複素解析学 暫定版

@k74226197Y126

2023 年 9 月 24 日

はじめに

この.pdf ファイルはもともと一学生が勉強のため、特に、自分の言葉で整理するために作成したものです。そのため、比較的行間は狭めになっております。そこで、他に私が勉強している内容を勉強している方がある箇所などで悩んだときに、参考になるかと思い公開させていただきました。そのこともあって、参考文献を詳細に書き章末にまとめてみました。ぜひ、参考文献リストもご活用してみるといいかもしれません。また、公開した他の理由として、誤植や間違い、不適切な表現、紛らわしい表現を自分でも探しておりますが、いかんせん大変なので、あえて公開することで誰かが探してくれるかもしれないというのもございます。

この.pdf ファイルは一学生が勉強のため作成したもので監修を受けたわけではないので、正確性については保証できなく誤植や間違い、不適切な表現、紛らわしい表現があるかもしれません。誤植も今まで多数見つかってきております。論理の誤りは、書籍の定義や定理の主張に気を配っているので、少なめかもしれませんが、ないとは言い切れません。もし、そのようなものがございましたら、ご連絡していただければ幸いです。また、記号や言い回しで独特な箇所があり見苦しい箇所もあるかと思います。これも深刻であれば、可能な限り対応したいと考えております。また、参考文献に挙げられた書籍などと併読しておくこともお勧めいたします。

.pdf ファイルで使用された.png ファイルや.pdf ファイルのベースとなる.tex ファイル、プリアンブルに書くための.tex ファイル (for_preamble.tex) も公開しております。先ほど述べられた通り自由にダウンロード、編集をしていただいても問題ございません。ただ、ローカルリポジトリの親フォルダに保存しております本文の.tex ファイルに関しましては、当面の間、非公開とさせていただきます。ご了承ください。

この PDF 資料はまだ書きかけです。今のところまだ解析学の基礎的な話題のみにとどまっており、まだ、複素積分の話題になっていませんので、あまり参考にはならないかもしれません。

目次

第 1 部　複素空間の位相

ここでは、実数のさまざまな性質をいくらか認めたうえで、複素数を $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視して積を定義することで導入する。これにより、虚数単位 i がより実在する量として思えてくるのであろう。このあと、解析学で基本的な道具となる極限を近傍系を導入してから論じることにする。なお、意欲のある読者には、位相空間論について興味を持ったらば、他の書籍をみることを勧める。このときに無限大という概念も導入することで、Riemann 球面を導入しよう。これに基づき、ほとんどの極限は点列の極限に帰着できるので、まずは点列の極限を述べ、これの応用として級数の収束や関数列の極限も述べよう。これらの一連の議論は n 次元数空間に一般化できることも注意しておこう。ここでは、このことを詳しく述べない。興味があれば、参考文献に挙げられている解析学の書籍を参照されたい。

1.1　複素数

1.1.1　複素数

ここでは、複素数の定義と基本的な性質をみていこう。なお、証明はいずれもそこまで難しくはないので、省くことにする。興味があれば、手を動かして各自示してみるといいかもしれない。

定義 1.1.1. 集合 $\mathbb{R}^2$ の元々 (a_1,a_2)、(b_1,b_2) を考え次式のように乗法 $\cdot$ を定義する。

$$\cdot:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\left(\left(a_1,a_2\right),\left(b_1,b_2\right)\right)\mapsto\left(a_1,a_2\right)\left(b_1,b_2\right)=\left(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1\right)$$

この乗法 $\cdot$ が定義されているかつ、$(1,0)=1\in\mathbb{R}$、$(0,1)=i$ としたその集合 $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と書きこれの元 (a,b) を複素数といい $a+bi$ と書くことにする。また、$z=a+bi$ としたときの実数たち a、b をそれぞれその複素数 z の実部、虚部といいそれぞれ $\mathrm{Re}z$、$\mathrm{Im}z$ などと書く。これにより、$z=\mathrm{Re}z+i\mathrm{Im}z$ が成り立つ。複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ を複素平面、Gauss 平面という。

定義 1.1.2. 次のような写像 c を考え $z\in\mathbb{C}$ なる $c(z)$ を $\overline{z}$ などと書きその複素数 z の共役複素数という。

$$c:\mathbb{C}\to\mathbb{C};z\mapsto\mathrm{Re}z-i\mathrm{Im}z$$

定義 1.1.3. 次のような写像 a を考え $z\in\mathbb{C}$ なる $a(z)$ を $|z|$ などと書く。

$$a:\mathbb{C}\to\mathbb{R};z\mapsto\sqrt{\mathrm{Re}z^2+\mathrm{Im}z^2}$$

定理 1.1.1. この集合 $\mathbb{C}$ は体であり複素数 z の加法、乗法の逆元はそれぞれ $-z$、$\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ となる。

定理 1.1.2. 系として $\forall z\in\mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$z\overline{z}=\overline{z}z=|z|^2$$

定理 1.1.3. $\forall a,b\in\mathbb{R}\forall z,w\in\mathbb{C}$ に対し次式が成り立つような全単射となり $c^{-1}=c$ が成り立つ。

$$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$$
$$\overline{zw}=\overline{z}\ \overline{w}$$

$$\overline{az+bw} = a\overline{z} + b\overline{w}$$

当然ながら、次式も成り立つ。

$$\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$$
$$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \text{ if } w \neq 0$$

定理 1.1.4. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し次式が成り立つ。

$$|zw| = |z||w|$$
$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ if } w \neq 0$$

定理 1.1.5. $\forall b \in \mathbb{R} \forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し次式が成り立つ。

$$0 \leq |z|$$
$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
$$|bz| = |b||z|$$
$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1985. 第 34 刷 p33-38 ISBN978-4-13-062005-5

[2] 高橋礼司, 複素解析, 東京大学出版会, 1990. 第 12 刷 p3-6 ISBN978-4-13-062106

1.2 複素平面の位相

1.2.1 Riemann 球面

公理 1.2.1 (無限大の算法)**.** 次のことを満たす 2 つの元 $-\infty$、∞ をそれぞれ負の無限大、正の無限大という[*1]。

- $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、$-\infty < a$ が成り立つ。
- $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、$a < \infty$ が成り立つ。
- $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、$a - \infty = -\infty + a = -\infty$ が成り立つ。
- $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、$a + \infty = \infty + a = \infty$ が成り立つ。
- $\forall a \in \mathbb{R}^-$ に対し、$a \cdot (-\infty) = -\infty \cdot a = \infty$ が成り立つ。
- $\forall a \in \mathbb{R}^-$ に対し、$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$ が成り立つ。
- $\forall a \in \mathbb{R}^+$ に対し、$a \cdot (-\infty) = -\infty \cdot a = -\infty$ が成り立つ。
- $\forall a \in \mathbb{R}^+$ に対し、$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$ が成り立つ。
- $\infty + \infty = \infty$ が成り立つ。
- $-\infty - \infty = -\infty$ が成り立つ。
- $\dfrac{1}{-\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$ が成り立つ。

定義 1.2.2. さらに、次のように定義される集合 $^*\mathbb{R}$ を補完数直線といいこれの元を拡大実数という。

$$^*\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

公理 1.2.3. 次のことを満たす元 ∞ を無限大という。

- $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$z + \infty = \infty + z$ が成り立つ。
- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し、$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ が成り立つ。
- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し、$\dfrac{z}{0} = \infty$ が成り立つ。
- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し、$\dfrac{z}{\infty} = 0$ が成り立つ。
- $\infty \cdot \infty = \infty$ が成り立つ。

さらに、集合 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面といい $\hat{\mathbb{C}}$ などと書く。

1.2.2 ε 近傍

定義 1.2.4. $|w - z| < \varepsilon$ なる複素数 w 全体の集合をその複素数 z を中心とする半径 ε の開球、その複素数 z の ε 近傍といい、$U(z, \varepsilon)$ などと書く。また、$|w - z| \leq \varepsilon$ なる複素数 w 全体の集合をその複素数 z を中心とする半径 ε の閉球といい、$\overline{U}(z, \varepsilon)$ などと書く。

定義 1.2.5. $0 < \varepsilon < |w|$ なる複素数 w 全体の集合を Riemann 球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ における無限大 ∞ を中心とする半径 ε の開球、無限大の ε 近傍といい、$U(\infty, \varepsilon)$ などと書く。また、$0 < \varepsilon \leq |w|$ なる複素数 w 全体の集合を Riemann 球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ における無限大 ∞ を中心とする半径 ε の閉球といい、$\overline{U}(\infty, \varepsilon)$ などと書く。

[*1] ただ、$\infty - \infty$ や $-\infty + \infty$、$0 \cdot \infty$、$\infty \cdot 0$ などは定義されないということに注意されたい。

定義 1.2.6. $\forall R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}}) \forall z \in R$ に対し、集合 $U(z, \varepsilon) \cap R$ をその集合 R におけるその複素数 z の ε 近傍という[*2]。

定理 1.2.1. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、その複素数 z の ε 近傍について、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\infty \notin U(z, \varepsilon)$ が成り立つ。

証明. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、その複素数 z の ε 近傍について、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\infty \in U(z, \varepsilon)$ が成り立つと仮定すると、$|\infty - z| = |\infty| = \infty < \varepsilon$ が得られるが、これは矛盾している。 □

定理 1.2.2. $\forall R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$ に対し、その集合 R の複素数 z のその集合 R における ε 近傍について、次のことが成り立つ。

- $\forall z \in R \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$z \in U(z, \varepsilon) \cap R$ が成り立つ。
- $\forall z \in R \forall \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists r \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z, r) \cap R \subseteq U(z, \delta) \cap U(z, \varepsilon) \cap R$ が成り立つ。
- $\forall z \in R \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall w \in U(z, \varepsilon) \cap R \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(w, \delta) \cap R \subseteq U(z, \varepsilon) \cap R$ が成り立つ。

証明. $\forall R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$ に対し、その集合 R の複素数 z のその集合 R における ε 近傍について、$\forall z \in R \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$z \in \mathbb{C}$ のとき、$|z - z| = 0 < \varepsilon$ より $z \in U(z, \varepsilon) \cap R$ が成り立つ。$z = \infty$ のとき、$\varepsilon < \infty = |\infty|$ より $\infty \in U(\infty, \varepsilon) \cap R$ が成り立つ。

$\forall z \in R \forall \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$z \in \mathbb{C}$ のとき、$r = \min\{\delta, \varepsilon\}$ とすれば、$\exists r \in \mathbb{R}^+ \forall w \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$w \in U(z, r) \cap R$ が成り立つなら、定理 1.2.1 より $w \in \mathbb{C}$ が成り立つ。このとき、$w \in R$ が成り立つかつ、$|w - z| < r$ で、$r \leq \delta$ かつ $r \leq \varepsilon$ が成り立つので、$|w - z| < \delta$ かつ $|w - z| < \varepsilon$ が成り立つ、即ち、$w \in U(z, \delta)$ かつ $w \in U(z, \varepsilon)$ が成り立つ。$z = \infty$ のとき、$r = \max\{\delta, \varepsilon\}$ とすれば、$\exists r \in \mathbb{R}^+ \forall w \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$w \in U(z, r) \cap R$ が成り立つなら、$w \in R$ が成り立つかつ、$r < |w|$ で、$\delta \leq r$ かつ $\varepsilon \leq r$ が成り立つので、$\delta < |w|$ かつ $\varepsilon < |w|$ が成り立つ、即ち、$w \in U(\infty, \delta)$ かつ $w \in U(\infty, \varepsilon)$ が成り立つ。よって、$\forall z \in R \forall \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists r \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z, r) \cap R \subseteq U(z, \delta) \cap U(z, \varepsilon) \cap R$ が成り立つ。

$\forall z \in R \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall w \in U(z, \varepsilon) \cap R$ に対し、$z \in \mathbb{C}$ のとき、定理 1.2.1 より $w \in \mathbb{C}$ が成り立つ。そこで、次のように正の実数 δ がおかれれば、

$$\delta = \frac{\varepsilon - |w - z|}{2}$$

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall v \in U(w, \delta) \cap R$ に対し、定理 1.2.1 より $v \in \mathbb{C}$ で次のようになるので、

$$\begin{aligned} v \in U(w, \delta) \cap R &\Leftrightarrow v \in R \wedge 0 \leq |v - w| < \delta = \frac{\varepsilon - |w - z|}{2} \\ &\Leftrightarrow v \in R \wedge -|w - z| \leq 0 \leq |v - w| \\ &\quad \leq |v - w| + |v - w| < 2\delta = \varepsilon - |w - z| \\ &\Rightarrow v \in R \wedge 0 \leq |v - z| \leq |v - w| + |w - z| < \varepsilon \\ &\Rightarrow v \in R \wedge 0 \leq |v - z| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow v \in U(z, \varepsilon) \cap R \end{aligned}$$

$U(w, \delta) \cap R \subseteq U(z, \varepsilon) \cap R$ が成り立つ。$z = \infty$ かつ $w \in \mathbb{C}$ のとき、$\varepsilon < |w|$ が成り立つので、次のように正の実数 δ がおかれれば、

$$\delta = \frac{|w| - \varepsilon}{2}$$

[*2] その R は相対位相、relative topology という意味の R。

$\exists\delta \in \mathbb{R}^+\forall v \in U(w,\delta) \cap R$ に対し、定理 1.2.1 より $v \in \mathbb{C}$ で次のようになるので、

$$\begin{aligned}
v \in U(w,\delta) \cap R &\Leftrightarrow v \in R \wedge 0 \leq |v-w| < \delta = \frac{|w|-\varepsilon}{2} \\
&\Leftrightarrow v \in R \wedge -\frac{|w|-\varepsilon}{2} = -\delta < -|v-w| \\
&\quad \leq |v|-|w| \leq |v-w| < \delta = \frac{|w|-\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow v \in R \wedge -\frac{|w|-\varepsilon}{2} < |v|-|w| \\
&\Leftrightarrow v \in R \wedge \varepsilon < \frac{|w|+\varepsilon}{2} < |v| \\
&\Rightarrow v \in R \wedge \varepsilon < |v| \\
&\Leftrightarrow v \in U(\infty,\varepsilon) \cap R
\end{aligned}$$

$U(w,\delta) \cap R \subseteq U(\infty,\varepsilon) \cap R$ が成り立つ。$z = w = \infty$ のとき、$\delta = \varepsilon$ とすればよい。よって、$\forall z \in R\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\forall w \in U(z,\varepsilon) \cap R\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(w,\delta) \cap R \subseteq U(z,\varepsilon) \cap R$ が成り立つ。 □

定理 1.2.3. $\forall R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})\forall z,w \in R$ に対し、$z \neq w$ が成り立つなら、$\exists\delta,\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\delta) \cap U(w,\varepsilon) \cap R = \emptyset$ が成り立つ。

証明. $\forall R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})\forall z,w \in R$ に対し、$z \neq w$ が成り立つなら、$z,w \in \mathbb{C}$ のとき、$|w-z| \in \mathbb{R}^+$ が成り立つので、例えば、次のように正の実数たち δ、ε がおかれれば、

$$\delta = \varepsilon = \frac{1}{2}|w-z|$$

$\forall v \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$v \in U(z,\delta) \cap U(w,\varepsilon)$ が成り立つなら、三角不等式より次のようになる。

$$\begin{aligned}
v \in U(z,\delta) \cap U(w,\varepsilon) &\Leftrightarrow v \in U(z,\delta) \wedge v \in U(w,\varepsilon) \\
&\Leftrightarrow |v-z| < \delta = \frac{1}{2}|w-z| \wedge |v-w| < \varepsilon = \frac{1}{2}|w-z| \\
&\Rightarrow |v-z| + |v-w| < \delta + \varepsilon = |w-z| \\
&\Rightarrow |w-v+v-z| \leq |w-v| + |v-z| < |w-z| \\
&\Rightarrow |w-z| < |w-z| \\
&\Leftrightarrow \bot
\end{aligned}$$

したがって、$U(z,\delta) \cap U(w,\varepsilon) = \emptyset$ が成り立ち、よって、$U(z,\delta) \cap U(w,\varepsilon) \cap R = \emptyset$ が成り立つ。$z \in \mathbb{C}$ かつ $w = \infty$ のとき、例えば、次のように正の実数たち δ、ε がおかれれば、

$$\delta = 1, \quad \varepsilon = |z| + 1$$

$\forall w \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$w \in U(z,\delta) \cap U(\infty,\varepsilon)$ が成り立つなら、三角不等式より次のようになる。

$$\begin{aligned}
w \in U(z,\delta) \cap U(\infty,\varepsilon) &\Leftrightarrow w \in U(z,\delta) \wedge w \in U(\infty,\varepsilon) \\
&\Leftrightarrow |w-z| < \delta = 1 \wedge \varepsilon = |z| + 1 < |w| \\
&\Leftrightarrow -1 < -|w-z| \leq |w| - |z| \leq |w-z| < 1 \wedge 1 < |w| - |z| \\
&\Rightarrow 1 < |w| - |z| < 1 \\
&\Leftrightarrow \bot
\end{aligned}$$

したがって、$U(z,\delta) \cap U(\infty,\varepsilon) = \emptyset$ が成り立ち、よって、$U(z,\delta) \cap U(\infty,\varepsilon) \cap R = \emptyset$ が成り立つ。 □

1.2.3 有界

定義 1.2.7. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合たち A、R が与えられたとする。$\exists z \in \mathbb{C} \exists M \in \mathbb{R}^+$ に対し、$A \subseteq U(z, M) \cap R$ を満たすとき、その集合 A はその集合 R で有界であるという。

定理 1.2.4. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合たち A、R について、次のことは同値である。

- その集合 A はその集合 R で有界である。
- $\exists M \in \mathbb{R}^+$ に対し、$A \subseteq U(0, M) \cap R$ が成り立つ。
- $\exists M \in \mathbb{R}^+ \forall z \in A$ に対し、$z \in R$ かつ $|z| < M$ が成り立つ[*3]。

証明. $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 A について、その集合 A がその集合 R で有界であるなら、定義より $\exists z \in \mathbb{C} \exists M \in \mathbb{R}^+$ に対し、$A \subseteq U(z, M) \cap R$ が成り立つ。ここで、$\forall w \in A$ に対し、三角不等式より次のようになる。

$$\begin{aligned} w \in A &\Rightarrow w \in U(z, M) \cap R \\ &\Leftrightarrow |w| - |z| \leq |w - z| < M \wedge w \in R \\ &\Rightarrow |w| < M + |z| \wedge w \in R \\ &\Leftrightarrow w \in U(0, M + |z|) \cap R \end{aligned}$$

ここで、明らかに $M + |z| \in \mathbb{R}^+$ が成り立つので、よって、$\exists M \in \mathbb{R}^+$ に対し、$A \subseteq U(0, M) \cap R$ が成り立つ。逆は明らかである。

また、$\exists M \in \mathbb{R}^+$ に対し、$A \subseteq U(0, M) \cap R$ が成り立つならそのときに限り、$\forall z \in A \exists M \in \mathbb{R}^+$ に対し、$z \in U(0, M) \cap R$ が成り立つので、$z \in R$ かつ $|z - 0| = |z| < M$ が成り立つ。 □

1.2.4 開核

定義 1.2.8. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合たち A、R について、その集合 R の複素数 z のその集合 R における ε 近傍 $U(z, \varepsilon) \cap R$ がその集合 A の部分集合となるようなその ε 近傍 $U(z, \varepsilon) \cap R$ が存在するとき、即ち、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z, \varepsilon) \cap R \subseteq A$ が成り立つとき、その複素数 z をその集合 R におけるその集合 A の内点という。

定義 1.2.9. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 A のその集合 R における内点全体の集合をその集合 A の内部、開核などといい、$\mathrm{int}_R A$、特に、$R = \mathbb{C}$ のとき、単に $\mathrm{int} A$、A°、A^i などと書く。

定理 1.2.5. $\forall R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$ に対し、開核について次のことが成り立つ。

- $\mathrm{int}_R \emptyset = \emptyset$ が成り立つ。
- $\mathrm{int}_R R = R$ が成り立つ。
- $\forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、$\mathrm{int}_R A \subseteq A$ が成り立つ。
- $\forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、$\mathrm{int}_R \mathrm{int}_R A = \mathrm{int}_R A$ が成り立つ。
- $\forall A, B \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、$A \subseteq B$ が成り立つなら、$\mathrm{int}_R A \subseteq \mathrm{int}_R B$ が成り立つ。
- $\forall A, B \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、$\mathrm{int}_R (A \cap B) = \mathrm{int}_R A \cap \mathrm{int}_R B$ が成り立つ。

証明. $\forall R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$ に対し、開核について、$\forall A \in \mathfrak{P}(R) \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathrm{int}_R A$ が成り立つなら、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

[*3] $A \subseteq R$ なのでこれの否定が、$\forall M \in \mathbb{R}^+ \exists z \in A$ に対し、$z \in A$ かつ $M \leq |z|$ が成り立つことであることに注意されたい。

に対し、$z \in U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq A$ が成り立つので、$z \in A$ が成り立つ。よって、$\mathrm{int}_R A \subseteq A$ が得られる。

空集合の公理より $\mathrm{int}_R\emptyset \supseteq \emptyset$ が成り立つかつ、上の議論により $\mathrm{int}_R\emptyset \subseteq \emptyset$ が成り立つので、$\mathrm{int}_R\emptyset = \emptyset$ が成り立つ。

$\mathrm{int}_R R = R$ を示すとき、上の議論によりすでに $\mathrm{int}_R R \subseteq R$ が成り立つことが示されているので、$\mathrm{int}_R R \supseteq R$ を示せばよい。$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in R$ が成り立つなら、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なので、$U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq \hat{\mathbb{C}} \cap R = R$ が成り立つ。よって、$z \in \mathrm{int}_R R$ が得られたので、$\mathrm{int}_R R \supseteq R$ が成り立つ。

$\forall A, B \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、$A \subseteq B$ が成り立つとする。$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathrm{int}_R A$ が成り立つなら、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq A \subseteq B$ が成り立つので、$z \in \mathrm{int}_R B$ が成り立つ。よって、$\mathrm{int}_R A \subseteq \mathrm{int}_R B$ が得られる。

上の議論により、$\forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、$\mathrm{int}_R\mathrm{int}_R A \subseteq \mathrm{int}_R A$ が成り立つことが示されているので、$\mathrm{int}_R\mathrm{int}_R A \supseteq \mathrm{int}_R A$ が成り立つことが示されればよい。$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathrm{int}_R A$ が成り立つなら、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq A$ が成り立つので、上の議論により $\mathrm{int}_R(U(z,\varepsilon) \cap R) \subseteq \mathrm{int}_R A$ が成り立つ。そこで、$\forall w \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$w \in U(z,\varepsilon) \cap R$ が成り立つなら、定理 1.2.2 より $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(w,\delta) \cap R \subseteq U(z,\varepsilon) \cap R$ が成り立つので、$w \in \mathrm{int}_R(U(z,\varepsilon) \cap R)$ が成り立つ。したがって、$U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq \mathrm{int}_R(U(z,\varepsilon) \cap R) \subseteq \mathrm{int}_R A$ が成り立つので、$z \in \mathrm{int}_R\mathrm{int}_R A$ が得られ、よって、$\mathrm{int}_R\mathrm{int}_R A \supseteq \mathrm{int}_R A$ が成り立つ。

$\forall A, B \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、$\mathrm{int}_R(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}_R A$ かつ $\mathrm{int}_R(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}_R B$ が成り立つので、$\mathrm{int}_R(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}_R A \cap \mathrm{int}_R B$ が得られる。逆に、$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathrm{int}_R A \cap \mathrm{int}_R B$ が成り立つなら、$\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\delta) \cap R \subseteq A$ が成り立つかつ、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\delta) \cap R \subseteq B$ が成り立つ。そこで、定理 1.2.2 より $\exists r \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,r) \cap R \subseteq U(z,\delta) \cap U(z,\varepsilon) \cap R$ が成り立つので、次式が得られ、

$$U(z,r) \cap R \subseteq U(z,\delta) \cap U(z,\varepsilon) \cap R = (U(z,\delta) \cap R) \cap (U(z,\varepsilon) \cap R) \subseteq A \cap B$$

したがって、$z \in \mathrm{int}_R(A \cap B)$ が成り立つ。以上の議論により、$\mathrm{int}_R A \cap \mathrm{int}_R B \subseteq \mathrm{int}_R(A \cap B)$ が得られる。よって、$\mathrm{int}_R(A \cap B) = \mathrm{int}_R A \cap \mathrm{int}_R B$ が成り立つ。 □

1.2.5 閉包

定義 1.2.10. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合たち A、R が与えられたとき、その集合 R の複素数 z の任意の ε 近傍 $U(z,\varepsilon)$ とその集合 A との共通部分 $U(z,\varepsilon) \cap A$ が空集合 $\emptyset$ でないときの複素数 z、即ち、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ を満たすその複素数 z をその集合 A のその集合 R における触点、接触点などという。これはその集合 A に属する元であるかその集合 A に属さなくても限りなく近い複素数のようなものであると考えてもよい。

定義 1.2.11. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合たち A、R が与えられたとき、その集合 A の触点全体の集合、即ち、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ を満たすようなその複素平面 $\mathbb{C}$ 上の複素数 z 全体の集合をその集合 A のその集合 R における閉包、触集合などといい、$\mathrm{cl}_R A$ などと書く。$R = \hat{\mathbb{C}}$ のとき、単に $\mathrm{cl}A$、$\overline{A}$、A^a などと書く。

定義 1.2.12. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合たち A、R が与えられたとき、$\mathrm{cl}_R A = R$ が成り立つことをその集合 A はその集合 R で稠密であるといい、その性質を稠密性などという。

次の定理 1.2.7 を示すときの補題として次の定理たちが述べられよう。

定理 1.2.6. 2つの写像たち $a:\mathbb{N}\rightarrow\hat{\mathbb{C}}$、$n_\bullet:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N};k\mapsto n_k$ が与えられたとき、$\forall k\in\mathbb{N}$ に対し、$n_k<n_{k+1}$ が成り立つなら、$\forall n\in\mathbb{N}\exists k\in\mathbb{N}$ に対し、$n\leq n_k$ が成り立つ。

証明. 2つの写像たち $a:\mathbb{N}\rightarrow\hat{\mathbb{C}}$、$n_\bullet:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N};k\mapsto n_k$ が与えられたとき、$\forall k\in\mathbb{N}$ に対し、$n_k<n_{k+1}$ が成り立つかつ、$\exists N\in\mathbb{N}\forall k\in\mathbb{N}$ に対し、$n_k<N$ が成り立つと仮定すると、$\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\varLambda_N$ となるので、$\#\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}\leq\#\varLambda_N=N$ が成り立つ。一方で、その写像 $n_\bullet$ は単射なので、$\#\mathbb{N}=\aleph_0\leq\#\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ より $\aleph_0<N$ が得られることになるが、これは矛盾している。したがって、$\forall n\in\mathbb{N}\exists k\in\mathbb{N}$ に対し、$n\leq n_k$ が成り立つ。 □

定理 1.2.7. $\forall R\in\mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$ に対し、閉包について次のことが成り立つ。

- $\mathrm{cl}_R\emptyset=\emptyset$ が成り立つ。
- $\mathrm{cl}_RR=R$ が成り立つ。
- $\forall A\in\mathfrak{P}(R)$ に対し、$A\subseteq\mathrm{cl}_RA$ が成り立つ。
- $\forall A\in\mathfrak{P}(R)$ に対し、$\mathrm{cl}_R\mathrm{cl}_RA=\mathrm{cl}_RA$ が成り立つ。
- $\forall A,B\in\mathfrak{P}(R)$ に対し、$A\subseteq B$ が成り立つなら、$\mathrm{cl}_RA\subseteq\mathrm{cl}_RB$ が成り立つ。
- $\forall A,B\in\mathfrak{P}(R)$ に対し、$\mathrm{cl}_R(A\cup B)=\mathrm{cl}_RA\cup\mathrm{cl}_RB$ が成り立つ。

証明. $\forall R\in\mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$ に対し、閉包について、$\emptyset\neq\mathrm{cl}_R\emptyset$ が成り立つなら、$\exists z\in\hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z\in\mathrm{cl}_R\emptyset$ が成り立つことになるので、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon)\cap\emptyset=\emptyset\neq\emptyset$ が成り立つことになるが、これは矛盾している。よって、$\emptyset=\mathrm{cl}_R\emptyset$ が成り立つ。

$\forall A\in\mathfrak{P}(R)\forall z\in\hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z\in A$ が成り立つなら、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$z\in U(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つので、$z\in A$ かつ $z\in U(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つ。したがって、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon)\cap R\cap A=U(z,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ が成り立つので、$z\in\mathrm{cl}_RA$ が成り立つ。よって、$A\subseteq\mathrm{cl}_RA$ が得られる。

上の議論によりすでに、$\mathrm{cl}_RR\supseteq R$ が成り立つことが示されているので、$\mathrm{cl}_RR=R$ を示すのに $\mathrm{cl}_RR\subseteq R$ が成り立つことが示されればよい。$\exists z\in\hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z\in\mathrm{cl}_RR$ が成り立つかつ、$z\notin R$ が成り立つと仮定しよう。$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon)\cap R\neq\emptyset$ が成り立つので、$z\in\mathbb{C}$ のとき、定理 1.2.1 に注意すれば、次のように集合 D がおかれると、

$$D=\left\{d\in\mathbb{R}\middle|\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists w\in\mathbb{C}\left[w\in U(z,\varepsilon)\cap R\land d=|w-z|\right]\right\}$$

$\forall d\in D$ に対し、$0\leq d$ が成り立つ。そこで、$\exists d\in D$ に対し、$d=0$ が成り立つとすれば、$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists w\in U(z,\varepsilon)\cap R$ に対し、$d=|w-z|=0$ が成り立ち、したがって、$z=w$ が成り立つので、$z=w\in U(z,\varepsilon)\cap R\subseteq R$ が得られるが、これは $z\notin R$ が成り立つことに矛盾する。ゆえに、$\forall d\in D$ に対し、$d>0$ が成り立つ。したがって、その集合 D は下に有界であるので、下限性質よりその集合 D の下限 $\inf D$ が存在する。そこで、$\inf D=0$ が成り立つとすれば、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、その正の実数 ε はその集合 D の下界でないので、$\exists d\in D$ に対し、$0\leq d<\varepsilon$ が成り立つことになり、その正の実数 ε の任意性より $d=0$ が成り立つことになるが、これは上の議論の $\forall d\in D$ に対し、$0<d$ が成り立つことに矛盾する。したがって、$0<\inf D$ が成り立つ。これにより、正の実数 δ が次のようにおかれることができてそうすると、

$$\delta=\frac{\inf D}{2}$$

$\forall v\in\mathbb{C}$ に対し、$v\in U(z,\delta)\cap R$ が成り立つなら、次のようになるので、

$$v\in U(z,\delta)\cap R\Leftrightarrow v\in U(z,\delta)\cap R\land v\in U(z,\delta)$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |v-z| \in D \wedge |v-z| < \delta \\
&\Rightarrow \inf D < |v-z| \wedge |v-z| < \delta = \frac{\inf D}{2} < \inf D \\
&\Rightarrow \inf D < |v-z| \wedge |v-z| < \inf D \\
&\Leftrightarrow \perp
\end{aligned}
$$

$U(z,\delta) \cap R = \emptyset$ が成り立つ。しかしながら、これは $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap R \neq \emptyset$ が成り立つことに矛盾する。$z = \infty$ のとき、$R \subseteq \mathbb{C}$ が成り立つので、$w \in U(\infty,\varepsilon) \cap R$ なるその複素数 w が存在する。したがって、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
w \in U(\infty,\varepsilon) \cap R &\Leftrightarrow w \in U(\infty,\varepsilon) \wedge w \in R \\
&\Leftrightarrow 0 < \varepsilon < |w| \wedge w \in R \\
&\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{|w|} < \frac{1}{\varepsilon} \wedge w \in R
\end{aligned}
$$

そこで、その正の実数 ε の任意性より $\dfrac{1}{|w|} = 0$ が得られるが、これは矛盾している。よって、$\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$z \in \mathrm{cl}_R R$ が成り立つなら、$z \in R$ が成り立つので、$\mathrm{cl}_R R \subseteq R$ が成り立つ。

$\forall A, B \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、$A \subseteq B$ が成り立つとする。$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つなら、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ。そこで、$U(z,\varepsilon) \cap A \subseteq U(z,\varepsilon) \cap B$ が成り立つので、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ が成り立つことから、$z \in \mathrm{cl}_R B$ が成り立つ。よって、$\mathrm{cl}_R A \subseteq \mathrm{cl}_R B$ が得られる。

$\forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、上の議論により、$\mathrm{cl}_R A \subseteq \mathrm{cl}_R R = R$ が成り立つので、$\mathrm{cl}_R A \in \mathfrak{P}(R)$ が成り立つ。したがって、上の議論により、$\mathrm{cl}_R \mathrm{cl}_R A \supseteq \mathrm{cl}_R A$ が成り立つことになるので、あとは、$\mathrm{cl}_R \mathrm{cl}_R A \subseteq \mathrm{cl}_R A$ が成り立つことが示されればよい。$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathrm{cl}_R \mathrm{cl}_R A$ が成り立つなら、$z \in \mathbb{C}$ のとき、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap \mathrm{cl}_R A \neq \emptyset$ が成り立つので、定理 1.2.1 より $\exists w \in \mathbb{C}$ に対し、$w \in \mathrm{cl}_R A$ かつ $w \in U(z,\varepsilon)$ が成り立つ。このとき、$w \in \mathrm{cl}_R A$ より $U(w,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つので、$\exists v \in \mathbb{C}$ に対し、$v \in A$ かつ $v \in U(w,\varepsilon)$ が成り立つ。このとき、三角不等式より次のようになることから、

$$
\begin{aligned}
w \in U(z,\varepsilon) \wedge v \in U(w,\varepsilon) &\Leftrightarrow |w-z| < \varepsilon \wedge |v-w| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |v-z| \leq |w-z| + |v-w| < 2\varepsilon \\
&\Leftrightarrow v \in U(z,2\varepsilon)
\end{aligned}
$$

$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つので、$z \in \mathrm{cl}_R A$ が得られる。$z = \infty$ のとき、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\infty,\varepsilon) \cap \mathrm{cl}_R A \neq \emptyset$ が成り立つので、定理 1.2.1 より $\exists w \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$w \in \mathrm{cl}_R A$ かつ $w \in U(\infty,\varepsilon)$ が成り立つ。$w = \infty$ のとき、$\infty = w \in \mathrm{cl}_R A$ より $U(\infty,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つので、$\infty \in \mathrm{cl}_R A$ が得られる。$w \in \mathbb{C}$ のとき、次のように正の実数 δ がおかれれば、

$$
\delta = \frac{|w| - \varepsilon}{2}
$$

$w \in \mathrm{cl}_R A$ より $U(w,\delta) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つので、$\exists v \in \mathbb{C}$ に対し、$v \in A$ かつ $v \in U(w,\delta)$ が成り立つ。このとき、三角不等式より次のようになることから、

$$
\begin{aligned}
w \in U(\infty,\varepsilon) \wedge v \in U(w,\delta) &\Leftrightarrow 0 < \varepsilon < |w| \wedge \delta < |v-w| \\
&\Leftrightarrow 0 < \varepsilon < |w| \wedge -\frac{|w|-\varepsilon}{2} < -|v-w| \leq |v| - |w| \leq |v-w| < \frac{|w|-\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow 0 < \varepsilon < |w| \wedge \frac{|w|+\varepsilon}{2} < |v|
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow 0 < \varepsilon < \frac{|w| + \varepsilon}{2} < |v|$$
$$\Rightarrow 0 < \varepsilon < |v|$$

$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\infty, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つので、$\infty \in \mathrm{cl}_R A$ が得られる。以上より、$\mathrm{cl}_R\mathrm{cl}_R A \subseteq \mathrm{cl}_R A$ が成り立つ。よって、$\mathrm{cl}_R\mathrm{cl}_R A = \mathrm{cl}_R A$ が成り立つ。

$\forall A, B \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$ に対し、$\mathrm{cl}_R A \subseteq \mathrm{cl}_R(A \cup B)$ かつ $\mathrm{cl}_R B \subseteq \mathrm{cl}_R(A \cup B)$ が成り立つので、$\mathrm{cl}_R A \cup \mathrm{cl}_R B \subseteq \mathrm{cl}_R(A \cup B)$ が得られる。逆に、$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathrm{cl}_R(A \cup B)$ が成り立つなら、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ が成り立つ。$z \in \mathbb{C}$ のとき、$\forall m \in \mathbb{N}$ に対し、$U\left(z, \frac{1}{m}\right) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ が成り立つので、$\exists z_m \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z_m \in U\left(z, \frac{1}{m}\right) \cap (A \cup B)$ が成り立つ、即ち、$z_m \in A \cup B$ かつ $|z_m - z| < \frac{1}{m}$ が成り立つ。また、Archimedes の性質より $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists m \in \mathbb{N}$ に対し、$\frac{1}{m} < \varepsilon$ が成り立つ。さて、それらの集合たち A、B のうち一方は無限に多くの項々 z_m を含み両方とも含みうる場合はどちらでもとることにする。このような集合がその集合 A であるとき、元 z_m がその集合 A に属するようなその自然数 m が小さい順から k 番目であるとしその自然数 m を m_k とおくことにすれば、定理 1.2.6 より $\forall m \in \mathbb{N}\exists k \in \mathbb{N}$ に対し、$m \leq m_k$ が成り立つ。$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists m \in \mathbb{N}$ に対し、$\frac{1}{m} < \varepsilon$ が成り立つのであったから、$\exists k \in \mathbb{N}$ に対し、次式が成り立つ。

$$|z_{m_k} - z| < \frac{1}{m_k} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$$

したがって、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つので、$z \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つ。それらの集合たち A、B のうち一方は無限に多くの項々 z_m を含み両方とも含みうる場合はどちらでもとることにしたときの集合がその集合 B であるときも同様にして、$z \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つことが示される。$z = \infty$ のとき、$\forall m \in \mathbb{N}$ に対し、$U(\infty, m) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ が成り立つので、$\exists z_m \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z_m \in U(\infty, m) \cap (A \cup B)$ が成り立つ、即ち、$z_m \in A \cup B$ かつ $m < |z_m|$ が成り立つ。また、Archimedes の性質より $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists m \in \mathbb{N}$ に対し、$\varepsilon < m$ が成り立つ。さて、上と同様にそれらの集合たち A、B のうち一方は無限に多くの項々 z_m を含み両方とも含みうる場合はどちらでもとることにする。このような集合がその集合 A であるとき、元 z_m がその集合 A に属するようなその自然数 m が小さい順から k 番目であるとしその自然数 m を m_k とおくことにすれば、定理 1.2.6 より $\forall m \in \mathbb{N}\exists k \in \mathbb{N}$ に対し、$m \leq m_k$ が成り立つ。$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists m \in \mathbb{N}$ に対し、$\varepsilon < m$ が成り立つのであったから、$\exists k \in \mathbb{N}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\varepsilon < m \leq m_k < |z_{m_k}|$$

したがって、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\infty, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つので、$\infty \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つ。それらの集合たち A、B のうち一方は無限に多くの項々 z_m を含み両方とも含みうる場合はどちらでもとることにしたときの集合がその集合 B であるときも同様にして、$z \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つことが示される。以上の議論により、$z \in \mathrm{cl}_R A \cup \mathrm{cl}_R B$ が成り立つので、$\mathrm{cl}_R A \cup \mathrm{cl}_R B \subseteq \mathrm{cl}_R(A \cup B)$ が得られる。よって、$\mathrm{cl}_R(A \cup B) = \mathrm{cl}_R A \cup \mathrm{cl}_R B$ が成り立つ。 □

定理 1.2.8. 複素平面 $\mathbb{C}$ における閉包について次のことが成り立つ。

- $\mathrm{cl}\mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}}$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$\mathrm{cl}U(z, \varepsilon) = \overline{U}(z, \varepsilon)$ が成り立つ。

証明. $\mathbb{C} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ より $\mathrm{cl}\mathbb{C} \subseteq \mathrm{cl}\hat{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{C}}$ が成り立つので、あとは $\hat{\mathbb{C}} \subseteq \mathrm{cl}\mathbb{C}$ が成り立つことを示せばよい。$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathbb{C}$ が成り立つなら、定理 1.2.3 より $\mathbb{C} \subseteq \mathrm{cl}\mathbb{C}$ が成り立つので、$z \in \mathrm{cl}\mathbb{C}$ が成り立つ。$z = \infty$ が成

り立つなら、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$ に対し、任意の 0 でない複素数 w に対し、$\varepsilon < |w|$ のとき、$w \in U(\infty, \varepsilon) \cap \mathbb{C}$ が成り立つし、$|w| < \varepsilon$ のとき、次のように複素数 w' がおかれれば、

$$w' = \frac{\varepsilon + 1}{|w|} w$$

次のようになることから、

$$|w'| = \left| \frac{\varepsilon + 1}{|w|} w \right| = \frac{\varepsilon + 1}{|w|} |w| = \varepsilon + 1 > \varepsilon$$

$w \in U(\infty, \varepsilon) \cap \mathbb{C}$ が成り立つ。これにより、$U(\infty, \varepsilon) \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$ が成り立つので、$\infty \in \mathrm{cl}\mathbb{C}$ が成り立つ。以上の議論により、$\mathrm{cl}\mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}}$ が成り立つことが示された。

$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^{+} \exists z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$w \in \mathrm{cl}U(z, \varepsilon)$ かつ $w \notin \overline{U}(z, \varepsilon)$ が成り立つと仮定する。このとき、$\forall\delta \in \mathbb{R}^{+}$ に対し、$U(w, \delta) \cap U(z, \varepsilon) \neq \emptyset$ が成り立っており、$z \in \mathbb{C}$ のとき、$w = \infty$ が成り立ちえない。実際、正の実数 δ が次のように定義されれば、

$$\delta = |z| + \varepsilon$$

$\exists\delta \in \mathbb{R}^{+} \forall v \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、次のようになるので、

$$\begin{aligned}
v \in U(\infty, \delta) \cap U(z, \varepsilon) &\Leftrightarrow \delta = |z| + \varepsilon < |v| \wedge |v - z| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \delta = |z| + \varepsilon < |v| \wedge -\varepsilon < -|v - z| \leq |v| - |z| \leq |v - z| < \varepsilon \\
&\Rightarrow \delta = |z| + \varepsilon < |v| \wedge |z| - \varepsilon < |v| < |z| + \varepsilon \\
&\Rightarrow \delta = |z| + \varepsilon < |v| < |z| + \varepsilon \\
&\Rightarrow \bot
\end{aligned}$$

$\exists\delta \in \mathbb{R}^{+}$ に対し、$U(\infty, \delta) \cap U(z, \varepsilon) = \emptyset$ が得られ、$\infty \notin \mathrm{cl}U(z, \varepsilon)$ が成り立つがこれは矛盾している。ゆえに、$w \in \mathbb{C}$ が成り立つ。$w \notin \overline{U}(z, \varepsilon)$ より $\varepsilon < |w - z|$ が成り立つことに注意して次のように正の実数 δ がおかれれば、

$$\delta = |z - w| - \varepsilon$$

定理 1.2.1 より $\exists v \in \mathbb{C}$ に対し、$|v - w| < \delta$ かつ $|v - z| < \varepsilon$ が成り立つ。そこで、次のようになるので、

$$\begin{aligned}
|v - w| < \delta \wedge |v - z| < \varepsilon &\Leftrightarrow |v - w| < |z - w| - \varepsilon \wedge |v - z| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \varepsilon < |z - w| - |v - w| \leq |z - v| + |v - w| - |v - w| = |v - z| \wedge |v - z| < \varepsilon \\
&\Rightarrow \varepsilon < |v - z| < \varepsilon \Rightarrow \bot
\end{aligned}$$

$\exists\delta \in \mathbb{R}^{+}$ に対し、$U(w, \delta) \cap U(z, \varepsilon) = \emptyset$ が成り立つことになるが、これは $\forall\delta \in \mathbb{R}^{+}$ に対し、$U(w, \delta) \cap U(z, \varepsilon) \neq \emptyset$ が成り立つことに矛盾する。$z = \infty$ のとき、$w = \infty$ が成り立ちえない。実際、$w \notin \overline{U}(\infty, \varepsilon)$ より $|w| < \varepsilon$ が成り立つ。ゆえに、$w \in \mathbb{C}$ が成り立つ。$w \notin \overline{U}(z, \varepsilon)$ より $|w| < \varepsilon$ が成り立つことに注意して次のように正の実数 δ がおかれれば、

$$\delta = \varepsilon - |w|$$

定理 1.2.1 より $\exists v \in \mathbb{C}$ に対し、$|v - w| < \delta$ かつ $\varepsilon < |v|$ が成り立つ。そこで、次のようになるので、

$$|v - w| < \delta \wedge \varepsilon < |v| \Leftrightarrow |v - w| < \varepsilon - |w| \wedge \varepsilon < |v|$$

$$\Leftrightarrow |v| \leq |v-w| + |w| < \varepsilon \wedge \varepsilon < |v|$$
$$\Rightarrow |v| < \varepsilon < |v| \Rightarrow \bot$$

$\exists\delta \in \mathbb{R}^{+}$ に対し、$U(w,\delta) \cap U(\infty,\varepsilon) = \emptyset$ が成り立つことになるが、これは $\forall\delta \in \mathbb{R}^{+}$ に対し、$U(w,\delta) \cap U(\infty,\varepsilon) \neq \emptyset$ が成り立つことに矛盾する。以上の議論により、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\forall z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$w \in \mathrm{cl}U(z,\varepsilon)$ が成り立つなら、$w \in \overline{U}(z,\varepsilon)$ が成り立つ、即ち、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$\mathrm{cl}U(z,\varepsilon) \subseteq \overline{U}(z,\varepsilon)$ が成り立つ。逆に、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\forall z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$w \in \overline{U}(z,\varepsilon)$ が成り立つなら、$z \in \mathbb{C}$ のとき、$|w-z| \leq \varepsilon$ が成り立つので、$w \neq \infty$ が得られ、$z = w$ のときは明らかに、$\forall\delta \in \mathbb{R}^{+}$ に対し、次式が成り立つので、

$$z = w \in U(w,\delta) \cap U(z,\varepsilon) = U(z,\delta) \cap U(z,\varepsilon)$$

$w \in \mathrm{cl}U(z,\varepsilon)$ が成り立つ。$z \neq w$ のとき、$\forall\delta \in \mathbb{R}^{+}$ に対し、次のような複素数 v が考えられれば、

$$v = k\frac{z-w}{|z-w|} + w, \quad k = \frac{1}{2}\min\{\delta, |z-w|\}$$

次のようになるかつ、

$$\begin{aligned}|v-w| &= \left|k\frac{z-w}{|z-w|} + w - w\right| \\ &= \left|k\frac{z-w}{|z-w|}\right| \\ &= k \leq \frac{\delta}{2} < \delta\end{aligned}$$

次のようになることから、

$$\begin{aligned}{}^{t}(w-v)(v-z) &= {}^{t}\left(w - k\frac{z-w}{|z-w|} - w\right)\left(k\frac{z-w}{|z-w|} + w - z\right) \\ &= {}^{t}\left(-k\frac{z-w}{|z-w|}\right)\left((k-|z-w|)\frac{z-w}{|z-w|}\right) \\ &= -k(k-|z-w|)\frac{{}^{t}(z-w)(z-w)}{|z-w|^{2}} \\ &= -k(k-|z-w|) \\ &= k\,|k-|z-w|| \\ &= \left|-k\frac{z-w}{|z-w|}\right|\left|(k-|z-w|)\frac{z-w}{|z-w|}\right| \\ &= \left|w-k\frac{z-w}{|z-w|}-w\right|\left|k\frac{z-w}{|z-w|}+w-z\right| \\ &= |w-v|\,|v-z|\end{aligned}$$

次のようになるので、

$$\begin{aligned}|w-z|^{2} &= |w-v+v-z|^{2} \\ &= {}^{t}(w-v+v-z)(w-v+v-z) \\ &= \left({}^{t}(w-v) + {}^{t}(v-z)\right)((w-v)+(v-z)) \\ &= {}^{t}(w-v)(w-v) + {}^{t}(w-v)(v-z) + {}^{t}(v-z)(w-v) + {}^{t}(v-z)(v-z) \\ &= |w-v|^{2} + 2{}^{t}(w-v)(v-z) + |v-z|^{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |w-v|^2 + 2|w-v||v-z| + |v-z|^2 \\
&= (|w-v| + |v-z|)^2
\end{aligned}
$$

次のようになる。

$$
\begin{aligned}
|v-z| &= |w-v| + |v-z| - |w-v| \\
&= |w-z| - |w-v| \\
&= |w-z| - \left| w - k\frac{z-w}{|z-w|} - w \right| \\
&= |z-w| - \left| k\frac{z-w}{|z-w|} \right| \\
&= |z-w| - k < |z-w| \leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

以上の議論により、$\forall\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つので、

$$
v \in U(w,\delta) \cap U(z,\varepsilon)
$$

$w \in \mathrm{cl}U(z,\varepsilon)$ が成り立つ。$z = w = \infty$ のときは明らかに、$\forall\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つので、

$$
z = w = \infty \in U(w,\delta) \cap U(z,\varepsilon) = U(\infty,\delta) \cap U(\infty,\varepsilon)
$$

$w \in \mathrm{cl}U(\infty,\varepsilon)$ が成り立つ。$z = \infty$ かつ $w \in \mathbb{C}$ のとき、$w \in \overline{U}(\infty,\varepsilon)$ より $0 < \varepsilon \leq |w|$ が成り立つので、$w \neq 0$ が成り立つ。$\forall\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、次のような複素数 v が考えられれば、

$$
v = k\frac{w}{|w|}, \quad k = |w| + \frac{\delta}{2}
$$

次のようになるかつ、

$$
\begin{aligned}
|v-w| &= \left| k\frac{w}{|w|} - w \right| \\
&= \left| (k - |w|)\frac{w}{|w|} \right| \\
&= |k - |w|| \\
&= \left| |w| + \frac{\delta}{2} - |w| \right| \\
&= \frac{\delta}{2} < \delta
\end{aligned}
$$

次のようになるので、

$$
|v| = \left| k\frac{w}{|w|} \right| = |k| = |w| + \frac{\delta}{2} > |w| \geq \varepsilon
$$

$\forall\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つ。

$$
v \in U(w,\delta) \cap U(z,\varepsilon)
$$

よって、$w \in \mathrm{cl}U(z,\varepsilon)$ が成り立つ。以上の議論により、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\forall z,w \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$w \in \overline{U}(z,\varepsilon)$ が成り立つなら、$w \in \mathrm{cl}U(z,\varepsilon)$ が成り立つので、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$\overline{U}(z,\varepsilon) \subseteq \mathrm{cl}U(z,\varepsilon)$ が成り立つ。よって、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$\mathrm{cl}U(z,\varepsilon) = \overline{U}(z,\varepsilon)$ が成り立つ。

$\mathbb{C} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ より $\mathrm{cl}\mathbb{C} \subseteq \mathrm{cl}\hat{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{C}}$ が成り立つので、あとは $\hat{\mathbb{C}} \subseteq \mathrm{cl}\mathbb{C}$ が成り立つことを示せばよい。$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathbb{C}$ が成り立つなら、定理 1.2.7 より $\mathbb{C} \subseteq \mathrm{cl}\mathbb{C}$ が成り立つので、$z \in \mathrm{cl}\mathbb{C}$ が成り立つ。$z = \infty$ が成り立つなら、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、任意の 0 でない複素数 w に対し、$\varepsilon < |w|$ のとき、$w \in U(\infty, \varepsilon) \cap \mathbb{C}$ が成り立つし、$|w| < \varepsilon$ のとき、次のように複素数 w' がおかれれば、

$$w' = \frac{\varepsilon + 1}{|w|} w$$

次のようになることから、

$$|w'| = \left| \frac{\varepsilon + 1}{|w|} w \right| = \frac{\varepsilon + 1}{|w|} |w| = \varepsilon + 1 > \varepsilon$$

$w \in U(\infty, \varepsilon) \cap \mathbb{C}$ が成り立つ。これにより、$U(\infty, \varepsilon) \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$ が成り立つので、$\infty \in \mathrm{cl}\mathbb{C}$ が成り立つ。以上の議論により、$\mathrm{cl}\mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}}$ が成り立つことが示された。 □

1.2.6 開集合と閉集合

定義 1.2.13. $U \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合たち R、U を考え、$\forall z \in U$ に対し、その複素数 z のその集合 R における ε 近傍 $U(z, \varepsilon) \cap R$ が $U(z, \varepsilon) \cap R \subseteq U$ となるような正の実数 ε が存在するとき、その集合 U はその集合 R における開集合という。これは縁がないような集合であると考えてもよい。

定義 1.2.14. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合たち A、R とその集合 A のその集合 R における閉包 $\mathrm{cl}_R A$ が等しいとき、即ち、$A = \mathrm{cl}_R A$ を満たすとき、その集合 A はその集合 R における閉集合という。これはその集合 A に限りなく近い集合もその集合 A の部分集合としてくれるようなもので、その集合 A に限りなく近い集合がその集合 A の縁となりこの集合もその集合 A の一部であるから、縁をもっているようなものである。

定理 1.2.9. $\forall R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}}) \forall U \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、次のことが成り立つ。

- $U = \mathrm{int}_R U$ が成り立つならそのときに限り、その集合 U はその集合 R における開集合である。
- その集合 $R \setminus U$ がその集合 R における閉集合であるならそのときに限り、その集合 U はその集合 R における開集合である。
- $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$z \in U$ が成り立つなら、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z, \varepsilon) \cap R \subseteq U$ が成り立つならそのときに限り[*4]、その集合 U はその集合 R における開集合である。

証明. $\forall R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}}) \forall U \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、$U = \mathrm{int}_R U$ が成り立つなら、$\forall z \in U \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z, \varepsilon) \cap R \subseteq U$ が成り立つ。これにより、その集合 U はその集合 R における開集合である。逆に、その集合 U がその集合 R における開集合であるなら、$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in U$ が成り立つなら、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z, \varepsilon) \cap R \subseteq U$ が成り立つので、$U \subseteq \mathrm{int}_R U$ が成り立つ。また、$\mathrm{int}_R U \subseteq U$ が成り立つのであったので、$U = \mathrm{int}_R U$ が成り立つ。

その集合 $R \setminus U$ がその集合 R における閉集合であるならそのときに限り、$R \setminus U = \mathrm{cl}_R(R \setminus U)$ が成り立つので、次のようになる。

$$R \setminus U = \mathrm{cl}_R(R \setminus U) \Leftrightarrow \mathrm{cl}_R(R \setminus U) \subseteq R \setminus U$$

[*4] 論理式でいえば、"$\forall z \in \hat{\mathbb{C}} \left[z \in U \Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \left[U(z, \varepsilon) \subseteq U \right] \right] \Leftrightarrow$ その集合 U は開集合である" という主張。

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall z \in \hat{\mathbb{C}}\left[z \in \mathrm{cl}_R(R \setminus U) \Rightarrow z \in R \setminus U\right]\\
&\Leftrightarrow \forall z \in \hat{\mathbb{C}}\left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\left[U(z,\varepsilon) \cap R \setminus U \neq \emptyset\right] \Rightarrow z \in R \setminus U\right]\\
&\Leftrightarrow \forall z \in \hat{\mathbb{C}}\left[\neg z \in R \setminus U \Rightarrow \neg\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\left[U(z,\varepsilon) \cap R \setminus U \neq \emptyset\right]\right]\\
&\Leftrightarrow \forall z \in \hat{\mathbb{C}}\left[z \notin R \setminus U \Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+\left[U(z,\varepsilon) \cap R \setminus U = \emptyset\right]\right]\\
&\Leftrightarrow \forall z \in \hat{\mathbb{C}}\left[z \in U \Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+\left[U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq U\right]\right]\\
&\Leftrightarrow \forall z \in \hat{\mathbb{C}}\left[z \in U \Rightarrow z \in \mathrm{int}_R U\right]\\
&\Leftrightarrow U \subseteq \mathrm{int}_R U\\
&\Leftrightarrow U = \mathrm{int}_R U
\end{aligned}
$$

以上より、集合 $R \setminus U$ がその集合 R における閉集合であるならそのときに限り、その集合 U がその集合 R における開集合であることが示された。

$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in U$ が成り立つなら、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq U$ が成り立つならそのときに限り、その集合 U はその集合 R における開集合であるということは開集合の定義よりほとんど明らかである。 □

定義 1.2.15. $R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なるその集合 R における開集合全体の集合をその集合 R における開集合系、位相といい $\left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ などと、特に、$R = \mathbb{C}$ のとき、$\mathfrak{O}_{d_{E^2}}$ などと、$R \subseteq \mathbb{C}$ のとき、$\left(\mathfrak{O}_{d_{E^2}}\right)_R$ などと書くことにする。

定理 1.2.10. $R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なるその集合 R における開集合系 $\left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ について、次のことが成り立つ。

- $\emptyset, R \in \left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ が成り立つ。
- $\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、$U_\lambda \in \left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ が成り立つなら、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ が成り立つ。ただし、$\#\Lambda < \aleph_0$ とする、即ち、その集合 Λ が有限集合であるとする。
- $\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、$U_\lambda \in \left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ が成り立つなら、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ が成り立つ。

この定理より、ここで、定義された開集合はまさしく位相空間論での開集合のことを指すことになる。さらに、ここで定義された閉集合はこれの補集合が開集合であったので、位相空間論での閉集合とやはり一致することになる[*5]。

証明. $R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なるその集合 R における開集合系 $\left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ について、定理 1.2.2 と定理 1.2.5 より $R \in \left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ が成り立つ。また、定理 1.2.7 より $\mathrm{cl}_R R = R$ が成り立つので、その集合 R はその集合 R における閉集合でもあり定理 1.2.9 より $\emptyset \in \left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ が成り立つ。

$\#\Lambda < \aleph_0$ とし、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、$U_\lambda \in \left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ が成り立つなら、$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ に対し、$U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \emptyset$ が成り立つ場合、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda,} U_\lambda = \emptyset$ となるので、上記の議論より $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ が成り立つ。一方で、$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ に対し $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} \neq \emptyset$ が成り立つ場合、数学的帰納法により $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \neq \emptyset$ が成り立ち、$\forall z \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に対し、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、$z \in U_\lambda$ が成り立つことにより、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し、$U(z, \varepsilon_\lambda) \cap R \subseteq U_\lambda$ が成り立つような正の実数 ε_λ が存在するので、その集合 Λ が有限集合であることに注意して定理 1.2.2 より $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、

[*5] 歴史的にいえば、どうやらこの定理のほうが位相空間論のきっかけとなっているらしい。

$U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq \bigcap_{\lambda \in \varLambda,} U_{\lambda}$ が成り立ちその集合 $\bigcap_{\lambda \in \varLambda,} U_{\lambda}$ は開集合である。

$\forall \lambda \in \varLambda$ に対し、$U_{\lambda} \in \left(\mathfrak{O}^*_{d_{E^2}}\right)_R$ が成り立つなら、$\forall z \in \bigcup_{\lambda \in \varLambda,} U_{\lambda} \exists \lambda \in \varLambda$ に対し、$z \in U_{\lambda}$ が成り立つことになり、仮定より $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq U_{\lambda}$ が成り立つ。さらに、$\forall \lambda \in \varLambda$ に対し、$U_{\lambda} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \varLambda,} U_{\lambda}$ が成り立つので、$\forall z \in \bigcup_{\lambda \in \varLambda,} U_{\lambda} \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \lambda \in \varLambda$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq U_{\lambda} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \varLambda,} U_{\lambda}$ が成り立ち、特に、$\forall z \in \bigcup_{\lambda \in \varLambda,} U_{\lambda} \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq \bigcup_{\lambda \in \varLambda,} U_{\lambda}$ が成り立つ。よって、その集合 $\bigcup_{\lambda \in \varLambda,} U_{\lambda}$ は開集合である。 □

定理 1.2.11. $\forall R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$ に対し、次のことが成り立つ。

- $\forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、その集合 A が Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での開集合であるなら、その集合 A はその集合 R での開集合でもある。
- $\forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、その集合 A が Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での閉集合であるなら、その集合 A はその集合 R での閉集合でもある。
- $\forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、その集合 R が Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での開集合でその集合 A がその集合 R での開集合であるなら、その集合 A は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での開集合でもある。
- $\forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、その集合 R が Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での閉集合でその集合 A がその集合 R での閉集合であるなら、その集合 A は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での閉集合でもある。

証明. $\forall R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}}) \forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、その集合 A が Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での開集合であるなら、$\forall z \in A \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \subseteq A$ が成り立つ。そこで、$A \subseteq R$ より $U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq A \cap R = A$ が成り立つので、その集合 A はその集合 R での開集合でもある。

$\forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、その集合 A が Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での閉集合であるとき、$\forall z \in R$ に対し、$z \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つなら、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つので、$z \in \mathrm{cl}A$ が成り立つ。そこで、仮定より $\mathrm{cl}A = A$ が成り立つので、定理 1.2.7 より $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathrm{cl}A$ が成り立つなら、$z \in A$ が成り立つ。ゆえに、$\mathrm{cl}_R A \subseteq A$ が得られ、定理 1.2.7 より $\mathrm{cl}_R A = A$ が成り立つ。よって、その集合 A はその集合 R での閉集合でもある。

$\forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、その集合 R が Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での開集合でその集合 A がその集合 R での開集合であるなら、$\forall z \in A$ に対し、$z \in R$ が成り立つので、$\exists \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\delta) \subseteq R$ かつ $U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq A$ が成り立つ。そこで、定理 1.2.2 より $\exists r \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,r) \subseteq U(z,\delta) \cap U(z,\varepsilon)$ が成り立つので、次のようになる。

$$U(z,r) \subseteq U(z,\delta) \cap U(z,\varepsilon) \subseteq R \cap U(z,\varepsilon) \subseteq A$$

よって、その集合 A は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での開集合でもある。

$\forall A \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、その集合 R が Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での閉集合でその集合 A がその集合 R での閉集合であるとき、$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathrm{cl}A$ が成り立つなら、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ。このとき、仮定と定理 1.2.7 より $\mathrm{cl}A \subseteq \mathrm{cl}R = R$ が成り立つので、$z \in R$ も得られる。ゆえに、$z \in \mathrm{cl}_R A$ も成り立つので、定理 1.2.7 より $z \in A$ が得られる。以上の議論により、$\mathrm{cl}A \subseteq A$ が成り立つので、定理 1.2.7 よりよって、その集合 A は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での閉集合でもある。 □

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1985. 第 34 刷 p33-38 ISBN978-4-13-062005-5

1.3 複素数列

1.3.1 複素数列

定義 1.3.1. 集合 $\mathbb{N}$ から 1 つの集合 A への写像 a のことをその集合 A の元の無限列といい、自然数 n のその写像 a による像 $a(n)$ を a_n と、その写像 a を $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$、$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$、または単に (a_n) などと、その集合 A の元の無限列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の値域 $V\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ を $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$、$\{a_n\}$ などと書く。このような無限列全体の集合を $A^{\mathbb{N}}$ と書くことがある。

定義 1.3.2. 集合 $\varLambda_n$ から 1 つの集合 A への写像 a のことをその集合 A の元の長さ n の有限列といい、$i \in \varLambda_n$ なる自然数 i のその写像 a による像 $a(i)$ を a_i と、その写像 a を $a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n$、$(a_i)_{i\in\varLambda_n}$、$(a_i)_{1\leq i\leq n}$ などと、その集合 A の元の長さ n の有限列 $(a_i)_{i\in\varLambda_n}$ の値域 $V\left((a_i)_{i\in\varLambda_n}\right)$ を $\{a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n\}$、$\{a_i\}_{i\in\varLambda_n}$、$\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$ などと書く。

定義 1.3.3. 集合 A の元の無限列をその集合 A の元の列という。文献によっては、その集合 A の元の無限列と元の有限列を合わせてその集合 A の元の列という場合があることに注意されたい。元 a_n をこの元の列の第 n 項といい、特に集合 $\mathbb{N}$ の無限列を自然数列、 集合 $\mathbb{R}$ の無限列を実数列、 複素平面 $\mathbb{C}$、もしくは、Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の無限列を複素数列という。

1.3.2 複素数列の極限

定義 1.3.4. $R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$、$z \in R$ としてその集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$z_n \in U(z, \varepsilon) \cap R$ が成り立つとき、即ち、任意の正の実数 ε どのように与えられても、何らかしらで自然数 N が存在して、任意の自然数 n がその自然数 N より大きくなれば、第 n 項 z_n がその複素数 z の ε 近傍に入ることができるとき、その複素数 z にその集合 R の広い意味で収束するといい、逆に、どの複素数 z に収束しないとき、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はその集合 R で振動するという。

定義 1.3.5. $R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$、$z \in R \setminus \{\infty\}$ としてその集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$z_n \in U(z, \varepsilon) \cap R$ が成り立つとき、即ち、$z_n \in R$ かつ $|z_n - z| < \varepsilon$ が成り立つとき、その複素数 z にその集合 R で収束するといい、逆に、どの複素数 z に収束しないとき、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はその集合 R で発散するという。

定義 1.3.6. 上の式、またはこの式を用いた議論を複素数列の極限の ε-N 論法という。このことは次式のように表されその複素数 z はその複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の広い意味での極限値、極限などといい、特に、$z \in \mathbb{C}$ のとき、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限値、極限などという。

$$z_n \to z \ (n \to \infty), \quad z_n \to z \text{ as } n \to \infty$$

実はのちに述べるようにその複素数 z はただ 1 つのみ存在するので、その複素数 z は次のように書かれるときがある。

$$z = \lim_{\substack{n \to \infty \\ R}} z_n$$

また、$R=\mathbb{C}$ のときは単に次のように書かれる。

$$z=\lim_{n\to\infty} z_n$$

定理 1.3.1. $\forall R\in\mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})\forall z\in R$ に対し、その集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in U(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、その自然数 N と正の実数 ε によらない任意の正の実数 k を用いて $z_n\in U(z,k\varepsilon)\cap R$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in\overline{U}(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つ。

また、$R\in\mathfrak{P}(\mathbb{C})$ のとき、次のことも同値である。

- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in U(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、その自然数 N と正の実数 ε によらない任意の正の実数 k を用いて $\varepsilon<k$ かつ $N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in R$ かつ $|z_n-z|<\varepsilon$ が成り立つ。

また、次のことも同値である。

- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in U(\infty,\varepsilon)\cap R$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、その自然数 N と正の実数 ε によらない任意の正の実数 k を用いて $k<\varepsilon$ かつ $N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in R$ かつ $\varepsilon<|z_n|$ が成り立つ。

さらに、$\forall R\in\mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})\forall z,w\in R$ に対し、その集合 R の複素数列たち $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in U(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つかつ、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$w_n\in U(w,\varepsilon)\cap R$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in U(z,\varepsilon)\cap R$ かつ $w_n\in U(w,\varepsilon)\cap R$ が成り立つ。

証明. $\forall R\in\mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})\forall z\in R$ に対し、その集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in U(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つとき、その正の実数 ε の任意性より明らかに、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、その自然数 N と正の実数 ε によらない任意の正の実数 k を用いて $z_n\in U(z,k\varepsilon)\cap R$ が成り立つ。逆も同様である。

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in U(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つとき、明らかに $N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in\overline{U}(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つとしてもよい。逆は、$z\in\mathbb{C}$ のとき $\dfrac{\varepsilon}{2}$ で、$z=\infty$ のとき 2ε で考えればよい。

$R\in\mathfrak{P}(\mathbb{C})$ のとき、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in U(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つとき、明らかに、その自然数 N と正の実数 ε によらない任意の正の実数 k を用いて $\varepsilon<k$ かつ $N\leq n$ が成り立つなら、$z_n\in U(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つとしてもよい。逆では、$k\leq\varepsilon$ のとき正の実数 ε の代わりに $\varepsilon'<k$ なる正の実数 ε' で考えれば、$\varepsilon'<\varepsilon$ が成り立つことにより明らかである。

また、無限大においても同様である。

さらに、$\forall R\in\mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})\forall z,w\in R$ に対し、その集合 R の複素数列たち $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられ

たとき、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\exists n \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$z_n \in U(z,\varepsilon) \cap R$ が成り立つかつ、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\exists N \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$w_n \in U(w,\varepsilon) \cap R$ が成り立つとき、$N' = \max\{M,N\}$ とおかれれば、論理和の分配則により、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\exists N' \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N' \leq n$ が成り立つなら、$z_n \in U(z,\varepsilon) \cap R$ かつ $w_n \in U(w,\varepsilon) \cap R$ が成り立つ。逆は自明である。 □

定理 1.3.2. $R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$、$z \in R$ としてその集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のその集合 R の広い意味での極限値 z が存在すれば、これはただ 1 つである。

証明. $R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$、$z \in R$ としてその集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のその集合 R の広い意味での極限値が存在するとき、これらが 2 つの互いに異なる複素数々 z、w であったとする。このとき、定理 1.3.1 より $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\exists N \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|z_n - z| < \varepsilon$ かつ $|z_n - w| < \varepsilon$ が成り立つ。$|z - w| = 2\varepsilon$ とおくと、$|z - z_n| + |z_n - w| < 2\varepsilon$ が得られ、三角不等式より $0 < |z - w| \leq |z - z_n| + |z_n - w| < 2\varepsilon$ も得られる。ここで、仮定より $2\varepsilon = |z - w| \leq |z - z_n| + |z_n - w| < 2\varepsilon$ が得られるが、これは矛盾している。

その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の広い意味での極限値が存在するとき、これらが複素数 z と無限大 ∞ であったとする。このとき、定理 1.3.1 より $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\exists N \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|z_n - z| < \varepsilon$ かつ $2\varepsilon < |z_n|$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
|z_n - z| < \varepsilon \wedge 2\varepsilon < |z_n| &\Leftrightarrow |z_n| - |z| \leq |z_n - z| < \varepsilon \wedge -|z_n| < -2\varepsilon \\
&\Rightarrow |z_n| - |z| < \varepsilon \wedge -|z_n| < -2\varepsilon \\
&\Rightarrow -|z| < -\varepsilon \\
&\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{|z|} < \varepsilon \\
&\Rightarrow 0 < \frac{1}{|z|} = 0
\end{aligned}$$

これは矛盾している。

以上背理法により、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の広い意味での極限値 z が存在すれば、これはただ 1 つである。 □

定理 1.3.3. $R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$、$z \in R$ としてその集合 R の複素数列たち $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のその集合 R の広い意味での極限値 z が存在するかつ、次式が成り立つなら、

$$\#\{n \in \mathbb{N} | z_n \neq w_n\} < \aleph_0$$

その複素数列 $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ もその集合 R の広い意味での極限値 z をもつ。

この定理は有限個の項が異なる複素数列であっても、広い意味での極限値は一致するということを主張している。

証明. $R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$、$z \in R$ としてその集合 R の複素数列たち $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のその集合 R の広い意味での極限値 z が存在するかつ、次式が成り立つとする。

$$\#A < \aleph_0, \quad A = \{n \in \mathbb{N} | z_n \neq w_n\}$$

このとき、次のように自然数 M が定義されることができて、

$$M = \max A + 1$$

$\exists n \in \mathbb{N}$ に対し、$M \leq n$ が成り立つかつ、$z_n \neq w_n$ が成り立つと仮定すると、$m \in A$ が得られ、$\max A < \max A + 1 = M \leq n$ も得られるが、これは矛盾している。したがって、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$M \leq n$ が成り立つなら、$z_n = w_n$ が成り立つ。

そこで、仮定より $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$z_n \in U(z,\varepsilon) \cap R$ が成り立つので、次のように自然数 N' がおかれれば、

$$N' = \max\{M, N\}$$

$\exists N' \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N' \leq n$ が成り立つなら、$M \leq n$ も成り立つので、$z_n = w_n$ が得られるかつ、$N \leq n$ も成り立つので、$z_n \in U(z,\varepsilon) \cap R$ も成り立つ。したがって、$w_n \in U(z,\varepsilon) \cap R$ も得られる。よって、その複素数列 $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ もその集合 R の広い意味での極限値 z をもつ。 □

