 ベクトル空間のテンソル積とテンソル空間”. 愛媛大学. http://daisy.math.sci.ehime-u.ac.jp/users/tsuchiya/math/fem/exterior/section1.pdf (2022-2-11 14:37 取得)
[3] 池田岳, テンソル代数と表現論, 東京大学出版会, 2022. 第 2 刷 p64-71 ISBN978-4-13-062929-4

4.6 tensor 空間

4.6.1 tensor 積の結合法則

定理 4.6.1 (tensor 積の結合法則)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, ある線形同型写像 $\rho:(U\otimes V)\otimes W\overset{\sim}{\rightarrow}U\otimes(V\otimes W)$ が一意的に存在して, その線形同型写像 ρ は, $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\in U\times V\times W$ に対し, $\rho((\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\otimes\mathbf{w})=\mathbf{u}\otimes(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})$ を満たす. ゆえに, $(U\otimes V)\otimes W\cong U\otimes(V\otimes W)$ が成り立つ.

この定理を tensor 積の結合法則という.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\in U\times V\times W$ に対し, $\rho((\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\otimes\mathbf{w})=\mathbf{u}\otimes(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})$ を満たすような線形写像 $\rho:(U\otimes V)\otimes W\rightarrow U\otimes(V\otimes W)$ が考えられれば, 同様に, $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\in U\times V\times W$ に対し, $\sigma(\mathbf{u}\otimes(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}))=(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\otimes\mathbf{w}$ を満たすような線形写像 $\sigma:U\otimes(V\otimes W)\rightarrow(U\otimes V)\otimes W$ も考えられることで, これらの vector 空間たち U, V, W の基底たちそれぞれ $\langle\mathbf{u}_h\rangle_{h\in\Lambda_m}$, $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\Lambda_o}$ が与えられれば, 定理 4.5.1 よりそれらの vector 空間たち $(U\otimes V)\otimes W$, $U\otimes(V\otimes W)$ の基底たちそれぞれ $\langle(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{v}_i)\otimes\mathbf{w}_j\rangle_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}$, $\langle\mathbf{u}_h\otimes(\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j)\rangle_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}$ がとられることができることに注意すれば, $\forall\mathbf{T}\in(V\otimes W)\otimes U$ に対し, $\mathbf{T}=\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{v}_i)\otimes\mathbf{w}_j$ とおくことで, その合成写像 $\sigma\circ\rho$ も線形写像となって次のようになる.

$$\begin{aligned}
\sigma\circ\rho(\mathbf{T})&=\sigma\circ\rho\left(\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{v}_i)\otimes\mathbf{w}_j\right)\\
&=\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\sigma\circ\rho((\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{v}_i)\otimes\mathbf{w}_j)\\
&=\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\sigma(\rho((\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{v}_i)\otimes\mathbf{w}_j))\\
&=\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\sigma(\mathbf{u}_h\otimes(\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j))\\
&=\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{v}_i)\otimes\mathbf{w}_j=\mathbf{T}
\end{aligned}$$

同様にして, $\forall\mathbf{T}\in U\otimes(V\otimes W)$ に対し, $\mathbf{T}=\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\mathbf{u}_h\otimes(\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j)$ とおくことで, その合成写像 $\rho\circ\sigma$ も線形写像となって次のようになる.

$$\begin{aligned}
\rho\circ\sigma(\mathbf{T})&=\rho\circ\sigma\left(\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\mathbf{u}_h\otimes(\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j)\right)\\
&=\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\rho\circ\sigma(\mathbf{u}_h\otimes(\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j))\\
&=\sum_{(h,i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n\times\Lambda_o}\xi_{hij}\sigma(\rho(\mathbf{u}_h\otimes(\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j)))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} \sigma \left((\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{v}_i) \otimes \mathbf{w}_j \right) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} \mathbf{u}_h \otimes (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j) = \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

以上より, $\sigma = \rho^{-1}$ が得られたので, その線形写像 ρ は線形同型写像である.

さらに, $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in U \times V \times W$ に対し, $\rho ((\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$ を満たすような線形写像 $\rho : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$ がこれのほかに $\rho' : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$ と与えられたらば, $\forall \mathbf{T} \in (U \otimes V) \otimes W$ に対し, $\mathbf{T} = \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{v}_i) \otimes \mathbf{w}_j$ とおくことで, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\rho (\mathbf{T}) &= \rho \left(\sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{v}_i) \otimes \mathbf{w}_j \right) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} \rho \left((\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{v}_i) \otimes \mathbf{w}_j \right) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} \mathbf{u}_h \otimes (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j) \\
&= \sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} \rho' \left((\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{v}_i) \otimes \mathbf{w}_j \right) \\
&= \rho' \left(\sum_{(h,i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n \times \Lambda_o} \xi_{hij} (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{v}_i) \otimes \mathbf{w}_j \right) = \rho' (\mathbf{T})
\end{aligned}
$$

以上より, $\rho = \rho'$ が得られる.

よって, ある線形同型写像 $\rho : (U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W)$ が一意的に存在して, その線形同型写像 ρ は, $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in U \times V \times W$ に対し, $\rho ((\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$ を満たす. ゆえに, $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$ が成り立つ. □

4.6.2 重線形写像

公理 4.6.1. n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i, vector 空間 W が与えられたとき, 写像 $\varPhi : \prod_{i \in \Lambda_n} V_i \to W$ が, $\forall i \in \Lambda_n \forall k, l \in K \forall (\mathbf{v}_{i'})_{i' \in \Lambda_n} \in \prod_{i' \in \Lambda_n} V_{i'} \forall \mathbf{w}_i \in V_i$ に対し, 次式を満たすとき,

$$
\varPhi \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & k\mathbf{v}_i + l\mathbf{w}_i & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = k\varPhi \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_i & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} + l\varPhi \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{w}_i & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}
$$

その写像 $\varPhi$ を n 重線形写像, または単に重線形写像という.

さらに, このような写像全体の集合を以下, $L \left((V_i)_{i \in \Lambda_n} ; W \right)$ と書くことにする.

定理 4.6.2. n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i, vector 空間 W が与えられたとき, 重線形写像全体の集合 $L \left((V_i)_{i \in \Lambda_n} ; W \right)$ は体 K 上の vector 空間をなす.

証明. 定理 4.5.1 と同様にして示される. □

4.6.3 tensor 空間

定義 4.6.2. n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i が与えられたとき, 次式のようにして vector 空間 $\bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i$ が定義される. その vector 空間 $\bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i$ をそれらの vector 空間たち V_i からなる tensor 空間ということにする.

$$\bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i = \begin{cases} V_1 & \text{if} \quad n=1 \\ \bigotimes_{i\in\varLambda_{n-1}} V_i \otimes V_n & \text{if} \quad 2\leq n \end{cases}$$

さらに, それらの vector 空間たち V_i の基底たちが $\left\langle \mathbf{v}_{ij_i} \right\rangle_{j_i\in\varLambda_{m_i}}$ と与えられたとき, これらを α_i とおくと, このようにして得られたその vector 空間 $\bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i$ の基底として $\left\langle \bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i} \right\rangle_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}}$ があげられる. なお, $\mathbf{j}=(j_i)_i$ としその添数 i のとりうる範囲を $\varLambda_n$ とした. これを $\bigotimes_{i\in\varLambda_n} \alpha_i$ と書くことにする.

定理 4.6.3. n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i, vector 空間 W が与えられたとき, 任意の重線形写像 $\varPhi: \prod_{i\in\varLambda_n} V_i \rightarrow W$ に対し, ある線形写像 $\rho: \bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i \rightarrow W$ が一意的に存在して, $\varPhi = \rho\circ\otimes$ が成り立つ.

証明. n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i, vector 空間 W が与えられたとき, 任意の重線形写像 $\varPhi: \prod_{i\in\varLambda_n} V_i \rightarrow W$ に対し, 任意の重線形写像 $\varPhi: \prod_{i\in\varLambda_n} V_i \rightarrow W$ に対し, ある線形写像 $\rho: \bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i \rightarrow W$ が存在して, $\varPhi = \rho\circ\otimes$ が成り立つとしよう. このような線形写像 ρ がこれのほかに σ と与えられたとする. それらの vector 空間たち V_i の基底たちが $\left\langle \mathbf{v}_{ij_i} \right\rangle_{j_i\in\varLambda_{m_i}}$ と与えられたとき, このようにして得られたその vector 空間 $\bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i$ の基底として $\left\langle \bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i} \right\rangle_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}}$ があげられる. なお, $\mathbf{j}=(j_i)_i$ としその添数 i のとりうる範囲を $\varLambda_n$ とした. このとき, $\forall\mathbf{T}\in\bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i$ に対し, $\mathbf{T} = \sum_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i}$ とおかれると, 次のようになることから,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{T}) &= \rho\left(\sum_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i}\right) \\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \rho\left(\bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i}\right) \\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \rho\circ\otimes\left(\mathbf{v}_{ij_i}\right)_i \\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \varPhi\left(\mathbf{v}_{ij_i}\right)_i \\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \sigma\circ\otimes\left(\mathbf{v}_{ij_i}\right)_i \\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \sigma\left(\bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i}\right) \end{aligned}$$

$$= \sigma \left(\sum_{\mathbf{j} \in \prod_i \Lambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i} \right) = \sigma \left(\mathbf{T} \right)$$

$\rho = \sigma$ が得られる. ゆえに, このような線形写像 ρ が存在するのであれば, その存在は一意的である.

任意の重線形写像 $\varPhi : \prod_{i \in \varLambda_n} V_i \rightarrow W$ に対し, ある線形写像 $\rho : \bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i \rightarrow W$ が存在して, $\varPhi = \rho \circ \otimes$ が成り立つことについて, $n = 1$ のときは明らかで, $n = 2$ のときは定理 4.5.2 そのものである.

$n = m$ のとき, ある線形写像 $\rho : \bigotimes_{i \in \varLambda_m} V_i \rightarrow W$ が存在して, $\varPhi = \rho \circ \otimes$ が成り立つと仮定しよう. $n = m + 1$ のとき, 任意の重線形写像 $\varPhi : \prod_{i \in \varLambda_{m+1}} V_i \rightarrow W$ に対し, $\forall \mathbf{v}_{m+1} \in V_{m+1}$ に対し, 次式のように写像 $\varPhi_{\mathbf{v}_{m+1}}$ が定義されると,

$$\varPhi_{\mathbf{v}_{m+1}} : \prod_{i \in \varLambda_m} V_i \rightarrow W; \left(\mathbf{v}_i \right)_{i \in \varLambda_m} \mapsto \varPhi \left(\mathbf{v}_i \right)_{i \in \varLambda_{m+1}}$$

これは明らかに重線形写像であり, ある線形写像 $\rho_{\mathbf{v}_{m+1}} : \bigotimes_{i \in \varLambda_m} V_i \rightarrow W$ が存在して, $\varPhi_{\mathbf{v}_{m+1}} = \rho_{\mathbf{v}_{m+1}} \circ \otimes$ が成り立つ.

そこで, 次式のように写像 $\varPsi$ が定義されると,

$$\varPsi : \bigotimes_{i \in \varLambda_m} V_i \times V_{m+1} \rightarrow W; \left(\mathbf{T}, \mathbf{v}_{m+1} \right) \mapsto \rho_{\mathbf{v}_{m+1}} \left(\mathbf{T} \right)$$

その写像 $\rho_{\mathbf{v}_{m+1}}$ のおき方から, $\forall k, l \in K \forall \mathbf{T}, \mathbf{U} \in \bigotimes_{i \in \varLambda_m} V_i$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \varPsi \left(k\mathbf{T} + l\mathbf{U} \quad \mathbf{v}_{m+1} \right) &= \rho_{\mathbf{v}_{m+1}} \left(k\mathbf{T} + l\mathbf{U} \right) \\ &= k\rho_{\mathbf{v}_{m+1}} \left(\mathbf{T} \right) + l\rho_{\mathbf{v}_{m+1}} \left(\mathbf{U} \right) \\ &= k\varPsi \left(\mathbf{T}, \mathbf{v}_{m+1} \right) + l\varPsi \left(\mathbf{U}, \mathbf{v}_{m+1} \right) \end{aligned}$$

一方で, $\forall \mathbf{T} \in \bigotimes_{i \in \varLambda_m} V_i$ に対し, その添数 i のとりうる範囲を $\varLambda_m$ として次式のようにおかれると,

$$\mathbf{T} = \sum_{\mathbf{j} \in \prod \varLambda_{\dim V_i}} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i}$$

$\forall k, l \in K \forall \mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{w}_{m+1} \in V_{m+1}$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned} \rho_{k\mathbf{v}_{m+1} + l\mathbf{w}_{m+1}} \left(\mathbf{T} \right) &= \rho_{k\mathbf{v}_{m+1} + l\mathbf{w}_{m+1}} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \rho_{k\mathbf{v}_{m+1} + l\mathbf{w}_{m+1}} \left(\bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \varPhi \left(\left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)_i, k\mathbf{v}_{m+1} + l\mathbf{w}_{m+1} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \left(k\varPhi \left(\left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)_i, \mathbf{v}_{m+1} \right) + l\varPhi \left(\left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)_i, \mathbf{w}_{m+1} \right) \right) \\ &= k \sum_{\mathbf{j} \in \prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \varPhi \left(\left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)_i, \mathbf{v}_{m+1} \right) + l \sum_{\mathbf{j} \in \prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \varPhi \left(\left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)_i, \mathbf{w}_{m+1} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= k \sum_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \rho_{\mathbf{v}_{m+1}} \left(\bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i} \right) + l \sum_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \rho_{\mathbf{w}_{m+1}} \left(\bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i} \right) \\
&= k\rho_{\mathbf{v}_{m+1}} \left(\sum_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i} \right) + l\rho_{\mathbf{w}_{m+1}} \left(\sum_{\mathbf{j}\in\prod_i \varLambda_{m_i}} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_i \mathbf{v}_{ij_i} \right) \\
&= k\rho_{\mathbf{v}_{m+1}} (\mathbf{T}) + l\rho_{\mathbf{w}_{m+1}} (\mathbf{T}) \\
&= \left(k\rho_{\mathbf{v}_{m+1}} + l\rho_{\mathbf{w}_{m+1}} \right) (\mathbf{T})
\end{aligned}
$$

$\rho_{k\mathbf{v}_{m+1}+l\mathbf{w}_{m+1}} = k\rho_{\mathbf{v}_{m+1}} + l\rho_{\mathbf{w}_{m+1}}$ が成り立つ. 以上の議論により, その写像 $\varPsi$ は双線形写像である.

したがって, 定理 4.5.3 よりある線形写像 $\rho : \bigotimes_{i\in\varLambda_{m+1}} V_i \to W$ が一意的に存在して, $\varPsi = \rho \circ \otimes$ が成り立つ. これにより, $\forall \left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)_{i\in\varLambda_{m+1}} \in \prod_{i\in\varLambda_{m+1}} V_i$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\varPhi \left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)_{i\in\varLambda_{m+1}} &= \varPhi_{\mathbf{v}_{m+1}} \left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)_{i\in\varLambda_m} \\
&= \rho_{\mathbf{v}_{m+1}} \circ \otimes \left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)_{i\in\varLambda_m} \\
&= \rho_{\mathbf{v}_{m+1}} \left(\bigotimes_{i\in\varLambda_m} \mathbf{v}_{ij_i} \right) \\
&= \varPsi \left(\bigotimes_{i\in\varLambda_m} \mathbf{v}_{ij_i} \quad \mathbf{v}_{m+1} \right) \\
&= \rho \circ \otimes \left(\bigotimes_{i\in\varLambda_m} \mathbf{v}_{ij_i} \quad \mathbf{v}_{m+1} \right) \\
&= \rho \left(\bigotimes_{i\in\varLambda_{m+1}} \mathbf{v}_{ij_i} \right) \\
&= \rho \circ \otimes \left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)_{i\in\varLambda_{m+1}}
\end{aligned}
$$

以上より, $n = m+1$ のときでも, 任意の重線形写像 $\varPhi : \prod_{i\in\varLambda_{m+1}} V_i \to W$ に対し, ある線形写像 $\rho : \bigotimes_{i\in\varLambda_{m+1}} V_i \to W$ が存在して, $\varPhi = \rho \circ \otimes$ が成り立つ. その存在は上記の議論により一意的である.

よって, 数学的帰納法により任意の重線形写像 $\varPhi : \prod_{i\in\varLambda_n} V_i \to W$ に対し, ある線形写像 $\rho : \bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i \to W$ が一意的に存在して, $\varPhi = \rho \circ \otimes$ が成り立つことが示された. □

定理 4.6.4. n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$
\dim \bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i = \prod_{i\in\varLambda_n} \dim V_i = m_1 \cdots m_n
$$

証明. 定理 4.5.5 と数学的帰納法により直ちにわかる. □

定理 4.6.5. n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$
\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i \right)^* \cong \bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i^*
$$

このとき, ある線形同型写像 $\varSigma : \bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i^* \to \left(\bigotimes_{i\in\varLambda_n} V_i \right)^*$ が存在して, $\forall \left(f_i \right)_{i\in\varLambda_n} \in \prod_{i\in\varLambda_n} V_i^* \forall \left(\mathbf{v}_i \right)_{i\in\varLambda_n} \in$

$\prod_{i\in\Lambda_n} V_i$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\Sigma\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_n} f_i\right)\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_n}\mathbf{v}_i\right)=\prod_{i\in\Lambda_n} f_i\left(\mathbf{v}_i\right)$$

証明. 定理 4.5.14 と数学的帰納法により直ちにわかる. □

定理 4.6.6. 体 K が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\bigotimes_{i\in\Lambda_n} K\cong K$$

証明. 定理 4.5.16 と数学的帰納法により直ちにわかる. □

定理 4.6.7. n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$L\left(\left(V_i\right)_{i\in\Lambda_n};W\right)\cong L\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_n} V_i,W\right)$$

このとき, ある線形同型写像 $\otimes^*:L\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_n} V_i,W\right)\overset{\sim}{\rightarrow}L\left(\left(V_i\right)_{i\in\Lambda_n};W\right)$ が存在して, $\otimes^*(\rho)=\rho\circ\otimes$ が成り立ち, $\forall\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\Lambda_n}\in\prod_{i\in\Lambda_n} V_i$ に対し, $\otimes^*(\rho)\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\Lambda_n}=\rho\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_n}\mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.

証明. 定理 4.5.18 と数学的帰納法により直ちにわかる. □

定理 4.6.8. n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$L\left(\left(V_i\right)_{i\in\Lambda_n};W\right)\cong\bigotimes_{i\in\Lambda_n} V_i^*\otimes W$$

このとき, ある線形同型写像 $\Sigma:\bigotimes_{i\in\Lambda_n} V_i^*\otimes W\overset{\sim}{\rightarrow}L\left(\left(V_i\right)_{i\in\Lambda_n};W\right)$ が存在して, $\forall\left(f_i\right)_{i\in\Lambda_n}\in\prod_{i\in\Lambda_n} V_i^*\forall\mathbf{w}\in W\forall\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\Lambda_n}\in\prod_{i\in\Lambda_n} V_i$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\Sigma\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_n} f_i\otimes\mathbf{w}\right)\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\Lambda_n}=\prod_{i\in\Lambda_n} f_i\left(\mathbf{v}_i\right)\mathbf{w}$$

証明. 定理 4.5.19 と数学的帰納法により直ちにわかる. □

参考文献

[1] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958. 第 53 版 p208-211 ISBN4-7853-1301-3

4.7 Kronecker 積

4.7.1 Kronecker 積

定義 4.7.1. 体 K 上の $A \in \mathrm{M}(m,n,K)$, $B \in \mathrm{M}(o,p,K)$ なる行列たち A, B が与えられたとき, $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$, $B = \left(b_{kl}\right)_{(k,l)\in\varLambda_o\times\varLambda_p}$ と成分表示されれば, 次式のように行列たち A, B の二項演算 $\otimes$ が定義される. この二項演算 $\otimes$ を Kronecker 積という.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1p} & & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{o1} & \cdots & a_{11}b_{op} & & a_{1n}b_{o1} & \cdots & a_{1n}b_{op} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1p} & & a_{mn}b_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{o1} & \cdots & a_{m1}b_{op} & & a_{mn}b_{o1} & \cdots & a_{mn}b_{op} \end{pmatrix}$$

定理 4.7.1. 体 K 上の適切な行列たち A, B, C が与えられたとき, $\forall k \in K$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C \\ (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C \\ (kA) \otimes B &= A \otimes (kB) = kA \otimes B \\ (A \otimes B) \otimes C &= A \otimes (B \otimes C) \end{aligned}$$

証明. 体 K 上の適切な行列たち A, B, C が与えられたとき, $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_o\times\varLambda_p}$, $C = \left(c_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_q\times\varLambda_r}$ と成分表示されれば, $\forall k \in K$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned} & A \otimes (B + C) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\left(b_{11} + c_{11}\right) & \cdots & a_{11}\left(b_{1p} + c_{1p}\right) & & a_{1n}\left(b_{11} + c_{11}\right) & \cdots & a_{1n}\left(b_{1p} + c_{1p}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}\left(b_{o1} + c_{o1}\right) & \cdots & a_{11}\left(b_{op} + c_{op}\right) & & a_{1n}\left(b_{o1} + c_{o1}\right) & \cdots & a_{1n}\left(b_{op} + c_{op}\right) \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{m1}\left(b_{11} + c_{11}\right) & \cdots & a_{m1}\left(b_{1p} + c_{1p}\right) & & a_{mn}\left(b_{11} + c_{11}\right) & \cdots & a_{mn}\left(b_{1p} + c_{1p}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\left(b_{o1} + c_{o1}\right) & \cdots & a_{m1}\left(b_{op} + c_{op}\right) & & a_{mn}\left(b_{o1} + c_{o1}\right) & \cdots & a_{mn}\left(b_{op} + c_{op}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{11}c_{11} & \cdots & a_{11}b_{1p} + a_{11}c_{1p} & & a_{1n}b_{11} + a_{1n}c_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1p} + a_{1n}c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{o1} + a_{11}c_{o1} & \cdots & a_{11}b_{op} + a_{11}c_{op} & & a_{1n}b_{o1} + a_{1n}c_{o1} & \cdots & a_{1n}b_{op} + a_{1n}c_{op} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{m1}b_{11} + a_{m1}c_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + a_{m1}c_{1p} & & a_{mn}b_{11} + a_{mn}c_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1p} + a_{mn}c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{o1} + a_{m1}c_{o1} & \cdots & a_{m1}b_{op} + a_{m1}c_{op} & & a_{mn}b_{o1} + a_{mn}c_{o1} & \cdots & a_{mn}b_{op} + a_{mn}c_{op} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1p} & & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}b_{o1} & \cdots & a_{11}b_{op} & & a_{1n}b_{o1} & \cdots & a_{1n}b_{op} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1p} & & a_{mn}b_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}b_{o1} & \cdots & a_{m1}b_{op} & & a_{mn}b_{o1} & \cdots & a_{mn}b_{op}
\end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
a_{11}c_{11} & \cdots & a_{11}c_{1p} & & a_{1n}c_{11} & \cdots & a_{1n}c_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}c_{o1} & \cdots & a_{11}c_{op} & & a_{1n}c_{o1} & \cdots & a_{1n}c_{op} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
a_{m1}c_{11} & \cdots & a_{m1}c_{1p} & & a_{mn}c_{11} & \cdots & a_{mn}c_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}c_{o1} & \cdots & a_{m1}c_{op} & & a_{mn}c_{o1} & \cdots & a_{mn}c_{op}
\end{pmatrix}
$$

$$= A \otimes B + A \otimes C$$

$$(A + B) \otimes C$$

$$
= \begin{pmatrix}
(a_{11} + b_{11})\,c_{11} & \cdots & (a_{11} + b_{11})\,c_{1p} & & (a_{1n} + b_{1n})\,c_{11} & \cdots & (a_{1n} + b_{1n})\,c_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(a_{11} + b_{11})\,c_{o1} & \cdots & (a_{11} + b_{11})\,c_{op} & & (a_{1n} + b_{1n})\,c_{o1} & \cdots & (a_{1n} + b_{1n})\,c_{op} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
(a_{m1} + b_{m1})\,c_{11} & \cdots & (a_{m1} + b_{m1})\,c_{1p} & & (a_{mn} + b_{mn})\,c_{11} & \cdots & (a_{mn} + b_{mn})\,c_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(a_{m1} + b_{m1})\,c_{o1} & \cdots & (a_{m1} + b_{m1})\,c_{op} & & (a_{mn} + b_{mn})\,c_{o1} & \cdots & (a_{mn} + b_{mn})\,c_{op}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11}c_{11} + b_{11}c_{11} & \cdots & a_{11}c_{1p} + b_{11}c_{1p} & & a_{1n}c_{11} + b_{1n}c_{11} & \cdots & a_{1n}c_{1p} + b_{1n}c_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}c_{o1} + b_{11}c_{o1} & \cdots & a_{11}c_{op} + b_{11}c_{op} & & a_{1n}c_{o1} + b_{1n}c_{o1} & \cdots & a_{1n}c_{op} + b_{1n}c_{op} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
a_{m1}c_{11} + b_{m1}c_{11} & \cdots & a_{m1}c_{1p} + b_{m1}c_{1p} & & a_{mn}c_{11} + b_{mn}c_{11} & \cdots & a_{mn}c_{1p} + b_{mn}c_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}c_{o1} + b_{m1}c_{o1} & \cdots & a_{m1}c_{op} + b_{m1}c_{op} & & a_{mn}c_{o1} + b_{mn}c_{o1} & \cdots & a_{mn}c_{op} + b_{mn}c_{op}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11}c_{11} & \cdots & a_{11}c_{1p} & & a_{1n}c_{11} & \cdots & a_{1n}c_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}c_{o1} & \cdots & a_{11}c_{op} & & a_{1n}c_{o1} & \cdots & a_{1n}c_{op} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
a_{m1}c_{11} & \cdots & a_{m1}c_{1p} & & a_{mn}c_{11} & \cdots & a_{mn}c_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}c_{o1} & \cdots & a_{m1}c_{op} & & a_{mn}c_{o1} & \cdots & a_{mn}c_{op}
\end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
b_{11}c_{11} & \cdots & b_{11}c_{1p} & & b_{1n}c_{11} & \cdots & b_{1n}c_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{11}c_{o1} & \cdots & b_{11}c_{op} & & b_{1n}c_{o1} & \cdots & b_{1n}c_{op} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
b_{m1}c_{11} & \cdots & b_{m1}c_{1p} & & b_{mn}c_{11} & \cdots & b_{mn}c_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{m1}c_{o1} & \cdots & b_{m1}c_{op} & & b_{mn}c_{o1} & \cdots & b_{mn}c_{op}
\end{pmatrix}
$$

$$= A \otimes C + B \otimes C$$

$$(kA) \otimes B$$

$$
= \begin{pmatrix}
ka_{11}b_{11} & \cdots & ka_{11}b_{1p} & & ka_{1n}b_{11} & \cdots & ka_{1n}b_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
ka_{11}b_{o1} & \cdots & ka_{11}b_{op} & & ka_{1n}b_{o1} & \cdots & ka_{1n}b_{op} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
ka_{m1}b_{11} & \cdots & ka_{m1}b_{1p} & & ka_{mn}b_{11} & \cdots & ka_{mn}b_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
ka_{m1}b_{o1} & \cdots & ka_{m1}b_{op} & & ka_{mn}b_{o1} & \cdots & ka_{mn}b_{op}
\end{pmatrix}
$$

$$= k\begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1p} & & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}b_{o1} & \cdots & a_{11}b_{op} & & a_{1n}b_{o1} & \cdots & a_{1n}b_{op} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1p} & & a_{mn}b_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}b_{o1} & \cdots & a_{m1}b_{op} & & a_{mn}b_{o1} & \cdots & a_{mn}b_{op}
\end{pmatrix}$$

$$= kA \otimes B$$

$$A \otimes (kB)$$

$$= \begin{pmatrix}
a_{11}kb_{11} & \cdots & a_{11}kb_{1p} & & a_{1n}kb_{11} & \cdots & a_{1n}kb_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}kb_{o1} & \cdots & a_{11}kb_{op} & & a_{1n}kb_{o1} & \cdots & a_{1n}kb_{op} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
a_{m1}kb_{11} & \cdots & a_{m1}kb_{1p} & & a_{mn}kb_{11} & \cdots & a_{mn}kb_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}kb_{o1} & \cdots & a_{m1}kb_{op} & & a_{mn}kb_{o1} & \cdots & a_{mn}kb_{op}
\end{pmatrix}$$

$$= k\begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1p} & & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}b_{o1} & \cdots & a_{11}b_{op} & & a_{1n}b_{o1} & \cdots & a_{1n}b_{op} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1p} & & a_{mn}b_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}b_{o1} & \cdots & a_{m1}b_{op} & & a_{mn}b_{o1} & \cdots & a_{mn}b_{op}
\end{pmatrix}$$

$$= kA \otimes B$$

$$(A \otimes B) \otimes C$$

$$= \begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1p} & & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}b_{o1} & \cdots & a_{11}b_{op} & & a_{1n}b_{o1} & \cdots & a_{1n}b_{op} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1p} & & a_{mn}b_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}b_{o1} & \cdots & a_{m1}b_{op} & & a_{mn}b_{o1} & \cdots & a_{mn}b_{op}
\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}
c_{11} & \cdots & c_{1r} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
c_{q1} & \cdots & c_{qr}
\end{pmatrix}$$

$$
=\left(\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}b_{11}c_{11} & \cdots & a_{11}b_{11}c_{1r} & \cdots & a_{11}b_{1p}c_{11} & \cdots & a_{11}b_{1p}c_{1r} & \cdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
a_{11}b_{11}c_{q1} & \cdots & a_{11}b_{11}c_{qr} & \cdots & a_{11}b_{1p}c_{q1} & \cdots & a_{11}b_{1p} & \cdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
a_{11}b_{o1}c_{11} & \cdots & a_{11}b_{o1}c_{1r} & \cdots & a_{11}b_{op}c_{11} & \cdots & a_{11}b_{op}c_{1r} & \cdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
a_{11}b_{o1}c_{q1} & \cdots & a_{11}b_{o1}c_{qr} & \cdots & a_{11}b_{op}c_{q1} & \cdots & a_{11}b_{op}c_{qr} & \cdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
a_{m1}b_{11}c_{11} & \cdots & a_{m1}b_{11}c_{1r} & \cdots & a_{m1}b_{1p}c_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1p}c_{1r} & \cdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
a_{m1}b_{11}c_{q1} & \cdots & a_{m1}b_{11}c_{qr} & \cdots & a_{m1}b_{1p}c_{q1} & \cdots & a_{m1}b_{1p}c_{qr} & \cdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
a_{m1}b_{o1}c_{11} & \cdots & a_{m1}b_{o1}c_{1r} & \cdots & a_{m1}b_{op}c_{11} & \cdots & a_{m1}b_{op}c_{1r} & \cdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
a_{m1}b_{o1}c_{q1} & \cdots & a_{m1}b_{o1}c_{qr} & \cdots & a_{m1}b_{op}c_{q1} & \cdots & a_{m1}b_{op}c_{qr} & \cdots
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{ccccccc}
a_{1n}b_{11}c_{11} & \cdots & a_{1n}b_{11}c_{1r} & \cdots & a_{1n}b_{1p}c_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1p}c_{1r} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{1n}b_{11}c_{q1} & \cdots & a_{1n}b_{11}c_{qr} & \cdots & a_{1n}b_{1p}c_{q1} & \cdots & a_{1n}b_{1p}c_{qr} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{1n}b_{o1}c_{11} & \cdots & a_{1n}b_{o1}c_{1r} & \cdots & a_{1n}b_{op}c_{11} & \cdots & a_{1n}b_{op}c_{1r} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{1n}b_{o1}c_{q1} & \cdots & a_{1n}b_{o1}c_{qr} & \cdots & a_{1n}b_{op}c_{q1} & \cdots & a_{1n}b_{op}c_{qr} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{mn}b_{11}c_{11} & \cdots & a_{mn}b_{11}c_{1r} & \cdots & a_{mn}b_{1p}c_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1p}c_{1r} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{mn}b_{11}c_{q1} & \cdots & a_{mn}b_{11}c_{qr} & \cdots & a_{mn}b_{1p}c_{q1} & \cdots & a_{mn}b_{1p}c_{qr} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{mn}b_{o1}c_{11} & \cdots & a_{mn}b_{o1}c_{1r} & \cdots & a_{mn}b_{op}c_{11} & \cdots & a_{mn}b_{op}c_{1r} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{mn}b_{o1}c_{q1} & \cdots & a_{mn}b_{o1}c_{qr} & \cdots & a_{mn}b_{op}c_{q1} & \cdots & a_{mn}b_{op}c_{qr}
\end{array}\right)
$$

$$
=\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}
b_{11}c_{11} & \cdots & b_{11}c_{1r} & & b_{1p}c_{11} & \cdots & b_{1p}c_{1r} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{11}c_{q1} & \cdots & b_{11}c_{qr} & & b_{1p}c_{q1} & \cdots & b_{1p}c_{qr} \\
& \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
b_{o1}c_{11} & \cdots & b_{o1}c_{1r} & & b_{op}c_{11} & \cdots & b_{op}c_{1r} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{o1}c_{q1} & \cdots & b_{o1}c_{qr} & & b_{op}c_{q1} & \cdots & b_{op}c_{qr}
\end{pmatrix}
$$

$$
= A \otimes (B \otimes C)
$$

□

定義 4.7.2. 体 K 上の $A_i \in \mathrm{M}(m_i, n_i, K)$ なる行列たち A_i が与えられたとき, 次式のようにして $\bigotimes_{i \in \varLambda_n} A_i \in$

$\mathrm{M}\left(\prod_{i\in\varLambda_n} m_i, \prod_{i\in\varLambda_n} n_i, K\right)$ なる行列 $\bigotimes_{i\in\varLambda_n} A_i$ が定義される．その組 $\left(A_i\right)_{i\in\varLambda_n}$ からその行列 $\bigotimes_{i\in\varLambda_n} A_i$ へ写す写像を一般化された Kronecker 積, または単に, Kronecker 積ということにする．

$$\bigotimes_{i\in\varLambda_n} A_i = \begin{cases} A_1 & \text{if} \quad n=1 \\ \bigotimes_{i\in\varLambda_{n-1}} A_i \otimes A_n & \text{if} \quad 2 \leq n \end{cases}$$

4.7.2 tensor 積と Kronecker 積

定理 4.7.2. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, その vector 空間 V の基底たち $\left\langle \mathbf{t}_i \right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, その vector 空間 W の基底たち $\left\langle \mathbf{u}_j \right\rangle_{j\in\varLambda_n}$, $\left\langle \mathbf{w}_j \right\rangle_{j\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, これらの基底たちをそれぞれ α, γ, β, δ とおかれると, 定理 4.5.2 よりその vector 空間 $V\otimes W$ の基底として $\alpha\otimes\beta$, $\gamma\otimes\delta$ があげられるのであった．このとき, その vector 空間 $V\otimes W$ のそれらの基底たち $\alpha\otimes\beta$, $\gamma\otimes\delta$ に関する基底変換行列 $\left[I_{V\otimes W}\right]_{\alpha\otimes\beta}^{\gamma\otimes\delta}$ は次式を満たす[*36].

$$\left[I_{V\otimes W}\right]_{\alpha\otimes\beta}^{\gamma\otimes\delta} = \left[I_V\right]_{\alpha}^{\gamma} \otimes \left[I_W\right]_{\beta}^{\delta}$$

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, その vector 空間 V の基底たち $\left\langle \mathbf{t}_i \right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, その vector 空間 W の基底たち $\left\langle \mathbf{u}_j \right\rangle_{j\in\varLambda_n}$, $\left\langle \mathbf{w}_j \right\rangle_{j\in\varLambda_n}$ が与えられたとき, これらの基底たちをそれぞれ α, γ, β, δ とおかれると, 定理 4.5.2 よりその vector 空間 $V\otimes W$ の基底として $\alpha\otimes\beta$, $\gamma\otimes\delta$ があげられるのであった．このとき, その vector 空間 $V\otimes W$ のそれらの基底たち $\alpha\otimes\beta$, $\gamma\otimes\delta$ に関する基底変換行列 $\left[I_{V\otimes W}\right]_{\alpha\otimes\beta}^{\gamma\otimes\delta}$ について, vector 空間たち K^m, K^n, K^{mn} の標準直交基底たちが $\left\langle \mathbf{d}_i \right\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\left\langle \mathbf{e}_j \right\rangle_{j\in\varLambda_n}$, $\left\langle \mathbf{f}_{ij} \right\rangle_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$, それらの基底たち $\alpha\otimes\beta$, $\gamma\otimes\delta$ に関する基底変換における線形同型写像たちが $\varphi_{\alpha\otimes\beta}$, $\varphi_{\gamma\otimes\delta}$, それらの基底たち α, γ に関する基底変換行列 $\left[I_V\right]_{\alpha}^{\gamma}$, それらの基底たち β, δ に関する基底変換行列 $\left[I_W\right]_{\beta}^{\delta}$ がそれぞれ $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m^2}$, $\left(b_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_n^2}$ とおかれると, 次のようになる．

$$\begin{aligned}
\varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1} \circ I_{V\otimes W} \circ \varphi_{\alpha\otimes\beta}\left(\mathbf{f}_{ij}\right) &= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_{\alpha\otimes\beta}\left(\mathbf{f}_{ij}\right)\right) \\
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{u}_j\right) \\
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_\gamma \circ \varphi_\gamma^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{t}_i\right) \otimes \varphi_\delta \circ \varphi_\delta^{-1} \circ I_W \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\beta^{-1}\left(\mathbf{u}_j\right)\right) \\
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_\gamma\left(\varphi_\gamma^{-1} \circ I_V \circ \varphi_\alpha\left(\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{t}_i\right)\right)\right) \otimes \varphi_\delta\left(\varphi_\delta^{-1} \circ I_W \circ \varphi_\beta\left(\varphi_\beta^{-1}\left(\mathbf{u}_j\right)\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

[*36] なお, $\mathrm{vector}\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$ は $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ とみなしていることに注意されたい．

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_{\gamma}\left(\varphi_{\gamma}^{-1}\circ I_V\circ\varphi_{\alpha}\left(\mathbf{d}_i\right)\right)\otimes\varphi_{\delta}\left(\varphi_{\delta}^{-1}\circ I_W\circ\varphi_{\beta}\left(\mathbf{e}_j\right)\right)\right)\\
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_{\gamma}\left(\left[I_V\right]_{\alpha}^{\gamma}\mathbf{d}_i\right)\otimes\varphi_{\delta}\left(\left[I_W\right]_{\beta}^{\delta}\mathbf{e}_j\right)\right)\\
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_{\gamma}\left(\sum_{k\in\Lambda_m}a_{ki}\mathbf{d}_k\right)\otimes\varphi_{\delta}\left(\sum_{l\in\Lambda_n}b_{lj}\mathbf{e}_l\right)\right)\\
&= \sum_{k\in\Lambda_m}\sum_{l\in\Lambda_n}a_{ki}b_{lj}\varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_{\gamma}\left(\mathbf{d}_k\right)\otimes\varphi_{\delta}\left(\mathbf{e}_l\right)\right)\\
&= \sum_{k\in\Lambda_m}\sum_{l\in\Lambda_n}a_{ki}b_{lj}\varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\mathbf{v}_k\otimes\mathbf{w}_l\right)\\
&= \sum_{k\in\Lambda_m}\sum_{l\in\Lambda_n}a_{ki}b_{lj}\mathbf{f}_{kl}\\
&= \sum_{k\in\Lambda_m}\sum_{l\in\Lambda_n}a_{ki}b_{lj}\left(\delta_{gk}\delta_{hl}\right)_{(g,h)\in\Lambda_m\times\Lambda_n}\\
&= \sum_{k\in\Lambda_m}\sum_{l\in\Lambda_n}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\\ \vdots\\ \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ a_{ki}b_{lj}\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\\ \vdots\\ \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{matrix}
\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i}b_{1j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{1i}b_{nj} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
\cdots \\
+ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{mi}b_{1j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{mi}b_{nj} \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{matrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i}b_{1j} \\ \vdots \\ a_{1i}b_{nj} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{mi}b_{1j} \\ \vdots \\ a_{mi}b_{nj} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i}b_{1j} \\ \vdots \\ a_{1i}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{mi}b_{1j} \\ \vdots \\ a_{mi}b_{nj} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

これにより, したがって, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\left[I_{V \otimes W} \right]_{\alpha \otimes \beta}^{\gamma \otimes \delta} &= \begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} & & a_{1m}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{nn} & & a_{1m}b_{n1} & \cdots & a_{1m}b_{nn} \\
& \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1n} & & a_{mm}b_{11} & \cdots & a_{mm}b_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{nn} & & a_{mm}b_{n1} & \cdots & a_{mm}b_{nn}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \left[I_V \right]_\alpha^\gamma \otimes \left[I_W \right]_\beta^\delta
\end{aligned}
$$

□

定理 4.7.3. n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i, これらの基底たち $\left\langle \mathbf{v}_{ij_i} \right\rangle_{j_i \in \varLambda_{m_i}}$, $\left\langle \mathbf{w}_{ij_i} \right\rangle_{j_i \in \varLambda_{m_i}}$ が与えられたとき, これらの基底たちをそれぞれ α_i, β_i とおかれると, 定理 4.5.2 よりその tensor 空間 $\bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i$ の基底として $\bigotimes_{i \in \varLambda_n} \alpha_i$, $\bigotimes_{i \in \varLambda_n} \beta_i$ があげられるのであった. このとき, その tensor 空間 $\bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i$ のそれらの基底たち

$\bigotimes_{i\in\varLambda_n}\alpha_i$, $\bigotimes_{i\in\varLambda_n}\beta_i$ に関する基底変換行列 $\left[I_{\bigotimes_{i\in\varLambda_n}V_i}\right]_{\bigotimes_{i\in\varLambda_n}\alpha_i}^{\bigotimes_{i\in\varLambda_n}\beta_i}$ は次式を満たす.