定理 1.3.4. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 A が与えられたとき、これのその集合 R における閉包 $\mathrm{cl}_R A$ について、$z \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つならそのときに限り、その複素数 z にその集合 R の広い意味で収束するその集合 A の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to A$ が存在する。

証明. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 A が与えられたとき、$z \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つならそのときに限り、$z \in R$ かつ、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ。$z \in \mathbb{C}$ のとき、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$U\left(z, \dfrac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$ が成り立ち、$\exists z_n \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z_n \in U\left(z, \dfrac{1}{n}\right) \cap A$ が成り立つ、即ち、$z_n \in A$ かつ $|z_n - z| < \dfrac{1}{n}$ が成り立つので、このようにしてその集合 A の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to A$ が定義されれば、Archimedes の性質より $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N}$ に対し、$\dfrac{1}{N} < \varepsilon$ が成り立つ。これにより、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、次式が成り立つ、

$$|z_n - z| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

即ち、$z_n \in U(z,\varepsilon)$ が成り立つ。$z = \infty$ のとき、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$U(\infty, n) \cap A \neq \emptyset$ が成り立ち、$\exists z_n \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z_n \in U(\infty, n) \cap A$ が成り立つ、即ち、$z_n \in A$ かつ $n < |z_n|$ が成り立つので、このようにしてその集合 A の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to A$ が定義されれば、Archimedes の性質より $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N}$ に対し、$\varepsilon < N$ が成り立つ。これにより、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、次式が成り立つ、

$$\varepsilon < N \leq n < |z_n|$$

即ち、$z_n \in U(z,\varepsilon)$ が成り立つ。もちろん、$z_n \in R$ なので、以上の議論により、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$z_n \in U(z,\varepsilon) \cap R$ が成り立つ。

逆に、その複素数 z にその集合 R の広い意味で収束するその集合 A の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to A$ が存在するなら、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$z_n \in U(z,\varepsilon) \cap R$ が成り立つので、特に、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\alpha,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ。よって、$z \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つ。

以上の議論により、示すべきことが示された。 □

定理 1.3.5. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 A が与えられたとき、この集合 A がその集合 R における閉集合であるならそのときに限り、その集合 A の任意の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、これが広い意味で収束するなら、その集合 R での広い意味での極限値はその集合 A に属する。

証明. $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 A が与えられたとき、この集合 A がその集合 R における閉集合であるならそのときに限り、$A = \mathrm{cl}_R A$ が成り立つ。そこで、その集合 A の任意の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、これが広い意

味で収束するなら、定理 1.3.4 よりその集合 R での広い意味での極限値 z について、$z \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つので、よって、その極限値 z はその集合 A に属する[*6]。

逆に、その集合 A の任意の複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、これが広い意味で収束するなら、その集合 R での広い意味での極限値がその集合 A に属するなら、$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$z \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つなら、定理 1.3.4 よりその複素数 z にその集合 R の広い意味で収束するその集合 A の複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow A$ が存在する。そこで、仮定より $z \in A$ が成り立つので、$\mathrm{cl}_R A \subseteq A$ が得られる。あとは定理 1.2.7 よりその集合 A がその集合 R における閉集合である。 □

1.3.3 複素数列の極限の収束

定理 1.3.6. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとき、その集合 R で複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が複素数 z に収束するならそのときに限り、$z_n \in R$ かつそれらの実数列たち $\left(\mathrm{Re} z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(\mathrm{Im} z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ がそれぞれそれらの実数たち $\mathrm{Re} z$, $\mathrm{Im} z$ に収束する。

証明. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとき、その集合 R で複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が複素数 z に収束するなら、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$z_n \in R$ かつ $\left| z_n - z \right| < \varepsilon$ が成り立つ。このとき, 次式が成り立つので、

$$\left| \mathrm{Re} z_n - \mathrm{Re} z \right|^2, \left| \mathrm{Im} z_n - \mathrm{Im} z \right|^2 \leq \left| \mathrm{Re} z_n - \mathrm{Re} z \right|^2 + \left| \mathrm{Im} z_n - \mathrm{Im} z \right|^2 = \left| z_n - z \right|^2 < \varepsilon^2$$

$\left| \mathrm{Re} z_n - \mathrm{Re} z \right|, \left| \mathrm{Im} z_n - \mathrm{Im} z \right| < \varepsilon$ が得られる。よって、$z_n \in R$ かつそれらの実数列たち $\left(\mathrm{Re} z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(\mathrm{Im} z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ がそれぞれそれらの実数たち $\mathrm{Re} z$, $\mathrm{Im} z$ に収束する。

逆に、$z_n \in R$ かつそれらの実数列たち $\left(\mathrm{Re} z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(\mathrm{Im} z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ がそれぞれそれらの実数たち $\mathrm{Re} z$, $\mathrm{Im} z$ に収束するとき、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N_{\mathrm{Re}} \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N_{\mathrm{Re}} \leq n$ が成り立つなら、$\left| \mathrm{Re} z_n - \mathrm{Re} z \right| < \varepsilon$ が成り立つかつ、$\exists N_{\mathrm{Im}} \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N_{\mathrm{Im}} \leq n$ が成り立つなら、$\left| \mathrm{Im} z_n - \mathrm{Im} z \right| < \varepsilon$ が成り立つ。そこで、次のようにおかれれば、

$$N = \max \left\{ N_{\mathrm{Re}}, N_{\mathrm{Im}} \right\}, \quad D_m = \max \left\{ \left| \mathrm{Re} z_n - \mathrm{Re} z \right|, \left| \mathrm{Im} z_n - \mathrm{Im} z \right| \right\}_{k \in \Lambda_n}$$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$D_m < \varepsilon$ が成り立つかつ、$\left| \mathrm{Re} z_n - \mathrm{Re} z \right|, \left| \mathrm{Im} z_n - \mathrm{Im} z \right| \leq D_m$ が成り立つので、次のようになる。

$$\left| z_n - z \right|^2 = \left| \mathrm{Re} z_n - \mathrm{Re} z \right|^2 + \left| \mathrm{Im} z_n - \mathrm{Im} z \right|^2 \leq 2 D_m^2 = 2 D_m^2 < n \varepsilon^2$$

したがって、$\left| z_n - z \right| < \sqrt{2} \varepsilon$ が得られる。よって、その集合 R で複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が複素数 z に収束する。 □

定義 1.3.7. Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の値域 $\left\{ z_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界であるとき、その複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は有界であるという。

定理 1.3.7. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとき、その集合 R で収束する複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である。

証明. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとする。複素平面 $\mathbb{C}$ の複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ がその集合 R で複素数 z に収束するとき、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$\left| z_n - z \right| < \varepsilon$ が成り立つので、次式

[*6] $p \Leftrightarrow \exists x \in X \left[q(x) \right] \Leftrightarrow \forall x \in X \left[p \Leftrightarrow q(x) \right]$ という式変形をしていることに注意した。

のようにおけば、

$$\begin{aligned}M&=\max\left\{a\in\mathbb{R}|\exists n\in\Lambda_{N-1}\left[a=|z_n|\right]\vee a=|z|+\varepsilon\right\}\\&=\max\left\{|z_1|,|z_2|,\cdots|z_{N-1}|,|z|+\varepsilon\right\}\end{aligned}$$

$m<N$ のとき、即ち、$n\leq N-1$ のとき、$|z_n|\leq M$ が成り立つし、$N\leq n$ のとき、$|z_n-z|<\varepsilon$ が成り立つので、三角不等式より $|z_n|<|z|+\varepsilon\leq M$ が成り立つ。以上の議論により、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$|z_n|\leq M$ が成り立つ。定理 1.2.4 よりよって、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。 □

定理 1.3.8. $R\subseteq\mathbb{C}$ なる集合 R が与えられ、2 つの任意の複素平面 $\mathbb{C}$ の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がそれぞれその集合 R の極限値 z、w に収束するとき、$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha z_n+\beta w_n\right)=\alpha z+\beta w$$

証明. $R\subseteq\mathbb{C}$ なる集合 R が与えられ、2 つの任意の複素平面 $\mathbb{C}$ の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がそれぞれその集合 R の極限値 z、w に収束するとき、$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対し、定理 1.3.1 より、$\forall\delta\in\mathbb{R}^+\exists n\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$M\leq n$ が成り立つなら、$|\alpha|\,|z_n-z|\leq|\alpha|\delta$ が成り立つかつ、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$、が成り立つなら、$|\beta|\,|w_n-w|\leq|\beta|\varepsilon$ が成り立つ。$N'=\max\left\{M,N\right\}$ とすれば、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N'\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N'\leq n$ が成り立つなら、次のようになるので、

$$\begin{aligned}\left|\left(\alpha z_n+\beta w_n\right)-\left(\alpha z+\beta w\right)\right|&=\left|\alpha\left(z_n-z\right)+\beta\left(w_n-w\right)\right|\\&\leq\left|\alpha\left(z_n-z\right)\right|+\left|\beta\left(w_n-w\right)\right|\\&=|\alpha|\,|z_n-z|+|\beta|\,|w_n-w|\\&\leq|\alpha|\varepsilon+|\beta|\varepsilon=\left(|\alpha|+|\beta|\right)\varepsilon\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N'\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N'\leq n$ が成り立つなら、$\left|\left(\alpha z_n+\beta w_n\right)-\left(\alpha z+\beta w\right)\right|\leq\varepsilon$ が成り立つ。よって、次式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha z_n+\beta w_n\right)=\alpha z+\beta w$$

□

定理 1.3.9. $R\subseteq\mathbb{C}$ なる集合 R が与えられ、2 つの任意の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がそれぞれその集合 R の極限値 z、w に収束するとき、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}z_nw_n&=zw\\\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n}&=\frac{z}{w}\ \text{if}\ w\neq0\end{aligned}$$

証明. $R\subseteq\mathbb{C}$ なる集合 R が与えられ、2 つの任意の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がそれぞれその集合 R の極限値 z、w に収束するとき、$\forall\delta\in\mathbb{R}^+\exists n\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$M\leq n$ が成り立つなら、$|z_n-z|<\delta$ が成り立つかつ、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$|w_n-w|<\varepsilon$ が成り立つ。$N'=\max\left\{M,N\right\}$ とすれば、したがって、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N'\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N'\leq n$ が成り立つなら、$|w|\,|z_n-z|\leq|w|\varepsilon$ かつ $|z_n|\,|w_n-w|\leq|z_n|\,\varepsilon$ が成り立つ。したがって、三角不等式より次のようになり

$$\begin{aligned}|z_nw_n-zw|&=|wz_n-zw+z_nw_n-wz_n|\\&=\left|w\left(z_n-z\right)+z_n\left(w_n-w\right)\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |w\left(z_n - z\right)| + |z_n\left(w_n - w\right)| \\
&\leq |w|\varepsilon + |z_n|\,\varepsilon
\end{aligned}
$$

定理 1.3.7 より $\exists M \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$|z_n| < M$ が成り立つので、$|z_n w_n - zw| \leq (|w| + M)\,\varepsilon$ が成り立つ。よって、次式が成り立つ。

$$
\lim_{n \to \infty} z_n w_n = zw
$$

また、$w \neq 0$ のとき、$\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$M \leq n$ が成り立つなら、$|z_n - z| < \delta$ が成り立つかつ、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|w_n - w| < \varepsilon$ が成り立つ。ここで、$\varepsilon = \dfrac{1}{2}|w|$ とおけば、$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
|w| - |w_n| \leq |w_n - w| < \frac{1}{2}|w| &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}|w| < |w_n| - |w| \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}|w| < |w_n|
\end{aligned}
$$

$w \neq 0$ よりしたがって、$0 < |w_n|$ が成り立つ。これにより、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|z_n - z| < \varepsilon$ かつ $|w_n - w| < \varepsilon$ が成り立つ。ここで、次式が成り立つことから、

$$
\frac{1}{2}|w|^2 < |w_n|\,|w|
$$

次のようになる。

$$
\begin{aligned}
|w_n - w| < \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{2\,|w_n - w|}{|w|^2} < \frac{2\varepsilon}{|w|^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{|w_n - w|}{|w_n|\,|w|} < \frac{|w_n - w|}{\frac{1}{2}|w|^2} < \frac{2\varepsilon}{|w|^2} \\
&\Rightarrow \frac{|w_n - w|}{|w_n|\,|w|} < \frac{2\varepsilon}{|w|^2}
\end{aligned}
$$

ここで、次式が成り立つことから、

$$
\frac{|w_n - w|}{|w_n|\,|w|} = \left|\frac{w_n - w}{w_n w}\right| = \left|\frac{1}{w} - \frac{1}{w_n}\right| = \left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{w}\right|
$$

次式が成り立つ。

$$
\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{w}\right| < \frac{2\varepsilon}{|w|^2}
$$

したがって、三角不等式より次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\begin{cases}
|z_n - z| < \varepsilon \\
\left|\dfrac{1}{w_n} - \dfrac{1}{w}\right| \leq \dfrac{2\varepsilon}{|w|^2}
\end{cases}
&\Leftrightarrow
\begin{cases}
\left|\dfrac{1}{w}\right| |z_n - z| < \left|\dfrac{1}{w}\right| \varepsilon \\
|z_n| \left|\dfrac{1}{w_n} - \dfrac{1}{w}\right| \leq |z_n|\,\dfrac{2\varepsilon}{|w|^2}
\end{cases} \\
&\Leftrightarrow
\begin{cases}
\left|\dfrac{z_n}{w} - \dfrac{z}{w}\right| < \left|\dfrac{1}{w}\right| \varepsilon \\
\left|\dfrac{z_n}{w_n} - \dfrac{z_n}{w}\right| \leq |z_n|\,\dfrac{2\varepsilon}{|w|^2}
\end{cases} \\
&\Rightarrow \left|\frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w}\right| \leq \left|\frac{z_n}{w_n} - \frac{z_n}{w}\right| + \left|\frac{z_n}{w} - \frac{z}{w}\right| \leq \frac{\varepsilon}{|w|} + \frac{2\,|z_n|\,\varepsilon}{|w|^2}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w}\right| \leq \frac{\varepsilon}{|w|} + \frac{2\,|z_n|\,\varepsilon}{|w|^2}$$

定理 1.3.7 より $\exists M \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$|z_n| < M$ が成り立つので、

$$\left|\frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w}\right| \leq \frac{\varepsilon}{|w|} + \frac{2\,|z_n|\,\varepsilon}{|w|^2} < \frac{\varepsilon}{|w|} + \frac{2M\varepsilon}{|w|^2} = \frac{|w| + 2M}{|w|^2}\varepsilon$$

よって、次式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}$$

□

1.3.4 部分列

定義 1.3.8. 自然数列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$n_k < n_{k+1}$ が成り立つとき、このことをそれぞれ狭義単調増加するという。

定義 1.3.9. 集合 $\mathbb{N}$ の元の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が与えられ、これが狭義単調増加するとき、Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ からつくられたその複素数列 $(z_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ をその複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列という。その元の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は 1 つの写像 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; k \mapsto n_k$ でありその複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 1 つの写像 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; n \mapsto z_n$ であるので、その部分列 $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ はその合成写像 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \circ (n_k)_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; k \mapsto a_{n_k}$ である。

定理 1.3.10. 自然数列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が与えられ、これが狭義単調増加するとき、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$k \leq n_k$ が成り立つ。

証明. 集合 $\mathbb{N}$ の元の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が与えられ、これが狭義単調増加するとき、$k = 1$ のとき、集合 $\mathbb{N}$ の最小元が存在するので、明らかに $1 \leq n_1$ が成り立つ。$k = k'$ のとき $k' \leq n_{k'}$ が成り立つと仮定すると、$k = k' + 1$ のとき $k' + 1 \leq n_{k'} + 1$ が成り立ち、その元の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が狭義単調増加し集合 $\mathbb{N}$ は継承的であるので、$n_{k'} \leq n_{k'} + 1 \leq n_{k'+1}$ が成り立ち、したがって、$k' + 1 \leq n_{k'+1}$ が成り立つので、数学的帰納法によって $\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$k \leq n_k$ が成り立つ。 □

定理 1.3.11. $R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 R が与えられたとする。その集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 R で広い意味で複素数 z に収束するとき、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列もその集合 R で広い意味でその複素数 z に収束する。

これの逆は成り立たないことに注意されたい。

証明. $R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 R が与えられたとする。その集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 R で広い意味で複素数 z に収束するとき、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$z_n \in U(z, \varepsilon) \cap R$ が成り立つ。その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $(z_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ が与えられたらば、その元の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ について、定理 1.3.10 より $\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$k \leq n_k$ が成り立つので、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq k$ が成り立つなら、$N \leq k \leq n_k$ が成り立ち、したがって、$z_n \in U(z, \varepsilon) \cap R$ が成り立つ。よって、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列もその集合 R で広い意味でその複素数 z に収束する。 □

1.3.5 Cauchy 列

定義 1.3.10. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとき、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists N \in \mathbb{N}\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq m$ かつ $N \leq n$ が成り立つなら、$|z_m - z_n| < \varepsilon$ が成り立つようなその集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を Cauchy 列、基本列という。このことを $\lim_{m,n\to\infty}(z_m - z_n) = 0$ とも書く。

定理 1.3.12. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとき、任意のその集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、これが Cauchy 列であるならそのときに限り、それらの実数列たち $(\mathrm{Re}z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(\mathrm{Im}z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である。

証明. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとき、任意のその集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、これが Cauchy 列であるなら、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists N \in \mathbb{N}\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq m$ かつ $N \leq n$ が成り立つなら、$|z_m - z_n| < \varepsilon$ が成り立つ。そこで、次式が成り立つので、

$$|\mathrm{Re}z_m - \mathrm{Re}z_n|^2, |\mathrm{Im}z_m - \mathrm{Im}z_n|^2 \leq |\mathrm{Re}z_m - \mathrm{Re}z_n|^2 + |\mathrm{Im}z_m - \mathrm{Im}z_n|^2 = |z_m - z_n|^2 < \varepsilon^2$$

$|a_{l,k} - a_{m,k}| < \varepsilon$ が得られる。よって、それらの実数列たち $(\mathrm{Re}z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(\mathrm{Im}z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である。

逆に、それらの実数列たち $(\mathrm{Re}z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(\mathrm{Im}z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列であるとき、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists N_{\mathrm{Re}} \in \mathbb{N}\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対し、$N_{\mathrm{Re}} \leq m, n$ が成り立つなら、$|\mathrm{Re}z_m - \mathrm{Re}z_n| < \varepsilon$ が成り立つかつ、$\exists N_{\mathrm{Im}} \in \mathbb{N}\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対し、$N_{\mathrm{Im}} \leq m, n$ が成り立つなら、$|\mathrm{Im}z_m - \mathrm{Im}z_n| < \varepsilon$ が成り立つ。そこで、次のようにおかれれば、

$$N = \max\{N_{\mathrm{Re}}, N_{\mathrm{Im}}\}, \quad D_{m,n} = \max\{|\mathrm{Re}z_m - \mathrm{Re}z_n|, |\mathrm{Im}z_m - \mathrm{Im}z_n|\}$$

$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists N \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ かつ $N \leq n$ が成り立つなら、$D_{m,n} < \varepsilon$ が成り立つかつ、$|\mathrm{Re}z_m - \mathrm{Re}z_n|, |\mathrm{Im}z_m - \mathrm{Im}z_n| \leq D_{m,n}$ が成り立つので、次のようになる。

$$|z_m - z_n|^2 = |\mathrm{Re}z_m - \mathrm{Re}z_n|^2 + |\mathrm{Im}z_m - \mathrm{Im}z_n|^2 \leq 2D_{m,n}^2 < n\varepsilon^2$$

したがって、$|z_m - z_n| < \sqrt{2}\varepsilon$ が得られる。よって、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。 □

定理 1.3.13. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとき、任意のその集合 R の Cauchy 列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。

証明. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R の任意の Cauchy 列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists N \in \mathbb{N}\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq m$ かつ $N \leq n$ が成り立つなら、$|z_m - z_n| < \varepsilon$ が成り立つ。特に、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists N \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|z_n - z_N| < \varepsilon$ が成り立つので、次式が成り立ち、

$$-\varepsilon < -|z_n - z_N| \leq |z_n| - |z_N| \leq |z_n - z_N| < \varepsilon$$

したがって、$|z_n| < |z_N| + \varepsilon$ が成り立つ。ここで、正の実数 M が次のようにおかれれば、

$$\begin{aligned} M &= \max\left\{a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \middle| \exists m \in \varLambda_{N-1}\left[a = |z_n|\right] \vee a = |z_N| + \varepsilon\right\} \\ &= \max\{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_{N-1}|, |z_N| + \varepsilon\} \end{aligned}$$

$m < N$ のとき、即ち、$m \leq N - 1$ のとき、$|z_n| \leq M$ が成り立つし、$N \leq n$ かつ $z_n = 0$ のとき、$|z_n| = 0 < \varepsilon \leq |z_N| + \varepsilon \leq M$ が成り立ち、$N \leq n$ かつ $z_n \neq 0$ のとき、$|z_n| < |z_N| + \varepsilon \leq M$ が成り立つ。以上より、$\forall n \in \mathbb{N}\exists M \in \mathbb{R}^+$ に対し、$|z_n| \leq M$ が成り立つので、定理 1.2.4 よりその Cauchy 列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。 □

定理 1.3.14. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとき、任意のその集合 R の Cauchy 列 $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、これの任意の部分列 $\left(z_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ も Cauchy 列である。

証明. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R の任意の Cauchy 列 $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、これの任意の部分列 $\left(z_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ について、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall k, l \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq k$ かつ $N \leq l$ が成り立つなら、定理 1.3.10 より $k \leq n_k$ かつ $l \leq n_l$ が成り立つので、仮定より $\left|z_{n_k} - z_{n_l}\right| < \varepsilon$ が成り立つ。よって、その部分列 $\left(z_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ も Cauchy 列である。 □

定理 1.3.15. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとき、任意のその集合 R の Cauchy 列 $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、これのある部分列 $\left(z_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ がその集合 R である点 z に収束するなら、その複素数列 $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ もその集合 R でその点 z に収束する。

証明. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R の任意の Cauchy 列 $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、これのある部分列 $\left(z_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ がその集合 R である点 z に収束するとする。このとき、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists M \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}$ に対し、$M \leq m$ かつ $M \leq n$ が成り立つなら、$\left|z_m - z_n\right| < \varepsilon$ が成り立つかつ、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq k$ が成り立つなら、$\left|z_{n_k} - z\right| < \varepsilon$ が成り立つ。そこで、次のように自然数 N' がおかれれば、

$$N' = \max\{M, N\}$$

$\exists N' \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$N' \leq k$ が成り立つなら、定理 1.3.10 より $k \leq n_k$ が成り立つので、$N' \leq k \leq n_k$ が成り立つことになる。三角不等式よりしたがって次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \left|z_k - z_{n_k}\right| < \varepsilon \\ \left|z_{n_k} - z\right| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \left|z_k - z_{n_k}\right| + \left|z_{n_k} - z\right| < 2\varepsilon \\
&\Leftrightarrow \left|\left(z_k - z_{n_k}\right) + \left(z_{n_k} - z\right)\right| \leq \left|z_k - z_{n_k}\right| + \left|z_{n_k} - z\right| < 2\varepsilon \\
&\Rightarrow \left|z_k - z\right| < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

これが成り立つならそのときに限り、その複素数列 $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ もその集合 R でその点 z に収束する。 □

定理 1.3.16. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとき、任意のその集合 R の複素数列 $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、これが複素平面 $\mathbb{C}$ で点 z に収束するなら、その複素数列 $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。

証明. $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R の任意の複素数列 $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、これが複素平面 $\mathbb{C}$ で点 z に収束するなら、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$\left|z_n - z\right| < \varepsilon$ が成り立つ。そこで、$\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq m$ かつ $N \leq n$ が成り立つなら、$\left|z_m - z\right| < \varepsilon$ かつ $\left|z_n - z\right| < \varepsilon$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\left|z_m - z_n\right| &= \left|\left(z_m - z\right) + \left(z - z_n\right)\right| \\
&\leq \left|z_m - z\right| + \left|z - z_n\right| \\
&= \left|z_m - z\right| + \left|z_n - z\right| < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

よって、その複素数列 $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。 □

1.3.6 Bolzano-Weierstrass の定理

有界な実数列について、次の定理が成り立つことが知られている。この証明は長いかつ実数論の議論を要し本筋からかなりそれるので、ここでは plot のみ述べることにしこれ以上詳しくは述べないことにする。詳し

くは解析学の書籍などに参照されたい。

定理 1.3.17 (Bolzano-Weierstrass の定理)**.** 任意の有界な実数列 $\left(a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は集合 $\mathbb{R}$ で収束する部分列をもつ。この定理を Bolzano-Weierstrass の定理、点列 compact 性定理などという。

この定理の証明の plot は次のようになる。

1. 有界閉区間全体の集合の元の列 $\left(\left[b_{n},c_{n} \right] \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が、有界閉区間 $\left[b_{n + 1},c_{n + 1} \right]$ が 2 つの有界閉区間たち $\left[b_{n},\dfrac{b_{n} + c_{n}}{2} \right]$、$\left[\dfrac{b_{n} + c_{n}}{2},c_{n} \right]$ のうち a_{n} の項が無限個入っている方とされるように、帰納的に定義される。
2. $0 \leq c_{n} - b_{n} = \dfrac{1}{2^{n - 1}}\left(c_{1} - b_{1} \right)$ が成り立つ。
3. $\lim_{n \rightarrow \infty}\left(c_{n} - b_{n} \right) = 0$ が ε-N 論法より成り立つ。
4. 区間縮小法によって、$\lim_{n \rightarrow \infty}b_{n} = \lim_{n \rightarrow \infty}c_{n} = a$ なる実数 a が存在する。
5. 次のように集合 A_{k} がおかれ
$$A_{k} = \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| a_{m} \in \left[b_{k},c_{k} \right] \right\}$$
集合 $\mathbb{N}$ の元の列 $\left(n_{k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ が $n_{k} < n_{k + 1}$ かつ $n_{k} = \min A_{k}$ を満たすように定義される。
6. 4. と不等式 $b_{k} \leq a_{n_{k}} \leq c_{k}$ が成り立つこととはさみうちの原理より、$\lim_{k \rightarrow \infty}a_{n_{k}} = a$ が成り立つ。

定理 1.3.18 (Bolzano-Weierstrass の定理の拡張)**.** 任意の有界な複素平面 $\mathbb{C}$ の複素数列 $\left(z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は複素平面 $\mathbb{C}$ で収束する部分列をもつ。この定理を Bolzano-Weierstrass の定理の拡張、点列 compact 性定理の拡張など、あるいは単に、Bolzano-Weierstrass の定理、点列 compact 性定理などという。

証明. 任意の有界な複素平面 $\mathbb{C}$ の複素数列 $\left(z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ において、$\exists M \in \mathbb{R}^{+}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$\left| z_{n} \right| < M$ が成り立つので、次のようになることから、

$$\left| \mathrm{Re}z_{n} \right|^{2},\left| \mathrm{Im}z_{n} \right|^{2} \leq \left| \mathrm{Re}z_{n} \right|^{2} + \left| \mathrm{Im}z_{n} \right|^{2} = \left| z_{n} \right|^{2} < M^{2}$$

これらの実数列たち $\left(\mathrm{Re}z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\mathrm{Im}z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である。仮定よりその実数列 $\left(\mathrm{Re}z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ はその集合 $\mathbb{R}$ で収束する部分列 $\left(\mathrm{Re}z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \circ \left(n_{n'} \right)_{n' \in \mathbb{N}}$ をもち、その極限値を $\mathrm{Re}z$ とする。さらに、実数列 $\left(\mathrm{Im}z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \circ \left(n_{n'} \right)_{n' \in \mathbb{N}}$ はその実数列 $\left(\mathrm{Im}a_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列であることから有界であり、これが定理 1.3.17 よりその集合 $\mathbb{R}$ で収束する部分列 $\left(\mathrm{Im}z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \circ \left(n_{n'} \right)_{n' \in \mathbb{N}} \circ \left(n'_{n''} \right)_{n'' \in \mathbb{N}}$ をもち、その極限値を $\mathrm{Im}z$ とする。このとき、定理 1.3.11 よりその複素数列 $\left(\mathrm{Re}z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列 $\left(\mathrm{Re}z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \circ \left(n_{n'} \right)_{n' \in \mathbb{N}} \circ \left(n'_{n''} \right)_{n'' \in \mathbb{N}}$ もその点 $\mathrm{Re}z$ に収束するので、$z = \mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z$ とすれば、定理 1.3.6 よりその複素数列 $\left(z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列 $\left(z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \circ \left(n_{n'} \right)_{n' \in \mathbb{N}} \circ \left(n'_{n''} \right)_{n'' \in \mathbb{N}}$ も複素平面 $\mathbb{C}$ でその点 z に収束する。

以上より、数学的帰納法によって、有界な複素平面 $\mathbb{C}$ の複素数列 $\left(z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は複素平面 $\mathbb{C}$ で収束する部分列をもつことが示された。 □

定理 1.3.19. 任意の Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の複素数列 $\left(z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、広い意味で収束する部分列をもつ。

定義 1.3.11. 任意の Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の複素数列 $\left(z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、広い意味で収束する部分列 $\left(z_{n_{k}} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ をもつのであった。この極限 $\lim_{k \rightarrow \infty}z_{n_{k}}$ をその複素数列 $\left(z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の集積値という。

証明. 任意の Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の複素数列 $\left(z_{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、$z_{n} = \infty$ なる自然数 m が無限にあるとき、これ全体の集合を A とすれば、$A \subseteq \mathbb{N}$ より $A = \left\{ n_{k} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ とおくことができる。このようにして得られたその複

素数列 (z_n) の部分列 $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が考えられれば、もちろん、$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \infty$ が成り立つ。

$z_n = \infty$ なる自然数 n が有限のみしかないとき、そのような第 n 項を $v \in R$ なる複素数 v におきかえたもので考えても、定理 1.3.3 より一般性は失われない[*7]。ゆえに、以下、複素平面 $\mathbb{C}$ の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で考えることにする。

これが有界であるなら、Bolzano-Weierstrass の定理より収束する部分列をもつ。

有界でないなら、$\forall M \in \mathbb{R}^+\exists n \in \mathbb{N}$ に対し、$M \leq |z_n|$ が成り立つので、$n_1 = 1$ かつ、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、次のような自然数 n のうち 1 つを n_{k+1} とおくことにすると、

$$\max\left\{|z_n|\right\}_{n\in\Lambda_{n_k}} \leq |z_n|$$

このようにして得られるその集合 $\mathbb{N}$ の元の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は狭義単調増加している。実際、$\exists k \in \mathbb{N}$ に対し、$n_k \geq n_{k+1}$ が成り立つと仮定すると、$\exists n \in \Lambda_{n_k}$ に対し、$n_{k+1} = n$ が成り立つので、次式が得られるが、

$$\left|z_{n_{k+1}}\right| = |z_n| \leq \max\left\{|z_n|\right\}_{n\in\Lambda_{n_k}} \leq \left|z_{n_{k+1}}\right|$$

これは矛盾している。これにより、その複素数列 $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ はその複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列となっている。このとき、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$|z_{n_k}| \leq \left|z_{n_{k+1}}\right|$ が成り立つ。実際、$\exists k \in \mathbb{N}$ に対し、$|z_{n_k}| > \left|z_{n_{k+1}}\right|$ が成り立つと仮定すると、その集合 $\mathbb{N}$ の元の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ のおき方より次のようになるが、

$$\left|z_{n_{k+1}}\right| < |z_{n_k}| \leq \max\left\{|z_n|\right\}_{m\in\Lambda_{n_k}} \leq \left|z_{n_{k+1}}\right|$$

これは矛盾している。したがって、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、仮定より $\exists N \in \mathbb{N}$ に対し、$\varepsilon \leq |z_N|$ が成り立つので、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$N + 1 \leq k$ が成り立つなら、定理 1.3.10 より $N \leq n_N$ が成り立つかつ、その集合 $\mathbb{N}$ の元の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ のおき方より $|z_N| \leq \max\left\{|z_n|\right\}_{n\in\Lambda_{n_{k-1}}} \leq |z_{n_k}|$ が成り立つので、$\varepsilon \leq |z_{n_k}|$ が得られる。これにより、$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \infty$ が成り立つ。

よって、任意の Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、広い意味で収束する部分列をもつ。 □

1.3.7 Cauchy の収束条件

定理 1.3.20 (Cauchy の収束条件)**.** $R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 R が与えられたとき、任意のその集合 R の Cauchy 列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は複素平面 $\mathbb{C}$ で収束する。この定理を Cauchy の収束条件という。

ここで、注意点としては、Cauchy 列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 R で収束するとはいっていないことである。このことは $n = 1$、$R = \mathbb{Q}$ で考えればわかるのであろう。なお、その集合 R がどういう集合のときに Cauchy の収束条件が成り立つのかは一般にそこまでやさしくない問題のようである。詳しくは距離空間論の完備性のところを参照するといいかもしれない。この定理により、与えられた実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるか否かはその実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するか否かの極めて有効な判定するための条件といえる。実際、ある実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するか否かを判定するとき、ほとんどの場合は Cauchy の収束条件を用いるといってもよ

[*7] 定理 1.3.3 は次のことを主張する定理である。
$R \in \mathfrak{P}(\hat{\mathbb{C}})$、$z \in R$ としてその集合 R の複素数列たち $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のその集合 R の広い意味での極限値 z が存在するかつ、次式が成り立つなら、

$$\#\left\{n \in \mathbb{N} | z_n \neq w_m\right\} < \aleph_0$$

その複素数列 $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ もその集合 R の広い意味での極限値 z をもつ。

い。上に有界な単調増加の実数列か否かで判定する方が簡単であるが、与えられた実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加であることはそんなに多くない。さらに、定理 1.3.15 より任意のその集合 R の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、これが点 z に収束することとその複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であることとは同値であることもわかる。

証明. $R\subseteq\mathbb{C}$ なる集合 R の Cauchy 列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、定理 1.3.13 よりその複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界であり、Bolzano-Weierstrass の定理より、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列 $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ をもち、定理 1.3.14 よりその複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も複素平面 $\mathbb{C}$ で収束する。 □

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1985. 第 34 刷 p11-43,362-363 ISBN978-4-13-062005-5

[2] 原隆. "微分積分学 A". 九州大学. `https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/05/biseki4-050615.pdf` (2020-8-10 取得)

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p42-46,137-175,186-190,256-260 ISBN978-4-00-029871-1

[4] shakayami. "ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理". 数学についていろいろ解説するブログ. `https://shakayami-math.hatenablog.com/entry/2018/07/30/024710` (2020-8-9 閲覧)

1.4 compact

この周辺の議論のさらなる一般化については位相空間論に詳しいので、そちらのほうを参照されたい。ここでは主に、いわゆる複素平面 $\mathbb{C}$ というやや特殊化された条件下であるものの、2 次元 Euclid 空間としての複素平面 $\mathbb{C}$ 特有の性質について述べよう。なお、一般的な位相空間論の知識は仮定しないでおこう。

1.4.1 compact

定義 1.4.1. $K \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 K が与えられたとき、その集合 R の集合族 $\left\{U_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ が次式を満たすとき、その集合族 $\left\{U_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ はその集合 R におけるその集合 K の被覆であるという。

$$K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

全てのそれらの集合たち U_λ がその集合 R における開集合であるとき、その被覆 $\left\{U_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ を開被覆という。

定義 1.4.2. $K \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 R におけるその集合 K の任意の開被覆 $\left\{U_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し、有限集合 Λ' を用いた $\left\{U_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda' \subseteq \Lambda} \subseteq \left\{U_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ なる集合族 $\left\{U_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda' \subseteq \Lambda}$ が存在して、次式を満たすことができるとき、その集合 K はその集合 R で compact である、完閉であるという。

$$K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda' \subseteq \Lambda} U_\lambda$$

定理 1.4.1. $K \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 R がその集合 R 自身で compact でその集合 K がその集合 R での閉集合であるなら、その集合 K もその集合 R で compact である。

証明. $K \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 R が Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ で compact でその集合 K がその集合 R での閉集合であるなら、その集合 R におけるその集合 K の任意の開被覆 $\left\{U_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき、次のようになる。

$$R = K \sqcup (R \setminus K) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \cup (R \setminus K)$$

ここで、その集合 $R \setminus K$ は定理 1.2.9 よりその集合 R における開集合であるので、集合 $\left\{U_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{R \setminus K\}$ はその集合 R のその集合 R 自身での開被覆である。このとき、仮定より有限集合 Λ' を用いた集合族 $\left\{U_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda' \subseteq \Lambda} \cup \{R \setminus K\}$ が存在して、次式が成り立つ。

$$R = \bigcup \left(\left\{U_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda' \subseteq \Lambda} \cup \{R \setminus K\}\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda' \subseteq \Lambda} U_\lambda \cup (R \setminus K) = K \sqcup (R \setminus K)$$

これにより、$K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda' \subseteq \Lambda} U_\lambda$ が成り立つので、その集合 K もその集合 R で compact である。 □

定理 1.4.2. $K \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 K がその集合 R で compact であるなら、その集合 K はその集合 R で閉集合である。

この定理から、その集合 K がその集合 R で閉集合でなければ、その集合 K はその集合 R で compact になりえないということも分かる。

証明. $K \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 K がその集合 R で compact であるとき、$\forall z \in R \setminus K \forall w \in K$ に対し、$z \neq w$ が成り立つので、定理 1.2.3 より $\exists \delta_w, \varepsilon_w \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z, \delta_w) \cap U(w, \varepsilon_w) \cap R = \emptyset$ が成り立つ。このような ε_w 近傍 $U(w, \varepsilon_w) \cap R$ の開核について、$w \in \mathrm{int}_R (U(w, \varepsilon_w) \cap R)$ が成り立つので、その族 $\{\mathrm{int}_R (U(w, \varepsilon_w) \cap R)\}_{w \in K}$ はその集合 K のその集合 R での開被覆である。そこで、その集合 K がその集合 R で compact であるので、その集合 K の有限集合である部分集合 L が存在して、その族 $\{\mathrm{int}_R (U(w, \varepsilon_w) \cap R)\}_{w \in L}$ がその集合 K の開被覆であることができる。このとき、$\forall w \in L$ に対し、$z \in \mathrm{int}_R (U(z, \delta_w) \cap R)$ が成り立つので、$z \in \bigcap_{w \in L} \mathrm{int}_R (U(z, \delta_w) \cap R)$ が成り立つ。したがって、$\bigcap_{w \in L} \mathrm{int}_R (U(z, \delta_w) \cap R) \subseteq U(z, \delta_w) \cap R$ かつ $U(z, \delta_w) \cap U(w, \varepsilon_w) \cap R = \emptyset$ が成り立つので、定理 1.2.5 より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\emptyset &= \bigcup_{w \in L} (U(z, \delta_w) \cap U(w, \varepsilon_w) \cap R) \\
&\supseteq \bigcup_{w \in L} \mathrm{int}_R (U(z, \delta_w) \cap U(w, \varepsilon_w) \cap R) \\
&= \bigcup_{w \in L} (\mathrm{int}_R (U(z, \delta_w) \cap R) \cap \mathrm{int}_R (U(w, \varepsilon_w) \cap R)) \\
&\supseteq \bigcup_{w \in L} \left(\bigcap_{v \in L} \mathrm{int}_R (U(z, \delta_v) \cap R) \cap \mathrm{int}_R (U(w, \varepsilon_w) \cap R) \right) \\
&= \bigcup_{w \in L} \left(\mathrm{int}_R \bigcap_{v \in L} (U(z, \delta_v) \cap R) \cap \mathrm{int}_R (U(w, \varepsilon_w) \cap R) \right) \\
&= \mathrm{int}_R \bigcap_{v \in L} (U(z, \delta_v) \cap R) \cap \bigcup_{w \in L} \mathrm{int}_R (U(w, \varepsilon_w) \cap R) \\
&= \mathrm{int}_R \bigcap_{w \in L} (U(z, \delta_w) \cap R) \cap \bigcup_{w \in L} \mathrm{int}_R (U(w, \varepsilon_w) \cap R) \\
&\supseteq \mathrm{int}_R \bigcap_{w \in L} (U(z, \delta_w) \cap R) \cap K
\end{aligned}$$

これにより、その集合 $\mathrm{int}_R \bigcap_{w \in L} (U(z, \delta_w) \cap R) \cap K$ は空集合であるので、次のようになる。

$$\mathrm{int}_R \bigcap_{w \in L} (U(z, \delta_w) \cap R) \subseteq R \setminus K$$

したがって、定理 1.2.5 より次のようになるので、

$$z \in \mathrm{int}_R \bigcap_{w \in L} (U(z, \delta_w) \cap R) = \mathrm{int}_R \mathrm{int}_R \bigcap_{w \in L} (U(z, \delta_w) \cap R) \subseteq \mathrm{int}_R (R \setminus K)$$

その点 z はその集合 $R \setminus K$ の内点となっており、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z, \varepsilon) \cap R \subseteq R \setminus K$ が成り立つ。これにより、$R \setminus K = \mathrm{int}_R (R \setminus K)$ が得られ、定理 1.2.9 よりその集合 $R \setminus K$ はその集合 R における開集合となり、よって、その集合 K はその集合 R で閉集合となる。 □

1.4.2 点列 compact

定義 1.4.3. $K \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 K の任意の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、これのその集合 R で広い意味で収束する部分列 $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して、$\lim_{k \to \infty} z_{n_k} \in K$ が成り立つとき、その集合 K はその集合 R で点列

compact である、複素数列完閉であるという。

定理 1.4.3. $K \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 K がその集合 R で compact であるならそのときに限り、その集合 K はその集合 R で点列 compact である。

これは次のようにして示される。

1. まず、集合 K が compact であるなら、その集合 K は点列 compact であることを示そう。
2. その集合 K の任意の複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、次のように集合 $M(z,\varepsilon)$ がおかれると、
$$M(z,\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| z_n \in U(z,\varepsilon) \cap R \right\}$$
3. $\exists z \in K \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $M(z,\varepsilon)$ は無限集合となる。
4. $n \in M(z,1) \setminus \Lambda_1$ なる自然数 n を n_1 として、自然数 n_k が与えられたとき、$n \in M\left(z, \dfrac{1}{k+1} \right) \setminus \Lambda_{n_k}$ なる自然数 n を n_{k+1} とおくことにする。
5. 4. より、その複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列 $\left(z_{n_k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ が得られ、$\lim_{k \to \infty} z_{n_k} = z$ が成り立つ。
6. 1. 〜5. より集合 K が compact であるなら、その集合 K は点列 compact である。
7. 次に、集合 K が点列 compact であるなら、その集合 K は compact であることを背理法で示そう。
8. その集合 K が点列 compact であるかつ、その集合 K のある開被覆 $\left\{ U_\lambda \right\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して、その集合 Λ のどの有限集合な部分集合 Λ' に対してもその族 $\left\{ U_\lambda \right\}_{\lambda \in \Lambda'}$ がその集合 K の開被覆になりえないとする。
9. 次のように集合 $\mathfrak{L}$ がおかれると、
$$\mathfrak{L} = \left\{ \Lambda' \in \mathfrak{P}(\Lambda) \middle| K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda \right\}$$
その組 $(\mathfrak{L}, \supseteq)$ は帰納的な順序集合となっている。
10. Zorn の補題よりその順序集合 $(\mathfrak{L}, \supseteq)$ に極大元 Λ_n が存在する。
11. $\forall \lambda \in \Lambda_n \exists z_\lambda \in U_\lambda \forall \mu \in \Lambda_n \setminus \{\lambda\}$ に対し、$z_\lambda \notin U_\mu$ が成り立つ。
12. $\forall \mu \in \Lambda_n \setminus \{\lambda\}$ に対し、$z_\lambda \notin U_\mu$ が成り立つようなその集合 U_λ の元 z_λ 全体 V のうちその添数 λ に自然数を割り当てた元の列 $\left(z_{\lambda_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ を考える。
13. 仮定の 8. より広い意味で収束する部分列 $\left(z_{\lambda_{n_k}} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して、$\lim_{k \to \infty} z_{\lambda_{n_k}} = z \in K$ が成り立つ。
14. $\exists \lambda \in \Lambda_n \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq k$ が成り立つなら、$z_{\lambda_{n_k}} \in U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq U_\lambda$ が成り立つ。
15. 14. は 12. のその複素数列 $\left(z_{\lambda_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ のおき方に矛盾している。
16. 8. 〜15. よりその集合 K が点列 compact であるなら、その集合 K が compact である。

証明. $K \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 K がその集合 R で compact であるとする。その集合 K の任意の複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、次のように集合 $M(z,\varepsilon)$ がおかれると、
$$M(z,\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| z_n \in U(z,\varepsilon) \cap R \right\}$$
$\exists z \in K \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $M(z,\varepsilon)$ は無限集合となる。実際、$\forall z \in K \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $M(z,\varepsilon)$ が有限集合となるなら、その族 $\left\{ U(z,\varepsilon) \cap R \right\}_{z \in K}$ は明らかにその集合 K の開被覆であるので、仮定よりその集合 K の有限集合である部分集合 L が存在して、その族 $\left\{ U(z,\varepsilon) \cap R \right\}_{z \in L}$ がその集合

K の開被覆であることができる。このとき、$\forall n \in \mathbb{N}\exists z \in L$ に対し、$z_n \in U(z,\varepsilon) \cap R$ が成り立つので、$m \in M(z,\varepsilon)$ が得られる。したがって、$\mathbb{N} \subseteq M(z,\varepsilon)$ となりその集合 $M(z,\varepsilon)$ は無限集合となるが、これは仮定の、$\forall z \in K\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $M(z,\varepsilon)$ が有限集合となることに矛盾している。特に、$\exists z \in K\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、その集合 $M(z,\varepsilon) \setminus \varLambda_k$ は無限集合となる。そこで、$n \in M(z,1) \setminus \varLambda_1$ なる自然数 n を n_1 として、自然数 n_k が与えられたとき、$n \in M\left(z, \dfrac{1}{k+1}\right) \setminus \varLambda_{n_k}$ なる自然数 n を n_{k+1} とおくことにすると、これによって得られるその集合 $\mathbb{N}$ の元の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は狭義単調増加する。実際、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$n_{k+1} \in M\left(z, \dfrac{1}{k+1}\right) \setminus \varLambda_{n_k}$ より $n_k < n_{k+1}$ が成り立つ。これにより、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が得られる。このとき、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、Archimedes の性質より $\exists K \in \mathbb{N}$ に対し、$\dfrac{1}{K} < \varepsilon$ が成り立ち、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$K \leq k$ が成り立つなら、$n_K \leq n_k$ で次のようになる。

$$z_{n_k} \in U\left(z, \frac{1}{k}\right) \cap R \subseteq U\left(z, \frac{1}{K}\right) \cap R \subseteq U(z,\varepsilon) \cap R$$

これにより、$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$ が成り立つ。よって、その集合 K はその集合 R で点列 compact である。

逆に、その集合 K がその集合 R で点列 compact であるかつ、その集合 K のその集合 R でのある開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ が存在して、その集合 $\varLambda$ のどの有限集合な部分集合 $\varLambda'$ に対してもその族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda'}$ がその集合 K の開被覆になりえないとする。このとき、次のように集合 $\mathfrak{L}$ がおかれると、

$$\mathfrak{L} = \left\{\varLambda' \in \mathfrak{P}(\varLambda) \middle| K \subseteq \bigcup_{\lambda\in\varLambda'} U_\lambda\right\}$$

$\varLambda \in \mathfrak{L}$ よりその集合 $\mathfrak{L}$ は空集合でない。このとき、その組 $(\mathfrak{L}, \supseteq)$ は順序集合となっているのは明らかである。さらに、その順序集合 $(\mathfrak{L}, \supseteq)$ の部分順序集合で空集合でない全順序集合となっているもの $(\mathfrak{M}, \supseteq)$ が考えられれば、その集合 $\bigcap \mathfrak{M}$ がその集合 $\mathfrak{M}$ の上限となっている。さらに、$\forall M \in \mathfrak{M}$ に対し、$K \subseteq \bigcup_{\lambda\in M} U_\lambda$ が成り立つので、次のようになることから、

$$K \subseteq \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} \bigcup_{\lambda\in M} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\bigcap_{M\in\mathfrak{M}} M} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\bigcap\mathfrak{M}} U_\lambda$$

$\bigcap \mathfrak{M} \in \mathfrak{L}$ が得られる。これにより、その順序集合 $(\mathfrak{L}, \supseteq)$ は帰納的である。そこで、Zorn の補題よりその順序集合 $(\mathfrak{L}, \supseteq)$ に極大元 $\varLambda_n$ が存在する、即ち、$\exists\varLambda_n \in \mathfrak{L}\forall\varLambda' \in \mathfrak{L}$ に対し、$\varLambda_n \supset \varLambda'$ が成り立たない。このとき、$\forall\lambda \in \varLambda_n\exists z_\lambda \in U_\lambda\forall\mu \in \varLambda_n \setminus \{\lambda\}$ に対し、$z_\lambda \notin U_\mu$ が成り立つ。実際、$\exists\lambda \in \varLambda_n\forall z_\lambda \in U_\lambda\exists\mu \in \varLambda_n \setminus \{\lambda\}$ に対し、$z_\lambda \in U_\mu$ が成り立つと仮定すると、もちろん、$\varLambda_n \supset \varLambda_n \setminus \{\lambda\}$ が成り立つかつ、次のようになることから、

$$K \subseteq \bigcup_{\mu\in\varLambda_n} U_\mu = \bigcup_{\mu\in\varLambda_n\setminus\{\lambda\}} U_\mu \cup U_\lambda = \bigcup_{\mu\in\varLambda_n\setminus\{\lambda\}} U_\mu$$

$\varLambda_n \setminus \{\lambda\} \in \mathfrak{L}$ が得られるが、これはその集合 $\varLambda_n$ がその順序集合 $(\mathfrak{L}, \supseteq)$ に極大元であることに矛盾する。そこで、仮定よりその集合 $\varLambda_n$ は無限集合であるので、$\forall\mu \in \varLambda_n \setminus \{\lambda\}$ に対し、$z_\lambda \notin U_\mu$ が成り立つようなその集合 U_λ の元 z_λ 全体 V のうちその添数 λ に自然数を割り当てた元の列 $(z_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$、即ち、$\forall\kappa \in K$ に対し、$K \subseteq \bigcup_{N\in\mathbb{N}} U\left(\kappa, \dfrac{1}{N}\right) \cap R$ が成り立つことから単射な写像 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \varLambda_n$ が存在して、これと添数集合

Λ_n の任意の添数 λ のうち $\forall\mu \in \Lambda_n \setminus \{\lambda\}$ に対し、$z_\lambda \notin U_\mu$ が成り立つようなその集合 U_λ の元 z_λ をどれか 1 つ割り当てる写像 $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_n}$ を用いて次のような写像が考えられれば、

$$\left(z_{\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_n} \circ (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \Lambda_n & \longrightarrow & V \\ \cup & & \cup & & \cup \\ n & \longmapsto & \lambda_n & \longmapsto & z_{\lambda_n} \end{array}$$

その集合 K がその集合 R で点列 compact であるので、これのその集合 R で広い意味で収束する部分列 $\left(z_{\lambda_{n_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、$\lim_{k\to\infty} z_{\lambda_{n_k}} \in K$ が成り立つ。この広い意味での極限値 $\lim_{k\to\infty} z_{\lambda_{n_k}}$ が z とおかれれば、$\exists\lambda \in \Lambda_n$ に対し、$z \in U_\lambda$ が得られ、その集合 U_λ は開集合なので、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq U_\lambda$ が成り立つ。このとき、ε-N 論法に注意すれば、$\exists N \in \mathbb{N}\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq k$ が成り立つなら、$z_{\lambda_{n_k}} \in U(z,\varepsilon) \cap R \subseteq U_\lambda$ が成り立つ。しかしながら、$\exists\lambda \in \Lambda_n \setminus \{\lambda_{n_k}\}$ に対し、$z_{\lambda_{n_k}} \in U_\lambda$ が成り立つので、$z_{\lambda_{n_k}} \notin V$ が得られる。これはその複素数列 $\left(z_{\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ のおき方に矛盾している。よって、その集合 K がその集合 R で点列 compact であるなら、その集合 K のその集合 R での任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、その集合 Λ のある有限集合な部分集合 Λ' に対するその族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ が存在して、これがその集合 K の開被覆になる、即ち、その集合 K がその集合 R で compact である。 □

定理 1.4.4. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$、$z \in \hat{\mathbb{C}}$ なる集合たち $\hat{\mathbb{C}}$、$\overline{U}(z,\varepsilon)$ はいづれも Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ で compact でこれらの集合の任意の複素数列に対し、広い意味で収束する複素数列が存在してこれの広い意味での極限値がもとの集合に属する。

証明. 定理 1.3.19 より任意の Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、広い意味で収束する部分列をもつので、その Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ は点列 compact である。そこで、定理 1.4.3 より Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 自身で compact である。$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$、$z \in \hat{\mathbb{C}}$ なる集合たち $\hat{\mathbb{C}}$、$\overline{U}(z,\varepsilon)$ はいづれも Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ での閉集合であるから、定理 1.4.1 より $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$、$z \in \hat{\mathbb{C}}$ なる集合たち $\hat{\mathbb{C}}$、$\overline{U}(z,\varepsilon)$ はいづれも Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ で compact である。あとは定理 1.4.3 から従う。 □

1.4.3 全有界

定義 1.4.4. $K \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 K の任意の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、これのその集合 R で収束する部分列 $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在するとき、その集合 K はその集合 R で全有界であるという[*8]。

定理 1.4.5. $K \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 K が与えられたとき、その集合 K がその集合 R で全有界であるならそのときに限り、その集合 K は有界である。

なお、このことは $\Rightarrow$ の向きで有界でない集合 K を考え、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$m < |z_n|$ が成り立つようなその集合 K の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が定義されれば、$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ が成り立つことにより、$\Leftarrow$ の向きで Bolzano-Weierstrass の定理より示される。

証明. $K \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 K が与えられたとき、その集合 K が有界でないなら、$\exists M \in \mathbb{R}^+\forall z \in K$ に対し、$|z| \leq M$ が成り立たない、即ち、$\forall M \in \mathbb{R}^+\exists z \in K$ に対し、$M < |z|$ が成り立つので、$\forall n \in \mathbb{N}$ に

---

*8 次の定理 1.3.19 と比較されたい。
任意の Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、広い意味で収束する部分列をもつ。

対し、$n < |z_n|$ が成り立つようにしてその集合 K の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が定義されれば、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、Archimedes の性質より $\exists N \in \mathbb{N}$ に対し、$\varepsilon \leq N$ が成り立つので、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$\varepsilon \leq N \leq n \leq |z_n|$ が成り立つ。したがって、$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$ が成り立つので、定理 1.3.11 よりその複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の任意の部分列についても $\lim_{k \to \infty} z_{n_k} = \infty$ が成り立つ。よって、その集合 K は全有界でない。これより、その集合 K が全有界であるなら、その集合 K は有界である。

逆に、その集合 K が有界であるなら、その集合 K の任意の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の値域はその集合 K に含まれるので、その複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ も有界である。このとき、$K \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ が成り立つことに注意すれば、定理 1.3.18、即ち、Bolzano-Weierstrass の定理よりその複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する部分列 $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ をもつので、その集合 K は全有界である。 □

定理 1.4.6. $K \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 K が与えられたとき、その集合 K がその集合 R で有界な閉集合であるならそのときに限り、その集合 K はその集合 R で点列 compact である。

なお、このことは次の定理 1.3.5、定理 1.3.11、定理 1.4.1 に注意すれば示される。

- $A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 A が与えられたとき、この集合 A がその集合 R における閉集合であるならそのときに限り、その集合 A の任意の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、これが広い意味で収束するなら、その集合 R での広い意味での極限値はその集合 A に属する。
- $R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 R が与えられたとする。その集合 R の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ がその集合 R で広い意味で点 z に収束するとき、その複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の任意の部分列もその集合 R で広い意味でその点 z に収束する。
- $K \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 K が与えられたとき、その集合 K が全有界であるならそのときに限り、その集合 K は有界である。

証明. $K \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 K が与えられたとき、その集合 K がその集合 R で有界な閉集合であるなら、$R \subseteq \mathbb{C}$ に注意して定理 1.4.1 よりその集合 K は全有界である。また、その集合 K が閉集合であるので、定義より $\mathrm{cl}_R K = K$ が成り立ち、定理 1.3.5 より収束するその集合 K の任意の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、$\lim_{n \to \infty} z_n \in K$ が成り立つ。ゆえに、全有界な集合 K の任意の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束する部分列 $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ について、定理 1.3.11 より $\lim_{k \to \infty} (z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = \lim_{n \to \infty} z_n \in K$ が成り立つので、その集合 K はその集合 R で点列 compact である。

逆に、その集合 K がその集合 R で点列 compact であるなら、定義よりその集合 K は全有界であり定理 1.4.1 よりその集合 K は有界である。また、その集合 K のある複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して、$R \subseteq \mathbb{C}$ よりこれがその集合 R で収束するかつ、その集合 R での極限値がその集合 K に属さないとすれば、定理 1.3.11 よりこれの部分列 $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ はその集合 R で収束して $\lim_{k \to \infty} z_{n_k} = \lim_{n \to \infty} z_n \notin K$ が成り立つことになりこれはその集合 K がその集合 R で点列 compact であることに矛盾する。ゆえに、その集合 K の任意の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、これがその集合 R で収束するなら、その集合 R での極限値がその集合 K に属することになる。定理 1.3.5 よりしたがって、その集合 K は閉集合である。以上より、その集合 K は有界な閉集合であることが示された。 □

1.4.4 Heine-Borel の被覆定理

定理 1.4.7 (Heine-Borel の被覆定理)**.** $K \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 K がその集合 R で compact であるならそのときに限り、その集合 K はその集合 R で有界な閉集合である。この定理を Heine-Borel の被覆定理、Borel-Lebesgue の被覆定理という。

この定理では $R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ でなく $R \subseteq \mathbb{C}$ という仮定になっていることに注意されたい。定理 1.4.3、定理 1.4.5、定理 1.4.6 よりこの定理から $R \subseteq \mathbb{C}$ のとき、$\forall K \in \mathfrak{P}(R)$ に対し、次のことは同値であることも分かる。

- その集合 K がその集合 R で compact である。
- その集合 K がその集合 R で点列 compact である。
- その集合 K がその集合 R で有界な閉集合である。
- その集合 K がその集合 R で閉集合で、その集合 K の任意の複素数列 $\left(z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、これのその集合 R で収束する部分列 $\left(z_{n_k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ が存在する。

この定理の証明は面倒で実数論の議論を用いる必要があり本筋からそれるので、plot のみ述べることにし詳しくは述べないことにする。詳しい内容は参考文献に挙げられている解析学の書籍を参照されたい。その plot は次のようになる。

1. まず、集合 K が compact であるなら、その集合 K は有界であることを対偶律で示す。
2. $K \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 K がその集合 R で有界でないと仮定する。
3. $U_n = U(0,n) \cap R$ とおかれた集合 U_n を用いた集合族 $\left\{ U_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ はその集合 K のその集合 R における開被覆である。
4. 任意のその集合 $\mathbb{N}$ の有限な部分集合 A に対し、$N = \max A$ とおかれれば、$\bigcup_{n \in A} U_n = U_N$ が成り立つ。
5. 2. より $\exists \kappa \in K$ に対し、$N < |\kappa|$ が成り立ち 3. より $K \subseteq \bigcup_{n \in A} U_n$ が成り立たない。
6. 1. ~5. より集合 K が compact であるなら、その集合 K が有界である。
7. 次に、その集合 K が compact であるなら、その集合 K は閉集合であることを示す。
8. $\forall z \in R \setminus K \forall w \in K$ に対し、$z \neq w$ が成り立つので、次式で定義される 2 つの集合たち U_w、V_w が考えられる。
$$U_w = \left\{ \kappa \in R \middle| |\kappa - z| < \frac{1}{2} |z - w| \right\}, \quad V_w = \left\{ \kappa \in R \middle| |\kappa - w| < \frac{1}{2} |z - w| \right\}$$
9. 8. より $U_w \cap V_w = \emptyset$ が成り立つ。
10. $K \subseteq \bigcup_{w \in L} V_w$ なるその集合 K の有限な部分集合 L が存在して、$K \cap \bigcap_{w \in L} U_w \subseteq \emptyset$ が成り立つことを示すことよりその集合 $R \setminus K$ は開集合である。
11. 10. よりその集合 K は閉集合である。
12. 7. ~11. よりその集合 K が compact であるなら、その集合 K は閉集合であることがいえる。
13. 6. と 12. よりその集合 K が compact であるなら、その集合 K は有界な閉集合であることがいえる。
14. その集合 K が有界な閉集合であるなら、その集合 K は compact であることを背理法で示す。
15. その集合 K は有界であるから、$\exists z_1, w_1 \in \mathbb{C}$ に対し次式が成り立つ。
$$K \subseteq \left[\mathrm{Re} z_1, \mathrm{Re} w_1 \right] \times \left[\mathrm{Im} z_1, \mathrm{Im} w_1 \right] \cap R$$

16. その集合 $[\mathrm{Re}z_1, \mathrm{Re}w_1] \times [\mathrm{Im}z_1, \mathrm{Im}w_1]$ の区間 $[\mathrm{Re}z_1, \mathrm{Re}w_1]$ を 2 つの区間たち $\left[\mathrm{Re}z_1, \frac{1}{2}(\mathrm{Re}z_1 + \mathrm{Re}w_1)\right]$、$\left[\frac{1}{2}(\mathrm{Re}z_1 + \mathrm{Re}\right.$ に分割する。その区間 $[\mathrm{Im}z_1, \mathrm{Im}w_1]$ についても同様にする。
17. $K = [\mathrm{Re}z_1, \mathrm{Re}w_1] \times [\mathrm{Im}z_1, \mathrm{Im}w_1] \cap K$ が成り立つことに注意してその集合 $[\mathrm{Re}z_1, \mathrm{Re}w_1] \times [\mathrm{Im}z_1, \mathrm{Im}w_1]$ から 2^n 通りに分割されたそれらの区間たち I のうちある区間が存在して、これとその集合 K との共通部分 $K \cap I$ が、その集合 K のある開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき、その集合 Λ のどの有限な部分集合 Λ' に対しても $K \cap I \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$ が成り立たないことが背理法で示される。
18. 16. ～17. の議論を繰り返して $n \in \mathbb{N}$ なる集合 $[\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n] \times [\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n]$ が得られる。
19. 15. ～18. より次のことが分かる。
    - $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$[\mathrm{Re}z_{n+1}, \mathrm{Re}w_{n+1}] \times [\mathrm{Im}z_{n+1}, \mathrm{Im}w_{n+1}] \subseteq [\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n] \times [\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n]$ が成り立つ。
    - その集合 $[\mathrm{Re}z_{n+1}, \mathrm{Re}w_{n+1}] \times [\mathrm{Im}z_{n+1}, \mathrm{Im}w_{n+1}]$ のその区間 $[\mathrm{Re}z_{n+1}, \mathrm{Re}w_{n+1}]$ の長さ $|\mathrm{Re}w_{n+1} - \mathrm{Re}z_{n+1}|$ がその区間 $[\mathrm{Re}z_{n+1}, \mathrm{Re}w_{n+1}]$ に対応する区間 $[\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n]$ の長さ $|\mathrm{Re}w_n - \mathrm{Re}z_n|$ の $\frac{1}{2}$ 倍である。その区間 $[\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n]$ についても同様である。
    - その集合 $K \cap [\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n] \times [\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n]$ が K_n とおかれると、その集合 K のある開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき、その集合 Λ のどの有限な部分集合 Λ' に対しても $K \cap I \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$ が成り立たない。
20. その区間 $[\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n]$ は区間縮小法より $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n] = \{\mathrm{Re}\alpha\}$ なる実数 $\mathrm{Re}\alpha$ が存在する。その区間 $[\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n]$ についても同様である。
21. $v_n \in K \cap [\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n] \times [\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n]$ なる複素数列 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、$\lim_{n \to \infty} v_n = \alpha = \mathrm{Re}\alpha + i\mathrm{Im}\alpha$ が成り立つ。
22. その集合 K のその開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を用いて $z \in \mathrm{cl}_R K = K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が成り立つ。
23. $\exists \lambda \in \Lambda \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(z, \varepsilon) \subseteq U_\lambda$ が成り立つ。
24. $|\mathrm{Re}w_{n+1} - \mathrm{Re}z_{n+1}| = \frac{1}{2}|\mathrm{Re}w_n - \mathrm{Re}z_n|$ が成り立つことにより $\lim_{n \to \infty}(\mathrm{Re}z_n - \mathrm{Re}w_n) = 0$ が成り立つ。その区間 $[\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n]$ についても同様である。
25. 21. に注意すれば、$\forall v \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、$v \in [\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n] \times [\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n]$ が成り立つなら、$|\mathrm{Re}v - \mathrm{Re}\alpha| \leq |\mathrm{Re}z_n - \mathrm{Re}w_n|$ が成り立つ。その区間 $[\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n]$ についても同様である。
26. 24. より ε-N 論法に注意すれば、ある自然数 N があって任意の自然数 n に対し、$N \leq n$ なら次式が成り立つ。

$$[\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n] \times [\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n] \subseteq U(z, \varepsilon)$$

27. $K \cap [\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n] \times [\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n] \subseteq [\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n] \times [\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n]$ が成り立つことに注意すれば、23. と 26. を用いて $K \cap [\mathrm{Re}z_n, \mathrm{Re}w_n] \times [\mathrm{Im}z_n, \mathrm{Im}w_n] \subseteq U_\lambda$ が成り立つ。
28. 27. が 19. に矛盾している。
29. 14. ～28. より背理法によりその集合 K が有界な閉集合であるなら、その集合 K は compact であることがいえる。
30. 13. と 29. より Heine-Borel の被覆定理が成り立つ。

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1980. 第 34 刷 p64-73 ISBN978-4-13-062005-5

[2] 室田一雄. "基礎数理　室田 有界閉とコンパクト". 東京大学. http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~murota/lect-kisosuri/compactRn041202.pdf (2020-8-25 取得)

[3] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p90-94,108-111,186-190,208-223,258-268 ISBN978-4-00-029871-1

[4] 金子晃. "第 6 章 コンパクト性". アレクセイカーネンコ応用数理研究室. http://www.kanenko.com/~kanenko/KOUGI/Iso/resume4.pdf (2022-8-7 2:14 閲覧)

1.5 級数

1.5.1 級数

定義 1.5.1. 複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から新しい元の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を次式のように定義する。

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

この元の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をその複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数、複素数 z_n を第 n 項とする級数といい、その第 n 項 s_n は定義より明らかに複素数 $\displaystyle\sum_{k\in\varLambda_n} z_k$ に等しく、これをこの級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の第 n 部分和という。

定義 1.5.2. 複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限値 σ が存在すれば、この級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するといい、その極限値 σ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\varLambda_n} z_k$、$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z_k$、$\displaystyle\sum_{k} z_k$、$\sum z_n$、$z_1+z_2+\cdots$ などと書く。逆に、その級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束しないとき、この級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は発散するという。

定理 1.5.1. 級数 $\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が複素数 σ に収束するならそのときに限り、それらの級数たち $\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \mathrm{Re} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \mathrm{Im} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がそれぞれそれらの実数たち $\mathrm{Re}\sigma$、$\mathrm{Im}\sigma$ に収束する。

証明. 級数 $\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は複素数列たちでもあることから定理 1.3.6 より従う。 □

定理 1.5.2. 2 つの級数たち $\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} w_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がそれぞれ複素数々 σ、τ に収束するなら、$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対し、級数 $\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} (\alpha z_k+\beta w_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ も複素数 $\alpha\sigma+\beta\tau$ に収束する。

証明. 2 つの級数たち $\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} w_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は 2 つの複素数列たちでもあり総和も線形的であることから従う。 □

定理 1.5.3. 級数 $\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が複素数 σ に収束するなら、級数 $\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n}\sum_{l\in\varLambda_{n_k}\setminus\varLambda_{n_{k-1}}} z_l\right)_{n\in\mathbb{N}}$ も複素数 σ に収束する。ただし、その写像 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は狭義単調増加するその集合 $\mathbb{N}$ の元の列で $\varLambda_{n_0}=\emptyset$ とする[*9]。

証明. 級数 $\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は複素数列でもあり、$\varLambda_{n_0}=\emptyset$ なる狭義単調増加するその集合 $\mathbb{N}$ の元の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、級数 $\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n}\sum_{l\in\varLambda_{n_k}\setminus\varLambda_{n_{k-1}}} z_l\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がその級数 $\displaystyle\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列でもあることから

[*9] つまり、$z_1+z_2+\cdots=\sigma$ が成り立つなら、$(z_1+z_2+\cdots+z_{n_1})+(z_{n_1+1}+z_{n_1+2}+\cdots+z_{n_2})+\cdots=\sigma$ も成り立つ。

従う。 $\square$

1.5.2 級数に関する Cauchy の収束条件

定理 1.5.4 (級数に関する Cauchy の収束条件). 複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するならそのときに限り、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq m<n$ が成り立つなら、$\left|\sum_{k\in\Lambda_n\setminus\Lambda_m} z_k\right|<\varepsilon$ が成り立つ。この定理を級数に関する Cauchy の収束条件という。

証明. 複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するならそのときに限り、Cauchy の収束条件より $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq m,n$ が成り立つなら、$\left|\sum_{k\in\Lambda_n} z_k-\sum_{k\in\Lambda_m} z_k\right|<\varepsilon$ が成り立つ。ここで、$m<n$ が成り立つとしても一般性は失われず、次のようになる。

$$\left|\sum_{k\in\Lambda_n\setminus\Lambda_m} z_k\right|=\left|\sum_{k\in\Lambda_n} z_k-\sum_{k\in\Lambda_m} z_k\right|<\varepsilon$$

$\square$

定理 1.5.5. 級数に関する Cauchy の収束条件の系として、複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するなら、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束する。

証明. 級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するならそのときに限り、級数に関する Cauchy の収束条件より、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq m<n$ が成り立つなら、$\left|\sum_{k\in\Lambda_n\setminus\Lambda_m} z_k\right|<\varepsilon$ が成り立つ。特に、$n=m+1$ とすれば、次のようになる。

$$\left|\sum_{k\in\Lambda_{m+1}\setminus\Lambda_m} z_k\right|=|z_{m+1}|<\varepsilon$$

よって、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束する。 $\square$

1.5.3 正項級数

定義 1.5.3. 集合 $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ の元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$、即ち、$0\leq(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ なる実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ を正項級数という。

このような級数については収束判定が比較的易しく次に述べるいくつかの収束判定法があることが知られている。証明についてはあまり詳しく述べると本筋から大きくそれてしまうので、述べないことにする。必要であれば、各自解析学の書籍を参照されたい。のちにみるように、複素数列から誘導される級数の収束性につい

ては、絶対収束と条件収束というものによってその複素数列の各項に絶対値をつけたものから誘導される正項級数の収束性と関係づけられるので、まずは正項級数を議論する価値があるのであろう。

定理 1.5.6. 正項級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は収束するか正の無限大に発散する。

定理 1.5.7. 正項級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するならそのときに限り、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が有界である。

定理 1.5.8 (比較定理)**.** 2 つの正項級数たち $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n} b_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、次のことが成り立つ。

- その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} b_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するかつ、$\left(a_n \right)_{n \in \mathbb{N}} \leq \left(b_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が成り立つなら、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ も収束する。
- その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} b_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束しないかつ、$\left(b_n \right)_{n \in \mathbb{N}} \leq \left(a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が成り立つなら、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ も収束しない。
- その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} b_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束し、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ が成り立つなら、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ も収束する。
- その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} b_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束せず、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ が成り立つなら、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ も収束しない。