$$\left[I_{\bigotimes_{i\in\varLambda_n}V_i}\right]_{\bigotimes_{i\in\varLambda_n}\alpha_i}^{\bigotimes_{i\in\varLambda_n}\beta_i}=\bigotimes_{i\in\varLambda_n}\left[I_{V_i}\right]_{\alpha_i}^{\beta_i}$$

証明. 定理 4.7.2 と数学的帰納法により直ちにわかる. □

定理 4.7.4. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, それらの vector 空間たち T, U, V, W の基底がそれぞれ $\langle\mathbf{t}_i\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\langle\mathbf{u}_j\rangle_{j\in\varLambda_n}$, $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_o}$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\varLambda_p}$ と与えられたらば, $\langle\mathbf{t}_i\rangle_{i\in\varLambda_m}=\alpha$, $\langle\mathbf{u}_j\rangle_{j\in\varLambda_n}=\beta$, $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_o}=\gamma$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\varLambda_p}=\delta$ とおいて, vector 空間 $L(T\otimes U,V\otimes W)$ と, $\forall\varphi\in L(T,V)\forall\chi\in L(U,W)\forall(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n$ に対し, $\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)=\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_j\right)$ なる線形写像 $\rho(\varphi,\chi):T\otimes U\rightarrow V\otimes W$ を用いた次式のような写像 ρ との組 $(L(T\otimes U,V\otimes W),\rho)$ は tensor 積であった.

$$\rho:L(T,V)\times L(U,W)\rightarrow L(T\otimes U,V\otimes W);(\varphi,\chi)\mapsto\rho(\varphi,\chi)$$

そこで, それらの線形写像たち φ, χ のそれらの基底たち α, γ, β, δ に関する表現行列たち $[\varphi]_\alpha^\gamma$, $[\chi]_\beta^\delta$ と vector 空間たち $T\otimes U$, $V\otimes W$ の基底たち $\alpha\otimes\beta$, $\gamma\otimes\delta$ に関する tensor 積 $(L(T\otimes U,V\otimes W),\rho)$ で定義される線形写像 $\rho(\varphi,\chi):T\otimes U\rightarrow V\otimes W$ の表現行列 $[\rho(\varphi,\chi)]_{\alpha\otimes\beta}^{\gamma\otimes\delta}$ について, 次式が成り立つ.

$$[\rho(\varphi,\chi)]_{\alpha\otimes\beta}^{\gamma\otimes\delta}=[\varphi]_\alpha^\gamma\otimes[\chi]_\beta^\delta$$

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, それらの vector 空間たち T, U, V, W の基底がそれぞれ $\langle\mathbf{t}_i\rangle_{i\in\varLambda_m}$, $\langle\mathbf{u}_j\rangle_{j\in\varLambda_n}$, $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_o}$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\varLambda_p}$ と与えられたらば, $\langle\mathbf{t}_i\rangle_{i\in\varLambda_m}=\alpha$, $\langle\mathbf{u}_j\rangle_{j\in\varLambda_n}=\beta$, $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\varLambda_o}=\gamma$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\varLambda_p}=\delta$ とおいて, vector 空間 $L(T\otimes U,V\otimes W)$ と, $\forall\varphi\in L(T,V)\forall\chi\in L(U,W)\forall(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n$ に対し, $\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\right)=\varphi\left(\mathbf{t}_i\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_j\right)$ なる線形写像 $\rho(\varphi,\chi):T\otimes U\rightarrow V\otimes W$ を用いた次式のような写像 ρ との組 $(L(T\otimes U,V\otimes W),\rho)$ は tensor 積であった.

$$\rho:L(T,V)\times L(U,W)\rightarrow L(T\otimes U,V\otimes W);(\varphi,\chi)\mapsto\rho(\varphi,\chi)$$

そこで, それらの線形写像たち φ, χ のそれらの基底たち α, γ, β, δ に関する表現行列たち $[\varphi]_\alpha^\gamma$, $[\chi]_\beta^\delta$ と, 定理 4.5.2 よりそれらの組々 $\langle\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{u}_j\rangle_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}$, $\langle\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j\rangle_{(i,j)\in\varLambda_o\times\varLambda_p}$ はそれぞれ vector 空間たち $T\otimes U$, $V\otimes W$ の基底となるので, vector 空間たち $T\otimes U$, $V\otimes W$ の基底たち $\alpha\otimes\beta$, $\gamma\otimes\delta$ に関する tensor 積 $(L(T\otimes U,V\otimes W),\rho)$ で定義される線形写像 $\rho(\varphi,\chi):T\otimes U\rightarrow V\otimes W$ の表現行列 $[\rho(\varphi,\chi)]_{\alpha\otimes\beta}^{\gamma\otimes\delta}$ について, それらの表現行列たち $[\varphi]_\alpha^\gamma$, $[\chi]_\beta^\delta$ がそれぞれ $[\varphi]_\alpha^\gamma=\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_o\times\varLambda_m}$, $[\chi]_\beta^\delta=\left(b_{ij}\right)_{(i,j)\in\varLambda_p\times\varLambda_n}$ とおかれれば, それらの vector 空間たち $T\otimes U$, $V\otimes W$ の基底たち $\alpha\otimes\beta$, $\gamma\otimes\delta$ に関する tensor 積 $(L(T\otimes U,V\otimes W),\rho)$ で定義される線形写像 $\rho(\varphi,\chi):T\otimes U\rightarrow V\otimes W$ の表現行列 $[\rho(\varphi,\chi)]_{\alpha\otimes\beta}^{\gamma\otimes\delta}$ について, vector 空間たち K^m, K^n, K^o, K^p の標準直交基底たち $\langle\mathbf{d}_k\rangle_{k\in\varLambda_m}$, $\langle\mathbf{e}_l\rangle_{l\in\varLambda_n}$, $\langle\mathbf{f}_i\rangle_{i\in\varLambda_o}$, $\langle\mathbf{g}_j\rangle_{j\in\varLambda_p}$, それらの基底たち $\alpha\otimes\beta$, $\gamma\otimes\delta$ に関する基底変換における線形同型写像たち $\varphi_{\alpha\otimes\beta}$, $\varphi_{\gamma\otimes\delta}$ を用いて次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\circ\rho(\varphi,\chi)\circ\varphi_{\alpha\otimes\beta}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}&=\varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\rho(\varphi,\chi)\left(\varphi_{\alpha\otimes\beta}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}\right)_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n}\right)\right)\\&=\varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\rho(\varphi,\chi)\left(\mathbf{t}_k\otimes\mathbf{u}_l\right)\right)\\&=\varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi\left(\mathbf{t}_k\right)\otimes\chi\left(\mathbf{u}_l\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_\gamma^{-1}\circ\varphi_\gamma\circ\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha\left(\mathbf{t}_k\right)\otimes\varphi_\delta^{-1}\circ\varphi_\delta\circ\chi\circ\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\beta\left(\mathbf{u}_l\right)\right)\\
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_\gamma^{-1}\left(\varphi_\gamma\circ\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}\left(\varphi_\alpha\left(\mathbf{t}_k\right)\right)\right)\otimes\varphi_\delta^{-1}\left(\varphi_\delta\circ\chi\circ\varphi_\beta^{-1}\left(\varphi_\beta\left(\mathbf{u}_l\right)\right)\right)\right)\\
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_\gamma^{-1}\left(\varphi_\gamma\circ\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathbf{d}_k\right)\right)\otimes\varphi_\delta^{-1}\left(\varphi_\delta\circ\chi\circ\varphi_\beta^{-1}\left(\mathbf{e}_l\right)\right)\right)\\
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_\gamma^{-1}\left([\varphi]_\alpha^\gamma\mathbf{d}_k\right)\otimes\varphi_\delta^{-1}\left([\chi]_\beta^\delta\mathbf{e}_l\right)\right)\\
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\varphi_\gamma^{-1}\left(\sum_{g\in\Lambda_o}a_{gk}\mathbf{f}_g\right)\otimes\varphi_\delta^{-1}\left(\sum_{h\in\Lambda_p}b_{hl}\mathbf{g}_h\right)\right)\\
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\sum_{g\in\Lambda_o}a_{gk}\varphi_\gamma^{-1}\left(\mathbf{f}_g\right)\otimes\sum_{h\in\Lambda_p}b_{hl}\varphi_\delta^{-1}\left(\mathbf{g}_h\right)\right)\\
&= \varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\sum_{g\in\Lambda_o}a_{gk}\mathbf{v}_g\otimes\sum_{h\in\Lambda_p}b_{hl}\mathbf{w}_h\right)\\
&= \sum_{g\in\Lambda_o}\sum_{h\in\Lambda_p}a_{gk}b_{hl}\varphi_{\gamma\otimes\delta}^{-1}\left(\mathbf{v}_g\otimes\mathbf{w}_h\right)\\
&= \sum_{g\in\Lambda_o}\sum_{h\in\Lambda_p}a_{gk}b_{hl}\left(\delta_{ig}\delta_{jh}\right)_{(i,j)\in\Lambda_o\times\Lambda_p}\\
&= \sum_{g\in\Lambda_o}\sum_{h\in\Lambda_p}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\\ \vdots\\ \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ a_{gk}b_{hl}\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\\ \vdots\\ \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=\ & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1k}b_{1l} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{1k}b_{pl} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
& \qquad\qquad\qquad \cdots \\
& + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{ok}b_{1l} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{ok}b_{pl} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
=\ & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1k}b_{1l} \\ \vdots \\ a_{1k}b_{pl} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{ok}b_{1l} \\ \vdots \\ a_{ok}b_{pl} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k}b_{1l} \\ \vdots \\ a_{1k}b_{pl} \\ \vdots \\ a_{ok}b_{1l} \\ \vdots \\ a_{ok}b_{pl} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

これにより, したがって, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
[\rho(\varphi,\chi)]_{\alpha\otimes\beta}^{\gamma\otimes\delta} &= \begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} & & a_{1m}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{pn} & & a_{1m}b_{p1} & \cdots & a_{1m}b_{pn} \\
& \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
a_{o1}b_{11} & \cdots & a_{o1}b_{1n} & & a_{om}b_{11} & \cdots & a_{om}b_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{o1}b_{p1} & \cdots & a_{o1}b_{pn} & & a_{om}b_{p1} & \cdots & a_{om}b_{pn}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{o1} & \cdots & a_{om} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = [\varphi]_{\alpha}^{\gamma} \otimes [\chi]_{\beta}^{\delta}
\end{aligned}
$$

□

参考文献

[1] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958. 第 53 版 p206-207 ISBN4-7853-1301-3

[2] Wikipedia. クロネッカー積. Wikipedia. `https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AF%E3%83%AD%E3%83%8D%E3%83%83%E3%82%AB%E3%83%BC%E7%A9%8D` (2022-2-18 2:25 閲覧)

4.8 反変 tensor 空間

4.8.1 p 階反変 q 階共変 tensor 空間

定義 4.8.1. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $V_i \in \{V, V^*\}$ なる vector 空間たち V_i を用いた tensor 空間 $\bigotimes_{i \in \Lambda_r} V_i$ が考えられる．そこで, $V_i = V$ なる vector 空間 V_i が p つ, $V_i = V^*$ なる vector 空間 V_i が q つあって $p + q = r$ となっているとき, その tensor 空間 $\bigotimes_{i \in \Lambda_r} V_i$ を p 階反変 q 階共変 tensor 空間という．特に, $q = 0$, $p = 0$ のとき, それぞれ p 階反変 tensor 空間, q 階共変 tensor 空間といい, $p = q = 0$ のとき, $\bigotimes_{i \in \Lambda_r} V_i = K$ とする．また, p 階反変 q 階共変 tensor 空間の元を以下単に r 階 tensor ということにする.

定理 4.8.1. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle \mathbf{v}_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$, これの双対基底 $\langle \phi_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, p 階反変 q 階共変 tensor 空間 $\bigotimes_{i \in \Lambda_r} V_i$ について, その vector 空間 V_i の基底 $\langle \mathbf{v}_{ij} \rangle_{j \in \Lambda_n}$ が次式のようにおかれれば,

$$\langle \mathbf{v}_{ij} \rangle_{j \in \Lambda_n} = \begin{cases} \langle \mathbf{v}_j \rangle_{j \in \Lambda_n} & \text{if} \quad V_i = V \\ \langle \phi_j \rangle_{j \in \Lambda_n} & \text{if} \quad V_i = V^* \end{cases}$$

その組 $\left\langle \bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{ij_i} \right\rangle_{\mathbf{j} \in \Lambda_n^r}$ がその p 階反変 q 階共変 tensor 空間 $\bigotimes_{i \in \Lambda_r} V_i$ の基底となる．なお, $\mathbf{j} = (j_i)_{i \in \Lambda_r}$ とした.

定義 4.8.2. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle \mathbf{v}_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$, これの双対基底 $\langle \phi_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, p 階反変 q 階共変 tensor 空間 $\bigotimes_{i \in \Lambda_r} V_i$ について, そのような基底 $\left\langle \bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{ij_i} \right\rangle_{\mathbf{j} \in \Lambda_n^r}$ を, ここでは, その基底 $\langle \mathbf{v}_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$ から誘導されるその tensor 空間 $\bigotimes_{i \in \Lambda_r} V_i$ の自然な基底ということにする．なお, $\mathbf{j} = (j_i)_{i \in \Lambda_r}$ とした.

証明. 定理 4.5.2 より明らかである. □

定理 4.8.2. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底たち $\langle \mathbf{v}_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$, これの双対基底たちそれぞれ $\langle \phi_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$, $\langle \chi_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, それらの基底たち $\langle \mathbf{v}_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$ から誘導される p 階反変 q 階共変 tensor 空間 $\bigotimes_{i \in \Lambda_r} V_i$ の自然な基底たちそれぞれ $\left\langle \bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{ij_i} \right\rangle_{\mathbf{j} \in \Lambda_n^r}$, $\left\langle \bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{w}_{ij_i} \right\rangle_{\mathbf{j} \in \Lambda_n^r}$ について, $\mathbf{j} = (j_i)_{i \in \Lambda_r}$ としてこれらの基底たちがそれぞれ次のようにおかれると,

$$\langle \mathbf{v}_j \rangle_{j \in \Lambda_n} = \alpha, \quad \langle \mathbf{w}_j \rangle_{j \in \Lambda_n} = \beta, \quad \langle \phi_j \rangle_{j \in \Lambda_n} = \alpha^*, \quad \langle \chi_j \rangle_{j \in \Lambda_n} = \beta^*,$$
$$\left\langle \bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{ij_i} \right\rangle_{\mathbf{j} \in \Lambda_n^r} = \bigotimes_{i \in \Lambda_n} \alpha_i, \quad \left\langle \bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{w}_{ij_i} \right\rangle_{\mathbf{j} \in \Lambda_n^r} = \bigotimes_{i \in \Lambda_n} \beta_i$$

行列たち $[I_{V_i}]^{\beta_i}_{\alpha_i}$ が次式のようにおかれれば,

$$[I_{V_i}]^{\beta_i}_{\alpha_i} = \begin{cases} [I_V]^{\beta}_{\alpha} & \text{if} \quad V_i = V \\ [I_{V^*}]^{\beta^*}_{\alpha^*} & \text{if} \quad V_i = V^* \end{cases}$$

次式が成り立つ.

$$\left[I_{\bigotimes_{i\in\Lambda_n} V_i}\right]^{\bigotimes_{i\in\Lambda_n}\beta_i}_{\bigotimes_{i\in\Lambda_n}\alpha_i} = \bigotimes_{i\in\Lambda_n} [I_{V_i}]^{\beta_i}_{\alpha_i}$$

証明. 定理 4.7.3 と定理 4.8.1 より明らかである. □

4.8.2 対称 tensor と交代 tensor

定義 4.8.3. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, r 階反変 tensor 空間 $\bigotimes_{i\in\Lambda_r} V$ を, 以下, $T^r(V)$ と書く.

定義 4.8.4. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, 置換群 $\mathfrak{S}_r$ の元 σ を用いて, $\forall\mathbf{j}\in\Lambda_n^r$ に対し, $P_\sigma\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right) = \bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}$ なる線形写像 $P_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ が考えられよう. その線形写像 P_σ をここではその置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像ということにする. なお, $\mathbf{j} = (j_i)_{i\in\Lambda_r}$ とした.

定理 4.8.3. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_r$ に対し, その置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 $P_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ の存在は, その置換 σ が 1 つ与えられたらば, 一意的である.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_r$ に対し, その置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 $P_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ について, その置換 σ が 1 つ与えられたとき, その線形写像 P_σ 以外に $\forall\mathbf{j}\in\Lambda_n^r$ に対し, $\mathbf{j} = (j_i)_{i\in\Lambda_r}$ として, $P'_\sigma\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right) = \bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}$ なる線形写像 $P'_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ が存在したとしよう. $\forall\mathbf{T}\in T^r(V)$ に対し, 定理 4.5.2 により次式のようにおかれると,

$$\mathbf{T} = \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_i}$$

次のようになることから,

$$\begin{aligned} P_\sigma(\mathbf{T}) &= P_\sigma\left(\sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right) \\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} P_\sigma\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right) \\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\mathbf{j} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} P'_\sigma \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \\
&= P'_\sigma \left(\sum_{\mathbf{j} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) = P'_\sigma (\mathbf{T})
\end{aligned}
$$

$P_\sigma = P'_\sigma$ が成り立つ. □

定理 4.8.4. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, $\forall \mathbf{j} \in \varLambda_n^r$ に対し, $P_\sigma \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) = \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}$ が成り立つようなその置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 $P_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ は $P_\sigma \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{w}_{j_i} \right) = \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{w}_{j_{\sigma(i)}}$ も満たす. なお, $\mathbf{j} = (j_i)_{i \in \varLambda_r}$ とした. これにより, その線形写像 P_σ はその vector 空間 V の基底に依らず定まることが分かる.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底たち $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, $\forall \mathbf{j} \in \varLambda_n^r$ に対し, $\mathbf{j} = (j_i)_{i \in \varLambda_r}$ として $P_\sigma \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) = \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}$ が成り立つようなその置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 $P_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ について, $\forall i \in \varLambda_n$ に対し, 次式のようにおかれると,

$$
\mathbf{w}_i = \sum_{j \in \varLambda_n} v_{ij} \mathbf{v}_j
$$

$\mathbf{h} = (h_i)_{i \in \varLambda_r}$ として次のようになることから,

$$
\begin{aligned}
P_\sigma \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{w}_{j_i} \right) &= P_\sigma \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \sum_{h_i \in \varLambda_n} v_{j_i h_i} \mathbf{v}_{h_i} \right) \\
&= P_\sigma \left(\sum_{\mathbf{h} \in \varLambda_n^r} \prod_{i \in \varLambda_r} v_{j_i h_i} \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{h_i} \right) \\
&= \sum_{\mathbf{h} \in \varLambda_n^r} \prod_{i \in \varLambda_r} v_{j_i h_i} P_\sigma \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{h_i} \right) \\
&= \sum_{\mathbf{h} \in \varLambda_n^r} \prod_{i \in \varLambda_r} v_{j_i h_i} \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{h_{\sigma(i)}} \\
&= \sum_{\mathbf{h} \in \varLambda_n^r} \prod_{i \in \varLambda_r} v_{j_i h_i} \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{h_{\sigma(i)}} \\
&= \sum_{\left(h_{\sigma(i)}\right)_{\sigma(i) \in \varLambda_r} \in \varLambda_n^r} \prod_{\sigma(i) \in \varLambda_r} v_{j_{\sigma(i)} h_{\sigma(i)}} \bigotimes_{\sigma(i) \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{h_{\sigma(i)}} \\
&= \sum_{\mathbf{h} \in \varLambda_n^r} \prod_{i \in \varLambda_r} v_{j_{\sigma(i)} h_i} \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{h_i} \\
&= \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \sum_{h_i \in \varLambda_n} v_{j_{\sigma(i)} h_i} \mathbf{v}_{h_i} = \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{w}_{j_{\sigma(i)}}
\end{aligned}
$$

その線形写像 $P_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ は $P_\sigma \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{w}_{j_i} \right) = \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{w}_{j_{\sigma(i)}}$ も満たす. □

定理 4.8.5. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\forall\sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, その置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 $P_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ は名称通り線形同型写像で $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall\sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, その置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 $P_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ について, 置換群 $\mathfrak{S}_r$ の定義よりその置換 σ の逆写像 σ^{-1} が存在して, その置換 σ^{-1} による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 $P_{\sigma^{-1}} : T^r(V) \to T^r(V)$ が定義される. そこで, $\forall\mathbf{T} \in T^r(V)$ に対し, 定理 4.5.2 により次式のようにおかれると,

$$\mathbf{T} = \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}$$

線形写像同士の合成写像も線形写像となることに注意して次のようになる.

$$\begin{aligned}
P_{\sigma^{-1}} \circ P_\sigma(\mathbf{T}) &= P_{\sigma^{-1}} \circ P_\sigma\left(\sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} P_{\sigma^{-1}} \circ P_\sigma\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} P_{\sigma^{-1}}\left(P_\sigma\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} P_{\sigma^{-1}}\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_{\sigma\circ\sigma^{-1}(i)}}\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i} = \mathbf{T}\\
P_\sigma \circ P_{\sigma^{-1}}(\mathbf{T}) &= P_\sigma \circ P_{\sigma^{-1}}\left(\sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} P_\sigma \circ P_{\sigma^{-1}}\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} P_\sigma\left(P_{\sigma^{-1}}\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} P_\sigma\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_{\sigma^{-1}(i)}}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_{\sigma^{-1}\circ\sigma(i)}}\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i\in\Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i} = \mathbf{T}
\end{aligned}$$

以上より, その線形写像 P_σ の逆写像 P_σ^{-1} が構成されたので, その置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 $P_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ は名称通り線形同型写像で $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$ が成り立つ. □

定理 4.8.6. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\forall\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_r$ に対し, それらの置換たち σ,τ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像たち P_σ, P_τ の合成写像 $P_\tau\circ P_\sigma$ は $P_\tau\circ P_\sigma=P_{\sigma\circ\tau}$ を満たす.