この定理を比較定理という。

定理 1.5.9 (根判定法と比判定法)**.** 正項級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ において、次のことが成り立つ。

- $\exists l \in [0,1) \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N < n$ が成り立つなら、$\sqrt[n]{a_n} \leq l$ が成り立つとき、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する。
- $\exists l \in [0,1) \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N < n$ が成り立つなら、$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l$ が成り立つとき、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する。
- $\exists l \in (1,\infty] \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N < n$ が成り立つなら、$l \leq \sqrt[n]{a_n}$ が成り立つとき、その級数

$\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は発散する。

- $\exists l \in (1,\infty]\exists N \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N < n$ が成り立つなら、$l \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が成り立つとき、その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は発散する。

この定理のうち 1 つ目、3 つ目の主張を根判定法、root test、2 つ目、4 つ目の主張を比判定法、ratio test という。

定理 1.5.10 (d'Alembert の収束判定法). 正項級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ において、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ が成り立つとき、次のことが成り立つ。

- $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ のときその級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。
- $1 < \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ のときその級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は発散する。

この定理を d'Alembert の収束判定法といい、比判定法、ratio test ともいう。

定理 1.5.11 (比判定法). 正項級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ において、次のことが成り立つ。

- $\limsup_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ のとき、その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。
- $1 < \liminf_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ のとき、その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は発散する。

この定理も比判定法、ratio test という。

定理 1.5.12 (Cauchy の根判定法). 正項級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ において、次のことが成り立つ。

- $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < 1$ のとき、その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。
- $1 < \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ のとき、その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は発散する。

この定理を Cauchy の根判定法、Cauchy の root test という。

1.5.4 絶対収束と条件収束

定理 1.5.13. 複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、実数列 $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} |z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するなら、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ も収束する。

定義 1.5.4. 上の級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束するといい、このような級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ を絶対収束級数という。この定理 1.5.13 の逆は成り立たなく[*10]、級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するが、その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束しないとき、その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は条件収束するといい、このような級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ を条件収束級数という。

証明. 複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、実数列 $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するならそのときに限り、級数に関する Cauchy の収束条件と三角不等式より $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq m<n$ が成り立つなら、次のようになる。

$$\left|\sum_{k\in\Lambda_m\setminus\Lambda_n}z_k\right|\leq\left|\sum_{k\in\Lambda_m\setminus\Lambda_n}|z_k|\right|<\varepsilon$$

よって、その複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ も収束する。 □

定理 1.5.14. 複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、実数列 $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するならそのときに限り、それらの級数たち $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}|\mathrm{Re}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\Lambda_n}|\mathrm{Im}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束する。

証明. 複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、実数列 $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するなら、定理 1.5.7 よりその級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界であるので、$\exists M\in\mathbb{R}^+\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、次のようになる。

$$\sum_{k\in\Lambda_n}|z_n|=\left|\sum_{k\in\Lambda_n}|z_n|\right|<M$$

したがって、次のようになるので、

$$|\mathrm{Re}z_k|^2,|\mathrm{Im}z_k|^2\leq|\mathrm{Re}z_k|^2+|\mathrm{Im}z_k|^2=|z_k|^2$$

次のようになる。

$$\sum_{k\in\Lambda_n}|\mathrm{Re}z_k|,\sum_{k\in\Lambda_n}|\mathrm{Im}z_k|\leq\sum_{k\in\Lambda_n}|z_k|=\left|\sum_{k\in\Lambda_n}|z_k|\right|<M$$

[*10] 例えば、実数列 $\left(-\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数は収束するものの、実数列 $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は差 $s_{2n}-s_n$ を考えれば分かるように上の級数に関する Cauchy の収束条件が満たされなくなってしまうので収束しないことになる。なお、実数列 $\left(-\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数の和は $\ln 2$ になることが知られている。

ゆえに、それらの級数たち $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Re}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Im}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。そこで、それらの級数たち $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Re}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Im}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は正項級数でもあるので、定理 1.5.7 よりそれらの級数たち $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Re}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Im}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ も収束する。

逆に、それらの級数たち $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Re}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Im}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するなら、定理 1.3.7 よりそれらの級数たち $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Re}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Im}z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界であるので、$\exists M_{\mathrm{Re}}M_{\mathrm{Im}}\in\mathbb{R}^+\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、次のようになる。

$$\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Re}z_k| = \left|\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Re}z_k|\right| < M_{\mathrm{Re}},$$
$$\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Im}z_k| = \left|\sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Im}z_k|\right| < M_{\mathrm{Im}}$$

このとき、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、三角不等式より次のようになるので、

$$|z_n| = |\mathrm{Re}z_n + i\mathrm{Im}z_n| \leq |\mathrm{Re}z_n| + |\mathrm{Im}z_n|$$

次のようになる。

$$\sum_{k\in\varLambda_n}|z_k| \leq \sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Re}z_k| + |\mathrm{Im}z_k| = \sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Re}z_k| + \sum_{k\in\varLambda_n}|\mathrm{Im}z_k| < M_{\mathrm{Re}} + M_{\mathrm{Im}}$$

ゆえに、その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。そこで、その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は正項級数でもあるので、定理 1.5.7 よりその級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ も収束する。 □

定理 1.5.15. 複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、実数列 $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するならそのときに限り、$|z_n|_C = \max\{|\mathrm{Re}z_n|, |\mathrm{Im}z_n|\}$ として、その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|z_k|_C\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束する[*11]。

証明. 複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、実数列 $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するなら、定理 1.5.7 よりその級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n}|z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界であるので、$\exists M\in\mathbb{R}^+\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、次のように

[*11] 実は、その写像 $|\bullet|_C:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}\cup\{0\}$ は Chebychev 距離を誘導する norm で、norm を変えても収束性が保たれるという主張に近い。

なる。

$$\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k| = \left| \sum_{k \in \Lambda_n} |z_k| \right| < M$$

ここで、$|z_n|_C = \max\{|\mathrm{Re} z_n|, |\mathrm{Im} z_n|\}$ として、$|z_n|_C = \max\{|\mathrm{Re} z_n|, |\mathrm{Im} z_n|\} \leq |z_n|$ が成り立つので、次のようになる。

$$\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k|_C \leq \sum_{k \in \Lambda_n} |z_k| = \left| \sum_{k \in \Lambda_n} |z_k| \right| < M$$

ゆえに、その級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k|_C \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である。そこで、その級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k|_C \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は正項級数でもあるので、定理 1.5.7 よりその級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k|_C \right)_{n \in \mathbb{N}}$ も収束する。

逆に、その級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k|_C \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するなら、定理 1.3.7 よりその級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k|_C \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は有界であるので、$\exists M \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、次のようになる。

$$\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k|_C = \left| \sum_{k \in \Lambda_n} |z_k|_C \right| < M$$

このとき、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、次のようになるので、

$$|z_n|^2 = |\mathrm{Re} z_n| + |\mathrm{Im} z_n| \leq 2 |z_n|_C^2$$

次のようになる。

$$\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k| \leq \sum_{k \in \Lambda_n} \sqrt{2} |z_k|_C = \sqrt{2} \sum_{k \in \Lambda_n} |z_k|_C < \sqrt{n} M$$

ゆえに、その級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である。そこで、その級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は正項級数でもあるので、定理 1.5.7 よりその級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} |z_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ も収束する。 □

1.5.5 Mertens の定理

定理 1.5.16 (Mertens の定理)**.** 2 つの級数たち $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} z_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \Lambda_n} w_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ がどちらもそれぞれ複素数 σ、τ に絶対収束するなら、級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} \sum_{l \in \Lambda_k} z_l w_{k-l+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は複素数 $\sigma\tau$ に絶対収束する。この定理を Mertens の定理という。

証明. 2 つの級数たち $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} z_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \Lambda_n} w_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ がどちらもそれぞれ複素数 σ、τ に絶対収束するとき、三角不等式より次式が成り立つ。

$$\sum_{k \in \Lambda_n} \left| \sum_{l \in \Lambda_k} z_l w_{k-l+1} \right| \leq \sum_{k \in \Lambda_n} \sum_{l \in \Lambda_k} |z_l w_{k-l+1}|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in\Lambda_n} \sum_{\substack{p,q\in\Lambda_k \\ p+q=k+1}} |z_p w_q| \\
&= \begin{array}{ccccccccc}
 & |z_1w_1| & + & |z_1w_2| & + & \cdots & + & |z_1w_{n-1}| & + & |z_1w_n| \\
+ & |z_2w_1| & + & |z_2w_2| & + & \cdots & + & |z_2w_{n-1}| & & \\
 & & & & + & \cdots & & & & \\
+ & |z_{n-1}w_1| & + & |z_{n-1}w_2| & & & & & & \\
+ & |z_nw_1| & & & & & & & &
\end{array} \\
&\leq \begin{array}{cccccccccc}
 & |z_1w_1| & + & |z_1w_2| & + & \cdots & + & |z_1w_{n-1}| & + & |z_1w_n| \\
+ & |z_2w_1| & + & |z_2w_2| & + & \cdots & + & |z_2w_{n-1}| & + & |z_2w_n| \\
 & & & & + & \cdots & & & & \\
+ & |z_{n-1}w_1| & + & |z_{n-1}w_2| & + & \cdots & + & |z_{n-1}w_{n-1}| & + & |z_{n-1}w_n| \\
+ & |z_nw_1| & + & |z_nw_2| & + & \cdots & + & |z_nw_{n-1}| & + & |z_nw_n|
\end{array} \\
&= \sum_{p,q\in\Lambda_n} |z_p w_q| \\
&= \sum_{p\in\Lambda_n} |z_p| \sum_{q\in\Lambda_n} |w_q|
\end{aligned}
$$

ここで、仮定より 2 つの級数たち $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\Lambda_n} w_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がどちらも絶対収束するのであったので、定理 1.5.7 より実数たち M、N が存在して、$\sum_{p\in\Lambda_n} |z_p| \leq M$ かつ $\sum_{q\in\Lambda_n} |w_q| \leq N$ が成り立つ。したがって、次式が成り立つ。

$$
\sum_{k\in\Lambda_n} \left|\sum_{l\in\Lambda_k} z_l w_{k-l}\right| \leq \left(\sum_{p\in\Lambda_n} |z_p|\right)\left(\sum_{q\in\Lambda_n} |w_q|\right) \leq MN
$$

これにより、その正項級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} \left|\sum_{l\in\Lambda_k} z_l w_{k-l}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界で収束することになるので、その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} \sum_{l\in\Lambda_k} z_l w_{k-l}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束する。

ここで、次のようになることから、

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k\in\Lambda_{2n}} \sum_{l\in\Lambda_k} z_l w_{k-l+1} - \sum_{p\in\Lambda_n} z_p \sum_{q\in\Lambda_n} w_q\right| \\
&= \left|\begin{array}{cccccccccccccc}
 & z_1w_1 & + & z_1w_2 & + & \cdots & + & z_1w_n & + & z_1w_{n+1} & + & \cdots & + & z_1w_{2n-1} & + & z_1w_{2n} \\
+ & z_2w_1 & + & z_2w_2 & + & \cdots & + & z_2w_n & + & z_2w_{n+1} & + & \cdots & + & z_2w_{2n-1} & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
+ & z_nw_1 & + & z_nw_2 & + & \cdots & + & z_nw_n & + & z_nw_{n+1} & & & & & & \\
+ & z_{n+1}w_1 & + & z_{n+1}w_2 & + & \cdots & + & z_{n+1}w_n & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
+ & z_{2n-1}w_1 & + & z_{2n-1}w_2 & & & & & & & & & & & & \\
+ & z_{2n}w_1 & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}\right. \\
&\quad \left.- \begin{array}{cccccccc}
 & z_1w_1 & + & z_1w_2 & + & \cdots & + & z_1w_n \\
+ & z_2w_1 & + & z_2w_2 & + & \cdots & + & z_2w_n \\
 & & & & & & & \\
+ & z_nw_1 & + & z_nw_2 & + & \cdots & + & z_nw_n
\end{array}\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\begin{array}{ll}
 & z_1 w_{n+1} + \cdots + z_1 w_{2n-1} + z_1 w_{2n} \\
 & + z_2 w_{n+1} + \cdots + z_2 w_{2n-1} \\
 & \\
 & + z_n w_{n+1} \\
+ z_{n+1} w_1 + z_{n+1} w_2 + \cdots + z_{n+1} w_n & \\
 & \\
+ z_{2n-1} w_1 + z_{2n-1} w_2 & \\
+ z_{2n} w_1 &
\end{array}\right| \\
&\leq \left|\begin{array}{l}
z_1 w_{n+1} + \cdots + z_1 w_{2n-1} + z_1 w_{2n} \\
+ z_2 w_{n+1} + \cdots + z_2 w_{2n-1} \\
 \\
+ z_n w_{n+1}
\end{array}\right| + \left|\begin{array}{l}
z_{n+1} w_1 + z_{n+1} w_2 + \cdots + z_{n+1} w_n \\
 \\
+ z_{2n-1} w_1 + z_{2n-1} w_2 \\
+ z_{2n} w_1
\end{array}\right| \\
&= \left|\sum_{q \in \varLambda_{2n} \setminus \varLambda_n} \sum_{p \in \varLambda_{2n-q+1}} z_p w_q\right| + \left|\sum_{p \in \varLambda_{2n} \setminus \varLambda_n} \sum_{q \in \varLambda_{2n-p+1}} z_p w_q\right| \\
&\leq \sum_{q \in \varLambda_{2n} \setminus \varLambda_n} \sum_{p \in \varLambda_{2n-q+1}} |z_p w_q| + \sum_{p \in \varLambda_{2n} \setminus \varLambda_n} \sum_{q \in \varLambda_{2n-p+1}} |z_p w_q| \\
&\leq \sum_{q \in \varLambda_{2n} \setminus \varLambda_n} \sum_{p \in \varLambda_{2n+1}} |z_p w_q| + \sum_{p \in \varLambda_{2n} \setminus \varLambda_n} \sum_{q \in \varLambda_{2n+1}} |z_p w_q| \\
&= \sum_{p \in \varLambda_{2n+1}} |z_p| \left(\sum_{q \in \varLambda_{2n}} |w_q| - \sum_{q \in \varLambda_n} |w_q|\right) + \left(\sum_{p \in \varLambda_{2n}} |z_p| - \sum_{p \in \varLambda_n} |z_p|\right) \sum_{q \in \varLambda_{2n+1}} |w_q| \\
&\leq \sum_{p \in \mathbb{N}} |z_p| \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} |w_q| - \sum_{q \in \varLambda_n} |w_q|\right) + \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} |z_p| - \sum_{p \in \varLambda_n} |z_p|\right) \sum_{q \in \mathbb{N}} |w_q|
\end{aligned}
$$

$n \to \infty$ とすれば、2 つの級数たち $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} z_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n} w_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ がどちらもそれぞれ複素数 σ、τ に絶対収束するので、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n \to \infty} \left|\sum_{k \in \varLambda_{2n}} \sum_{l \in \varLambda_k} z_l w_{k-l+1} - \sum_{p \in \varLambda_n} z_p \sum_{q \in \varLambda_n} w_q\right| \\
&\leq \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} |z_p| \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} |w_q| - \sum_{q \in \varLambda_n} |w_q|\right) + \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} |z_p| - \sum_{p \in \varLambda_n} |z_p|\right) \sum_{q \in \mathbb{N}} |w_q|\right) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{N}} |z_p| \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} |w_q| - \lim_{n \to \infty} \sum_{q \in \varLambda_n} |w_q|\right) + \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} |z_p| - \lim_{n \to \infty} \sum_{p \in \varLambda_n} |z_p|\right) \sum_{q \in \mathbb{N}} |w_q| \\
&= \sum_{p \in \mathbb{N}} |z_p| \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} |w_q| - \sum_{q \in \mathbb{N}} |w_q|\right) + \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} |z_p| - \sum_{p \in \mathbb{N}} |z_p|\right) \sum_{q \in \mathbb{N}} |w_q| \\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって、次のようになることから、

$$
\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \varLambda_k} z_l w_{k-l+1} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \varLambda_{2n}} \sum_{l \in \varLambda_k} z_l w_{k-l+1}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k\in\Lambda_{2n}}\sum_{l\in\Lambda_k} z_l w_{k-l+1} - \sum_{p\in\Lambda_n} z_p \sum_{q\in\Lambda_n} w_q + \sum_{p\in\Lambda_n} z_p \sum_{q\in\Lambda_n} w_q\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k\in\Lambda_{2n}}\sum_{l\in\Lambda_k} z_l w_{k-l+1} - \sum_{p\in\Lambda_n} z_p \sum_{q\in\Lambda_n} w_q\right) + \lim_{n\to\infty}\sum_{p\in\Lambda_n} z_p \lim_{n\to\infty}\sum_{q\in\Lambda_n} w_q\\
&= \sigma\tau
\end{aligned}
$$

よって、級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}\sum_{l\in\Lambda_k} z_l w_{k-l+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は複素数 $\sigma\tau$ に絶対収束する。 □

1.5.6 項の順序を変えた級数

定義 1.5.5. 複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、全単射な写像 $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を用いた級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} z_{p(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ をその級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の項の順序を変えた級数という。

定理 1.5.17. 正項級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の広い意味での極限値は必ずもつのであった。このとき、その集合 $\mathbb{N}$ の有限集合である部分集合全体の集合が $\mathcal{F}$ とおかれれば、次式が成り立つ。

$$
\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\left\{\sum_{n\in F} a_n\right\}_{F\in\mathcal{F}}
$$

証明. 正項級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、その集合 $\mathbb{N}$ の有限集合である部分集合全体の集合が $\mathcal{F}$ とおかれれば、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$\Lambda_n=\{1,2,\cdots,n\}\in\mathcal{F}$ が成り立つので、次のようになる。

$$
\sum_{k\in\Lambda_n} a_k \leq \sup\left\{\sum_{n\in F} a_n\right\}_{F\in\mathcal{F}}
$$

したがって、次のようになる。

$$
\sum_{k\in\Lambda_n} a_k \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\Lambda_n} a_k \leq \sup\left\{\sum_{n\in F} a_n\right\}_{F\in\mathcal{F}}
$$

一方で、$\forall F\in\mathcal{F}$ に対し、これの最大値 $\max F$ が存在するので、これが N とおかれれば、$F\subseteq\Lambda_N$ より次式が成り立つ。

$$
\sum_{n\in F} a_n \leq \sum_{k\in\Lambda_N} a_k \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n
$$

したがって、次のようになる。

$$
\sup\left\{\sum_{n\in F} a_n\right\}_{F\in\mathcal{F}} \leq \sum_{k\in\Lambda_N} a_k \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n
$$

以上の議論により、次式が成り立つ。

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup \left\{ \sum_{n \in F} a_n \right\}_{F \in \mathcal{F}}$$

□

定理 1.5.18. 正項級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の項の順序を変えた級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_{p(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ について、次式が成り立つ。

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{p(n)}$$

証明. 正項級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の項の順序を変えた級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_{p(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ について、定理 1.5.17 より次のようになることから従う。

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup \left\{ \sum_{n \in F} a_n \right\}_{F \in \mathcal{F}} = \sup \left\{ \sum_{n \in F} a_{p(n)} \right\}_{F \in \mathcal{F}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{p(n)}$$

□

別の証明も載せておこう。

証明. 正項級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の項の順序を変えた級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_{p(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ について、その値域 $V\left(p|\varLambda_n\right)$ もその集合 $\mathbb{N}$ の有限集合な部分集合でもあるので、最大値 $\max V\left(p|\varLambda_n\right)$ が存在する。これが N とおかれれば、$\varLambda_n \subseteq V\left(p|\varLambda_n\right) \subseteq \varLambda_N$ より次のようになることから従う。

$$\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \leq \sum_{k \in \varLambda_n} a_{p(k)} \leq \sum_{k \in \varLambda_N} a_k \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

したがって、$n \rightarrow \infty$ とすれば、はさみうちの原理より次式が成り立つ。

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{p(n)}$$

□

定理 1.5.19. 正項級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、その集合 $\mathbb{N}$ の有限集合である部分集合全体の集合が $\mathcal{F}$ とおかれれば、その正項級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するならそのときに限り、その集合 $\left\{ \sum_{n \in F} a_n \right\}_{F \in \mathcal{F}}$ の上限が有限である。

証明. 定理 1.5.17 より次式が成り立つことから直ちにわかる。

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup \left\{ \sum_{n \in F} a_n \right\}_{F \in \mathcal{F}}$$

□

定理 1.5.20 (Dirichlet -Riemann の再配列定理)**.** 実数列 $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が条件収束するとき、$\forall V\in\mathbb{R}$ に対し、ある全単射な写像 $p:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ が存在して、次式が成り立つ。

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{p(n)} = V$$

また、ある全単射な写像 $p:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ が存在して、次式が成り立つ。

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{p(n)} = \pm\infty$$

この定理を Dirichlet -Riemann の再配列定理という。

証明は測度論の積分の議論に類似している。詳しく述べるのにいくらかの概念を要しやや長くなり本筋からそれるので、ここでは述べない。詳しくは参考文献に挙げられている解析学の書籍を参照されたい。

定理 1.5.21. 複素数列 $\left(z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、次のことは同値である。

- その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束する。
- その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はどのように項の順序を変えてもその極限値は変わらない。

証明. 複素数列 $\left(z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が絶対収束するなら、定理 1.5.14 より $\forall l\in\varLambda_n$ に対し、それらの級数たち $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \left|\mathrm{Re}z_k\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \left|\mathrm{Im}z_k\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束する、即ち、その級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が絶対収束する。そこで、次のようにおくと、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}_+z_k = \max\left\{\mathrm{Re}z_k,0\right\},\quad \mathrm{Re}_-z_k = \max\left\{-\mathrm{Re}z_k,0\right\},\\
\mathrm{Im}_+z_k = \max\left\{\mathrm{Im}z_k,0\right\},\quad \mathrm{Re}_-z_k = \max\left\{-\mathrm{Im}z_k,0\right\}
\end{aligned}$$

次のようになり

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathrm{Re}_+z_k, \mathrm{Re}_-z_k \leq \mathrm{Re}_+z_k + \mathrm{Re}_-z_k = \left|\mathrm{Re}z_k\right|,\\
0 \leq \mathrm{Im}_+z_k, \mathrm{Im}_-z_k \leq \mathrm{Im}_+z_k + \mathrm{Im}_-z_k = \left|\mathrm{Im}z_k\right|
\end{aligned}$$

定理 1.5.8、即ち、比較定理よりそれらの級数たち $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \mathrm{Re}_+z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \mathrm{Re}_-z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \mathrm{Im}_+z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \mathrm{Im}_-z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はどれも収束する。これらの級数たち $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \mathrm{Re}_+z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \mathrm{Re}_-z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \mathrm{Im}_+z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k\in\varLambda_n} \mathrm{Im}_-z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はどれも正項級数なので、これらの項の順序を変えた級数たち

$\left(\sum_{k \in \varLambda_n} \mathrm{Re}_+ z_{p(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n} \mathrm{Re}_- z_{p(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n} \mathrm{Im}_+ z_{p(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n} \mathrm{Im}_- z_{p(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ はどれも収束し次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}_+ z_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}_+ z_{p(n)}, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}_- z_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}_- z_{p(n)}, \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}_+ z_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}_+ z_{p(n)}, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}_- z_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}_- z_{p(n)} \end{aligned}$$

以上の議論により、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re} z_n &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathrm{Re}_+ z_n - \mathrm{Re}_- z_n \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}_+ z_n - \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}_- z_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}_+ z_{p(n)} - \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}_- z_{p(n)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathrm{Re}_+ z_{p(n)} - \mathrm{Re}_- z_{p(n)} \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re} z_{p(n)}, \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im} z_n &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathrm{Im}_+ z_n - \mathrm{Im}_- z_n \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}_+ z_n - \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}_- z_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}_+ z_{p(n)} - \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}_- z_{p(n)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathrm{Im}_+ z_{p(n)} - \mathrm{Im}_- z_{p(n)} \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im} z_{p(n)} \end{aligned}$$

定理 1.5.1 よりよって、次式が成り立つことから、

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} z_{p(n)}$$

その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} z_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ はどのように項の順序を変えてもその極限値は変わらない。

逆に、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} z_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が絶対収束しないなら、定理 1.5.14 よりその級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} |\mathrm{Re} z_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$、または、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} |\mathrm{Im} z_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束しない、即ち、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} \mathrm{Re} z_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$、または、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} \mathrm{Im} z_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が条件収束する。定理 1.5.20、即ち、Riemann の再配列定理より任意の複素数 V に対し、それぞれ $\mathrm{Re} V \neq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re} z_n$、$\mathrm{Re} V \neq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Re} z_n$ なら、ある全単射な写像 $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ が存在して、次式のどち

らかが成り立つ。

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Re}z_{p(n)}=\mathrm{Re}V\neq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Re}z_n,\quad \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Im}z_{p(n)}=\mathrm{Im}V\neq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Im}z_n$$

定理 1.5.1 よりよって、次式が成り立つことから、

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}z_n\neq\sum_{n\in\mathbb{N}}z_{p(n)}$$

その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はその極限値が変わるような項の順序の変え方が存在する。対偶律により、その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がどのように項の順序を変えてもその極限値は変わらないなら、その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が絶対収束することも示された。 □

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1985. 第 34 刷 p44-49,366-381 ISBN978-4-13-062005-5

[2] 野村隆昭. "正項級数でないと，たとえ収束しても，項の順序を入れ替えると，和がかわってしまう可能性がある．項の順序を入れ替えても和が変わらない級数は?". 九州大学. `https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tnomura/EdAct/2010GRN/L05forprint.pdf` (2021-6-17 取得)

[3] 数学の景色. "絶対収束級数は和の順序によらず同じ値に収束することの証明". 数学の景色. `https://mathlandscape.com/abs-conv-rearrangement/` (2021-8-31 17:25 閲覧)

[4] 数学の景色. "条件収束級数は和の順序交換により任意の値に収束できることの証明". 数学の景色. `https://mathlandscape.com/cond-conv-rearrangement/` (2022-8-11 5:45 閲覧)

1.6 関数の極限

1.6.1 関数の極限

定義 1.6.1. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、$\alpha \in \mathrm{cl}_R D(f)$、$\beta \in \mathrm{cl}_S V(f)$ なる点々 α、β を用いて、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall z \in D(f)$ に対し、$z \in U(\alpha, \delta) \cap R$ が成り立つなら、$f(z) \in U(\beta, \varepsilon) \cap S$ が成り立つとき、その関数 f の変数がその集合 R でその点 α に近づくとき、その関数 f はその集合 S でその点 β に近づくという。この式、またはこの式を用いた議論を ε-δ 論法という。このことは例えば次式のように表される。

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z) = \beta, \quad f(z) \rightarrow \beta \in \mathrm{cl}_S V(f) \ \ (z \rightarrow \alpha, R \rightarrow S)$$

$z \rightarrow \alpha$ をその点 z がその点 α に近づく、$f(z) \rightarrow \beta$ をその関数 f はその点 β に広い意味で収束するといい、その点 β をそのときの広い意味での極限値などという。$\beta \in \mathbb{C}$ のとき、$f(z) \rightarrow \beta$ をその関数 f はその点 β に収束するといい、その点 β をそのときの極限値などという。$\beta \notin \mathbb{C}$ が成り立つとき、または、上のその論理式が成り立つようなその点 β が存在しないとき、その関数 f は発散するという。特に、上のその論理式が成り立つようなその点 β が存在しないことをその関数 f は振動するといい、形式的に $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z) = \mathrm{indefinite}$、$f(z) \rightarrow \mathrm{indefinite} \ \ (z \rightarrow \alpha, \ \ R \rightarrow S)$ などと書くこともある。

定義 1.6.2. $A \subseteq D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、$\alpha \in \mathrm{cl}_R A$、$\beta \in \mathrm{cl}_S (V(f))$ なる点々 α、β を用いて $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f|A(z) = \beta$ が成り立つことを $\lim_{\substack{A \ni z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z) = \beta$、$f(z) \rightarrow \beta \ \ (A \ni z \rightarrow \alpha, \ \ R \rightarrow S)$ などと書きその関数 f の変数がその集合 A でその点 α に近づくとき、その関数 f はその集合 S でその点 β に近づくという。

定理 1.6.1. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in \mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z)$ が存在すれば、これはただ 1 つである。

証明. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in \mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z)$ が存在するとき、これが 2 つの互いに異なる点々 β、γ であったとする。$\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ のとき、$|\beta - \gamma| = 2\varepsilon$ とおくと、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall z \in D(f)$ に対し、$z \in U(\alpha, \delta) \cap R$ が成り立つなら、$|f(z) - \beta| < \varepsilon$ かつ $|f(z) - \gamma| < \varepsilon$ が成り立つ。したがって、三角不等式より次のようになる。

$$2\varepsilon = |\beta - \gamma| \leq |\beta - f(z)| + |f(z) - \gamma| = |f(z) - \beta| + |f(z) - \gamma| < 2\varepsilon$$

これにより $2\varepsilon < 2\varepsilon$ が得られるが、これは矛盾している。$\beta \in \mathbb{C}$、$\gamma = a_\infty$ のとき、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall z \in D(f)$ に対し、$z \in U(\alpha, \delta) \cap R$ が成り立つなら、$|f(z) - \beta| < \varepsilon$ かつ $\varepsilon + |\beta| < |f(z)|$ が成り立つ。したがって、三角不等式より次のようになる。

$$|\beta| - \varepsilon < |f(z)| < |\beta| + \varepsilon < |f(z)|$$

これは矛盾している。よって、広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z)$ が存在すれば、これはただ 1 つである。 □

定理 1.6.2. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、$\forall\alpha \in \mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、次のことは同値である。

- $f(z) \rightarrow \beta \ \ (z \rightarrow \alpha, \ \ R \rightarrow S)$ が成り立つ。
- 任意のその集合 $D(f)$ の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、その集合 R で $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ が成り立つなら[*12]、$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \beta \in \mathrm{cl}_S V(f)$ が成り立つ。

証明. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、$\forall\alpha \in \mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、$f(z) \rightarrow \beta \ \ (z \rightarrow \alpha, \ \ R \rightarrow S)$ が成り立つなら、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta \in \mathbb{R}^+ \forall z \in D(f)$ に対し、$z \in U(\alpha,\delta) \cap R$ が成り立つなら、$f(z) \in U(\beta,\varepsilon) \cap S$ が成り立つ。ここで、任意のその集合 $D(f)$ の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、その集合 R で $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ が成り立つなら、$\forall\delta \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq k$ が成り立つなら、$z_n \in U(\alpha,\delta) \cap R$ が成り立つ。したがって、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq k$ が成り立つなら、$z_n \in U(\alpha,\delta) \cap R$ が成り立ち、これが成り立つなら、$f(z_n) \in U(\beta,\varepsilon) \cap S$ が成り立つ。以上より、$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \beta \in \mathrm{cl}_S V(f)$ が成り立つ。

逆に、$f(z) \rightarrow \beta \ \ (z \rightarrow \alpha, \ \ R \rightarrow S)$ が成り立たなければ、定義より明らかに、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall\delta \in \mathbb{R}^+ \exists z \in A$ に対し、$z \in U(\alpha,\delta) \cap R$ かつ $f(z) \in U(\beta,\varepsilon) \cap S$ が成り立つ。特に、選択の公理より、$\forall n \in \mathbb{N} \exists z_n \in A$ に対し、$z_n \in U\left(\alpha, \dfrac{1}{k}\right) \cap R$ かつ $f(z_n) \notin U(\beta,\varepsilon) \cap S$ が成り立つような点 z_n が存在するので、これからその集合 $D(f)$ の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が得られ、上の式より $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ が成り立つが、$f(z_n) \notin U(\beta,\varepsilon) \cap S$ が成り立つので、$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \beta$ は成り立たない。したがって、対偶律により、任意のその集合 $D(f)$ の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、その集合 R で $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ が成り立つなら、$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \beta \in \mathrm{cl}_S V(f)$ が成り立つとき、$f(z) \rightarrow \beta \ \ (z \rightarrow \alpha, \ \ R \rightarrow S)$ が成り立つ。 □

定理 1.6.3. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、$\forall\alpha \in \mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、次のことは同値である。

- 広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z)$ が存在する。
- 任意のその集合 $D(f)$ の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、その集合 R で $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ が成り立つなら、広い意味での極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ が存在する。

これが成り立つなら、次式が成り立つ。

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$$

証明. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、$\forall\alpha \in \mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z)$ が存在するなら、定理 1.6.2 より任意のその集合 $D(f)$ の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、その集合 R で $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ が成り立つなら、広い意味での極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ も存在する。

[*12] 少なくともその集合 R で $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ が成り立つようなその集合 $D(f)$ の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在することは次の定理で分かることに注意しよう。
$A \subseteq R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 A が与えられたとき、これのその集合 R における閉包 $\mathrm{cl}_R A$ について、$\alpha \in \mathrm{cl}_R A$ が成り立つならそのときに限り、その点 α にその集合 R の広い意味で収束するその集合 A の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow A$ が存在する。

逆に、任意のその集合 $D(f)$ の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、その集合 R で $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ が成り立つなら、広い意味での極限値 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ が存在するとき、このような複素数列たち $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ によるある自然数 k の像 z_n をその複素数列たちから取り出して得られるどの複素数列でも、その複素数列の広い意味での極限値が点 α となるので、その広い意味での極限値 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ がその集合 $\mathrm{cl}_S V(f)$ に一意的に存在する。したがって、定理 1.6.2 よりその広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}} f(z)$ が存在する。

あとは、定理 1.6.2 より分かる。 □

定理 1.6.4. $D(f)\subseteq R\subseteq\mathbb{C}$、$D(g)\subseteq S\subseteq\mathbb{C}$、$T\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ なる 2 つの関数たち $f:D(f)\to S$、$g:D(g)\to T$ が与えられたとき、$V(f)\subseteq D(g)$ が成り立つなら、これらの 2 つの関数たち f、g は合成可能であり[*13]合成関数 $g\circ f:D(f)\to T;z\mapsto g(f(z))$ が定義できるのであった。このとき、$\forall\alpha\in\mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、次のことが成り立つ。

- 広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}} f(z)$ が存在して $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}} f(z)=\beta$ が成り立つなら、$\beta\in\mathrm{cl}_S V(f)\subseteq\mathrm{cl}_S D(g)$ が成り立つ。
- 広い意味での極限値たち $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}} f(z)$、$\lim_{\substack{z\to\beta\\S\to T}} g(z)$ が存在して $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}} f(z)=\beta$、$\lim_{\substack{z\to\beta\\S\to T}} g(z)=\gamma$ が成り立つなら、広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to T}} g\circ f(z)$ が存在して $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to T}} g\circ f(z)=\gamma$ が成り立つ。

証明. $D(f)\subseteq R\subseteq\mathbb{C}$、$D(g)\subseteq S\subseteq\mathbb{C}$、$T\subseteq\mathbb{C}$ なる 2 つの関数たち $f:D(f)\to S$、$g:D(g)\to T$ が与えられたとする。$V(f)\subseteq D(g)$ が成り立つとき、$\forall\alpha\in\mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、定理 1.3.4 よりその点 α に収束するその集合 $D(f)$ の複素数列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在することに注意すれば、広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}} f(z)$ が存在して $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}} f(z)=\beta$ が成り立つなら、定理 1.6.2 より $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\beta$ が成り立つので、定理 1.3.4 より $\beta\in\mathrm{cl}_S V(f)$ が成り立つ。ここで、仮定より $V(f)\subseteq D(g)$ が成り立つので、$\mathrm{cl}_S V(f)\subseteq\mathrm{cl}_S D(g)$ が成り立つ。よって、$\beta\in\mathrm{cl}_S V(f)\subseteq\mathrm{cl}_S D(g)$ が成り立つ。

広い意味での極限値たち $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}} f(z)$、$\lim_{\substack{z\to\beta\\S\to T}} g(z)$ が存在して $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}} f(z)=\beta$、$\lim_{\substack{z\to\beta\\S\to T}} g(z)=\gamma$ が成り立つなら、定義より $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall z\in D(f)$ に対し、$z\in U(\alpha,\delta)\cap R$ が成り立つなら、$f(z)\in U(\beta,\varepsilon)\cap S$ が成り立つかつ、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\gamma\in\mathbb{R}^+\forall z\in D(g)$ に対し、$z\in U(\beta,\gamma)\cap S$ が成り立つなら、$g(z)\in U(\gamma,\varepsilon)\cap T$ が成り立つ。したがって、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\gamma,\delta\in\mathbb{R}^+\forall z\in D(f)$ に対し、$z\in U(\alpha,\delta)\cap R$ が成り立つなら、$f(z)\in U(\beta,\gamma)\cap S$ が成り立ち、したがって、これが成り立つなら、$g\circ f(z)\in U(\gamma,\varepsilon)\cap T$ が成り立つ。よって、広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to T}} g\circ f(z)$ が存在して $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to T}} g\circ f(z)=\gamma$ が成り立つ。 □

定理 1.6.5 (極限が開球で表される)**.** $D(f)\subseteq R\subseteq\mathbb{C}$、$S\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f:D(f)\to S$ が与えられたとき、$\forall\alpha\in\mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、次のことは同値である。

- $f(z)\to\beta\ \ (z\to\alpha,\ \ R\to S)$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall z\in D(f)$ に対し、$z\in U(\alpha,\delta)\cap R$ が成り立つなら、$f(z)\in U(\beta,\varepsilon)\cap S$ が成り

[*13] 合成関数の詳しい議論のところは集合論に参照するといいかも。

立つ。

- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$U(\alpha,\delta)\cap D(f)\subseteq V\left(f^{-1}|U(\beta,\varepsilon)\cap S\right)$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$V(f|U(\alpha,\delta)\cap D(f))\subseteq U(\beta,\varepsilon)\cap S$ が成り立つ。

このことをここでは極限が開球で表されると呼ぶことにする。

証明. $D(f)\subseteq R\subseteq\mathbb{C}$、$S\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f:D(f)\to S$ が与えられたとき、$\forall\alpha\in\mathrm{cl}_{R}D(f)$ に対し、定義より明らかに次のことは同値である。

- $f(z)\to\beta\ \ (z\to\alpha,\ \ R\to S)$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}\forall z\in D(f)$ に対し、$z\in U(\alpha,\delta)\cap R$ が成り立つなら、$f(z)\in U(\beta,\varepsilon)\cap S$ が成り立つ。

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}\forall z\in D(f)$ に対し、$z\in U(\alpha,\delta)\cap R$ が成り立つなら、$f(z)\in U(\beta,\varepsilon)\cap S$ が成り立つとき、$z\in V\left(f^{-1}|U(\beta,\varepsilon)\cap S\right)$ が成り立つので、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$U(\alpha,\delta)\cap D(f)\subseteq V\left(f^{-1}|U(\beta,\varepsilon)\cap S\right)$ が成り立つ。逆に、これが成り立つなら、$\forall z\in D(f)$ に対し、$z\in U(\alpha,\delta)\cap R$ が成り立つなら、$D(f)\subseteq R$ より $z\in U(\alpha,\delta)\cap D(f)$ が成り立つので、仮定より $z\in V\left(f^{-1}|U(\beta,\varepsilon)\cap S\right)$ が成り立つ。ゆえに、$f(z)\in U(\beta,\varepsilon)\cap S$ が得られる。これにより、次のことは同値である。

- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}\forall z\in D(f)$ に対し、$z\in U(\alpha,\delta)\cap R$ が成り立つなら、$f(z)\in U(\beta,\varepsilon)\cap S$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$U(\alpha,\delta)\cap D(f)\subseteq V\left(f^{-1}|U(\beta,\varepsilon)\cap S\right)$ が成り立つ。

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$U(\alpha,\delta)\cap D(f)\subseteq V\left(f^{-1}|U(\beta,\varepsilon)\cap S\right)$ が成り立つなら、次のようになる。

$$V(f|U(\alpha,\delta)\cap D(f))\subseteq V\left(f|V\left(f^{-1}|U(\beta,\varepsilon)\cap S\right)\right)\subseteq U(\beta,\varepsilon)\cap S$$

逆に、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$V(f|U(\alpha,\delta)\cap D(f))\subseteq U(\beta,\varepsilon)\cap S$ が成り立つなら、次のようになる。

$$U(\alpha,\delta)\cap D(f)\subseteq V\left(f^{-1}|V(f|U(\alpha,\delta)\cap D(f))\right)\subseteq V\left(f^{-1}|U(\beta,\varepsilon)\cap S\right)$$

これにより、次のことは同値である。

- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$U(\alpha,\delta)\cap D(f)\subseteq V\left(f^{-1}|U(\beta,\varepsilon)\cap S\right)$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}$ に対し、$V(f|U(\alpha,\delta)\cap D(f))\subseteq U(\beta,\varepsilon)\cap S$ が成り立つ。

□

1.6.2 関数の極限の収束

定理 1.6.6. $D(f)\subseteq R\subseteq\mathbb{C}$、$S\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f:D(f)\to S$ が与えられたとき、$\forall\alpha\in\mathrm{cl}_{R}D(f)$ に対し、極限値 $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}}f(z)$ が複素平面 $\mathbb{C}$ に存在して $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}}f(z)=\beta$ が成り立つならそのときに限り、極限値 $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}}\mathrm{Re}f(z)$ が集合 $\mathbb{R}$ に存在して $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}}\mathrm{Re}f(z)=\mathrm{Re}\beta$ が成り立つかつ、極限値 $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}}\mathrm{Im}f(z)$ が集合 $\mathbb{R}$ に存在して $\lim_{\substack{z\to\alpha\\R\to S}}\mathrm{Im}f(z)=\mathrm{Im}\beta$ が成り立つ。

証明. 定理 1.3.6、定理 1.6.2 より明らかである。 □

定義 1.6.3. $A \subseteq D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \to S$ が与えられたとする。その値域 $V(f|A)$ が有界であるとき、その関数 f はその集合 A で有界であるという。

定理 1.6.7. $A \subseteq D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \to S$ が与えられたとき、これが集合 A で有界であるなら、$\exists M \in \mathbb{R}^+ \forall z \in A$ に対し、$|f(z)| \leq M$ が成り立つ。

証明. 定理 1.2.4 より明らかである。 □

定理 1.6.8. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \to S$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in \mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、極限値 $\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} f(z)$ が複素平面 $\mathbb{C}$ に存在するなら、その関数 f は、$\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、集合 $U(\alpha, \delta) \cap D(f)$ で有界である。

証明. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \to S$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in \mathrm{cl}D(f)$ に対し、極限値 $\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} f(z)$ が複素平面 $\mathbb{C}$ に存在するなら、定理 1.6.5 より $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V(f|U(\alpha, \delta) \cap D(f)) \subseteq U(\beta, \varepsilon) \cap S$ が成り立つのであったので、定義よりその関数 f はその集合 $U(\alpha, \delta) \cap D(f)$ で有界である。 □

定理 1.6.9. $D(f), D(g) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数たち $f : D(f) \to S$、$g : D(g) \to S$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in \mathrm{cl}_R(D(f) \cap D(g))$ に対し、極限値たち $\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} f(z)$、$\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} g(z)$ が複素平面 $\mathbb{C}$ に存在して $\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} f(z) = \beta$、$\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} g(z) = \gamma$ が成り立つなら、$\forall \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ に対し、次式が成り立つ[*14]。

$$\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} (\alpha' f + \beta' g)(z) = \alpha' \beta + \beta' \gamma$$

証明. 定理 1.3.8、定理 1.6.2 より明らかである[*15]。 □

定理 1.6.10. $D(f), D(g) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数たち $f : D(f) \to S$、$g : D(g) \to S$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in \mathrm{cl}_R(D(f) \cap D(g))$ に対し、極限値たち $\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} f(z)$、$\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} g(z)$ が複素平面 $\mathbb{C}$ に存在して $\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} f(z) = \beta$、$\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} g(z) = \gamma$ が成り立つなら、次式が成り立つ[*16]。

$$\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} (fg)(z) = \beta\gamma$$

$$\lim_{\substack{z \to \alpha \\ R \to S}} \frac{f}{g}(z) = \frac{\beta}{\gamma} \text{ if } \gamma \neq 0$$

証明. 定理 1.3.10、定理 1.6.2 より明らかである[*17]。 □

[*14] より正確にいえば、関数 $\alpha' f + \beta' g : D(f) \cap D(g) \to S$ で考えていることに注意しよう。
[*15] つまり、関数の極限を複素数列の極限だと考えることになる。
[*16] より正確にいえば、関数たち fg、$\frac{f}{g}$ の定義域は $D(f) \cap D(g)$ で考えていることに注意しよう。
[*17] つまり、関数の極限を複素数列の極限だと考えることになる。

1.6.3 関数の極限に関する Cauchy の収束条件

定理 1.6.11 (関数の極限に関する Cauchy の収束条件)**.** $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in \mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、極限値 $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z)$ が複素平面 $\mathbb{C}$ に存在するならそのときに限り、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall z, w \in D(f)$ に対し、$z, w \in U(\alpha, \delta) \cap R$ が成り立つなら、$|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ が成り立つ。この定理を関数の極限に関する Cauchy の収束条件という。

証明. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in \mathrm{cl}_R D(f)$ に対し、極限値 $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z)$ が複素平面 $\mathbb{C}$ に存在するなら、この極限値 $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z)$ を β とおけば、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall z, w \in D(f)$ に対し、$z, w \in U(\alpha, \delta) \cap R$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} |f(z) - \beta| + |f(w) - \beta| &= |f(z) - \beta| + |-f(w) + \beta| \\ &\leq |f(z) - \beta - f(w) + \beta| \\ &= |f(z) - f(w)| < \varepsilon \end{aligned}$$

逆に、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall z, w \in D(f)$ に対し、$z, w \in U(\alpha, \delta) \cap R$ が成り立つなら、$|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ が成り立つとき、定理 1.3.4 よりその点 α に収束するその集合 $D(f)$ の複素数列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在するので、これを用いて考えれば、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq m, n$ が成り立つなら、$|z_m - \alpha|, |z_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立ち、したがって、$z_m, z_n \in U(\alpha, \delta) \cap R$ が成り立つ。これにより、$|f(z_m) - f(z_n)| < \varepsilon$ が成り立つので、その複素数列 $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。したがって、定理 1.3.20 の Cauchy の収束条件と定理 1.6.2 よりその極限値 $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z)$ が複素平面 $\mathbb{C}$ に存在する。 □

1.6.4 連続

定義 1.6.4. $A \subseteq D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in A$ に対し、$\lim_{\substack{A \ni z \rightarrow \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z) = f(\alpha)$ が成り立つとき、その関数 f はその集合 A で連続であるなどという。特に、その集合 A が $A = \{\alpha\}$ と与えられているとき、その関数 f は点 α で連続であるなどという。

定理 1.6.12. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、$\forall \alpha \in D(f)$ に対し、次のことは同値である。

- その関数 f はその点 α で連続である。
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall z \in D(f)$ に対し、$z \in U(\alpha, \delta) \cap R$ が成り立つなら、$f(z) \in U(f(\alpha), \varepsilon)$ が成り立つ。
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V(f|U(\alpha, \delta) \cap D(f)) \subseteq U(f(\alpha), \varepsilon) \cap S$ が成り立つ。
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\alpha, \delta) \cap D(f) \subseteq V\left(f^{-1}|U(f(\alpha), \varepsilon) \cap S\right)$ が成り立つ。
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\alpha \in \mathrm{int}_{D(f)} V\left(f^{-1}|U(f(\alpha), \varepsilon) \cap S\right)$ が成り立つ。
- $\forall U \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$f(\alpha) \in \mathrm{int}_S U$ が成り立つなら、$\alpha \in \mathrm{int}_{D(f)} V\left(f^{-1}|U\right)$ が成り立つ。
- 広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ z \neq \alpha \\ R \rightarrow S}} f(z)$ がその集合 S で存在しこれがその点 $f(\alpha)$ に等しい。

証明. 定義と定理 1.6.5 より明らかに次のことは同値である。

- その関数 f はその点 α で連続である。
- $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+\forall z \in D(f)$ に対し、$z \in U(\alpha,\delta) \cap R$ が成り立つなら、$f(z) \in U(f(\alpha),\varepsilon)$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V(f|U(\alpha,\delta) \cap D(f)) \subseteq U(f(\alpha),\varepsilon) \cap S$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\alpha,\delta) \cap D(f) \subseteq V\left(f^{-1}|U(f(\alpha),\varepsilon) \cap S\right)$ が成り立つ。

また、開核の定義より次のことは同値である。

- $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\alpha,\delta) \cap D(f) \subseteq V\left(f^{-1}|U(f(\alpha),\varepsilon) \cap S\right)$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\alpha \in \mathrm{int}_{D(f)}V\left(f^{-1}|U(f(\alpha),\varepsilon) \cap S\right)$ が成り立つ。

さらに、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\alpha,\delta) \cap D(f) \subseteq V\left(f^{-1}|U(f(\alpha),\varepsilon) \cap S\right)$ が成り立つとき、$\forall U \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$f(\alpha) \in \mathrm{int}_S U$ が成り立つなら、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(f(\alpha),\varepsilon) \cap S \subseteq U$ が成り立つので、$V\left(f^{-1}|U(f(\alpha),\varepsilon) \cap S\right) \subseteq V\left(f^{-1}|U\right)$ が成り立つかつ、$\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\alpha,\delta) \cap D(f) \subseteq V\left(f^{-1}|U(f(\alpha),\varepsilon) \cap S\right)$ が成り立つことから、$U(\alpha,\delta) \cap D(f) \subseteq V\left(f^{-1}|U\right)$ が得られる。これにより、$\alpha \in \mathrm{int}_{D(f)}V\left(f^{-1}|U\right)$ が成り立つ。逆に、$\forall U \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$f(\alpha) \in \mathrm{int}_S U$ が成り立つなら、$\alpha \in \mathrm{int}_{D(f)}V\left(f^{-1}|U\right)$ が成り立つとき、明らかに、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\alpha \in \mathrm{int}_{D(f)}V\left(f^{-1}|U(f(\alpha),\varepsilon) \cap S\right)$ が成り立つ。これにより、次のことは同値である。

- $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\alpha,\delta) \cap D(f) \subseteq V\left(f^{-1}|U(f(\alpha),\varepsilon) \cap S\right)$ が成り立つ。
- $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\alpha \in \mathrm{int}_{D(f)}V\left(f^{-1}|U(f(\alpha),\varepsilon) \cap S\right)$ が成り立つ。
- $\forall U \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、$f(\alpha) \in \mathrm{int}_S U$ が成り立つなら、$\alpha \in \mathrm{int}_{D(f)}V\left(f^{-1}|U\right)$ が成り立つ。

さらに、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+\forall z \in D(f)$ に対し、$z \in U(\alpha,\delta) \cap R$ が成り立つなら、$f(z) \in U(f(\alpha),\varepsilon)$ が成り立つとき、もちろん、$z \neq \alpha$ としても成り立つので、その極限値 $\lim_{\substack{z \to \alpha \\ z \neq \alpha \\ R \to S}} f(z)$ がその集合 S で存在しこれがその点 $f(\alpha)$ に等しい。逆にこれが成り立つなら、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\alpha \in U(\alpha,\delta) \cap R$ が成り立つなら、$f(\alpha) \in U(f(\alpha),\varepsilon)$ が成り立つので、その関数 f はその点 α で連続である。ゆえに、次のことは同値である。

- その関数 f はその点 α で連続である。
- $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+\forall z \in D(f)$ に対し、$z \in U(\alpha,\delta) \cap R$ が成り立つなら、$f(z) \in U(f(\alpha),\varepsilon)$ が成り立つ。
- 広い意味での極限値 $\lim_{\substack{z \to \alpha \\ z \neq \alpha \\ R \to S}} f(z)$ がその集合 S で存在しこれがその点 $f(\alpha)$ に等しい。

□

定理 1.6.13. $A \subseteq D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f: D(f) \to S$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- その関数 f がその集合 A で連続である。
- $\forall U \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 U がその集合 S で開集合であるなら、その集合 $V\left(f^{-1}|U\right) \cap A$ もその

集合 A で開集合である。

証明. $A \subseteq D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、その関数 f がその集合 A で連続であるとする。そこで、$\forall U \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 U がその集合 S で開集合であるなら、$\forall\alpha \in V\left(f^{-1}|U\right) \cap A$ に対し、$f(\alpha) \in U$ が成り立つので、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U\left(f(\alpha), \varepsilon\right) \cap S \subseteq U$ が成り立つ。仮定と定理 1.6.12 より $\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\alpha, \delta) \cap D(f) \subseteq V\left(f^{-1}|U\left(f(\alpha), \varepsilon\right) \cap S\right) \subseteq V\left(f^{-1}|U\right)$ が成り立つので、$A \subseteq D(f)$ より $U(\alpha, \delta) \cap A \subseteq V\left(f^{-1}|U\right) \cap A$ が成り立つ。

逆に、$\forall U \in \mathfrak{P}(S)$ に対し、その集合 U がその集合 S で開集合であるなら、その集合 $V\left(f^{-1}|U\right) \cap A$ もその集合 A で開集合であるとする。$\forall\alpha \in A\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、その集合 $U\left(f(\alpha), \varepsilon\right) \cap S$ がその集合 S での開集合であるので、仮定よりその集合 $V\left(f^{-1}|U\left(f(\alpha), \varepsilon\right) \cap S\right) \cap A$ もその集合 A で開集合である。$f(\alpha) \in U\left(f(\alpha), \varepsilon\right) \cap S$ が成り立つかつ、$\alpha \in A$ も成り立つので、$\alpha \in V\left(f^{-1}|U\left(f(\alpha), \varepsilon\right) \cap S\right) \cap A$ も成り立つことから、$\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$U(\alpha, \delta) \cap A \subseteq V\left(f^{-1}|U\left(f(\alpha), \varepsilon\right) \cap S\right) \cap A$ が成り立つ、即ち、$U(\alpha, \delta) \cap A \subseteq V\left((f|A)^{-1}|U\left(f|A(\alpha), \varepsilon\right) \cap S\right)$ が成り立つので、定理 1.6.12 よりその関数 $f|A$ はその集合 A で連続である。よって、その関数 f はその集合 A で連続である。 $\square$

定理 1.6.14. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow S$ が与えられたとき、$\forall\alpha \in D(f)$ に対し、その関数 f がその点 α で連続であるならそのときに限り、それらの関数たち $\mathrm{Re}f$、$\mathrm{Im}f$ がどちらもその点 α で連続である。

ここで、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ でなく $S \subseteq \mathbb{C}$ と仮定していることに注意しよう。

証明. 定理 1.6.6 より明らかである。 $\square$

定理 1.6.15. $D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$D(g) \subseteq S \subseteq \mathbb{C}$、$T \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる 2 つの関数たち $f : D(f) \rightarrow S$、$g : D(g) \rightarrow T$ が与えられたとき、$V(f) \subseteq D(g)$ が成り立つとき、$\forall\alpha \in D(f)$ に対し、その関数 f がその点 α で連続でその関数 g がその点 $f(\alpha)$ で連続であるなら、その関数 $g \circ f$ はその点 α で連続である。

証明. 定理 1.6.4 より明らかである。 $\square$

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1985. 第 34 刷 p50-63 ISBN978-4-13-062005-5

謝辞

本書を作成するにあたってさまざまな方々からのご援助をいただいた。2020 年度 17 組の担任の先生は証明などで挫折しそうになったとき email での質問にわざわざ対応してくださった。おかげで、夏期休業の間に解析学に精通している方々への相談ができた。2020 年度春学期の基礎微分積分 1(17 組) の先生は極限の定義のミスを指摘してくださり、さらに、証明に関する貴重な助言をしてくださった。おかげで、難航してしまった証明を書ききることができた。これらのお骨折りに対し厚く感謝する。

1.7 連結と弧状連結

1.7.1 連結

定義 1.7.1. $R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 R における開集合であるかつ閉集合でもあるようなその集合 R の部分集合がその集合 R 自身か空集合以外に存在しないようなとき、その集合 R は連結であるという。

定義 1.7.2. $R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 R における開集合であるかつ連結であるようなその集合 R の部分集合 D をその集合 R における領域という。

定理 1.7.1. $R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 R が与えられたとき、次のことは同値である。

- その集合 R は連結である。
- 2 つの空集合でないその集合 R における任意の開集合たち U、V は $R \neq U \sqcup V$ を満たす。
- 2 つの空集合でないその集合 R における任意の閉集合たち C、D は $R \neq C \sqcup D$ を満たす。

証明. $R \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる集合 R が与えられたとき、2 つの空集合でないその集合 R におけるある開集合たち U、V が存在して、$R = U \sqcup V$ が成り立つなら、それらの集合たち U、V がそれぞれ開集合 V、U の補集合でもあるので、それらの集合たち U、V は閉集合でもある。ゆえに、その集合 R は連結でない。逆に、その集合 R が連結でないなら、その集合 R 自身か空集合以外に集合 R における開集合であるかつ閉集合でもあるような部分集合 U が存在する。そこで、$V = R \setminus U$ とすれば、その集合 V が閉集合でもあるので、その集合 V は空集合でない開集合となっており、さらに、$R = U \sqcup V$ が成り立つ。以上の議論により、次のことは同値であることが示された。

- その集合 R は連結である。
- 2 つの空集合でないその集合 R における任意の開集合たち U、V は $R \neq U \sqcup V$ を満たす。

同様にして次のことは同値であることも示される。

- その集合 R は連結である。
- 2 つの空集合でないその集合 R における任意の閉集合たち C、D は $R \neq C \sqcup D$ を満たす。

□

定理 1.7.2. $A \subseteq D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \to S$ が与えられたとき、この関数 f がその集合 A で連続であるかつ、その集合 A が連結であるなら、その値域 $V(f|A)$ は連結である。

証明. $A \subseteq D(f) \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : D(f) \to S$ が与えられたとき、この関数 f がその集合 A で連続であるかつ、その集合 A が連結であるとする。その値域 $V(f|A)$ が連結でないと仮定すると、定理 1.7.1 よりその値域 $V(f|A)$ の空集合でない開集合たち U、V が存在して、$V(f|A) = U \sqcup V$ が成り立つ。このとき、次のようになるかつ、

$$\begin{aligned} V(f|A) = U \cup V &\Leftrightarrow A \subseteq V\left(f^{-1}|V(f|A)\right) = V\left(f^{-1}|U \cup V\right) \\ &\Rightarrow A \subseteq V\left(f^{-1}|U\right) \cup V\left(f^{-1}|V\right) \end{aligned}$$

値域の定義より $V\left(f^{-1}|U\right) \subseteq A$ かつ $V\left(f^{-1}|V\right) \subseteq A$ が成り立つので、$A = V\left(f^{-1}|U\right) \cup V\left(f^{-1}|V\right)$ が成

り立つ。また、次のようになるので、

$$\begin{aligned}U \cap V = \emptyset &\Rightarrow V\left(f^{-1}|U \cap V\right) = V\left(f^{-1}|\emptyset\right) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow V\left(f^{-1}|U\right) \cap V\left(f^{-1}|V\right) = \emptyset\end{aligned}$$

よって、$A = V\left(f^{-1}|U\right) \sqcup V\left(f^{-1}|V\right)$ が成り立つ。もちろん、$V\left(f^{-1}|U\right) \neq \emptyset$ かつ $V\left(f^{-1}|V\right) \neq \emptyset$ が成り立つ。

そこで、定理 1.6.13 よりそれらの集合たち $V\left(f^{-1}|U\right) \cap A$、$V\left(f^{-1}|V\right) \cap A$ もその集合 A で開集合であるので、$A = V\left(f^{-1}|U\right) \sqcup V\left(f^{-1}|V\right)$ に注意すれば、それらの集合たち $V\left(f^{-1}|U\right)$、$V\left(f^{-1}|V\right)$ もその集合 A での空集合でない開集合であることになる。このとき、$A = V\left(f^{-1}|U\right) \sqcup V\left(f^{-1}|V\right)$ が成り立っているので、その集合 A は連結でないことになるが、これは仮定に矛盾している。 □

1.7.2 弧状連結

定義 1.7.3. 複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合 A が与えられたとき、$\forall z, w \in A$ に対し、次を満たすような集合 $\mathbb{R}$ の部分集合となる有界閉区間 $[\alpha, \beta]$ と写像 $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ が存在するとき、その集合 A は弧状連結であるといいその写像 f をそれらの元々 z、w を結ぶその集合 A 内で結ぶ連続曲線という。

- その写像 f が有界閉区間 $[\alpha, \beta]$ で連続である。
- $f(\alpha) = z$ かつ $f(\beta) = w$ が成り立つ。
- $V(f) \subseteq A$ が成り立つ。

定義 1.7.4. 複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合 A が与えられたとき、$\forall z, w \in A$ に対し、これらの 2 点 z、w を端点とする線分 $l = \{z + t(w - z) | t \in [0, 1]\}$ が $l \subseteq A$ を満たすとき、その集合 A は凸集合であるなどという。

定義 1.7.5. 複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合 A が与えられたとき、$\forall w \in A$ に対し、2 点 z、w を端点とする線分 $l = \{z + t(w - z) | t \in [0, 1]\}$ が $l \subseteq A$ を満たすようなその集合 A の元 z が存在するとき、この集合 A はその点 z に関して星形であるという。

定理 1.7.3. 凸集合であるかある 1 点 z に関して星形であるような集合 A は弧状連結である。

証明. 凸集合であるかある 1 点 z に関して星形であるような集合 A が与えられたとき、その集合 A が凸集合であるとき、$\forall z, w \in A$ に対し、これらの 2 点 z、w を端点とする線分 $l = \{z + t(w - z) | t \in [0, 1]\}$ は $l \subseteq A$ を満たすのであった。このとき、写像 $f : [0, 1] \rightarrow l; t \mapsto z + t(w - z)$ が考えられれば、明らかにその写像 f が有界閉区間 $[0, 1]$ で連続であるかつ、$f(0) = z$ かつ $f(1) = w$ が成り立つかつ、$V(f) = l \subseteq A$ が成り立つので、その集合 A は弧状連結である。

その集合 A がある 1 点 z に関して星形であるとき、$\forall v, w \in A$ に対し、これらの 2 点 z、v を端点とする線分 $l_v = \{z + t(v - z) | t \in [0, 1]\}$、これらの 2 点 z、w を端点とする線分 $l_w = \{z + t(w - z) | t \in [0, 1]\}$ は $l_v, l_w \subseteq A$ を満たすのであった。ここで、写像たち $g : [-1, 0] \rightarrow [0, 1]; t \rightarrow -t$、$[0, 1] \rightarrow l; t \mapsto z + t(v - z)$、$[0, 1] \rightarrow l; t \mapsto z + t(w - z)$ を用いて写像 $f : [-1, 1] \rightarrow l_v \cup l_w; t \mapsto \begin{cases} z + t(v - z) & \text{if} \quad t \geq 0 \\ z - t(w - z) & \text{if} \quad t < 0 \end{cases}$ が考えられれば、明らかにその写像 f が有界閉区間 $[-1, 1]$ で連続であるかつ、$f(0) = z$ かつ $f(1) = w$ が成り立つかつ、$V(f) = l_v \cup l_w \subseteq A$ が成り立つので、その集合 A は弧状連結である。 □

定義 1.7.6. 集合 $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[\alpha, \beta]$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への次を満たすような写像 f を折線という。

- その写像 f はその有界閉区間 $[\alpha,\beta]$ で連続である。
- 有限個の $\begin{cases} a_1 = \alpha \\ \forall i \in \varLambda_m \left[a_i \leq a_{i+1} \right] \\ a_{m+1} = \beta \end{cases}$ なる自然数 m と実数たち a_i が存在して、$\forall i \in \varLambda_m \exists \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ に対し、$f| \left[a_i, a_{i+1} \right] : \left[a_i, a_{i+1} \right] \rightarrow \mathbb{C}; t \mapsto \gamma t + \delta$ が成り立つ。

定理 1.7.4. 集合 $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[\alpha,\beta]$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への折線 f はそれらの元々 $f(\alpha)$、$f(\beta)$ を結ぶその集合 A 内で結ぶ連続曲線である。

証明. 集合 $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[\alpha,\beta]$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への折線 f において、その写像 f はその閉区間 $[\alpha,\beta]$ で連続であるかつ、$V(f) \subseteq \mathbb{C}$ が成り立つので、明らかにその写像 f はその複素平面 $\mathbb{C}$ の元々 $f(\alpha)$、$f(\beta)$ を結ぶその集合 A 内で結ぶ連続曲線である。 □

定理 1.7.5. 複素平面 $\mathbb{C}$ の空でない開集合 U について、次のことは同値である。

- その集合 U は連結である。
- その集合 U の任意の 2 点 z、w はその集合 U 内の折線で結べる。
- その集合 U は弧状連結である。

これは次のようにして示される。

1. まず、その集合 U が連結であるなら、その集合 U の任意の 2 点 z、w はその集合 U 内の折線で結べることを示す。
2. $\forall z \in U$ に対し、その点 z と折線で結べる点全体の集合を A とおきそうでない点全体の集合を B とおく。
3. その集合 A は空でないかつ、その集合 U が開集合であるかつ、$\forall z' \in U \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall w' \in U\left(z',\varepsilon \right) \subseteq U$ に対し、これらの 2 点 z'、w' を端点とする線分 l は $l \subseteq U\left(z',\varepsilon \right)$ を満たす。
4. その開球 $U\left(z',\varepsilon \right)$ 内で線分が結ばれることができるので、それらの集合たち A、B は開集合である。
5. 4. よりその集合 B は空集合である。
6. 2. と 5. より、その集合 U の任意の 2 点 z、w はその集合 U 内の折線で結べる。
7. その集合 U の任意の 2 点 z、w はその集合 U 内の折線で結べるなら、明らかにその集合 U は弧状連結である。
8. 最後にその集合 U は弧状連結であるなら、その集合 U は連結であることを背理法で示す。
9. その集合 U は弧状連結であるかつ、その集合 U は連結でないと仮定する。
10. $U = A \sqcup B$ かつ $A,B \neq \emptyset$ なる開集合たち A、B が与えられたとき、$\forall z \in A \forall w \in B$ に対し、それらの元々 z、w をその集合 U 内で結ぶ始集合が有界閉区間 $[\alpha,\beta]$ であるような連続曲線 f が存在できる。
11. 10. より $\alpha < \beta$ が成り立つ。
12. $K = \{ t \in [\alpha,\beta] | f(t) \in A \}$ なる集合 K は空集合でない。
13. $U(K) \neq \emptyset$ が成り立つ。
14. $\alpha \leq \sup K \leq \beta$ が成り立つ。
15. その写像 f はその閉区間 $[\alpha,\beta]$ で連続であることから、ε-δ 論法を開球を用いた式に書き換える。
16. その集合 A は開集合であることから、$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V\left(f|[\alpha,\alpha + \delta) \right) \subseteq U(a,\varepsilon) \subseteq A$ が成り立つ。

17. 16. より $\alpha \neq \sup K$ が成り立つ。
18. 15. から 17. までと同様にして、$\beta \neq \sup K$ が成り立つ。
19. 14. から 18. より $\alpha < \sup K < \beta$ が成り立つ。
20. $f(\sup K) \in A$ のとき、その写像 f はその閉区間 $[\alpha, \beta]$ で連続であることから、ε-δ 論法を開球を用いた式に書き換える。
21. $\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V(f|(\sup K - \delta, \sup K + \delta)) \subseteq U(f(\sup K), \varepsilon) \subseteq A$ が成り立つ。
22. $0 < \delta' < \delta$ なる実数 δ' をとり $\sup K + \delta' \in K$ が成り立つことに注意すると、その実数 $\sup K$ が上限であることに矛盾している。
23. $f(\sup K) \in B$ のとき、20. から 21. までと同様にして、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V(f|(\sup K - \delta, \sup K + \delta)) \subseteq U(f(\sup K), \varepsilon) \subseteq B$ が成り立つ。
24. $0 < \delta' < \delta$ なる実数 δ' をとり $\sup K - \delta' \in K$ が成り立つことに注意すれば、$f(\sup K - \delta') \in A \cap B$ が成り立つ。
25. 24. は $U = A \sqcup B$ が成り立つことに矛盾している。
26. 以上より、その集合 U は弧状連結であるなら、その集合 U は連結である。

証明. 複素平面 $\mathbb{C}$ の空でない連結な開集合 U が与えられたとき、$\forall z \in U$ に対し、その点 z と折線で結べる点全体の集合を A とおきそうでない点全体の集合を B とおくと、明らかに $U = A \sqcup B$ が成り立ち、$z \in A$ が成り立つので、その集合 A は空でない。ここで、その集合 U は開集合であるから、$\forall z' \in U \exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、中心がその点 z' で半径が実数 ε であるような開球 $U(z', \varepsilon)$ が $U(z', \varepsilon) \subseteq U$ を満たす。$\forall w' \in U(z', \varepsilon)$ に対し、明らかにこれらの 2 点 z'、w' を端点とする線分 $l = \{z' + t(w' - z') | t \in [0,1]\}$ は $l \subseteq U(z', \varepsilon)$ を満たす。明らかに $l \subseteq U(z', \varepsilon) \subseteq U$ が成り立つので、その点 z' がその点 z とその集合 U 内で折線で結べるならそのときに限り、その点 w' がその点 z とその集合 U 内で折線で結べる。ここで、$z' \in A$ なら先ほどの議論で開球 $U(z', \varepsilon)$ 内で線分が結ばれることができていたので、$U(z', \varepsilon) \subseteq A$ が成り立つ。$z' \in B$ なら同様にして $U(z', \varepsilon) \subseteq B$ が成り立つ。したがって、それらの集合たち A、B は開集合である。ここで、連結の定義より空でない 2 つの開集合たちの直和とならないかつ、$U = A \sqcup B$ が成り立つかつ、その集合 A は空でないので、その集合 B は空集合である。これにより、その集合 U の任意の 2 点 z、w はその集合 U 内の折線で結べる。

その集合 U の任意の 2 点 z、w はその集合 U 内の折線で結べるなら、その折線はその集合 U 内で結ぶ連続曲線であったので、その集合 U は弧状連結である。

その集合 U は弧状連結であるかつ、その集合 U は連結でないと仮定しよう。このとき、$U = A \sqcup B$ かつ $A, B \neq \emptyset$ なる開集合たち A、B が存在することになる。$\forall z \in A \forall w \in B$ に対し、仮定よりそれらの元々 z、w をその集合 U 内で結ぶ連続曲線 f が存在できるのであったので、そうするとき、集合 $\mathbb{R}$ のある閉区間 $[\alpha, \beta]$ を用いて $U = A \sqcup B$ より $A \cap B = \emptyset$ が成り立ち $z \neq w$ が成り立つかつ、対応 f は写像で、その閉区間 $[\alpha, \beta]$ の元が 1 つ決まると、その集合 U の元がただ 1 つ決まるかつ、$f(\alpha) = z$ かつ $f(\beta) = w$ が成り立つので、$\alpha \neq \beta$ が得られ、したがって、$\alpha < \beta$ が成り立つ。$K = \{t \in [\alpha, \beta] | f(t) \in A\}$ なる集合 K が与えられたとき、$\alpha \in K$ よりその集合 K は空集合でなく、$\beta \notin K$ かつ $\alpha < \beta$ よりその元 β がその集合 K の上界となるので、$U(K) \neq \emptyset$ が成り立ちその集合 K は上に有界となり、したがって、$\sup K \in \mathbb{R}$ なる実数 $\sup K$ が存在し、定義より明らかに、$\alpha \leq \sup K \leq \beta$ が成り立つ。ここで、これらの集合たち A、B は開集合であるから、$U(z, \varepsilon) \subseteq A$ かつ $U(w, \varepsilon) \subseteq B$ なる実数 ε が集合 $\mathbb{R}^+$ に存在する。ここで、その写像 f はその閉区間 $[\alpha, \beta]$ で連続であるから、次式が成り立ち、

$$\lim_{t \to \alpha} f(t) = f(\alpha) = z$$

したがって、開球を用いれば、ε-δ 論法は、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V\left(f|U(\alpha,\delta)\cap[\alpha,\beta]\right) \subseteq U\left(z,\varepsilon\right)$ が成り立つことと同値である。ここで、次のようになり、

$$\begin{aligned} t \in U(\alpha,\delta)\cap[\alpha,\beta] &\Leftrightarrow |t-\alpha| < \delta \wedge \alpha \leq t \leq \beta \\ &\Leftrightarrow \alpha-\delta < t < \alpha+\delta \wedge \alpha \leq t \leq \beta \\ &\Leftrightarrow \alpha \leq t < \alpha+\delta \wedge \alpha \leq t \leq \beta \end{aligned}$$

さらに、その実数 δ をもっと小さくとることができ、そうすれば、$\alpha+\delta \leq \beta$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned} t \in U(\alpha,\delta)\cap[\alpha,\beta] &\Leftrightarrow \alpha \leq t < \alpha+\delta \\ &\Leftrightarrow t \in [\alpha,\alpha+\delta) \end{aligned}$$

したがって、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V\left(f|[\alpha,\alpha+\delta)\right) \subseteq U\left(z,\varepsilon\right)$ が成り立つ。また、その集合 A は開集合であるので、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V\left(f|[\alpha,\alpha+\delta)\right) \subseteq U\left(z,\varepsilon\right) \subseteq A$ が成り立つ。これにより、$\alpha+\delta \in K$ となりその実数 α より大きいその集合 K の元が必ず存在できるので、$\alpha \neq \sup K$ が得られる。同様にして、$\sup K \neq \beta$ が得られる。先ほどで $\alpha \leq \sup K \leq \beta$ が成り立つのであったので、$\alpha < \sup K < \beta$ が成り立つ。

$\sup K \in [\alpha,\beta]$ より $f\left(\sup K\right) \in U = A \sqcup B$ が成り立つので、$f\left(\sup K\right) \in A$ または $f\left(\sup K\right) \in B$ が成り立つかつ、$f\left(\sup K\right) \notin A\cap B$ が成り立たないことになる。

$f\left(\sup K\right) \in A$ のとき、その写像 f はその閉区間 $[\alpha,\beta]$ で連続であるから、次式が成り立ち

$$\lim_{t\to\sup K} f(t) = f\left(\sup K\right)$$

したがって、開球を用いれば、ε-δ 論法は、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V\left(f|U\left(\sup K,\delta\right)\cap[\alpha,\beta]\right) \subseteq U\left(f\left(\sup K\right),\varepsilon\right)$ が成り立つことと同値である。その集合 A は開集合であるので、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V\left(f|U\left(\sup K,\delta\right)\cap[\alpha,\beta]\right) \subseteq U\left(f\left(\sup K\right),\varepsilon\right) \subseteq A$ が成り立つ。ここで、さらに、その実数 δ をもっと小さくとることができ、そうすれば、$\alpha \leq \sup K-\delta$ かつ $\sup K+\delta \leq \beta$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} t \in U\left(\sup K,\delta\right)\cap[\alpha,\beta] &\Leftrightarrow |t-\sup K| < \delta \wedge \alpha \leq t \leq \beta \\ &\Leftrightarrow \sup K-\delta < t < \sup K+\delta \wedge \alpha \leq t \leq \beta \\ &\Leftrightarrow \sup K-\delta < t < \sup K+\delta \\ &\Leftrightarrow t \in \left(\sup K-\delta,\sup K+\delta\right) \end{aligned}$$

したがって、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V\left(f|\left(\sup K-\delta,\sup K+\delta\right)\right) \subseteq U\left(f\left(\sup K\right),\varepsilon\right) \subseteq A$ が成り立つ。これにより、$0 < \delta' < \delta$ なる実数 δ' がとられれば、$\sup K+\delta' \in K$ が成り立つが、$\sup K < \sup K+\delta'$ が成り立つので、その実数 $\sup K$ が上限であることに矛盾する。

$f\left(\sup K\right) \in B$ のとき、同様にして、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V\left(f|U\left(\sup K,\delta\right)\cap[\alpha,\beta]\right) \subseteq U\left(f\left(\sup K\right),\varepsilon\right)$ が成り立つ。その集合 B は開集合であるので、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V\left(f|U\left(\sup K,\delta\right)\cap[\alpha,\beta]\right) \subseteq U\left(f\left(\sup K\right),\varepsilon\right) \subseteq B$ が成り立つ。ここで、同様にして、$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$V\left(f|\left(\sup K-\delta,\sup K+\delta\right)\right) \subseteq U\left(f\left(\sup K\right),\varepsilon\right) \subseteq B$ が成り立つ。これにより、$0 < \delta' < \delta$ なる実数 δ' をとれば、$\sup K-\delta' \in \left(\sup K-\delta,\sup K+\delta\right)$ が成り立つかつ、$\sup K-\delta' \in K$ が成り立つので、$f\left(\sup K-\delta'\right) \in A$ が成り立つが、$f\left(\sup K-\delta'\right) \in V\left(f|U\left(\sup K,\delta\right)\cap[\alpha,\beta]\right) \subseteq B$ が成り立つので、次式が成り立ち

$$f\left(\sup K-\delta'\right) \in A \wedge f\left(\sup K-\delta'\right) \in B \Leftrightarrow f\left(\sup K-\delta'\right) \in A\cap B$$

その集合 $A \cap B$ は空集合でなくなり $U = A \sqcup B$ に矛盾する。

以上より、その集合 U は弧状連結であるなら、その集合 U は連結である。 $\square$

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1980. 第 34 刷 p68-78 ISBN978-4-13-062005-5

[2] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968. 新装版第 2 刷 p200-206 ISBN978-4-00-029871-1

1.8 整級数

1.8.1 整級数

定義 1.8.1. 複素数たち a_n、a、z を用いた級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ をその複素数 a を中心とする整級数、冪級数などという。

定理 1.8.1. 整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は、$z=a$ が成り立てば、その複素数 a_0 に収束する。

証明. 任意の整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。このとき、$z=a$ が成り立てば、次のようになるので、

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k &= a_0(z-a)^0 + \sum_{k\in\Lambda_n} a_k(z-a)^k\\ &= a_0 + \sum_{k\in\Lambda_n} a_k(a-a)^k\\ &= a_0 + \sum_{k\in\Lambda_n} a_k 0^k = a_0\end{aligned}$$

したがって、次式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\Lambda_n} a_k(z-a)^k = \lim_{n\to\infty} a_0 = a_0$$

□

1.8.2 収束円板

定義 1.8.2. 次式のように定義される集合 $D(a,R)$ をその複素数 a を中心とする半径 R の円板という。

$$D(a,R) = \{z\in\mathbb{C}||z-a|<R\}$$

定理 1.8.2. $\forall a\in\mathbb{C}$ に対し、$D(a,\infty)=\mathbb{C}$ が成り立つ。

証明. 複素数 a を中心とする半径 ∞ の円板 $D(a,\infty)$ が与えられたとき、定義より明らかに $D(a,\infty)\subseteq\mathbb{C}$ が成り立つ。一方で、$\forall z\in\mathbb{C}$ に対し、$|z-a|\in\mathbb{R}$ が成り立つので、$|z-a|<\infty$ が成り立つ。したがって、$\mathbb{C}\subseteq D(a,\infty)$ が得られ、よって、$\forall a\in\mathbb{C}$ に対し、$D(a,\infty)=\mathbb{C}$ が成り立つ。 □

定理 1.8.3. 任意の整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がある複素数 z_0 を用いて $z=z_0$ が成り立つときで収束するとき、$|z-a|<|z_0-a|$ が成り立つような任意の複素数 z に対し、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束する。

もちろん、絶対収束する級数は収束するのであったので、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ も収束する。

証明. 任意の整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がある複素数 z_0 を用いて $z=z_0$ が成り立つときで収束するとき、複素数列 $\left(a_n\left(z_0-a\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束することになるので、その複素数列 $\left(a_n\left(z_0-a\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界で、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、次式が成り立つような正の実数 M が存在する。

$$\left|a_n\left(z_0-a\right)^n\right|\leq M$$

$|z-a|<|z_0-a|$ が成り立つような任意の複素数 z に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}|z-a|<|z_0-a| &\Rightarrow |a_n(z-a)^n|<\left|a_n\left(z_0-a\right)^n\right|\leq M\\ &\Rightarrow |a_n|\left|(z-a)^n\right|=|a_n(z-a)^n|\leq M\frac{\left|(z-a)^n\right|}{\left|(z_0-a)^n\right|}=M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n\end{aligned}$$

ここで、$|z-a|<|z_0-a|$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k &= M\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k\\ &= M\lim_{n\to\infty}\left(1+\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|\frac{1-\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n}{1-\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|}\right)\\ &= M+M\frac{\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|}{1-\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|}=M+\frac{M|z-a|}{|z_0-a|-|z-a|}\end{aligned}$$

したがって、$|a_n(z-a)^n|\leq M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$ が成り立つことにおいて、比較定理よりその級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束する。 □

定理 1.8.4. 任意の整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、次のことをみたす $R\in\mathbb{R}^+\cup\{0,\infty\}$ なる拡大実数 R が一意的に存在する。

- $|z-a|<R$ が成り立つなら、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束する。
- $|z-a|>R$ が成り立つなら、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しない。

その複素数 z が $|z-a|=R$ を満たすときではその整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束することも発散することもあることに注意されたい。

定義 1.8.3. 上の拡大実数 R をその整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束半径といいその複素数 a を中心とする半径 R の円板 $D(a,R)$ を収束円板といい集合 $\{z\in\mathbb{C}||z-a|=R\}$、即ち、集合 $\mathrm{cl}D(a,R)\setminus\mathrm{int}D(a,R)$ を収束円周という。

証明. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するような複素数 z 全体の集合を S とし次式のように集合 A を定義する。

$$A=\left\{|z-a|\in\mathbb{R}^+\cup\{0,\infty\}\middle|z\in S\right\}$$

その集合 A が上に有界であるなら、$R=\sup A$ とし、そうでないなら、$R=\infty$ とする。

$|z-a|<R$ が成り立つなら、次式が成り立つような複素数 z_0 が存在する。

$$|z-a|<|z_0-a|<R$$

このとき、上記の議論によりその整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k\left(z_0-a\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束する。

逆に、$|z-a|>R$ が成り立つなら、$R=\sup A$ のとき、$|z-a|\notin A$ が成り立つので、$z\notin S$ が成り立ち、$R=\infty$ のとき、そもそも $z\notin\mathbb{C}$ が成り立つので、$z\notin S$ が成り立つ。これにより、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k\left(z_0-a\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しない。

以上より、任意の整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、このような $R\in\mathbb{R}^+\cup\{0,\infty\}$ なる拡大実数 R が存在する。

また、このような拡大実数たち R、R' が互いに異なって存在するとする。$R<R'$ のとき、上記の議論により次式が成り立つようなある複素数 z_0 を用いて

$$R<|z_0-a|<R'$$

$|z_0-a|<R'$ が成り立つなら、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k\left(z_0-a\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束し、もちろん、収束することになるが、$|z_0-a|>R$ も成り立つので、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k\left(z_0-a\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しないことになり矛盾する。$R>R'$ のときも同様にして示される。以上より、そのような実数 R は一意的である。 □

定理 1.8.5. 整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束半径 R が $R=0$ を満たすとき、$z=a$ が成り立つとき以外でその整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しない。

証明. 整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束半径 R が $R=0$ を満たすとき、$R\in\mathbb{R}^+\cup\{0,\infty\}$ が成り立

つことに注意すれば、$z=a$ が成り立つとき以外で $|z-a|>R$ が成り立つことになり、このとき、その整級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は収束しない。 □

定理 1.8.6. 整級数たち $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} b_k(z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとする。これらの収束半径たちのうち小さいほうを R とおくと、$|z-a|<R$ が成り立つとき、$\forall\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\alpha \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n(z-a)^n + \beta \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} b_n(z-a)^n = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\alpha a_n + \beta b_n\right)(z-a)^n$$

証明. 整級数たち $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} b_k(z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとする。これらの収束半径たちのうち小さいほうを R とおくと、$|z-a|<R$ が成り立つとき、これらの整級数たちはいづれも絶対収束する。また、これらの整級数は複素数列の級数でもあるので、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\alpha \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n(z-a)^n + \beta \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} b_n(z-a)^n &= \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n-1}(z-a)^{n-1} + \beta \sum_{n \in \mathbb{N}} b_{n-1}(z-a)^{n-1} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\alpha a_{n-1}(z-a)^{n-1} + \beta b_{n-1}(z-a)^{n-1}\right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1}\right)(z-a)^{n-1} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\alpha a_n + \beta b_n\right)(z-a)^n
\end{aligned}$$

□

定理 1.8.7 (整級数における Mertens の定理)**.** 整級数たち $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} b_k(z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとする。これらの収束半径たちのうち小さいほうを R とおくと、$|z-a|<R$ が成り立つとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n(z-a)^n \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} b_n(z-a)^n = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_k b_{n-k}(z-a)^n$$

この定理を整級数における Mertens の定理という。

証明. 整級数たち $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} b_k(z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとする。これらの収束半径たちのうち小さいほうを R とおくと、$|z-a|<R$ が成り立つとき、これらの整級数たちはいづれも絶対収束する。また、これらの整級数は複素数列の級数でもあるので、定理 1.5.16、即ち、Mertens の定理より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n(z-a)^n \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} b_n(z-a)^n &= \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n-1}(z-a)^{n-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} b_{n-1}(z-a)^{n-1} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \varLambda_n} a_{k-1}(z-a)^{k-1} b_{n-k}(z-a)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\Lambda_n} a_{k-1}b_{n-k}(z-a)^{n-1} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \sum_{k\in\Lambda_{n+1}} a_{k-1}b_{n-k+1}(z-a)^{n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_{k}b_{n-k}(z-a)^{n}
\end{aligned}
$$

□

1.8.3 整級数における収束判定法

定理 1.8.8 (整級数における d'Alembert の収束判定法)**.** 整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。次式のように収束するとき、

$$
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R \in \mathbb{R}^+ \cup \{0,\infty\}
$$

その実数 R がその整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束半径となる。この定理を整級数における d'Alembert の収束判定法という。

証明. 整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。次式のように収束するとき、

$$
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R \in \mathbb{R}^+ \cup \{0,\infty\}
$$

極限 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z-a)^{n+1}}{a_n(z-a)^n} \right|$ が次式を満たし

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z-a)^{n+1}}{a_n(z-a)^n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z-a)^n(z-a)}{(z-a)^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} \lim_{n\to\infty} |z-a| \\
&= \frac{1}{R}|z-a| = \frac{|z-a|}{R} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0,\infty\} \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}
\end{aligned}
$$

ratio test より $\frac{|z-a|}{R} < 1$ のとき、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束し、$\frac{|z-a|}{R} > 1$ のとき、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束しない、即ち、$|z-a| < R$ のとき、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束し、$|z-a| > R$ のとき、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束しないことになる。

ここで、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束半径を R' とおく。$R>R'$ が成り立つと仮定すると、次式が成り立つようなある複素数 z_0 を用いて

$$R'<|z_0-a|<R$$

$|z_0-a|<R$ が成り立つなら、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k\left(z_0-a\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束し、もちろん、収束することになるが、$|z_0-a|>R'$ も成り立つので、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k\left(z_0-a\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しないことになり矛盾する。したがって、$R\leq R'$ が成り立つ。ここで、$R<R'$ が成り立つと仮定しても、同様にして、次式が成り立つようなある複素数 z_0 を用いて

$$R<|z_0-a|<R'$$

$|z_0-a|<R'$ が成り立つなら、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k\left(z_0-a\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束することになるが、$|z_0-a|>R$ も成り立つので、その整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k\left(z_0-a\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対収束しないことになり、やはり、矛盾する。したがって、$R=R'$ が成り立つことになる。 □

定理 1.8.9 (Cauchy-Hadamard の収束判定法)**.** 整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。次式のように収束するとき、

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}\in\mathbb{R}^+\cup\{0,\infty\}$$

その拡大実数 R がその整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束半径となる。この定理を Cauchy-Hadamard の収束判定法という。

なお、その上極限 $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が 0、∞ のとき、その拡大実数 R をそれぞれ ∞、0 と約束する。

証明. 整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。次式のように収束するとき、

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}\in\mathbb{R}^+\cup\{0,\infty\}$$

定理 1.8.1 より $z=a$ のとき収束するので、$z\neq a$ が成り立つとすると、次のようになることから、

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|}&=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|\,|z-a|^n}\\&=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|z-a|^n}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z-a| \\
&= \frac{|z-a|}{R}
\end{aligned}
$$

Cauchy の根判定法よりその実数 $\dfrac{|z-a|}{R}$ が 1 未満のとき絶対収束し 1 超過のとき絶対収束しない。ここで、$R \in \mathbb{R}^+$ のとき、その実数 $|z-a|$ が R 未満のとき絶対収束し R 超過のとき絶対収束しない。$R = \infty$ のとき、その複素数 z によらず絶対収束する。$R = 0$ のとき、その複素数 z が $z \neq a$ が成り立つなら、絶対収束しない。以上の議論により、その拡大実数 R がその整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} a_k (z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径となる。 □

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1985. 第 34 刷 p146-149 ISBN978-4-13-062005-5

[2] 棚橋典大. ”複素関数論　講義ノート”. 京都大学. https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~norihiro.tanahashi/pdf/complex-analysis/note.pdf (2021-3-19 取得)

1.9 関数列

1.9.1 関数列

定義 1.9.1. $A \subseteq \mathbb{C}$、$B \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数 $f : A \rightarrow B$ 全体の集合 $\mathfrak{F}(A, B)$ を関数空間といいこれの元の列を関数列という。

定義 1.9.2. $A, B \subseteq \mathbb{C}$ なる有界な関数 $f : A \rightarrow B$ 全体の集合を有界関数空間といいこれを $\mathfrak{B}(A, B)$ と書くことにする。

定理 1.9.1. $A, B \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A, B)$ は体 $\mathbb{C}$ 上の vector 空間をなす[*18]。

証明. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \forall f, g \in \mathfrak{B}(A, B)$ に対し、$\exists M, N \in \mathbb{R}^+$ に対し、$|f| < M$、$|g| < N$ が成り立つので、三角不等式より次のようになる。

$$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha f| + |\beta g| = |\alpha| |f| + |\beta| |g| \leq |\alpha| M + |\beta| N$$

ゆえに、$\alpha f + \beta g \in \mathfrak{B}(A, B)$ が成り立つ。あとは明らかである。 □

定義 1.9.3. $D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、上限 $\sup V(f)$ をその集合 $D(f)$ におけるその関数 f の上限といい $\sup_{z \in D(f)} f(z)$、特にその集合 $D(f)$ が明らかな場合では、$\sup f$ などと書く。

定義 1.9.4. 同様に、$D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、下限 $\inf V(f)$ をその集合 $D(f)$ におけるその関数 f の下限といい $\inf_{z \in D(f)} f(z)$、特にその集合 $D(f)$ が明らかな場合では、$\inf f$ などと書く。

定義 1.9.5. $A, B \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A, B)$ が与えられたとき、次のような写像 $|\bullet|_{A,\infty}$ をその有界関数空間 $\mathfrak{B}(A, B)$ の一様 norm という。

$$|\bullet|_{A,\infty} : \mathfrak{B}(A, B) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} ; f \mapsto \sup |f| = \sup_{z \in A} |f(z)|$$

定理 1.9.2. $A, B \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A, B)$ の一様 norm$|\bullet|_{A,\infty}$ を用いた組 $\left(\mathfrak{B}(A, B), |\bullet|_{A,\infty} \right)$ は体 $\mathbb{C}$ 上の norm 空間をなす、即ち、次のことが成り立つ。

- $\forall f \in \mathfrak{B}(A, B)$ に対し、$|f|_{A,\infty} = 0$ が成り立つならそのときに限り、$f = 0$ が成り立つ。
- $\forall f \in \mathfrak{B}(A, B) \forall \alpha \in \mathbb{C}$ に対し、$|\alpha f|_{A,\infty} = |\alpha| |f|_{A,\infty}$ が成り立つ。
- $\forall f, g \in \mathfrak{B}(A, B)$ に対し、$|f + g|_{A,\infty} \leq |f|_{A,\infty} + |g|_{A,\infty}$ が成り立つ。

証明. $A, B \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A, B)$ の一様 norm$|\bullet|_{A,\infty}$ を用いた組 $\left(\mathfrak{B}(A, B), |\bullet|_{A,\infty} \right)$ が与えられたとき、$\forall f \in \mathfrak{B}(A, B)$ に対し、$|f|_{A,\infty} = 0$ が成り立つなら、$0 \leq |f| \leq \sup |f| = |f|_{A,\infty} = 0$ が成り立つので、$f = 0$ が得られる。逆は明らかである。

$\forall f \in \mathfrak{B}(A, B) \forall \alpha \in \mathbb{C}$ に対し、$|\alpha f| = |\alpha| |f|$ が成り立つので、$|\alpha f|_{A,\infty} = \sup |\alpha f| = \sup |\alpha| |f| = |\alpha| \sup |f| = |\alpha| |f|_{A,\infty}$ が成り立つ。

$\forall f, g \in \mathfrak{B}(A, B)$ に対し、次式が成り立つので、

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq |f|_{A,\infty} + |g|_{A,\infty}$$

[*18] $\mathbb{R}$ のかわりに $\mathbb{C}$ としても同様にして示される。

$|f+g|_{A,\infty} \leq |f|_{A,\infty} + |g|_{A,\infty}$ が成り立つ。

よって、その組 $\left(\mathfrak{B}(A,B), |\bullet|_{A,\infty}\right)$ は体 $\mathbb{R}$ 上の norm 空間をなす。 □

1.9.2 各点収束

定義 1.9.6. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数空間 $\mathfrak{F}(A,S)$ の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。$\forall z \in A$ に対し、極限値 $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ がその集合 S に存在するとき、$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ とおくと、この関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はその集合 A 上でその関数 $f: A \to S$ に各点収束するといい、その関数 f をその関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限関数といい $\lim_{n\to\infty} f_n$ と書くことにする。

定義 1.9.7. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ なる関数空間 $\mathfrak{F}(A,S)$ の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。$\forall z \in A$ に対し、その点列 $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} f_k(z)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ とおくと、この級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はその集合 A 上でその極限関数 $f: A \to S$ に各点収束するといい、その極限関数 f を $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ と書くことにする。

定理 1.9.3. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる関数空間 $\mathfrak{F}(A,S)$ の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- その関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその極限関数 $f: A \to S$ に各点収束する。
- $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall z \in A \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ が成り立つ。

証明. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる関数空間 $\mathfrak{F}(A,S)$ の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、その関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f: A \to S$ に各点収束するならそのときに限り、$\forall z \in A$ に対し、$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ が成り立つので、これが成り立つならそのときに限り、$\forall z \in A \forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ が成り立つ。これが成り立つならそのときに限り、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall z \in A \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ が成り立つ。よって、次のことは同値であることが示された。

- その関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその極限関数 $f: A \to S$ に各点収束する。
- $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall z \in A \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ が成り立つ。

□

定理 1.9.4. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる関数空間 $\mathfrak{F}(A,\mathbb{C})$ の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} |f_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ も各点収束する。

定義 1.9.8. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる関数空間 $\mathfrak{F}(A,\mathbb{C})$ の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} |f_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はその集合 A 上で絶対収束するという。逆に、そ

の級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するかつその級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} |f_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束しないとき、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ はその集合 A 上で条件収束するという。

証明. 定理 1.5.13 より明らかである。実際、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} |f_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するならそのときに限り、$\forall z \in A$ に対し、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} |f_k(z)| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束することになる。そこで、定理 1.5.13 よりその級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} f_k(z) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ も収束するので、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ も各点収束する。 □

1.9.3 一様収束

定義 1.9.9. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,S)$ の関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとする。ある関数 $f : A \rightarrow S$ が存在して、$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|_{A,\infty} = 0$ が成り立つとき、この関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ はその集合 A 上でその関数 $f : A \rightarrow S$ に一様収束するという。

定義 1.9.10. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,S)$ の関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとする。その関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ について、ある関数 $f : A \rightarrow S$ が存在して、$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k \in \varLambda_n} f_k - f \right|_{A,\infty} = 0$ が成り立つとき、この級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ はその集合 A 上でその関数 $f : A \rightarrow S$ に一様収束するという。

定理 1.9.5. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,S)$ の関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- その関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f : A \rightarrow S$ に一様収束する。
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall z \in A \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ が成り立つ。

この定理と定理 1.9.3 によりその関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f : A \rightarrow S$ に各点収束するときの違いがよく表れているのであろう。

証明. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,S)$ の関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、その関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f : A \rightarrow S$ に一様収束するならそのときに限り、$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|_{A,\infty} = 0$ が成り立つ。これが成り立つならそのときに限り、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|f_n - f|_{A,\infty} < \varepsilon$ が成り立つ。ここで、$\forall z \in A$ に対し、$|f_n(z) - f(z)| \leq \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| = |f_n - f|_{A,\infty} < \varepsilon$ が成り立つので、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall z \in A \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ が成り立つ。

逆に、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall z \in A \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ が成り立つとき、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ が成り立つので、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$|f_n - f|_{A,\infty} < \varepsilon$ が成り立ち、これが成り立つならそのときに限り、$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|_{A,\infty} = 0$ が成り立つ。よって、その関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関

数 $f : A \rightarrow S$ に一様収束する。 $\square$

先ほどの定理の注意により次の系が得られる。

定理 1.9.6. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,S)$ の関数列 $\left(f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、その関数列 $\left(f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f : A \rightarrow S$ に一様収束するなら、その関数列 $\left(f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその極限関数 $f : A \rightarrow S$ に各点収束する。

ただし、これの逆は成り立たないことに注意されたい。

証明. 定理 1.9.3 と定理 1.9.5 より明らかである。 $\square$

定理 1.9.7. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,S)$ の関数列 $\left(f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、その関数 f_n がその集合 A で連続であるかつ、その関数列 $\left(f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f : A \rightarrow S$ に一様収束するなら、その極限関数 f はその集合 A で連続である。

証明. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,S)$ の関数列 $\left(f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、その関数 f_n がその集合 A で連続であるかつ、その関数列 $\left(f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f : A \rightarrow S$ に一様収束するとする。このとき、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq n$ が成り立つなら、$\left| f_n - f \right|_{A,\infty} < \varepsilon$ が成り立つ。ここで、その関数 f_n がその集合 A で連続であるので、$\forall z \in A \exists\delta \in \mathbb{R}^+ \forall w \in R$ に対し、$w \in U(z,\delta) \cap A$ が成り立つなら、$f_n(w) \in U\left(f_n(z), \varepsilon \right) \cap S$、即ち、$\left| f_n(w) - f_n(z) \right| < \varepsilon$ が成り立つ。このとき、次のようになることから、

$$
\begin{aligned}
|f(z) - f(w)| &= \left| f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(w) + f_n(w) - f(w) \right| \\
&\leq \left| f(z) - f_n(z) \right| + \left| f_n(z) - f_n(w) \right| + \left| f_n(w) - f(w) \right| \\
&= \left| f(z) - f_n(z) \right| + \left| f_n(w) - f_n(z) \right| + \left| f(w) - f_n(w) \right| \\
&\leq \sup_{z\in A} \left| f(z) - f_n(z) \right| + \left| f_n(w) - f_n(z) \right| + \sup_{z\in A} \left| f(z) - f_n(z) \right| \\
&= 2\left| f_n - f \right|_{A,\infty} + \left| f_n(w) - f_n(z) \right| < 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

$f(w) \in U(f(z), 3\varepsilon) \cap S$ が得られる。これにより、$\forall z \in A \forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta \in \mathbb{R}^+ \forall w \in R$ に対し、$w \in U(z,\delta) \cap A$ が成り立つなら、$f(w) \in U(f(z), \varepsilon) \cap S$ が成り立つことになるので、その極限関数 f はその集合 A で連続である。 $\square$

1.9.4 広義一様収束

定義 1.9.11. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,S)$ の関数列 $\left(f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。$\forall K \in \mathfrak{P}(A)$ に対し、その集合 K がその集合 R で compact であるなら、ある関数 $f : A \rightarrow S$ が存在して、$\lim_{n\rightarrow\infty} \left| \left(f_n - f \right) |K \right|_{K,\infty} = 0$ が成り立つとき、この関数列 $\left(f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ はその集合 A 上でその関数 $f : A \rightarrow S$ に広義一様収束する、compact 一様収束するという。

定義 1.9.12. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$、$S \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,S)$ の関数列 $\left(f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。その関数列 $\left(f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ から誘導される級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} f_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ について、$\forall K \in \mathfrak{P}(A)$ に対し、その集合 K がその集合 R で compact であるなら、ある関数 $f : A \rightarrow S$ が存在して、$\lim_{n\rightarrow\infty} \left| \left(\sum_{k\in\Lambda_n} f_k - f \right) |K \right|_{K,\infty} = 0$ が成り立つ

とき、この級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はその集合 A 上でその関数 $f:A\rightarrow S$ に広義一様収束する、compact 一様収束するという。

定理 1.9.8. $A\subseteq R\subseteq\mathbb{C}$、$S\subseteq\mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,S)$ の関数列 $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、その集合 A がその集合 R での開集合、または、閉集合であり、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、その関数 f_n がその集合 A で連続であるかつ、その関数列 $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f:A\rightarrow S$ に広義一様収束するなら、その極限関数 f はその集合 A で連続である。

証明. $A\subseteq R\subseteq\mathbb{C}$、$S\subseteq\mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,S)$ の関数列 $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。その集合 A がその集合 R での開集合であり、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、その関数 f_n がその集合 A で連続であるかつ、その関数列 $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f:A\rightarrow S$ に広義一様収束するとき、$\forall z\in A\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$U(z,\varepsilon)\cap R\subseteq A$ が成り立つ。$K=\mathrm{cl}_R\left(U\left(z,\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap R\right)$ とおかれるとき、$\exists\alpha\in R$ に対し、$\alpha\in K$ が成り立つ、即ち、$\forall\delta\in\mathbb{R}^+$ に対し、$U(\alpha,\delta)\cap U\left(z,\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap R\neq\emptyset$ が成り立つかつ、$\alpha\notin U(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つと仮定すると、$\exists\beta\in R$ に対し、$|\beta-\alpha|<\frac{\varepsilon}{4}$ かつ $|\beta-z|<\frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つかつ、$\varepsilon\leq|z-\alpha|$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned}\varepsilon&\leq|z-\alpha|\\&=|z-\beta+\beta-\alpha|\\&\leq|z-\beta|+|\beta-\alpha|\\&=|\beta-z|+|\beta-\alpha|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{3\varepsilon}{4}\end{aligned}$$

しかしながら、これは矛盾している。ゆえに、$\forall\alpha\in R$ に対し、$\alpha\in K$ が成り立つなら、$\alpha\in U(z,\varepsilon)\cap R$ が成り立つので、次のようになる。

$$K=\mathrm{cl}_R\left(U\left(z,\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap R\right)\subseteq U(z,\varepsilon)\cap R\subseteq A$$

ここで、その集合 K はその集合 R で有界な閉集合であるので、定理 1.4.7、即ち、Heine-Borel の被覆定理よりその集合 K はその集合 R で compact なその集合 A の部分集合であることになる。仮定よりある関数 $f:A\rightarrow S$ が存在して、$\lim_{n\rightarrow\infty}\left|\left(f_n-f\right)|K\right|_{K,\infty}=0$ が成り立つ。特に、関数列 $\left(f_n|K\right)_{n\in\mathbb{N}}$ について考えれば、ある関数 $f|K:K\rightarrow S$ が存在して、$\lim_{n\rightarrow\infty}\left|f_n|K-f|K\right|_{K,\infty}=0$ が成り立つので、この関数列 $\left(f_n|K\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はその集合 K 上でその関数 $f|K:K\rightarrow S$ に一様収束する。そこで、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、その関数 $f_n|K$ がその集合 K で連続であることから、定理 1.9.7 よりその極限関数 $f|K$ はその集合 K で連続である。特に、その極限関数 f はその点 z で連続であるので、よって、その極限関数 f はその集合 A で連続である。

その集合 A がその集合 R での閉集合であり、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、その関数 f_n がその集合 A で連続であるかつ、その関数列 $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f:A\rightarrow S$ に広義一様収束するなら、$\forall z\in A\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$L=\mathrm{cl}_R\left(U(z,\varepsilon)\cap R\right)\cap A$ とおかれるとき、その集合 L はその集合 R で閉集合であり、上と同じ議論により、$\mathrm{cl}_R\left(U(z,\varepsilon)\cap R\right)\subseteq U(z,2\varepsilon)\cap R$ が成り立つので、その集合 L は有界である。定理 1.4.7、即ち、Heine-Borel の被覆定理よりその集合 L はその集合 R で compact なその集合 A の部分集合であることになる。あとはその集合 A が開集合のときと同様にして示される。実際、仮定よりある関数 $f:A\rightarrow S$ が存在して、$\lim_{n\rightarrow\infty}\left|\left(f_n-f\right)|L\right|_{L,\infty}=0$ が成り立つ。特に、関数列 $\left(f_n|L\right)_{n\in\mathbb{N}}$ について考えれば、ある関数 $f|L:L\rightarrow S$ が存在して、$\lim_{n\rightarrow\infty}\left|f_n|L-f|L\right|_{L,\infty}=0$ が成り立つので、この関数列 $\left(f_n|L\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はその集合 L

上でその関数 $f|L:L\rightarrow S$ に一様収束する。そこで、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、その関数 $f_n|L$ がその集合 L で連続であることから、定理 1.9.7 よりその極限関数 $f|L$ はその集合 L で連続である。特に、その極限関数 f はその点 z で連続であるので、よって、その極限関数 f はその集合 A で連続である。 □

1.9.5 Cauchy の一様収束条件

定理 1.9.9 (関数列に関する Cauchy の一様収束条件). $A\subseteq R\subseteq\mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,\mathbb{C})$ の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、次のことは同値である。

- その関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f:A\rightarrow\mathbb{C}$ に一様収束する。
- $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq m,n$ が成り立つなら、$|f_m-f_n|_{A,\infty}<\varepsilon$ が成り立つ。

この定理を関数列に関する Cauchy の一様収束条件という。

証明. $A\subseteq R\subseteq\mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,\mathbb{C})$ の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、その関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がその集合 A 上でその関数 $f:A\rightarrow\mathbb{C}$ に一様収束するならそのときに限り、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$|f_n-f|_{A,\infty}<\varepsilon$ が成り立つことになるので、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq m,n$ が成り立つなら、三角不等式より次のようになる。

$$\begin{aligned}|f_m-f_n|_{A,\infty}&=|f_m-f+f-f_n|_{A,\infty}\\&\leq|f_m-f|_{A,\infty}+|f-f_n|_{A,\infty}\\&=|f_m-f|_{A,\infty}+|f_n-f|_{A,\infty}<2\varepsilon\end{aligned}$$

逆に、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq m,n$ が成り立つなら、$|f_m-f_n|_{A,\infty}<\varepsilon$ が成り立つとき、$\forall z\in A$ に対し、$|f_m(z)-f_n(z)|\leq\sup_{z\in A}|f_m(z)-f_n(z)|=|f_m-f_n|_{A,\infty}<\varepsilon$ が成り立つので、その点列 $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。Cauchy の収束条件よりその点列 $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しその極限値 $f(z)$ が n 次元数空間 $\mathbb{C}$ に存在する。このとき、$m\rightarrow\infty$ とすれば、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$N\leq n$ が成り立つなら、$|f_n(z)-f(z)|\leq\varepsilon$ が成り立つ。これにより、$|f_n-f|_{A,\infty}\leq\varepsilon$ が得られるので、その関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はその集合 A 上でその関数 $f:A\rightarrow\mathbb{C}$ に一様収束する。 □

1.9.6 優級数定理

定理 1.9.10 (優級数定理). $A\subseteq R\subseteq\mathbb{C}$ なる関数空間 $\mathfrak{F}(A,\mathbb{C})$ の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の条件たちいづれも満たすとき、

- $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、その関数 f_n はその集合 A で連続である。
- $\forall n\in\mathbb{N}\exists M_n\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ に対し、$|f_n|\leq M_n$ が成り立つ[*19]。
- その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}M_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束する。

その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が絶対収束しその極限関数 $\sum_{n\in\mathbb{N}}f_n$ はその集合 A で連続である。この定理を優級数

[*19] もちろん、$\forall z\in A\forall n\in\mathbb{N}\exists M_n\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ に対し、$|f_n(z)|\leq M_n$ が成り立つという意味。

定理という。

なお、この定理におけるその級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} M_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ をその級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の優級数という。

証明. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる関数空間 $\mathfrak{F}(A, \mathbb{C})$ の関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとする。その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が次の条件たちいづれも満たすとき、

- $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、その関数 f_n はその集合 A で連続である。
- $\forall n \in \mathbb{N} \exists M_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ に対し、$|f_n| \leq M_n$ が成り立つ。
- その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} M_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束する。

比較定理より、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} M_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するかつ、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$|f_n| \leq M_n$ が成り立つなら、その級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} |f_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ も収束する。したがって、定理 1.9.4 よりその級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ も絶対収束する。

ここで、仮定より級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n} M_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束することから、極限値 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \varLambda_n} M_k = \sum_{n \in \mathbb{N}} M_n$ が存在する。これが S とおかれると、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$p \leq n$ が成り立つなら、$\left| \sum_{k \in \varLambda_n} M_k - S \right| < \varepsilon$ が成り立つ。ここで、仮定よりそれらの定数たち M_n は負でない実数であるから、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k \in \varLambda_n} M_k - S \right| &= \left| \sum_{k \in \varLambda_n} M_k - \sum_{k \in \mathbb{N}} M_k \right| \\
&= \left| \sum_{k \in \varLambda_n} M_k - \left(\sum_{k \in \varLambda_n} M_k + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \varLambda_k} M_k \right) \right| \\
&= \left| \sum_{k \in \varLambda_n} M_k - \sum_{k \in \varLambda_n} M_k - \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \varLambda_k} M_k \right| \\
&= \left| - \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \varLambda_k} M_k \right| = \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \varLambda_k} M_k
\end{aligned}$$

また、関数 $\left| \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k - \sum_{k \in \varLambda_n} f_k \right|$ において三角不等式より次のようになり、

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k - \sum_{k \in \varLambda_n} f_k \right| &= \left| \sum_{k \in \varLambda_n} f_k + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \varLambda_k} f_k - \sum_{k \in \varLambda_n} f_k \right| \\
&= \left| \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \varLambda_k} f_k \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \varLambda_k} |f_k|
\end{aligned}$$

仮定より $\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、$|f_k| \leq M_k$ が成り立つのであったので、$\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \varLambda_n} |f_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \varLambda_n} M_k$ が成り立つ。こ

こで、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists p\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、$p<n$ が成り立つなら、$\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\varLambda_{n}}M_{k}<\varepsilon$ が成り立つことによりしたがって、次式が成り立つ。

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{k}-\sum_{k\in\varLambda_{n}}f_{k}\right|=\left|\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\varLambda_{k}}f_{k}\right|\leq\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\varLambda_{k}}\left|f_{k}\right|\leq\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\varLambda_{k}}M_{k}<\varepsilon$$

したがって、$k=p$ とすれば、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists p\in\mathbb{N}$ に対し、$\displaystyle\left|\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{k}-\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}\right|<\varepsilon$ が成り立つ。

また、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、それらの関数たち f_{n} はその集合 A で連続であったので、$\forall n\in\mathbb{N}\forall\alpha\in A$ に対し、$\displaystyle\lim_{\substack{z\rightarrow\alpha\\R\rightarrow S}}f_{n}(z)=f_{n}(\alpha)$ が成り立つ。したがって、$\forall\alpha\in A$ に対し、次式が成り立つ。

$$\lim_{\substack{z\rightarrow\alpha\\R\rightarrow S}}\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(z)=\sum_{k\in\varLambda_{p}}\lim_{\substack{z\rightarrow\alpha\\R\rightarrow S}}f_{k}(z)=\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(\alpha)$$

これは関数 $\displaystyle\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}$ がその集合 A で連続であるということを表している。したがって、$\forall\alpha\in A\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists\delta\in\mathbb{R}^{+}\forall z\in A$ に対し、$z\in U(\alpha,\delta)\cap R$、即ち、$|z-\alpha|<\delta$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$\left|\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(z)-\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(\alpha)\right|<\varepsilon$$

以上より、$\forall\alpha\in A\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists p\in\mathbb{N}\forall z\in A$ に対し、$|z-\alpha|<\delta$ が成り立つなら、次式が成り立つので、

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{k}(z)-\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(z)\right|<\varepsilon,\quad\left|\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{k}(\alpha)-\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(\alpha)\right|<\varepsilon,\quad\left|\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(z)-\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(\alpha)\right|<\varepsilon$$

三角不等式より次のようになる。

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\in\mathbb{N}}f_{n}(z)-\sum_{n\in\mathbb{N}}f_{n}(\alpha)\right|&=\left|\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{k}(z)-\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{k}(\alpha)\right|\\&=\left|\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{k}(z)-\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(z)+\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(z)-\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(\alpha)+\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(\alpha)-\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{k}(\alpha)\right|\\&\leq\left|\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{k}(z)-\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(z)\right|+\left|\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{k}(\alpha)-\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(\alpha)\right|+\left|\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(z)-\sum_{k\in\varLambda_{p}}f_{k}(\alpha)\right|\\&<3\varepsilon\end{aligned}$$

よって、その極限関数 $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{k}$ はその集合 A で連続である。 $\square$

定理 1.9.11 (Weierstrass の M 判定法)**.** $A\subseteq R\subseteq\mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A,\mathbb{C})$ の関数列 $\left(f_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとする。次の条件たちいづれも満たされるとき、

- $\forall n\in\mathbb{N}\exists M_{n}\in\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ に対し、$\left|f_{n}\right|_{A,\infty}\leq M_{n}$ が成り立つ。

- その級数$\left(\sum_{k \in \Lambda_n} M_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$が収束する。

その級数$\left(\sum_{k \in \Lambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$はその極限関数$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$に絶対収束するかつ一様収束する。この定理を Weierstrass の M 判定法という。

この定理におけるその級数$\left(\sum_{k \in \Lambda_n} M_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$もその級数$\left(\sum_{k \in \Lambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$の優級数という。

証明. $A \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ なる有界関数空間 $\mathfrak{B}(A, \mathbb{C})$ の関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとする。次の条件たちいづれも満たされるとする。

- $\forall n \in \mathbb{N} \exists M_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ に対し、$|f_n|_{A,\infty} \leq M_n$ が成り立つ。
- その級数$\left(\sum_{k \in \Lambda_n} M_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$が収束する。

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}$ に対し、$N \leq m, n$ が成り立つとき、$m < n$ としても一般性は失われないのでそうすると、$\forall z \in A$ に対し、定理 1.5.4、即ち、級数に関する Cauchy の収束条件より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_m} |f_k(z)| \right| &\leq \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_m} |f_k(z)| \\
&\leq \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_m} \sup_{z \in A} |f_k(z)| \\
&= \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_m} |f_k|_{A,\infty} \\
&\leq \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_m} M_k \\
&= \left| \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_m} M_k \right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

定理 1.5.4、即ち、級数に関する Cauchy の収束条件より $\forall z \in A$ に対し、その級数$\left(\sum_{k \in \Lambda_n} f_k(z) \right)_{n \in \mathbb{N}}$は絶対収束する、即ち、その級数$\left(\sum_{k \in \Lambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$は絶対収束する。定理 1.9.4 よりその級数$\left(\sum_{k \in \Lambda_n} f_k(z) \right)_{n \in \mathbb{N}}$は収束するので、その極限関数が$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$とおかれることができる。

また、定理 1.5.4、即ち、級数に関する Cauchy の収束条件より次のようになり、

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k \in \Lambda_m} f_k - \sum_{k \in \Lambda_n} f_k \right|_{A,\infty} &= \left| \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_m} f_k \right|_{A,\infty} \\
&\leq \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_m} |f_k|_{A,\infty} \\
&\leq \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_m} M_k
\end{aligned}$$

$$= \left| \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_m} M_k \right| < \varepsilon$$

定理 1.9.6 と定理 1.9.9、即ち、関数列に関する Cauchy の一様収束条件よりよって、その級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ はその極限関数 $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ に一様収束する。 □

1.9.7 整級数と広義一様収束

定理 1.9.12. 収束半径 R の整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} a_k (z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとする。このとき、その関数列 $\left(D(a,R) \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} a_k (z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ はその円板 $D(a,R)$ 上で関数 $D(a,R) \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n (z-a)^n$ に広義一様収束する[*20]。

証明. 収束半径 R の整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} a_k (z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとする。その関数列 $\left(D(a,R) \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} a_k (z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ について、$R = 0$ のときは $D(a,R) = \emptyset$ より明らかであるので、$0 < R$ で考えることにしてもよい。$K \subseteq D(a,R)$ なる任意のその集合 $\mathbb{C}$ で compact な集合 K が与えられたとき、定理 1.4.7、即ち、Heine-Borel の被覆定理よりその集合 K は有界な閉集合であり、関数 $K \rightarrow \mathbb{R}; z \mapsto |z-a|$ がその集合 K で連続であるので、最大値最小値の定理より最大値が存在する。これを r とおくと、$K \subset D(a,R)$ より $r \leq R$ が成り立つ。さらに、$r \neq R$ が成り立つ。実際、$r = R$ とすれば、$\exists z \in K$ に対し、$|z-a| = R$ が成り立つので、$z \notin D(a,R)$ が得られるが、これは $K \subseteq D(a,R)$ が成り立つことに矛盾する。さらに、$\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$z \in K$ が成り立つなら、$|z-a| \leq r$ が成り立つので、$z \in \overline{U}(a,r)$ が成り立つ。したがって、$K \subseteq \overline{U}(a,r)$ が得られる。

ここで、$r < |w-a| < R$ なる実数 $|w-a|$ が存在するので、このような複素数 w が考えられれば、$w \in D(a,R)$ が成り立つので、定理 1.8.4 よりその整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} a_k (w-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する。定理 1.5.5 よりその複素数列 $(a_n (w-a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 に収束することから、定理 1.3.7 よりその複素数列 $(a_n (w-a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である。したがって、$\exists M \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$|a_n (w-a)^n| < M$ が成り立つ。

このとき、$w \neq a$ に注意すれば、次のようになることから、

$$\begin{aligned} |a_n (z-a)^n| &= \left| a_n (w-a)^n \frac{(z-a)^n}{(w-a)^n} \right| \\ &= |a_n (w-a)^n| \frac{|z-a|^n}{|w-a|^n} \\ &\leq |a_n (w-a)^n| \frac{r^n}{|w-a|^n} \end{aligned}$$

[*20] ちなみに考えている位相空間は定義域と値域どちらも 2 次元 Euclid 空間 $\left(\mathbb{C}, \mathfrak{O}_{d_{E^2}} \right)$ としている。

$$< \frac{Mr^n}{|w-a|^n}$$

次のようになる。

$$|K \to \mathbb{R}; z \mapsto |a_n(z-a)^n||_{K,\infty} = \sup_{z\in K}|a_n(z-a)^n| \leq \frac{Mr^n}{|w-a|^n}$$

さらに、$r < |w-a|$ より次のようになることから、

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{Mr^n}{|w-a|^n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\Lambda_n}\frac{Mr^k}{|w-a|^k} \\
&= M\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\Lambda_n}\left(\frac{r}{|w-a|}\right)^k \\
&= M\lim_{n\to\infty}\frac{r}{|w-a|}\frac{1-\left(\frac{r}{|w-a|}\right)^n}{1-\frac{r}{|w-a|}} \\
&= M\frac{r}{|w-a|}\frac{1}{1-\frac{r}{|w-a|}} < \infty
\end{aligned}$$

その級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n}\frac{Mr^k}{|w-a|^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。定理 1.9.11、即ち、Weierstrass の M 判定法よりその級数 $\left(K \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はその極限関数 $K \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} a_n(z-a)^n$ に絶対収束するかつ一様収束する。よって、その関数列 $\left(D(a,R) \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はその円板 $D(a,R)$ 上で関数 $D(a,R) \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} a_n(z-a)^n$ に広義一様収束する。 □

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1985. 第 34 刷 p62-63,301-314,377-378 ISBN978-4-13-062005-5

[2] 数学の景色. ”広義一様収束の定義と具体例”. 数学の景色. `https://mathlandscape.com/unif-conv-on-cpts/` (2022-8-16 6:28 閲覧)

[3] 数学の景色. ”一様収束と各点収束の違いを 4 つの例とともに理解する”. 数学の景色. `https://mathlandscape.com/uniformly-pointwise-convergence/` (2022-8-16 6:29 閲覧)

[4] 数学の景色. ”連続関数列の一様収束極限は必ず連続関数になることの証明”. 数学の景色. `https://mathlandscape.com/unif-conv-to-continuous/` (2022-8-16 6:31 閲覧)

[5] 数学の景色. ”ワイエルシュトラスの M 判定法 (優級数定理) とは〜証明と具体例〜”. 数学の景色. `https://mathlandscape.com/m-test/` (2022-8-16 6:34 閲覧)

[6] へんなの (@Notes_JP). 極限操作（微分・積分・lim）の交換：定理と反例 - Notes_JP. Hatena Blog. `https://www.mynote-jp.com/entry/interchange-of-limiting-operations` (2022 年 12 月 24 日 16:24 閲覧)

第 2 部　複素微分

通常の微分を述べたのち、偏微分、全微分を導入し、そのあと、複素微分を導入しよう。複素微分は偏微分や全微分と比べて強い条件となっているので、級数と微分の順序交換なとの判定が比較的容易になっていることがわかるだろう。また、複素微分可能性と整級数とは深い関係があるので、これも述べておこう。

2.1　関数 $\mathbb{R} \supseteq D(f) \rightarrow \mathbb{C}$ の微分

2.1.1　関数 $\mathbb{R} \supseteq D(f) \rightarrow \mathbb{C}$ の微分

定義 2.1.1. $I = (a,b) \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる開区間 I と関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$ について、$\forall x \in I$ に対し、極限 $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ が収束するとき、その関数 f はその区間 I で微分可能であるといい、特に、その関数 f はその実数 x で微分可能であるともいう。このとき、極限 $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ は関数となり $\partial f : I \rightarrow \mathbb{C}$、$Df : I \rightarrow \mathbb{C}$、$f' : I \rightarrow \mathbb{C}$ などと書くことがある。特に、その関数 ∂f について、次のように書くこともある。

$$\partial f : I \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto \frac{d}{dx} f(x) = \left. \frac{d}{dx'} f\left(x'\right) \right|_{x'=x}$$

このとき、その関数 ∂f のことをその関数 f の導関数といいこれを求めることをその関数 f を x で微分するという。

定理 2.1.1. $I = (a,b) \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる開区間 I と関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$ について、その関数 f が区間 I で微分可能であるならそのときに限り、それらの関数たち $\mathrm{Re}f$、$\mathrm{Im}f$ がその区間 I で微分可能である。このとき、次式が成り立つ。

$$\partial f = \partial \mathrm{Re} f + i \partial \mathrm{Im} f : I \rightarrow \mathbb{C}$$

証明. 定理 1.3.6 より明らかである。 □

定理 2.1.2. $I = (a,b) \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる開区間 I と関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$ について、関数 f が区間 I で微分可能であるなら、その関数 f はその区間 I で連続である。

証明. $I = (a,b) \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる開区間 I と関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$ について、その関数 f が区間 I で微分可能であるならそのときに限り、$\forall x \in I$ に対し、極限 $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ が収束するのであった。このとき、$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} h = 0$ が成り立つので、収束条件より次式が成り立つ。

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} (f(x+h) - f(x)) = 0$$

したがって、次のようになる。

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} (f(x+h) - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} f(x+h) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} f(x) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \lim_{\substack{x+h \to x \\ x+h \neq x}} f(x+h) - f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{\substack{a \to x \\ a \neq x}} f(a) = f(x)
\end{aligned}
$$

□

定理 2.1.3. $I=(a,b) \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$、$I \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{R}$ なる 2 つの関数たち $f: D(f) \to \mathbb{C}$、$g: D(g) \to \mathbb{C}$ が与えられたとき、それらの関数たち f、g がその区間 I で微分可能であるとき、$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ[*21]。

$$
\partial\left(\alpha f + \beta g + \gamma\right) = \alpha \partial f + \beta \partial g : I \to \mathbb{C}
$$

また、次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\partial(fg) &= \partial f g + f \partial g : I \to \mathbb{C} \\
\partial \frac{f}{g} &= \frac{\partial f g - f \partial g}{g^2} : I \to \mathbb{C} \text{ if } g \neq 0
\end{aligned}
$$

証明. $I=(a,b) \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$、$I \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{R}$ なる 2 つの関数たち $f: D(f) \to \mathbb{C}$、$g: D(g) \to \mathbb{C}$ が与えられたとき、それらの関数たち f、g がその区間 I で微分可能であるとき、$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対し、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\partial\left(\alpha f + \beta g + \gamma\right)(x) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\left(\alpha f + \beta g + \gamma\right)(x+h) - \left(\alpha f + \beta g + \gamma\right)(x)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\left(\alpha f(x+h) + \beta g(x+h) + \gamma\right) - \left(\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma\right)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\alpha f(x+h) - \alpha f(x) + \beta g(x+h) - \beta g(x) + \gamma - \gamma}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \left(\alpha \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \beta \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) \\
&= \alpha \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \beta \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \alpha \partial f(x) + \beta \partial g(x) \\
&= (\alpha \partial f + \beta \partial g)(x)
\end{aligned}
$$

また、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\partial(fg)(x) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{fg(x+h) - fg(x)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}
\end{aligned}
$$

[*21] あれ、合成関数や逆関数の微分については一般的な感じで後述する。

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \left(\frac{(f(x+h) - f(x))\, g(x+h)}{h} + \frac{f(x)\,(g(x+h) - g(x))}{h} \right) \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} g(x+h) + \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} f(x) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} g(x+h) + \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} f(x) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \partial f(x) g(x) + f(x) \partial g(x) \\
&= (\partial f g + f \partial g)(x)
\end{aligned}
$$

$g \neq 0$ のとき、定理 2.1.2 に注意すれば、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\partial \frac{f}{g}(x) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) g(x) g(x+h)}{h g(x) g(x+h)} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) g(x) - f(x) g(x) + f(x) g(x) - f(x) g(x+h)}{h g(x) g(x+h)} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \left(\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \frac{1}{g(x) g(x+h)} \right) \\
&= \left(\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} g(x) - \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} f(x) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{g(x) g(x+h)} \\
&= (\partial f(x) g(x) - f(x) \partial g(x)) \frac{1}{g(x) g(x)} \\
&= \frac{\partial f(x) g(x) - f(x) \partial g(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{\partial f g - f \partial g}{g^2}(x)
\end{aligned}
$$

□

定理 2.1.4. 開集合たち T、U を用いた $T \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ かつ $U \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{R}$ なる関数たち $f : D(f) \to \mathbb{R}$、$g : D(g) \to \mathbb{R}$ が合成可能で、その関数 f が $a \in T$ なる点 a で、その関数 g が $f(a) \in U$ なる点 $f(a)$ で微分可能であるとき、その合成関数 $g \circ f$ はその点 a で微分可能で次式が成り立つ。

$$
\partial(g \circ f)(a) = \partial g\,(f(a))\,\partial f(a)
$$

特に、開集合たち T、U を用いた $T\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}$ かつ $U\subseteq D(g)\subseteq\mathbb{R}$ なる関数たち $f:D(f)\rightarrow\mathbb{R}$、$g:D(g)\rightarrow\mathbb{R}$ が合成可能で、その関数 f がその開集合 T で、その関数 g がその開集合 U で微分可能であるとき、その合成関数 $g\circ f$ はその開集合 T で微分可能で次式が成り立つ。

$$\partial(g\circ f)=(\partial g\circ f)\partial f:T\rightarrow\mathbb{R}$$

証明はそこまで易しくなく本筋からそれるので、ここでは述べない。意欲のある方は参考文献に挙げられている解析学の書籍を参照されたい。

2.1.2 関数 $\mathbb{R}\supseteq D(f)\rightarrow\mathbb{C}$ の高階微分

定義 2.1.2. $I=(a,b)\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}$ なる開区間 I と関数 $f:D(f)\rightarrow\mathbb{C}$ について、その関数 f の導関数 ∂f がその区間 I で微分可能なとき、その関数 f はその区間 I で 2 階微分可能であるという。このとき、その関数 ∂f の導関数 $\partial\partial f$ が定義されこれをその関数 f の 2 階導関数といいこれを求めることをその関数 f を 2 階微分するという。帰納的に、その関数 f がその区間 I で k 階微分可能でその関数 f の k 階導関数 ∂^kf がその区間 I で微分可能なとき、その関数 f はその区間 I で $k+1$ 階微分可能であるという。このとき、その関数 ∂^kf の導関数 $\partial\partial^kf$ が定義されこれをその関数 f の $k+1$ 階導関数といい $\partial^{k+1}f$ などと書く。これを求めることをその関数 f を $k+1$ 階微分するという。なお、その関数 f の 0 階導関数はその関数 f 自身と定義することが多い。

定義 2.1.3. 関数 $f:D(f)\rightarrow\mathbb{C}$ がその区間 I で k 階までの導関数 ∂^kf が存在しその関数 ∂^kf がその区間 I で連続であるとき、その関数 f はその区間 I で C^k 級である、k 回連続微分可能であるという。なお、その関数 f はその区間 I で C^0 級であることはその関数 f はその区間 I で連続であるということである。その区間 I で C^k 級であるような関数全体の集合を $C^k(I,\mathbb{C})$ と書くことがある。また、$\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し、その関数 f がその区間 I で C^k 級であるとき、その関数 f はその区間 I で C^∞ 級である、無限回微分可能であるという。その区間 I で C^∞ 級であるような関数全体の集合を $C^\infty(I,\mathbb{C})$ と書くことがある。

定理 2.1.5 (Leibniz の公式)**.** $I\subseteq D(f),D(g)\in\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ なる 2 つの関数たち $f:D(f)\rightarrow\mathbb{C}$、$g:D(g)\rightarrow\mathbb{C}$ に対し、それらの関数たち f、g がその区間 I で k 階微分可能であるとき、次式が成り立つ。この式を Leibniz の公式という。

$$\partial^k(fg)=\sum_{l\in\varLambda_k\cup\{0\}}\binom{k}{l}\partial^lf\partial^{k-l}g:I\rightarrow\mathbb{C}$$

ただし、係数 $\displaystyle\binom{k}{l}$ は次式のように定義されこれを二項係数という。

$$\binom{k}{l}=\frac{k!}{l!(k-l)!}=\begin{cases}\dfrac{k(k-1)\cdots(k-(l-1))}{l(l-1)\cdots2\cdot1} & \text{if}\quad l>0\\ 1 & \text{if}\quad l=0\end{cases}$$

証明はここでは述べない。ただ、計算が大変であるもののそこまで難しくはなく方針としては定理 2.1.3 を用いて数学的帰納法で示される。意欲のある方はぜひとも各自手を動かして示されたい。

2.1.3 極値

定義 2.1.4. $D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ について、その集合 $D(f)$ の内点 α をとる、即ち、$\alpha \in \mathbb{C}$ なる点 α のある ε 近傍 $U(\alpha, \varepsilon)$ がその集合 $D(f)$ の部分集合となるようにその点 α をとる。ここで、実数 $f(\alpha)$ が $\max V(f|U(\alpha, \varepsilon))$ に等しい、即ち、その関数 f のその集合 $U(\alpha, \varepsilon)$ での最大値となるとき、その関数 f はその点 α で極大であるといいその点 α をその関数 f の極大値という、即ち、点 α がその関数 f の極大値であることは次式が成り立つことである。

$$f(\alpha) = \max V(f|U(\alpha, \varepsilon))$$

同様にして、$D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ について、実数 $f(\alpha)$ が $\min V(f|U(\alpha, \varepsilon))$ に等しい、即ち、その関数 f のその集合 $U(\alpha, \varepsilon)$ での最小値となるとき、その関数 f はその点 α で極小であるといいその点 α をその関数 f の極小値という。

$$f(\alpha) = \min V(f|U(\alpha, \varepsilon))$$

定義 2.1.5. $D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ について、その関数 f がその集合 $D(f)$ の内点 α で極大になる、または、極小になることをその関数 f はその点 α で極値をとるといいその点 α をその関数 f の極値点という。

定義 2.1.6. $D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ について、その関数 f はその点 α で極大であるかつ、$\forall z \in U(\alpha, \varepsilon)$ に対し、$z \neq \alpha$ 成り立つなら、$f(z) < f(\alpha)$ が成り立つとき、その関数 f はその点 α で狭義の極大であるといいその点 α をその関数 f の狭義の極大値という、即ち、点 α がその関数 f の狭義の極大値であることは次式が成り立つことである。

$$f(\alpha) = \max V(f|U(\alpha, \varepsilon)), \quad \forall z \in U(\alpha, \varepsilon)\left[z \neq \alpha \Rightarrow f(z) < f(\alpha)\right]$$

同様に $D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ について、その関数 f はその点 α で極小であるかつ、$\forall z \in U(\alpha, \varepsilon)$ に対し、$z \neq \alpha$ 成り立つなら、$f(z) > f(\alpha)$ が成り立つとき、その関数 f はその点 α で狭義の極小であるといいその点 α をその関数 f の狭義の極小値という、即ち、点 α がその関数 f の狭義の極小値であることは次式が成り立つことである。

$$f(\alpha) = \min V(f|U(\alpha, \varepsilon)), \quad \forall z \in U(\alpha, \varepsilon)\left[z \neq \alpha \Rightarrow f(z) > f(\alpha)\right]$$

定理 2.1.6. $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ について、その集合 $D(f)$ の内点 a で極値をとりその関数 f がその実数 a で微分可能であるなら、$\partial f(a) = 0$ が成り立つ。

これにより、$n = 1$ のとき、極値点が $\partial f(a) = 0$ なる実数 a のうちどれかになることがわかる。

証明. $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ について、その集合 $D(f)$ の内点 a で極大値をとりその関数 f がその実数 a で微分可能であるなら、ある ε 近傍 $U(a, \varepsilon)$ がその集合 $D(f)$ の部分集合となるかつ、実数 $f(a)$ がその関数 f のその集合 $U(a, \varepsilon)$ での最大値となるので、$\forall h \in \mathbb{R}^+$ に対し、$|h| < \varepsilon$ が成り立つなら、$f(a+h) \leq f(a)$ が成り立ち、したがって、次式が成り立つ。

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$$

$h \to +0$ のとき、$h > 0$ に注意すれば、次式のようになる。

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$$

また、$h \to -0$ のとき、$h < 0$ に注意すれば、次式のようになる。

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

ここで、その関数 f がその実数 a で微分可能であるので、次式のようになる。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

したがって、

$$\partial f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$$

その集合 $D(f)$ の内点 a で極小値をとりその関数 f がその実数 a で微分可能であるときも同様である。 □

2.1.4 Rolle の定理

定理 2.1.7 (Rolle の定理)**.** $a < b$ とし $I = [a,b] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ について、その関数 f がその有界閉区間 I で連続であるかつ、その開区間 $\mathrm{int}I$ で微分可能であるとき、$f(a) = f(b)$ が成り立つなら、$\partial f(c) = 0$ のようになる実数 c がその開区間 $\mathrm{int}I$ で存在する。この定理を Rolle の定理という。

証明. $a < b$ とし $I = [a,b] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ について、その関数 f がその有界閉区間 I で連続であるかつ、その開区間 $\mathrm{int}I$ で微分可能であるとき、$f(a) = f(b)$ が成り立つなら、その関数 f がその区間 I で定数となるとき、明らかに $\partial f(c) = 0$ のようになる実数 c がその開区間 $\mathrm{int}I$ で存在する。

その関数 f がその区間 I で定数とならないとき、$f(x) \neq f(a) = f(b)$ なる実数 x がその開区間 $\mathrm{int}I$ で存在する。そこで、$f(a) = f(b) < f(x)$ としても一般性は失われない。このとき、最大値最小値の定理より $I \subseteq \mathbb{R}$ なる集合 I が空でない有界閉区間でその関数 $f|I : I \to \mathbb{R}$ がその集合 I で連続であるとき、その関数 $f|I$ はその集合 I で最大値、最小値をとるのであったので、その関数 f は $c \in I$ なる実数 c で最大値をとることができる。このとき、$a \leq c \leq b$ が成り立つが、$f(a) = f(b) < f(x) \leq f(c)$ が成り立つので、$a < c < b$ が成り立ち $c \in \mathrm{int}I$ が成り立つ。これにより、その実数 c はその閉区間 I のない点であるから、$U(c,\varepsilon) \subseteq I$ となるようにすると、その実数 $f(c)$ が最大値 $\max V\left(f|U(c,\varepsilon)\right)$ に等しい、即ち、その関数 f の ε 近傍 $U(c,\varepsilon)$ での最大値でもあることになりその関数 f はその実数 c において極大である。ここで、定理 2.1.6 より $\partial f(c) = 0$ が成り立つ。 □

2.1.5 平均値の定理

定理 2.1.8 (平均値の定理)**.** $a < b$ とし $I = [a,b] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ について、その関数 f がその有界閉区間 I で連続であるかつ、その開区間 $\mathrm{int}I$ で微分可能であるとき、次式のようになる実数 c がその開区間 $\mathrm{int}I$ で存在する。

$$\partial f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

この定理を平均値の定理という。

この定理は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合から実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合への関数に対してのみ適用されることに注意されたい、つまり、始集合や終集合のいずれかが $n \geq 2$ なる n 次元数空間の部分集合であるような場合にはこの段階では適用されることができない。

証明. $a < b$ とし $I = [a, b] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ について、その関数 f がその有界閉区間 I で連続であるかつ、その開区間 $\mathrm{int}I$ で微分可能であるとき、次式のような関数 g を定義すると、

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

この関数 g は明らかにその有界閉区間 I で連続であるかつ、その開区間 $\mathrm{int}I$ で微分可能である。さらに、次のようになるので、

$$\begin{aligned}
g(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a = \frac{f(a)(b - a) - a\left(f(b) - f(a)\right)}{b - a}\\
&= \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}\\
g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b = \frac{f(b)(b - a) - b\left(f(b) - f(a)\right)}{b - a}\\
&= \frac{bf(b) - af(b) - bf(b) + bf(a)}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}
\end{aligned}$$

したがって、次式が成り立つ。

$$g(a) = g(b)$$

これにより、Rolle の定理より $\partial g(c) = 0$ のようになる実数 c がその開区間 $\mathrm{int}I$ で存在する。したがって、次のようになるので、

$$0 = \partial g(c) = \partial f(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

よって、次式が成り立つ。

$$\partial f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

2.1.6 微分と関数 f の増減

定理 2.1.9. $I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる区間 I と関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$ について、その関数 f がその区間 I で微分可能であるとき、その関数 f はその区間 I で定数となるならそのときに限り、$\partial f|I = 0$ が成り立つ。

証明. $I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる区間 I と関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$ について、その関数 f がその区間 I で微分可能であるとき、その関数 f はその区間 I で定数となるなら、その定数を γ とおかれれば、次式が成り立つ。

$$\partial f(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0\\ h \neq 0}} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0\\ h \neq 0}} \frac{\gamma - \gamma}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0\\ h \neq 0}} 0 = 0$$

逆に、$\partial f|I=0$ が成り立つなら、$n=1$ のとき、$0<h$ なるある実数 $x+h\in I$ を用いた区間 $[x,x+h]$ に平均値の定理を用いれば、次式が成り立つような実数 c が $x<c<x+h$ に存在する。

$$\partial f(c)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

仮定より次のようになるので、

$$\partial f(c)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0\Leftrightarrow f(x+h)=f(x)$$

これにより、その関数 f は区間 I で定数となる。$h<0$ のときも同様にして示される。
$n\geq 2$ のときも成分ごとで考えれば、明らかである。 □

定理 2.1.10. $I\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}$、$I\subseteq D(g)\subseteq\mathbb{R}$ なる区間 I と関数たち $f:D(f)\rightarrow\mathbb{C}$、$g:D(g)\rightarrow\mathbb{C}$ について、それらの関数たち f、g がその区間 I で微分可能であり、$\partial f|I=\partial g|I$ が成り立つとき、$\gamma\in\mathbb{C}$ なる定数 γ を用いて次式のようになる。

$$f|I=g|I+\gamma$$

証明. $I\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}$、$I\subseteq D(g)\subseteq\mathbb{R}$ なる区間 I と関数たち $f:D(f)\rightarrow\mathbb{C}$、$g:D(g)\rightarrow\mathbb{C}$ について、それらの関数たち f、g がその区間 I で微分可能であり、$\partial f|I=\partial g|I$ が成り立つとき、その関数 $f-g$ もその区間 I で微分可能であり、したがって、次式が成り立つ。

$$\partial(f-g)|I=\partial f|I-\partial g|I=0$$

これが成り立つならそのときに限り、その関数 $f-g$ は区間 I で定数となり、この定数を γ とおくと、したがって、$f|I=g|I+\gamma$ が成り立つ。 □

定理 2.1.11. $a<b$ とし $I=[a,b]\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f:D(f)\rightarrow\mathbb{R}$ について、その関数 f がその有界閉区間 I で連続であるかつ、その開区間 $\mathrm{int}\ \ I$ で微分可能であるとき、次のことが成り立つ。

- その関数 f がその区間 I で単調増加するならそのときに限り、$\partial f|\mathrm{int}I\geq 0$ が成り立つ。
- その関数 f がその区間 I で狭義単調増加するならそのときに限り、$\partial f|\mathrm{int}I\geq 0$ が成り立つかつ、$J=(a',b')\in\mathrm{int}I$ かつ $a'<b'$ なるどのような開区間 J に対し、$\partial f(x)\neq 0$ なる実数 x がその開区間 J に存在する。
- その関数 f がその区間 I で単調減少するならそのときに限り、$\partial f|\mathrm{int}I\leq 0$ が成り立つ。
- その関数 f がその区間 I で狭義単調減少するならそのときに限り、$\partial f|\mathrm{int}I\leq 0$ が成り立つかつ、$J=(a',b')\in\mathrm{int}I$ かつ $a'<b'$ なるどのような開区間 J に対し、$\partial f(x)\neq 0$ なる実数 x がその開区間 J に存在する。

証明. $a<b$ とし $I=[a,b]\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f:D(f)\rightarrow\mathbb{R}$ について、その関数 f がその有界閉区間 I で連続であるかつ、その開区間 $\mathrm{int}I$ で微分可能であるとする。その関数 f がその区間 I で単調増加するなら、$\forall x\in\mathrm{int}I$ に対し、$0<h\Leftrightarrow h\in\mathbb{R}^+$ なる実数 h を用いて次式が成り立つ。

$$f(x)\leq f(x+h)$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)\geq 0 &\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0\\&\Leftrightarrow \lim_{\substack{h\rightarrow 0\\h\neq 0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0\\&\Leftrightarrow \partial f(x)\geq 0\end{aligned}$$

逆に、$\partial f|\mathrm{int}I\geq 0$ が成り立つなら、明らかに、$0<h\Leftrightarrow h\in\mathbb{R}^{+}$ かつ $x+h\in I$ なる実数 h を用いた閉区間 $[x,x+h]$ でもその関数 f が連続でその開区間 $(x,x+h)$ でその関数 f が微分可能であるので、平均値の定理より次式のようになる実数 c がその開区間 $(x,x+h)$ で存在する。

$$\partial f(c)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

したがって、次のようになる。

$$\partial f(c)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0\Leftrightarrow f(x+h)\geq f(x)$$