証明. 体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_r$ に対し, それらの置換たち σ,τ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像たち P_σ, P_τ の合成写像 $P_\tau\circ P_\sigma$ について, $\forall\mathbf{T}\in T^r(V)$ に対し, 定理 4.5.2 により $\mathbf{j}=(j_i)_{i\in\Lambda_r}$ として次式のようにおかれると,

$$\mathbf{T}=\sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r}\xi_{\mathbf{j}}\bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_i}$$

線形写像同士の合成写像も線形写像となることに注意して次のようになる.

$$\begin{aligned}
P_\tau\circ P_\sigma(\mathbf{T})&=P_\tau\circ P_\sigma\left(\sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r}\xi_{\mathbf{j}}\bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&=\sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r}\xi_{\mathbf{j}}P_\tau\circ P_\sigma\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&=\sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r}\xi_{\mathbf{j}}P_\tau\left(P_\sigma\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\right)\\
&=\sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r}\xi_{\mathbf{j}}P_\tau\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}\right)\\
&=\sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r}\xi_{\mathbf{j}}P_\tau\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma\circ\tau(i)}}\right)\\
&=\sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r}\xi_{\mathbf{j}}P_{\sigma\circ\tau}\left(\bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&=P_{\sigma\circ\tau}\left(\sum_{\mathbf{j}\in\Lambda_n^r}\xi_{\mathbf{j}}\bigotimes_{i\in\Lambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&=P_{\sigma\circ\tau}(\mathbf{T})
\end{aligned}$$

よって, その合成写像 $P_\tau\circ P_\sigma$ は $P_\tau\circ P_\sigma=P_{\sigma\circ\tau}$ を満たす. □

定義 4.8.5. 体 K が与えられたとする. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し, $n1=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n}\neq0$ が成り立つとき, その体 K は標数 0 であるという.

定義 4.8.6. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ の元 $\mathbf{T}$ が, $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_r$ に対し, $P_\sigma(\mathbf{T})=\mathbf{T}$ を満たすとき, その元 $\mathbf{T}$ を対称 tensor という. これ全体の集合を $S^r(V)$ と書くことにする.

定義 4.8.7. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ の元 $\mathbf{T}$ が, $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_r$ に対し, $P_\sigma(\mathbf{T})=\mathrm{sgn}\sigma\mathbf{T}$ を満たすとき, その元 $\mathbf{T}$ を交代 tensor という. これ全体の集合を $A^r(V)$ と書くことにする.

もちろん, $r=1$ のとき, $T^1(V)=S^1(V)=A^1(V)$ が成り立つことも注意しておこう.

定理 4.8.7. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, 対称 tensor 全体 $S^r(V)$ は r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ の部分 vector 空間である.

証明. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, 対称 tensor 全体 $S^r(V)$ において, もちろん, $\mathbf{0} \in S^r(V)$ が成り立つ. さらに, $\forall k, l \in K \forall \mathbf{T}, \mathbf{U} \in S^r(V)$ に対し, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, $P_\sigma(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ かつ $P_\sigma(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$ が成り立つので, 次のようになることから,

$$P_\sigma(k\mathbf{T} + l\mathbf{U}) = kP_\sigma(\mathbf{T}) + lP_\sigma(\mathbf{U}) = k\mathbf{T} + l\mathbf{U}$$

$k\mathbf{T} + l\mathbf{U} \in S^r(V)$ が成り立つ. これにより, 対称 tensor 全体 $S^r(V)$ は r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ の部分 vector 空間である. □

定理 4.8.8. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, 交代 tensor 全体 $A^r(V)$ は r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ の部分 vector 空間である.

証明. 定理 4.8.7 と同様にして示される. □

4.8.3 対称化作用素と交代化作用素

定義 4.8.8. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, 線形写像 $\mathcal{S}$ が次式のように定義されよう[*37].

$$\mathcal{S} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} P_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$$

この線形写像 $\mathcal{S}$ をそれぞれその r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ における対称化作用素という.

定義 4.8.9. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, 線形写像 $\mathcal{A}$ が次式のように定義されよう.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma P_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$$

この線形写像 $\mathcal{A}$ をその r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ における交代化作用素という.

定理 4.8.9. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, 次式が成り立つ.

$$P_\sigma \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ P_\sigma = \mathcal{S} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}$$

証明. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, 線形写像の乗法 $\cdot$ を線形写像の合成 $\circ$ とするとき, 集合 $L(T^r(V), T^r(V))$ は環をなすことに注意して定理 4.8.6 より次のようになる.

$$\begin{aligned} P_\sigma \circ \mathcal{S} &= P_\sigma \circ \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} P_\tau \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} (P_\sigma \circ P_\tau) \end{aligned}$$

[*37] 線形写像の線形結合もまた線形写像であった.

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} P_{\tau \circ \sigma}$$

そこで, $\tau \in \mathfrak{S}_r \Leftrightarrow \tau \circ \sigma \in \mathfrak{S}_r$ が成り立つことに注意すれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned} P_\sigma \circ \mathcal{S} &= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} P_{\tau \circ \sigma} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \circ \sigma \in \mathfrak{S}_r} P_{\tau \circ \sigma} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} P_\tau = \mathcal{S} \end{aligned}$$

同様にして, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, 定理 4.8.6 より次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \circ P_\sigma &= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} P_\tau \circ P_\sigma \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \left(P_\tau \circ P_\sigma \right) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} P_{\sigma \circ \tau} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \circ \tau \in \mathfrak{S}_r} P_{\sigma \circ \tau} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} P_\tau = \mathcal{S} \end{aligned}$$

最後に, 上記の議論, 定理 1.10.1 より $\#\mathfrak{S}_r = r!$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \circ \mathcal{S} &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} P_\sigma \circ \mathcal{S} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \left(P_\sigma \circ \mathcal{S} \right) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \mathcal{S} \\ &= \frac{1}{r!} r! \mathcal{S} = \mathcal{S} \end{aligned}$$

□

定理 4.8.10. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{sgn}\sigma P_\sigma \circ \mathcal{A} = \mathrm{sgn}\sigma \mathcal{A} \circ P_\sigma = \mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

証明. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, 定理 1.10.7, 定理 1.10.8, 定理 4.8.6 より次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}\sigma P_\sigma \circ \mathcal{A} &= \mathrm{sgn}\sigma P_\sigma \circ \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau P_\tau \\ &= \mathrm{sgn}\sigma \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau \left(P_\sigma \circ P_\tau \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{sgn}\sigma \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau \circ \sigma \circ \sigma^{-1} P_{\tau \circ \sigma} \\
&= \mathrm{sgn}\sigma \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau \circ \sigma \mathrm{sgn}\sigma^{-1} P_{\tau \circ \sigma} \\
&= \mathrm{sgn}\sigma \mathrm{sgn}\sigma^{-1} \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau \circ \sigma P_{\tau \circ \sigma} \\
&= \mathrm{sgn}\sigma \mathrm{sgn}\sigma \frac{1}{r!} \sum_{\tau \circ \sigma \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau \circ \sigma P_{\tau \circ \sigma} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau P_\tau = \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

同様にして, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, 定理 1.10.7, 定理 1.10.8, 定理 4.8.6 より次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sgn}\sigma \mathcal{A} \circ P_\sigma &= \mathrm{sgn}\sigma \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau P_\tau \circ P_\sigma \\
&= \mathrm{sgn}\sigma \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau \left(P_\tau \circ P_\sigma \right) \\
&= \mathrm{sgn}\sigma \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma^{-1} \circ \sigma \circ \tau P_{\sigma \circ \tau} \\
&= \mathrm{sgn}\sigma \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma^{-1} \mathrm{sgn}\sigma \circ \tau P_{\sigma \circ \tau} \\
&= \mathrm{sgn}\sigma \mathrm{sgn}\sigma^{-1} \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma \circ \tau P_{\sigma \circ \tau} \\
&= \mathrm{sgn}\sigma \mathrm{sgn}\sigma \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \circ \tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma \circ \tau P_{\sigma \circ \tau} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau P_\tau = \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

最後に, 上記の議論, 定理 1.10.1 より $\#\mathfrak{S}_r = r!$ が成り立つので, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \circ \mathcal{A} &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma P_\sigma \circ \mathcal{A} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma P_\sigma \circ \mathcal{A} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \left(\mathrm{sgn}\sigma P_\sigma \circ \mathcal{A} \right) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \mathcal{A} = \frac{1}{r!} r! \mathcal{A} = \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

□

定理 4.8.11. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $2 \leq r$ のとき, 次式が成り立つ.

$$
\mathcal{S} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{S} = 0
$$

証明. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $2 \leq r$ のとき, 定理 4.8.10 より $P_{\sigma} \circ \mathcal{A} = \mathrm{sgn}\sigma\mathcal{A}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} \circ \mathcal{A} &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} P_{\sigma} \circ \mathcal{A} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} (P_{\sigma} \circ \mathcal{A}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma\mathcal{A}
\end{aligned}$$

そこで, 定理 1.10.6 より偶置換全体の集合, 奇置換全体の集合がそれぞれ $\mathfrak{S}_{\mathrm{even}}$, $\mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}$ とおかれると, $\mathfrak{S}_r = \mathfrak{S}_{\mathrm{even}} \sqcup \mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} \circ \mathcal{A} &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{even}} \sqcup \mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}} \mathrm{sgn}\sigma\mathcal{A} \\
&= \frac{1}{r!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{even}}} \mathrm{sgn}\sigma\mathcal{A} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}} \mathrm{sgn}\sigma\mathcal{A} \right) \\
&= \frac{1}{r!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{even}}} \mathcal{A} - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{odd}}} \mathcal{A} \right)
\end{aligned}$$

そこで, 定理 1.10.6 より $\#\mathfrak{S}_{\mathrm{even}} = \#\mathfrak{S}_{\mathrm{odd}} = \dfrac{r!}{2}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{A} = \frac{1}{r!} \left(\frac{r!}{2}\mathcal{A} - \frac{r!}{2}\mathcal{A} \right) = 0$$

$\mathcal{A} \circ \mathcal{S} = 0$ が成り立つことも同様にして示される. □

定理 4.8.12. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ について, $\forall \mathbf{T} \in T^r(V)$ に対し, 次のことは同値である.

- $\mathbf{T} \in S^r(V)$ が成り立つ, 即ち, その r 階 tensor$\mathbf{T}$ は対称 tensor である.
- 対称化作用素 $\mathcal{S}$ が $\mathcal{S}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ を満たす.

証明. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ について, $\forall \mathbf{T} \in T^r(V)$ に対し, $\mathbf{T} \in S^r(V)$ が成り立つ, 即ち, その r 階 tensor$\mathbf{T}$ が対称 tensor であるなら, 対称化作用素 $\mathcal{S}$ について, 定理 1.10.1 より $\#\mathfrak{S}_r = r!$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\mathbf{T}) &= \left(\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} P_{\sigma} \right) (\mathbf{T}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} P_{\sigma}(\mathbf{T}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \mathbf{T} \\
&= \frac{1}{r!} r! \mathbf{T} = \mathbf{T}
\end{aligned}$$

これにより, $\mathcal{S}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ が成り立つ.

逆に, $\mathcal{S}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ が成り立つなら, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, 定理 4.8.9 より $P_\sigma \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned} P_\sigma(\mathbf{T}) &= P_\sigma(\mathcal{S}(\mathbf{T})) \\ &= P_\sigma \circ \mathcal{S}(\mathbf{T}) \\ &= \mathcal{S}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \end{aligned}$$

これにより, $\mathbf{T} \in S^r(V)$ が成り立つ, 即ち, その r 階 tensor$\mathbf{T}$ は対称 tensor である. □

定理 4.8.13. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ について, $\forall \mathbf{T} \in T^r(V)$ に対し, 次のことは同値である.

- $\mathbf{T} \in A^r(V)$ が成り立つ, 即ち, その r 階 tensor$\mathbf{T}$ は交代 tensor である.
- 交代化作用素 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ を満たす.

証明. 定理 4.8.12 と同様にして示される. □

定理 4.8.14. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ について, $\forall k, l \in \Lambda_r$ に対し, $k \leq l$ が成り立つなら, $\mathbf{j} = (j_i)_{i \in \Lambda_r}$ として $j_k \leq j_l$ となるようにした組 $\left\langle \mathcal{S}\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \right\rangle_{\mathbf{j}:\mathrm{m.i.}}$ が対称 tensor 全体の集合 $S^r(V)$ の基底となる. さらに, $S^r(V) = V(\mathcal{S})$ が成り立ち, 次元について, 次式が成り立つ.

$$\dim S^r(V) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$$

証明. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ について, $\forall k, l \in \Lambda_r$ に対し, $k \leq l$ が成り立つなら, $\mathbf{j} = (j_i)_{i \in \Lambda_r}$ として $j_k \leq j_l$ となるようにした組 $\left\langle \mathcal{S}\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \right\rangle_{\mathbf{j}:\mathrm{m.i.}}$ について, $\forall \mathbf{T} \in T^r(V)$ に対し, 定理 4.5.1 により次式のようにおかれると,

$$\mathbf{T} = \sum_{\mathbf{j} \in \Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}$$

定理 4.8.12 より $\mathbf{T} \in S^r(V)$ が成り立つならそのときに限り, $\mathcal{S}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ が成り立つので, 次のようになり

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathcal{S}(\mathbf{T}) \\ &= \mathcal{S}\left(\sum_{\mathbf{j} \in \Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \mathcal{S}\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \end{aligned}$$

定理 1.1.11 より対称 tensor$\mathbf{T}$ はその族 $\left\{ \mathcal{S}\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \right\}_{\mathbf{j} \in \Lambda_n^r}$ によって生成されている.

そこで, その族 $\left\{\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\right\}_{\mathbf{j}\in\varLambda_n^r}$ に属する vectors のうち, $\forall k,l\in\varLambda_r$ に対し, $k\leq l$ が成り立つなら, 定理 1.10.9 よりある置換 σ が存在して, $j_{\sigma(k)}\leq j_{\sigma(l)}$ が成り立つようにすることができる. このとき, 定理 4.8.9 より次のようになることから,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)&=\mathcal{S}\circ P_\sigma\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\\&=\mathcal{S}\left(P_\sigma\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\right)\\&=\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}\right)\end{aligned}$$

適切に係数をおくことで次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathbf{T}&=\sum_{\mathbf{j}\in\varLambda_n^r}\xi_{\mathbf{j}}\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\\&=\sum_{\mathbf{j}:\mathrm{m.i.}}\xi_{\mathbf{j}}'\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\end{aligned}$$

$\sum_{\mathbf{j}:\mathrm{m.i.}}c_{\mathbf{j}}\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)=\mathbf{0}$ が成り立つとき, $\forall\mathbf{j},\mathbf{k}\in\varLambda_n^r$ に対し, $\mathbf{j}=(j_i)_{i\in\varLambda_r}$, $\mathbf{k}=(k_i)_{i\in\varLambda_r}$ として, $\mathbf{j}\neq\mathbf{k}$ かつ, $\forall k,l\in\varLambda_r$ に対し, $k\leq l\Rightarrow j_k\leq j_l$ が成り立つなら, $\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\neq\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{k_i}\right)$ が成り立つので, $\mathcal{S}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ に注意すれば, 対偶律により次式が得られる.

$$\sum_{\mathbf{j}:\mathrm{m.i.}}c_{\mathbf{j}}\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}=\mathbf{0}$$

これにより, $\forall k,l\in\varLambda_r$ に対し, $k\leq l\Rightarrow j_k\leq j_l$ が成り立つようなそれらの vectors$\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)$ は線形独立である.

よって, $\forall k,l\in\varLambda_r$ に対し, $k\leq l$ が成り立つなら, $j_k\leq j_l$ となるようにした組 $\left\langle\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\right\rangle_{\mathbf{j}:\mathrm{m.i.}}$ が対称 tensor 全体の集合 $S^r(V)$ の基底となる.

また, $\forall\mathbf{T}\in S^r(V)$ に対し, $\forall k,l\in\varLambda_r$ に対し, $k\leq l$ が成り立つなら, $j_k\leq j_l$ となるようにした組 $\left\langle\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\right\rangle_{\mathbf{j}:\mathrm{m.i.}}$ が対称 tensor 全体の集合 $S^r(V)$ の基底となるので, その対称化作用素 $\mathcal{S}$ が線形写像となっていることに注意すれば, $\mathbf{T}\in V(\mathcal{S})$ が成り立つ. 逆に, $\forall\mathcal{S}(\mathbf{T})\in V(\mathcal{S})$ に対し, 定理 4.8.9 より $\mathcal{S}\circ\mathcal{S}=\mathcal{S}$ が成り立つので, $\mathcal{S}(\mathcal{S}(\mathbf{T}))=\mathcal{S}\circ\mathcal{S}(\mathbf{T})=\mathcal{S}(\mathbf{T})$ が成り立つ. これにより, $\mathcal{S}(\mathbf{T})\in S^r(V)$ が成り立つ. 以上の議論により, $S^r(V)=V(\mathcal{S})$ が成り立つ.

また, そのような vectors$\mathcal{S}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)$ の個数は $\forall k,l\in\varLambda_r$ に対し, $k\leq l\Rightarrow j_k\leq j_l$ が成り立つような $\mathbf{j}\in\varLambda_n^r$ なる組 $\mathbf{j}$ の個数に等しいので, これが辞書式順序の議論になっていることに注意すれば, 定理 1.10.9 よ

りその個数は $\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$ つになる．したがって，次式が成り立つ．

$$\dim S^r(V) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$$

$\square$

定理 4.8.15. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V，これの基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき，r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ について，$0 \leq r \leq n$ のとき，$\forall k, l \in \varLambda_r$ に対し，$k < l$ が成り立つなら，$\mathbf{j} = (j_i)_{i \in \varLambda_r}$ として $j_k < j_l$ となるようにした組 $\left\langle \mathcal{A}\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \right\rangle_{\mathbf{j}:\text{n.m.i.}}$ が交代 tensor 全体の集合 $A^r(V)$ の基底となる．さらに，$A^r(V) = V(\mathcal{A})$ が成り立ち，次元について，次式が成り立つ．

$$\dim A^r(V) = \begin{cases} \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dbinom{n}{r} & \text{if} \quad 0 \leq r \leq n \\ 0 & \text{if} \quad n < r \end{cases}$$

証明. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V，これの基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき，r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ について，$\forall i, i' \in \varLambda_r$ に対し，$i \leq i'$ が成り立つなら，$\mathbf{j} = (j_i)_{i \in \varLambda_r}$ として $j_i \leq j_{i'}$ となるようにした組 $\left\langle \mathcal{A}\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \right\rangle_{\mathbf{j}:\text{m.i.}}$ について，$0 \leq r \leq n$ のとき，$\forall \mathbf{T} \in T^r(V)$ に対し，定理 4.5.1 により次式のようにおかれると，

$$\mathbf{T} = \sum_{\mathbf{j} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i}$$

定理 4.8.13 より $\mathbf{T} \in A^r(V)$ が成り立つならそのときに限り，$\mathcal{A}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ が成り立つので，次のようになり

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathcal{A}(\mathbf{T}) \\ &= \mathcal{A}\left(\sum_{\mathbf{j} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \mathcal{A}\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \end{aligned}$$

定理 1.1.11 より交代 tensor$\mathbf{T}$ はその族 $\left\{ \mathcal{A}\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \right\}_{\mathbf{j} \in \varLambda_n^r}$ によって生成されている．

そこで，その族 $\left\{ \mathcal{A}\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \right\}_{\mathbf{j} \in \varLambda_n^r}$ に属する vectors のうち，$\forall k, l \in \varLambda_r$ に対し，$k \leq l$ が成り立つなら，定理 1.10.9 よりある置換 σ が存在して，$j_{\sigma(k)} \leq j_{\sigma(l)}$ が成り立つようにすることができる．このとき，定理 4.8.9 より次のようになる．

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) &= \operatorname{sgn}\sigma \mathcal{A} \circ P_\sigma \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \\ &= \operatorname{sgn}\sigma \mathcal{A}\left(P_\sigma \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \mathrm{sgn}\sigma\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}\right)$$

そこで, $k<l$ が成り立つなら, $j_{\sigma(k)}<j_{\sigma(l)}$ または $j_{\sigma(k)}=j_{\sigma(l)}$ が成り立つことになるので, $j_{\sigma(k)}=j_{\sigma(l)}$ が成り立つとき, このような k と l を入れ替える互換 τ を用いて考えられれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right) &= \mathrm{sgn}\sigma\circ\tau\mathcal{A}\circ P_{\sigma\circ\tau}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \mathrm{sgn}\sigma\circ\tau\mathcal{A}\left(P_{\sigma\circ\tau}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\right)\\
&= \mathrm{sgn}\sigma\circ\tau\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma\circ\tau(i)}}\right)\\
&= \mathrm{sgn}\sigma\circ\tau\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}\right)
\end{aligned}$$

これにより, 次式が得られ,

$$\mathrm{sgn}\sigma\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}\right) = \mathrm{sgn}\sigma\circ\tau\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}\right)$$

定理 1.10.7 より $\mathrm{sgn}\sigma\circ\tau=\mathrm{sgn}\sigma\mathrm{sgn}\tau=-\mathrm{sgn}\sigma$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}\right) = -\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}\right)$$

これにより, $\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_{\sigma(i)}}\right)=\mathbf{0}$ が得られる. したがって, 適切に係数をおくことで次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \sum_{\mathbf{j}\in\varLambda_n^r}\xi_{\mathbf{j}}\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j}:\mathrm{n.m.i.}}\xi_{\mathbf{j}}'\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)
\end{aligned}$$

$\sum_{\mathbf{j}:\mathrm{n.m.i.}}c_{\mathbf{j}}\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)=\mathbf{0}$ が成り立つとき, $\forall\mathbf{j},\mathbf{k}\in\varLambda_n^r$ に対し, $\mathbf{j}=\left(j_i\right)_{i\in\varLambda_r}$, $\mathbf{k}=\left(k_i\right)_{i\in\varLambda_r}$ として, $\mathbf{j}\neq\mathbf{k}$ かつ, $\forall k,l\in\varLambda_r$ に対し, $k<l\Rightarrow j_k<j_l$ が成り立つなら, $\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)\neq\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{k_i}\right)$ が成り立つので, $\mathcal{A}\left(\mathbf{0}\right)=\mathbf{0}$ に注意すれば, 対偶律により次式が得られる.

$$\sum_{\mathbf{j}:\mathrm{n.m.i.}}c_{\mathbf{j}}\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}=\mathbf{0}$$

これにより, $\forall k,l\in\varLambda_r$ に対し, $k<l\Rightarrow j_k<j_l$ が成り立つようなそれらの vectors$\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i\in\varLambda_r}\mathbf{v}_{j_i}\right)$ は線形独立である.