これにより、その関数 f はその区間 I で単調増加する。

また、その関数 f がその区間 I で狭義単調増加するなら、上記の議論より明らかに $\partial f|\mathrm{int}I\geq 0$ が成り立つ。また、$J=(a',b')\in\mathrm{int}I$ かつ $a'<b'$ なる開区間 J を考え、$\forall x\in J$ に対し、$\partial f(x)=0$ なるその開区間 J が存在するなら、先ほどの議論により、その区間 J でその関数 f が定数となり、$\forall y',z'\in J\subseteq I$ に対し、$f(y')=f(z')$ が成り立つが、これはその関数 f がその区間 I で狭義単調増加するという仮定に反する。したがって、$J=(a',b')\in\mathrm{int}I$ かつ $a'<b'$ なるどのような開区間 J に対し、$\partial f(x)\neq 0$ なる実数 x がその開区間 J に存在する。

逆に、$\partial f|\mathrm{int}I\geq 0$ が成り立つかつ、$J=(a',b')\in\mathrm{int}I$ かつ $a'<b'$ なるどのような開区間 J に対し、$\partial f(x)\neq 0$ なる実数 x がその開区間 J に存在するなら、上記の議論よりその関数 f はその区間 I で単調増加する。さらに、$y'<z'$ かつ $y',z'\in I$ なる実数たち y'、z' を用いて $f(y')=f(z')$ が成り立つのであれば、その関数 f は閉区間 $[y',z']$ で定数となり、これが成り立つならそのときに限り、$\forall x\in(y',z')$ に対し、$\partial f(x)=0$ が成り立つことになるが、これは $J=(a',b')\in\mathrm{int}I$ かつ $a'<b'$ なるどのような開区間 J に対し、$\partial f(x)\neq 0$ なる実数 x がその開区間 J に存在することに矛盾する。したがって、その関数 f はその区間 I で狭義単調増加する。

以上より、次のことが示された。

- その関数 f がその区間 I で単調増加するならそのときに限り、$\partial f|\mathrm{int}I\geq 0$ が成り立つ。
- その関数 f がその区間 I で狭義単調増加するならそのときに限り、$\partial f|\mathrm{int}I\geq 0$ が成り立つかつ、$J=(a',b')\in\mathrm{int}I$ かつ $a'<b'$ なるどのような開区間 J に対し、$\partial f(x)\neq 0$ なる実数 x がその開区間 J に存在する。

次のことも同様に示される。

- その関数 f がその区間 I で単調減少するならそのときに限り、$\partial f|\mathrm{int}I\leq 0$ が成り立つ。
- その関数 f がその区間 I で狭義単調減少するならそのときに限り、$\partial f|\mathrm{int}I\leq 0$ が成り立つかつ、$J=(a',b')\in\mathrm{int}I$ かつ $a'<b'$ なるどのような開区間 J に対し、$\partial f(x)\neq 0$ なる実数 x がその開区間 J に存在する。

$\square$

定理 2.1.12. $a < b$ とし $I = [a, b] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ について、その関数 f がその有界閉区間 I で連続であるかつ、その開区間 $\mathrm{int}I$ で微分可能であるとき、次のことが成り立つ。

- $\partial f|\mathrm{int}I > 0$ が成り立つなら、その関数 f はその区間 I で狭義単調増加する。
- $\partial f|\mathrm{int}I < 0$ が成り立つなら、その関数 f はその区間 I で狭義単調減少する。

証明. $a < b$ とし $I = [a, b] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ について、その関数 f がその有界閉区間 I で連続であるかつ、その区間 $\mathrm{int}I$ で微分可能であるとする。

$\partial f|\mathrm{int}I > 0$ が成り立つなら、明らかに、$\partial f|\mathrm{int}I \geq 0$ が成り立つ。また、$J = (a', b') \in \mathrm{int}I$ かつ $a' < b'$ なる開区間 J を考え、$\forall x \in J$ に対し、$\partial f(x) = 0$ なるその開区間 J が存在するなら、$\partial f(x) = 0$ が成り立つような実数 x がその開区間 $\mathrm{int}I$ に存在する。したがって、対偶律より $\partial f|\mathrm{int}I > 0$ が成り立つなら、$J = (a', b') \in \mathrm{int}I$ かつ $a' < b'$ なるどのような開区間 J に対し、$\partial f(x) \neq 0$ なる実数 x がその開区間 J に存在することになる。したがって、$\partial f|\mathrm{int}I \geq 0$ が成り立つかつ、$J = (a', b') \in \mathrm{int}I$ かつ $a' < b'$ なるどのような開区間 J に対し、$\partial f(x) \neq 0$ なる実数 x がその開区間 J に存在することがいえたので、上記の議論よりその関数 f がその区間 I で狭義単調増加する。

$\partial f|\mathrm{int}I < 0$ が成り立つなら、その関数 f はその区間 I で狭義単調減少することも同様にして示される。 $\square$

定理 2.1.13. $a \in D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる実数 a の ε 近傍 $U(a, \varepsilon)$ で C^1 級の関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ が $\partial f(a) = 0$ を満たすかつ、その導関数 ∂f がその実数 a で微分可能であるとする。このとき、次のことが成り立つ。

- $\partial^2 f(a) > 0$ が成り立つなら、その関数 f はその実数 a で狭義の極小となる。
- $\partial^2 f(a) < 0$ が成り立つなら、その関数 f はその実数 a で狭義の極大となる。

証明. $a \in D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる実数 a の ε 近傍 $U(a, \varepsilon)$ で C^1 級の関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ が $\partial f(a) = 0$ を満たすかつ、その導関数 ∂f がその実数 a で微分可能であるとする。このとき、$\partial^2 f(a) > 0$ が成り立つなら、次のようになり、

$$\begin{aligned}
0 < \partial^2 f(a) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\partial f(a+h) - \partial f(a)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\partial f(a+h)}{h} - \partial f(x) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\partial f(a+h)}{h}
\end{aligned}$$

ここで、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、次のようになるので、

$$\begin{aligned}
0 < |h| < \delta \Rightarrow 0 < \left| \frac{\partial f(a+h)}{h} - \partial^2 f(a) \right| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{\partial f(a+h)}{h} - \partial^2 f(a) < \varepsilon & \text{if} \quad \dfrac{\partial f(a+h)}{h} < \partial^2 f(a) \\ -\varepsilon < -\dfrac{\partial f(a+h)}{h} + \partial^2 f(a) < 0 & \text{if} \quad \dfrac{\partial f(a+h)}{h} > \partial^2 f(a) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \partial^2 f(a) < \dfrac{\partial f(a+h)}{h} & \text{if} \quad \dfrac{\partial f(a+h)}{h} < \partial^2 f(a) \\ 0 < \partial^2 f(a) < \dfrac{\partial f(a+h)}{h} & \text{if} \quad \dfrac{\partial f(a+h)}{h} > \partial^2 f(a) \end{cases}$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{\partial f(a+h)}{h}$$

したがって、$a+h \in (a-\delta, a)$ のとき、次式が成り立つことにより

$$a+h \in (a-\delta, a) \Leftrightarrow a-\delta < a+h < a \Leftrightarrow -\delta < h < 0$$

次式が成り立ち、

$$0 < \frac{\partial f(a+h)}{h} \Leftrightarrow \partial f(a+h) < 0$$

$a+h \in (a, a+\delta)$ のとき、次式が成り立つことにより

$$a+h \in (a, a+\delta) \Leftrightarrow a < a+h < a+\delta \Leftrightarrow 0 < h < \delta$$

次式が成り立つ。

$$0 < \frac{\partial f(a+h)}{h} \Leftrightarrow 0 < \partial f(a+h)$$

その関数 f はその区間 $(a-\delta, a)$ で狭義単調減少しその区間 $(a, a+\delta)$ で狭義単調増加するので、その実数 a の δ 近傍 $U(a,\delta)$ が $U(a,\delta) \subseteq D(f)$ を満たし、$\forall x \in U(a,\delta)$ に対し、次のようになる。

$$\begin{cases} f(x) > f(a) & \text{if} \quad x \in (a-\delta, a) \\ f(x) = f(a) & \text{if} \quad x = a \\ f(a) < f(x) & \text{if} \quad x \in (a, a+\delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) \leq f(x) \\ f(a) < f(x) & \text{if} \quad x \neq a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = \min V\left(f|U(a,\delta)\right) \\ f(x) < f(a) & \text{if} \quad x \neq a \end{cases}$$

これにより、その関数 f はその実数 a で狭義の極小となる。

同様にして、$\partial^2 f(a) < 0$ が成り立つなら、その関数 f はその実数 a で狭義の極大となることが示される。 □

定理 2.1.14. 関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が実数 a の ε 近傍 $U(a,\varepsilon)$ で連続であるかつ、その実数 a 以外で微分可能で次式が成り立つなら、

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \partial f(x) \in \mathbb{C}$$

その関数 f はその実数 a で微分可能で次式が成り立つ。

$$\partial f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \partial f(x)$$

証明. 関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が実数 a の ε 近傍 $U(a,\varepsilon)$ で連続であるかつ、その実数 a 以外で微分可能で次式が成り立つなら、

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \partial f(x) \in \mathbb{C}$$

$n=1$ のとき、$h>0$ として区間 $[a,a+h]$ で平均値の定理よりその実数 a の ε 近傍 $U(a,\varepsilon)$ が考えられれば、$\forall a+h \in (a,\varepsilon) \subseteq U(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$ に対し、次式が成り立つような実数 c が区間 $(a,a+h)$ で存在する。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \partial f(c)$$

ここで、$h \rightarrow 0$ とすると、$c \in (a,a+h) \Leftrightarrow a < c < a+h$ ではさみうちの原理より $c \rightarrow a$ となり次式のようになる。

$$\mathbb{C} \ni \lim_{\substack{c \rightarrow a \\ c \neq a}} \partial f(c) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \partial f(a)$$

$h<0$ のときも同様にして、示される。

$n \geq 2$ のときも成分ごとで考えれば、明らかである。 □

定理 2.1.15. $I=[a,b] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ について、その関数 f がその有界閉区間 I で微分可能であるとき、$\forall\gamma \in (\partial f(a), \partial f(b)) \cup (\partial f(b), \partial f(a))$ に対し、次式が成り立つような実数 c がその区間 $\mathrm{int}I$ で存在する。

$$\partial f(c) = \gamma$$

これは、その関数 f がその区間 I で微分可能であるとしても、その導関数 ∂f が連続であるとは限らないが、その導関数 ∂f は、たとえ連続でなくても、中間値の定理が成り立つことを述べている。

証明. $I=[a,b] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる集合 $D(f)$ を定義域とする関数 $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ について、その関数 f が有界閉区間 I で微分可能であるとき、$\gamma \in (\partial f(a), \partial f(b))$ なる実数 γ を考え次式のように関数 g を定めると、

$$g: D(f) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x) - \gamma x$$

次式が成り立つ。

$$\partial g(x) = \partial f(x) - \gamma$$

ここで、$\gamma \in (\partial f(a), \partial f(b))$ より次式が成り立つ。

$$\partial g(a) = \partial f(a) - \gamma < 0$$
$$\partial g(b) = \partial f(b) - \gamma > 0$$

ここで、明らかに、その関数 g はその区間 I で連続であるので、最大値最小値の定理より次式が成り立つような実数 c がその区間 I で存在する。

$$g(c) = \min V(g|I)$$

$\delta \in \mathbb{R}^+$ なる実数 δ が十分に小さくとられれば、$\forall a+h \in (a,a+\delta)$ に対し、次式が成り立つ。

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{(a+h)-a} = \frac{g(a+h)-g(a)}{h} < 0$$

$h>0$ が成り立つことに注意すれば、$g(a+h) < g(a)$ が成り立つので、$a \neq c$ となる。同様にして、$b \neq c$ となる。したがって、$c \in I = [a,b]$ より $a < c < b$ が成り立つ。これによりその実数 c はその区間 I の内点で ε 近傍 $U(c,\varepsilon)$ を用いて考えれば、$U(c,\varepsilon) \subseteq I$ より

$$g(c) = \min V(g|I) = \min V(g|U(c,\varepsilon))$$

これにより、その関数 g はその実数 c で極小になるので、定理より次式が成り立つ。

$$\partial g(c) = 0$$

したがって、次式が成り立つ。

$$\partial g(c) = \partial f(c) - \gamma = 0 \Leftrightarrow \partial f(c) = \gamma$$

$\gamma \in (\partial f(b), \partial f(a))$ のときも同様にして示される。 □

2.1.7 Cauchy の平均値の定理

定理 2.1.16 (Cauchy の平均値の定理)**.** $I = [a,b] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ かつ $I = [a,b] \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{R}$ なる区間 I と関数たち $f : D(f) \to \mathbb{C}$、$g : D(g) \to \mathbb{C}$ について、それらの関数たち f、g がその有界閉区間 I で連続でその開区間 $\mathrm{int}I$ で微分可能であり、$g(a) \neq g(b)$ が成り立つかつ、$\partial f(x) = \partial g(x) = 0$ が成り立たないとする。このとき、次式が成り立つような実数 c がその開区間 $\mathrm{int}I$ で存在する。

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\partial f}{\partial g}(c)$$

この定理を Cauchy の平均値の定理という。

証明. $I = [a,b] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ かつ $I = [a,b] \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{R}$ なる区間 I と関数たち $f : D(f) \to \mathbb{C}$、$g : D(g) \to \mathbb{C}$ について、それらの関数たち f、g がその有界閉区間 I で連続でその開区間 $\mathrm{int}I$ で微分可能であり、$g(a) \neq g(b)$ が成り立つかつ、$\partial f(x) = \partial g(x) = 0$ が成り立たないとする。このとき、次式のように関数 h を定めると、

$$h = (g(b) - g(a))\, f - (f(b) - f(a))\, g : I \to \mathbb{R}$$

明らかに、その関数 h はその区間 I で連続でその区間 $\mathrm{int}I$ で微分可能であり次のようになる。

$$\begin{aligned}
h(a) &= (g(b) - g(a))\, f(a) - (f(b) - f(a))\, g(a) \\
&= f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a) \\
&= f(a)g(b) - f(b)g(a) \\
h(b) &= (g(b) - g(a))\, f(b) - (f(b) - f(a))\, g(b) \\
&= f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b) \\
&= f(a)g(b) - f(b)g(a)
\end{aligned}$$

これにより、$h(a) = h(b)$ が成り立つので、Rolle の定理より次式が成り立つような実数 c がその区間 $\mathrm{int}I$ に存在する。

$$\partial h(c) = 0$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\partial h(c) = (g(b) - g(a))\, \partial f(c) - (f(b) - f(a))\, \partial g(c) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(g(b) - g(a))\, \partial f(c) = (f(b) - f(a))\, \partial g(c)
\end{aligned}$$

このとき、$g(a) \neq g(b)$ が成り立つので、$g(b)-g(a) \neq 0$ が成り立つ。ここで、$\partial g(c)=0$ とすれば、$\partial f(c)=0$ が成り立ちこれは仮定より $\partial f(x)=\partial g(x)=0$ が成り立つことに矛盾する。したがって、$\partial g(c) \neq 0$ となる。したがって、両辺に $(g(b)-g(a))\,\partial g(c)$ で割ると、次式のようになる。

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{\partial f}{\partial g}(c)$$

□

2.1.8 Taylor 展開

定理 2.1.17 (Taylor の定理)**.** $I=[x,a]\cup[a,x] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる区間 I で n 回微分可能な関数 $f:D(f) \to \mathbb{R}$ に対し、次式のように実数 $R_{n+1}(x)$ が定義されるとき、

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\sum_{i\in\varLambda_n\cup\{0\}}\frac{(x-a)^i}{i!}\partial^i f(a)$$

次式が成り立つような実数 c がその区間 $\mathrm{int}I$ に存在する。

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\partial^{n+1}f(c)$$

この定理を Taylor の定理という。

なお、この実数 $R_{n+1}(x)$ をその関数 f のその実数 a のまわりの $n+1$ 次剰余項という。この定理は、$n=1$ とすれば、平均値の定理に一致することに注意されたい。

証明. $I=[x,a]\cup[a,x] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる区間 I で n 回微分可能な関数 $f:D(f) \to \mathbb{R}$ に対し次式のように実数 $R_{n+1}(x)$ が定義されるとき、

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\sum_{i\in\varLambda_n\cup\{0\}}\frac{(x-a)^i}{i!}\partial^i f(a)$$

次式のように関数 r を定めると、

$$r:I\to\mathbb{R};x\mapsto R_{n+1}(x)=f(x)-\sum_{i\in\varLambda_n\cup\{0\}}\frac{(x-a)^i}{i!}\partial^i f(a)$$

その関数 r は明らかにその区間 I で n 回微分可能であり、$\forall k\in\varLambda_{n+1}\cup\{0\}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}\partial^k r(x)&=\partial^k f(x)-\sum_{i\in\varLambda_n\cup\{0\}}\frac{d^k}{dx^k}\frac{(x-a)^i}{i!}\partial^i f(a)\\&=\partial^k f(x)-\sum_{i\in\varLambda_n\cup\{0\}}\frac{1}{i!}\partial^i f(a)\frac{d^k}{dx^k}(x-a)^i\end{aligned}$$

ここで、$\forall i\in\varLambda_n\cup\{0\}$ に対し、$k=0$ のとき、次のようになる。

$$\frac{d^0}{dx^0}(x-a)^i=(x-a)^i$$

$k=1$ のとき、次のようになる。

$$\frac{d}{dx}(x-a)^i = \begin{cases} \frac{d}{dx}(x-a)^i & \text{if} \quad 1 \leq i \\ \frac{d}{dx}(x-a)^i & \text{if} \quad i < 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{d}{dx}(x-a)^i & \text{if} \quad 1 \leq i \\ \frac{d}{dx}(x-a)^0 & \text{if} \quad i < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} i(x-a)^{i-1} & \text{if} \quad 1 \leq i \\ 0 & \text{if} \quad i < 1 \end{cases}$$

$k=k'$ のとき、次式のように仮定すると、

$$\frac{d^{k'}}{dx^{k'}}(x-a)^i = \begin{cases} \frac{i!}{(i-k')!}(x-a)^{i-k'} & \text{if} \quad k' \leq i \\ 0 & \text{if} \quad i < k' \end{cases}$$

$k=k'+1$ のとき、次のようになる。

$$\frac{d^{k'+1}}{dx^{k'+1}}(x-a)^i = \frac{d^{k'+1}}{dx^{k'+1}}(x-a)^i = \frac{d}{dx}\frac{d^{k'}}{dx^{k'}}(x-a)^i$$
$$= \begin{cases} \frac{d}{dx}\frac{i!}{(i-k')!}(x-a)^{i-k'} & \text{if} \quad k' \leq i \\ \frac{d0}{dx} & \text{if} \quad i < k' \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{d}{dx}\frac{i!}{(i-k')!}(x-a)^{i-k'} & \text{if} \quad k'+1 \leq i \\ \frac{d}{dx}\frac{i!}{0!}(x-a)^0 & \text{if} \quad i = k' \\ \frac{d0}{dx} & \text{if} \quad i < k' \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{i!\,(i-k')}{(i-k'-1)!\,(i-k')}(x-a)^{i-\left(k'+1\right)} & \text{if} \quad k'+1 \leq i \\ 0 & \text{if} \quad i = k' \\ 0 & \text{if} \quad i < k' \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{i!}{(i-(k'+1))!}(x-a)^{i-\left(k'+1\right)} & \text{if} \quad k'+1 \leq i \\ 0 & \text{if} \quad i < k'+1 \end{cases}$$

したがって、$\forall k \in \Lambda_{n+1} \cup \{0\}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\frac{d^k}{dx^k}(x-a)^i = \begin{cases} \frac{i!}{(i-k)!}(x-a)^{i-k} & \text{if} \quad k \leq i \\ 0 & \text{if} \quad i < k \end{cases}$$

これにより、次式のように集合たち Λ'、Λ'' を定めると、

$$\Lambda' = (\Lambda_n \cup \{0\}) \setminus (\Lambda_{k-1} \cup \{0\}) = \{i \in \mathbb{Z} | k \leq i \leq n\}$$
$$\Lambda'' = \Lambda_{k-1} \cup \{0\} = \{i \in \mathbb{Z} | 0 \leq i \leq k-1\}$$

$\forall k \in \Lambda_{n+1} \cup \{0\}$ に対し、次のようになる。

$$\partial^k r(x) = \partial^k f(x) - \sum_{i \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{1}{i!}\partial^i f(a)\frac{d^k}{dx^k}(x-a)^i$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial^k f(x) - \sum_{i\in\Lambda'\sqcup\Lambda''} \frac{1}{i!}\partial^i f(a)\frac{d^k}{dx^k}(x-a)^i \\
&= \partial^k f(x) - \sum_{i\in\Lambda'} \frac{1}{i!}\partial^i f(a)\frac{d^k}{dx^k}(x-a)^i - \sum_{i\in\Lambda''} \frac{1}{i!}\partial^i f(a)\frac{d^k}{dx^k}(x-a)^i \\
&= \partial^k f(x) - \sum_{i\in\Lambda'} \frac{1}{i!}\partial^i f(a)\frac{i!}{(i-k)!}(x-a)^{i-k} - \sum_{i\in\Lambda''} \frac{1}{i!}\partial^i f(a)0 \\
&= \partial^k f(x) - \sum_{i\in\Lambda'} \frac{1}{(i-k)!}\partial^i f(a)(x-a)^{i-k}
\end{aligned}
$$

ここで次のようになるので、

$$
\begin{aligned}
i \in \Lambda' \setminus \{k\} &\Leftrightarrow i \in \Lambda' \wedge i \neq k \Leftrightarrow k \leq i \leq n \wedge i \neq k \\
&\Leftrightarrow k+1 \leq i \leq n \Leftrightarrow 1 \leq i-k \leq n-k
\end{aligned}
$$

したがって、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\partial^k r(a) &= \partial^k f(a) - \sum_{i\in\Lambda'} \frac{1}{(i-k)!}\partial^i f(a)(a-a)^{i-k} \\
&= \partial^k f(a) - \sum_{i\in\Lambda'\setminus\{k\}} \frac{1}{(i-k)!}\partial^i f(a)(a-a)^{i-k} - \frac{1}{0!}\partial^k f(a)(a-a)^0 \\
&= \partial^k f(a) - \sum_{i\in\Lambda'\setminus\{k\}} \frac{1}{(i-k)!}\partial^i f(a)(a-a)^{i-k} - \partial^k f(a) \\
&= \partial^k f(a) - \sum_{i\in\Lambda'\setminus\{k\}} \frac{1}{(i-k)!}\partial^i f(a)(a-a)^{i-k} - \partial^k f(a) \\
&= \left(\partial^k f(a) - \partial^k f(a)\right) - \sum_{i\in\Lambda'\setminus\{k\}} \frac{1}{(i-k)!}\partial^i f(a)0^{i-k} \\
&= 0 - 0 = 0 \ \because\ 1 \leq i-k
\end{aligned}
$$

また、$k=n$ のとき、次式に注意すれば、

$$
i \in \Lambda' \Leftrightarrow k = n \leq i \leq n \Leftrightarrow i = n
$$

したがって、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\partial^k r(a) &= \partial^n f(a) - \sum_{i\in\Lambda'} \frac{1}{(i-n)!}\partial^i f(a)(x-a)^{i-n} \\
&= \partial^n f(a) - \frac{1}{0!}\partial^n f(a)(a-a)^0 \\
&= \partial^n f(a) - \partial^n f(a) = 0
\end{aligned}
$$

また、$k=n+1$ のとき、次式に注意すれば、

$$
i \in \Lambda' \Leftrightarrow k = n+1 \leq i \leq n \Leftrightarrow \perp
$$

したがって、次のようになる。

$$
\partial^{n+1} r(a) = \partial^{n+1} f(a) - \sum_{i\in\Lambda'} \frac{1}{(i-(n+1))!}\partial^i f(a)(x-a)^{i-(n+1)}
$$

$$\begin{aligned}
&= \partial^{n+1} f(a) - \sum_{\perp} \frac{1}{(i-(n+1))!} \partial^i f(a)(x-a)^{i-(n+1)} \\
&= \partial^{n+1} f(a) - 0 = \partial^{n+1} f(a)
\end{aligned}$$

また、$I_1 = I = [x, a] \cup [a, x]$ かつ $x \neq a$ なる区間 I_1 で $(x-a)^{n+1} \neq 0$ となるので、上記の議論より $\forall n+1 \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\frac{d^k}{dx^k}(x-a)^{n+1} = \begin{cases} \dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!}(x-a)^{n+1-k} & \text{if} \quad k \leq n+1 \\ 0 & \text{if} \quad n+1 < k \end{cases}$$

ここで、それらの関数たち r、$g : I \to \mathbb{R}; x \mapsto (x-a)^{n+1}$ が、明らかに、その有界閉区間 I_1 で連続でその開区間 $\mathrm{int} I_1$ で微分可能であり、$g(x) \neq g(a) = 0$ が成り立つかつ、$\partial(g)(x) \neq 0$ より $\partial r(x) = \partial g(x) = 0$ が成り立たないので、Cauchy の平均値の定理より次式が成り立つような実数 x_1 がその区間 $\mathrm{int} I_1$ に存在する。

$$\frac{r(x) - r(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\partial r}{\partial g}(x_1)$$

$k = k' \leq n$ のとき、$I_{k'} = [x_{k'-1}, a] \cup [a, x_{k'-1}]$ かつ $x_{k'-1} \neq a$ なる区間 $I_{k'}$ を考え次式が成り立つような実数 $x_{k'}$ がその区間 $\mathrm{int} I_{k'} \subseteq \mathrm{int} I$ に存在すると仮定しよう。

$$\frac{r(x) - r(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\partial^{k'} r}{\partial^{k'} g}(x_{k'})$$

$k = k' + 1 \leq n + 1$ のとき、$I_{k'+1} = [x_{k'}, a] \cup [a, x_{k'}]$ かつ $x_{k'} \neq a$ なる区間 $I_{k'+1}$ で $(x_{k'} - a)^n \neq 0$ となるので、上記の議論より $\forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\frac{d^k}{dx^k}(x-a)^{n+1} = \begin{cases} \dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!}(x-a)^{n+1-k} & \text{if} \quad k \leq n+1 \\ 0 & \text{if} \quad n+1 < k \end{cases}$$

ここで、それらの関数たち $\partial^{k'} r$、$\partial^{k'} g$ がその有界閉区間 I で連続でその開区間 $\mathrm{int} I$ で微分可能であり、$\partial^{k'} g(x_{k'}) \neq \partial^{k'} g(a) = 0$ が成り立つかつ、$\partial^{k'+1} g(x_{k'}) \neq 0$ より $\partial^{k'+1} r(x_{k'}) = \partial^{k'+1} g(x_{k'}) = 0$ が成り立たないので、Cauchy の平均値の定理より次式が成り立つような実数 $x_{k'+1}$ がその区間 $\mathrm{int} I_{k'+1} \subseteq \mathrm{int} I$ に存在する。

$$\frac{\partial^{k'} r}{\partial^{k'} g}(x_{k'}) = \frac{\partial^{k'+1} r}{\partial^{k'+1} g}(x_{k'+1})$$

したがって、次式が成り立つような実数 $x_{k'+1}$ がその区間 $\mathrm{int} I_{k'+1} \subseteq \mathrm{int} I$ に存在する。

$$\frac{r(x) - r(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\partial^{k'+1} r}{\partial^{k'+1} g}(x_{k'+1})$$

以上より数学的帰納法によって、$k \leq n+1$ のとき、次式が成り立つような実数 x_k がその区間 $\mathrm{int} I$ に存在する。

$$\frac{r(x) - r(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\partial^k r}{\partial^k g}(x_k)$$

$k = n+1$ とし $x_{n+1} = c$ とおくと、次式が成り立つような実数 c がその区間 $\mathrm{int} I$ に存在する。

$$\frac{r(x) - r(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\partial^{n+1} r}{\partial^{n+1} g}(c)$$

ここで、次式たちいづれも成り立つことに注意すれば、

$$r(a) = g(a) = 0, \quad g(x) = (x-a)^{n+1},$$

$$\partial^{n+1} r(c) = \partial^{n+1} f(c), \quad \partial^{n+1} g(c) = (n+1)!$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{r(x) - r(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\partial^{n+1} r}{\partial^{n+1} g}(c) \Leftrightarrow \frac{r(x)}{(x-a)^{n+1}} &= \frac{\partial^{n+1} f(c)}{(n+1)!} \\ \Leftrightarrow R_{n+1}(x) &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \partial^{n+1} f(c) \end{aligned}$$

よって、次式が成り立つような実数 c がその区間 $\mathrm{int}I$ に存在する。

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \partial^{n+1} f(c)$$

□

定理 2.1.18. $I = [x,a] \cup [a,x] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる区間 I で n 回微分可能な関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ のその実数 a のまわりの $n+1$ 次剰余項 $R_{n+1}(x)$ について、次式が成り立つ。

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

証明. $I = [x,a] \cup [a,x] \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる区間 I で n 回微分可能な関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ に対し、次式のように $n+1$ 次剰余項 $R_{n+1}(x)$ が定義されるとき、

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{(x-a)^i}{i!} \partial^i f(a)$$

Taylor の定理より次式が成り立つような実数 c がその区間 $\mathrm{int}I$ に存在する。

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \partial^{n+1} f(c)$$

ここで、$a < x$ のとき、$a < c < x$ が成り立つので、$x \to a$ とすれば、はさみうちの原理より $c \to a$ となることに注意すれば、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \partial^{n+1} f(c) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} \lim_{x \to a} \partial^{n+1} f(c) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \lim_{x \to a} (x-a) \lim_{c \to a} \partial^{n+1} f(c) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot 0 \cdot \partial^{n+1} f(a) = 0 \end{aligned}$$

$a > x$ のときも同様にして示される。 □

定理 2.1.19 (Taylor 展開)**.** $\{a\} \subset I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる区間 I で C^{∞} 級の関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ を考え、$\forall x \in I$ に対し、次式が成り立つとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$$

その関数 f はその区間 I 上で次式のように書かれることができる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(x-a)^n}{n!} \partial^n f(a) \\ &= f(a) + (x-a)\partial f(a) + \frac{(x-a)^2}{2} \partial^2 f(a) + \frac{(x-a)^3}{6} \partial^3 f(a) + \cdots \end{aligned}$$

この式をその関数 f のその実数 a のまわりの Taylor 展開などという。特に、$a = 0$ としたものをその関数 f の Maclaurin 展開などという。

定義 2.1.7. $\{a\} \subset I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる区間 I で C^{∞} 級の関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$ が、$\forall x \in I$ に対し、次式が成り立つとき、

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(x-a)^n}{n!} \partial^n f(a)$$

その関数 f はその区間 I で C^{ω} 級である、解析的であるという。その区間 I で解析的であるような関数全体の集合を $C^{\omega}(I, \mathbb{C})$ と書くことがある[*22]。

[*22] ここで反例を。C^{∞} 級の関数であるものの解析的でない関数として次のようなものがある。

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{if} \quad 0 < x \end{cases}$$

$x \neq 0$ においては、その関数 f が定数関数であるか無限回微分可能な関数の合成なので、無限回微分可能であることはわかる。ここで、$x = 0$ について、l'Hôpital の定理 2.1.24 より次のようになるので、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{0-0}{h} = 0 \\ \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{\frac{1}{h} \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{h}}{\exp \frac{1}{h}} = \lim_{\frac{1}{h} \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp \frac{1}{h}} = 0 \end{aligned}$$

その関数 f は $x = 0$ で微分可能でありその導関数 ∂f は次のようになる。

$$\partial f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \leq 0 \\ -\frac{1}{x^2} f(x) & \text{if} \quad 0 < x \end{cases}$$

ここで、その関数 f がその集合 $\mathbb{R}$ で k 回微分可能で k 階導関数 $\partial^k f$ が $k-1$ 次多項式関数 p_{k-1} を用いて次のようになると仮定しよう。

$$\partial^k f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \leq 0 \\ \frac{p_{k-1}(x)}{x^{2k}} f(x) & \text{if} \quad 0 < x \end{cases}$$

このとき、先ほどの議論により $k+1$ 回微分可能であるので、$\forall x < 0$ に対し、$\partial^{k+1} f(x) = 0$ が成り立つ。$\forall x > 0$ に対し、次のようになる。

$$\partial^{k+1} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{p_{k-1}(x)}{x^{2k}} f(x) \right)$$

証明. $\{a\} \subset I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ なる区間 I で C^∞ 級の関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ を考え、$\forall x \in I$ に対し、次式が成り立つとき、

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

その $n+1$ 次剰余項の定義より次のようになり、

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - \sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}} \frac{(x-a)^i}{i!}\partial^i f(a) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}} \frac{(x-a)^i}{i!}\partial^i f(a) \\
&= f(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}} \frac{(x-a)^i}{i!}\partial^i f(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{d}{dx}p_{k-1}(x) f(x) + p_{k-1}(x)\frac{d}{dx}f(x)\right)x^{2k} - p_{k-1}(x) f(x) \frac{d}{dx}x^{2k}}{x^{4k}} \\
&= \frac{\left(\frac{d}{dx}p_{k-1}(x) f(x) - \frac{1}{x^2}p_{k-1}(x) f(x)\right)x^{2k} - \frac{2k}{x}p_{k-1}(x) f(x) x^{2k}}{x^{4k}} \\
&= \frac{\frac{d}{dx}p_{k-1}(x) f(x) - \frac{1}{x^2}p_{k-1}(x) f(x) - \frac{2k}{x}p_{k-1}(x) f(x)}{x^{2k}} \\
&= \frac{x^2\frac{d}{dx}p_{k-1}(x) - p_{k-1}(x) - 2kxp_{k-1}(x)}{x^{2(k+1)}} f(x)
\end{aligned}$$

数学的帰納法により $\forall x > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ に対し、n 階導関数 $\partial^n f$ は $n-1$ 次多項式関数 p_{n-1} を用いて次のようになる。

$$\partial^n f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x < 0 \\ \dfrac{p_{n-1}(x)}{x^{2n}} f(x) & \text{if} \quad 0 < x \end{cases}$$

$x = 0$ について、$\dfrac{p_{k-1}(h)}{h^{2k+1}}$ が $\dfrac{1}{h}$ の多項式となっていることに注意すれば、l'Hôpital の定理 2.1.24 より次のようになるので、

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to-0} \frac{\partial^k f(h) - \partial^k f(0)}{h} &= \lim_{h\to-0} \frac{0-0}{h} = 0 \\
\lim_{h\to+0} \frac{\partial^k f(h) - \partial^k f(0)}{h} &= \lim_{h\to+0} \frac{\frac{p_{k-1}(h)\exp\left(-\frac{1}{h}\right)}{h^{2k}}}{h} \\
&= \lim_{\frac{1}{h}\to\infty} \frac{\frac{p_{k-1}(h)}{h^{2k+1}}}{\exp\frac{1}{h}} = \lim_{\frac{1}{h}\to\infty} \frac{1}{\exp\frac{1}{h}} = 0
\end{aligned}$$

その導関数 $\partial^k f$ は $x = 0$ でも微分可能であり $\partial^{k+1} f(0) = 0$ が成り立つ。数学的帰納法により、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$n-1$ 次多項式関数 p_{n-1} を用いて次のようになる。

$$\partial^n f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \le 0 \\ \dfrac{p_{n-1}(x)}{x^{2n}} f(x) & \text{if} \quad 0 < x \end{cases}$$

このとき、$\forall x > 0$ に対し、次のようになるので、

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{x^n}{n!}\partial^n f(0) = \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{x^n}{n!} \cdot 0 = 0 < f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

実数 0 まわりでその関数 f は Taylor 展開できていない、即ち、その関数 f は解析的でないことになる。

したがって、次のようになる。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in\varLambda_n\cup\{0\}}\frac{(x-a)^i}{i!}\partial^i f(a)=\sum_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\frac{(x-a)^i}{i!}\partial^i f(a)$$

□

定理 2.1.20. $\{a\}\subset I\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}$ なる区間 I で C^∞ 級の関数 $f:D(f)\to\mathbb{R}$ を考え、$\forall n\in\mathbb{N}\forall x\in I$ に対し、次式が成り立つような負でない実数たち C、M が存在するとき、

$$|\partial^n f(x)|\leq CM^n$$

その関数 f はこれのその実数 a のまわりの Taylor 展開に変形できる。

証明. $\{a\}\subset I\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}$ なる区間 I で C^∞ 級の関数 $f:D(f)\to\mathbb{R}$ を考え、$\forall n\in\mathbb{N}\forall x\in I$ に対し、次式が成り立つような負でない実数たち C、M が存在するとき、

$$|\partial^n f(x)|\leq CM^n$$

その関数 f の $n+1$ 次剰余項 $R_{n+1}(x)$ について Taylor の定理より次のようになり、

$$|R_{n+1}(x)|=\left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\partial^{n+1}f(c)\right|=\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\left|\partial^{n+1}f(c)\right|$$

ここで、仮定より次式が成り立つような負でない実数たち C、M が存在する。

$$\begin{aligned}0\leq|R_{n+1}(x)|&=\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\left|\partial^{n+1}f(c)\right|\\&\leq\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}CM^{n+1}\\&=C\frac{|x-a|^{n+1}M^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

ここで、次式のような級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考え、

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{R};n\mapsto C\sum_{k\in\varLambda_n}\frac{|x-a|^{k+1}M^{k+1}}{(k+1)!}$$

$C=0$ または $M=0$ が成り立つとき、明らかに、次式が成り立ち

$$\lim_{n\to\infty}C\sum_{k\in\varLambda_n}\frac{|x-a|^{k+1}M^{k+1}}{(k+1)!}=0\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\varLambda_n}\frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}=0\in\mathbb{R}$$

その級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。

$C\neq 0$ かつ $M\neq 0$ が成り立つとき、次のようになり、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x-a|^{n+2}M^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{|x-a|^{n+1}M^{n+1}}{(n+1)!}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x-a|^{n+1}M^{n+1}}{(n+1)!}\frac{|x-a|M}{n+2}}{\frac{|x-a|^{n+1}M^{n+1}}{(n+1)!}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-a|M}{n+2}\\&=|x-a|M\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

したがって、ratio test よりその級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する。
　これにより、定理よりその級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するので、次式が成り立つ。

$$C\lim_{n\to\infty}\frac{|x-a|^{n+1}M^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

したがって、次式が成り立つことにより

$$0\leq|R_{n+1}(x)|\leq C\frac{|x-a|^{n+1}M^{n+1}}{(n+1)!}$$

次式が成り立ち

$$-C\lim_{n\to\infty}\frac{|x-a|^{n+1}M^{n+1}}{(n+1)!}=0\leq\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x)\leq C\lim_{n\to\infty}\frac{|x-a|^{n+1}M^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$ が成り立つ。これにより、その関数 f はこれのその実数 a のまわりの Taylor 展開に変形できる。 □

2.1.9 凸関数

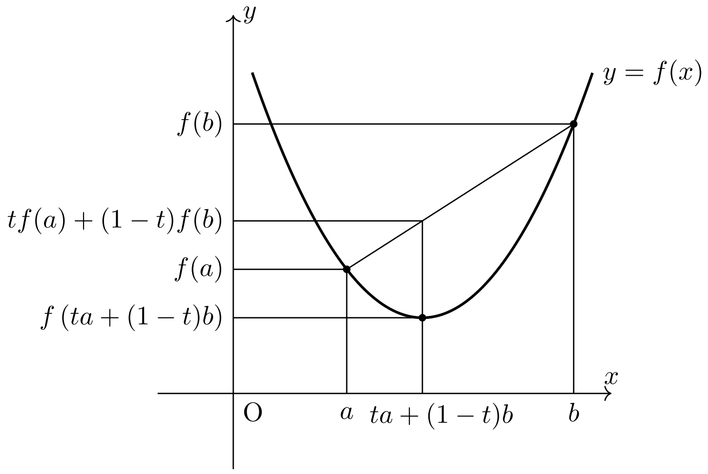
定義 2.1.8. $I\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}$ なる区間 I で関数 $f:D(f)\to\mathbb{R}$ が、$\forall a,b\in I\forall t\in(0,1)$ に対し、次式が成り立つとき、

$$f(ta+(1-t)b)\leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

この関数 f はその区間 I で下への凸、下への凸関数などという。また、次式が成り立つとき、

$$f(ta+(1-t)b)<tf(a)+(1-t)f(b)$$

この関数 f はその区間 I で下への狭義凸関数などという。



同様にして、関数 $f:D(f)\to\mathbb{R}$ が、$\forall a,b\in I\forall t\in(0,1)$ に対し、次式が成り立つとき、

$$f(ta+(1-t)b)\geq tf(a)+(1-t)f(b)$$

この関数 f はその区間 I で上への凸、上への凸関数などという。また、次式が成り立つとき、

$$f\left(ta+(1-t)b\right)>tf(a)+(1-t)f(b)$$

この関数 f はその区間 I で上への狭義凸関数などという。

定義 2.1.9. 関数 f が下への凸関数である、または、上への凸関数であるとき、その関数 f は凸関数であるという。同様にして、関数 f が下への狭義凸関数である、または、上への狭義凸関数であるとき、その関数 f は狭義凸関数であるという。

定理 2.1.21. $I\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}$ なる区間 I で関数 $f:D(f)\rightarrow\mathbb{R}$ の 2 階導関数 $\partial^2 f$ が存在するとき、次のことは同値である。

- その関数 f はその区間 I で下への凸関数である。
- $a<x<b$ かつ $a,b,x\in I$ なる実数たち a、b、x が次式を満たす。

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

- その 1 階導関数 ∂f はその区間 I 上で単調増加する。
- $\partial^2 f|\mathrm{int}I\geq 0$ が成り立つ。

また、同様に次のことが同値である。

- その関数 f はその区間 I で上への凸関数である。
- $a<x<b$ かつ $a,b,x\in I$ なる実数たち a、b、x が次式を満たす。

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

- その 1 階導関数 ∂f はその区間 I 上で単調減少する。
- $\partial^2 f|\mathrm{int}I\leq 0$ が成り立つ。

証明. $I\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}$ なる区間 I で関数 $f:D(f)\rightarrow\mathbb{R}$ の 2 階導関数 $\partial^2 f$ が存在するとする。$\partial^2 f|\mathrm{int}I\geq 0$ が成り立つとき、Taylor の定理より次式が成り立つような実数 c が区間 $(a,x)\cup(x,a)$ に存在するのであった。

$$f(x)=f(a)+(x-a)\partial f(x)+\frac{(x-a)^2}{2}\partial^2 f(c)$$

ここで、$c\in I$ が成り立ち仮定より $\partial^2 f(c)\geq 0$ が成り立つので、$\dfrac{(x-a)^2}{2}\partial^2 f(c)\geq 0$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$f(x)=f(a)+(x-a)\partial f(x)+\frac{(x-a)^2}{2}\partial^2 f(c)\geq f(a)+(x-a)\partial f(x)$$

これにより、$\forall a,b\in I\forall t\in(0,1)$ に対し、$x=ta+(1-t)b$ とおくと、次のようになる。

$$\begin{cases}f(a)\geq f(x)+(a-x)\partial f(x)\\ f(b)\geq f(x)+(b-x)\partial f(x)\end{cases}$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{cases}tf(a)\geq tf(x)+t(a-x)\partial f(x)\\ (1-t)f(b)\geq(1-t)f(x)+(1-t)(b-x)\partial f(x)\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow tf(a)+(1-t)f(b)\geq tf(x)+t(a-x)\partial f(x)+(1-t)f(x)+(1-t)(b-x)\partial f(x)\\
&\Leftrightarrow tf(a)+(1-t)f(b)\geq(t+1-t)f(x)+(ta-tx+b-x-tb+tx)\partial f(x)\\
&\Leftrightarrow tf(a)+(1-t)f(b)\geq f(x)+(ta-tx+b-x-tb+tx)\partial f(x)
\end{aligned}
$$

ここで、次のようになることから、

$$
\begin{aligned}
ta-tx+b-x-tb+tx&=ta-t\left(ta+(1-t)b\right)+b-\left(ta+(1-t)b\right)-tb+t\left(ta+(1-t)b\right)\\
&=ta-t^2a-tb+t^2b+b-ta-b+tb-tb+t^2a+tb-t^2b\\
&=t^2a-t^2a+ta-ta+t^2b-t^2b+tb-tb+tb-tb+b-b=0
\end{aligned}
$$

次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\begin{cases}f(a)\geq f(x)+(a-x)\partial f(x)\\ f(b)\geq f(x)+(b-x)\partial f(x)\end{cases}&\Rightarrow tf(a)+(1-t)f(b)\geq f(x)+0\partial f(x)\\
&\Leftrightarrow tf(a)+(1-t)f(b)\geq f\left(ta+(1-t)b\right)
\end{aligned}
$$

これにより、その関数 f はその区間 I で下への凸関数である。

逆に、$a<x<b$ とし、$t=\dfrac{x-b}{a-b}$ とおくと、$0<t<1$ で次のようになり

$$
\begin{aligned}
t=\frac{x-b}{a-b}&\Leftrightarrow t(a-b)=x-b\\
&\Leftrightarrow ta+b-tb=x\\
&\Leftrightarrow ta+(1-t)b=x
\end{aligned}
$$

その関数 f はその区間 I で下への凸関数であるならそのときに限り、$\forall a,b\in I\forall t\in(0,1)$ に対し、$a\neq b$ が成り立つなら、$tf(a)+(1-t)f(b)\geq f(x)$ が成り立つのであったので、したがって、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{x-b}{a-b}f(a)+\left(1-\frac{x-b}{a-b}\right)f(b)\geq f(x)&\Leftrightarrow\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{a-b-x+b}{a-b}f(b)\geq f(x)\\
&\Leftrightarrow\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\geq f(x)
\end{aligned}
$$

ここで、次のようになることから、

$$
\begin{aligned}
f(x)\leq\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)&\Leftrightarrow f(x)-f(a)\leq\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)-\frac{a-b}{a-b}f(a)\\
&\Leftrightarrow f(x)-f(a)\leq\frac{x-b-a+b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\\
&\Leftrightarrow f(x)-f(a)\leq-\frac{x-a}{b-a}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)\\
&\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\\
f(x)\leq\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)&\Leftrightarrow f(x)-f(b)\leq\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)-\frac{b-a}{b-a}f(b)\\
&\Leftrightarrow f(x)-f(b)\leq\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a-b+a}{b-a}f(b)\\
&\Leftrightarrow f(x)-f(b)\leq-\frac{x-b}{b-a}f(a)-\frac{x-b}{b-a}f(b)\\
&\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\geq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}
\end{aligned}
$$

したがって、次式が成り立つ。

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

また、$a<x<b$ かつ $a,b,x \in I$ なる実数たち a、b、x が次式を満たすとき、

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

$x=a+\delta$、$x=b+\varepsilon$ とおくと、次式のように書かれることができ、

$$\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b+\varepsilon)-f(b)}{\varepsilon}$$

$\delta,\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば、次のようになる。

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta \neq 0}} \frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \frac{f(b+\varepsilon)-f(b)}{\varepsilon}$$

微分の定義より、$\forall a,b \in I$ に対し、$a<b$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$\partial f(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \partial f(b)$$

これにより、その 1 階導関数 ∂f はその区間 I 上で単調増加する。

上記の関数の増減の議論より、これが成り立つならそのときに限り、$\partial^2 f|\mathrm{int}I \geq 0$ が成り立つ。

以上より、次のことは同値であることが示された。

- その関数 f はその区間 I で下への凸関数である。
- $a<x<b$ かつ $a,b,x \in I$ なる実数たち a、b、x が次式を満たす。

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

- その 1 階導関数 ∂f はその区間 I 上で単調増加する。
- $\partial^2 f|\mathrm{int}I \geq 0$ が成り立つ。

同様にして、次のことが同値であることが示される。

- その関数 f はその区間 I で上への凸関数である。
- $a<x<b$ かつ $a,b,x \in I$ なる実数たち a、b、x が次式を満たす。

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

- その 1 階導関数 ∂f はその区間 I 上で単調減少する。
- $\partial^2 f|\mathrm{int}I \leq 0$ が成り立つ。

□

定理 2.1.22. $I \subseteq D(f) \in \mathbb{R}$ なる区間 I で関数 $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ の 2 階導関数 $\partial^2 f$ が存在するとき、$\partial^2 f|\mathrm{int}I > 0$ が成り立つなら、次のことが成り立つ[*23]。

[*23] これをうまく応用すれば、最大値、最小値を求めることができる。

- $\forall a,x \in I$ に対し、$x \neq a$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$f(x) > f(a) + (x-a)\partial f(a)$$

- その関数 f はその区間 I で下への狭義凸関数である。
- $a < x < b$ かつ $a,b,x \in I$ なる実数たち a、b、x が次式を満たす。

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

同様に、$\partial^2 f|\mathrm{int}I < 0$ が成り立つなら、次のことが成り立つ。

- $\forall a,x \in I$ に対し、$x \neq a$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$f(x) < f(a) + (x-a)\partial f(a)$$

- その関数 f はその区間 I で上への狭義凸関数である。
- $a < x < b$ かつ $a,b,x \in I$ なる実数たち a、b、x が次式を満たす。

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

証明. $I \subseteq D(f) \in \mathbb{R}$ なる区間 I で関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ の 2 階導関数 $\partial^2 f$ が存在するとき、$\partial^2 f|\mathrm{int}I > 0$ が成り立つなら、Taylor の定理より次式が成り立つような実数 c が区間 $(a,x) \cup (x,a)$ に存在するのであった。

$$f(x) = f(a) + (x-a)\partial f(x) + \frac{(x-a)^2}{2}\partial^2 f(c)$$

ここで、$c \in I$ が成り立ち仮定より $\partial^2 f(c) > 0$ が成り立つので、$\dfrac{(x-a)^2}{2}\partial^2 f(c) > 0$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$f(x) = f(a) + (x-a)\partial f(x) + \frac{(x-a)^2}{2}\partial^2 f(c) > f(a) + (x-a)\partial f(x)$$

これにより、$\forall a,x \in I$ に対し、$x \neq a$ が成り立つなら、$f(x) > f(a) + (x-a)\partial f(a)$ が成り立つ。

これにより、$\forall a,b \in I \forall t \in (0,1)$ に対し、$x = ta + (1-t)b$ とおくと、次のようになり、

$$\begin{aligned}
\begin{cases} f(a) > f(x) + (a-x)\partial f(x) \\ f(b) > f(x) + (b-x)\partial f(x) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} tf(a) > tf(x) + t(a-x)\partial f(x) \\ (1-t)f(b) > (1-t)f(x) + (1-t)(b-x)\partial f(x) \end{cases} \\
&\Rightarrow tf(a) + (1-t)f(b) > tf(x) + t(a-x)\partial f(x) \\
&\quad + (1-t)f(x) + (1-t)(b-x)\partial f(x) \\
&\Leftrightarrow tf(a) + (1-t)f(b) > (t+1-t)f(x) \\
&\quad + (ta - tx + b - x - tb + tx)\partial f(x) \\
&\Leftrightarrow tf(a) + (1-t)f(b) > f(x) + (ta - tx + b - x - tb + tx)\partial f(x)
\end{aligned}$$

ここで、次のようになることから、

$$\begin{aligned}
ta - tx + b - x - tb + tx &= ta - t\left(ta + (1-t)b\right) + b - (ta + (1-t)b) - tb + t\left(ta + (1-t)b\right) \\
&= ta - t^2a - tb + t^2b + b - ta - b + tb - tb + t^2a + tb - t^2b \\
&= t^2a - t^2a + ta - ta + t^2b - t^2b + tb - tb + tb - tb + b - b = 0
\end{aligned}$$

次のようになる。

$$\begin{aligned}\begin{cases}f(a)>f(x)+(a-x)\partial f(x)\\f(b)>f(x)+(b-x)\partial f(x)\end{cases}&\Rightarrow tf(a)+(1-t)f(b)>f(x)+0\partial f(x)\\&\Leftrightarrow tf(a)+(1-t)f(b)>f\left(ta+(1-t)b\right)\end{aligned}$$

これにより、その関数 f はその区間 I で下への狭義凸関数である。

逆に、$a<b$ とし $ta+(1-t)b=x$ とおくと、その関数 f はその区間 I で下への狭義凸関数であるならそのときに限り、$\forall a,b\in I\forall t\in(0,1)$ に対し、$a\neq b$ が成り立つなら、$tf(a)+(1-t)f(b)>f(x)$ が成り立つ。ここで、関係 $a<x<b$ が成り立つことに注意すれば、次のようになり、

$$\begin{aligned}ta+(1-t)b=x&\Leftrightarrow ta+b-tb=x\\&\Leftrightarrow t(a-b)=x-b\Leftrightarrow t=\frac{x-b}{a-b}\end{aligned}$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{x-b}{a-b}f(a)+\left(1-\frac{x-b}{a-b}\right)f(b)>f(x)&\Leftrightarrow\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{a-b-x+b}{a-b}f(b)>f(x)\\&\Leftrightarrow\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)>f(x)\end{aligned}$$

ここで、次のようになることから、

$$\begin{aligned}f(x)<\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)&\Leftrightarrow f(x)-f(a)<\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)-\frac{a-b}{a-b}f(a)\\&\Leftrightarrow f(x)-f(a)<\frac{x-b-a+b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\\&\Leftrightarrow f(x)-f(a)<-\frac{x-a}{b-a}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)\\&\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\\f(x)<\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)&\Leftrightarrow f(x)-f(b)<\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)-\frac{b-a}{b-a}f(b)\\&\Leftrightarrow f(x)-f(b)<\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a-b+a}{b-a}f(b)\\&\Leftrightarrow f(x)-f(b)<-\frac{x-b}{b-a}f(a)-\frac{x-b}{b-a}f(b)\\&\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\end{aligned}$$

したがって、次式が成り立つ。

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

$\partial^2f|\mathrm{int}I>0$ が成り立つなら、次のことが成り立つ。

- $\forall a,x\in I$ に対し、$x\neq a$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$f(x)>f(a)+(x-a)\partial f(a)$$

- その関数 f はその区間 I で下への狭義凸関数である。

- $a < x < b$ かつ $a, b, x \in I$ なる実数たち a、b、x が次式を満たす。

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

同様にして、$\partial^2 f|\mathrm{int}I < 0$ が成り立つなら、次のことが成り立つことも示される。

- $\forall a, x \in I$ に対し、$x \neq a$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$f(x) < f(a) + (x - a)\partial f(a)$$

- その関数 f はその区間 I で上への狭義凸関数である。
- $a < x < b$ かつ $a, b, x \in I$ なる実数たち a、b、x が次式を満たす。

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

□

定理 2.1.23. $I = [a, b] \subseteq D(f) \in \mathbb{R}$ なる区間 I で関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ の 2 階導関数 $\partial^2 f$ が存在するとき、$\partial^2 f|I > 0$ が成り立つかつ、$f(a)f(b) < 0$ が成り立つなら、その関数 f はその区間 $\mathrm{int}I$ で $f(c) = 0$ が成り立つような実数 c をただ 1 つもつ。

このような実数 c をその関数 f のその区間 I での零点などという。

証明. $I = [a, b] \subseteq D(f) \in \mathbb{R}$ なる区間 I で関数 $f : D(f) \to \mathbb{R}$ の 2 階導関数 $\partial^2 f$ が存在するとき、$\partial^2 f|I > 0$ が成り立つかつ、$f(a)f(b) < 0$ が成り立つなら、その関数 f はその区間 I で微分可能でありその区間 I で連続であるかつ、仮定より次のようになるので、

$$\begin{aligned} f(a)f(b) < 0 &\Leftrightarrow (f(a) > 0 \wedge f(b) < 0) \vee (f(a) < 0 \wedge f(b) > 0) \\ &\Leftrightarrow f(b) < 0 < f(a) \vee f(a) < 0 < f(b) \\ &\Leftrightarrow f(a) \gtreqless 0 \lesseqgtr f(b) \end{aligned}$$

したがって、中間値の定理よりその関数 f はその区間 $\mathrm{int}I$ で $f(c) = 0$ が成り立つような実数 c をもつ。

ここで、$f(c) = f(d) = 0$ が成り立つような $a < c < d < b$ なる実数たち c、d が複数存在するとする。このとき、明らかに、次式が成り立つような実数たち s、t が区間 $(0, 1)$ に存在し、

$$c = sa + (1 - s)\, d, \quad d = tc + (1 - t)\, b$$

$\partial^2 f|I > 0$ が成り立つので、その関数 f はその区間 I で下に狭義凸関数である。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(c) = f(d) = 0 \\ c = sa + (1 - s)\, d \\ d = tc + (1 - t)\, b \\ f(sa + (1 - s)\, d) < sf(a) + (1 - s)\, f(d) \\ f(tc + (1 - t)\, b) < tf(c) + (1 - t)\, f(b) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < sf(a) + (1 - s)\, f(d) \\ 0 = f(c) = f(sa + (1 - s)\, d) \\ 0 < (1 - t)\, f(b) \\ 0 = f(d) = f(tc + (1 - t)\, b) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 < sf(a) \\ 0 < (1 - t)\, f(b) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(a) \\ 0 < f(b) \end{cases} \\ &\Rightarrow f(a)f(b) > 0 \end{aligned}$$

これは仮定 $f(a)f(b) < 0$ に矛盾する。

よって、その関数 f はその区間 $\mathrm{int}I$ で $f(c) = 0$ が成り立つような実数 c をただ 1 つもつ。 □

2.1.10 l'Hôpital の定理

定理 2.1.24 (l'Hôpital の定理)**.** ある区間 I を用いた $I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ かつ $I \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{R}$ なる関数たち $f : D(f) \to \mathbb{R}$、$g : D(g) \to \mathbb{R}$ が、実数 a を用いて $\mathfrak{a} = a$ のとき、区間 I がその実数 a のε近傍 $U(a, \varepsilon)$ で、$\mathfrak{a} = \infty$ のとき、その区間 I が上に有界でない区間で、$\mathfrak{a} = -\infty$ のとき、その区間 I が下に有界でない区間であるとして、その区間 I で微分可能であるとする。

- 次式たちが成り立つかつ、

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} f(x) = \lim_{x \to \mathfrak{a}} g(x) = 0, \quad \forall x \in I \left[\partial g(x) \neq 0 \right]$$

  極限 $\lim_{x \to \mathfrak{a}} \dfrac{\partial f}{\partial g}(x)$ が振動しなければ、次式が成り立つ。

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{\partial f}{\partial g}(x)$$

- 次式たちが成り立つかつ、

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} g(x) = \infty, \quad \forall x \in I \left[\partial g(x) \neq 0 \right]$$

  極限 $\lim_{x \to \mathfrak{a}} \dfrac{\partial f}{\partial g}(x)$ が振動しなければ、次式が成り立つ。

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{\partial f}{\partial g}(x)$$

この定理を l'Hôpital の定理という[*24]。

[*24] ここで少し反例を。ただ、高校数学の内容であるもののまだ述べられていない内容も含まれるので、目を通す程度で OK。

- $\lim_{x \to \mathfrak{a}} f(x) = \lim_{x \to \mathfrak{a}} g(x) = 0$ が成り立っていない場合として、例えば、$f(x) = \cos x$、$g(x) = x$ のときが挙げられる。$x \to +0$ で $f(x) = \cos x \to 1$、$g(x) = x \to 0$ となっているものの、$f'(x) = -\sin x$、$g'(x) = 1$ なので、次のようになる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to +0} \frac{\cos x}{x} = \infty, \\ \lim_{x \to +0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \to +0} (-\sin x) = 0 \end{aligned}$$

- 極限 $\lim_{x \to \mathfrak{a}} \dfrac{\partial f}{\partial g}(x)$ が振動してしまっている場合として、例えば、$f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$、$g(x) = x$ のときが挙げられる。$x \to +0$ で、$0 \leq \sin \dfrac{1}{x} \leq 1$ かつ $x^2 \to 0$ なので、はさみうちの原理より $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} \to 0$、$g(x) \to 0$ となっている。ここで、$x \to +0$ で、$0 \leq \sin \dfrac{1}{x} \leq 1$ なので、はさみうちの原理より次のようになる。

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

  一方で、$f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$、$g'(x) = 1$ なので、次のようになる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \to +0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{\frac{1}{x} \to \infty} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = \mathrm{indefinite} \end{aligned}$$

- $\forall x \in I \left[\partial g(x) \neq 0 \right]$ が成り立っていない場合として、例えば、$f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \sin 2x$、$g(x) = f(x) e^{\sin x}$ のときが挙げられる。このとき、$x \to \infty$ で $-1 \leq \sin 2x$ と追い出しの原理より $f(x), g(x) \to \infty$ となる。もちろん $x \to \infty$ で $e^{\sin x} = \mathrm{indefinite}$

証明. ある区間 I を用いた $I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$ かつ $U(a, \gamma+\delta) \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{R}$ なる関数たち $f: D(f) \to \mathbb{R}$、$g: D(g) \to \mathbb{R}$ が、実数 a を用いて $\mathfrak{a} = a$ のとき、区間 I がその実数 a の $\gamma+\delta$ 近傍 $U(a, \gamma+\delta)$ で、$\mathfrak{a} = \infty$ のとき、その区間 I が上に有界でない区間で、$\mathfrak{a} = -\infty$ のとき、その区間 I が下に有界でない区間であるとして、その区間 I で微分可能であるとする。

次式たちが成り立つかつ、

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} f(x) = \lim_{x \to \mathfrak{a}} g(x) = 0, \quad \forall x \in I\left[\partial g(x) \neq 0\right]$$

極限 $\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{\partial f}{\partial g}(x)$ が振動しないとき、$\mathfrak{a} = a$ かつ $a < x$ のとき、$x = a + \gamma + \delta$ なる正の実数 $\gamma + \delta$ を用いて Cauchy の平均値の定理より次式が成り立つような実数 c が $(a, x) \subset U(a, \gamma+\delta)$ なる区間 (a, x) に存在する。

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f}{g}(x) = \frac{\partial f}{\partial g}(c)$$

ここで、$\gamma + \delta \to 0$ とすると、$0 < c - a < \gamma + \delta$ より $c - a \to 0$ となり、したがって、次式が成り立つ。

$$\lim_{\gamma+\delta \to 0} \frac{f}{g}(x) = \lim_{\gamma+\delta \to 0} \frac{\partial f}{\partial g}(c) = \lim_{c-a \to 0} \frac{\partial f}{\partial g}(c) = \lim_{x \to a} \frac{\partial f}{\partial g}(x)$$

$a > x$ のときも同様にして示される。

$\mathfrak{a} = \infty$ のとき、$x \to \infty$ とすれば、$\frac{1}{x} \to +0$ となるので、次式が成り立つ。

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f}{g}(x) = \lim_{\frac{1}{x} \to +0} \frac{f}{g}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{\frac{1}{x} \to +0} \frac{\partial f}{\partial g}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\partial f}{\partial g}(x)$$

$\mathfrak{a} = -\infty$ のときも同様にして示される。

なので、次のようになる。

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{\sin x}} = \mathrm{indefinite}$$

ここで、次のようになるので、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \cos^2 x \\ g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x \\ &= \cos x \left(\cos x e^{\sin x} + g(x)\right) \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$ なので、$g'\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$ となっている。ゆえに、上に有界でないどの区間でもある x が存在して、$g'(x) = 0$ となっている。このとき、$-1 \leq \sin x, \cos x$ に注意すれば、$-\frac{1}{e} \leq \cos x e^{\sin x}$ なので、次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{\cos x}{\cos x e^{\sin x} + g(x)}\right| \\ &\leq \frac{1}{\left|\cos x e^{\sin x} + g(x)\right|} \\ &\leq \frac{1}{-\frac{1}{e} + g(x)} \end{aligned}$$

$x \to \infty$ で $\frac{1}{-\frac{1}{e} + g(x)} \to 0$ となっている。はさみうちの原理よりしたがって、次のようになる。

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{\cos x e^{\sin x} + g(x)} = 0$$

また、次式たちが成り立つかつ、

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} g(x) = \infty, \quad \forall x \in I\left[\partial(g)(x) \neq 0\right]$$

極限 $\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{\partial f}{\partial g}(x)$ が振動しないとき、$\mathfrak{a} = a$ かつ $a < x$ のとき、$a + \gamma < x = a + \gamma + \delta$ なる正の実数たち γ、δ を用いて Cauchy の平均値の定理より次式が成り立つような実数 c が $(a + \gamma, x) \subset U(a, \gamma + \delta)$ なる区間 $(a + \gamma, x)$ に存在する。

$$\frac{f(x) - f(a + \gamma)}{g(x) - g(a + \gamma)} = \frac{\partial f}{\partial g}(c)$$

ここで、仮定の $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ より $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \varepsilon < g(x)$ が成り立つ。これにより、$0 < g(x)$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(a + \gamma)}{g(x) - g(a + \gamma)} = \frac{\partial f}{\partial g}(c) &\Leftrightarrow f(x) - f(a + \gamma) = \frac{\partial f}{\partial g}(c)\left(g(x) - g(a + \gamma)\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a + \gamma)}{g(a + \gamma)} = \frac{\partial f}{\partial g}(c)\frac{g(x) - g(a + \gamma)}{g(a + \gamma)} \\
&\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(a + \gamma)} - \frac{f}{g}(a + \gamma) = \frac{\partial f}{\partial g}(c)\left(\frac{g(x)}{g(a + \gamma)} - 1\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{f}{g}(a + \gamma) = \frac{f(x)}{g(a + \gamma)} + \frac{\partial f}{\partial g}(c) - \frac{\partial f}{\partial g}(c)\frac{g(x)}{g(a + \gamma)}
\end{aligned}$$

$\lim_{x\to a} \frac{\partial f}{\partial g}(x) \in \mathbb{R}$ のとき、$\lim_{x\to a} \frac{\partial f}{\partial g}(x) = \alpha$ とおく。$\gamma + \delta \to 0$ とすると、$0 < c - a < \gamma + \delta$ より $c - a \to 0$ となり、したがって、次式が成り立つ。

$$\lim_{\gamma+\delta\to 0} \frac{\partial f}{\partial g}(c) = \lim_{c-a\to 0} \frac{\partial f}{\partial g}(c) = \lim_{c\to a} \frac{\partial f}{\partial g}(c) = \alpha$$

これにより、$\forall\varepsilon' \in \mathbb{R}^+ \exists\delta' \in \mathbb{R}^+$ に対し、$0 < \gamma + \delta < \delta' \Leftrightarrow 0 < \gamma < \gamma + \delta < \delta' \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial g}(c) - \alpha\right| < \varepsilon'$ が成り立つ。関数 $\frac{\partial f}{\partial g} : (a, x) \to \mathbb{R}$ は上に有界となるので、$\forall a + \delta_0 \in (a, x)$ に対し、次式が成り立つような正の実数 R が存在する。

$$\left|\frac{\partial f}{\partial g}(a + \delta_0)\right| \leq R$$

仮定の $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ より、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma\to 0} \frac{f(x)}{g(a + \gamma)} &= \lim_{a+\gamma\to a} \frac{f(a + \gamma + \delta)}{g(a + \gamma)} \\
&= \lim_{a+\gamma\to a} f(a + \gamma + \delta) \lim_{a+\gamma\to a} \frac{1}{g(a + \gamma)} \\
&= f(a + \delta) \cdot 0 = 0 \\
\lim_{\gamma\to 0} \frac{g(x)}{g(a + \gamma)} &= \lim_{a+\gamma\to a} \frac{g(a + \gamma + \delta)}{g(a + \gamma)} \\
&= \lim_{a+\gamma\to a} g(a + \gamma + \delta) \lim_{a+\gamma\to a} \frac{1}{g(a + \gamma)} \\
&= g(a + \delta) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

これにより、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta'' \in \mathbb{R}^+$ に対し、$0 < \gamma < \delta'' \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g\left(a+\gamma\right)}\right| < \varepsilon''$ が成り立つかつ、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta''' \in \mathbb{R}^+$ に対し、$0 < \gamma < \delta''' \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{g\left(a+\gamma\right)}\right| < \varepsilon'''$ が成り立つ。以上より、$a < a+\gamma < x = a+\gamma+\delta$ より $x \rightarrow a$ とすれば、$\gamma \rightarrow 0$ となり、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$0 < \gamma < \min\left\{\delta', \delta'', \delta'''\right\} = \delta''''$ なる実数 δ'''' が存在して次式のようになる。

$$\begin{aligned}\left|\frac{f}{g}\left(a+\gamma\right) - \alpha\right| &= \left|\frac{f(x)}{g\left(a+\gamma\right)} + \frac{\partial f}{\partial g}(c) - \frac{\partial f}{\partial g}(c)\frac{g(x)}{g\left(a+\gamma\right)} - \alpha\right| \\ &\leq \left|\frac{f(x)}{g\left(a+\gamma\right)}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial g}(c) - \alpha\right| + \left|-\frac{\partial f}{\partial g}(c)\right|\left|\frac{g(x)}{g\left(a+\gamma\right)}\right| \\ &< \varepsilon'' + \varepsilon' + R\varepsilon''' = \varepsilon' + \varepsilon'' + R\varepsilon'''\end{aligned}$$

これにより、$0 < \gamma < \delta'''' \Leftrightarrow 0 < |a+\gamma-a| < \delta''''$ が成り立つことに注意すれば、$\forall\varepsilon' + \varepsilon'' + R\varepsilon''' \in \mathbb{R}^+ \exists\delta'''' \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つ。

$$0 < |a+\gamma-a| < \delta'''' \Rightarrow \left|\frac{f}{g}\left(a+\gamma\right) - \alpha\right| < \varepsilon' + \varepsilon'' + R\varepsilon'''$$

これにより、$\lim_{x \rightarrow a}\frac{f}{g}(x) = \alpha$ が成り立つので、よって、次式が成り立つ。

$$\lim_{x \rightarrow a}\frac{f}{g}(x) = \lim_{x \rightarrow a}\frac{\partial f}{\partial g}(x)$$

$\lim_{x \rightarrow a}\frac{\partial f}{\partial g}(x) = \infty$ のとき、$\gamma+\delta \rightarrow 0$ とすると、$0 < c-a < \gamma+\delta$ より $c-a \rightarrow 0$ となり、したがって、次式が成り立つ。

$$\lim_{\gamma+\delta \rightarrow 0}\frac{\partial f}{\partial g}(c) = \lim_{c-a \rightarrow 0}\frac{\partial f}{\partial g}(c) = \lim_{c \rightarrow a}\frac{\partial f}{\partial g}(c) = \infty$$

これにより、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta' \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つ。

$$0 < \gamma+\delta < \delta' \Leftrightarrow 0 < \gamma < \gamma+\delta < \delta' \Rightarrow \varepsilon < \frac{\partial f}{\partial g}(c)$$

仮定の $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ より、次のようになり、

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma \rightarrow 0}\frac{f(x)}{g\left(a+\gamma\right)} &= \lim_{a+\gamma \rightarrow a}\frac{f\left(a+\gamma+\delta\right)}{g\left(a+\gamma\right)} \\ &= \lim_{a+\gamma \rightarrow a} f\left(a+\gamma+\delta\right)\lim_{a+\gamma \rightarrow a}\frac{1}{g\left(a+\gamma\right)} \\ &= f\left(a+\delta\right) \cdot 0 = 0 \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0}\frac{g(x)}{g\left(a+\gamma\right)} &= \lim_{a+\gamma \rightarrow a}\frac{g\left(a+\gamma+\delta\right)}{g\left(a+\gamma\right)} \\ &= \lim_{a+\gamma \rightarrow a} g\left(a+\gamma+\delta\right)\lim_{a+\gamma \rightarrow a}\frac{1}{g\left(a+\gamma\right)} \\ &= g\left(a+\delta\right) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

これにより、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta'' \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つかつ、

$$0 < \gamma < \delta'' \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g\left(a+\gamma\right)}\right| < \varepsilon$$

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta'''\in\mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つ。

$$0<\gamma<\delta'''\Rightarrow\left|\frac{g(x)}{g\left(a+\gamma\right)}\right|<\varepsilon$$