よって, $\forall k,l \in \Lambda_r$ に対し, $k < l$ が成り立つなら, $j_k < j_l$ となるようにした組 $\left\langle \mathcal{A}\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\right\rangle_{\mathbf{j}:\mathrm{n.m.i.}}$ が対称 tensor 全体の集合 $A^r(V)$ の基底となる.

また, $\forall \mathbf{T} \in A^r(V)$ に対し, $\forall k,l \in \Lambda_r$ に対し, $k < l$ が成り立つなら, $j_k < j_l$ となるようにした組 $\left\langle \mathcal{A}\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\right\rangle_{\mathbf{j}:\mathrm{n.m.i.}}$ が交代 tensor 全体の集合 $A^r(V)$ の基底となるので, その交代化作用素 $\mathcal{A}$ が線形写像となっていることに注意すれば, $\mathbf{T} \in V(\mathcal{A})$ が成り立つ. 逆に, $\forall \mathcal{A}(\mathbf{T}) \in V(\mathcal{A})$ に対し, 定理 4.8.9 より $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$ が成り立つので, $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathbf{T})) = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}(\mathbf{T}) = \mathcal{A}(\mathbf{T})$ が成り立つ. これにより, $\mathcal{A}(\mathbf{T}) \in A^r(V)$ が成り立つ. 以上の議論により, $A^r(V) = V(\mathcal{A})$ が成り立つ.

また, そのような vectors$\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)$ の個数は $\forall k,l \in \Lambda_r$ に対し, $k < l \Rightarrow j_k < j_l$ が成り立つような $\mathbf{j} \in \Lambda_n^r$ なる組 $\mathbf{j}$ の個数に等しいので, これが辞書式順序の議論になっていることに注意すれば, 定理 1.10.12 よりその個数は $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ つになる. したがって, 次式が成り立つ.

$$\dim A^r(V) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

また, $n < r$ のとき, $\mathbf{j} \in \Lambda_n^r$ なる組 $\mathbf{j}$ を写像 $\mathbf{j} : \Lambda_r \to \Lambda_n$ とみなせば, これは単射でありえない. したがって, $\exists k,l \in \Lambda_r$ に対し, $j_k = j_l$ が成り立つことになるので, 上記の議論により $\mathcal{A}\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right) = \mathbf{0}$ が得られる. したがって, 次式が成り立つ.

$$\dim A^r(V) = 0$$

□

定理 4.8.16. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ におけるその置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 P_σ, その双対空間 V^* での r 階反変 tensor 空間 $T^r(V^*)$ におけるその置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 Q_σ について, 定理 4.6.5 における, $\forall i \in \Lambda_n \forall \varphi_i \in V_i^* \forall j_i \in \Lambda_{m_i}$ に対し, $\Sigma\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} \varphi_i\right)\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{j_i}\right) = \prod_{i \in \Lambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_{ij_i}\right)$ が成り立つような線形同型写像 $\Sigma : \bigotimes_{i \in \Lambda_n} V_i^* \overset{\sim}{\to} \left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} V_i\right)^*$ を用いれば, 次式が成り立つ.

$$Q_\sigma = \Sigma^{-1} \circ \left(P_\sigma^{-1}\right)^* \circ \Sigma$$

証明. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$, これの双対空間 V^* の基底 $\langle \lambda_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対し, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ におけるその置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 P_σ, その双対空間 V^* での r 階反変 tensor 空間 $T^r(V^*)$ におけるその置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 Q_σ について, $\forall \mathbf{T} \in T^r(V) \forall f \in T^r(V^*)$ に対し, 定理 4.5.2 により次式のようにおかれると,

$$\mathbf{T} = \sum_{\mathbf{j} \in \Lambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i \in \Lambda_r} \mathbf{v}_{j_i}, \quad f = \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_n^r} o_{\mathbf{k}} \bigotimes_{i \in \Lambda_r} \lambda_{k_i}$$

定理 4.6.5 における, $\forall i \in \varLambda_n \forall \varphi_i \in V_i^* \forall j_i \in \varLambda_{m_i}$ に対し, $\varSigma\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\right)\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} \mathbf{v}_{j_i}\right) = \prod_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_{ij_i}\right)$ が成り立つような線形同型写像 $\varSigma : \bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i^* \xrightarrow{\sim} \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i\right)^*$ を用いれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\left(\varSigma \circ Q_\sigma\right)(f)(\mathbf{T}) &= \left(\varSigma \circ Q_\sigma\right)\left(\sum_{\mathbf{k} \in \varLambda_n^r} o_{\mathbf{k}} \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \lambda_{k_i}\right)\left(\sum_{\mathbf{j} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} o_{\mathbf{k}} \left(\varSigma \circ Q_\sigma\right)\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \lambda_{k_i}\right)\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} o_{\mathbf{k}} \varSigma\left(Q_\sigma\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \lambda_{k_i}\right)\right)\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} o_{\mathbf{k}} \varSigma\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \lambda_{k_{\sigma(i)}}\right)\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} o_{\mathbf{k}} \prod_{i \in \varLambda_n} \lambda_{k_{\sigma(i)}}\left(\mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} o_{\mathbf{k}} \prod_{\sigma^{-1}(i) \in \varLambda_n} \lambda_{k_{\sigma \circ \sigma^{-1}(i)}}\left(\mathbf{v}_{j_{\sigma^{-1}(i)}}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} o_{\mathbf{k}} \prod_{i \in \varLambda_n} \lambda_{k_i}\left(\mathbf{v}_{j_{\sigma^{-1}(i)}}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} o_{\mathbf{k}} \varSigma\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \lambda_{k_i}\right)\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_{\sigma^{-1}(i)}}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} o_{\mathbf{k}} \varSigma\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \lambda_{k_i}\right) \circ P_{\sigma^{-1}}\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} o_{\mathbf{k}} \left(\left(P_\sigma^{-1}\right)^* \circ \varSigma\right)\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \lambda_{k_i}\right)\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \left(\left(P_\sigma^{-1}\right)^* \circ \varSigma\right)\left(\sum_{\mathbf{k} \in \varLambda_n^r} o_{\mathbf{k}} \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \lambda_{k_i}\right)\left(\sum_{\mathbf{j} \in \varLambda_n^r} \xi_{\mathbf{j}} \bigotimes_{i \in \varLambda_r} \mathbf{v}_{j_i}\right)\\
&= \left(\left(P_\sigma^{-1}\right)^* \circ \varSigma\right)(f)(\mathbf{T})
\end{aligned}$$

以上より, $\varSigma \circ Q_\sigma = \left(P_\sigma^{-1}\right)^* \circ \varSigma$ が得られるので, $Q_\sigma = \varSigma^{-1} \circ \left(P_\sigma^{-1}\right)^* \circ \varSigma$ が成り立つ. □

定理 4.8.17. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\left\langle \mathbf{v}_i \right\rangle_{i \in \varLambda_n}$ が与えられたとき, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ における対称化作用素 $\mathcal{S}$, その双対空間 V^* での r 階反変 tensor 空間 $T^r(V^*)$ における対称化作用素 $\mathcal{T}$ について, 定理 4.6.5 における, $\forall i \in \varLambda_n \forall \varphi_i \in V_i^* \forall j_i \in \varLambda_{m_i}$ に対し, $\varSigma\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\right)\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} \mathbf{v}_{j_i}\right) = \prod_{i \in \varLambda_n} \varphi_i\left(\mathbf{v}_{ij_i}\right)$ が成り立つような線形同型写像 $\varSigma : \bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i^* \xrightarrow{\sim} \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i\right)^*$ を用いれば, 次式が成り立つ.

$$\mathcal{T} = \varSigma^{-1} \circ \mathcal{S}^* \circ \varSigma$$

証明. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ における対称化作用素 $\mathcal{S}$, その双対空間 V^* での r 階反変 tensor 空間 $T^r(V^*)$ における対称化作用素 $\mathcal{T}$ について, 定義より $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ なる r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ におけるその置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 P_σ, その双対空間 V^* での r 階反変 tensor 空間 $T^r(V^*)$ におけるその置換 σ による基底の添数の付け替えの線形自己同型写像 Q_σ を用いれば, 次のようになる.

$$\mathcal{S} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} P_\sigma, \quad \mathcal{T} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} Q_\sigma$$

したがって, 定理 4.6.5 における, $\forall i \in \Lambda_n \forall \varphi_i \in V_i^* \forall j_i \in \Lambda_{m_i}$ に対し, $\Sigma \left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \right) \left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{j_i} \right) = \prod_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)$ が成り立つような線形同型写像 $\Sigma : \bigotimes_{i \in \Lambda_n} V_i^* \rightarrow \left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} V_i \right)^*$ を用いて, 定理 4.8.5, 定理 4.8.16 より, $\forall \mathbf{U} \in T^r\left(V^*\right)$ に対し, その写像 $\Sigma\left(\mathbf{U}\right)$ が線形写像となっていることに注意すれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\left(\mathbf{U}\right) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} Q_\sigma \left(\mathbf{U}\right) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \Sigma^{-1} \circ \left(P_\sigma^{-1}\right)^* \circ \Sigma\left(\mathbf{U}\right) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \Sigma^{-1} \left(\left(P_\sigma^{-1}\right)^* \left(\Sigma\left(\mathbf{U}\right)\right) \right) \\
&= \Sigma^{-1} \left(\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \Sigma\left(\mathbf{U}\right) \circ P_\sigma^{-1} \right) \\
&= \Sigma^{-1} \left(\Sigma\left(\mathbf{U}\right) \circ \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} P_\sigma^{-1} \right) \\
&= \Sigma^{-1} \left(\Sigma\left(\mathbf{U}\right) \circ \frac{1}{r!} \sum_{\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_r} P_{\sigma^{-1}} \right) \\
&= \Sigma^{-1} \left(\Sigma\left(\mathbf{U}\right) \circ \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} P_\sigma \right) \\
&= \Sigma^{-1} \left(\Sigma\left(\mathbf{U}\right) \circ \mathcal{S} \right) \\
&= \Sigma^{-1} \left(\mathcal{S}^* \left(\Sigma\left(\mathbf{U}\right) \right) \right) \\
&= \left(\Sigma^{-1} \circ \mathcal{S}^* \circ \Sigma \right) \left(\mathbf{U}\right)
\end{aligned}$$

よって, $\mathcal{T} = \Sigma^{-1} \circ \mathcal{S}^* \circ \Sigma$ が成り立つ. □

定理 4.8.18. 標数 0 の体 K 上の n 次元 vector 空間 V, これの基底 $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \Lambda_n}$ が与えられたとき, r 階反変 tensor 空間 $T^r(V)$ における交代化作用素 $\mathcal{A}$, その双対空間 V^* での r 階反変 tensor 空間 $T^r(V^*)$ における交代化作用素 $\mathcal{B}$ について, 定理 4.6.5 における, $\forall i \in \Lambda_n \forall \varphi_i \in V_i^* \forall j_i \in \Lambda_{m_i}$ に対し, $\Sigma \left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \right) \left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_{j_i} \right) =$

$\prod_{i \in \Lambda_n} \varphi_i \left(\mathbf{v}_{ij_i} \right)$ が成り立つような線形同型写像 $\varSigma : \bigotimes_{i \in \Lambda_n} V_i^* \rightarrow \left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} V_i \right)^*$ を用いれば, 次式が成り立つ.

$$\mathcal{B} = \varSigma^{-1} \circ \mathcal{A}^* \circ \varSigma$$

証明. 定理 4.8.17 と同様にして示される. □

参考文献

[1] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958. 第 53 版 p213-219 ISBN4-7853-1301-3

4.9 直積 vector 空間

4.9.1 直積 vector 空間

定義 4.9.1. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, その直積 $V \times W$ の元で次のように和と scalar 倍を定義する.

- $\forall\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right),\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) \in V \times W$ に対し, $\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right)+\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=\left(\mathbf{t}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{w}\right)$ が成り立つとする.
- $\forall k \in K \forall\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) \in V \times W$ に対し, $k\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=\left(k\mathbf{v},k\mathbf{w}\right)$ が成り立つとする.

このような集合 $V \times W$ をそれらの vector 空間たち V, W の直和というが, ここでは, 前述した直和との差異点を明確にしておきたいので, 直積 vector 空間ということにする.

定理 4.9.1. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, これらの直積 vector 空間 $V \times W$ は体 K 上の vector 空間となる.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, これらの直積 vector 空間 $V \times W$ について, 二項演算 $+ : (V \times W) \times (V \times W) \rightarrow V \times W$ が定義されており, $\forall\left(\mathbf{r},\mathbf{s}\right),\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right),\ \left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) \in V \times W$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\left(\left(\mathbf{r},\mathbf{s}\right)+\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right)\right)+\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) &= \left(\mathbf{r}+\mathbf{t},\mathbf{s}+\mathbf{u}\right)+\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\\
&= \left(\left(\mathbf{r}+\mathbf{t}\right)+\mathbf{v},\left(\mathbf{s}+\mathbf{u}\right)+\mathbf{w}\right)\\
&= \left(\mathbf{r}+\left(\mathbf{t}+\mathbf{v}\right),\mathbf{s}+\left(\mathbf{u}+\mathbf{w}\right)\right)\\
&= \left(\mathbf{r},\mathbf{s}\right)+\left(\mathbf{t}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{w}\right)\\
&= \left(\mathbf{r},\mathbf{s}\right)+\left(\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right)+\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\right)
\end{aligned}$$

$\forall\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) \in V \times W$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)+\left(\mathbf{0},\mathbf{0}\right)=\left(\mathbf{v}+\mathbf{0},\mathbf{w}+\mathbf{0}\right)=\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\\
\left(\mathbf{0},\mathbf{0}\right)+\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=\left(\mathbf{0}+\mathbf{v},\mathbf{0}+\mathbf{w}\right)=\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)
\end{aligned}$$

$\forall\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) \in V \times W$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)-\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=\left(\mathbf{v}-\mathbf{v},\mathbf{w}-\mathbf{w}\right)=\left(\mathbf{0},\mathbf{0}\right)\\
-\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)+\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=\left(-\mathbf{v}+\mathbf{v},-\mathbf{w}+\mathbf{w}\right)=\left(\mathbf{0},\mathbf{0}\right)
\end{aligned}$$

$\forall\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right),\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) \in V \times W$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right)+\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=\left(\mathbf{t}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{w}\right)=\left(\mathbf{v}+\mathbf{t},\mathbf{w}+\mathbf{u}\right)=\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)+\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right)$$

その組 $(V \times W,+)$ は可換群をなす.

さらに, $\forall k \in K \forall\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right),\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right) \in V \times W$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
k\left(\left(\mathbf{t},\mathbf{u}\right)+\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)\right) &= k\left(\mathbf{t}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{w}\right)\\
&= \left(k\left(\mathbf{t}+\mathbf{v}\right),k\left(\mathbf{u}+\mathbf{w}\right)\right)\\
&= \left(k\mathbf{t}+k\mathbf{v},k\mathbf{u}+k\mathbf{w}\right)\\
&= \left(k\mathbf{t},k\mathbf{u}\right)+\left(k\mathbf{v},k\mathbf{w}\right)
\end{aligned}$$

$$= k(\mathbf{t}, \mathbf{u}) + k(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$\forall k, l \in K \forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times W$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
(k+l)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= ((k+l)\mathbf{v}, (k+l)\mathbf{w}) \\
&= (k\mathbf{v} + l\mathbf{v}, k\mathbf{w} + l\mathbf{w}) \\
&= (k\mathbf{v}, k\mathbf{w}) + (l\mathbf{v}, l\mathbf{w}) \\
&= k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + l(\mathbf{v}, \mathbf{w})
\end{aligned}$$

$\forall k, l \in K \forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times W$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
(kl)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= ((kl)\mathbf{v}, (kl)\mathbf{w}) \\
&= (k(l\mathbf{v}), k(l\mathbf{w})) \\
&= k(l\mathbf{v}, l\mathbf{w}) \\
&= k(l(\mathbf{v}, \mathbf{w}))
\end{aligned}$$

$\exists 1 \in K \forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times W$ に対し, 次のようになる.

$$1(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (1\mathbf{v}, 1\mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

以上より, その直積 $U \times V$ は体 K 上の vector 空間をなす. □

定理 4.9.2. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 集合たち $V \times \{\mathbf{0}\}$, $\{\mathbf{0}\} \times W$ はいづれもその直積 vector 空間 $V \times W$ の部分 vector 空間をなし, さらに, 次式が成り立つ.

$$V \times W = (V \times \{\mathbf{0}\}) \oplus (\{\mathbf{0}\} \times W)$$

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 集合 $V \times \{\mathbf{0}\}$ について, もちろん, $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in V \times \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. さらに, $\forall k, l \in K \forall (\mathbf{v}, \mathbf{0}), (\mathbf{w}, \mathbf{0}) \in V \times \{\mathbf{0}\}$ に対し, $k\mathbf{v} + l\mathbf{w} \in V$ が成り立つことにより, 次のようになるので,

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{v}, \mathbf{0}) + l(\mathbf{w}, \mathbf{0}) &= (k\mathbf{v}, k\mathbf{0}) + (l\mathbf{w}, l\mathbf{0}) \\
&= (k\mathbf{v}, \mathbf{0}) + (l\mathbf{w}, \mathbf{0}) \\
&= (k\mathbf{v} + l\mathbf{w}, \mathbf{0}) \in V \times \{\mathbf{0}\}
\end{aligned}$$

$k(\mathbf{v}, \mathbf{0}) + l(\mathbf{w}, \mathbf{0}) \in V \times \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. 以上より, その集合 $V \times \{\mathbf{0}\}$ はその直積 vector 空間 $V \times W$ の部分 vector 空間をなす. 同様にして, その集合 $\{\mathbf{0}\} \times W$ がその直積 vector 空間 $V \times W$ の部分 vector 空間をなすことも示される.

さらに, $\forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times W$ に対し, $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \mathbf{w})$ が成り立つので, 次式が成り立つ.

$$V \times W = (V \times \{\mathbf{0}\}) + (\{\mathbf{0}\} \times W)$$

そこで, $(\mathbf{r}, \mathbf{0}), (\mathbf{t}, \mathbf{0}) \in V \times \{\mathbf{0}\}$, $(\mathbf{0}, \mathbf{s}), (\mathbf{0}, \mathbf{u}) \in \{\mathbf{0}\} \times W$ なる vectors$(\mathbf{r}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{t}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{0}, \mathbf{s})$, $(\mathbf{0}, \mathbf{u})$ を用いて次式のようにあらわされたとき,

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{r}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \mathbf{s}) = (\mathbf{t}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \mathbf{u})$$

次のようになることから,

$$(\mathbf{r}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \mathbf{s}) = (\mathbf{t}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \mathbf{u}) \Leftrightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{s}) = (\mathbf{t}, \mathbf{u})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{t} \\ \mathbf{s} = \mathbf{u} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{r}, \mathbf{0}) = (\mathbf{t}, \mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}, \mathbf{s}) = (\mathbf{0}, \mathbf{u}) \end{cases}$$

次式が成り立つ.

$$V \times W = (V \times \{\mathbf{0}\}) \oplus (\{\mathbf{0}\} \times W)$$

□

定理 4.9.3. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\begin{aligned} \varphi_{l,V} &: V \xrightarrow{\sim} V \times \{\mathbf{0}\} ; \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}, \mathbf{0}) \\ \varphi_{r,W} &: W \xrightarrow{\sim} \{\mathbf{0}\} \times W ; \mathbf{w} \mapsto (\mathbf{0}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

$V \cong V \times \{\mathbf{0}\}$ かつ $W \cong \{\mathbf{0}\} \times W$ が成り立つ[*38]. 特に, それらの vector 空間たち V, W がそれぞれ m 次元 vector 空間, n 次元 vector 空間であるとき, 次式が成り立つ.

$$\dim V \times W = \dim V + \dim W = m + n$$

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 次式のような写像が考えられれば,

$$\begin{aligned} \varphi_{l,V} &: V \to V \times \{\mathbf{0}\} ; \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}, \mathbf{0}) \\ \varphi_{r,W} &: W \to \{\mathbf{0}\} \times W ; \mathbf{w} \mapsto (\mathbf{0}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

これらが線形同型写像であることは直ちにわかる. したがって, $V \cong V \times \{\mathbf{0}\}$ かつ $W \cong \{\mathbf{0}\} \times W$ が成り立つ.

それらの vector 空間たち V, W がそれぞれ m 次元 vector 空間, n 次元 vector 空間であるとき, 定理 4.9.2 より $V \times W = (V \times \{\mathbf{0}\}) \oplus (\{\mathbf{0}\} \times W)$ が成り立ち, 定理 2.1.3 より $\dim (V \times \{\mathbf{0}\}) \oplus (\{\mathbf{0}\} \times W) = \dim V \times \{\mathbf{0}\} + \dim \{\mathbf{0}\} \times W$ が成り立つので, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \dim V \times W &= \dim (V \times \{\mathbf{0}\}) \oplus (\{\mathbf{0}\} \times W) \\ &= \dim V \times \{\mathbf{0}\} + \dim \{\mathbf{0}\} \times W \\ &= \dim V + \dim W \\ &= m + n \end{aligned}$$

□

定理 4.9.4. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, これらの基底たちがそれぞれ $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_m}$, $\langle \mathbf{w}_j \rangle_{j \in \varLambda_n}$ とおかれると, 組 $\left\langle (\mathbf{v}_i, \mathbf{0})_{i \in \varLambda_m} \quad (\mathbf{0}, \mathbf{w}_j)_{j \in \varLambda_n} \right\rangle$ がその直積 vector 空間 $V \times W$ の基底をなす.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, これらの基底たちがそれぞれ $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{i \in \varLambda_m}$, $\langle \mathbf{w}_j \rangle_{j \in \varLambda_n}$ とおかれると, $\forall \mathbf{v} \in V \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, 次式のようにおかれることができるので,

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in \varLambda_m} k_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{j \in \varLambda_n} l_j \mathbf{w}_j$$

[*38] こういった議論のため, $V \times W = V \oplus W$ とみなすこともしばしばある.

次のようになる.

$$\begin{aligned}(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \left(\sum_{i\in\Lambda_m} k_i\mathbf{v}_i, \sum_{j\in\Lambda_n} l_j\mathbf{w}_j\right)\\ &= \left(\sum_{i\in\Lambda_m} k_i\mathbf{v}_i, \mathbf{0}\right) + \left(\mathbf{0}, \sum_{j\in\Lambda_n} l_j\mathbf{w}_j\right)\\ &= \sum_{i\in\Lambda_m} k_i\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{0}\right) + \sum_{j\in\Lambda_n} l_j\left(\mathbf{0},\mathbf{w}_j\right)\end{aligned}$$

ゆえに, その組 $\left\langle\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{0}\right)_{i\in\Lambda_m}\quad\left(\mathbf{0},\mathbf{w}_j\right)_{j\in\Lambda_n}\right\rangle$ がその直積 vector 空間 $V\times W$ を生成することが分かる.

一方で, 次式がとすれば,

$$\sum_{i\in\Lambda_m} c_i\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{0}\right) + \sum_{j\in\Lambda_n} d_j\left(\mathbf{0},\mathbf{w}_j\right) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$$

次のようになることから,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\Lambda_m} c_i\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{0}\right) + \sum_{j\in\Lambda_n} d_j\left(\mathbf{0},\mathbf{w}_j\right) &= \left(\sum_{i\in\Lambda_m} c_i\mathbf{v}_i, \mathbf{0}\right) + \left(\mathbf{0}, \sum_{j\in\Lambda_n} d_j\mathbf{w}_j\right)\\ &= \left(\sum_{i\in\Lambda_m} c_i\mathbf{v}_i, \sum_{j\in\Lambda_n} d_j\mathbf{w}_j\right) = (\mathbf{0},\mathbf{0})\end{aligned}$$

次式が得られ,

$$\sum_{i\in\Lambda_m} c_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0},\quad \sum_{j\in\Lambda_n} d_j\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$$

それらの組たち $\langle\mathbf{v}_i\rangle_{i\in\Lambda_m}$, $\langle\mathbf{w}_j\rangle_{j\in\Lambda_n}$ をなす vectors は線形独立であるので, $\forall(i,j)\in\Lambda_m\times\Lambda_n$ に対し, $c_i=d_j=0$ が成り立つ. これにより, その組 $\left\langle\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{0}\right)_{i\in\Lambda_m}\quad\left(\mathbf{0},\mathbf{w}_j\right)_{j\in\Lambda_n}\right\rangle$ をなす vectors は線形独立である.

以上の議論により, それらの組 $\left\langle\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{0}\right)_{i\in\Lambda_m}\quad\left(\mathbf{0},\mathbf{w}_j\right)_{j\in\Lambda_n}\right\rangle$ がその直積 vector 空間 $V\times W$ の基底をなす. □

定理 4.9.5. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\varphi: V\times W\xrightarrow{\sim} W\times V; (\mathbf{v},\mathbf{w})\mapsto(\mathbf{w},\mathbf{v})$$

$V\times W\cong W\times V$ が成り立つ.

証明. 明らかである. □

定理 4.9.6. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\varphi: (V\times W)^*\xrightarrow{\sim} V^*\times W^*; h\mapsto\left(V\to K;\mathbf{v}\mapsto h\left(\mathbf{v},\mathbf{0}\right), W\to K;\mathbf{w}\mapsto h\left(\mathbf{0},\mathbf{w}\right)\right)$$

$(V\times W)^*\cong V^*\times W^*$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 次式のような写像たちが考えられれば,

$$\begin{aligned}\varphi : (V \times W)^* \to V^* \times W^*; f \mapsto (V \to K; \mathbf{v} \mapsto h(\mathbf{v}, \mathbf{0}), W \to K; \mathbf{w} \mapsto h(\mathbf{0}, \mathbf{w})),\\ \varphi' : V^* \times W^* \to (V \times W)^*; (f, g) \mapsto (V \times W \to K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{w}))\end{aligned}$$

$\forall k, l \in K \forall f, g \in (V \times W)^* \forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times W$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\varphi(kf + lg)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= ((kf + lg)(\mathbf{v}, \mathbf{0}), (kf + lg)(\mathbf{0}, \mathbf{w}))\\ &= (kf(\mathbf{v}, \mathbf{0}) + lg(\mathbf{v}, \mathbf{0}), kf(\mathbf{0}, \mathbf{w}) + lg(\mathbf{0}, \mathbf{w}))\\ &= k(f(\mathbf{v}, \mathbf{0}), f(\mathbf{0}, \mathbf{w})) + l(g(\mathbf{v}, \mathbf{0}), g(\mathbf{0}, \mathbf{w}))\\ &= k\varphi(f)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + l\varphi(g)(\mathbf{v}, \mathbf{w})\end{aligned}$$

以上より, その写像 φ は線形写像である.

さらに, $\forall h \in (V \times W)^*$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}\varphi' \circ \varphi(h) &= \varphi'(\varphi(h : V \times W \to K))\\ &= \varphi'(V \to K; \mathbf{v} \mapsto h(\mathbf{v}, \mathbf{0}), W \to K; \mathbf{w} \mapsto h(\mathbf{0}, \mathbf{w}))\\ &= (V \times W \to K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto h(\mathbf{v}, \mathbf{0}) + h(\mathbf{0}, \mathbf{w}))\\ &= (V \times W \to K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto h(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = h\end{aligned}$$

$\forall (f, g) \in V^* \times W^*$ に対し, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}\varphi \circ \varphi'(f, g) &= \varphi(\varphi'(f : V \to K, g : W \to K))\\ &= \varphi(V \times W \to K; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{w}))\\ &= (V \to K; \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{0}), W \to K; \mathbf{w} \mapsto f(\mathbf{0}) + g(\mathbf{w}))\\ &= (V \to K; \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}) + 0, W \to K; \mathbf{w} \mapsto 0 + g(\mathbf{w}))\\ &= (V \to K; \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v}), W \to K; \mathbf{w} \mapsto g(\mathbf{w})) = (f, g)\end{aligned}$$

$\varphi' = \varphi^{-1}$ が成り立つ.

以上の議論により, その写像 φ は線形同型写像であるので, $(V \times W)^* \cong V^* \times W^*$ が成り立つ. □

定理 4.9.7 (tensor 積の直積に関する分配法則)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall \mathbf{u} \in U \forall \mathbf{v} \in V \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $\varphi(\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}, \mathbf{w})) = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{w})$ が成り立つような線形同型写像 $\varphi : U \otimes (V \times W) \xrightarrow{\sim} (U \otimes V) \times (U \otimes W)$ が考えられることで, $U \otimes (V \times W) \cong (U \otimes V) \times (U \otimes W)$ が成り立つ.

同様に, $\forall \mathbf{u} \in U \forall \mathbf{v} \in V \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $\varphi((\mathbf{u}, \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$ が成り立つような線形同型写像 $\varphi : (U \times V) \otimes W \xrightarrow{\sim} (U \otimes W) \times (V \otimes W)$ が考えられることで, $(U \times V) \otimes W \cong (U \otimes W) \times (V \otimes W)$ が成り立つ.

この定理を tensor 積の直積に関する分配法則という.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W, これらの基底たちそれぞれ $\langle \mathbf{u}_i \rangle_{i \in \Lambda_m}$, $\langle \mathbf{v}_j \rangle_{j \in \Lambda_n}$, $\langle \mathbf{w}_k \rangle_{k \in \Lambda_o}$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{u} \in U \forall \mathbf{v} \in V \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $\varphi(\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}, \mathbf{w})) = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{w})$ が成り立つような線形写像 $\varphi : U \otimes (V \times W) \to (U \otimes V) \times (U \otimes W)$, $\forall \mathbf{u} \in U \forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi'(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{0} \otimes \mathbf{0}) = \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}, \mathbf{0})$, $\forall \mathbf{u} \in U \forall \mathbf{w} W$ に対し, $\varphi'(\mathbf{0} \otimes \mathbf{0}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{u} \otimes (\mathbf{0}, \mathbf{w})$ が成り立つような線形写像 $\varphi' : U \otimes (V \times W) \to (U \otimes V) \times (U \otimes W)$ が考えられよう. $\forall \mathbf{t} \in U \otimes (V \times W)$ に対し, 次のように

おかれれば,

$$\mathbf{t} = \sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{v}_j, \mathbf{0}) + \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{0}, \mathbf{w}_k)$$

次のようになり,

$$\begin{aligned}
\varphi' \circ \varphi(\mathbf{t}) &= \varphi'\left(\varphi\left(\sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{v}_j, \mathbf{0}) + \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{0}, \mathbf{w}_k)\right)\right) \\
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} \varphi'(\varphi(\mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{v}_j, \mathbf{0}))) + \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} \varphi'(\varphi(\mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{0}, \mathbf{w}_k))) \\
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} \varphi'(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{0}) + \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} \varphi'(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{0}, \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{w}_k)
\end{aligned}$$

そこで, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{0} &= \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{0} + \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{0} - \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{0} \\
&= \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{0} + \mathbf{0}) - \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{0} \\
&= \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{0} - \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{0} \\
&= (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i) \otimes \mathbf{0} \\
&= \mathbf{0} \otimes \mathbf{0}
\end{aligned}$$

次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\varphi' \circ \varphi(\mathbf{t}) &= \sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} \varphi'(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j, \mathbf{0} \otimes \mathbf{0}) + \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} \varphi'(\mathbf{0} \otimes \mathbf{0}, \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{w}_k) \\
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{v}_j, \mathbf{0}) + \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{0}, \mathbf{w}_k) = \mathbf{t}
\end{aligned}$$

$\forall (\mathbf{r}, \mathbf{s}) \in (U \otimes V) \times (U \otimes W)$ に対し, 次のようにおかれれば,

$$\mathbf{r} = \sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{s} = \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{w}_k$$

次のようになるので,

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \varphi'(\mathbf{r}, \mathbf{s}) &= \varphi\left(\varphi'\left(\sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j, \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{w}_k\right)\right) \\
&= \varphi\left(\varphi'\left(\left(\sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j, \mathbf{0} \otimes \mathbf{0}\right) + \left(\mathbf{0} \otimes \mathbf{0}, \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{w}_k\right)\right)\right) \\
&= \varphi\left(\varphi'\left(\sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j, \mathbf{0} \otimes \mathbf{0}) + \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} (\mathbf{0} \otimes \mathbf{0}, \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{w}_k)\right)\right) \\
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} \varphi(\varphi'(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j, \mathbf{0} \otimes \mathbf{0})) + \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} \varphi(\varphi'(\mathbf{0} \otimes \mathbf{0}, \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{w}_k)) \\
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda_m \times \Lambda_n} \xi_{ij} \varphi(\mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{v}_j, \mathbf{0})) + \sum_{(i,k) \in \Lambda_m \times \Lambda_o} o_{ik} \varphi(\mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{0}, \mathbf{w}_k))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n} \xi_{ij} \left(\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i\otimes\mathbf{0}\right) + \sum_{(i,k)\in\varLambda_m\times\varLambda_o} o_{ik} \left(\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{0}, \mathbf{u}_i\otimes\mathbf{w}_k\right)\\
&= \sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n} \xi_{ij} \left(\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{v}_j, \mathbf{0}\otimes\mathbf{0}\right) + \sum_{(i,k)\in\varLambda_m\times\varLambda_o} o_{ik} \left(\mathbf{0}\otimes\mathbf{0}, \mathbf{u}_i\otimes\mathbf{w}_k\right)\\
&= \left(\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n} \xi_{ij}\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{v}_j, \mathbf{0}\otimes\mathbf{0}\right) + \left(\mathbf{0}\otimes\mathbf{0}, \sum_{(i,k)\in\varLambda_m\times\varLambda_o} o_{ik}\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{w}_k\right)\\
&= \left(\sum_{(i,j)\in\varLambda_m\times\varLambda_n} \xi_{ij}\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{v}_j, \sum_{(i,k)\in\varLambda_m\times\varLambda_o} o_{ik}\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{w}_k\right) = (\mathbf{r},\mathbf{s})
\end{aligned}$$

$\varphi' = \varphi^{-1}$ が得られる. 以上の議論により, その写像 φ は線形同型写像であるので, $U\otimes(V\times W)\cong(U\otimes V)\times(U\otimes W)$ が成り立つ.

同様にして, $\forall\mathbf{u}\in U\forall\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, $\varphi\left((\mathbf{u},\mathbf{v})\otimes\mathbf{w}\right)=(\mathbf{u}\otimes\mathbf{w},\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})$ が成り立つような線形同型写像 $\varphi:(U\times V)\otimes W\xrightarrow{\sim}(U\otimes W)\times(V\otimes W)$ が考えられることで, $(U\times V)\otimes W\cong(U\otimes W)\times(V\otimes W)$ が成り立つことが示される. □

定理 4.9.8. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\varphi : L(U\times V,W)\xrightarrow{\sim}L(U,W)\times L(V,W); h\mapsto\left(U\to W;\mathbf{u}\mapsto h\left(\mathbf{u},\mathbf{0}\right), V\to W;\mathbf{v}\mapsto h\left(\mathbf{0},\mathbf{v}\right)\right)$$

$L(U\times V,W)\cong L(U,W)\times L(V,W)$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式のような写像たちが考えられれば,

$$\varphi : L(U\times V,W)\to L(U,W)\times L(V,W); h\mapsto\left(U\to W;\mathbf{u}\mapsto h\left(\mathbf{u},\mathbf{0}\right), V\to W;\mathbf{v}\mapsto h\left(\mathbf{0},\mathbf{v}\right)\right)$$

$$\varphi' : L(U,W)\times L(V,W)\to L(U\times V,W); (f,g)\mapsto\left(V\times W\to K;(\mathbf{u},\mathbf{v})\mapsto f\left(\mathbf{u}\right)+g\left(\mathbf{v}\right)\right)$$

$\forall k,l\in K\forall f,g\in L(U\times V,W)\forall(\mathbf{u},\mathbf{v})\in U\times V$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\varphi(kf+lg)\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right) &= \left(\left(kf+lg\right)\left(\mathbf{u},\mathbf{0}\right), \left(kf+lg\right)\left(\mathbf{0},\mathbf{v}\right)\right)\\
&= \left(kf\left(\mathbf{u},\mathbf{0}\right)+lg\left(\mathbf{u},\mathbf{0}\right), kf\left(\mathbf{0},\mathbf{v}\right)+lg\left(\mathbf{0},\mathbf{v}\right)\right)\\
&= k\left(f\left(\mathbf{u},\mathbf{0}\right), f\left(\mathbf{0},\mathbf{v}\right)\right)+l\left(g\left(\mathbf{u},\mathbf{0}\right), g\left(\mathbf{0},\mathbf{v}\right)\right)\\
&= k\varphi(f)\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)+l\varphi(g)\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)
\end{aligned}$$

以上より, その写像 φ は線形写像である.

さらに, $\forall h\in L(U\times V,W)$ に対し, 次のようになるかつ,

$$\begin{aligned}
\varphi'\circ\varphi(h) &= \varphi'\left(\varphi(h:U\times V\to W)\right)\\
&= \varphi'\left(U\to W;\mathbf{u}\mapsto h\left(\mathbf{u},\mathbf{0}\right), V\to W;\mathbf{v}\mapsto h\left(\mathbf{0},\mathbf{v}\right)\right)\\
&= \left(U\times V\to W;(\mathbf{u},\mathbf{v})\mapsto h\left(\mathbf{u},\mathbf{0}\right)+h\left(\mathbf{0},\mathbf{v}\right)\right)\\
&= \left(U\times V\to W;(\mathbf{u},\mathbf{v})\mapsto h\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)\right) = h
\end{aligned}$$

$\forall(f,g)\in L(U,W)\times L(V,W)$ に対し, 次のようになることから,

$$\varphi\circ\varphi'(f,g) = \varphi\left(\varphi'(f:U\to W, g:V\to W)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi\left(U \times V \rightarrow W ; (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto f(\mathbf{u})+g(\mathbf{v})\right) \\
&= \left(U \rightarrow W ; \mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u})+g(\mathbf{0}), V \rightarrow W ; \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{0})+g(\mathbf{v})\right) \\
&= \left(U \rightarrow W ; \mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u})+\mathbf{0}, V \rightarrow W ; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{0}+g(\mathbf{v})\right) \\
&= \left(U \rightarrow W ; \mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u}), V \rightarrow W ; \mathbf{v} \mapsto g(\mathbf{v})\right)=(f, g)
\end{aligned}
$$

$\varphi'=\varphi^{-1}$ が成り立つ.

以上の議論により, その写像 φ は線形同型写像であるので, $L(U \times V, W) \cong L(U, W) \times L(V, W)$ が成り立つ. □

定理 4.9.9. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 第 1 成分, 第 2 成分をそれぞれ第 l 成分, 第 r 成分ということにして, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$
\varphi: L(U, V \times W) \xrightarrow{\sim} L(U, V) \times L(U, W) ; h \mapsto \left(U \rightarrow V ; \mathbf{u} \mapsto \mathrm{pr}_l h(\mathbf{u}), U \rightarrow W ; \mathbf{u} \mapsto \mathrm{pr}_r h(\mathbf{u})\right)
$$

$L(U, V \times W) \cong L(U, V) \times L(U, W)$ が成り立つ.