特に、$\exists\delta''\in\mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つかつ、

$$0<\gamma<\delta''\Rightarrow-\frac{1}{2}\leq\frac{f(x)}{g\left(a+\gamma\right)}$$

$\exists\delta'''\in\mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つようにすることができる。

$$0<\gamma<\delta'''\Rightarrow\frac{1}{2}\leq 1-\frac{g(x)}{g\left(a+\gamma\right)}$$

以上より、$a<a+\gamma<x=a+\gamma+\delta$ より $x\to a$ とすれば、$\gamma\to 0$ となり、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ に対し、$0<\gamma<\min\left\{\delta',\delta'',\delta'''\right\}=\delta''''$ なる実数 δ'''' が存在して次式のようになる。

$$\frac{f}{g}\left(a+\gamma\right)=\frac{f(x)}{g\left(a+\gamma\right)}+\frac{\partial f}{\partial g}(c)\left(1-\frac{g(x)}{g\left(a+\gamma\right)}\right)>-\frac{1}{2}+\varepsilon\cdot\frac{1}{2}=\frac{\varepsilon-1}{2}$$

これにより、$0<\gamma<\delta''''\Leftrightarrow 0<|a+\gamma-a|<\delta''''$ が成り立つことに注意すれば、$\forall(2+R)\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta''''\in\mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つ。

$$0<|a+\gamma-a|<\delta''''\Rightarrow\frac{\varepsilon-1}{2}<\frac{f}{g}\left(a+\gamma\right)$$

これにより、$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x)=\infty$ が成り立つので、よって、次式が成り立つ。

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x)=\lim_{x\to a}\frac{\partial f}{\partial g}(x)$$

$a>x$ のときも同様にして示される。

$\mathfrak{a}=\infty$ のとき、$x\to\infty$ とすれば、$\frac{1}{x}\to+0$ となるので、次式が成り立つ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f}{g}(x)=\lim_{\frac{1}{x}\to+0}\frac{f}{g}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{\frac{1}{x}\to+0}\frac{\partial f}{\partial g}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\partial f}{\partial g}(x)$$

$\mathfrak{a}=-\infty$ のときも同様にして示される。 $\square$

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1985. 第 34 刷 p64-75,81-90 ISBN978-4-13-062005-5

[2] 高橋淳也. "l'Hˆopital の定理とその注意点（解析学 A）". 東北大学. `http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~junya/lecture/calculus/l'Hopital.pdf` (2021-2-19 取得)

2.2 全微分

2.2.1 偏微分

定義 2.2.1. $I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ について、次式のような極限が収束するとき、その集合 I で実成分について偏微分可能であるといい、このとき、その極限値 D_{Re} を $\partial_{\mathrm{Re}} f(z)$ と書くことにする。これをその関数 f のその点 z における実成分の偏導値、偏微分係数などといいこのような関数 $\partial_{\mathrm{Re}} f$ をその関数 f のその実成分の偏導関数などといいこれを求めることをその関数 f を実成分について偏微分するという。

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}, h \neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = D_{\mathrm{Re}} \in \mathbb{C}$$

$I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ について、次式のような極限が収束するとき、その集合 I で虚成分について偏微分可能であるといい、このとき、その極限値 D_{Im} を $\partial_{\mathrm{Im}} f(z)$ と書くことにする。これをその関数 f のその点 z における虚成分の偏導値、偏微分係数などといいこのような関数 $\partial_{\mathrm{Im}} f$ をその関数 f のその虚成分の偏導関数などといいこれを求めることをその関数 f を虚成分について偏微分するという。

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}, h \neq 0}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{h} = D_{\mathrm{Im}} \in \mathbb{C}$$

定理 2.2.1. $I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$、$I \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数たち $f : D(f) \to \mathbb{C}$、$g : D(g) \to \mathbb{C}$ がその集合 I で実成分について偏微分可能であるなら、$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \partial_{\mathrm{Re}}(\alpha f + \beta g) &= \alpha \partial_{\mathrm{Re}} f + \beta \partial_{\mathrm{Re}} g : I \to \mathbb{C} \\ \partial_{\mathrm{Re}}(fg) &= \partial_{\mathrm{Re}} f g + f \partial_{\mathrm{Re}} g : I \to \mathbb{C} \end{aligned}$$

同様に、$I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$、$I \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数たち $f : D(f) \to \mathbb{C}$、$g : D(g) \to \mathbb{C}$ がその集合 I で虚成分について偏微分可能であるなら、$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \partial_{\mathrm{Im}}(\alpha f + \beta g) &= \alpha \partial_{\mathrm{Im}} f + \beta \partial_{\mathrm{Im}} g : I \to \mathbb{C} \\ \partial_{\mathrm{Im}}(fg) &= \partial_{\mathrm{Im}} f g + f \partial_{\mathrm{Im}} g : I \to \mathbb{C} \end{aligned}$$

証明. 2.1.3 と同様にして示される。 □

定義 2.2.2. $I \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ の実成分の偏導関数 $\partial_{\mathrm{Re}} f$ が実成分について偏微分可能であるなら、その偏導関数 $\partial_{\mathrm{Re}} \partial_{\mathrm{Re}} f$ が得られこれは次式のようにも書かれる。

$$\partial_{\mathrm{Re}} \partial_{\mathrm{Re}} f = \partial_{\mathrm{ReRe}} f$$

同様にして、次のようにも書かれる。

$$\begin{aligned} \partial_{\mathrm{Re}} \partial_{\mathrm{Re}} f = \partial_{\mathrm{ReRe}} f, \quad \partial_{\mathrm{Re}} \partial_{\mathrm{Im}} f = \partial_{\mathrm{ReIm}} f \\ \partial_{\mathrm{Im}} \partial_{\mathrm{Re}} f = \partial_{\mathrm{ImRe}} f, \quad \partial_{\mathrm{Im}} \partial_{\mathrm{Im}} f = \partial_{\mathrm{ImIm}} f \end{aligned}$$

定理 2.2.2. 開集合 U を用いた $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ について、$\alpha \in U$ なる点 α の ε 近傍 $U(\alpha, \varepsilon)$ で偏導関数たち $\partial_{\mathrm{ReIm}} f$、$\partial_{\mathrm{ImRe}} f$ が存在して、これらがその点 α で連続であるなら、次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{ReIm}} f(\alpha) = \partial_{\mathrm{ImRe}} f(\alpha)$$

証明はそこまで易しくなく本筋からそれるので、ここでは省くことにする。意欲のある方は参考文献に挙げられている解析学の書籍を参照されたい。

定義 2.2.3. 開集合 U を用いた $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ の k 階の偏導関数が存在してこれらがその開集合 U で連続であるとき、その関数 f はその開集合 U 上で C^k 級である、k 回連続微分可能であるという。$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、その関数 f が C^k 級であるなら、その関数 f は C^∞ 級である、無限回微分可能であるという。

定理 2.2.3. 開集合 U を用いた $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ がその開集合 U で C^k 級であるなら、その開集合 U 上で、その関数 f の k 階までのすべての偏導関数は偏微分の順序によらない。

2.2.2 全微分

定義 2.2.4. 開集合 U を用いた $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ について、$\alpha \in U$ なる点 α を用いて次式を満たすような $M \in \mathbb{R}^{2\times2}$ なる行列 M が存在するとき、その関数 f はその点 α で全微分可能であるという。なお、複素数 Mh はその複素数 h を縦 vector とみて行列とみなしたときの 2 つの行列たち M、h の積である。

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{|h|} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{Mh}{|h|}$$

このときのその行列 M をその関数 f のその点 a における導値、全微分係数などといい $J_f(\alpha)$、$J(f)(\alpha)$、$\partial f(\alpha)$、$Df(\alpha)$ などと書く。さらに、$\forall z \in U$ に対し、その関数 f がその点 z で全微分可能であるとき、その関数 f はその開集合 U で全微分可能であるという。このときのその行列 $M = J_f(z)$ は次式のように関数の像となっているので、その関数 J_f をその関数 f の Jacobi 行列、関数行列、導関数といいこれの行列式を Jacobi 行列式、Jacobian などという。

$$J_f : U \to \mathbb{R}^{2\times2}; z \mapsto M$$

また、記法について次のように書くこともある。

$$J_f : U \to \mathbb{R}^{2\times2}; z \mapsto \frac{\partial}{\partial z} f(z) = \left. \frac{\partial}{\partial z'} f(z') \right|_{z'=z}$$

定理 2.2.4. 開集合 U を用いた $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ が $\alpha \in U$ なる点 α で全微分可能であるとき、次のことが成り立つ。

- その関数 f は $\alpha \in U$ なる点 α で連続である。
- その関数 f の $\alpha \in U$ なる点 α での導値 $J_f(\alpha)$ は一意的である。

証明. 開集合 U を用いた $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ が $\alpha \in U$ なる点 α で全微分可能であるとき、次式を満たすような $M \in \mathbb{R}^{2\times2}$ なる行列が存在するのであった。

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{|h|} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{Mh}{|h|}$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{z \to \alpha \\ z \neq \alpha}} f(z) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} f(\alpha + h) \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} f(\alpha + h) + f(\alpha) - f(\alpha) \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \left(f(\alpha + h) - f(\alpha)\right) + f(\alpha) \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{|h|} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} |h| + f(\alpha) \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{Mh}{|h|} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} |h| + f(\alpha) \\
&= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} Mh + f(\alpha) = f(\alpha)
\end{aligned}$$

以上より、その関数 f はその開集合 U で連続であることが示された。

また、次式が成り立つような互いに異なる行列たち M、N が存在すると仮定しよう。

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{|h|} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{Mh}{|h|} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{Nh}{|h|}$$

ここで、$h = t\eta$ かつ $t \in \mathbb{R}^+$ かつ $\eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ なる実数 t と点 η を用いると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{Mt\eta}{|t\eta|} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{Nt\eta}{|t\eta|} &\Leftrightarrow \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{M\eta}{|\eta|} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{N\eta}{|\eta|} \\
&\Leftrightarrow \frac{M\eta}{|\eta|} = \frac{N\eta}{|\eta|} \\
&\Leftrightarrow M\eta = N\eta
\end{aligned}$$

ここで、$\eta \neq 0$ より $M = N$ が成り立つことになるが、これは仮定の $M \neq N$ が成り立つことに矛盾している。よって、その関数 f の $z \in U$ なる点 z での導値 $J_f(z)$ は一意的である。 □

定理 2.2.5. 開集合 U を用いた $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ が $\alpha \in U$ なる点 α で全微分可能であるならそのときに限り、それらの関数たち $\mathrm{Re}f$、$\mathrm{Im}f$ は $\alpha \in U$ なる点 α で全微分可能である。さらに、これが成り立つなら、その関数 f の各成分が $\alpha \in U$ なる点 α で偏微分可能で、次式が成り立つ。

$$J_f(\alpha) = \begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(\alpha) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(\alpha) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(\alpha) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(\alpha) \end{pmatrix}$$

なお、これの逆は必ずしも成り立たないことに注意されたい。

特に、開集合 U を用いた $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ がその開集合 U で全微分可能であるならそのときに限り、それらの関数たち $\mathrm{Re}f$、$\mathrm{Im}f$ はその開集合 U で全微分可能である。さらに、これが成り立つなら、その関数 f の各成分がその開集合 U で偏微分可能で、次式が成り立つ。

$$J_f = \begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f \end{pmatrix} : U \to \mathbb{C}$$

なお、これの逆は必ずしも成り立たないことに注意されたい。

証明. 開集合 U を用いた $U\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{C}$ なる関数 $f:D(f)\rightarrow\mathbb{C}$ が $\alpha\in U$ なる点 α で全微分可能であるとする。その関数 f のその点 α における導値 $J_f(\alpha)$ を $\begin{pmatrix} J_{\mathrm{Re}} \\ J_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix}$ とおくと、定義よりこれが成り立つならそのときに限り、次式が成り立つ。

$$\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{|h|}=\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{J_f(\alpha)h}{|h|}$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{\mathrm{Re}f(\alpha+h)-\mathrm{Re}f(\alpha)}{|h|}&=\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{J_{\mathrm{Re}}h}{|h|},\\
\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{\mathrm{Im}f(\alpha+h)-\mathrm{Im}f(\alpha)}{|h|}&=\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{J_{\mathrm{Im}}h}{|h|}
\end{aligned}$$

したがって、定義よりこれが成り立つならそのときに限り、それらの関数たち $\mathrm{Re}f$、$\mathrm{Im}f$ は $\alpha\in U$ なる点 α で全微分可能である。

ここで、開集合 U を用いた $U\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{C}$ なる関数 $f:D(f)\rightarrow\mathbb{C}$ が $\alpha\in U$ なる点 α で全微分可能であるならそのときに限り、それらの関数たち $\mathrm{Re}f$、$\mathrm{Im}f$ は $\alpha\in U$ なる点 α で全微分可能であることが示された。

さらに、これが成り立つなら、$h\in\mathbb{R}$ とすれば、次のようになり

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{J_{\mathrm{Re}}h}{|h|}&=\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{\mathrm{Re}f(\alpha+h)-\mathrm{Re}f(\alpha)}{|h|}\\
&=\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{\mathrm{Re}f(\mathrm{Re}\alpha+h+i\mathrm{Im}\alpha)-\mathrm{Re}f(\mathrm{Re}\alpha+i\mathrm{Im}\alpha)}{h}\frac{h}{|h|}\\
&=\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}fh}{|h|},\\
\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{J_{\mathrm{Im}}h}{|h|}&=\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{\mathrm{Im}f(\alpha+h)-\mathrm{Im}f(\alpha)}{|h|}\\
&=\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{\mathrm{Im}f(\mathrm{Re}\alpha+h+i\mathrm{Im}\alpha)-\mathrm{Im}f(\mathrm{Re}\alpha+i\mathrm{Im}\alpha)}{h}\frac{h}{|h|}\\
&=\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}fh}{|h|}
\end{aligned}$$

$h\in i\mathbb{R}$ とすれば同様にして、次のようになるので、

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{J_{\mathrm{Re}}h}{|h|}&=\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}fh}{|h|},\\
\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{J_{\mathrm{Im}}h}{|h|}&=\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}fh}{|h|}
\end{aligned}$$

その関数 f の各成分が $\alpha\in U$ なる点 α で偏微分可能で、次式が成り立つ。

$$J_f(\alpha)=\begin{pmatrix}\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(\alpha) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(\alpha)\\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(\alpha) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(\alpha)\end{pmatrix}$$

□

定理 2.2.6. 開集合 U を用いた $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ かつ $U \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数たち $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$、$g : D(g) \rightarrow \mathbb{C}$ がどちらも $\alpha \in U$ なる点 α で全微分可能であるなら、$\forall\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ に対し、その関数 $\alpha' f + \beta' g$ はその点 α で全微分可能で次式が成り立つ。

$$J_{\alpha' f+\beta' g}(\alpha) = \alpha' J_f(\alpha) + \beta' J_g(\alpha)$$

特に、開集合 U を用いた $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ かつ $U \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数たち $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$、$g : D(g) \rightarrow \mathbb{C}$ がどちらもその開集合 U で全微分可能であるなら、$\forall\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ に対し、その関数 $\alpha' f + \beta' g$ はその開集合 U で全微分可能で次式が成り立つ。

$$J_{\alpha' f+\beta' g} = \alpha' J_f + \beta' J_g : U \rightarrow \mathbb{C}$$

証明. 2.1.3 と同様にして示される。 □

2.2.3 m 次微分

定理 2.2.7. $\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、開集合 U を用いて $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なるその開集合 U 上で C^k 級の関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとする。次式のように関数 g と

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; t \rightarrow z + th$$

その複素平面 $\mathbb{C}$ の 2 点 z、$z + h$ を結ぶ線分 L が与えられたとき、

$$L = \{z + th \in \mathbb{C} | t \in [0, 1]\}$$

ここで、その実数 $|h|$ が十分に小さければ、開集合の定義より $L \subseteq U$ が成り立つことができる。$L \subseteq U$ が成り立つとき、その合成関数 $f \circ g$ はその閉区間 $[0, 1]$ 上で C^k 級で、$\forall m \in \Lambda_k \forall t \in [0, 1]$ に対し、その合成関数 $f \circ g$ の m 次導関数 $\partial^m (f \circ g)$ は次式を満たす。

$$\partial^m (f \circ g)(t) = \sum_{m\text{ つの枠に Re、Im を入れる場合の数}} \partial_{\underbrace{\mathrm{Re}\cdots\mathrm{Re}}_{k\text{ times}}\underbrace{\mathrm{Im}\cdots\mathrm{Im}}_{m-k\text{ times}}} f(z + th) \underbrace{\mathrm{Re}h\cdots\mathrm{Re}h}_{k\text{ times}}\underbrace{\mathrm{Im}h\cdots\mathrm{Im}h}_{m-k\text{ times}}$$

定義 2.2.5. 上の式はいわゆる m 次同次多項式で、$\forall z \in U$ に対し、次式で与えられる式 $(d^m f)_z(h)$、即ち、上の式の実数 t を $t = 0$ としたものをその関数 f のその点 x における m 次微分などといい $d^m f$ などとも書く。特に、$m = 1$ のとき、df とも書く。

$$(d^m f)_z(h) = \sum_{m\text{ つの枠に Re、Im を入れる場合の数}} \partial_{\underbrace{\mathrm{Re}\cdots\mathrm{Re}}_{k\text{ times}}\underbrace{\mathrm{Im}\cdots\mathrm{Im}}_{m-k\text{ times}}} f(z) \underbrace{\mathrm{Re}h\cdots\mathrm{Re}h}_{k\text{ times}}\underbrace{\mathrm{Im}h\cdots\mathrm{Im}h}_{m-k\text{ times}}$$

例えば、$dz = \mathrm{Re}dz + i\mathrm{Im}dz$ とおかれれば、$m = 1$ のとき、次のようになるし、

$$(df)_\alpha(dz) = \partial_{\mathrm{Re}} f(\alpha) \mathrm{Re}dz + \partial_{\mathrm{Im}} f(\alpha) \mathrm{Im}dz$$

$m = 2$ のとき、次のようになる。

$$\left(d^2 f\right)_\alpha(dz) = \begin{array}{rlcl} & \partial_{\mathrm{ReRe}} f(\alpha) \mathrm{Re}dz\mathrm{Re}dz & + & \partial_{\mathrm{ReIm}} f(\alpha) \mathrm{Re}dz\mathrm{Im}dz \\ + & \partial_{\mathrm{ImRe}} f(\alpha) \mathrm{Im}dz\mathrm{Re}dz & + & \partial_{\mathrm{ImIm}} f(\alpha) \mathrm{Im}dz\mathrm{Im}dz \end{array}$$

証明. 連鎖律に注意すれば、自然数 m に関する数学的帰納法で示される。 □

2.2.4 Taylor の定理

定理 2.2.8 (多変数の Taylor の定理)**.** $\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、開集合 U を用いて $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なるその開集合 U 上で C^k 級の関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとする。その複素平面 $\mathbb{C}$ の 2 点 z、$z+h$ を結ぶ線分 L が与えられ $L \subseteq U$ が成り立つとき、次式が成り立つような実数 c が開区間 $(0,1)$ に存在する。

$$f(z+h) = f(z) + \sum_{m \in \Lambda_{k-1}} \frac{1}{m!} \left(d^m f\right)_z (h) + \frac{1}{k!} \left(d^k f\right)_{z+ch} (h)$$

この定理を多変数の Taylor の定理という。

定義 2.2.6. 開集合 U を用いて $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なるその開集合 U 上で C^∞ 級の関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとする。その複素平面 $\mathbb{C}$ の 2 点 z、$z+h$ を結ぶ線分 L が与えられ $L \subseteq U$ が成り立つとき、多変数の Taylor の定理における $c \in (0,1)$ なる実数 c を用いて次式が成り立つなら、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \left(d^k f\right)_{z+ch} (h) = 0$$

次式が得られる。

$$f(z+h) = f(z) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m!} \left(d^m f\right)_z (h)$$

この式をその関数 f のその点 z のまわりの多変数 Taylor 展開などという。特に、$z=0$ としたものをその関数 f の多変数 Maclaurin 展開などという。このように、$\forall z \in U$ に対し、次式が成り立つとき、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \left(d^k f\right)_{z+ch} (h) = 0$$

即ち、多変数 Taylor 展開ができるとき、その関数 f はその開集合 U で C^ω 級である、解析的であるという。その開集合 U で解析的であるような関数全体の集合を $C^\omega(U, \mathbb{C})$ と書くことがある。

証明. $\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、開集合 U を用いて $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なるその開集合 U 上で C^k 級の関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとする。次式のように関数 g と

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; t \rightarrow z + th$$

その複素平面 $\mathbb{C}$ の 2 点 z、$z+h$ を結ぶ線分 L が与えられ、

$$L = \{z + th \in \mathbb{C} | t \in [0,1]\}$$

$L \subseteq U$ が成り立つとき、その集合 $\mathbb{R}$ は稠密順序集合であるので、次式のような線分 L' が

$$L' = \{z + th \in \mathbb{C} | t \in I_\varepsilon = (-\varepsilon, 1+\varepsilon)\}$$

$L' \subseteq U$ を満たすような正の実数 ε が存在し、さらに、その関数 g はその開区間 I_ε 上で C^∞ 級である。したがって、その合成関数 $f \circ g$ はその閉区間 $[0,1]$ 上で C^k 級である。

このとき、Taylor の定理より次式が成り立つような実数 c がその開区間 $(0,1)$ に存在する。

$$f \circ g(1) = f \circ g(0) + \sum_{m \in \Lambda_{k-1}} \frac{1}{m!} \partial^m (f \circ g)(0)(1-0)^m + \frac{1}{k!} \partial^k (f \circ g)(c)(1-0)^k$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} f(z+h) &= f(g(1)) = f\circ g(1) \\ &= f\circ g(0) + \sum_{m\in\Lambda_{k-1}} \frac{1}{m!}\partial^m (f\circ g)(0)(1-0)^m + \frac{1}{k!}\partial^k (f\circ g)(c)(1-0)^k \\ &= f(g(0)) + \sum_{m\in\Lambda_{k-1}} \frac{1}{m!}\partial^m (f\circ g)(0) + \frac{1}{k!}\partial^k (f\circ g)(c) \\ &= f(z) + \sum_{m\in\Lambda_{k-1}} \frac{1}{m!}\partial^m (f\circ g)(0) + \frac{1}{k!}\partial^k (f\circ g)(c) \end{aligned}$$

ここで、$\forall m\in\Lambda_k \forall t\in[0,1]$ に対し、次式が成り立つので、

$$\partial^m (f\circ g)(t) = \sum_{m\text{ つの枠に Re、Im を入れる場合の数}} \partial_{\underbrace{\mathrm{Re}\cdots\mathrm{Re}}_{k\text{ times}}} \partial_{\underbrace{\mathrm{Im}\cdots\mathrm{Im}}_{m-k\text{ times}}} f(z+th) \underbrace{\mathrm{Re}h\cdots\mathrm{Re}h}_{k\text{ times}} \underbrace{\mathrm{Im}h\cdots\mathrm{Im}h}_{m-k\text{ times}}$$

次のようになる。

$$\begin{aligned} f(z+h) = f(z) &+ \sum_{m\in\Lambda_{k-1}} \frac{1}{m!} \sum_{m\text{ つの枠に Re、Im を入れる場合の数}} \partial_{\underbrace{\mathrm{Re}\cdots\mathrm{Re}}_{k\text{ times}}} \partial_{\underbrace{\mathrm{Im}\cdots\mathrm{Im}}_{m-k\text{ times}}} f(z) \underbrace{\mathrm{Re}h\cdots\mathrm{Re}h}_{k\text{ times}} \underbrace{\mathrm{Im}h\cdots\mathrm{Im}h}_{m-k\text{ times}} \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{k\text{ つの枠に Re、Im を入れる場合の数}} \partial_{\underbrace{\mathrm{Re}\cdots\mathrm{Re}}_{l\text{ times}}} \partial_{\underbrace{\mathrm{Im}\cdots\mathrm{Im}}_{k-l\text{ times}}} f(z+ch) \underbrace{\mathrm{Re}h\cdots\mathrm{Re}h}_{l\text{ times}} \underbrace{\mathrm{Im}h\cdots\mathrm{Im}h}_{k-l\text{ times}} \end{aligned}$$

ここで、m 次微分の定義より次のようになる。

$$f(z+h) = f(z) + \sum_{m\in\Lambda_{k-1}} \frac{1}{m!} \left(d^m f\right)_z(h) + \frac{1}{k!}\left(d^k f\right)_{z+ch}(h)$$

$\square$

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1985. 第 34 刷 p107-112,127-141,146-149 ISBN978-4-13-062005-5

2.3 複素微分

2.3.1 複素微分

定理 2.3.1. 任意の行列 $\begin{pmatrix} a_{\mathrm{ReRe}} & a_{\mathrm{ReIm}} \\ a_{\mathrm{ImRe}} & a_{\mathrm{ImIm}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ を用いた次式のように定義される関数 A はその集合 $\mathbb{R}$ 上で線形的である、

$$A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \begin{pmatrix} a_{\mathrm{ReRe}} & a_{\mathrm{ReIm}} \\ a_{\mathrm{ImRe}} & a_{\mathrm{ImIm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}z \\ \mathrm{Im}z \end{pmatrix} = (a_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Re}z + a_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Im}z) + i\,(a_{\mathrm{ImRe}}\mathrm{Re}z + a_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Im}z)$$

即ち、$\forall k, l \in \mathbb{R}\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$A(kz + lw) = kA(z) + lA(w)$$

証明. この議論は線形代数学の議論である。任意の行列 $\begin{pmatrix} a_{\mathrm{ReRe}} & a_{\mathrm{ReIm}} \\ a_{\mathrm{ImRe}} & a_{\mathrm{ImIm}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ を用いて関数 A が次式のように与えられたとする。

$$A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \begin{pmatrix} a_{\mathrm{ReRe}} & a_{\mathrm{ReIm}} \\ a_{\mathrm{ImRe}} & a_{\mathrm{ImIm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}z \\ \mathrm{Im}z \end{pmatrix} = (a_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Re}z + a_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Im}z) + i\,(a_{\mathrm{ImRe}}\mathrm{Re}z + a_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Im}z)$$

このとき、$\forall k, l \in \mathbb{R}\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} A(kz + lw) &= \begin{pmatrix} a_{\mathrm{ReRe}} & a_{\mathrm{ReIm}} \\ a_{\mathrm{ImRe}} & a_{\mathrm{ImIm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k\mathrm{Re}z + l\mathrm{Re}w \\ k\mathrm{Im}z + l\mathrm{Im}w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{\mathrm{ReRe}} & a_{\mathrm{ReIm}} \\ a_{\mathrm{ImRe}} & a_{\mathrm{ImIm}} \end{pmatrix} \left(k \begin{pmatrix} \mathrm{Re}z \\ \mathrm{Im}z \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} \mathrm{Re}w \\ \mathrm{Im}w \end{pmatrix} \right) \\ &= k \begin{pmatrix} a_{\mathrm{ReRe}} & a_{\mathrm{ReIm}} \\ a_{\mathrm{ImRe}} & a_{\mathrm{ImIm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}z \\ \mathrm{Im}z \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} a_{\mathrm{ReRe}} & a_{\mathrm{ReIm}} \\ a_{\mathrm{ImRe}} & a_{\mathrm{ImIm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}w \\ \mathrm{Im}w \end{pmatrix} \\ &= kA(z) + lA(w) \end{aligned}$$

□

定義 2.3.1. 特に、複素数 $c \in \mathbb{C}$ を用いて次式のように定義される関数 A_c を 2 次元数空間 $\mathbb{R}^2$ の複素線形変換、複素線型変換、複素 1 次変換などという。

$$A_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto cz$$

定理 2.3.2. これについて、次のことが成り立つ。

- 任意の複素線形変換 A_c はその集合 $\mathbb{C}$ 上で線形的である、即ち、$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$A_c(\alpha z + \beta w) = \alpha A_c(z) + \beta A_c(w)$$

- 複素数 $c \in \mathbb{C}$ を用いた複素線形変換 A_c が次式のように与えられたとき、

$$A_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto cz$$

次式が成り立つ。

$$A_c(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}c & -\mathrm{Im}c \\ \mathrm{Im}c & \mathrm{Re}c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}z \\ \mathrm{Im}z \end{pmatrix}$$

証明. 複素数 $c \in \mathbb{C}$ を用いた複素線形変換 A_c が次式のように与えられたとき、

$$A_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto cz$$

$\forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} A_c(\alpha z + \beta w) &= c(\alpha z + \beta w) \\ &= c\alpha z + c\beta w \\ &= \alpha cz + \beta cw \\ &= \alpha A_c(z) + \beta A_c(w) \\ A_c(z) &= cz = (\mathrm{Re}c + i\mathrm{Im}c)(\mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z) \\ &= (\mathrm{Re}c\mathrm{Re}z - \mathrm{Im}c\mathrm{Im}z) + i(\mathrm{Re}c\mathrm{Im}z + \mathrm{Im}c\mathrm{Re}z) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}c\mathrm{Re}z - \mathrm{Im}c\mathrm{Im}z \\ \mathrm{Im}c\mathrm{Re}z + \mathrm{Re}c\mathrm{Im}z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}c & -\mathrm{Im}c \\ \mathrm{Im}c & \mathrm{Re}c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}z \\ \mathrm{Im}z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

定義 2.3.2. 開集合 U を用いて $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ について、$a \in U$ なる複素数 a を用いて極限 $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が収束するとき、即ち、次式が成り立つような複素数 b が存在するとき、その関数 f はその複素数 a で複素微分可能であるという。

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in \mathbb{C}$$

このときのその複素数 b をその関数 f のその点 a における導値、複素微分係数などといい $\partial_{\mathrm{hol}}f(a)$、$\partial f(a)$、$f'(a)$ などと書く。さらに、$\forall z \in U$ に対し、その関数 f がその複素数 z で複素微分可能であるとき、その関数 f はその開集合 U で正則であるという。このときのその複素数 $b = \partial_{\mathrm{hol}}f(z)$ は次式のように関数の像となっているので、その関数 $\partial_{\mathrm{hol}}f$ をその関数 f の導関数という。

$$\partial_{\mathrm{hol}}f : U \to \mathbb{C}; z \mapsto \partial_{\mathrm{hol}}f(z)$$

また、次のように書くこともある。

$$\partial_{\mathrm{hol}}f : U \to \mathbb{C}; z \mapsto \frac{d}{dz}f(z) = \left. \frac{d}{dz'}f(z') \right|_{z'=z}$$

定理 2.3.3. 開集合 U を用いて $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ について、次のことは同値である。

- その関数 f は $a \in U$ なる複素数 a で複素微分可能である。
- その関数 f は $a \in U$ なる複素数 a で全全微分可能で変数 z の実部 $\mathrm{Re}z$、虚部 $\mathrm{Im}z$ をそれぞれ Re 成分、Im 成分ということにし $f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f$ として次式が成り立つ。この式を Cauchy-Riemann の方程式という。

$$\begin{cases} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) = \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a) = -\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) \end{cases}$$

- その関数 f は $a \in U$ なる複素数 a で全全微分可能でその Jacobi 行列 $J_f(a)$ を用いた次の関数は複素線形変換となる。

$$L_{J_f(a)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto J_f(a)z$$

このとき、変数 z の実部 $\mathrm{Re}z$、虚部 $\mathrm{Im}z$ をそれぞれ Re 成分、Im 成分ということにし $f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f$ として次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}} f(a) = \partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Re}f(a) + i\partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Im}f(a) = \partial_{\mathrm{Im}} \mathrm{Im}f(a) - i\partial_{\mathrm{Im}} \mathrm{Re}f(a)$$

特に、その関数 f がその開集合 U で全全微分可能であるとき、次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}} f(a) = \partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Re}f + i\partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Im}f = \partial_{\mathrm{Im}} \mathrm{Im}f - i\partial_{\mathrm{Im}} \mathrm{Re}f : U \to \mathbb{C}$$

証明. 開集合 U を用いて $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数 $f : D(f) \to \mathbb{C}$ について、その関数 f は $a \in U$ なる複素数 a で複素微分可能であるなら、定義より次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}} f(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{C}$$

ここで、変数 z の実部 $\mathrm{Re}z$、虚部 $\mathrm{Im}z$ をそれぞれ Re 成分、Im 成分ということにし $f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f$、$\partial_{\mathrm{hol}} f = \mathrm{Re}f' + i\mathrm{Im}f'$ として、これは次式のように書き換えられることができる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}f'(a) + i\mathrm{Im}f'(a) = \partial_{\mathrm{hol}} f(a) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{\substack{\mathrm{Re}h, \mathrm{Re}h \to 0 \\ \mathrm{Re}h, \mathrm{Re}h \neq 0}} \frac{1}{\mathrm{Re}h + i\mathrm{Re}h} \left((\mathrm{Re}f\left((\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a) + (\mathrm{Re}h + i\mathrm{Re}h)\right) \right. \\
&\quad + i\mathrm{Im}f\left((\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a) + (\mathrm{Re}h + i\mathrm{Re}h)\right)) \\
&\quad \left. - (\mathrm{Re}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a) + i\mathrm{Im}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a)) \right) \\
&= \lim_{\substack{\mathrm{Re}h, \mathrm{Re}h \to 0 \\ \mathrm{Re}h, \mathrm{Re}h \neq 0}} \frac{1}{\mathrm{Re}h + i\mathrm{Re}h} \left((\mathrm{Re}f\left((\mathrm{Re}a + \mathrm{Re}h) + i(y + \mathrm{Re}h)\right) \right. \\
&\quad - \mathrm{Re}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a)) + i\left(\mathrm{Im}f\left((\mathrm{Re}a + \mathrm{Re}h) \right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. + i(\mathrm{Im}a + \mathrm{Re}h)\right) - \mathrm{Im}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a)\right)\right)
\end{aligned}$$

ここで、$\mathrm{Re}h = 0$ のとき、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}f'(a) + i\mathrm{Im}f'(a) &= \lim_{\substack{\mathrm{Re}h \to 0 \\ \mathrm{Re}h \neq 0}} \frac{1}{\mathrm{Re}h} \left((\mathrm{Re}f\left((\mathrm{Re}a + \mathrm{Re}h) + i\mathrm{Im}a\right) - \mathrm{Re}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a)) \right. \\
&\quad \left. + i\left(\mathrm{Im}f\left((\mathrm{Re}a + \mathrm{Re}h) + i\mathrm{Im}a\right) - \mathrm{Im}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a)\right)\right) \\
&= \lim_{\substack{\mathrm{Re}h \to 0 \\ \mathrm{Re}h \neq 0}} \frac{\mathrm{Re}f\left((\mathrm{Re}a + \mathrm{Re}h) + i\mathrm{Im}a\right) - \mathrm{Re}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a)}{\mathrm{Re}h} \\
&\quad + i \lim_{\substack{\mathrm{Re}h \to 0 \\ \mathrm{Re}h \neq 0}} \frac{\mathrm{Im}f\left((\mathrm{Re}a + \mathrm{Re}h) + i\mathrm{Im}a\right) - \mathrm{Im}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a)}{\mathrm{Re}h} \\
&= \partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Re}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a) + i\partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Im}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a) \\
&= \partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Re}f(a) + i\partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Im}f(a)
\end{aligned}$$

$\mathrm{Re}h = 0$ のとき、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}f'(a) + i\mathrm{Im}f'(a) &= \lim_{\substack{\mathrm{Re}h \to 0 \\ \mathrm{Re}h \neq 0}} \frac{1}{i\mathrm{Re}h} \left(\left(\mathrm{Re}f\left(\mathrm{Re}a + i(\mathrm{Im}a + \mathrm{Re}h) \right) - \mathrm{Re}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a) \right) \right. \\
&\quad \left. + i\left(\mathrm{Im}f\left(\mathrm{Re}a + i(\mathrm{Im}a + \mathrm{Re}h) \right) - \mathrm{Im}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a) \right) \right) \\
&= \frac{1}{i} \left(\lim_{\substack{\mathrm{Re}h \to 0 \\ \mathrm{Re}h \neq 0}} \frac{\mathrm{Re}f\left(\mathrm{Re}a + i(\mathrm{Im}a + \mathrm{Re}h) \right) - \mathrm{Re}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a)}{\mathrm{Re}h} \right. \\
&\quad \left. + i \lim_{\substack{\mathrm{Re}h \to 0 \\ \mathrm{Re}h \neq 0}} \frac{\mathrm{Im}f\left(\mathrm{Re}a + i(\mathrm{Im}a + \mathrm{Re}h) \right) - \mathrm{Im}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a)}{\mathrm{Re}h} \right) \\
&= \frac{1}{i} \left(\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a) + i\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(\mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a) \right) \\
&= \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) + i\left(-\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a) \right)
\end{aligned}$$

ここで、その極限値 $\partial_{\mathrm{hol}}f(a)$ が存在するなら、これは一意的であったので、次式が成り立つ。

$$\mathrm{Re}f'(a) + i\mathrm{Im}f'(a) = \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) = \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) + i\left(-\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a) \right)$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{cases} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) = \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) = -\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a) \end{cases}$$

このとき、確かにその行列 $\begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) \end{pmatrix}$ が存在できているので、次のようになり

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) \end{pmatrix}$$

その関数 f はその複素数 a で複素微分可能である。

このとき、次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}}f(a) = \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) = \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) - i\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a)$$

逆に、その関数 f はその複素数 a で全全微分可能で次式が成り立つなら、

$$\begin{cases} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) = \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) = -\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a) \end{cases}$$

その Jacobi 行列 $\begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) \end{pmatrix}$ が存在し次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) = \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) - i\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a)$$

また、$\exists\theta, \iota \in (0,1)$ に対し、多変数の Taylor の定理より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}f(a + h) &= \mathrm{Re}f(a) + \frac{1}{1!}(d\mathrm{Re}f)_a(h) + \frac{1}{2!}\left(d^2\mathrm{Re}f \right)_{a+\theta h}(h) \\
&= \mathrm{Re}f(a) + (d\mathrm{Re}f)_a(h) + \frac{1}{2}\left(d^2\mathrm{Re}f \right)_{a+\theta h}(h)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Re}f(a) + \left(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h + \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2 \\
&\quad + 2\partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h \\
&\quad + \partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2\Big) \\
&= \mathrm{Re}f(a) + \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h + \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2 \\
&\quad + \partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}f(a+h) &= \mathrm{Im}f(a) + \frac{1}{1!}(d\mathrm{Im}f)_a(h) + \frac{1}{2!}\left(d^2\mathrm{Im}f\right)_{a+\iota h}(h) \\
&= \mathrm{Im}f(a) + (d\mathrm{Im}f)_a(h) + \frac{1}{2}\left(d^2\mathrm{Im}f\right)_{a+\iota h}(h) \\
&= \mathrm{Im}f(a) + \left(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h + \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2 \\
&\quad + 2\partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h \\
&\quad + \partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2\Big) \\
&= \mathrm{Im}f(a) + \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h + \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2 \\
&\quad + \partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2
\end{aligned}
$$

したがって、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{\left(\mathrm{Re}f(a+h)+i\mathrm{Im}f(a+h)\right)-\left(\mathrm{Re}f(a)+i\mathrm{Im}f(a)\right)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{\left(\mathrm{Re}f(a+h)-\mathrm{Re}f(a)\right)+i\left(\mathrm{Im}f(a+h)-\mathrm{Im}f(a)\right)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{1}{\mathrm{Re}h+i\mathrm{Re}h}\Bigg(\Big(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h \\
&\quad + \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2 \\
&\quad + \partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2\Big) \\
&\quad + i\left(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h + \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h\right. \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2 \\
&\quad + \partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2\Big)\Big)\\
&=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{1}{\mathrm{Re}h+i\mathrm{Re}h}\Big(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h\\
&+\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h+i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h+i\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h\\
&+\Big(\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2\\
&+\partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h\\
&+\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2\Big)\\
&+i\Big(\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2\\
&+\partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h\\
&+\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2\Big)\Big)\\
&=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{1}{\mathrm{Re}h+i\mathrm{Re}h}\Big(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h\\
&-\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h+i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h+i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h\\
&+\Big(\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2\\
&+\partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h\\
&+\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2\Big)\\
&+i\Big(\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2\\
&+\partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h\\
&+\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2\Big)\Big)\\
&=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\Big(\frac{1}{\mathrm{Re}h+i\mathrm{Re}h}\left(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h\right.\\
&\left.-\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h+i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}h+i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}h\right)\\
&+\frac{1}{\mathrm{Re}h+i\mathrm{Re}h}\Big(\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2\\
&+\partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h\\
&+\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Re}f(a+\theta h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2\Big)\\
&+\frac{i}{\mathrm{Re}h+i\mathrm{Re}h}\Big(\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ReRe}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Re}h\right)^2\\
&+\partial_{\mathrm{ReIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h\\
&+\frac{1}{2}\partial_{\mathrm{ImIm}}\mathrm{Im}f(a+\iota h)\left(\mathrm{Im}h\right)^2\Big)\Big)\\
&=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{1}{h}\left(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)h+i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)h\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} \partial_{\mathrm{ReRe}} \mathrm{Re} f(a+\theta h) \left(\mathrm{Re} h\right)^2 \right. \\
&+ \partial_{\mathrm{ReIm}} \mathrm{Re} f(a+\theta h) \mathrm{Re} h \mathrm{Re} h \\
&\left. + \frac{1}{2} \partial_{\mathrm{ImIm}} \mathrm{Re} f(a+\theta h) \left(\mathrm{Im} h\right)^2 \right) \\
&+ \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{i}{h} \left(\frac{1}{2} \partial_{\mathrm{ReRe}} \mathrm{Im} f(a+\iota h) \left(\mathrm{Re} h\right)^2 \right. \\
&+ \partial_{\mathrm{ReIm}} \mathrm{Im} f(a+\iota h) \mathrm{Re} h \mathrm{Re} h \\
&\left. + \frac{1}{2} \partial_{\mathrm{ImIm}} \mathrm{Im} f(a+\iota h) \left(\mathrm{Im} h\right)^2 \right) \\
= {} & \partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Re} f(a) + i \partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Im} f(a) \\
&+ \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \left(\frac{1}{2} \partial_{\mathrm{ReRe}} \mathrm{Re} f(a+\theta h) \frac{\left(\mathrm{Re} h\right)^2}{h} \right. \\
&+ \partial_{\mathrm{ReIm}} \mathrm{Re} f(a+\theta h) \frac{\mathrm{Re} h \mathrm{Re} h}{h} \\
&\left. + \frac{1}{2} \partial_{\mathrm{ImIm}} \mathrm{Re} f(a+\theta h) \frac{\left(\mathrm{Im} h\right)^2}{h} \right) \\
&+ i \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \left(\frac{1}{2} \partial_{\mathrm{ReRe}} \mathrm{Im} f(a+\iota h) \frac{\left(\mathrm{Re} h\right)^2}{h} \right. \\
&+ \partial_{\mathrm{ReIm}} \mathrm{Im} f(a+\iota h) \frac{\mathrm{Re} h \mathrm{Re} h}{h} \\
&\left. + \frac{1}{2} \partial_{\mathrm{ImIm}} \mathrm{Im} f(a+\iota h) \frac{\left(\mathrm{Im} h\right)^2}{h} \right) \\
= {} & \partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Re} f(a) + i \partial_{\mathrm{Re}} \mathrm{Im} f(a) \\
&+ \frac{1}{2} \partial_{\mathrm{ReRe}} \mathrm{Re} f(a+\theta h) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\left(\mathrm{Re} h\right)^2}{h} \\
&+ \partial_{\mathrm{ReIm}} \mathrm{Re} f(a+\theta h) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\mathrm{Re} h \mathrm{Re} h}{h} \\
&+ \frac{1}{2} \partial_{\mathrm{ImIm}} \mathrm{Re} f(a+\theta h) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\left(\mathrm{Im} h\right)^2}{h} \\
&+ \frac{i}{2} \partial_{\mathrm{ReRe}} \mathrm{Im} f(a+\iota h) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\left(\mathrm{Re} h\right)^2}{h} \\
&+ i \partial_{\mathrm{ReIm}} \mathrm{Im} f(a+\iota h) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\mathrm{Re} h \mathrm{Re} h}{h} \\
&+ \frac{i}{2} \partial_{\mathrm{ImIm}} \mathrm{Im} f(a+\iota h) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\left(\mathrm{Im} h\right)^2}{h}
\end{aligned}
$$

ここで、ε-δ 論法により次のことが成り立つので、

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{(\mathrm{Re}h)^2}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\mathrm{Re}h\mathrm{Re}h}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{(\mathrm{Im}h)^2}{h} = 0$$

したがって、次のようになる。

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)$$

これにより、その関数 f はその複素数 a で複素微分可能である。

また、その関数 f はその複素数 a で全全微分可能で次式が成り立つならそのときに限り、

$$\begin{cases} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) = \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) = -\partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a) \end{cases}$$

その Jacobi 行列 $J_f(a)$ が存在しこれを用い複素数を vector とみた次式のような関数 $L_{J_f(a)}$ が与えられると、

$$L_{J_f(a)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto J_f(a)z$$

その像 $L_{J_f(a)}(z)$ は次式のようになり

$$\begin{aligned} L_{J_f(a)}(z) &= J_f(a)z \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}z \\ \mathrm{Im}z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) & -\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) & \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}z \\ \mathrm{Im}z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって、その関数 $L_{J_f(a)}$ は複素線形変換となる。逆に、これが成り立つなら、Cauchy-Riemann の方程式が成り立つ。 $\square$

定理 2.3.4. 開集合 U を用いて $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ かつ $U \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数たち $f : D(f) \to \mathbb{C}$、$g : D(g) \to \mathbb{C}$ が $a \in U$ なる複素数 a で複素微分可能であるとき、次のことが成り立つ。

- $\forall\alpha, \beta' \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}}(\alpha f + \beta' g)(a) = \alpha\partial_{\mathrm{hol}}f(a) + \beta'\partial_{\mathrm{hol}}g(a)$$

- 次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}}(fg)(a) = \partial_{\mathrm{hol}}f(a)g(a) + f(a)\partial_{\mathrm{hol}}g(a)$$

- それらの関数たち g、f が合成可能であるとき、次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}}(g \circ f)(a) = \partial_{\mathrm{hol}}g\left(f(a)\right)\partial_{\mathrm{hol}}f(a)$$

特に、開集合 U を用いて $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ かつ $U \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数たち $f : D(f) \to \mathbb{C}$、$g : D(g) \to \mathbb{C}$ がその開集合 U で複素微分可能であるとき、次のことが成り立つ。

- $\forall\alpha, \beta' \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}}(\alpha f + \beta' g) = \alpha\partial_{\mathrm{hol}}f + \beta'\partial_{\mathrm{hol}}g : U \to \mathbb{C}$$

- 次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}}(fg) = \partial_{\mathrm{hol}}fg + f\partial_{\mathrm{hol}}g : U \rightarrow \mathbb{C}$$

- それらの関数たち g、f が合成可能であるとき、次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}}(g \circ f) = (\partial_{\mathrm{hol}}g \circ f)\,\partial_{\mathrm{hol}}f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

証明. 開集合 U を用いて $U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{C}$ かつ $U \subseteq D(g) \subseteq \mathbb{C}$ なる関数たち $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$、$g : D(g) \rightarrow \mathbb{C}$ が $a \in U$ なる複素数 a で複素微分可能であるとき、変数 z の実部 $\mathrm{Re}z$、虚部 $\mathrm{Im}z$ をそれぞれ Re 成分、Im 成分ということにし $f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f$、$g = \mathrm{Re}g + i\mathrm{Im}g$ として、$\forall\alpha \in \mathbb{C}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathrm{hol}}(f+g)(a) &= \partial_{\mathrm{Re}}(\mathrm{Re}f + \mathrm{Re}g)(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}(\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g)(a)\\
&= (\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(a))\\
&\quad + i\,(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) + \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(a))\\
&= (\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a))\\
&\quad + i\,(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(a))\\
&= \partial_{\mathrm{hol}}f(a) + \partial_{\mathrm{hol}}g(a)\\
\partial_{\mathrm{hol}}(\alpha f)(a) &= \partial_{\mathrm{Re}}(\mathrm{Re}\alpha\mathrm{Re}f - \mathrm{Im}\alpha\mathrm{Im}f)(a)\\
&\quad + i\partial_{\mathrm{Re}}(\mathrm{Re}\alpha\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}\alpha\mathrm{Re}f)(a)\\
&= \mathrm{Re}\alpha\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) - \mathrm{Im}\alpha\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\\
&\quad + i\mathrm{Re}\alpha\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) + i\mathrm{Im}\alpha\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\\
&= (\mathrm{Re}\alpha + i\mathrm{Im}\alpha)\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\\
&\quad + i(\mathrm{Re}\alpha + i\mathrm{Im}\alpha)\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\\
&= \alpha\,(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a))\\
&= \alpha\partial_{\mathrm{hol}}f(a)
\end{aligned}$$

したがって、$\forall\alpha, \beta' \in \mathbb{C}$ に対し、次のようになる。

$$\partial_{\mathrm{hol}}(\alpha f + \beta' g)(a) = \partial_{\mathrm{hol}}(\alpha f)(a) + \partial_{\mathrm{hol}}\left(\beta' g\right)(a) = \alpha\partial_{\mathrm{hol}}f(a) + \beta'\partial_{\mathrm{hol}}g(a)$$

また、$\partial_{\mathrm{hol}}(fg)(a)$ について次のようになる。

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathrm{hol}}(fg)(a) &= \partial_{\mathrm{Re}}(\mathrm{Re}f\mathrm{Re}g - \mathrm{Im}f\mathrm{Im}g)(a)\\
&\quad + i\partial_{\mathrm{Re}}(\mathrm{Re}f\mathrm{Im}g + \mathrm{Im}f\mathrm{Re}g)(a)\\
&= \partial_{\mathrm{Re}}(\mathrm{Re}f\mathrm{Re}g)(a) - \partial_{\mathrm{Re}}(\mathrm{Im}f\mathrm{Im}g)(a)\\
&\quad + i\,(\partial_{\mathrm{Re}}(\mathrm{Re}f\mathrm{Im}g)(a) + \partial_{\mathrm{Re}}(\mathrm{Im}f\mathrm{Re}g)(a))\\
&= \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}g(a) + \mathrm{Re}f(a)\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(a)\\
&\quad - \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Im}g(a) - \mathrm{Im}f(a)\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(a)\\
&\quad + i\,(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Im}g(a) + \mathrm{Re}f(a)\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(a)\\
&\quad + \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}g(a) + \mathrm{Im}f(a)\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(a))\\
&= \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Re}g(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a)\mathrm{Im}g(a)\\
&\quad + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Re}g(a) - \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)\mathrm{Im}g(a)\\
&\quad + \mathrm{Re}f(a)\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(a) + i\mathrm{Re}f(a)\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(a)\\
&\quad + i\mathrm{Im}f(a)\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(a) - \mathrm{Im}f(a)\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(a)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)) (\mathrm{Re}g(a) + i\mathrm{Im}g(a)) \\
&\quad + (\mathrm{Re}f(a) + i\mathrm{Im}f(a)) (\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(a)) \\
&= \partial_{\mathrm{hol}}f(a)g(a) + f(a)\partial_{\mathrm{hol}}g(a)
\end{aligned}
$$

また、それらの関数たち g、f が合成可能であるとき、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
J_{g\circ f}(a) &= J_g(f(a))\,J_f(a) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a)) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}g(f(a)) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a)) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}g(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Re}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) & \partial_{\mathrm{Im}}\mathrm{Im}f(a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a)) & -\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a)) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a)) & \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) & -\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) & \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) - \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) & -\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) - \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) & -\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) + \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) - \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) & -(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)) \\ \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) & \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) - \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

これにより、その合成関数 $g\circ f$ もその複素数 a で複素微分可能で次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\partial_{\mathrm{hol}}(g\circ f)(a) &= \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a)) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(f(a)) \\
&= (\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) - \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)) \\
&\quad + i(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + \partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)) \\
&= (\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}g(f(a)) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}g(f(a)))(\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Re}f(a) + i\partial_{\mathrm{Re}}\mathrm{Im}f(a)) \\
&= \partial_{\mathrm{hol}}g(f(a))\,\partial_{\mathrm{hol}}f(a)
\end{aligned}
$$

□

定理 2.3.5. 連結な開集合 U を用いて $U\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{C}$ なる関数 $f:D(f)\to\mathbb{C}$ がその集合 U で正則で、$\forall z\in U$ に対し、$\partial_{\mathrm{hol}}f(z)=0$ が成り立つなら、その関数 $f|U$ は定数である。

証明. 連結な開集合 U を用いて $U\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{C}$ なる関数 $f:D(f)\to\mathbb{C}$ がその集合 U で正則で、$\forall z\in U$ に対し、$\partial_{\mathrm{hol}}f(z)=0$ が成り立つなら、その関数 f はその vector$z$ で全全微分可能であり $J_f(z)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ が成り立つ。したがって、その関数 $f|U$ は定数である。 □

2.3.2 複素微分と整級数

定理 2.3.6. 複素数たち a_n、b_n、a、z を用いた任意の整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ とこれに対応する整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n} ka_k(z-a)^{k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は同じ収束半径をもつ。

証明. 複素数たち a_n、b_n、a、z を用いた任意の整級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ とこれに対応する整級数

$\left(\sum_{k\in\varLambda_n} ka_k(z-a)^{k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束半径がをそれぞれ R、R'、その複素数 a を中心とする半径 R、R' の円板たちがそれぞれ $D(a,R)$、$D\left(a,R'\right)$ とおかれるとする。$k\geq 1$ のとき、$1\leq k=|k|$ より次のようになる。

$$\left|a_k(z-a)^k\right|\leq\left|ka_k(z-a)^k\right|=\left|ka_k(z-a)^{k-1}\right||z-a|$$

したがって、その整級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n} ka_k(z-a)^{k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が絶対収束するなら、その整級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n\cup\{0\}} a_k(z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ も絶対収束することになるので、$D\left(a,R'\right)\subseteq D(a,R)$ が成り立つ。したがって、$0\leq R'\leq R$ も成り立つ。$R=0$ が成り立つなら、当然ながら、$R=R'=0$ が成り立つ。$R>0$ が成り立つなら、$\forall z\in D(a,R)$ に対し、$|z-a|<r<R$ となる実数 r が存在する。このとき、整級数 $\left(\sum_{k\in\varLambda_n\cup\{0\}} a_kr^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ も絶対収束し有界であることになるので、$\exists M\in\mathbb{R}^+\forall k\in\mathbb{N}$ に対し、$\left|a_kr^k\right|\leq M$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$\left|ka_k(z-a)^{k-1}\right|=|k||a_k||z-a|^{k-1}\frac{\left|r^k\right|}{\left|r^k\right|}=\left|a_kr^k\right|\frac{k}{r}\left|\frac{z-a}{r}\right|^{k-1}\leq\frac{Mk}{r}\left|\frac{z-a}{r}\right|^{k-1}$$

ここで、$|z-a|<r$ より $\left|\frac{z-a}{r}\right|<1$ が成り立つかつ、$\left|\frac{z-a}{r}\right|=r_0$ とおくと、次のように変形されることができるので、$n\geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\varLambda_n} k\left|\frac{z-a}{r}\right|^{k-1} &= \frac{1}{r_0}\sum_{k\in\varLambda_n} kr_0^k=\frac{1}{r_0\left(1-r_0\right)}\sum_{k\in\varLambda_n} k\left(r_0^k-r_0^{k+1}\right)\\
&=\frac{1}{r_0\left(1-r_0\right)}\left(\sum_{k\in\varLambda_n} kr_0^k-\sum_{k\in\varLambda_n} kr_0^{k+1}\right)\\
&=\frac{1}{r_0\left(1-r_0\right)}\left(r_0+\sum_{k\in\varLambda_n\setminus\{1\}} kr_0^k-\sum_{k\in\varLambda_{n-1}} kr_0^{k+1}-nr_0^{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{r_0\left(1-r_0\right)}\left(r_0+\sum_{k\in\varLambda_{n-1}} (k+1)r_0^{k+1}-\sum_{k\in\varLambda_{n-1}} kr_0^{k+1}-nr_0^{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{r_0\left(1-r_0\right)}\left(r_0+\sum_{k\in\varLambda_{n-1}} kr_0^{k+1}+\sum_{k\in\varLambda_{n-1}} r_0^{k+1}-\sum_{k\in\varLambda_{n-1}} kr_0^{k+1}-nr_0^{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{r_0\left(1-r_0\right)}\left(\sum_{k\in\varLambda_{n-1}} r_0^{k+1}+r_0-nr_0^{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{r_0\left(1-r_0\right)}\left(\sum_{k\in\varLambda_n} r_0^k-nr_0^{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{r_0\left(1-r_0\right)}\sum_{k\in\varLambda_n} r_0^k-\frac{nr_0^n}{1-r_0}=\frac{1}{r_0\left(1-r_0\right)^2}\sum_{k\in\varLambda_n}\left(r_0^k-r_0^{k+1}\right)-\frac{nr_0^n}{1-r_0}\\
&=\frac{1}{r_0\left(1-r_0\right)^2}\left(r_0+\sum_{k\in\varLambda_n\setminus\{1\}} r_0^k-\sum_{k\in\varLambda_{n-1}} r_0^{k+1}-r_0^{n+1}\right)-\frac{nr_0^n}{1-r_0}\\
&=\frac{1}{r_0\left(1-r_0\right)^2}\left(r_0+\sum_{k\in\varLambda_{n-1}} r_0^{k+1}-\sum_{k\in\varLambda_{n-1}} r_0^{k+1}-r_0^{n+1}\right)-\frac{nr_0^n}{1-r_0}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1 - r_0^n}{(1 - r_0)^2} - \frac{nr_0^n}{1 - r_0} = \frac{1 - r_0^n - nr_0^n + nr_0^{n+1}}{(1 - r_0)^2}$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \Lambda_n} \left| \frac{Mk}{r} \left(\frac{z-a}{r} \right)^{k-1} \right| &= \frac{M}{r} \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \Lambda_n} kr_0^{k-1} = \frac{M}{r} \lim_{n \to \infty} \frac{1 - r_0^n - nr_0^n + nr_0^{n+1}}{(1 - r_0)^2} \\
&= \frac{M}{r(1 - r_0)^2} \lim_{n \to \infty} \left(1 - r_0^n - nr_0^n + nr_0^{n+1} \right) \\
&= \frac{M}{r(1 - r_0)^2} (1 - 0 - 0 + 0) = \frac{M}{r\left(1 - \left|\frac{z-a}{r}\right|\right)^2}
\end{aligned}$$

その整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} \left| \frac{Mk}{r} \left(\frac{z-a}{r} \right)^{k-1} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は収束するので、比較定理よりその整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n} ka_k(z-a)^{k-1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ も絶対収束し $D(a, R) \subseteq D(a, R')$ が成り立つ。したがって、$0 \leq R \leq R'$ も成り立つ。

以上より、$R = R'$ が得られた。 □

定理 2.3.7. 複素数たち a_n、a を用いて次式のような関数 f を考える。

$$f : D(f) \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n (z-a)^n$$

この整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} a_k (z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径 R が $R > 0$ を満たすとき、その関数 f はその収束円板 $D(a, R)$ 上で正則で次式が成り立つ。この式をその関数 f の項別全微分という。

$$\partial_{\mathrm{hol}} f : D(a, R) \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} na_n (z-a)^{n-1}$$

さらに、その関数 f はその収束円板 $D(a, R)$ 上で何回でも複素微分可能であり次式が成り立つ。

$$a_n = \frac{1}{n!} \partial_{\mathrm{hol}}^n f(a)$$

証明. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、複素数たち a_n、a を用いて次式のような関数 f を考える。

$$f : D(f) \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n (z-a)^n$$

この整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} a_k (z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径 R が $R > 0$ を満たすとき、その収束円板 $D(a, R)$ を用いて $z \in D(a, R)$ なる複素数 z がとられれば、その集合 $\mathbb{R}$ は稠密順序集合であるので、$|z - a| < r < R$ となるような実数 r が存在する。このとき、$|h| < R - r$ が成り立つとすれば、次式が成り立ち

$$|z + h - a| \leq |z - a| + |h| < r + R - r = R$$

$z + h \in D(a, R)$ が成り立つので、像 $f(z + h)$ が存在する。ここで、集合 $D(g)$ が次式のように定義されるとして

$$D(g) = \{h \in \mathbb{C} \mid |h| < R - r\}$$

次式のように関数 g が定義される。

$$g : D(g) \to \mathbb{C}; h \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} & \text{if} \quad h \neq 0 \\ \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n (z-a)^{n-1} & \text{if} \quad h = 0 \end{cases}$$

このとき、数学的帰納法によって明らかに次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n (z+h-a)^n - \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n (z-a)^n \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{a_n}{h} \left((z+h-a)^n - (z-a)^n \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{a_n}{h} \left((z+h-a) - (z-a) \right) \left(\sum_{k \in \varLambda_n} (z+h-a)^{n-k} (z-a)^{k-1} \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n \left(\sum_{k \in \varLambda_n} (z+h-a)^{n-k} (z-a)^{k-1} \right) \end{aligned}$$

ここで、次式のような関数 h_n が定義されるとすれば、

$$h_n : D(g) \to \mathbb{C}; z \mapsto a_n \left(\sum_{k \in \varLambda_n} (z+h-a)^{n-k} (z-a)^{k-1} \right)$$

明らかに $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、それらの関数たち h_n はその集合 $D(g)$ で連続である。

また、$|z-a| < r$ が成り立つことに注意して次式のように集合 E が定義され

$$E = \{ h \in \mathbb{C} | |h| < r - |z-a| \}$$

$h \in E$ が成り立つとすれば、三角不等式より $|z-a+h| \leq |z-a| + |h| < r$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned} |h_n(z)| &= \left| a_n \left(\sum_{k \in \varLambda_n} (z+h-a)^{n-k} (z-a)^{k-1} \right) \right| \\ &= |a_n| \left| \sum_{k \in \varLambda_n} (z+h-a)^{n-k} (z-a)^{k-1} \right| \\ &\leq |a_n| \sum_{k \in \varLambda_n} \left| (z+h-a)^{n-k} (z-a)^{k-1} \right| \\ &= |a_n| \sum_{k \in \varLambda_n} |z+h-a|^{n-k} |z-a|^{k-1} \leq |a_n| \sum_{k \in \varLambda_n} r^{n-k} r^{k-1} \\ &= |a_n| \sum_{k \in \varLambda_n} r^{n-1} = n |a_n| r^{n-1} \end{aligned}$$

ここで、$r < R$ が成り立つので、その整級数 $\left(\displaystyle\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} |a_k| r^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ は絶対収束しこれとその整級数 $\left(\displaystyle\sum_{k \in \varLambda_n} k |a_k| r^{k-1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ との収束半径が等しいので、その整級数 $\left(\displaystyle\sum_{k \in \varLambda_n} k |a_k| r^{k-1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ もやはり収束する。

以上より、その関数 g は次式のように書かれることができき

$$g:D(g)\rightarrow\mathbb{C};h\mapsto\begin{cases}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}h_n(z) & \text{if}\quad h\neq 0\\ \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}na_n(z-a)^{n-1} & \text{if}\quad h=0\end{cases}$$

次のことが成り立つので、

- $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、それらの関数たち h_n はその集合 $D(g)\cap E$ で連続である。
- $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、負でない実数の定数たち $n\left|a_n\right|r^{n-1}$ が存在して、$\forall h\in D(g)\cap E$ に対し、$\left|h_n(z)\right|\leq n\left|a_n\right|r^{n-1}$ が成り立つ。
- その整級数 $\left(\displaystyle\sum_{k\in\Lambda_n}k\left|a_k\right|r^{k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束する。

その整級数 $\left(\displaystyle\sum_{k\in\Lambda_n}k\left|a_k\right|r^{k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ がその整級数 $\left(\displaystyle\sum_{k\in\Lambda_n}\left|h_k(z)\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の優級数となりその関数 g はその集合 $D(g)\cap E$ で連続である。したがって、次式が成り立つ。

$$\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}g(h)=g(0)$$

したがって、次式が成り立つ。

$$\lim_{\substack{h\rightarrow 0\\ h\neq 0}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\sum_{n\in\mathbb{N}}na_n(z-a)^{n-1}$$

これにより、その関数 f はその収束円板 $D(a,R)$ 上で正則で次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}}f:D(a,R)\rightarrow\mathbb{C};z\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}}na_n(z-a)^{n-1}$$

さらに、これが何回も適用されれば、その関数 f はその収束円板 $D(a,R)$ 上で何回でも複素微分可能であることが示され、数学的帰納法によって明らかに次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}}^kf:D(a,R)\rightarrow\mathbb{C};z\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\Lambda_{k-1}}\frac{n!}{(n-k)!}a_n(z-a)^{n-k}$$

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\partial_{\mathrm{hol}}^kf(a)&=\frac{1}{k!}\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\Lambda_{k-1}}\frac{n!}{(n-k)!}a_n(a-a)^{n-k}\\&=\frac{1}{k!}\left(\frac{k!}{(k-k)!}a_k(a-a)^{k-k}+\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\Lambda_k}\frac{n!}{(n-k)!}a_n(a-a)^{n-k}\right)\\&=\frac{1}{0!}a_k(a-a)^0+\frac{1}{k!}\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\Lambda_k}\frac{n!}{(n-k)!}a_n(a-a)^{n-k}\\&=a_k+\frac{1}{k!}\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\Lambda_k}\frac{n!}{(n-k)!}a_n0^{n-k}=a_k\end{aligned}$$

□

定理 2.3.8. 複素数たち a_n、a を用いて次式のような関数 f を考える。

$$f : D(f) \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n (z-a)^n$$

この整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} a_k (z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径 R が $R > 0$ を満たすとき、$C \in \mathbb{C}$ なる任意の定数 C を用いて次式のような関数 F が定義されると、

$$F : D(f) \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1} + C$$

これを用いた整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{a_k}{k+1} (z-a)^{k+1} + C \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径も R でその収束円板 $D(a,R)$ を用いて $z \in D(a,R)$ が成り立つなら、次式も成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}} F(z) = f(z)$$

証明. 複素数たち a_n、a を用いて次式のような関数 f を考える。

$$f : D(f) \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n (z-a)^n$$

この整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} a_k (z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径 R が $R > 0$ を満たすとし $C \in \mathbb{C}$ なる任意の定数 C を用いて次式のような関数 F が定義される。

$$F : D(f) \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1} + C$$

このとき、その整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} a_k (z-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ とこの関数 F を用いた整級数 $\left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{a_k}{k+1} (z-a)^{k+1} + C \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径はどちらも R となるのであった。このとき、その関数 F はその収束円板 $D(a,R)$ 上で正則で、$z \in D(a,R)$ が成り立つなら、次式が成り立つことに注意すれば、

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1} + C = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_{n-1}}{n} (z-a)^n + C$$

次のようになる。

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathrm{hol}} F(z) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n a_{n-1}}{n} (z-a)^{n-1} + \partial_{\mathrm{hol}} C \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n-1} (z-a)^{n-1} + 0 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n (z-a)^n = f(z)
\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1985. 第 34 刷 p146-149 ISBN978-4-13-062005-5

[2] 棚橋典大. "複素関数論　講義ノート". 京都大学. https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~norihiro.tanahashi/pdf/complex-analysis/note.pdf (2021-3-19 取得)

第 3 部　関数論

3.1　初等関数

3.1.1　自然な指数関数

定理 3.1.1. 冪級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^k}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、これの収束半径は ∞ である。

証明. 冪級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^k}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、次のようになる。

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)n!}{n!} \right| = \lim_{n \to \infty} |n+1| = \infty$$

よって、これの収束半径は ∞ である。 □

定義 3.1.1. 冪級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^k}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径は ∞ であることにより、$D(0, \infty) = \mathbb{C}$ が成り立ち次式のように関数 exp が定義されることができる。

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{z^n}{n!}$$

この関数 exp を自然な指数関数という。

定理 3.1.2. このとき、次式が成り立つ。

$$\exp 0 = 1$$

証明. 定義より、明らかに次のようになる。

$$\exp 0 = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{0^n}{n!} = \frac{0^0}{0!} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{0^n}{n!} = 1 + 0 = 1$$

□

定義 3.1.2. 次式のように実数 e を定義する。この実数 e を Napier 数という。

$$e = \exp 1$$

定理 3.1.3. また、$\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\exp z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp 1 = e$$

証明. 定理 3.1.1 より冪級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束半径が ∞ なので、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{N}$ に対し、$\delta<n$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{|z|^k}{k!}-\sum_{k\in\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{|z|^k}{k!}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

また、数学的帰納法によって二項定理が成り立つ、即ち、$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{z}{n}\right)^k$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-\sum_{k\in\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{z}{n}\right)^k-\sum_{k\in\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\frac{\prod_{i\in\Lambda_k}i}{\prod_{i\in\Lambda_{n-k}}in^k}-\sum_{k\in\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\frac{\prod_{i\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{n-k}}i}{n^k}-\sum_{k\in\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\frac{\prod_{i\in\Lambda_k}(i+n-k)}{n^k}-\sum_{k\in\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_k}\frac{i+n-k}{n}-\sum_{k\in\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_k}\frac{k-i+1+n-k}{n}-\sum_{k\in\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_k}\frac{n-i+1}{n}-\sum_{k\in\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}\cup\{0\}}\frac{n-i}{n}-\sum_{k\in\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)-\sum_{k\in\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\Lambda_n\setminus\Lambda_\delta\cup\{0\}}\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|\\
&\leq\sum_{k\in\Lambda_n\setminus\Lambda_\delta\cup\{0\}}\left|\frac{z^k}{k!}\prod_{i\in\Lambda_{k-1}}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} \prod_{i \in \Lambda_{k-1}} \left| 1 - \frac{i}{n} \right| \\
&\leq \sum_{k \in \Lambda_n \setminus \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} \\
&= \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} \\
&= \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} \\
&\leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} \\
&= \left| \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} \right| - \left| \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} \right| \\
&\leq \left| \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{|z|^k}{k!} \right| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

また、$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{z^k}{k!} \prod_{i \in \Lambda_{k-1}} \left(1 - \frac{i}{n} \right) = \frac{z^k}{k!}$ が成り立つことにより、$\exists \delta' \in \mathbb{N}$ に対し、$\delta' \leq n$ が成り立つなら、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{z^k}{k!} \prod_{i \in \Lambda_{k-1}} \left(1 - \frac{i}{n} \right) - \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{z^k}{k!} \right| &= \left| \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \left(\frac{z^k}{k!} \prod_{i \in \Lambda_{k-1}} \left(1 - \frac{i}{n} \right) - \frac{z^k}{k!} \right) \right| \\
&\leq \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \left| \frac{z^k}{k!} \prod_{i \in \Lambda_{k-1}} \left(1 - \frac{i}{n} \right) - \frac{z^k}{k!} \right| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

以上、三角不等式より、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - \exp z \right| &= \left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{z^k}{k!} \right| \\
&= \left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{z^k}{k!} \prod_{i \in \Lambda_{k-1}} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{z^k}{k!} \prod_{i \in \Lambda_{k-1}} \left(1 - \frac{i}{n} \right) - \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{z^k}{k!} \right| \\
&\leq \left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{z^k}{k!} \prod_{i \in \Lambda_{k-1}} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \right| \\
&\qquad + \left| \sum_{k \in \Lambda_\delta \cup \{0\}} \frac{z^k}{k!} \prod_{i \in \Lambda_{k-1}} \left(1 - \frac{i}{n} \right) - \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{z^k}{k!} \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

よって、次式が成り立つ。

$$\exp x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

特に、次式が成り立つ。

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \exp 1 = e$$

□

定理 3.1.4 (自然な指数関数の加法定理)**.** $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。これを自然な指数関数の加法定理などという。

$$\exp(z + w) = \exp z \exp w$$

証明. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、数学的帰納法によって二項定理が成り立つ、即ち、$(z + w)^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}$ が成り立つことに注意すれば、定義より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\exp(z + w) &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(z + w)^n}{n!} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{1}{n!} \sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