証明. 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 第 1 成分, 第 2 成分をそれぞれ第 l 成分, 第 r 成分ということにして, 次式のような写像たちが考えられれば,

$$
\varphi: L(U, V \times W) \xrightarrow{\sim} L(U, V) \times L(U, W) ; h \mapsto \left(U \rightarrow V ; \mathbf{u} \mapsto \mathrm{pr}_l h(\mathbf{u}), U \rightarrow W ; \mathbf{u} \mapsto \mathrm{pr}_r h(\mathbf{u})\right)
$$

$$
\varphi': L(U, V) \times L(U, W) \rightarrow L(U, V \times W) ; (f, g) \mapsto \left(U \rightarrow V \times W ; \mathbf{u} \mapsto (f(\mathbf{u}), g(\mathbf{u}))\right)
$$

$\forall k, l \in K \forall f, g \in L(U, V \times W) \forall \mathbf{u} \in U$ に対し, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\varphi(k f+l g)(\mathbf{u}) &= \left(\mathrm{pr}_l(k f+l g)(\mathbf{u}), \mathrm{pr}_r(k f+l g)(\mathbf{u})\right) \\
&= \left(k \mathrm{pr}_l f(\mathbf{u})+l \mathrm{pr}_l g(\mathbf{u}), k \mathrm{pr}_r f(\mathbf{u})+l \mathrm{pr}_r g(\mathbf{u})\right) \\
&= k\left(\mathrm{pr}_l f(\mathbf{u}), \mathrm{pr}_r f(\mathbf{u})\right)+l\left(\mathrm{pr}_l g(\mathbf{u}), \mathrm{pr}_r g(\mathbf{u})\right) \\
&= k \varphi(f)(\mathbf{u})+l \varphi(g)(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

以上より, その写像 φ は線形写像である.

さらに, $\forall h \in L(U, V \times W)$ に対し, 次のようになるかつ,

$$
\begin{aligned}
\varphi' \circ \varphi(h) &= \varphi'\left(\varphi(h: U \rightarrow V \times W)\right) \\
&= \varphi'\left(U \rightarrow V ; \mathbf{u} \mapsto \mathrm{pr}_l h(\mathbf{u}), U \rightarrow W ; \mathbf{u} \mapsto \mathrm{pr}_r h(\mathbf{u})\right) \\
&= \left(U \rightarrow V \times W ; \mathbf{u} \mapsto \left(\mathrm{pr}_l h(\mathbf{u}), \mathrm{pr}_r h(\mathbf{u})\right)\right) \\
&= \left(U \rightarrow V \times W ; \mathbf{u} \mapsto h(\mathbf{u})\right)=h
\end{aligned}
$$

$\forall(f, g) \in L(U, V) \times L(U, W)$ に対し, 次のようになることから,

$$
\begin{aligned}
\varphi \circ \varphi'(f, g) &= \varphi\left(\varphi'(f: U \rightarrow V, g: U \rightarrow W)\right) \\
&= \varphi\left(U \rightarrow V \times W ; \mathbf{u} \mapsto (f(\mathbf{u}), g(\mathbf{u}))\right) \\
&= \left(U \rightarrow V ; \mathbf{u} \mapsto \mathrm{pr}_l(f(\mathbf{u}), g(\mathbf{u})), U \rightarrow W ; \mathbf{u} \mapsto \mathrm{pr}_r(f(\mathbf{u}), g(\mathbf{u}))\right) \\
&= \left(U \rightarrow V ; \mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u}), U \rightarrow W ; \mathbf{u} \mapsto g(\mathbf{u})\right)=(f, g)
\end{aligned}
$$

$\varphi'=\varphi^{-1}$ が成り立つ.

以上の議論により, その写像 φ は線形同型写像であるので, $L(U, V \times W) \cong L(U, V) \times L(U, W)$ が成り立つ. □

4.9.2 一般化された直積 vector 空間

定義 4.9.2. n つの体 K 上の vector 空間たち V_i が与えられたとき, その直積 $\prod_{i \in \Lambda_n} V_i$ の元で次のように和と scalar 倍を定義する.

- $\forall \left(\mathbf{v}_i \right)_{i \in \Lambda_n}, \left(\mathbf{w}_i \right)_{i \in \Lambda_n} \in \prod_{i \in \Lambda_n} V_i$ に対し, $\left(\mathbf{v}_i \right)_{i \in \Lambda_n} + \left(\mathbf{w}_i \right)_{i \in \Lambda_n} = \left(\mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \right)_{i \in \Lambda_n}$ が成り立つとする.
- $\forall k \in K \forall \left(\mathbf{v}_i \right)_{i \in \Lambda_n} \in \prod_{i \in \Lambda_n} V_i$ に対し, $k \left(\mathbf{v}_i \right)_{i \in \Lambda_n} = \left(k\mathbf{v}_i \right)_{i \in \Lambda_n}$ が成り立つとする.

このような集合 $\prod_{i \in \Lambda_n} V_i$ を, ここでは, それらの vector 空間たち V_i の一般化された直積 vector 空間, または単に, 直積 vector 空間ということにする.

定理 4.9.10. n つの体 K 上の vector 空間たち V_i が与えられたとき, これらの直積 vector 空間 $\prod_{i \in \Lambda_n} V_i$ は体 K 上の vector 空間となる.

証明. 定理 4.9.1 と同様にして示される. □

定理 4.9.11. n つの体 K 上の vector 空間たち V_i が与えられたとき, $\forall i \in \Lambda_n$ なる集合たち $\{\mathbf{0}\}^{i-1} \times V_i \times \{\mathbf{0}\}^{n-i}$ はいづれもその直積 vector 空間 $\prod_{i \in \Lambda_n} V_i$ の部分 vector 空間をなし, さらに, 次式が成り立つ.

$$\prod_{i \in \Lambda_n} V_i = \bigoplus_{i \in \Lambda_n} \left(\{\mathbf{0}\}^{i-1} \times V_i \times \{\mathbf{0}\}^{n-i} \right)$$

証明. 定理 4.9.2 と同様にして示される. □

定理 4.9.12. n つの体 K 上の vector 空間たち V_i が与えられたとき, $\forall i \in \Lambda_n$ なる次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\varphi_i : V_i \xrightarrow{\sim} \{\mathbf{0}\}^{i-1} \times V_i \times \{\mathbf{0}\}^{n-i}; \mathbf{v} \mapsto \left((\mathbf{0})_{j \in \Lambda_{i-1}} \quad \mathbf{v} \quad (\mathbf{0})_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_i} \right),$$
$$\dim \prod_{i \in \Lambda_n} V_i = \sum_{i \in \Lambda_n} \dim V_i = \sum_{i \in \Lambda_n} m_i$$

証明. 定理 4.9.3 と同様にして示される. □

定理 4.9.13. n つの体 K 上の m_i 次元 vector 空間たち V_i が与えられたとき, これらの基底たちがそれぞれ $\left\langle \mathbf{v}_{ij_i} \right\rangle_{j_i \in \Lambda_{m_i}}$ とおかれると, 組 $\left\langle \left((\mathbf{0})_{j \in \Lambda_{i-1}} \quad \mathbf{v}_{ij_i} \quad (\mathbf{0})_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_i} \right)_{j_i \in \Lambda_{m_i}} \right\rangle_{i \in \Lambda_n}$ がその直積 vector 空間 $\prod_{i \in \Lambda_n} V_i$ の基底をなす.

証明. 定理 4.9.4 と同様にして示される. □

定理 4.9.14. n つの体 K 上の vector 空間たち V_i が与えられたとき, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\varphi : \left(\prod_{i \in \Lambda_n} V_i \right)^* \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in \Lambda_n} V_i^*; h \mapsto \left(V_i \to K; \mathbf{v} \mapsto h \left((\mathbf{0})_{j \in \Lambda_{i-1}} \quad \mathbf{v} \quad (\mathbf{0})_{j \in \Lambda_n \setminus \Lambda_i} \right) \right)_{i \in \Lambda_n}$$

$$\left(\prod_{i\in\varLambda_n} V_i\right)^* \cong \prod_{i\in\varLambda_n} V_i^*$$ が成り立つ.

証明. 定理 4.9.6 と同様にして示される. □

定理 4.9.15 (tensor 積の直積に関する分配法則)**.** n つの体 K 上の m_i 次元 vector 空間たち V_i, が与えられたとき, $\forall\mathbf{w}\in W\forall\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}$ に対し, 次式が成り立つような

$$\varphi\left(\mathbf{w}\otimes\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\right)=\left(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}$$

線形同型写像 $\varphi:W\otimes\prod_{i\in\varLambda_n}V_i\xrightarrow{\sim}\prod_{i\in\varLambda_n}\left(W\otimes V_i\right)$ が考えられることで, $W\otimes\prod_{i\in\varLambda_n}V_i\cong\prod_{i\in\varLambda_n}\left(W\otimes V_i\right)$ が成り立つ.

同様に, $\forall\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, 次式が成り立つような

$$\varphi\left(\left(\mathbf{v}_i\right)_{i\in\varLambda_n}\otimes\mathbf{w}\right)=\left(\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}\right)_{i\in\varLambda_n}$$

線形同型写像 $\varphi:\prod_{i\in\varLambda_n}V_i\otimes W\xrightarrow{\sim}\prod_{i\in\varLambda_n}\left(V_i\otimes W\right)$ が考えられることで, $\prod_{i\in\varLambda_n}V_i\otimes W\cong\prod_{i\in\varLambda_n}\left(V_i\otimes W\right)$ が成り立つ.

この定理を tensor 積の直積に関する分配法則という.

証明. 定理 4.9.7 と同様にして示される. □

定理 4.9.16. n つの体 K 上の m_i 次元 vector 空間たち V_i, が与えられたとき, これらの基底たちがそれぞれ $\left\langle\mathbf{v}_{ij_i}\right\rangle_{j_i\in\varLambda_{m_i}}$ とおかれると, m 次元 vector 空間 W, これの基底 $\left\langle\mathbf{w}_j\right\rangle_{j\in\varLambda_m}$ を用いて, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\varphi:L\left(\prod_{i\in\varLambda_n}V_i,W\right)\xrightarrow{\sim}\prod_{i\in\varLambda_n}L\left(V_i,W\right);h\mapsto\left(V_i\to W;\mathbf{v}_i\mapsto h\left(\left(\mathbf{0}\right)_{j\in\varLambda_{i-1}}\quad\mathbf{v}_i\quad\left(\mathbf{0}\right)_{j\in\varLambda_n\setminus\varLambda_i}\right)\right)_{i\in\varLambda_n}$$

$L\left(\prod_{i\in\varLambda_n}V_i,W\right)\cong\prod_{i\in\varLambda_n}L\left(V_i,W\right)$ が成り立つ.

証明. 定理 4.9.8 と同様にして示される. □

定理 4.9.17. n つの体 K 上の m_i 次元 vector 空間たち V_i, が与えられたとき, これらの基底たちがそれぞれ $\left\langle\mathbf{v}_{ij_i}\right\rangle_{j_i\in\varLambda_{m_i}}$ とおかれると, m 次元 vector 空間 W, これの基底 $\left\langle\mathbf{w}_j\right\rangle_{j\in\varLambda_m}$ を用いて, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\varphi:L\left(W,\prod_{i\in\varLambda_n}V_i\right)\xrightarrow{\sim}\prod_{i\in\varLambda_n}L\left(W,V_i\right);h\mapsto\left(W\to V:\mathbf{w}\mapsto\mathrm{pr}_ih\left(\mathbf{w}\right)\right)_{i\in\varLambda_n}$$

$L\left(W,\prod_{i\in\varLambda_n}V_i\right)\cong\prod_{i\in\varLambda_n}L\left(W,V_i\right)$ が成り立つ.

証明. 定理 4.9.9 と同様にして示される. □

参考文献

[1] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958. 第 53 版 p211-212 ISBN4-7853-1301-3

4.10 tensor 空間における同一視

4.10.1 tensor 空間における同一視

ここでは, tensor 空間における同一視について述べよう. 線形同型写像のうちその線形同型写像が基底を選ばずにして特徴づけられることができるようなその線形同型写像を自然な線形同型写像, canonical な線形同型写像などといったりする. canonical な線形同型写像 $f : V \rightarrow W$ で用いられている vector 空間たち V, W を $V \cong W$ と書くのであった. これは $V = W$ というように同一視するという場合がある. さらに, そのとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ を $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ と書く. ここでは, $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ の代わりに単に $V \cong W$, $\mathbf{v} \cong \mathbf{w}$ と書くことにする. ただし, この章以降は単に単に $V = W$, $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ と書くこともある.

以下, 前に述べられた定理を再掲してどのように同一視するか述べよう.

定理 (定理 4.2.9 の再掲)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の双対空間 V^*, 再双対空間 V^{**} について, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次式のような写像 $\widehat{\mathbf{v}}$ が定義されるとき,

$$\widehat{\mathbf{v}} : V^* \rightarrow K; f \mapsto f(\mathbf{v})$$

次式のような写像 φ が考えられると,

$$\varphi : V \rightarrow V^{**}; \mathbf{v} \mapsto \widehat{\mathbf{v}}$$

その写像 φ は線形同型写像である.

これにより, 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のように同一視すると約束する.

$$V \cong V^{**}, \quad \mathbf{v} \cong \widehat{\mathbf{v}} = \begin{array}{ccc} V^* & \longrightarrow & K \\ \Psi & & \Psi \\ f & \longmapsto & f(\mathbf{v}) \end{array}$$

このとき, 先ほど述べられた定理たちは次のように書き換えられる.

定理 (定理 4.2.13 の再掲)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$W \cong W^{**} = W^{\perp\perp}$$

定理 (定理 4.2.14 の再掲)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間たち U, W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}, \quad (U^{**} \cap W^{**})^{\perp} = \left(U^{\perp} + W^{\perp}\right)^{**}, \quad (U \cap W)^{\perp} \cong U^{\perp} + W^{\perp}$$

定理 (定理 4.4.15 の再掲)**.** 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\ker \varphi^* = V(\varphi)^{\perp}, \quad V(\varphi^*) \cong V(\varphi^*)^{\perp\perp} \qquad = \ker \varphi^{**\perp}$$

定理 (定理 4.4.18 の再掲)**.** 体 K 上の vector 空間たち V, W, 線形写像 $\varphi : V \rightarrow W$ が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- その vector 空間 V の部分 vector 空間 U が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$V\left(\varphi|U\right)^{\perp} = V\left(\varphi^{*-1}|U^{\perp}\right)$$

- その vector 空間 W の部分 vector 空間 U が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$V\left(\varphi^{**-1}|U\right)^{\perp} \cong V\left(\varphi^{**-1}|U^{\perp\perp}\right)^{\perp} = V\left(\varphi^{*}|U^{\perp}\right)^{\perp\perp} \cong V\left(\varphi^{*}|U^{\perp}\right)$$

定理 (定理 4.4.5 の再掲)**.** 体 K 上の vector 空間たち V, U, その vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 線形写像 $f : V \rightarrow U$ が与えられたとする. $W = \ker f$ が成り立つなら, $V/\ker f \cong V(f)$ が成り立つ.

これにより, 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W, 線形写像 $f : V \rightarrow U$ が与えられたとき, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, 次のように同一視すると約束する.

$$V/\ker f \cong V(f), \quad \mathbf{v} + \ker f \cong f\left(\mathbf{v}\right)$$

定理 (定理 4.4.9 の再掲)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^{*} が与えられたとする. それらの vector 空間たち V, U 間のその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像を誘導する写像 ψ_{W} は次式のように与えられ,

$$\psi_{W} : W^{\perp} \rightarrow \left(V/W\right)^{*}; f \mapsto \left(\psi_{W}(f) : V/W \rightarrow K; \mathbf{v} + W \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right)$$

しかも, その写像 ψ_{W} は線形同型写像であり $W^{\perp} \cong \left(V/W\right)^{*}$ が成り立つ.

定理 (定理 4.4.10 の再掲)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^{*} が与えられたとする. 次式のようなそれらの vector 空間たち V, U 間のその部分 vector 空間 W に関する商 vector 空間からの自然な線形写像を誘導する写像 ψ_{W} は定理 4.4.9 より線形同型写像であった.

$$\psi_{W} : W^{\perp} \rightarrow \left(V/W\right)^{*}; f \mapsto \left(\psi_{W}(f) : V/W \rightarrow K; \mathbf{v} + W \mapsto f\left(\mathbf{v}\right)\right)$$

このとき, その集合 V からその集合 V/W への商写像 $C_{\equiv \bmod W}$ を用いてこれの逆写像 ψ_{W}^{-1} は次のように与えられる.

$$\psi_{W}^{-1} : \left(V/W\right)^{*} \rightarrow W^{\perp}; \varLambda \mapsto \varLambda \circ C_{\equiv \bmod W}$$

これにより, 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^{*} が与えられたとき, $\forall f \in W^{\perp} \forall \varLambda \in \left(V/W\right)^{*}$ に対し, 次のように同一視すると約束する.

$$W^{\perp} \cong \left(V/W\right)^{*}, \quad f \cong \begin{matrix} V/W & \longrightarrow & K \\ \Cup & & \Cup \\ \mathbf{v} + W & \mapsto & f\left(\mathbf{v}\right) \end{matrix}, \quad \varLambda \circ C_{\bmod W} \cong \varLambda$$

また, 次の定理 4.4.11 について, 詳しくみてみよう.

定理 (定理 4.4.11 の再掲)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間 V の部分 vector 空間 W, 双対空間 V^{*} が与えられたとき, $V^{*}/W^{\perp} \cong W^{*}$ が成り立つ.

この定理の証明の議論を追えば, 定理 4.2.4, 定理 4.2.13, 定理 4.4.9 より次のようになっていることから,

$$V^*/W^\perp \cong \left(V^*/W^\perp\right)^{**} \cong \left(W^{\perp\perp}\right)^* \cong W^*$$

定理 4.2.9 における canonical な線形同型写像 φ を用いれば, 先ほど述べられた同一視により $\forall f \in V^*$ に対し, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
f + W^\perp &\cong \widehat{f + W^\perp} \\
&= \begin{matrix} \left(V^*/W^\perp\right)^* & \rightarrow & K \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ F & \longmapsto & f(\mathbf{v}) \end{matrix} \\
&\cong \begin{matrix} W^{\perp\perp} & \longrightarrow & K \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ F \circ C_{\mathrm{mod}\ W^\perp} & \mapsto & F\left(f + W^\perp\right) \end{matrix} \\
&= \begin{matrix} W^{**} & \longrightarrow & K \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ F \circ C_{\mathrm{mod}\ W^\perp} & \mapsto & F\left(f + W^\perp\right) \end{matrix}
\end{aligned}$$

ここで, その商写像 $C_{\mathrm{mod}\ W^\perp}$ の定義域が W^* となっていることに注意すれば, 次のようになることから,

$$\begin{aligned}
F \circ C_{\mathrm{mod}\ W^\perp} &= \begin{matrix} V^*/W^\perp & \longrightarrow & K \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ f + W^\perp & \mapsto & F\left(f + W^\perp\right) \end{matrix} \circ \begin{matrix} W^* & \rightarrow & V^*/W^\perp \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ f & \longmapsto & f + W^\perp \end{matrix} \\
&= \begin{matrix} W^* & \longrightarrow & V^*/W^\perp & \longrightarrow & K \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ f & \longmapsto & f + W^\perp & \mapsto & F\left(f + W^\perp\right) \end{matrix} \\
&= \begin{matrix} W^* & \longrightarrow & K \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ f & \mapsto & F\left(f + W^\perp\right) \end{matrix} \\
&= F\left(\bullet + W^\perp\right) : W^* \rightarrow K
\end{aligned}$$

次のようになる.

$$\begin{aligned}
f + W^\perp &\cong \begin{matrix} W^{**} & \longrightarrow & K \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ F\left(\bullet + W^\perp\right) & \mapsto & F\left(f + W^\perp\right) \end{matrix} \\
&\cong \begin{matrix} W & \longrightarrow & K \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ \varphi^{-1}\left(F\left(\bullet + W^\perp\right)\right) & \mapsto & F\left(f + W^\perp\right) \end{matrix}
\end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{v} = \varphi^{-1}\left(F\left(\bullet + W^\perp\right)\right)$ のようにおくと, $\widehat{\mathbf{v}} = F\left(\bullet + W^\perp\right)$ なので, $\forall f \in W^*$ に対し, 次のようになる.

$$f(\mathbf{v}) = \widehat{\mathbf{v}} = F\left(f + W^\perp\right)$$

したがって, 次のようになる.

$$f+W^{\perp} \cong \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & K \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{v} & \longmapsto & f(\mathbf{v}) \end{array} = f|W$$

以上の議論より $\forall f \in V^*$ に対し, 次のように同一視できる.

$$V^*/W^{\perp} \cong W^*, \quad f+W^{\perp} \cong f|W$$

定理 (tensor 積の結合法則 4.6.1 の再掲)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, ある線形同型写像 $\rho:(U\otimes V)\otimes W \overset{\sim}{\to} U\otimes(V\otimes W)$ が一意的に存在して, その線形同型写像 ρ は, $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \in U\times V\times W$ に対し, $\rho((\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\otimes\mathbf{w}) = \mathbf{u}\otimes(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})$ を満たす. ゆえに, $(U\otimes V)\otimes W \cong U\otimes(V\otimes W)$ が成り立つ.