ここで、$\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \exp z \exp w$ が成り立つことに注意すれば、次式が成り立つ。

$$\exp(z + w) = \exp z \exp w$$

□

定理 3.1.5. 自然な指数関数の逆元について $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式たちが成り立つ。

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$$
$$\exp z \neq 0$$

証明. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次のようになる。

$$\exp(-z) \exp z = \exp(-z + z) = \exp 0 = 1$$
$$\exp z \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp 0 = 1$$

よって、$\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp z}$ が成り立つ。

ここで、$\exists z \in \mathbb{C}$ に対し、$\exp z = 0$ が成り立つと仮定すると、上記の議論により次のようになる。

$$0 = \exp z \exp(-z) = \frac{\exp z}{\exp z} = 1$$

これは $0 = 1$ となっており矛盾している。よって、$\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$\exp z \neq 0$ が成り立つ。 □

定理 3.1.6. 自然な指数関数は集合 $\mathbb{C}$ 上で正則で次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dz}\exp z = \exp z$$

証明. 自然な指数関数は集合 $\mathbb{C}$ 上で正則であることは定理 2.3.7 より直ちに分かる。このとき、項別微分より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\exp z &= \frac{d}{dz}\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\frac{z^n}{n!}\\
&= \frac{d}{dz}\left(1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^n}{n!}\right)\\
&= \frac{d}{dz}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^n}{n!}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} n\frac{z^{n-1}}{n!}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp z
\end{aligned}$$

□

定理 3.1.7. 集合 $\mathbb{R}$ に制限された自然な指数関数について $\forall x\in\mathbb{R}$ に対し、$\exp x\in\mathbb{R}^+$ が成り立つ。

証明. $\forall x\in\mathbb{R}$ に対し、定義より明らかにその集合 $\mathbb{R}$ は加法と乗法で閉じており次のようになる。

$$\exp x = \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\frac{x^n}{n!}\in\mathbb{R}$$

したがって、次のようになる。

$$\exp x = \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \exp\frac{x}{2}\exp\frac{x}{2} = \left(\exp\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$$

さらに、$\exp x\neq 0$ が成り立つので、次式が成り立つ。

$$0 < \exp x$$

よって、$\exp x\in\mathbb{R}^+$ が成り立つ。 □

定理 3.1.8. 自然な指数関数の大小関係について $\forall x,y\in\mathbb{R}$ に対し、次式が成り立つ。

$$x<y \Rightarrow \exp x < \exp y$$

これにより、自然な指数関数 exp は狭義単調増加している。

証明. $\forall x,y\in\mathbb{R}$ に対し、$x<y$ が成り立つなら、次のようになる。

$$\exp y - \exp x = \exp(x+y-x) - \exp x$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp x \exp(y-x) - \exp x \\
&= \exp x \left(\exp(y-x) - 1\right)
\end{aligned}
$$

ここで、$y-x>0$ が成り立つことに注意すれば、定義より次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\exp(y-x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(y-x)^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(y-x)^n}{n!} > 1
\end{aligned}
$$

したがって、$\exp(y-x)-1>0$ が得られ $\exp x>0$ が成り立つことに注意すれば、次のようになる。

$$\exp y - \exp x = \exp x \left(\exp(y-x) - 1\right) > 0$$

よって、次式が成り立つ。

$$\exp x < \exp y$$

□

定理 3.1.9. 自然な指数関数の極限について $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、次式たちが成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \exp x &= \infty \\
\lim_{x\to-\infty} \exp x &= 0 \\
\lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^n} &= \infty \\
\lim_{x\to-\infty} |x|^n \exp x &= 0
\end{aligned}
$$

証明. 定義より明らかに $x>0$ のとき、次のようになる。

$$\exp x = \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{x^n}{n!} \geq x$$

ここで、$\lim_{x\to\infty} x = \infty$ が成り立つので、追い出しの原理より $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ が成り立つ。
また、次式が成り立つ。

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{-x\to\infty} \exp\left(-(-x)\right) = \lim_{-x\to\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = 0$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、定義より明らかに $x>0$ のとき、次のようになる。

$$\exp x = \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

したがって、次のようになり

$$\frac{\exp x}{x^n} \geq \frac{1}{x^n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{(n+1)!}$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(n+1)!} = \infty$ が成り立つので、追い出しの原理より $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^n} = \infty$ が成り立つ。

また、$\displaystyle\lim_{-x\to\infty}\frac{\exp(-x)}{(-x)^n}=\infty$ が成り立つことに注意すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}|x|^n\exp x &= \lim_{-x\to\infty}|-x|^n\exp\left(-(-x)\right)\\ &= \lim_{-x\to\infty}|-x|^n\left|\frac{1}{\exp(-x)}\right|\\ &= \lim_{-x\to\infty}\left|\frac{(-x)^n}{\exp(-x)}\right|\\ &= \lim_{-x\to\infty}\frac{1}{\left|\frac{\exp(-x)}{(-x)^n}\right|}=0\end{aligned}$$

□

3.1.2 三角関数

定理 3.1.10. 冪級数たち $\displaystyle\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\displaystyle\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、これの収束半径は ∞ である。

証明. 冪級数たち $\displaystyle\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\displaystyle\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、次のようになるので、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{(2n)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\left(2(n+1)\right)!}{(-1)^{n+1}(2n)!}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+1)=\infty\\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\left(2(n+1)+1\right)!}{(-1)^{n+1}(2n+1)!}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(2n+1)!}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}(2n+3)(2n+2)=\infty\end{aligned}$$

$\forall w\in\mathbb{C}$ に対し、冪級数たち $\displaystyle\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{(-1)^k w^k}{(2k)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$、$\displaystyle\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{(-1)^k w^k}{(2k+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束半径たちはどちらも ∞ となる。

ここで、$\forall z\in\mathbb{C}$ に対し、$w=z^2$ とおいてもやはりそれらの収束半径たちはどちらも ∞ となる。その冪級数 $\displaystyle\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の各項にその複素数 z をかけたとしても、これがその自然数 n に対しての定数

となっているので、やはり、その冪級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径は ∞ となる。 □

定義 3.1.3. 冪級数たち $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径は ∞ であることにより、$D(0, \infty) = \mathbb{C}$ が成り立ち次式のように関数たち cos、sin が定義されることができる。

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

これらの関数たち cos、sin をそれぞれ余弦関数、正弦関数という。

定義 3.1.4. 余弦関数、正弦関数と整数たちの有理式で定義される関数を三角関数という。

例えば、$tan = \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{C} \setminus \{z | \cos z = 0\} \to \mathbb{C}$ などが挙げられる。

定理 3.1.11. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式たちが成り立つ。

$$\cos 0 = 1$$
$$\sin 0 = 0$$
$$\cos(-z) = \cos z$$
$$\sin(-z) = -\sin z$$

証明. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、定義より明らかに次のようになる。

$$\cos 0 = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n 0^{2n}}{(2n)!} = \frac{0^0}{0!} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n 0^{2n}}{(2n)!} = 1 + 0 = 1$$
$$\sin 0 = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n 0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$
$$\cos(-z) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n (-z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$$
$$\sin(-z) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n (-z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z$$

□

定理 3.1.12 (Euler の公式)**.** $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。これを Euler の公式という。

$$\exp iz = \cos z + i \sin z$$

証明. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、自然な指数関数が収束していることから、複素数 $\exp iz$ は絶対収束する。ここで、定理 1.5.21 と定義より次のようになる。

$$\exp iz = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(iz)^n}{n!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{2n\in 2\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iz)^1}{1!} + \sum_{2n+1\in 2\mathbb{N}+1} \frac{(iz)^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{i^{2n}z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{ii^{2n}z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos z + i\sin z
\end{aligned}
$$

□

定理 3.1.13 (de Moivre の公式)**.** $\forall z\in\mathbb{C}\forall n\in\mathbb{Z}$ に対し[*25]、次式が成り立つ。これを de Moivre の公式という。

$$(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i\sin nz$$

証明. $\forall z\in\mathbb{C}\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、定理 3.1.11 より次式が成り立つ。

$$(\cos z + i\sin z)^0 = 1 = \cos 0 + i\sin 0$$

また、$n=1$ のときでは定理 3.1.11 そのものである。$n=k$ のとき、次式が成り立つと仮定すると、

$$(\cos z + i\sin z)^k = \cos kz + i\sin kz$$

$n=k+1$ のとき、Euler の公式より次のようになる。

$$
\begin{aligned}
(\cos z + i\sin z)^{k+1}(\cos z + i\sin z) &= (\cos kz + i\sin kz)(\cos z + i\sin z) \\
&= \exp ikz \exp iz \\
&= \exp(ikz + iz) \\
&= \exp i(k+1)z \\
&= \cos(k+1)z + i\sin(k+1)z
\end{aligned}
$$

以上、数学的帰納法により $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、次式が成り立つ。

$$(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i\sin nz$$

また、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、Euler の公式より次のようになる。

$$
\begin{aligned}
(\cos z + i\sin z)^{-n} &= \frac{1}{(\cos z + i\sin z)^n} \\
&= \frac{1}{\cos nz + i\sin nz} \\
&= \frac{1}{\exp nz} \\
&= \exp(-nz)
\end{aligned}
$$

[*25] 一般に $n\in\mathbb{R}$ とかの場合では成り立たないことに注意してください。

$$= \cos(-nz) + i\sin(-nz)$$

$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{N}$ が成り立つので、以上より、$\forall z \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、次式が成り立つ。

$$(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i\sin nz$$

□

定理 3.1.14. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\cos z = \frac{\exp iz + \exp(-iz)}{2}$$
$$\sin z = \frac{\exp iz - \exp(-iz)}{2i}$$

証明. Euler の公式より $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\exp iz = \cos z + i\sin z$$
$$\exp(-iz) = \cos(-z) + i\sin(-z)$$

ここで、定理 3.1.9 より次のようになる。

$$\exp iz = \cos z + i\sin z$$
$$\exp(-iz) = \cos z - i\sin z$$

あとはこれらから $\cos z$、$\sin z$ について解けばよい。 □

定理 3.1.15. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ[*26]。

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

[*26] 次のように強引に示すものもある。中学生のとき中 2 病こじらせて知った。
$\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次のようになり、

$$\begin{aligned}
\sin^2 z &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2 \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^{m+n} z^{2(m+n)+2}}{(2(m+n) - 2n + 1)!(2n+1)!} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n+2}}{(2n - 2k + 1)!(2k+1)!} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n+2)!}{(2k+1)!(2n - 2k + 1)!} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n+2}}{(2n+2)!} \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{(2n+2)!}{(2k+1)!(2n - 2k + 1)!} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n}}{(2n)!} \sum_{k \in \Lambda_{n-1} \cup \{0\}} \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n - 2k - 1)!} \\
&= -\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \sum_{k \in \Lambda_{n-1} \cup \{0\}} \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n - 2k - 1)!}
\end{aligned}$$

証明. 定理 3.1.13 より $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\frac{\exp iz + \exp(-iz)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\exp iz - \exp(-iz)}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{\exp 2iz + 2 + \exp(-2iz)}{4} - \frac{\exp 2iz - 2 + \exp(-2iz)}{4} \\
&= \frac{\exp 2iz + 2 + \exp(-2iz) - \exp 2iz + 2 - \exp(-2iz)}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2 z &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right)^2 \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^{m+n} z^{2(m+n)}}{(2(m+n) - 2n)!(2n)!} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n-2k)!(2k)!} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} \\
&= 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}
\end{aligned}$$

二項定理よりしたがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\cos^2 z + \sin^2 z = 1 &+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} \\
&- \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \sum_{k \in \Lambda_{n-1} \cup \{0\}} \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-2k-1)!} \\
= 1 &+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}\right. \\
&\left. - \sum_{k \in \Lambda_{n-1} \cup \{0\}} \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-2k-1)!}\right) \\
= 1 &+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \left(\sum_{k \in \Lambda_n \cup \{0\}} (-1)^{2k} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}\right. \\
&\left. + \sum_{k \in \Lambda_{n-1} \cup \{0\}} (-1)^{2k+1} \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-2k-1)!}\right) \\
= 1 &+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \sum_{k \in \Lambda_{2n} \cup \{0\}} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \\
= 1 &+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \sum_{k \in \Lambda_{2n} \cup \{0\}} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} 1^{n-k} (-1)^k \\
= 1 &+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} (1-1)^{2n} \\
= 1 &+ \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = 1
\end{aligned}$$

$$= 1$$

□

定理 3.1.16 (三角関数の加法定理)**.** $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$$
$$\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$$

この定理を三角関数の加法定理という。

証明. 定理 3.1.12 より $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\cos z \cos w \mp \sin z \sin w \\
&= \frac{\exp iz + \exp(-iz)}{2} \frac{\exp iw + \exp(-iw)}{2} \mp \frac{\exp iz - \exp(-iz)}{2i} \frac{\exp iw - \exp(-iw)}{2i} \\
&= \frac{1}{4} (\exp iz \exp iw + \exp iz \exp(-iw) + \exp(-iz) \exp iw + \exp(-iz) \exp(-iw)) \\
&\quad \pm \frac{1}{4} (\exp iz \exp iw - \exp iz \exp(-iw) - \exp(-iz) \exp iw + \exp(-iz) \exp(-iw)) \\
&= \frac{1}{4} (\exp iz \exp iw + \exp iz \exp(-iw) + \exp(-iz) \exp iw + \exp(-iz) \exp(-iw) \\
&\quad \pm \exp iz \exp iw \mp \exp iz \exp(-iw) \mp \exp(-iz) \exp iw \pm \exp(-iz) \exp(-iw)) \\
&= \frac{2 \exp iz \exp(\pm iw) + 2 \exp(-iz) \exp(\mp iw)}{4} \\
&= \frac{\exp i(z \pm w) + \exp(-i(z \pm w))}{2} = \cos(z \pm w) \\
&= \sin z \cos w \pm \cos z \sin w \\
&= \frac{\exp iz - \exp(-iz)}{2i} \frac{\exp iw + \exp(-iw)}{2} \mp \frac{\exp iz + \exp(-iz)}{2} \frac{\exp iw - \exp(-iw)}{2i} \\
&= \frac{1}{4i} (\exp iz \exp iw + \exp iz \exp(-iw) - \exp(-iz) \exp iw - \exp(-iz) \exp(-iw)) \\
&\quad \pm \frac{1}{4i} (\exp iz \exp iw - \exp iz \exp(-iw) + \exp(-iz) \exp iw - \exp(-iz) \exp(-iw)) \\
&= \frac{1}{4i} (\exp iz \exp iw + \exp iz \exp(-iw) - \exp(-iz) \exp iw - \exp(-iz) \exp(-iw) \\
&\quad \pm \exp iz \exp iw \mp \exp iz \exp(-iw) \pm \exp(-iz) \exp iw \mp \exp(-iz) \exp(-iw)) \\
&= \frac{2 \exp iz \exp(\pm iw) - 2 \exp(-iz) \exp(\mp iw)}{4i} \\
&= \frac{\exp i(z \pm w) - \exp(-i(z \pm w))}{2i} = \sin(z \pm w)
\end{aligned}$$

□

定理 3.1.17. 余弦関数、正弦関数は集合 $\mathbb{C}$ 上で正則で次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$
$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

証明. 余弦関数、正弦関数は集合 $\mathbb{C}$ 上で正則であることは定理 2.3.7 より直ちに分かる。このとき、項別微分より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\cos z &= \frac{d}{dz}\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{d}{dz}\left(1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= \frac{d}{dz}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}2n\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= -\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{n-1} z^{2(n-1)+1}}{(2(n-1)+1)!} \\
&= -\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin z \\
\frac{d}{dz}\sin z &= \frac{d}{dz}\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{d}{dz}\left(1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\
&= \frac{d}{dz}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}(2n+1)\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z
\end{aligned}$$

□

定理 3.1.18. 集合 $\mathbb{R}$ に制限された余弦関数、正弦関数について $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$\cos x, \sin x \in \mathbb{R}$ が成り立つ。

証明. これはその集合 $\mathbb{R}$ が加法と乗法で閉じていることと定義より明らかである。 □

定理 3.1.19. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ かつ $0 < \frac{\pi}{2} < 2$ なる実数 π がただ 1 つ存在する。また、このとき、$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ が成り立つ。

定義 3.1.5. このような実数 π を円周率という。

証明. 実数 x が $0 < x < 2$ を満たすなら、$\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し、次の通りになるので、

$$\frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} < \frac{2^2}{2\cdot 3} < 1$$

次のようになる。

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\frac{(-1)^{4n} x^{4n+1}}{(4n+1)!} + \frac{(-1)^{4n+3} x^{4n+3}}{(4n+3)!} \right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} \right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} \right) > 0
\end{aligned}$$

したがって、定理 2.3.8、定理 3.1.17 より次のようになるので、

$$0 > -\sin x = \frac{d}{dx} \cos x$$

余弦関数 cos は区間 $(0,2)$ で狭義単調減少し、ここで、実数 x が $0 < x < 3$ を満たすなら、$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し、次の通りになるので、

$$\frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} < \frac{3^2}{3 \cdot 4} < 1$$

次のようになる。

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{(-1)^0 x^0}{0!} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
&= 1 + \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \\
&= 1 - \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\frac{(-1)^{4n} x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{(-1)^{4n+2} x^{4n+4}}{(4n+4)!} \right) \\
&= 1 - \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!} \right) \\
&= 1 - \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} \right) \\
&= 1 - \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} \right) \\
&< 1 - \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4} \right)
\end{aligned}$$

したがって、次のようになる。

$$\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} \left(1 - \frac{2^2}{3 \cdot 4} \right) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} < 0$$

ここで、$\cos 0 > 0$ が成り立つので、余弦関数 $\cos$ はその区間 $(0,2)$ で狭義単調減少することに注意すれば、中間値の定理より $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ となる実数 $\frac{\pi}{2}$ がその区間 $(0,2)$ にただ 1 つ存在する。

また、このとき、定理 3.1.14 より明らかに $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$ が成り立つ。さらに、上記の議論により $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ が成り立っているので、$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ が成り立つ。 □

定理 3.1.20. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \cos z \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \sin z \end{aligned}$$

証明. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、三角関数の加法定理より次のようになる。

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \sin\frac{\pi}{2}\cos z - \cos\frac{\pi}{2}\sin z = \cos z \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos z + \sin\frac{\pi}{2}\sin z = \sin z \end{aligned}$$

□

定理 3.1.21. $\forall z \in \mathbb{C}\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \cos(z + n\pi) &= (-1)^n \cos z \\ \sin(z + n\pi) &= (-1)^n \sin z \end{aligned}$$

証明. $\forall z \in \mathbb{C}\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$n = 0$ のときは明らかに次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \cos(z + n\pi) &= \cos z \\ \sin(z + n\pi) &= \sin z \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき次のようになる。

$$\begin{aligned} \cos(z + \pi) &= \cos z \cos\pi - \sin z \sin\pi \\ &= \cos z\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \sin z\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos z(0-1) - \sin z(0+0) = -\cos z \\ \sin(z + \pi) &= \sin z \cos\pi + \cos z \sin\pi \\ &= \sin z\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \cos z\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin z(0-1) - \cos z(0+0) = -\sin z \end{aligned}$$

$n = k$ のとき次式が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} \cos(z + k\pi) &= (-1)^k \cos z \\ \sin(z + k\pi) &= (-1)^k \sin z \end{aligned}$$

$n = k + 1$ のとき、次のようになる。

$$\begin{aligned} \cos\left(z + (k+1)\pi\right) &= \cos(z + k\pi + \pi) \\ &= \cos(z + k\pi)\cos\pi - \sin(z + k\pi)\sin\pi \\ &= \cos(z + k\pi)\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \sin(z+k\pi)\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos(z+k\pi)(0-1) - \sin(z+k\pi)(0+0)\\
&= -\cos(z+k\pi)\\
&= -(-1)^k\cos z\\
&= (-1)^{k+1}\cos z\\
\sin\left(z+(k+1)\pi\right) &= \sin(z+k\pi+\pi)\\
&= \sin(z+k\pi)\cos\pi + \cos(z+k\pi)\sin\pi\\
&= \sin(z+k\pi)\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\\
&\quad - \cos(z+k\pi)\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \sin(z+k\pi)(0-1) - \cos(z+k\pi)(0+0)\\
&= -\sin(z+k\pi)\\
&= -(-1)^k\sin z\\
&= (-1)^{k+1}\sin z
\end{aligned}
$$

したがって、$\forall z \in \mathbb{C}\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\cos(z+n\pi) &= (-1)^n\cos z\\
\sin(z+n\pi) &= (-1)^n\sin z
\end{aligned}
$$

ここで、$\forall z \in \mathbb{C}\forall -n \in -\mathbb{N}$ に対し、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\cos(z-n\pi) &= \cos z\cos(-n\pi) - \sin z\sin(-n\pi)\\
&= \cos(-z)\cos n\pi\text{-}\sin(-z)\sin n\pi\\
&= \cos(-z+n\pi)\\
&= (-1)^n\cos(-z)\\
&= (-1)^{-n}\cos z\\
\sin(z-n\pi) &= \sin z\cos(-n\pi) + \cos z\sin(-n\pi)\\
&= -\sin(-z)\cos n\pi - \cos(-z)\sin n\pi\\
&= -\left(\sin(-z)\cos n\pi + \cos(-z)\sin n\pi\right)\\
&= -\sin(-z+n\pi)\\
&= -(-1)^n\sin(-z)\\
&= (-1)^{-n}\sin z
\end{aligned}
$$

よって、$\forall z \in \mathbb{C}\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\cos(z+n\pi) &= (-1)^n\cos z\\
\sin(z+n\pi) &= (-1)^n\sin z
\end{aligned}
$$

□

定理 3.1.22. 次のことが成り立つ[*27]。

[*27] 論理式でいうと、$\forall n \in \mathbb{Z}\left[2n\pi < x < (2n+1)\pi \Rightarrow \text{余弦関数}\cos\text{は狭義単調減少する}\right]$ となっていることに注意しよう。特に、$\exists n \in \mathbb{Z}\left[2n\pi < x < (2n+1)\pi\right] \Rightarrow$ 余弦関数 $\cos$ は狭義単調減少する が成り立つ。

- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$2n\pi < x < (2n+1)\pi$ が成り立つなら、余弦関数 cos は狭義単調減少する。
- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\pi + 2n\pi < x < \pi + (2n+1)\pi$ が成り立つなら、余弦関数 cos は狭義単調増加する。
- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$ が成り立つなら、正弦関数 sin は狭義単調増加する。
- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + (2n+1)\pi$ が成り立つなら、正弦関数 sin は狭義単調減少する。

証明. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つなら、$0 < x < 2$ を満たし、$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し、次の通りになるので、

$$\frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} < \frac{2^2}{2 \cdot 3} < 1$$

次のようになる。

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\frac{(-1)^{4n} x^{4n+1}}{(4n+1)!} + \frac{(-1)^{4n+3} x^{4n+3}}{(4n+3)!} \right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} \right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} \right) > 0
\end{aligned}$$

したがって、定理 2.3.8、定理 3.1.17 より次のようになるので、

$$0 > -\sin x = \frac{d}{dx} \cos x$$

余弦関数 cos は狭義単調減少する。また、$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ が成り立つなら、三角関数の加法定理より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \cos\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{2} \text{-} \sin\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{\pi}{2} \\
&= \cos\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{2} \text{-} \sin\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{\pi}{2} \\
&= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned}$$

このとき、次のようになり、

$$\frac{d}{d\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \left(-\sin\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

余弦関数 cos は区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で狭義単調減少するので、次式が成り立つ。

$$-1 < \frac{d}{d\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \left(-\sin\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2} \right) < 0$$

したがって、余弦関数 cos は狭義単調減少する。以上より、$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つなら、余弦関数 cos は狭義単調減少する。あとは定理 3.1.21 より次のことが成り立つ。

- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$2n\pi < x < (2n+1)\pi$ が成り立つなら、余弦関数 cos は狭義単調減少する。
- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\pi + 2n\pi < x < \pi + (2n+1)\pi$ が成り立つなら、余弦関数 cos は狭義単調増加する。

また、定理 3.1.20 より次のことが成り立つ。

- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$ が成り立つなら、正弦関数 sin は狭義単調増加する。
- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + (2n+1)\pi$ が成り立つなら、正弦関数 sin は狭義単調減少する。

□

定理 3.1.23. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対し、次のことが成り立つ[*28]。

$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}[x = \pm y + 2n\pi]$$
$$\sin x = \sin y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\left[x = \pm\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$$

証明. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対し、ある整数 n が存在して $x = \pm y + 2n\pi$ が成り立つなら、定理 3.1.11、定理 3.1.21 より次のようになる。

$$\cos x = \cos(\pm y + 2n\pi) = \cos(\pm y) = \cos y$$

逆に、任意の整数 n に対し、$x \neq \pm y + 2n\pi$ が成り立つとする。このとき、$\exists m, n \in \mathbb{Z}$ に対し、$x, y + 2n\pi \in [m\pi, (m+1)\pi)$ または $x, -y + 2n\pi \in [m\pi, (m+1)\pi)$ が成り立つことになる[*29]。$x, y + 2n\pi \in [m\pi, (m+1)\pi)$ のとき、定理 3.1.22 より余弦関数 cos が区間 $[m\pi, (m+1)\pi)$ に制限された関数は狭義単調増加する、または、狭義単調減少するので、$x \leqslant y + 2n\pi$ が成り立つなら、$\cos x \leqslant \cos(y + 2n\pi) = \cos y$ または $\cos x \geqslant \cos(y + 2n\pi) = \cos y$ が成り立つ。いづれにしても、$\cos x \neq \cos y$ が成り立つ。$x, y + 2n\pi \in [m\pi, (m+1)\pi)$ のとき、定理 3.1.11 より同様にして、$\cos x \neq \cos(-y) = \cos y$ が成り立つ。いづれにしても、任意の整数 n に対し、$x \neq \pm y + 2n\pi$ が成り立つなら、$\cos x \neq \cos y$ が成り立つ。以上、対偶律よりある整数 n が存在して $z = \pm w + 2n\pi$ が成り立つならそのときに限り、$\cos x = \cos y$ が成り立つ。

ある整数 n が存在して $x = \pm\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ が成り立つなら、定理 3.1.11、定理 3.1.20、定理 3.1.21 より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(\pm\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \\
&= \sin\left(\pm\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \cos\left(\mp\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y
\end{aligned}$$

[*28] なお、$\sin z = \cos w$ ときたら、定理 3.1.19 を使うとよいかと。

[*29] 誰か分かりやすい説明お願いします!

逆に、$\sin x = \sin y$ が成り立つならそのときに限り、定理 3.1.20 より $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ が成り立つ。ここで、上記の議論により $\exists n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\frac{\pi}{2} - x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + 2n\pi$ が成り立つ。ここで、両辺に -1 をかけ左辺の $\frac{\pi}{2}$ を移項することで、$x = \pm\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ が得られる。

以上より、次のことが成り立つことが示された。

$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}[x = \pm y + 2n\pi]$$
$$\sin x = \sin y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\left[x = \pm\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$$

□

定理 3.1.24. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、次式が成り立つ[*30]。

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

証明. 定理 3.1.22 より $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、次のことが成り立つ。

- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$2n\pi < x < (2n+1)\pi$ が成り立つなら、余弦関数 cos は狭義単調減少する。
- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\pi + 2n\pi < x < \pi + (2n+1)\pi$ が成り立つなら、余弦関数 cos は狭義単調増加する。

このとき、$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\cos 2n\pi = 1$ が成り立つかつ、$\cos(\pi + 2n\pi) = -1$ が成り立つので、$-1 \leq \cos x \leq 1$ が成り立つ。定理 3.1.20 より同様に $-1 \leq \sin x \leq 1$ も成り立つ。 □

定義 3.1.6. 関数たち cot、tan、cosec、sec が次のように定義される。

- 次式のように関数 cot が定義される。その関数を余接関数という。

$$\cot : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \frac{\cos z}{\sin z}$$

- 次式のように関数 tan が定義される。その関数を正接関数という。

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}$$

- 次式のように関数 cosec が定義される。その関数を余割関数という。

$$\mathrm{cosec} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \frac{1}{\sin z}$$

- 次式のように関数 sec が定義される。その関数を正割関数という。

$$\sec : \mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \frac{1}{\cos z}$$

定理 3.1.25. このとき、$\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式たちが成り立つ。

$$\cot(-z) = -\cot z$$
$$\tan(-z) = -\tan z$$

証明. 定理 3.1.11 より明らかである。 □

[*30] 定理 3.1.13 と Euler の公式による三角不等式と絶対値を使った証明もいけそう。

定理 3.1.26. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\cot z &= \frac{i \exp iz + i \exp(-iz)}{\exp iz - \exp(-iz)}\\
\tan z &= \frac{\exp iz - \exp(-iz)}{i \exp iz + i \exp(-iz)}
\end{aligned}$$

証明. 定理 3.1.14 より明らかである。 □

定理 3.1.27. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、定義されることができるかぎり次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&1 + \cot^2 z = \frac{1}{\sin^2 z} = \mathrm{cosec}^2 z\\
&1 + \tan^2 z = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z\\
&\cot z \tan z = 1
\end{aligned}$$

証明. 定義と定理 3.1.15 より明らかである。 □

定理 3.1.28 (三角関数の加法定理)**.** $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、定義されることができるかぎり次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\cot(z \pm w) &= \frac{\cot z \cot w \mp 1}{\cot w \pm \cot z}\\
\tan(z \pm w) &= \frac{\tan z \pm \tan w}{1 \mp \tan z \tan w}
\end{aligned}$$

この定理も三角関数の加法定理という。

証明. 定理 3.1.16 より $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、定義されることができるかぎり次のようになる。

$$\begin{aligned}
\cot(z \pm w) &= \frac{\cos(z \pm w)}{\sin(z \pm w)}\\
&= \frac{\cos z \cos w \mp \sin z \sin w}{\sin z \cos w \pm \cos z \sin w}\\
&= \frac{\cot z \cot w \mp 1}{\cot w \pm \cot z}\\
\tan(z \pm w) &= \frac{\sin(z \pm w)}{\cos(z \pm w)}\\
&= \frac{\sin z \cos w \pm \cos z \sin w}{\cos z \cos w \mp \sin z \sin w}\\
&= \frac{\tan z \pm \tan w}{1 \mp \tan z \tan w}
\end{aligned}$$

□

定理 3.1.29. 余接関数、正接関数はその定義域上で正則で次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \cot z &= -\frac{1}{\sin^2 z} = -\left(1 + \cot^2 z\right)\\
\frac{d}{dz} \tan z &= \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z
\end{aligned}$$

証明. 余接関数、正接関数はその定義域上で正則であることは定理 3.1.17 より直ちに分かる。このとき、定理 3.1.15、定理 3.1.27 より次のようになる。

$$\frac{d}{dz} \cot z = \frac{d}{dz} \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{d}{dz}\cos z \sin z - \cos z \frac{d}{dz}\sin z}{\sin^2 z} \\
&= \frac{-\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z} \\
&= -\frac{1}{\sin^2 z} = -\left(1 + \cot^2 z\right) \\
\frac{d}{dz}\tan z &= \frac{d}{dz}\frac{\sin z}{\cos z} \\
&= \frac{\frac{d}{dz}\sin z \cos z - \sin z \frac{d}{dz}\cos z}{\cos^2 z} \\
&= \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} \\
&= \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z
\end{aligned}
$$

□

定理 3.1.30. 集合 $\mathbb{R}$ に制限された余接関数、正接関数について $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$\cot x, \tan x \in \mathbb{R}$ が成り立つ。

証明. 定理 3.1.18 より明らかである。 □

定理 3.1.31. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\dfrac{\pi}{2}$ に対し、次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\cot\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \tan z \\
\tan\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \cot z
\end{aligned}
$$

証明. 定理 3.1.20 より明らかである。 □

定理 3.1.32. $\forall z \in \mathbb{C}\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\cot(z + n\pi) &= \cot z \\
\tan(z + n\pi) &= \tan z
\end{aligned}
$$

証明. 定理 3.1.21 より明らかである。 □

定理 3.1.33. 次のことが成り立つ。

- 集合 $\mathbb{R}$ に制限された余接関数 cot は狭義単調増加する。
- 集合 $\mathbb{R}$ に制限された正接関数 tan は狭義単調減少する。

証明. 定理 3.1.29 より次式が成り立つことによる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cot x &= -\frac{1}{\sin^2 x} < 0 \\
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{1}{\cos^2 x} > 0
\end{aligned}
$$

□

定理 3.1.34. 集合 $\mathbb{R}$ に制限されたとき、$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、次式が成り立つ。

$$
\lim_{x \to n\pi - 0} \cot x = -\infty
$$

$$\lim_{x \to n\pi+0} \cot x = \infty$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+n\pi-0} \tan x = \infty$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+n\pi+0} \tan x = -\infty$$

証明.
$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、次式たちが成り立つことから、

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\cos x} = \infty$$
$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{\sin x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \frac{1}{\cos x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{\sin x} = \infty$$

定理 3.1.32 より次のようになる。

$$\lim_{x \to n\pi-0} \cot x = \lim_{x \to -0} \cot x = \lim_{x \to -0} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to n\pi+0} \cot x = \lim_{x \to +0} \cot x = \lim_{x \to +0} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+n\pi-0} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+n\pi+0} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty$$

□

定理 3.1.35. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対し、次のことが成り立つ[*31]。

$$\cot x = \cot y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}[x = y + n\pi]$$
$$\tan x = \tan y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}[x = y + n\pi]$$

証明. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対し、定理 3.1.16、定理 3.1.23 より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\cot x = \cot y &\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos y}{\sin y} \\
&\Leftrightarrow \cos x \sin y - \sin x \cos y = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(x - y) = \sin 0 \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\left[x - y = \pm\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right] \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}[x - y = 2n\pi, 2n\pi + \pi] \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}[x = y + n\pi]
\end{aligned}$$

また、正接関数についても同様にして示される。 □

[*31] なお、$\sin z = \cos w$ ときたら、定理 3.1.19 を使うとよいかと。

3.1.3 双曲線関数

定理 3.1.36. 冪級数たち $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、これの収束半径は ∞ である。

証明. 冪級数たち $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき、次のようになるので、

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2(n+1))!}} \right| &= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \right| \\
&= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \right| \\
&= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \right| \\
&= \lim_{n \to \infty} (2n+2)(2n+1) = \infty \\
\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2(n+1)+1)!}} \right| &= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2(n+1)+1)!}{(2n+1)!} \right| \\
&= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \right| \\
&= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(2n+1)!} \right| \\
&= \lim_{n \to \infty} (2n+3)(2n+2) = \infty
\end{aligned}$$

$\forall w \in \mathbb{C}$ に対し、冪級数たち $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{w^k}{(2k)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{w^k}{(2k+1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径たちはどちらも ∞ となる。

ここで、$\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$w = z^2$ とおいてもやはりそれらの収束半径たちはどちらも ∞ となる。その冪級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の各項にその複素数 z をかけたとしても、これがその自然数 n に対しての定数となっているので、やはり、その冪級数 $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径は ∞ となる。 □

定義 3.1.7. 冪級数たち $\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$、$\left(\sum_{k \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束半径は ∞ であることにより、$D(0, \infty) = \mathbb{C}$ が成り立ち次式のように関数たち cosh、sinh が定義されることができる。

$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

これらの関数たち cosh、sinh をそれぞれ双曲余弦関数、双曲正弦関数という。

定義 3.1.8. 双曲余弦関数、双曲正弦関数と整数たちの有理式で定義される関数を双曲線関数という。例えば、$\tanh = \dfrac{\sinh}{\cosh} : \mathbb{C} \setminus \{z|\cosh z = 0\} \to \mathbb{C}$ などが挙げられる。

定理 3.1.37. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\cosh iz &= \cos z\\ -i\sinh iz &= \sin z\\ \cos iz &= \cosh z\\ -i\sin iz &= \sinh z\end{aligned}$$

証明. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}\cosh iz &= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{i^{2n}z^{2n}}{(2n)!}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z\\ -i\sinh iz &= -i\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= -i\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{ii^{2n}z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= -i^2\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z\end{aligned}$$

また、このとき、次のようになる。

$$\begin{aligned}\cos iz = \cos(-iz) = \cosh\left(-i^2 z\right) = \cosh z\\ -i\sin iz = i\sin(-iz) = i\left(-i\sinh\left(-i^2 z\right)\right) = -i^2\sinh z = \sinh z\end{aligned}$$

□

定理 3.1.38. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式たちが成り立つ。

$$\begin{aligned}\cosh 0 &= 1\\ \sinh 0 &= 0\\ \cosh(-z) &= \cosh z\\ \sinh(-z) &= -\sinh z\end{aligned}$$

証明. 定理 3.1.11 と定理 3.1.37 より明らかである。 □

定理 3.1.39. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}\\ \sinh z &= \frac{\exp z - \exp(-z)}{2}\end{aligned}$$

証明. 定理 3.1.14 と定理 3.1.37 より次のようになる。

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cos iz\\ &= \frac{\exp i^2 z + \exp\left(-i^2 z\right)}{2}\\ &= \frac{\exp(-z) + \exp z}{2}\\ &= \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}\\ \sinh z &= -i \sin iz\\ &= -i\frac{\exp i^2 z - \exp\left(-i^2 z\right)}{2i}\\ &= \frac{-\exp(-z) + \exp z}{2}\\ &= \frac{\exp z - \exp(-z)}{2}\end{aligned}$$

□

定理 3.1.40. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

証明. 定理 3.1.15 と定理 3.1.37 より次のようになる。

$$\begin{aligned}\cosh^2 z - \sinh^2 z &= \cosh^2 z + i^2 (-\sinh z)^2\\ &= \cosh^2 z + (-i \sinh z)^2\\ &= \cos^2 iz + (-i(-i \sin iz))^2\\ &= \cos^2 iz + i^4 \sin^2 iz\\ &= \cos^2 iz + \sin^2 iz = 1\end{aligned}$$

□

定理 3.1.41. 双曲余弦関数、双曲正弦関数は集合 $\mathbb{C}$ 上で正則で次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\cosh z &= \sinh z\\ \frac{d}{dz}\sinh z &= \cosh z\end{aligned}$$

証明. 双曲余弦関数、双曲正弦関数は集合 $\mathbb{C}$ 上で正則であることは定理 2.3.7 より直ちに分かる。このとき、項別微分より次のようになる。

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \frac{d}{dz}\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dz}\left(1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= \frac{d}{dz}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} 2n\frac{z^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^{2(n-1)+1}}{(2(n-1)+1)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh z \\
\frac{d}{dz}\sinh z &= \frac{d}{dz}\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{d}{dz}\left(1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\
&= \frac{d}{dz}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (2n+1)\frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cosh z
\end{aligned}
$$

□

定理 3.1.42. 集合 $\mathbb{R}$ に制限された双曲余弦関数、双曲正弦関数について $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$\cosh x, \sinh x \in \mathbb{R}$ が成り立つ。

証明. 定理 3.1.7、定理 3.1.39 より明らかである。 □

定理 3.1.43. 次のことが成り立つ。

- $0 < x$ が成り立つなら、双曲余弦関数 cosh は狭義単調増加する。
- $x < 0$ が成り立つなら、双曲余弦関数 cosh は狭義単調減少する。
- $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$1 \leq \cosh x$ が成り立つ。
- $x \in \mathbb{R}$ が成り立つなら、双曲正弦関数 sinh は狭義単調増加する。

証明. 定理 3.1.39、定理 3.1.41 より $0 < x$ が成り立つなら、$1 < \exp x$ が成り立つことにより次のようになるので、

$$
\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2} = \frac{\exp x - \frac{1}{\exp x}}{2} > 0
$$

双曲余弦関数 cosh は狭義単調増加する。同様にして、$x < 0$ が成り立つなら、双曲余弦関数 cosh は狭義単調

減少する。上記の議論により $\cosh 0 = 1$ が成り立つので、$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$1 \leq \cosh x$ が成り立つ。

定理 3.1.39、定理 3.1.41 より $x \in \mathbb{R}$ が成り立つなら、次のようになるので、

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2} > 0$$

双曲正弦関数 cos は狭義単調増加する。 □

定義 3.1.9. 関数たち coth、tanh が次のように定義される。

- 次式のように関数 coth が定義される。その関数を双曲余接関数という。

$$\coth : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi i \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

- 次式のように関数 tanh が定義される。その関数を双曲正接関数という。

$$\tanh : \mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi i}{2} + \mathbb{Z}\pi i\right) \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

定理 3.1.44. 双曲余接関数、双曲正接関数はその定義域上で正則で次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dz}\coth z = -\frac{1}{\sinh^2 z}$$
$$\frac{d}{dz}\mathrm{tanh} z = \frac{1}{\cosh^2 z}$$

証明. 双曲余接関数、双曲正接関数はその定義域上で正則であることは定理 3.1.17 より直ちに分かる。このとき、定理 3.1.40、定理 3.1.41 より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\coth z &= \frac{d}{dz}\frac{\cosh z}{\sinh z} \\
&= \frac{\frac{d}{dz}\cosh z \sinh z - \cos z \frac{d}{dz}\sinh z}{\sinh^2 z} \\
&= \frac{\sinh^2 z - \cosh^2 z}{\sinh^2 z} \\
&= -\frac{1}{\sinh^2 z} \\
\frac{d}{dz}\mathrm{tanh} z &= \frac{d}{dz}\frac{\sinh z}{\cosh z} \\
&= \frac{\frac{d}{dz}\sinh z \cosh z - \sinh z \frac{d}{dz}\cosh z}{\cosh^2 z} \\
&= \frac{\cosh^2 z - \sinh^2 z}{\cosh^2 z} \\
&= \frac{1}{\cosh^2 z}
\end{aligned}$$

□

定理 3.1.45. 集合 $\mathbb{R}$ に制限された双曲余接関数、双曲正接関数について $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$\coth x, \mathrm{tanh} x \in \mathbb{R}$ が成り立つ。

証明. 定理 3.1.7、定理 3.1.42 より明らかである。 □

定理 3.1.46. 次のことが成り立つ。

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が成り立つなら、双曲余接関数 coth は狭義単調減少する。
- $x \in \mathbb{R}$ が成り立つなら、双曲正接関数 tanh は狭義単調増加する。
- $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$-1 < \mathrm{tanh} x < 1$ が成り立つ。

証明. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が成り立つなら、定理 3.1.43 より $\dfrac{d}{dx} \coth x = -\dfrac{1}{\sinh^2 x} < 0$ が成り立つので、双曲余接関数 $coth$ は狭義単調減少する。

$x \in \mathbb{R}$ が成り立つなら、定理 3.1.43 より $\dfrac{d}{dx} \mathrm{tanh} x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0$ が成り立つので、双曲正接関数 tanh は狭義単調増加する。さらに、次式たちが成り立つので、

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \mathrm{tanh} x &= \lim_{x \to \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\exp x - \exp(-x)}{\exp x + \exp(-x)} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{\exp(-x)}{\exp x}}{1 + \frac{\exp(-x)}{\exp x}} \\
&= \frac{1 - \lim_{x \to \infty} \frac{\exp(-x)}{\exp x}}{1 + \lim_{x \to \infty} \frac{\exp(-x)}{\exp x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \\
\lim_{x \to -\infty} \mathrm{tanh} x &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\exp x - \exp(-x)}{\exp x + \exp(-x)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\exp x}{\exp(-x)} - 1}{\frac{\exp x}{\exp(-x)} + 1} \\
&= \frac{\lim_{x \to -\infty} \frac{\exp x}{\exp(-x)} - 1}{\lim_{x \to -\infty} \frac{\exp x}{\exp(-x)} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1
\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$-1 < \mathrm{tanh} x < 1$ が成り立つ。 □

3.1.4 自然な対数関数

定理 3.1.47. 次式のような関数 exp は全単射である。

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; x \mapsto \exp x$$

証明. 定理 3.1.8 より上の関数は単射であることが分かる。さらに、定理 3.1.9 よりその関数の値域は $\mathbb{R}^+$ である。よって、その関数は全単射である。 □

定義 3.1.10. 次式のような関数 exp の逆関数が定理 3.1.47 より存在することになる。

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; x \mapsto \exp x$$

その逆関数を自然な対数関数といい、log、ln などと書く、即ち、次式のように定義される。

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; x \mapsto \exp^{-1} x$$

定理 3.1.48. このとき、次式が成り立つ。

$$\ln 1 = 0$$
$$\ln e = 1$$

証明. 次のようになることによる。

$$\ln 1 = \ln \exp 0 = 0$$
$$\ln e = \ln \exp 1 = 1$$

□

定理 3.1.49. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つ。

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$
$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

証明. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ に対し、次のようになることによる。

$$\ln xy = \ln \exp \ln x \exp \ln y = \ln \exp (\ln x + \ln y) = \ln x + \ln y$$
$$\ln \frac{1}{x} = \ln \frac{1}{\exp \ln x} = \ln \exp (-\ln x) = -\ln x$$

□

定理 3.1.50. 自然な対数関数 $\ln$ はその定義域 $\mathbb{R}^+$ で微分可能で次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

証明. 逆関数の微分により次のようになる。

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\frac{dx}{d \ln x}} = \frac{1}{\frac{d}{d \ln x} \exp \ln x} = \frac{1}{\exp \ln x} = \frac{1}{x}$$

□

定理 3.1.51. 自然な対数関数 $\ln$ はその定義域 $\mathbb{R}^+$ で狭義単調増加する。

証明. 定理 3.1.50 より自然な対数関数 $\ln$ はその定義域 $\mathbb{R}^+$ で微分可能で、$\forall x \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} > 0$$

よって、自然な対数関数 $\ln$ はその定義域 $\mathbb{R}^+$ で狭義単調増加する。 □

定理 3.1.52. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$
$$\lim_{x \to +0} \ln x = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$
$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$$
$$\lim_{x \to +0} x^n \ln x = 0$$

証明. $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\exp\varepsilon = \delta$ とすれば、$\delta < x$ が成り立つなら、定理 3.1.50 より $\varepsilon = \ln\delta < \ln x$ が成り立つので、$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ が成り立つ。また、$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\exp(-\varepsilon) = \delta$ とすれば、$x < \delta$ が成り立つなら、定理 3.1.50 より $\ln x < \ln\delta = -\varepsilon$ が成り立つことにより、$\lim_{x\to+0} \ln x = -\infty$ が成り立つ。

また、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、次のようになることから、

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} &= \lim_{\ln x\to\infty} \frac{\ln x}{\exp^n \ln x}\\
&= \lim_{\ln x\to\infty} \frac{1}{\frac{\exp\ln x}{\ln x}} \frac{1}{\exp^{n-1} \ln x}\\
&= \lim_{\ln x\to\infty} \frac{1}{\frac{\exp\ln x}{\ln x}} \lim_{\ln x\to\infty} \frac{1}{\exp^{n-1} \ln x}\\
&= \lim_{\frac{\exp\ln x}{\ln x}\to\infty} \frac{1}{\frac{\exp\ln x}{\ln x}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp^{n-1} \ln x} = 0\\
\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^n} &= \lim_{\ln x\to-\infty} \frac{\ln x}{\exp^n \ln x}\\
&= \lim_{\ln x\to-\infty} \ln x \lim_{\ln x\to-\infty} \frac{1}{\exp^n \ln x}\\
&= -\infty \cdot \infty = -\infty\\
\lim_{x\to+0} x^n \ln x &= \lim_{\ln x\to-\infty} \exp^n \ln x \cdot \ln x\\
&= \lim_{\ln x\to-\infty} \exp^{n-1} \ln x \lim_{\ln x\to-\infty} \exp\ln x \cdot \ln x = 0 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} &= 0\\
\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^n} &= -\infty\\
\lim_{x\to+0} x^n \ln x &= 0
\end{aligned}$$

□

3.1.5 逆三角関数

定理 3.1.53. 次式のような関数たち cos、sin は全単射である。

$$\begin{aligned}
\cos &: [0,\pi] \to [-1,1]; x \mapsto \cos x\\
\sin &: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]; x \mapsto \sin x
\end{aligned}$$

証明. 定理 3.1.22 より上の関数たちは単射であることが分かる。さらに、定理 3.1.24 よりそれらの関数たちの値域はいづれも $[-1,1]$ である。よって、それらの関数たちは全単射である。 □

定義 3.1.11. 次式のような関数たち cos、sin は逆関数が定理 3.1.53 より存在することになる。

$$\begin{aligned}
\cos &: [0,\pi] \to [-1,1]; x \mapsto \cos x\\
\sin &: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]; x \mapsto \sin x
\end{aligned}$$

その逆関数をそれぞれ逆余弦関数、逆正弦関数といい、それぞれ Arccos、Arcsin、Cos^{-1}、Sin^{-1} などと書く、即ち、次式のように定義される。

$$\begin{aligned}\mathrm{Arccos}:[-1,1]\rightarrow[0,\pi];x\mapsto\cos^{-1}x\\ \mathrm{Arcsin}:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];x\mapsto\sin^{-1}x\end{aligned}$$

定理 3.1.54. 逆余弦関数 Arccos、逆正弦関数 Arcsin はそれぞれ開区間 $(-1,1)$、$(-1,1)$ で微分可能で次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\mathrm{Arccos}x&=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ \frac{d}{dx}\mathrm{Arcsin}x&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

証明. 逆関数の微分により逆余弦関数、逆正弦関数の定義域上でそれぞれ $\sin x\geq 0$、$\cos x\geq 0$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\mathrm{Arccos}x&=\frac{1}{\frac{dx}{d\mathrm{Arccos}x}}\\ &=\frac{1}{\frac{d}{d\mathrm{Arccos}x}\cos\mathrm{Arccos}x}\\ &=-\frac{1}{\sin\mathrm{Arccos}x}\\ &=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\mathrm{Arccos}x}}\\ &=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ \frac{d}{dx}\mathrm{Arcsin}x&=\frac{1}{\frac{dx}{d\mathrm{Arcsin}x}}\\ &=\frac{1}{\frac{d}{d\mathrm{Arcsin}x}\sin\mathrm{Arcsin}x}\\ &=\frac{1}{\cos\mathrm{Arcsin}x}\\ &=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\mathrm{Arcsin}x}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

□

定理 3.1.55. 次のことが成り立つ。

- $x\in[-1,1]$ が成り立つなら、逆余弦関数 Arccos は狭義単調減少する。
- $x\in[-1,1]$ が成り立つなら、逆正弦関数 Arcsin は狭義単調増加する。

証明. 定理 3.1.54 より逆余弦関数 Arccos はその開区間 $(-1,1)$ で微分可能で、$\forall x\in(-1,1)$ に対し、次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arccos}x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}<0$$

一方で、$x=\pm 1$ のとき、逆余弦関数の増減から考えれば、よって、逆余弦関数 Arccos はその区間 $[-1,1]$ で狭義単調減少する。

定理 3.1.54 より逆正弦関数 Arcsin はその開区間 $(-1,1)$ で微分可能で、$\forall x \in (-1,1)$ に対し、次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arcsin}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

一方で、$x=\pm 1$ のとき、逆正弦関数の増減から考えれば、よって、逆正弦関数 Arcsin はその区間 $[-1,1]$ で狭義単調増加する。 □

定理 3.1.56. 次式のような関数たち cot、tan は全単射である。

$$\cot:(0,\pi)\to\mathbb{R};x\mapsto\cot x$$
$$\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R};x\mapsto\tan x$$

証明. 定理 3.1.33 より上の関数たちは単射であることが分かる。さらに、定理 3.1.34 よりそれらの関数たちの値域はいづれも $\mathbb{R}$ である。よって、それらの関数たちは全単射である。 □

定義 3.1.12. 次式のような関数たち cos、sin は逆関数が定理 3.1.56 より存在することになる。

$$\cot:(0,\pi)\to\mathbb{R};x\mapsto\cot x$$
$$\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R};x\mapsto\tan x$$

その逆関数をそれぞれ逆余接関数、逆正接関数といい、それぞれ Arccot、Arctan、Cot^{-1}、Tan^{-1} などと書く、即ち、次式のように定義される。

$$\mathrm{Arccot}:\mathbb{R}\to(0,\pi);x\mapsto\cot^{-1}x$$
$$\mathrm{Arctan}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right);x\mapsto\tan^{-1}x$$

定理 3.1.57. 逆余接関数 Arccot、逆正接関数 Arctan はその定義域 $\mathbb{R}$ で微分可能で次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arccot}x = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}x = \frac{1}{1+x^2}$$

証明. それぞれ $\sin x\neq 0$、$\cos x\neq 0$ のとき、逆関数の微分により次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\mathrm{Arccot}x &= \frac{1}{\frac{dx}{d\mathrm{Arccot}x}}\\
&= \frac{1}{\frac{d}{d\mathrm{Arccot}x}\cot\mathrm{Arccot}x}\\
&= -\frac{1}{1+\cot^2\mathrm{Arccot}x}\\
&= -\frac{1}{1+x^2}\\
\frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}x &= \frac{1}{\frac{dx}{d\mathrm{Arctan}x}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\frac{d}{d\mathrm{Arctan}x}\tan\mathrm{Arctan}x}\\
&= \frac{1}{1+\tan^2\mathrm{Arctan}x}\\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

□

定理 3.1.58. 次のことが成り立つ。

- $x \in \mathbb{R}$ が成り立つなら、逆余接関数 Arccot は狭義単調減少する。
- $x \in \mathbb{R}$ が成り立つなら、逆正接関数 Arctan は狭義単調増加する。

証明. 定理 3.1.57 より逆余接関数 Arccot はその定義域 $\mathbb{R}$ で微分可能で、$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arccot}x = -\frac{1}{1+x^2} < 0$$

よって、逆余接関数 Arccot はその定義域 $\mathbb{R}$ で狭義単調減少する。

定理 3.1.57 より逆正接関数 Arctan はその定義域 $\mathbb{R}$ で微分可能で、$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}x = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

よって、逆正接関数 Arctan はその定義域 $\mathbb{R}$ で狭義単調増加する。 □

定理 3.1.59. 次式が成り立つ。

$$
\begin{gathered}
\lim_{x\to-\infty}\mathrm{Arccot}x = \pi\\
\lim_{x\to-\infty}\mathrm{Arctan}x = -\frac{\pi}{2}\\
\lim_{x\to\infty}\mathrm{Arccot}x = 0\\
\lim_{x\to\infty}\mathrm{Arctan}x = \frac{\pi}{2}
\end{gathered}
$$

証明. 定理**??**より逆余接関数 Arccot は単調減少し定義より有界であるので、$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{Arccot}x = \sup V(\mathrm{Arccot})$ が成り立つ。このとき、$V(\mathrm{Arccot}) = (0,\pi)$ が成り立つので、$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{Arccot}x = \pi$ が成り立つ。以下、同様にして示される。 □

3.1.6 逆双曲線関数

定理 3.1.60. 次式のような関数たち cosh、sinh は全単射である。

$$
\begin{gathered}
\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty); x \mapsto \cosh x\\
\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \sinh x
\end{gathered}
$$

証明. 定理 3.1.43 より上の関数たちは単射であることが分かる。さらに、定理 3.1.39 より次式が成り立つので、

$$\lim_{x\to\infty}\cosh x = \lim_{x\to\infty}\frac{\exp x + \exp(-x)}{2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\exp x + \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\exp x} = \infty$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\sinh x &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\exp x-\exp(-x)}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\exp x-\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\exp x}=-\infty\\
\lim_{x\to\infty}\sinh x &= \lim_{x\to\infty}\frac{\exp x-\exp(-x)}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\exp x-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\exp x}=\infty
\end{aligned}
$$

中間値の定理よりこれらの関数たち cosh、sinh の値域がそれぞれ $[0,\infty)$、$\mathbb{R}$ と与えられる。よって、それらの関数たちは全単射である。 □

定義 3.1.13. 次式のような関数たち cosh、sinh は逆関数が定理 3.1.60 より存在することになる。

$$
\begin{aligned}
\cosh &: [0,\infty)\to[1,\infty); x\mapsto \cosh x\\
\sinh &: \mathbb{R}\to\mathbb{R}; x\mapsto \sinh x
\end{aligned}
$$

その逆関数をそれぞれ逆双曲余弦関数、逆双曲正弦関数といい、それぞれ Arccosh、Arcsinh、$Cosh^{-1}$、$Sinh^{-1}$ などと書く、即ち、次式のように定義される。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Arccosh} &: [1,\infty)\to[0,\infty); x\mapsto \cosh^{-1}x\\
\mathrm{Arcsinh} &: \mathbb{R}\to\mathbb{R}; x\mapsto \sinh^{-1}x
\end{aligned}
$$

定理 3.1.61. 逆双曲余弦関数 Arccosh、逆双曲正弦関数 Arcsinh について、次のことが成り立つ。

- $\forall x\in[1,\infty)$ に対し、次式が成り立つ。

$$\mathrm{Arccosh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

- $\forall x\in\mathbb{R}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\mathrm{Arcsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

証明. 逆双曲余弦関数 Arccosh、逆双曲正弦関数 Arcsinh について、$\forall x\in[1,\infty)$ に対し、定理 3.1.60 より $x=\cosh y$ とおくことができて、そうすると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
x=\cosh y &\Leftrightarrow x=\frac{\exp y+\exp(-y)}{2}\\
&\Leftrightarrow \exp 2y-2x\exp y+1=0\\
&\Leftrightarrow (\exp y-x)^2=x^2-1\\
&\Leftrightarrow \exp y=x\pm\sqrt{x^2-1}
\end{aligned}
$$

ここで、定理 3.1.60 より $y\in[0,\infty)$ が成り立つので、$1\leq\exp y$ が成り立つことに注意すれば、$\exp y=x-\sqrt{x^2-1}$ が成り立つと仮定すると、$1\leq x-\sqrt{x^2-1}$ が成り立つことになる。ここで、$1<x$ が成り立つとしても一般性は失われないことに注意すれば、したがって、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
1\leq x-\sqrt{x^2-1} &\Leftrightarrow 0\leq\sqrt{x^2-1}\leq x-1\\
&\Leftrightarrow x^2-1\leq x^2-2x+1\\
&\Leftrightarrow 2x\leq 2\Leftrightarrow x\leq 1
\end{aligned}
$$

これにより、$\exp y=x+\sqrt{x^2-1}$ が成り立つことになる。あとは、対数関数の定義より明らかである。

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、定理 3.1.60 より $x = \sinh y$ とおくことができて、そうすると、次のようになる。

$$\begin{aligned} x = \sinh y &\Leftrightarrow x = \frac{\exp y - \exp(-y)}{2} \\ &\Leftrightarrow \exp 2y - 2x \exp y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\exp y - x)^2 = x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow \exp y = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

ここで、定理 3.1.60 より $y \in \mathbb{R}$ が成り立つので、$0 < \exp y$ が成り立つことに注意すれば、$\exp y = x - \sqrt{x^2 + 1}$ が成り立つと仮定すると、$0 < x - \sqrt{x^2 + 1}$ が成り立つことになる。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 < x - \sqrt{x^2 - 1} &\Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} < x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 < x^2 \\ &\Leftrightarrow -1 < 0 \end{aligned}$$

これにより、$\exp y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ が成り立つことになる。あとは、対数関数の定義より明らかである。 □

定理 3.1.62. 逆双曲余弦関数 Arccosh、逆双曲正弦関数 Arcsinh はそれぞれ開区間 $\mathbb{R}^+$、$\mathbb{R}$ で微分可能で次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathrm{Arccosh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ \frac{d}{dx} \mathrm{Arcsinh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

証明. 定理 3.1.61 より次のように計算される。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathrm{Arccosh} x &= \frac{d}{dx} \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \frac{d}{dx} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \frac{d}{dx} \left(x^2 - 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ \frac{d}{dx} \mathrm{Arcsinh} x &= \frac{d}{dx} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{d}{dx} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \frac{d}{dx} \left(x^2 + 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

□

定理 3.1.63. 次のことが成り立つ。

- $x \in [0, \infty)$ が成り立つなら、逆双曲余弦関数 Arccosh は狭義単調増加する。
- $x \in \mathbb{R}$ が成り立つなら、逆双曲正弦関数 Arcsinh は狭義単調増加する。

証明. 定理 3.1.62 より逆双曲余弦関数 Arccosh はその開区間 $\mathbb{R}^+$ で微分可能で、$\forall x \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arccosh}x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0$$

一方で、$x = 1$ のとき、逆双曲余弦関数の増減から考えれば、よって、逆双曲余弦関数 Arccosh はその区間 $[-1, 1]$ で狭義単調減少する。

定理 3.1.62 より逆双曲正弦関数 Arcsinh はその開区間 $\mathbb{R}$ で微分可能で、$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arcsinh}x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$$

よって、逆双曲正弦関数 Arcsinh はその区間 $\mathbb{R}$ で狭義単調増加する。 □

定理 3.1.64. 次式のような関数たち coth、tanh は全単射である。

$$\begin{aligned}
&\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (-\infty, -1) \cup (1, \infty); x \mapsto \coth x \\
&\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1); x \mapsto \mathrm{tanh}x
\end{aligned}$$

証明. 定理 3.1.46 より上の関数たちは単射であることが分かる。さらに、定義と定理 3.1.39 より次式が成り立つので、

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \coth x &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\exp x + \exp(-x)}{\exp x - \exp(-x)} \\
&= -\lim_{x \to -\infty} \frac{\exp(-2x) + 1}{\exp(-2x) - 1} \\
&= -\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{\exp(-2x) - 1}\right) \\
&= -1 - \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{\exp(-2x) - 1} = -1 \\
\lim_{x \to -0} \coth x &= \lim_{x \to -0} \frac{\cosh x}{\sinh x} \\
&= \lim_{x \to -0} \frac{\exp x + \exp(-x)}{\exp x - \exp(-x)} \\
&= -\lim_{x \to -0} \frac{\exp(-2x) + 1}{\exp(-2x) - 1} \\
&= -\lim_{x \to -0} (\exp(-2x) + 1) \lim_{x \to -0} \frac{1}{\exp(-2x) - 1} \\
&= -2 \cdot \infty = -\infty \\
\lim_{x \to +0} \coth x &= \lim_{x \to +0} \frac{\cosh x}{\sinh x} \\
&= \lim_{x \to +0} \frac{\exp x + \exp(-x)}{\exp x - \exp(-x)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x \to +0} \frac{\exp 2x + 1}{\exp 2x - 1} \\
&= \lim_{x \to +0} (\exp 2x + 1) \lim_{x \to +0} \frac{1}{\exp 2x - 1} \\
&= 2 \cdot \infty = \infty \\
\lim_{x \to \infty} \coth x &= \lim_{x \to \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\exp x + \exp(-x)}{\exp x - \exp(-x)} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\exp 2x + 1}{\exp 2x - 1} \\
&= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{\exp 2x - 1} \right) \\
&= 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\exp 2x - 1} = 1 \\
\lim_{x \to -\infty} \tanh x &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\exp x - \exp(-x)}{\exp x + \exp(-x)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\exp 2x - 1}{\exp 2x + 1} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{\exp 2x + 1} \right) \\
&= 1 - \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{\exp 2x + 1} = 1 - \frac{2}{1} = -1 \\
\lim_{x \to \infty} \tanh x &= \lim_{x \to \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\exp x - \exp(-x)}{\exp x + \exp(-x)} \\
&= -\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(-2x) - 1}{\exp(-2x) + 1} \\
&= -\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{2}{\exp(-2x) + 1} \right) \\
&= -1 + \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\exp(-2x) + 1} = -1 + \frac{2}{1} = 1
\end{aligned}
$$

中間値の定理よりこれらの関数たち coth、tanh の値域がそれぞれ $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$、$(-1, 1)$ と与えられる。よって、それらの関数たちは全単射である。 □

定義 3.1.14. 次式のような関数たち coth、tanh は逆関数が定理 3.1.64 より存在することになる。

$$
\begin{aligned}
\coth &: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (-\infty, -1) \cup (1, \infty); x \mapsto \coth x \\
\tanh &: \mathbb{R} \to (-1, 1); x \mapsto \tanh x
\end{aligned}
$$

その逆関数をそれぞれ逆双曲余接関数、逆双曲正接関数といい、それぞれ Arccoth、Arctanh、Coth^{-1}、Tanh^{-1} などと書く、即ち、次式のように定義される。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Arccoth} &: (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}; x \mapsto \coth^{-1} x \\
\mathrm{Arctanh} &: (-1, 1) \to \mathbb{R}; x \mapsto \tanh^{-1} x
\end{aligned}
$$

定理 3.1.65. 逆双曲余接関数 Arccoth、逆双曲正接関数 Arctanh について、次のことが成り立つ。

- $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ に対し、次式が成り立つ。

$$\mathrm{Arccoth}x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

- $\forall x \in (-1, 1)$ に対し、次式が成り立つ。

$$\mathrm{Arctanh}x = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{x+1}{x-1} \right)$$

証明. 逆双曲余接関数 Arccoth、逆双曲正接関数 Arctanh について、$\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ に対し、定理 3.1.64 より $x = \coth y$ とおくことができて、そうすると、$x - 1 \neq 0$ より次のようになる。

$$\begin{aligned} x = \coth y &\Leftrightarrow x = \frac{\exp y + \exp(-y)}{\exp y - \exp(-y)} = \frac{\exp 2y + 1}{\exp 2y - 1} \\ &\Leftrightarrow x \exp 2y - x = \exp 2y + 1 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \exp 2y - x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \exp 2y = \frac{x+1}{x-1} \\ &\Leftrightarrow 2y = \ln \frac{x+1}{x-1} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

同様にして、次のようになる。

$$\begin{aligned} x = \mathrm{tanh}y &\Leftrightarrow x = \frac{\exp y - \exp(-y)}{\exp y + \exp(-y)} = \frac{\exp 2y - 1}{\exp 2y + 1} \\ &\Leftrightarrow x \exp 2y + x = \exp 2y - 1 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \exp 2y + x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \exp 2y = -\frac{x+1}{x-1} \\ &\Leftrightarrow 2y = \ln \left(-\frac{x+1}{x-1} \right) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{x+1}{x-1} \right) \end{aligned}$$

□

定理 3.1.66. 逆双曲余接関数 Arccoth、逆双曲正接関数 Arctanh はそれらの定義域で微分可能で次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx} \mathrm{Arccoth}x = -\frac{1}{x^2 - 1}$$
$$\frac{d}{dx} \mathrm{Arctanh}x = \frac{1}{x^2 - 1}$$

証明. 定理 3.1.65 より次のように計算される。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathrm{Arccoth}x &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{x-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x-1}{x+1} \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{x-1}{x+1}\frac{-2}{(x-1)^2} \\
&= -\frac{1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{x^2-1} \\
\frac{d}{dx}\mathrm{Arctanh}x &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln\left(-\frac{x+1}{x-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{x-1}{x+1}\right)\left(-\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{x-1}{x+1}\right)\frac{2}{(x-1)^2} \\
&= -\frac{1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{x^2-1}
\end{aligned}
$$

□

定理 3.1.67. 次のことが成り立つ。

- $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ が成り立つなら、逆双曲余接関数 Arccoth は狭義単調減少する。
- $x \in (-1,1)$ が成り立つなら、逆双曲正接関数 Arctanh は狭義単調増加する。

証明. 定理 3.1.66 より逆双曲余弦関数 Arccosh はその開区間 $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ で微分可能で、$\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ に対し、次のようになるので、

$$
\begin{aligned}
x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) &\Leftrightarrow x < -1 \vee 1 < x \\
&\Leftrightarrow 1 < |x| \Leftrightarrow 1 < x^2 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 1
\end{aligned}
$$

次式が成り立つ。

$$
\frac{d}{dx}\mathrm{Arccoth}x = -\frac{1}{x^2-1} < 0
$$

よって、逆双曲余接関数 Arccoth はその開区間 $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ で狭義単調減少する。

定理 3.1.66 より逆双曲正接関数 Arctanh はその開区間 $(-1,1)$ で微分可能で、$\forall x \in (-1,1)$ に対し、次のようになるので、

$$
\begin{aligned}
x \in (-1,1) &\Leftrightarrow -1 < x < 1 \\
&\Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0
\end{aligned}
$$

次式が成り立つ。

$$
\frac{d}{dx}\mathrm{Arctanh}x = -\frac{1}{x^2-1} > 0
$$

よって、逆双曲正接関数 Arctanh はその区間 $(-1,1)$ で狭義単調増加する。 □

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1980. 第 34 刷 p175-240 ISBN978-4-13-062005-5

3.2 極形式

3.2.1 純虚指数函数

極形式を述べる際に自然な指数関数と三角関数との関係を述べた定理たちをまず列挙しておこう。

定理 (Euler の公式 3.1.12 の再掲)**.** $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。これを Euler の公式という。

$$\exp iz = \cos z + i \sin z$$

定理 (de Moivre の公式 3.1.13 の再掲)**.** $\forall z \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{Z}$ に対し、次式が成り立つ。これを de Moivre の公式という。

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz$$

定理 (定理 3.1.14 の再掲)**.** $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{\exp iz + \exp(-iz)}{2}\\ \sin z &= \frac{\exp iz - \exp(-iz)}{2i}\end{aligned}$$

さて、本題を述べよう。

定義 3.2.1. 関数 $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられたとき、$\forall x \in D(f)$ に対し、ある複素数 a が存在して $f(x+a) = f(x)$ が成り立つとき、その関数 f は周期 a の周期関数であるという。文献によっては、その複素数 a が実数のとき、このような実数たちのうち最も小さいものを周期とするものもある。例えば、定理 3.1.21 や定理 3.1.32 で掲げたように余弦関数 cos、正弦関数 sin、正接関数 tan、余接関数 cot はそれぞれ周期 2π、2π、π、π の周期関数である。

定義 3.2.2. 関数 cis が次式のように定義される。

$$\mathrm{cis} : [0, 2\pi) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} ; x \mapsto \exp ix$$

その関数を純虚指数函数という。

定理 3.2.1. 純虚指数函数 cis は連続で全単射である。

証明. 自然な指数関数 exp について、$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、定理 2.3.8 より次式のようになるので、

$$\begin{aligned}\exp ix &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(ix)^n}{n!}\\ &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{i^n x^{n+1}}{(n+1)n!} + \frac{1}{i}\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(ix)^n}{in!} + \frac{x^0}{i0!}\right)\\ &= \frac{1}{i}\frac{d}{dx}\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \exp ix$$

定理 2.1.2 よりしたがって、純虚指数函数 cis は連続である。

ここで、$\forall x \in [0, 2\pi)$ に対し、Euler の公式と定理 3.1.15 より次式が成り立つので、

$$|\mathrm{cis}x|^2 = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$V(\mathrm{cis}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ が成り立つ。さらに、Euler の公式より $\forall x \in [0, \pi]$ に対し、$\sin x \geq 0$ が成り立つので、$V(\mathrm{cis}|[0, \pi]) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \mathrm{Im}z \geq 0\}$ が成り立つ。さらに、余弦関数が単調減少していることにより、その関数 $\mathrm{cis}|[0, \pi]$ は単射である。ここで、$\forall z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \mathrm{Im}z \geq 0\}$ に対し、$-1 \leq \mathrm{Re}z \leq 1$ が成り立つので、中間値の定理より $\mathrm{Re}z = \cos x$ なる実数 x が区間 $[0, \pi]$ に存在し $\mathrm{Im}z = \sin x$ とおかれれば、$0 \leq \sin x$ が成り立ち、したがって、$\mathrm{cis}x = \mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z = z$ が成り立つ。これにより、$z \in V(\mathrm{cis}|[0, \pi])$ が成り立つので、$V(\mathrm{cis}|[0, \pi]) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \mathrm{Im}z \geq 0\}$ が成り立つ。同様にして、その関数 $\mathrm{cis}|[\pi, 2\pi]$ もまた単射で $V(\mathrm{cis}|[\pi, 2\pi]) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \mathrm{Im}z \leq 0\}$ が成り立つ。ここで、$\mathrm{cis}0 = \mathrm{cis}2\pi = 1$ が成り立つので、純虚指数函数 cis は全単射である。 □