この定理を tensor 積の結合法則という.

これにより, $\forall\mathbf{u}\in U\forall\mathbf{v}\in V\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, 次のように同一視する.

$$(U\otimes V)\otimes W \cong U\otimes(V\otimes W), \quad (\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\otimes\mathbf{w} \cong \mathbf{u}\otimes(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})$$

定理 (定理 4.5.7 の再掲)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, その vector 空間 $L(V,W)$ とその vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ との組 $(L(V,W),\psi_{V,W})$ はそれらの vector 空間たち W, V^* の tensor 積である. さらに, 次式が成り立つ.

$$L(V,W) \cong W\otimes V^*$$

このとき, ある線形同型写像 $\rho: W\otimes V^* \overset{\sim}{\to} L(V,W)$ が存在して, $\psi_{V,W} = \rho\circ\otimes$ が成り立ち, その線形写像 ρ は $\rho(\mathbf{w}\otimes f): V\to W; \mathbf{v}\mapsto f(\mathbf{v})\mathbf{w}$ を満たす.

これにより, $\forall\mathbf{v}\in V\forall f\in V^*\forall\mathbf{w}\in W$ に対し, 次のように同一視する.

$$L(V,W) \cong W\otimes V^*, \quad \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{v} & \longmapsto & f(\mathbf{v})\mathbf{w} \end{array} \cong \mathbf{w}\otimes f, \quad (\mathbf{w}\otimes f)(\mathbf{v}) \cong f(\mathbf{v})\mathbf{w}$$

このとき, 先ほど述べられた定理たちは次のように書き換えられる.

定理 (定理 4.5.8 の再掲)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次のことが成り立つ.

- その vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ について, $\forall\mathbf{w}\in W\forall f\in V^*$ に対し, 再双対空間 W^{**} での自然な線形同型写像 φ を用いて $\varphi(\mathbf{w}) = \widehat{\mathbf{w}}$ とおくと, 次式が成り立つ.

$$\psi_{V,W}^*(\mathbf{w},f) = \psi_{V^*,W^*}(f,\widehat{\mathbf{w}}) = \begin{array}{ccc} V^* & \longrightarrow & W^* \\ \cup & & \cup \\ g & \longmapsto & g(\mathbf{w})f \end{array} \cong f\otimes\widehat{\mathbf{w}}$$

- その vector 空間 V の vector のその双対空間 U^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{U,V}$, その vector 空間 W の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,W}$ が与えられたとき, $\forall\mathbf{v} \in V\forall\mathbf{w} \in W\forall f \in U^*\forall g \in V^*$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\mathbf{w} \otimes g \circ \mathbf{v} \otimes f \cong \begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathbf{u} & \longmapsto & f(\mathbf{u})\,\mathbf{v} & \mapsto & f(\mathbf{u})\,g(\mathbf{v})\,\mathbf{w} \end{array} \cong g(\mathbf{v})\,\mathbf{w} \otimes f$$

- その vector 空間 V の vector のその双対空間 V^* の線形形式の像倍へ写す双線形写像 $\psi_{V,V}$ について, その vector 空間の基底 α がどのように与えられても, $\forall\mathbf{v} \in V\forall f \in V^*$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\mathrm{tr}\left[\psi_{V,V}(\mathbf{v}, f)\right]_\alpha^\alpha = f(\mathbf{v})$$

定理 (定理 4.5.13 の再掲)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 T, n 次元 vector 空間 U, o 次元 vector 空間 V, p 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$L(T \otimes U, V \otimes W) \cong L(T, V) \otimes L(U, W)$$

このとき, ある線形同型写像 $\sigma : L(T, V) \otimes L(U, W) \xrightarrow{\sim} L(T \otimes U, V \otimes W)$ が一意的に存在して, $\forall(\varphi, \chi) \in L(T, V) \times L(U, W)\forall(\mathbf{t}, \mathbf{u}) \in T \times U$ に対し, $\varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(\mathbf{u}) = \sigma(\varphi \otimes \chi)(\mathbf{t} \otimes \mathbf{u})$ が成り立つ.

これにより, $\forall\mathbf{t} \in T\forall\mathbf{u} \in U\forall\varphi \in L(T, V)\forall\chi \in L(U, W)$ に対し, 次のように同一視する.

$$L(T \otimes U, V \otimes W) \cong L(T, V) \otimes L(U, W), \quad \varphi(\mathbf{t}) \otimes \chi(\mathbf{u}) \cong (\varphi \otimes \chi)(\mathbf{t} \otimes \mathbf{u})$$

定理 (定理 4.5.14 の再掲)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$$

このとき, ある線形同型写像 $\varSigma : V^* \otimes W^* \xrightarrow{\sim} (V \otimes W)^*$ が存在して, $\forall(\varphi, \chi) \in V^* \times W^*\forall(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times W$ に対し, $\varSigma(\varphi \otimes \chi)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v})\,\chi(\mathbf{w})$ が成り立つ.

これにより, $\forall\mathbf{v} \in V\forall\mathbf{w}W\forall\varphi \in V^*\forall\chi \in W^*$ に対し, 次のように同一視する[*39].

$$(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*, \quad \varphi(\mathbf{v})\,\chi(\mathbf{w}) \cong (\varphi \otimes \chi)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$$

[*39] より一般に, 次のような主張がある.
(定理 4.6.5 の再掲). n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i\right)^* \cong \bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i^*$$

このとき, ある線形同型写像 $\varSigma : \bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i^* \to \left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i\right)^*$ が存在して, $\forall(f_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} V_i^*\forall(\mathbf{v}_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} V_i$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\varSigma\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} f_i\right)\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} \mathbf{v}_i\right) = \prod_{i \in \varLambda_n} f_i(\mathbf{v}_i)$$

定理 (定理 4.5.15 の再掲)**.** 体 K 上の n 次元 vector 空間 V が与えられたとき, 組 $(V, \cdot)$ はそれらの vector 空間たち K, V の tensor 積である. なお, $\cdot$ は scalar 倍である. さらに, ある線形同型写像 $\rho : K \otimes V \to V$ が一意的に存在して, $\cdot = \rho \circ \otimes$ が成り立ち, その線形同型写像 ρ は, $\forall \mathbf{v} \in V$ に対し, $\rho\left(\alpha \otimes \mathbf{v}\right) = \alpha\mathbf{v}$ を満たす. ゆえに, $K \otimes V \cong V$ が成り立つ[*40].

これにより, $\forall\alpha \in K\forall\mathbf{v} \in V$ に対し, 次のように同一視する.

$$K \otimes V \cong V, \quad \alpha \otimes \mathbf{v} \cong \alpha\mathbf{v}$$

定理 (定理 4.5.18 の再掲)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$L(U, W; W) \cong L(U \otimes V, W)$$

このとき, ある線形同型写像 $\otimes^* : L(U \otimes V, W) \xrightarrow{\sim} L(U, W; W)$ が存在して, $\otimes^*(\rho) = \rho \circ \otimes$ が成り立ち, $\otimes^*(\rho) : U \times V \to W; (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \rho\left(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}\right)$ が成り立つ.

これにより, 次のように同一視する.

$$L(U, W; W) \cong L(U \otimes V, W), \quad \begin{array}{ccc} U \times V & \longrightarrow & W \\ \cup & & \cup \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \longmapsto & \mathbf{w} \end{array} \cong \begin{array}{ccc} U \otimes V & \longrightarrow & W \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} & \longmapsto & \mathbf{w} \end{array}$$

定理 (定理 4.5.19 の再掲)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$L(U, V; W) \cong \left(U^* \otimes V^*\right) \otimes W$$

これにより, $\forall\left(f_i\right)_{i \in \Lambda_n} \in \prod_{i \in \Lambda_n} V_i^* \forall\left(\mathbf{v}_i\right)_{i \in \Lambda_n} \in \prod_{i \in \Lambda_n} V_i$ に対し, 次のように同一視する.

$$\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} V_i\right)^* \cong \bigotimes_{i \in \Lambda_n} V_i^*,$$

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i \in \Lambda_n} V_i & \longrightarrow & K \\ \cup & & \cup \\ \bigotimes_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i & \longmapsto & \prod_{i \in \Lambda_n} f_i\left(\mathbf{v}_i\right) \end{array} \cong \bigotimes_{i \in \Lambda_n} f_i,$$

$$\prod_{i \in \Lambda_n} f_i\left(\mathbf{v}_i\right) \cong \left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} f_i\right)\left(\bigotimes_{i \in \Lambda_n} \mathbf{v}_i\right)$$

[*40] 系として, このような主張もある.

(定理 4.5.16 の再掲). 体 K が与えられたとき, 組 $(K, \cdot)$ はそれらの vector 空間たち K 同士の tensor 積である. さらに, ある線形同型写像 $\rho : K \otimes K \xrightarrow{\sim} K$ が一意的に存在して, $\cdot = \rho \circ \otimes$ が成り立ち, その線形同型写像 ρ は $\rho(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$ を満たす. ゆえに, $K \otimes K \cong K$ が成り立つ.

(定理 4.6.6 の再掲). 体 K が与えられたとき, $\bigotimes_{i \in \Lambda_n} K \cong K$ が成り立つ.

また, 次のような主張もありますが, 多くの場合, 後述する外積が構成できなくなってしまうため, その主張に基づく同一視は行われないことが多いようです.

(定理 4.5.17 の再掲). 体 K 上の m 次元 vector 空間 V, n 次元 vector 空間 W が与えられたとき, ある線形同型写像 $\rho : V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$ が一意的に存在して, その線形同型写像 ρ は, $\forall(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times W$ に対し, $\rho\left(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\right) = \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$ を満たす. ゆえに, $V \otimes W \cong W \otimes V$ が成り立つ.

このとき, ある線形同型写像 $\varSigma : (U^* \otimes V^*) \otimes W \overset{\sim}{\rightarrow} L(U, V; W)$ が存在して, $\forall(f, g) \in U^* \times V^* \forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U \times V \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $\varSigma\left((f \otimes g) \otimes \mathbf{w}\right)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u})\, g(\mathbf{v})\, \mathbf{w}$ が成り立つ.

定理 (定理 4.5.20 の再掲)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$L(U, L(V, W)) \cong (U^* \otimes V^*) \otimes W$$

このとき, ある線形同型写像 $\varSigma : (U^* \otimes V^*) \otimes W \overset{\sim}{\rightarrow} L(U, L(V, W))$ が存在して, $\forall(f, g) \in U^* \times V^* \forall \mathbf{u} \in U \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, $\varSigma\left((f \otimes g) \otimes \mathbf{w}\right)(\mathbf{u}) = \left(V \rightarrow W; \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{u})\, g(\mathbf{v})\, \mathbf{w}\right)$ が成り立つ.

これにより, $\forall \mathbf{u} \in U \forall \mathbf{v} \in V \forall \mathbf{w} \in W \forall f \in U^* \forall g \in V^*$ に対し, 次のように同一視する[*41].

$$L(U, V; W) \cong L(U, L(V, W)) \cong (U^* \otimes V^*) \otimes W,$$

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \longrightarrow & W \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \mapsto & f(\mathbf{u})\, g(\mathbf{v})\, \mathbf{w} \end{array} \cong \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & L(V, W) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathbf{u} & \longmapsto & f(\mathbf{u})\, g(\bullet)\, \mathbf{w} \end{array} \cong (f \otimes g) \otimes \mathbf{w},$$

---

*41 より一般に, 次のような主張がある.

(定理 4.6.7 の再掲). n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$L\left((V_i)_{i \in \varLambda_n}; W\right) \cong L\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i, W\right)$$

このとき, ある線形同型写像 $\otimes^* : L\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i, W\right) \overset{\sim}{\rightarrow} L\left((V_i)_{i \in \varLambda_n}; W\right)$ が存在して, $\otimes^*(\rho) = \rho \circ \otimes$ が成り立ち, $\forall (\mathbf{v}_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} V_i$ に対し, $\otimes^*(\rho)(\mathbf{v}_i)_{i \in \varLambda_n} = \rho\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} \mathbf{v}_i\right)$ が成り立つ.

(定理 4.6.8 の再掲). n つの体 K 上 m_i 次元 vector 空間たち V_i, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, 次式が成り立つ.

$$L\left((V_i)_{i \in \varLambda_n}; W\right) \cong \bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i^* \otimes W$$

このとき, ある線形同型写像 $\varSigma : \bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i^* \otimes W \overset{\sim}{\rightarrow} L\left((V_i)_{i \in \varLambda_n}; W\right)$ が存在して, $\forall (f_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} V_i^* \forall \mathbf{w} \in W \forall (\mathbf{v}_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} V_i$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\varSigma\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} f_i \otimes \mathbf{w}\right)(\mathbf{v}_i)_{i \in \varLambda_n} = \prod_{i \in \varLambda_n} f_i(\mathbf{v}_i)\mathbf{w}$$

これにより, $\forall (\mathbf{v}_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} V_i \forall (f_i)_{i \in \varLambda_n} \in \prod_{i \in \varLambda_n} V_i^* \forall \mathbf{w} \in W$ に対し, 次のように同一視する.

$$L\left((V_i)_{i \in \varLambda_n}; W\right) \cong L\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i, W\right) \cong \bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i^* \otimes W,$$

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in \varLambda_n} V_i & \longrightarrow & W \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\mathbf{v}_i)_{i \in \varLambda_n} & \longmapsto & \prod_{i \in \varLambda_n} f_i(\mathbf{v}_i)\mathbf{w} \end{array} \cong \begin{array}{ccc} \bigotimes_{i \in \varLambda_n} V_i & \longrightarrow & W \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \bigotimes_{i \in \varLambda_n} \mathbf{v}_i & \longmapsto & \prod_{i \in \varLambda_n} f_i(\mathbf{v}_i)\mathbf{w} \end{array} \cong \bigotimes_{i \in \varLambda_n} f_i \otimes \mathbf{w},$$

$$\left(\bigotimes_{i \in \varLambda_n} f_i \otimes \mathbf{w}\right)(\mathbf{v}_i)_{i \in \varLambda_n} \cong \prod_{i \in \varLambda_n} f_i(\mathbf{v}_i)\mathbf{w}$$

$$f(\mathbf{u})g(\mathbf{v})\mathbf{w} \cong ((f \otimes g) \otimes \mathbf{w})(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

定理 (tensor 積の直積に関する分配法則 4.9.7 の再掲)**.** 体 K 上の m 次元 vector 空間 U, n 次元 vector 空間 V, o 次元 vector 空間 W が与えられたとき, $\forall\mathbf{u} \in U\forall\mathbf{v} \in V\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, $\varphi(\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}, \mathbf{w})) = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{w})$ が成り立つような線形同型写像 $\varphi : U \otimes (V \times W) \xrightarrow{\sim} (U \otimes V) \times (U \otimes W)$ が考えられることで, $U \otimes (V \times W) \cong (U \otimes V) \times (U \otimes W)$ が成り立つ.

同様に, $\forall\mathbf{u} \in U\forall\mathbf{v} \in V\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, $\varphi((\mathbf{u}, \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$ が成り立つような線形同型写像 $\varphi : (U \times V) \otimes W \xrightarrow{\sim} (U \otimes W) \times (V \otimes W)$ が考えられることで, $(U \times V) \otimes W \cong (U \otimes W) \times (V \otimes W)$ が成り立つ.

この定理を tensor 積の直積に関する分配法則という.

これにより, $\forall\mathbf{u} \in U\forall\mathbf{v} \in V\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, 次のように同一視する*42.

$$U \otimes (V \times W) \cong (U \otimes V) \times (U \otimes W), \quad \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \cong (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{w})$$
$$(U \times V) \otimes W \cong (U \otimes W) \times (V \otimes W), \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} \cong (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$$

これ以外に線形同型な vector 空間たちに関する定理たちも述べておこう.

定理 (定理 4.9.5 の再掲)**.** 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\varphi : V \times W \xrightarrow{\sim} W \times V; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto (\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

$V \times W \cong W \times V$ が成り立つ.

定理 (定理 4.9.6 の再掲)**.** 体 K 上の vector 空間たち V, W が与えられたとき, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\varphi : (V \times W)^* \xrightarrow{\sim} V^* \times W^*; h \mapsto (V \to K; \mathbf{v} \mapsto h(\mathbf{v}, \mathbf{0}), W \to K; \mathbf{w} \mapsto h(\mathbf{0}, \mathbf{w}))$$

---

*42 より一般に, 次のような主張もある.

(tensor 積の直積に関する分配法則 4.9.15 の再掲). n つの体 K 上の m_i 次元 vector 空間たち V_i, が与えられたとき, $\forall\mathbf{w} \in W\forall(\mathbf{v}_i)_{i \in \Lambda_n} \in \prod_{i \in \Lambda_n} V_i$ に対し, 次式が成り立つような

$$\varphi\left(\mathbf{w} \otimes (\mathbf{v}_i)_{i \in \Lambda_n}\right) = (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}_i)_{i \in \Lambda_n}$$

線形同型写像 $\varphi : W \otimes \prod_{i \in \Lambda_n} V_i \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in \Lambda_n} (W \otimes V_i)$ が考えられることで, $W \otimes \prod_{i \in \Lambda_n} V_i \cong \prod_{i \in \Lambda_n} (W \otimes V_i)$ が成り立つ.

同様に, $\forall(\mathbf{v}_i)_{i \in \Lambda_n} \in \prod_{i \in \Lambda_n} V_i\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, 次式が成り立つような

$$\varphi\left((\mathbf{v}_i)_{i \in \Lambda_n} \otimes \mathbf{w}\right) = (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w})_{i \in \Lambda_n}$$

線形同型写像 $\varphi : \prod_{i \in \Lambda_n} V_i \otimes W \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in \Lambda_n} (V_i \otimes W)$ が考えられることで, $\prod_{i \in \Lambda_n} V_i \otimes W \cong \prod_{i \in \Lambda_n} (V_i \otimes W)$ が成り立つ.

この定理を tensor 積の直積に関する分配法則という.

これにより, $\forall(\mathbf{v}_i)_{i \in \Lambda_n} \in \prod_{i \in \Lambda_n} V_i\forall\mathbf{w} \in W$ に対し, 次のように同一視する.

$$W \otimes \prod_{i \in \Lambda_n} V_i \cong \prod_{i \in \Lambda_n} (W \otimes V_i), \quad \mathbf{w} \otimes (\mathbf{v}_i)_{i \in \Lambda_n} \cong (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}_i)_{i \in \Lambda_n}$$
$$\prod_{i \in \Lambda_n} V_i \otimes W \cong \prod_{i \in \Lambda_n} (V_i \otimes W), \quad (\mathbf{v}_i)_{i \in \Lambda_n} \otimes \mathbf{w} \cong (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w})_{i \in \Lambda_n}$$

$(V \times W)^* \cong V^* \times W^*$ が成り立つ.

定理 (定理 4.9.16 の再掲). n つの体 K 上の m_i 次元 vector 空間たち V_i, が与えられたとき, これらの基底たちがそれぞれ $\langle \mathbf{v}_{ij_i} \rangle_{j_i \in \varLambda_{m_i}}$ とおかれると, m 次元 vector 空間 W, これの基底 $\langle \mathbf{w}_j \rangle_{j \in \varLambda_m}$ を用いて, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\varphi : L\left(\prod_{i \in \varLambda_n} V_i, W\right) \overset{\sim}{\to} \prod_{i \in \varLambda_n} L\left(V_i, W\right); h \mapsto \left(V_i \to W; \mathbf{v}_i \mapsto h\left((\mathbf{0})_{j \in \varLambda_{i-1}} \quad \mathbf{v}_i \quad (\mathbf{0})_{j \in \varLambda_n \setminus \varLambda_i}\right)\right)_{i \in \varLambda_n}$$

$L\left(\prod_{i \in \varLambda_n} V_i, W\right) \cong \prod_{i \in \varLambda_n} L\left(V_i, W\right)$ が成り立つ.

定理 (定理 4.9.17 の再掲). n つの体 K 上の m_i 次元 vector 空間たち V_i, が与えられたとき, これらの基底たちがそれぞれ $\langle \mathbf{v}_{ij_i} \rangle_{j_i \in \varLambda_{m_i}}$ とおかれると, m 次元 vector 空間 W, これの基底 $\langle \mathbf{w}_j \rangle_{j \in \varLambda_m}$ を用いて, 次式のような線形同型写像が考えられることで,

$$\varphi : L\left(W, \prod_{i \in \varLambda_n} V_i\right) \overset{\sim}{\to} \prod_{i \in \varLambda_n} L\left(W, V_i\right); h \mapsto \left(W \to V : \mathbf{w} \mapsto \mathrm{pr}_i h\left(\mathbf{w}\right)\right)_{i \in \varLambda_n}$$

$L\left(W, \prod_{i \in \varLambda_n} V_i\right) \cong \prod_{i \in \varLambda_n} L\left(W, V_i\right)$ が成り立つ.

参考文献

[1] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1958. 第 53 版 p193-219 ISBN4-7853-1301-3

[2] 池田岳, テンソル代数と表現論, 東京大学出版会, 2022. 第 2 刷 p57-73 ISBN978-4-13-062929-4