定理 3.2.2. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、次のことが成り立つ。

$$\exp z = \exp w \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}[z = w + 2n\pi i]$$

証明. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、ある整数 n が存在して $z = w + 2n\pi i$ が成り立つなら、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\exp z &= \exp(w + 2n\pi i) \\
&= \exp\left(\mathrm{Re}(w) + \left(\mathrm{Im}(w) + 2n\pi\right) i\right) \\
&= \exp \mathrm{Re}(w) \exp\left(\mathrm{Im}(w) + 2n\pi\right) i \\
&= \exp \mathrm{Re}(w) \left(\cos\left(\mathrm{Im}(w) + 2n\pi\right) + i \sin\left(\mathrm{Im}(w) + 2n\pi\right)\right) \\
&= \exp \mathrm{Re}(w) \left(\cos \mathrm{Im}(w) + i \sin \mathrm{Im}(w)\right) \\
&= \exp \mathrm{Re}(w) \exp \mathrm{Im}(w) i \\
&= \exp\left(\mathrm{Re}(w) + \mathrm{Im}(w) i\right) = \exp w
\end{aligned}$$

逆に、$\exp z = \exp w$ が成り立つなら、定理 3.1.4 と定理 3.1.5 より $1 = \exp(z - w)$ が成り立つことになり、したがって、Euler の公式と定理 3.1.15 より $1 = |\exp(z - w)| = \exp \mathrm{Re}(z - w)$ が成り立つ。定理 3.1.18 よりその関数 exp が集合 $\mathbb{R}$ に制限されたとき、その関数 exp は単射であるから、$\mathrm{Re}(z - w) = 0$ が成り立つ。したがって、$1 = \exp(z - w) = \exp \mathrm{Im}(z - w) i$ が成り立つことになり、$\exists n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\mathrm{Im}(z - w) \in [2n\pi, 2(n + 1)\pi)$ が成り立つ。このとき、$\mathrm{Im}(z - w) - 2n\pi \in [0, 2\pi)$ が成り立ち、したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{cis}\left(\mathrm{Im}(z - w) - 2n\pi\right) &= \exp\left(\mathrm{Im}(z - w) - 2n\pi\right) i \\
&= \cos\left(\mathrm{Im}(z - w) - 2n\pi\right) + i \sin\left(\mathrm{Im}(z - w) - 2n\pi\right) \\
&= \cos \mathrm{Im}(z - w) + i \sin \mathrm{Im}(z - w) \\
&= \exp \mathrm{Im}(z - w) i = 1
\end{aligned}$$

定理 3.2.1 より $\mathrm{Im}(z - w) = 2n\pi$ が成り立つので、$\mathrm{Re}(z - w) = 0$ が成り立つことと合わせて $z - w = 2n\pi i$ が成り立つ。 □

3.2.2 極形式

定理 3.2.3. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$z \neq 0$ が成り立つなら、$\exists!\theta \in [0, 2\pi)$ に対し、次式が成り立つ。

$$z = |z| \mathrm{cis}\theta$$

さらにいえば、$\theta = \mathrm{cis}^{-1} \dfrac{z}{|z|}$ が成り立つ。

定義 3.2.3. このようにして複素数 z を表すことを極表示、極形式という。また、このときの実数 $\mathrm{cis}^{-1} \dfrac{z}{|z|}$ をその複素数 z の偏角といい、$\arg z$ と書く、即ち、次式のように定義される。

$$\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow [0, 2\pi); z \mapsto \mathrm{cis}^{-1} \frac{z}{|z|}$$

文献によっては、$\theta' - \mathrm{cis}^{-1} \dfrac{z}{|z|} \in 2\mathbb{Z}\pi$ なる実数たち θ' 全体の集合 $C_{\equiv \bmod 2\mathbb{Z}\pi} \left(\mathrm{cis}^{-1} \dfrac{z}{|z|} \right)$、即ち、集合 $\mathrm{cis}^{-1} \dfrac{z}{|z|} + 2\mathbb{Z}\pi$ の元のことを指すときがある。

証明. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$z \neq 0$ が成り立つなら、$\exists!\theta \in [0, 2\pi)$ に対し、$\dfrac{z}{|z|} \in \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ が成り立つので、定理 3.2.1 より実数 $\mathrm{cis}^{-1} \dfrac{z}{|z|}$ が区間 $[0, 2\pi)$ に一意的に存在し、したがって、次式が成り立つ。

$$z = |z| \frac{z}{|z|} = |z| \mathrm{cis} \mathrm{cis}^{-1} \frac{z}{|z|}$$

□

定理 3.2.4. 次式のような写像 p は全単射であり、

$$p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi); z \mapsto (|z|, \arg z)$$

その逆写像 p^{-1} が次式のように与えられる。

$$p^{-1} : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} ; (r, \theta) \rightarrow r \mathrm{cis}\theta$$

証明. 定理 3.2.3 より次式のように写像 p が定義されることができる。

$$p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi); z \mapsto (|z|, \arg z)$$

$\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し、$z \neq w$ が成り立つとする。$|z| \neq |w|$ が成り立つなら、明らかに $(|z|, \arg z) \neq (|w|, \arg w)$ が成り立つ。一方で、$|z| = |w|$ が成り立つかつ、$\arg z = \arg w$ が成り立つと仮定すると、定義より $\mathrm{cis}^{-1} \dfrac{z}{|z|} = \mathrm{cis}^{-1} \dfrac{w}{|w|}$ が成り立つ。定理 3.2.1 より $\dfrac{z}{|z|} = \dfrac{w}{|w|}$ が成り立つことがわかり、$|z| = |w|$ よりしたがって、$z = w$ が得られるが、これは仮定の $z \neq w$ が成り立つことに矛盾する。したがって、$|z| = |w|$ が成り立つなら、$\arg z \neq \arg w$ が成り立つことになる。以上いかなる場合でも、$(|z|, \arg z) \neq (|w|, \arg w)$ が成り立つ。これでその写像 p が単射であることが示された。また、$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$ に対し、$z = r \mathrm{cis}\theta$ とおかれれば、$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が成り立ち、さらに、次のようになるので、

$$|z| = |r \mathrm{cis}\theta| = r |\mathrm{cis}\theta| = r |\exp i\theta| = r |\cos\theta + i \sin\theta| = r \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = r$$
$$\arg z = \mathrm{cis}^{-1} \frac{z}{|z|} = \mathrm{cis}^{-1} \frac{r \mathrm{cis}\theta}{r} = \mathrm{cis}^{-1} \mathrm{cis}\theta = \theta$$

$\mathbb{R}^+ \times [0,2\pi) \subseteq V(p)$ が成り立つことになる。これでその写像 p が全射であることが示された。

さらに、上記の議論によりその写像 p の逆写像 p^{-1} は次のように与えられる。

$$p^{-1} : \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} ; (r,\theta) \rightarrow r \arg \theta$$

$\square$

定理 3.2.5. $\forall a \in \mathbb{R} \exists ! n \in \mathbb{Z}$ に対し、$a + 2n\pi \in [0,2\pi)$ が成り立つ。

証明. $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、もちろん、$\dfrac{a}{2\pi} \in \mathbb{R}$ が成り立つので、床関数を用いて $-n = \left\lfloor \dfrac{a}{2\pi} \right\rfloor$ とおかれると、$\exists ! n \in \mathbb{Z}$ に対し、$-n \leq \dfrac{a}{2\pi} < -n+1$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} -n \leq \frac{a}{2\pi} < -n+1 &\Leftrightarrow -2n\pi \leq a < -2n\pi + 2\pi \\ &\Leftrightarrow 0 \leq a + 2n\pi < 2\pi \Leftrightarrow a + 2n\pi \in [0,2\pi) \end{aligned}$$

$\square$

定義 3.2.4. 定理 3.2.5 より $\forall a \in \mathbb{R} \exists ! n \in \mathbb{Z}$ に対し、$a + 2n\pi \in [0,2\pi)$ が成り立つのであった。このような整数 n を用いて次式のような関数 a_{pv} が定義される。

$$a_{\mathrm{pv}} : \mathbb{R} \rightarrow [0,2\pi); a \mapsto a + 2n\pi$$

定理 3.2.6. $\forall x,y \in [0,2\pi)$ に対し、次式が成り立つ。

$$\mathrm{cis} a_{\mathrm{pv}}(x+y) = \mathrm{cis} x \mathrm{cis} y = \mathrm{cis} a_{\mathrm{pv}}(x) \mathrm{cis} a_{\mathrm{pv}}(y)$$

証明. $\forall x,y \in [0,2\pi)$ に対し、その関数 a_{pv} の定義より $\exists ! n \in \mathbb{N}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathrm{cis} a_{\mathrm{pv}}(x+y) &= \exp a_{\mathrm{pv}}(x+y)i \\ &= \exp{(x+y+2n\pi)i} \\ &= \exp xi \exp yi \exp 2n\pi i \\ &= \mathrm{cis} x \mathrm{cis} y \left(\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi\right) \\ &= \mathrm{cis} x \mathrm{cis} y \end{aligned}$$

ここで、$x,y \in [0,2\pi)$ が成り立つので、$a_{\mathrm{pv}}(x) = x$、$a_{\mathrm{pv}}(y) = y$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathrm{cis} a_{\mathrm{pv}}(x+y) &= \mathrm{cis} x \mathrm{cis} y \\ &= \mathrm{cis} a_{\mathrm{pv}}(x) \mathrm{cis} a_{\mathrm{pv}}(y) \end{aligned}$$

$\square$

定理 3.2.7. $\forall z,w \in \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ に対し、次式が成り立つ。

$$a_{\mathrm{pv}}\left(\mathrm{cis}^{-1} zw\right) = \mathrm{cis}^{-1} zw = a_{\mathrm{pv}}\left(\mathrm{cis}^{-1} z + \mathrm{cis}^{-1} w\right)$$

証明. $\forall z,w \in \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ に対し、定理 3.2.6 より次のようになる。

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{pv}}\left(\mathrm{cis}^{-1} zw\right) &= \mathrm{cis}^{-1} zw \\ &= \mathrm{cis}^{-1}\left(\mathrm{cis}\mathrm{cis}^{-1} z \mathrm{cis}\mathrm{cis}^{-1} z\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{cis}^{-1}\mathrm{cis}a_{\mathrm{pv}}\left(\mathrm{cis}^{-1}z + \mathrm{cis}^{-1}w\right)\\
&= a_{\mathrm{pv}}\left(\mathrm{cis}^{-1}z + \mathrm{cis}^{-1}w\right)
\end{aligned}$$

□

定理 3.2.8. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、$z \neq 0$ が成り立つなら、次のことが成り立つ。

$$\begin{aligned}
\arg zw - \arg z - \arg w &\in 2\mathbb{Z}\pi\\
\arg \frac{1}{z} + \arg z &\in 2\mathbb{Z}\pi
\end{aligned}$$

上の式々が成り立つことはそれぞれ、$\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、$z \neq 0$ が成り立つなら、次式が成り立つことと同値である。

$$\begin{aligned}
\arg zw + 2\mathbb{Z}\pi &= \arg z + \arg w + 2\mathbb{Z}\pi\\
\arg \frac{1}{z} + 2\mathbb{Z}\pi &= -\arg z + 2\mathbb{Z}\pi
\end{aligned}$$

さらにいえば、上で定義された関数 a_{pv} を用いて、上の式々が成り立つことはそれぞれ、$\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、$z \neq 0$ が成り立つなら、次式が成り立つことと同値である。

$$\begin{aligned}
a_{\mathrm{pv}}\left(\arg zw\right) = \arg zw &= a_{\mathrm{pv}}\left(\arg z + \arg w\right)\\
a_{\mathrm{pv}}\left(\arg \frac{1}{z}\right) = \arg \frac{1}{z} &= a_{\mathrm{pv}}\left(-\arg z\right)
\end{aligned}$$

証明. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、$z \neq 0$ が成り立つなら、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\exp i \arg zw &= \mathrm{cisarg}\, zw\\
&= \mathrm{ciscis}^{-1}\frac{zw}{|zw|}\\
&= \frac{zw}{|zw|} = \frac{z}{|z|}\frac{w}{|w|}\\
&= \mathrm{ciscis}^{-1}\frac{z}{|z|}\mathrm{ciscis}^{-1}\frac{w}{|w|}\\
&= \mathrm{cisarg}\, z\mathrm{cisarg}\, w\\
&= \mathrm{cis}\left(\arg z + \arg w\right)\\
&= \exp i\left(\arg z + \arg w\right)
\end{aligned}$$

ここで、定理 3.2.2 よりある整数 n を用いて次式が成り立つ。

$$i \arg zw = i\left(\arg z + \arg w\right) + 2n\pi i$$

したがって、次式が成り立つ。

$$\arg zw - \arg z - \arg w = 2n\pi \in 2\mathbb{Z}\pi$$

同様にして、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\exp i \arg \frac{1}{z} &= \mathrm{cisarg}\,\frac{1}{z}\\
&= \mathrm{ciscis}^{-1}\frac{|z|}{z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|z|}{z} = \frac{1}{\frac{z}{|z|}}\\
&= \frac{1}{\mathrm{cis}\mathrm{cis}^{-1}\frac{z}{|z|}}\\
&= \frac{1}{\mathrm{cis}\arg z}\\
&= \frac{1}{\exp i\arg z}\\
&= \exp\left(-i\arg z\right)
\end{aligned}$$

ここで、定理 3.2.2 よりある整数 n を用いて次式が成り立つ。

$$i\arg\frac{1}{z} = -i\arg z + 2n\pi i$$

したがって、次式が成り立つ。

$$\arg\frac{1}{z} + \arg z = 2n\pi \in 2\mathbb{Z}\pi$$

□

定理 3.2.9. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、次式が成り立つ。

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \varLambda_{n-1} \cup \{0\}\left[z = \mathrm{cis}\frac{2k\pi}{n}\right]$$

証明. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$z^n = 1$ が成り立つなら、これを極形式にすることで、定理 3.2.9 より次のようになる。

$$z^n = \left(|z|\mathrm{cis}\theta\right)^n = |z|^n\mathrm{cis}^n\theta = 1$$

ここで、$|z^n| = |z|^n = 1$ より $|z| = 1$ が成り立つかつ、定理 3.2.2 より次のようになるならそのときに限り、

$$\mathrm{cis}^n\theta = \exp^n i\theta = \exp in\theta = 1 = \exp 0$$

$\exists k \in \mathbb{Z}$ に対し、$in\theta = 0 + 2k\pi i$ が成り立つ、即ち、$n\theta = 2k\pi$ が成り立つので、次のようになる。

$$z = \exp\frac{2k\pi}{n}i$$

ここで、$k \in \mathbb{Z} \setminus \left(\varLambda_{n-1} \cup \{0\}\right)$ のとき、$\exists l \in \mathbb{Z}$ に対し、$k' = k + ln$ なる整数 k' がその集合 $\varLambda_{n-1} \cup \{0\}$ に存在するので、次のようになる。

$$\begin{aligned}
z = \exp\frac{2k\pi}{n}i &= \exp\frac{2\left(k' + ln\right)\pi}{n}i\\
&= \exp\left(\frac{2k'\pi}{n}i + \frac{2ln\pi}{n}i\right)\\
&= \exp\left(\frac{2k'\pi}{n}i + 2l\pi i\right)\\
&= \exp\frac{2k'\pi}{n}i = \mathrm{cis}\frac{2k'\pi}{n}
\end{aligned}$$

したがって、$\exists k \in \varLambda_{n-1} \cup \{0\}$ に対し、$z = \mathrm{cis}\frac{2k\pi}{n}$ が成り立つ。

逆に、$\exists k \in \varLambda_{n-1} \cup \{0\}$ に対し、$z = \mathrm{cis}\dfrac{2k\pi}{n}$ が成り立つなら、定理 3.1.13、定理 3.1.21 より次のようになる。

$$\begin{aligned} z^n &= \mathrm{cis}^n \frac{2k\pi}{n} = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^n \\ &= \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1 \end{aligned}$$

□

3.2.3 代数学の基本定理

定理 3.2.10 (代数学の基本定理)**.** $\forall n \in \mathbb{N} \forall a_i \in \mathbb{C}$ に対し、$a_n \neq 0$ が成り立つかつ、次式のような多項式関数 P が与えられたとき、

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_i z^i = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

$\exists c \in \mathbb{C}$ に対し、$P(c) = 0$ が成り立つ。この定理を代数学の基本定理という。

証明. $\forall n \in \mathbb{N} \forall a_i \in \mathbb{C}$ に対し、$a_n \neq 0$ が成り立つかつ、次式のような多項式関数 P が与えられたとき、

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_i z^i = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

$a_0 = 0$ が成り立つなら、$c = 0$ とおかれればよいので、以下、$a_0 \neq 0$ が成り立つとする。このとき、$\forall z \in \mathbb{C} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\delta = \varepsilon^{-1}$ とおかれれば、$\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\delta < |z|$ が成り立つなら、次のようになる。

$$0 < \delta < |z| \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{|z|} < \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow 0 < \left| \frac{1}{z} - 0 \right| < \varepsilon$$

したがって、$\displaystyle\lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{z} = 0$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \to \infty} \sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_i z^{i-n} &= \lim_{|z| \to \infty} \sum_{i \in \varLambda_{n-1} \cup \{0\}} a_i z^{i-n} + a_n \\ &= \sum_{i \in \varLambda_{n-1} \cup \{0\}} a_i \lim_{|z| \to \infty} z^{i-n} + a_n \\ &= \sum_{i \in \varLambda_{n-1} \cup \{0\}} a_i \cdot 0 + a_n = a_n \end{aligned}$$

このことは、$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\delta < |z|$ が成り立つなら、$\displaystyle\left| \sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_i z^{i-n} - a_n \right| < \varepsilon$ が成り立つということを意味している。したがって、次のようになる。

$$\left| \sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_i z^{i-n} \right| - |a_n| \leq \left| \sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_i z^{i-n} - a_n \right| < \varepsilon$$

両辺に絶対値がとられれば、次式が成り立つ。

$$\left| \left| \sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} a_i z^{i-n} \right| - |a_n| \right| < \varepsilon$$

この式は $\lim_{|z|\to\infty}\left|\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_i z^{i-n}\right| = |a_n|$ が成り立つということを意味しており、$a_n \neq 0$ より $\lim_{|z|\to\infty}\left|\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_i z^{i-n}\right| = |a_n| \neq 0$ が成り立つ。したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned}\lim_{|z|\to\infty}|P(z)| &= \lim_{|z|\to\infty}\left|\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_i z^{i}\right|\\ &= \lim_{|z|\to\infty}\left|z^n\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_i z^{i-n}\right|\\ &= \lim_{|z|\to\infty}|z|^n\lim_{|z|\to\infty}\left|\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_i z^{i-n}\right|\\ &= \infty^n\cdot|a_n| = \infty\end{aligned}$$

これにより、$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+$ に対し、$\delta<|z|$ が成り立つなら、$\varepsilon<|P(z)|$ が成り立つ。

特に、$\forall|P(0)|\in\mathbb{R}^+\exists\delta_0\in\mathbb{R}^+$ に対し、$\delta_0<|z|$ が成り立つなら、$|P(0)|<|P(z)|$ が成り立つ。このとき、次式のように集合 K が定義されれば、

$$K=\{z\in\mathbb{C}||z|\leq\delta_0\}$$

その集合 K は有界な閉集合であり、さらに、定理**??**、即ち、最大値最小値の定理より $\exists c\in K$ に対し、その関数 $|P||K$ の最小値 $\min_{z\in K}|P(z)|$ が存在して、$|P(c)|=\min_{x\in K}|P(z)|$ が成り立つ。さらに、明らかに $0\in K$ が成り立つので、$|P(c)|=\min_{x\in K}|P(z)|\leq|P(0)|$ が成り立つ。以上より、$\forall z\in\mathbb{C}$ に対し、$z\in K$ が成り立つなら、$\min_{z\in K}|P(z)|\leq|P(z)|$ が成り立つし、$z\notin K$ が成り立つ、即ち、$\delta_0<|z|$ が成り立つなら、$\min_{z\in K}|P(z)|\leq|P(0)|<|P(z)|$ が成り立つので、$\min_{z\in K}|P(z)|\leq P(z)$ が成り立つ。ゆえに、$|P(c)|=\min_{z\in K}|P(z)|=\min|P(z)|$ が成り立つ。

そこで、$0<|P(c)|=\min|P(z)|$ が成り立つと仮定すると、Taylor の定理より次式が成り立つ。

$$P(z)=\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{1}{i!}\frac{d^iP}{dz^i}(c)(z-c)^i$$

ここで、$\forall i\in\Lambda_n$ に対し、$\frac{1}{i!}\frac{d^iP}{dz^i}(c)=0$ が成り立つなら、$\forall z\in\mathbb{C}$ に対し、次のようになり、

$$\begin{aligned}P(z)&=\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{1}{i!}\frac{d^iP}{dz^i}(c)(z-c)^i\\ &=\frac{1}{0!}\frac{d^0P}{dz^0}(c)(z-c)^0+\sum_{i\in\Lambda_n}\frac{1}{i!}\frac{d^iP}{dz^i}(c)(z-c)^i\\ &=1\cdot P(c)\cdot 1+\sum_{i\in\Lambda_n}0\cdot(z-c)^i=P(c)\end{aligned}$$

これは仮定の $1\leq n$ が成り立つことに矛盾している。ゆえに、$\exists i\in\Lambda_n$ に対し、$\frac{1}{i!}\frac{d^iP}{dz^i}(c)\neq 0$ が成り立つ。このような自然数 i のうち最小なものを l とおかれると、$\forall z\in\mathbb{C}\exists h\in\mathbb{C}$ に対し、$z=c+h$ とおかれことがで

きるので、そうすると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
P(c+h) &= \sum_{i \in \varLambda_n \cup \{0\}} \frac{1}{i!} \frac{d^i P}{dz^i}(c)(c+h-c)^i \\
&= \frac{1}{0!} \frac{d^0 P}{dz^0}(c)h^0 + \sum_{i \in \varLambda_{l-1}} \frac{1}{i!} \frac{d^i P}{dz^i}(c)h^i + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{l-1}} \frac{1}{i!} \frac{d^i P}{dz^i}(c)h^i \\
&= 1 \cdot P(c) \cdot 1 + \sum_{i \in \varLambda_{l-1}} 0 \cdot h^i + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{l-1}} \frac{1}{i!} \frac{d^i P}{dz^i}(c)h^i \\
&= P(c) + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{l-1}} \frac{1}{i!} \frac{d^i P}{dz^i}(c)h^i
\end{aligned}$$

以下、$\forall i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{l-1}$ に対し、$\dfrac{1}{i!} \dfrac{d^i P}{dz^i}(c) = A_i$ とおかれれば、$A_l = \dfrac{1}{l!} \dfrac{d^l P}{dz^l}(c) \neq 0$ が成り立つことに注意すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}
P(c+h) &= P(c) + A_l h^l \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_{l-1}} \frac{A_i}{A_l} h^{i-l} \\
&= P(c) + A_l h^l \left(\frac{A_l}{A_l} h^{l-l} + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_l} \frac{A_i}{A_l} h^{i-l} \right) \\
&= P(c) + A_l h^l \left(1 + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_l} \frac{A_i}{A_l} h^{i-l} \right)
\end{aligned}$$

ここで、次式が成り立つことから、

$$\lim_{h \to 0} \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_l} \frac{A_i}{A_l} h^{i-l} = 0, \quad \lim_{h \to 0} A_l h^l = 0$$

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ に対し、$|h| < \delta$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$\left| \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_l} \frac{A_i}{A_l} h^{i-l} \right| < 1, \quad \left| A_l h^l \right| < |P(c)|$$

$A_l = \dfrac{1}{l!} \dfrac{d^l P}{dz^l}(c) \neq 0$ が成り立つことに注意すれば、定理 3.2.3 より $r \in \mathbb{R}^+$、$\theta \in [0, 2\pi)$ なる実数たち r、θ を用いて次のようにおかれることができ、

$$\frac{P(c)}{A_l} = r \operatorname{cis} \theta = r \exp \theta i$$

$0 < \rho \leq \rho^{\frac{1}{l}} < \delta$ なる正の実数 ρ を用いて $h = \rho^{\frac{1}{l}} \exp \dfrac{(\theta + \pi) i}{l}$ とおかれれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}
|P(c+h)| &= \left| P(c) + A_l h^l \left(1 + \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_l} \frac{A_i}{A_l} h^{i-l} \right) \right| \\
&= \left| P(c) + A_l h^l + A_l h^l \sum_{i \in \varLambda_n \setminus \varLambda_l} \frac{A_i}{A_l} h^{i-l} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left|P(c)+A_l h^l\right| + \left|A_l h^l \sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_l} \frac{A_i}{A_l} h^{i-l}\right| \\
&= |A_l| \left|\frac{P(c)}{A_l} + h^l\right| + \left|A_l h^l\right| \left|\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_l} \frac{A_i}{A_l} h^{i-l}\right|
\end{aligned}$$

ここで、次のようになるので、

$$\begin{aligned}
\left|\frac{P(c)}{A_l} + h^l\right| &= \left|r\exp\theta i + \left(\rho^{\frac{1}{l}} \exp\frac{(\theta+\pi)i}{l}\right)^l\right| \\
&= |r\exp\theta i + \rho\exp(\theta+\pi)i| \\
&= |r\exp\theta i + \rho\exp\theta i\exp\pi i| \\
&= |r\exp\theta i + \rho\exp\theta i(\cos\pi + i\sin\pi)| \\
&= |r\exp\theta i - \rho\exp\theta i| \\
&= |r-\rho|\,|\exp\theta i| = |r-\rho|
\end{aligned}$$

次のようになる。

$$|P(c+h)| = |A_l|\,|r-\rho| + \left|A_l h^l\right| \left|\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_l} \frac{A_i}{A_l} h^{i-l}\right|$$

さらに、$\left|\sum_{i\in\Lambda_n\setminus\Lambda_l} \frac{A_i}{A_l} h^{i-l}\right| < 1$ が成り立つかつ、$\left|A_l h^l\right| < |P(c)|$ が成り立つので、次のようになることから、

$$\rho = |\rho\exp(\theta+\pi)i| = \left|\left(\rho^{\frac{1}{l}} \exp\frac{(\theta+\pi)i}{l}\right)^l\right| = \left|h^l\right| < \frac{|P(c)|}{|A_l|} = \left|\frac{P(c)}{A_l}\right| = |r\exp\theta i| = r$$

$|r-\rho| = r-\rho$ が成り立つので、次のようになる。

$$\begin{aligned}
|P(c+h)| &< |A_l|(r-\rho) + \left|A_l h^l\right| \\
&= |A_l|\,r - |A_l|\,\rho + \left|A_l h^l\right| \\
&= |A_l| \frac{|P(c)|}{|A_l|} - |A_l|\left|h^l\right| + \left|A_l h^l\right| \\
&= |P(c)| - \left|A_l h^l\right| + \left|A_l h^l\right| = |P(c)|
\end{aligned}$$

ここで、もちろん、$c+h\in\mathbb{C}$ が成り立つので、$\exists c+h\in\mathbb{C}$ に対し、$|P(c+h)| < |P(c)| = \min|P(z)|$ が成り立つことになるが、これは最小値の定義に矛盾する。よって、$0 = |P(c)| = \min|P(z)|$ が成り立つ、即ち、$\exists c\in\mathbb{C}$ に対し、$P(c) = 0$ が成り立つことになる。 □

定理 3.2.11. $\forall n\in\mathbb{N}\forall a_i\in\mathbb{C}$ に対し、$a_n \neq 0$ が成り立つかつ、次式のような多項式関数 P が与えられたとき、

$$P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}; z\mapsto \sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}} a_i z^i = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

複素数の族 $\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda_n}$ が存在して、次式が成り立つ。

$$P(z) = a_n \prod_{i\in\Lambda_n} (z-\alpha_i)$$

証明. 精密にされるなら、代数学の多項式環の内容が必要となるので、ここでは、その証明の簡単な概要を述べることにしよう。$n=1$ のときは、$c_1=-\dfrac{a_0}{a_1}$ とすればよい。$n=k$ のとき、示すことが成り立つと仮定すると、$n=k+1$ のとき、代数学の基本定理より $P\left(\alpha_{k+1}\right)=0$ なる複素数 α_{k+1} が存在するので、複素数 $P(z)$ を多項式とみて $z-\alpha_{k+1}$ で割れば、ある k 次多項式 $q(z)$ と定数 r が存在して、$P(z)=\left(z-\alpha_{k+1}\right)q(z)+r$ が成り立つことになる。そこで、$z=\alpha_{k+1}$ とすれば、$r=0$ と分かる。以上、数学的帰納法により示すべきことが示された。 □

定理 3.2.12. $\forall n\in\mathbb{N}\forall a_i\in\mathbb{R}$ に対し、$a_n\neq 0$ が成り立つかつ、次式のような多項式関数 P が与えられたとき、

$$P:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C};z\mapsto\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}}a_iz^i=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$$

$\exists c\in\mathbb{C}$ に対し、$P(c)=0$ が成り立つなら、$P\left(\overline{c}\right)=0$ が成り立つ。

証明. $\forall n\in\mathbb{N}\forall a_i\in\mathbb{C}$ に対し、$a_n\neq 0$ が成り立つかつ、次式のような多項式関数 P が与えられたとき、

$$P:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C};z\mapsto\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}}a_iz^i=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$$

$\exists c\in\mathbb{C}$ に対し、$P(c)=0$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$P(c)=\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}}a_ic^i=0$$

したがって、次のようになる。

$$\overline{P(c)}=\overline{\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}}a_ic^i}=\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}}\overline{a_ic^i}=\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}}\overline{a_i}\overline{c}^i=\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}}a_i\overline{c}^i=P\left(\overline{c}\right)=0$$

□

定理 3.2.13. $\forall n\in\mathbb{N}\forall a_i\in\mathbb{R}$ に対し、$a_n\neq 0$ が成り立つかつ、次式のような多項式関数 P が与えられたとき、

$$P:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C};z\mapsto\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}}a_iz^i=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$$

$l,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ かつ $n=2l+m$ なる実数の族々 $\left\{\alpha_i\right\}_{i\in\Lambda_l}$、$\left\{\beta_i\right\}_{i\in\Lambda_l}$、$\left\{\gamma_i\right\}_{i\in\Lambda_m}$ が存在して、次式が成り立つ。

$$P(z)=a_n\prod_{i\in\Lambda_l}\left(z^2+\alpha_iz+\beta_i\right)\prod_{i\in\Lambda_m}\left(z-\gamma_i\right)$$

証明. $\forall n\in\mathbb{N}\forall a_i\in\mathbb{R}$ に対し、$a_n\neq 0$ が成り立つかつ、次式のような多項式関数 P が与えられたとき、

$$P:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C};z\mapsto\sum_{i\in\Lambda_n\cup\{0\}}a_iz^i=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$$

定理 3.2.11 より複素数の族 $\left\{\alpha_i\right\}_{i\in\Lambda_n}$ が存在して、次式が成り立つ。

$$P(z)=a_n\prod_{i\in\Lambda_n}\left(z-\alpha_i\right)$$

ここで、$\{\gamma_i\}_{i\in\Lambda_m}=\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda_n}\cap\mathbb{R}$ とおかれれば、$\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda_n}\setminus\mathbb{R}$ の任意の元 c に対し、定理 3.2.12 より $c\neq\overline{c}$ かつ $\overline{c}\in\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda_n}\setminus\mathbb{R}$ が成り立つので、$\exists l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し、$\#\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda_n}\setminus\mathbb{R}=2l$ が成り立つことになる。以下、$\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda_n}\setminus\mathbb{R}=\{c_i,\overline{c_i}\}_{i\in\Lambda_l}$ とおかれれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}P(z)&=a_n\prod_{i\in\Lambda_n}(z-\alpha_i)\\&=a_n\prod_{i\in\Lambda_l}(z-c_i)\prod_{i\in\Lambda_l}(z-\overline{c_i})\prod_{i\in\Lambda_m}(z-\gamma_i)\\&=a_n\prod_{i\in\Lambda_l}(z-c_i)(z-\overline{c_i})\prod_{i\in\Lambda_m}(z-\gamma_i)\\&=a_n\prod_{i\in\Lambda_l}\left(z^2-(c_i+\overline{c_i})z+c_i\overline{c_i}\right)\prod_{i\in\Lambda_m}(z-\gamma_i)\end{aligned}$$

このとき、$\alpha_i=-(c_i+\overline{c_i})$、$\beta_i=c_i\overline{c_i}$ とおかれれば、$\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R}$ が成り立って、次のようになる。

$$P(z)=a_n\prod_{i\in\Lambda_l}\left(z^2+\alpha_i z+\beta_i\right)\prod_{i\in\Lambda_m}(z-\gamma_i)$$

□

定理 3.2.14. $\forall n\in\mathbb{N}\forall a_i\in\mathbb{R}$ に対し、$a_{2n-1}\neq 0$ が成り立つかつ、次式のような多項式関数 P が与えられたとき、

$$P:\mathbb{C}\to\mathbb{C};z\mapsto\sum_{i\in\Lambda_{2n-1}\cup\{0\}}a_iz^i=a_{2n-1}z^{2n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

$\exists c\in\mathbb{R}$ に対し、$P(c)=0$ が成り立つ。

証明. $\forall n\in\mathbb{N}\forall a_i\in\mathbb{R}$ に対し、$a_{2n-1}\neq 0$ が成り立つかつ、次式のような多項式関数 P が与えられたとき、

$$P:\mathbb{C}\to\mathbb{C};z\mapsto\sum_{i\in\Lambda_{2n-1}\cup\{0\}}a_iz^i=a_{2n-1}z^{2n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

定理 3.2.13 より $l,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ かつ $2n-1=2l+m$ なる実数の族々 $\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda_l}$、$\{\beta_i\}_{i\in\Lambda_l}$、$\{\gamma_i\}_{i\in\Lambda_m}$ が存在して、次式が成り立つ。

$$P(z)=a_{2n-1}\prod_{i\in\Lambda_l}\left(z^2+\alpha_i z+\beta_i\right)\prod_{i\in\Lambda_m}(z-\gamma_i)$$

ここで、$m=0$ と仮定すると、$\mathbb{N}=2\mathbb{N}\sqcup 2\mathbb{N}-1$ が成り立つことに矛盾する。ゆえに、$m\neq 0$ が成り立つことになる。このとき、$\{\gamma_i\}_{i\in\Lambda_m}\neq\emptyset$ となるので、$\exists c\in\{\gamma_i\}_{i\in\Lambda_m}\subseteq\mathbb{R}$ に対し、$P(c)=0$ が成り立つ。 □

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1980. 第 34 刷 p182-190 ISBN978-4-13-062005-5

3.3 指数関数

3.3.1 主値での対数関数

主値での対数関数を定義する前に、自然な指数関数 $\exp:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ の逆像について述べよう。

定理 3.3.1. $\forall\exp z\in V(\exp)$ に対し、$z+2\mathbb{Z}\pi i=V\left(\exp^{-1}|\{\exp z\}\right)$ が成り立つ。

証明. $\forall\exp z\in V(\exp)\forall z+2n\pi i\in z+2\mathbb{Z}\pi i$ に対し、次のようになることから、

$$\begin{aligned}\exp(z+2n\pi i)&=\exp z\exp 2n\pi i\\&=\exp z\left(\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi\right)\\&=\exp z(1+i\cdot 0)=\exp z\end{aligned}$$

$z+2\mathbb{Z}\pi i\subseteq V\left(\exp^{-1}|\{\exp z\}\right)$ が成り立つ。逆に、$\forall w\in V\left(\exp^{-1}|\{\exp z\}\right)$ に対し、$\exp w=\exp z$ が成り立つので、定理 3.2.2 より $\exists n\in\mathbb{Z}$ に対し、$w=z+2n\pi i$ が成り立つので、$w\in z+2\mathbb{Z}\pi i$ が成り立ち、したがって、$z+2\mathbb{Z}\pi i\supseteq V\left(\exp^{-1}|\{\exp z\}\right)$ が成り立つ。 □

定理 3.3.2. $D=\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{R}|z\leq 0\}$ とおかれれば、$\forall z\in D$ に対し、$z=|z|\exp i\theta$ なる実数 θ が開区間 $(-\pi,\pi)$ で一意的に存在する。

証明. $D=\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{R}|z\leq 0\}$ とおかれれば、$\forall z\in D$ に対し、$z\neq 0$ が成り立つので、定理 3.2.3 より $\exists!\theta'\in[0,2\pi)$ に対し、次式が成り立つ。

$$z=|z|\mathrm{cis}\theta'=|z|\exp i\theta'$$

そこで、$0\leq\theta'<\pi$ のときは、$\theta=\theta'$、$\pi<\theta'<2\pi$ のときは、$\theta=\theta'-2\pi$ とおく。さらに、$\theta=\pi$ のとき、$z=|z|\exp i\pi=-|z|\notin D$ となるので、$\theta=\pi$ となりえない。 □

そこで、次のような関数が定義される。

定義 3.3.1. $\forall z\in D$ に対し、$z=|z|\exp i\theta$ なる実数 θ を用いて次のような関数 Arg が定義される。

$$\mathrm{Arg}:D\rightarrow(-\pi,\pi);z\mapsto\theta$$

さて、本題を述べよう。

定義 3.3.2. 次式のように関数 Log が定義される。

$$\mathrm{Log}:D\rightarrow V(\mathrm{Log});z\mapsto\ln|z|+i\mathrm{Arg}z$$

その関数 Log を主値での対数関数、自然な対数関数という。

定理 3.3.3. 主値での対数関数 Log において、$V(\mathrm{Log})=\mathbb{R}+(-\pi,\pi)i$ が成り立つ。

証明. 主値での対数関数 Log において、定義より明らかに $V(\mathrm{Log})\subseteq\mathbb{R}+(-\pi,\pi)i$ が成り立つ。逆に、$u,v\in\mathbb{R}$ として $\forall u+vi\in\mathbb{R}+(-\pi,\pi)i$ に対し、$z=\exp(u+vi)$ とおかれれば、$\exp u\in\mathbb{R}^+$ かつ $\exp vi\neq -1$ が成り立つので、$z\in D$ が成り立つ。さらに、次のようになることから、

$$\mathrm{Log}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln|\exp(u+vi)| + i\mathrm{Arg}\exp(u+vi)\\
&= \ln\exp u + i\mathrm{Arg}\left(|\exp u|\exp vi\right)\\
&= u+vi
\end{aligned}
$$

$u+vi \in V(\mathrm{Log})$ が成り立つので、$V(\mathrm{Log}) \supseteq \mathbb{R}+(-\pi,\pi)i$ が成り立つ。よって、$V(\mathrm{Log}) = \mathbb{R}+(-\pi,\pi)i$ が成り立つ。 □

定理 3.3.4. 主値での対数関数 Log は全単射でありその逆写像 Log^{-1} が次式のように与えられる。

$$\mathrm{Log}^{-1} : \mathbb{R}+(-\pi,\pi)i \to D; z \mapsto \exp z$$

証明. 主値での対数関数 Log は定義より全射である。さらに、$\forall z,w \in D$ に対し、$z \neq w$ が成り立つとき、$|z| \neq |w|$ が成り立つなら、定義より直ちに $\mathrm{Log}z \neq \mathrm{Log}w$ が成り立つ。一方で、$|z| = |w|$ が成り立つかつ、$\mathrm{Arg}z = \mathrm{Arg}w$ が成り立つと仮定すると、定理 3.3.2 に注意して、次式が成り立つ。

$$z = |z|\exp i\mathrm{Arg}z = |w|\exp i\mathrm{Arg}w = w$$

しかしながら、これは仮定の $z \neq w$ が成り立つことに矛盾する。したがって、$|z| = |w|$ が成り立つなら、$\mathrm{Arg}z \neq \mathrm{Arg}w$ が成り立つので、$\mathrm{Log}z \neq \mathrm{Log}w$ が成り立つ。ゆえに、主値での対数関数 Log は全単射である。

このとき、$\forall z \in D$ に対し、次式のように関数 f が定義されれば、

$$f : \mathbb{R}+(-\pi,\pi)i \to D; z \mapsto \exp z$$

次のようになる。

$$
\begin{aligned}
f \circ \mathrm{Log}(z) &= \exp\mathrm{Log}z = \exp\left(\ln|z| + i\mathrm{Arg}z\right)\\
&= \exp\ln|z|\exp i\mathrm{Arg}z\\
&= |z|\exp i\mathrm{Arg}z = z
\end{aligned}
$$

また、$u,v \in \mathbb{R}$ として $\forall u+vi \in \mathbb{R}+(-\pi,\pi)i$ に対し、$\exp u \in \mathbb{R}^+$ かつ $\exp vi \neq -1$ が成り立つので、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Log} \circ f(u+vi) &= \mathrm{Log}\exp(u+vi)\\
&= \ln|\exp(u+vi)| + i\mathrm{Arg}(u+vi)\\
&= \ln\exp u + i\mathrm{Arg}\left(|\exp u|\exp vi\right)\\
&= u+vi
\end{aligned}
$$

よって、その逆写像 Log^{-1} は次式のように与えられる。

$$\mathrm{Log}^{-1} : \mathbb{R}+(-\pi,\pi)i \to D; z \mapsto \exp z$$

□

定理 3.3.5. 主値での対数関数 Log の集合 $\mathbb{R}^+$ による制限について、$\mathrm{Log}|\mathbb{R}^+ = \ln$ が成り立つ。

証明. $\forall a \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\mathrm{Arg}a = 0$ が成り立つことから、明らかである。 □

定義 3.3.3. $G \subseteq \mathbb{C}$ なる連結な開集合 G が与えられたとき、関数 $\exp|G : G \to V\left(exp|G\right)$ が単射となるとき、その開集合 $V\left(\exp|G\right)$ 上で連続な逆関数が存在する。その逆関数 f を対数関数のその開集合 $V\left(\exp|G\right)$ における 1 つの分枝、枝などという。主値での対数関数 Log は対数関数のその開集合 D における 1 つの分枝である。

また、これ以外の注意として $\forall z, w \in D$ に対し、常に $\mathrm{Log} zw = \mathrm{Log} z + \mathrm{Log} w$ が成り立つとはいえないことがあげられる。例えば、次のようなものがある。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^2 &= \mathrm{Log}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= \ln\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| + i\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= \ln 1 - i \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi i}{3}, \\
\mathrm{Log}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) + \mathrm{Log}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) &= \ln\left|-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right| + i\mathrm{Arg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\
&\quad + \ln\left|-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right| + i\mathrm{Arg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\
&= \ln 1 + i \cdot \frac{5\pi}{6} + \ln 1 + i \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi i}{3}
\end{aligned}$$

定理 3.3.6. 主値での対数関数 Log はその定義域 D で正則で次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log} z = \frac{1}{z}$$

証明. 主値での指数関数 $exp : \mathbb{R} + (-\pi, \pi)i \to D; z \mapsto \exp z$ は連続で定理 3.1.6 より正則なので、$\mathrm{Log}(z + k) - \mathrm{Log} z = l$ とおかれれば、$w = \mathrm{Log} z$ として、$\exp(w + l) = z + k$、即ち、$\exp(w + l) - \exp w = k$ が成り立つので、自然な指数関数、主値での対数関数いずれも全単射であることに注意すれば、$h \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$ が成り立つ。さらに、自然な指数関数、主値での対数関数いずれも連続であることに注意すれば、$h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$ が成り立つ。以上、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\mathrm{Log} z &= \lim_{k \to 0} \frac{\mathrm{Log}(z + k) - \mathrm{Log} z}{k} \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{l}{\exp(w + l) - \exp w} \\
&= \frac{1}{\lim_{l \to 0} \frac{\exp(w+l) - \exp w}{l}} \\
&= \frac{1}{\frac{d}{dw} \exp w} = \frac{1}{\exp w} = \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

よって、主値での対数関数 Log はその定義域 D で正則で次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log} z = \frac{1}{z}$$

□

定理 3.3.7. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$|z| < 1$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$\mathrm{Log}(z + 1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

証明. 冪級数 $\left(\sum_{k\in\Lambda_n\cup\{0\}}\frac{(-1)^{k-1}}{k}z^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき、次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-(-1)^n(n+1)}{(-1)^n n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

よって、これの収束半径は 1 であるので、0 を中心とする半径 1 の円板 $D(0,1)$ を用いて次式のように関数 f がおかれると、

$$f:D(0,1)\to\mathbb{C};z\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$$

定理 2.3.7 の項別微分により次のようになる。

$$\partial_{\mathrm{hol}}f:D(0,1)\to\mathbb{C};z\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n-1}z^{n-1}=\frac{1}{z+1}$$

ここで、$\forall z\in D(0,1)$ に対し、$|z|<1$ が成り立つので、$0\leq|z+1|\leq|z|+1<2$ が成り立つことにより、$z+1\in D$ が成り立つ。したがって、次式が成り立つ。

$$\partial_{\mathrm{hol}}f(z)=\frac{1}{z+1}=\frac{d}{dz}\mathrm{Log}(z+1)$$

即ち、次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dz}\left(f(z)-\mathrm{Log}(z+1)\right)=\partial_{\mathrm{hol}}f(z)-\frac{d}{dz}\mathrm{Log}(z+1)=0$$

定理 2.3.8 より定数 C を用いて $f(z)=\mathrm{Log}(z+1)+C$ が成り立つ。$z=0$ のとき、$f(0)=0$ かつ $\mathrm{Log}1=0$ が成り立つので、$C=0$ が得られる。よって、次式が成り立つ。

$$\mathrm{Log}(z+1)=f(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$$

□

定理 3.3.8. $\forall z\in\mathbb{C}$ に対し、$|z|<1$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$-\mathrm{Log}(1-z)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^n}{n}$$

証明. 定理 3.3.7 より直ちに分かる。 □

3.3.2 指数関数

定義 3.3.4. $\forall a\in D$ に対し、次式のように関数 $\exp_a$ が定義される。

$$\exp_a:\mathbb{C}\to V\left(\exp_a\right);z\mapsto\exp\left(z\mathrm{Log}a\right)$$

この関数 $\exp_a$ を底 a の指数関数といい、その値 $\exp_a z$ を a の z 乗という。さらに、その値 $\exp_a z$ を a^z と書くこともある。

定理 3.3.9. 底 e の指数関数 $\exp_e$ は自然な指数関数 $\exp$ に等しい、即ち、$\exp_e = \exp$ が成り立つ。また、底 1 の指数関数 $\exp_1$ は常に 1 をうつす。

証明. 定義から考えれば、$\mathrm{Log}e = 1$ かつ $\mathrm{Log}1 = 0$ より明らかである。 □

定理 3.3.10. $\forall a \in D\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\exp_a z \exp_a w &= \exp_a(z+w)\\ \exp_a(-z) &= \frac{1}{\exp_a z}\\ \exp z &\neq 0\end{aligned}$$

別の書き方でいえば、次のようになる。

$$\begin{aligned}a^z a^w &= a^{z+w}\\ a^{-z} &= \frac{1}{a^z}\\ a^z &\neq 0\end{aligned}$$

証明. $\forall a \in D\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned}\exp_a z \exp_a w &= \exp\left(z\mathrm{Log}a\right)\exp\left(w\mathrm{Log}a\right)\\ &= \exp\left(z\mathrm{Log}a + w\mathrm{Log}a\right)\\ &= \exp\left((z+w)\mathrm{Log}a\right)\\ &= \exp_a(z+w)\end{aligned}$$

あとは定理 3.1.5 と同様にして示せばよかろう。 □

定理 3.3.11. 指数関数について、次のことが成り立つ。

- $\forall a \in \mathbb{R}^+$ に対し、$a \neq 1$ が成り立つなら、$V\left(\exp_a|\mathbb{R}\right) = \mathbb{R}^+$ が成り立つ。
- $\forall a \in \mathbb{R}^+\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$\mathrm{Log}\exp_a x = x\mathrm{Log}a$ が成り立つ。
- $\forall a \in \mathbb{R}^+\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対し、$\exp_{\exp_a x} y = \exp_a xy$ が成り立つ。
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^+\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$\exp_{ab} x = \exp_a x \exp_b x$ が成り立つ。

証明. $\forall a \in \mathbb{R}^+$ に対し、$a \neq 0$ が成り立つなら、定義と定理 3.1.7 より直ちに $V\left(\exp_a|\mathbb{R}\right) \subseteq \mathbb{R}^+$ が成り立つことがわかる。一方で、$\forall b \in \mathbb{R}^+$ に対し、$a \neq 1$ が成り立つので、定理 3.1.51 より $\ln a \neq 1$ が成り立つ。したがって、$\dfrac{\ln b}{\ln a} \in \mathbb{R}$ が成り立って次のようになる。

$$\begin{aligned}\exp_a \frac{\ln b}{\ln a} &= \exp\left(\frac{\ln b}{\ln a}\mathrm{Log}a\right)\\ &= \exp\left(\frac{\ln b}{\ln a}\ln a\right)\\ &= \exp\ln b = b\end{aligned}$$

ゆえに、$\mathbb{R}^+ \subseteq V\left(\exp_a|\mathbb{R}\right)$ が成り立つ。

$\forall a \in \mathbb{R}^+\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、$a = 1$ でも $\exp_a x \in \mathbb{R}^+$ が成り立つことに注意すれば、次のようになる。

$$\mathrm{Log}\exp_a x = \ln \exp_a x$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln\exp\left(x\mathrm{Log}a\right)\\
&= x\mathrm{Log}a
\end{aligned}
$$

$\forall a\in\mathbb{R}^{+}\forall x,y\in\mathbb{R}$ に対し、$a=1$ でも $\exp_{a}x\in\mathbb{R}^{+}$ が成り立つことに注意すれば、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\exp_{\exp_{a}x}y &= \exp\left(y\mathrm{Log}\exp_{a}x\right)\\
&= \exp\left(y\cdot x\mathrm{Log}a\right)\\
&= \exp\left(xy\mathrm{Log}a\right)=\exp_{a}xy
\end{aligned}
$$

$\forall a,b\in\mathbb{R}^{+}\forall x\in\mathbb{R}$ に対し、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\exp_{ab}x &= \exp\left(x\mathrm{Log}ab\right)\\
&= \exp\left(x\ln ab\right)\\
&= \exp\left(x\left(\ln a+\ln b\right)\right)\\
&= \exp\left(x\ln a+x\ln b\right)\\
&= \exp\left(x\ln a\right)\exp\left(x\ln b\right)\\
&= \exp\left(x\mathrm{Log}a\right)\exp\left(x\mathrm{Log}b\right)\\
&= \exp_{a}x\exp_{b}x
\end{aligned}
$$

□

定理 3.3.12. $\forall c\in\mathbb{C}$ に対し、次式のように定義される関数 P について、

$$
P:D\rightarrow\mathbb{C};z\mapsto\exp_{z}c
$$

その集合 D 上正則で次式が成り立つ。

$$
\partial_{\mathrm{hol}}P(z)=\frac{dz^{c}}{dz}=c\exp_{z}(c-1)=cz^{c-1}
$$

証明. $\forall c\in\mathbb{C}$ に対し、次式のように定義される関数 P について、

$$
P:D\rightarrow\mathbb{C};z\mapsto\exp_{z}c
$$

$\exp_{z}c=\exp\left(c\mathrm{Log}z\right)$ が成り立つので、その集合 D 上で正則である。したがって、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\partial_{\mathrm{hol}}P(z) &= \frac{d}{dz}\exp\left(c\mathrm{Log}z\right)\\
&= \frac{d}{d\left(c\mathrm{Log}z\right)}\exp\left(c\mathrm{Log}z\right)\frac{d}{d\mathrm{Log}z}\left(c\mathrm{Log}z\right)\frac{d}{dz}\mathrm{Log}z\\
&= \exp\left(c\mathrm{Log}z\right)\cdot c\cdot\frac{1}{z}\\
&= \frac{c\exp\left(c\mathrm{Log}z\right)}{\exp\mathrm{Log}z}\\
&= c\exp\left(c\mathrm{Log}z\right)\exp\left(-\mathrm{Log}z\right)\\
&= c\exp\left((c-1)\mathrm{Log}z\right)\\
&= c\exp_{z}(c-1)
\end{aligned}
$$

□

定理 3.3.13. $\forall a \in D$ に対し、底 a の指数関数 $\exp_a$ はその集合 $\mathbb{C}$ で正則で次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dz}\exp_a z = \mathrm{Log}a \exp_a z$$

証明. $\forall a \in D$ に対し、底 a の指数関数 $\exp_a$ はその集合 $\mathbb{C}$ で正則であることは定義より明らかである。このとき、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\exp_a z &= \frac{d}{dz}\exp\left(z\mathrm{Log}a\right)\\
&= \frac{d}{d\left(z\mathrm{Log}a\right)}\exp\left(z\mathrm{Log}a\right)\frac{d}{dz}\left(z\mathrm{Log}a\right)\\
&= \exp\left(z\mathrm{Log}a\right)\cdot\mathrm{Log}a\\
&= \mathrm{Log}a\exp_a z
\end{aligned}$$

□

定理 3.3.14. $\forall a \in \mathbb{R}^+$ に対し、底 a の指数関数の大小関係について、$\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対し、次のようになる。

- $0 < a < 1$ のとき、$x < y \Rightarrow \exp_a y < \exp_a x$ が成り立つ。
- $a = 1$ のとき、$x < y \Rightarrow \exp_a x = \exp_a y = 1$ が成り立つ。
- $1 < a$ のとき、$x < y \Rightarrow \exp_a x < \exp_a y$ が成り立つ。

証明. $\forall a \in \mathbb{R}^+$ に対し、底 a の指数関数の大小関係について、$\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対し、$0 < a < 1$ のとき、$x < y$ が成り立つなら、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\exp_a y - \exp_a x = \exp_a(x + y - x) - \exp_a x &= \exp_a x \exp_a(y - x) - \exp_a x\\
&= \exp_a x\left(\exp_a(y - x) - 1\right)
\end{aligned}$$

ここで、$(y - x)\ln a < 0$ が成り立つことに注意すれば、次のようになる。

$$\exp_a(y - x) = \exp\left((y - x)\mathrm{Log}a\right) = \exp\left((y - x)\ln a\right) < 1$$

したがって、$\exp_a(y - x) - 1 < 0$ が得られ $\exp_a x > 0$ が成り立つことに注意すれば、次のようになる。

$$\exp_a y - \exp_a x = \exp_a x\left(\exp_a(y - x) - 1\right) < 0$$

よって、$\exp_a y < \exp_a x$ が成り立つ。

$a = 1$ のときでは定理 3.3.9 による。$1 < a$ のときでは $0 < a < 1$ のときと同様にして示される。 □

定理 3.3.15. $\forall a \in \mathbb{R}^+$ に対し、底 a の指数関数の極限について $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、次式たちが成り立つ。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\exp_a x &= \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 < a < 1\\ 1 & \text{if} \quad a = 1\\ \infty & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}\\
\lim_{x\to-\infty}\exp_a x &= \begin{cases} \infty & \text{if} \quad 0 < a < 1\\ 1 & \text{if} \quad a = 1\\ 0 & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}\\
\lim_{x\to\infty}\frac{\exp_a x}{|x|^n} &= \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 < a \leq 1\\ \infty & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}\\
\lim_{x\to-\infty}\frac{\exp_a x}{|x|^n} &= \begin{cases} \infty & \text{if} \quad 0 < a < 1\\ 0 & \text{if} \quad 1 \leq a \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty}|x|^n\exp_a x=\begin{cases}0 & \text{if} \quad 0<a<1\\ \infty & \text{if} \quad 1\leq a\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}|x|^n\exp_a x=\begin{cases}\infty & \text{if} \quad 0<a\leq 1\\ 0 & \text{if} \quad 1<a\end{cases}$$

証明. $\forall a\in\mathbb{R}^+$ に対し、底 a の指数関数の極限について $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し、定理 3.1.9 より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\exp_a x &= \begin{cases}\lim_{x\to\infty}\exp\left(x\mathrm{Log}a\right) & \text{if} \quad 0<a<1\\ \lim_{x\to\infty}1 & \text{if} \quad a=1\\ \lim_{x\to\infty}\exp\left(x\mathrm{Log}a\right) & \text{if} \quad 1<a\end{cases}\\
&= \begin{cases}\lim_{x\to\infty}\exp\left(x\ln a\right) & \text{if} \quad 0<a<1\\ 1 & \text{if} \quad a=1\\ \lim_{x\to\infty}\exp\left(x\ln a\right) & \text{if} \quad 1<a\end{cases}\\
&= \begin{cases}\lim_{x\ln a\to-\infty}\exp\left(x\ln a\right) & \text{if} \quad 0<a<1\\ 1 & \text{if} \quad a=1\\ \lim_{x\ln a\to\infty}\exp\left(x\ln a\right) & \text{if} \quad 1<a\end{cases}\\
&= \begin{cases}0 & \text{if} \quad 0<a<1\\ 1 & \text{if} \quad a=1\\ \infty & \text{if} \quad 1<a\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\exp_a x &= \begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\exp\left(x\mathrm{Log}a\right) & \text{if} \quad 0<a<1\\ \lim_{x\to\infty}1 & \text{if} \quad a=1\\ \lim_{x\to-\infty}\exp\left(x\mathrm{Log}a\right) & \text{if} \quad 1<a\end{cases}\\
&= \begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\exp\left(x\ln a\right) & \text{if} \quad 0<a<1\\ 1 & \text{if} \quad a=1\\ \lim_{x\to-\infty}\exp\left(x\ln a\right) & \text{if} \quad 1<a\end{cases}\\
&= \begin{cases}\lim_{x\ln a\to\infty}\exp\left(x\ln a\right) & \text{if} \quad 0<a<1\\ 1 & \text{if} \quad a=1\\ \lim_{x\ln a\to-\infty}\exp\left(x\ln a\right) & \text{if} \quad 1<a\end{cases}\\
&= \begin{cases}\infty & \text{if} \quad 0<a<1\\ 1 & \text{if} \quad a=1\\ 0 & \text{if} \quad 1<a\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\exp_a x}{|x|^n} &= \begin{cases}\lim_{x\to\infty}|\ln a|^n\cdot\dfrac{\exp\left(x\mathrm{Log}a\right)}{|x|^n\left|\ln a\right|^n} & \text{if} \quad 0<a<1\\ \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|^n} & \text{if} \quad a=1\\ \lim_{x\to\infty}|\ln a|^n\cdot\dfrac{\exp\left(x\mathrm{Log}a\right)}{|x|^n\left|\ln a\right|^n} & \text{if} \quad 1<a\end{cases}\\
&= \begin{cases}\left|\ln a\right|^n\lim_{x\to\infty}\dfrac{\exp\left(x\ln a\right)}{\left|x\ln a\right|^n} & \text{if} \quad 0<a<1\\ 0 & \text{if} \quad a=1\\ \left|\ln a\right|^n\lim_{x\to\infty}\dfrac{\exp\left(x\ln a\right)}{\left|x\ln a\right|^n} & \text{if} \quad 1<a\end{cases}
\end{aligned}$$

$$
= \begin{cases} |\ln a|^n \lim\limits_{x\ln a \to -\infty} \dfrac{\exp(x\ln a)}{|x\ln a|^n} & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ 0 & \text{if} \quad a = 1 \\ |\ln a|^n \lim\limits_{x\ln a \to \infty} \dfrac{\exp(x\ln a)}{|x\ln a|^n} & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} |\ln a|^n \cdot 0 & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ 0 & \text{if} \quad a = 1 \\ |\ln a|^n \cdot \infty & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 < a \le 1 \\ \infty & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}
$$

$$
\lim_{x\to-\infty} \frac{\exp_a x}{|x|^n} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} |\ln a|^n \cdot \dfrac{\exp(x\mathrm{Log}a)}{|x|^n |\ln a|^n} & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{|x|^n} & \text{if} \quad a = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} |\ln a|^n \cdot \dfrac{\exp(x\mathrm{Log}a)}{|x|^n |\ln a|^n} & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} |\ln a|^n \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\exp(x\ln a)}{|x\ln a|^n} & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ 0 & \text{if} \quad a = 1 \\ |\ln a|^n \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\exp(x\ln a)}{|x\ln a|^n} & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} |\ln a|^n \lim\limits_{x\ln a \to \infty} \dfrac{\exp(x\ln a)}{|x\ln a|^n} & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ 0 & \text{if} \quad a = 1 \\ |\ln a|^n \lim\limits_{x\ln a \to -\infty} \dfrac{\exp(x\ln a)}{|x\ln a|^n} & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} |\ln a|^n \cdot \infty & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ 0 & \text{if} \quad a = 1 \\ |\ln a|^n \cdot 0 & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} \infty & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ 0 & \text{if} \quad 1 \le a \end{cases}
$$

$$
\lim_{x\to\infty} |x|^n \exp_a x = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{|\ln a|^n} \cdot |x|^n |\ln a|^n \exp(x\mathrm{Log}a) & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} |x|^n & \text{if} \quad a = 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{|\ln a|^n} \cdot |x|^n |\ln a|^n \exp(x\mathrm{Log}a) & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{1}{|\ln a|^n} \lim\limits_{x\to\infty} |x\ln a|^n \exp(x\ln a) & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ \infty & \text{if} \quad a = 1 \\ \dfrac{1}{|\ln a|^n} \lim\limits_{x\to\infty} |x\ln a|^n \exp(x\ln a) & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{1}{|\ln a|^n} \lim\limits_{x\ln a\to-\infty} |x\ln a|^n \exp(x\ln a) & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ \infty & \text{if} \quad a = 1 \\ \dfrac{1}{|\ln a|^n} \lim\limits_{x\ln a\to\infty} |x\ln a|^n \exp(x\ln a) & \text{if} \quad 1 < a \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{cases} \dfrac{1}{|\ln a|^n} \cdot 0 & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ \quad \infty & \text{if} \quad\quad a = 1 \\ \dfrac{1}{|\ln a|^n} \cdot \infty & \text{if} \quad\quad 1 < a \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ \infty & \text{if} \quad\quad 1 \leq a \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} |x|^n \exp_a x &= \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{|\ln a|^n} \cdot |x|^n |\ln a|^n \exp(x\mathrm{Log}a) & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} |x|^n & \text{if} \quad\quad a = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{|\ln a|^n} \cdot |x|^n |\ln a|^n \exp(x\mathrm{Log}a) & \text{if} \quad\quad 1 < a \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{|\ln a|^n} \lim_{x \to -\infty} |x \ln a|^n \exp(x \ln a) & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ \infty & \text{if} \quad\quad a = 1 \\ \displaystyle\frac{1}{|\ln a|^n} \lim_{x \to -\infty} |x \ln a|^n \exp(x \ln a) & \text{if} \quad\quad 1 < a \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{|\ln a|^n} \lim_{x \ln a \to \infty} |x \ln a|^n \exp(x \ln a) & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ \infty & \text{if} \quad\quad a = 1 \\ \displaystyle\frac{1}{|\ln a|^n} \lim_{x \ln a \to -\infty} |x \ln a|^n \exp(x \ln a) & \text{if} \quad\quad 1 < a \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{|\ln a|^n} \cdot \infty & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ \quad \infty & \text{if} \quad\quad a = 1 \\ \dfrac{1}{|\ln a|^n} \cdot 0 & \text{if} \quad\quad 1 < a \end{cases} \\
&= \begin{cases} \infty & \text{if} \quad 0 < a \leq 1 \\ 0 & \text{if} \quad\quad 1 < a \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

3.3.3 対数関数

定義 3.3.5. $\forall a \in D \setminus \{1\}$ に対し、次式のように関数 Log_a が定義される。

$$
\mathrm{Log}_a : D \to V(\mathrm{Log}_a) ; z \mapsto \frac{\mathrm{Log}z}{\mathrm{Log}a}
$$

その関数 Log_a を底 a の対数関数という。特に、$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ が成り立つとき、その関数 $\mathrm{Log}_a|\mathbb{R}^+$ を $\log_a$ とも書く。

定理 3.3.16. 底 e の対数関数 Log_e は主値での対数関数 Log に等しい。

証明. $\mathrm{Log}e = \ln e = 1$ が成り立つことから、明らかである。 □

定理 3.3.17. $\forall a \in D \setminus \{1\}$ に対し、底 a の対数関数 Log_a において、$V(\mathrm{Log}_a) = \dfrac{1}{\mathrm{Log}a}(\mathbb{R} + (-\pi, \pi)i)$ が成り立つ。特に、$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ が成り立つとき、$V(\log_a) = \mathbb{R}$ が成り立つ。

証明. 定理 3.3.3 よりすぐ分かる。特に、$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ が成り立つとき、$\mathrm{Log}a = \ln a$ が成り立つかつ、定理 3.1.47 より $V(\log_a) = \mathbb{R}$ が成り立つ。 □

定理 3.3.18. $\forall a \in D \setminus \{1\}$ に対し、底 a の対数関数 Log_a は全単射でありその逆写像 Log_a^{-1} が次式のように与えられる。

$$\mathrm{Log}_a^{-1} : \frac{1}{\mathrm{Log}a} \left(\mathbb{R} + (-\pi, \pi)i\right) \to D; z \mapsto \exp_a z$$

証明. $\forall a \in D \setminus \{1\}$ に対し、底 a の対数関数 Log_a は全単射であることは定理 3.3.4 より明らかである。そこで、次式のように写像 f が定義されれば、

$$f : \frac{1}{\mathrm{Log}a} \left(\mathbb{R} + (-\pi, \pi)i\right) \to D; z \mapsto \exp_a z$$

$\forall z \in D$ に対し、定理 3.3.4 より次のようになる。

$$f \circ \mathrm{Log}_a(z) = \exp_a \mathrm{Log}_a z = \exp\left(\frac{\mathrm{Log}z}{\mathrm{Log}a}\mathrm{Log}a\right) = \exp \mathrm{Log}z = z$$

一方で、$\forall z \in V\left(\mathrm{Log}_a\right)$ に対し、定理 3.3.15 に注意すれば、定理 3.3.4 より次のようになる。

$$\mathrm{Log}_a \circ f(z) = \mathrm{Log}_a \exp_a z = \frac{\mathrm{Log}\exp\left(z\mathrm{Log}a\right)}{\mathrm{Log}a} = \frac{z\mathrm{Log}a}{\mathrm{Log}a} = z$$

よって、その逆写像 Log_a^{-1} が次式のように与えられる。

$$\mathrm{Log}_a^{-1} : \frac{1}{\mathrm{Log}a} \left(\mathbb{R} + (-\pi, \pi)i\right) \to D; z \mapsto \exp_a z$$

□

定理 3.3.19. $\forall a \in D \setminus \{1\}$ に対し、底 a の対数関数 Log_a はその定義域 D で正則で次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log}_a z = \frac{1}{z\mathrm{Log}a}$$

証明. 定理 3.3.6 より明らかである。 □

定理 3.3.20. $\forall a \in D \setminus \{1\} \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ に対し、次式が成り立つ。

$$\mathrm{Log}_a xy = \mathrm{Log}_a x + \mathrm{Log}_a y$$
$$\mathrm{Log}_a \frac{1}{x} = -\mathrm{Log}_a x$$

証明. $\forall a \in D \setminus \{1\} \forall x \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\mathrm{Log}_a x = \dfrac{\ln x}{\mathrm{Log}a}$ が成り立つことから、定理 3.1.49 より明らかである。 □

定理 3.3.21. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ に対し、底 a の指数関数の大小関係について、$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ に対し、次のようになる。

- $0 < a < 1$ のとき、$x < y \Rightarrow \log_a y < \log_a x$ が成り立つ。
- $1 < a$ のとき、$x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$ が成り立つ。

証明. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ に対し、底 a の指数関数の大小関係について、次のようになることから、

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\mathrm{Log}x}{\mathrm{Log}a} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x \ln a}$$

$0 < a < 1$ のとき、定理 3.1.51 より $\ln a < 0$ が成り立つので、$\dfrac{d}{dx}\log_a x < 0$ が成り立つことになり、したがって、$x < y \Rightarrow \log_a y < \log_a x$ が成り立つ。$1 < a$ のとき、定理 3.1.51 より $\ln a > 0$ が成り立つので、$\dfrac{d}{dx}\log_a x > 0$ が成り立つことになり、したがって、$x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$ が成り立つ。 □

定理 3.3.22. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ に対し、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\log_a x &= \begin{cases} -\infty & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ \infty & \text{if} \quad 1 < a \end{cases} \\
\lim_{x\to+0}\log_a x &= \begin{cases} \infty & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{if} \quad 1 < a \end{cases} \\
\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^n} &= 0 \\
\lim_{x\to+0}\frac{\log_a x}{x^n} &= \begin{cases} \infty & \text{if} \quad 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{if} \quad 1 \leq a \end{cases} \\
\lim_{x\to+0} x^n \log_a x &= 0
\end{aligned}$$

証明. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\forall x \in \mathbb{R}^+$ に対し、$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ が成り立つので、$0 < a < 1$ のとき、$\ln a < 0$、$1 < a$ のとき、$0 < \ln a$ が成り立つことに注意すれば、定理 3.1.52 よりすぐ分かる。 □

3.3.4 底の変換公式

定理 3.3.23 (底の変換公式)**.** $\forall a, b \in D$ に対し、底について次のことが成り立つ。

- $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$a \neq 0$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$\exp_b z = \exp_a\left(z\mathrm{Log}_a b\right)$$

- $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ が成り立つなら、次式が成り立つ。

$$\mathrm{Log}_b z = \frac{\mathrm{Log}_a z}{\mathrm{Log}_a b}$$

この式を底の変換公式という。

証明. $\forall a, b \in D$ に対し、底について、$\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$a \neq 0$ が成り立つなら、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\exp_b z &= \exp\left(z\mathrm{Log}b\right) \\
&= \exp\left(z\frac{\mathrm{Log}b}{\mathrm{Log}a}\mathrm{Log}a\right) \\
&= \exp\left(z\mathrm{Log}_a b\mathrm{Log}a\right) \\
&= \exp_a\left(z\mathrm{Log}_a b\right)
\end{aligned}$$

一方で、$\forall z \in \mathbb{C}$ に対し、$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ が成り立つなら、次のようになる。

$$\mathrm{Log}_b z = \frac{\mathrm{Log}z}{\mathrm{Log}b} = \frac{\frac{\mathrm{Log}z}{\mathrm{Log}a}}{\frac{\mathrm{Log}b}{\mathrm{Log}a}} = \frac{\mathrm{Log}_a z}{\mathrm{Log}_a b}$$

□

3.3.5 Napier 数の極限

定理 3.3.24. Napier 数の極限について、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= e\\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= e\\ \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= e\\ \lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)} &= 1\\ \lim_{x\to0}\frac{\exp x-1}{x} &= 1\end{aligned}$$

証明. 自然な指数関数と自然な対数関数の極限について、実数列 $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ が考えられれば、$\lim_{n\to\infty} n=\infty$ が成り立つので、定理 1.6.2 と定理 3.1.3 より $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ が成り立つ。

また、以下、$y=-x$ とおくと、次のようになる。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}\\ &= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{y}\right)^y}\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{y}}\right)^y\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y-1+1}\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\frac{y}{y-1}\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to\infty}\frac{y}{y-1}\\ &= \lim_{y-1\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{y}}\\ &= e\cdot1=e\end{aligned}$$

さらに、上記の議論により次のようになるので、

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{\frac{1}{x}\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}=e\\ \lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{\frac{1}{x}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}=e\end{aligned}$$

$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ が得られる。

最後に次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)} &= \lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} \\
&= \frac{1}{\ln\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}} \\
&= \frac{1}{\ln e} = 1 \\
\lim_{x\to0}\frac{\exp x-1}{x} &= \lim_{x\to0}\frac{\exp x-1}{\ln\exp x} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\exp x-1}{\ln\left(1+\exp x-1\right)} \\
&= \lim_{\exp x-1\to0}\frac{\exp x-1}{\ln\left(1+\exp x-1\right)} = 1
\end{aligned}
$$

□

参考文献

[1] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版社, 1980. 第 34 刷 p182-204 ISBN978-4-13-062005-5