

Questão 52

Questão número 52 da disciplina de Matemática da prova Tipo-2 (verde) de conhecimentos gerais para o cargo de Analista Legislativo – Informática Legislativa do concurso da Câmara dos Deputados.

Introdução

A Questão Propriamente Dita:

52

Uma urna contém duas bolas brancas. Uma segunda urna contém uma bola branca e outra preta. Retira-se uma bola branca, desconhecendo-se de qual urna ela saiu. A seguir, as urnas são embaralhadas e uma segunda bola é retirada.

A probabilidade de que a segunda bola seja preta é igual a

(A) $\frac{3}{8}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{1}{3}$.

(E) $\frac{1}{4}$.

O gabarito preliminar da questão foi a letra "(A) $\frac{3}{8}$ ". Como será demonstrado, a resposta correta é a alternativa "(D) $\frac{1}{3}$ ". Portanto, solicita-se a alteração do gabarito da letra "A" para a letra "D".

A demonstração será feita pela análise do espaço amostral e por meio de simulação computacional.

Espaço amostral

bola-1	bola-2
branca_urna1_bola1	branca_urna1_bola2
branca_urna1_bola1	branca_urna2_bola1
branca_urna1_bola1	preta
branca_urna1_bola2	branca_urna1_bola1
branca_urna1_bola2	branca_urna2_bola1
branca_urna1_bola2	preta
branca_urna2_bola1	branca_urna1_bola1
branca_urna2_bola1	branca_urna1_bola2
branca_urna2_bola1	preta

É fácil perceber que existem somente 9 possibilidades e que 3 delas correspondem a bolas pretas. Portanto a probabilidade é de 3/9, equivalente a 1/3.

Resultados das Simulações

O código fonte está disponível [neste repositório](#) no Github.

Percebe-se que o valor converge para 0.33, equivalente a 1/3 da alternativa "D" e não da alternativa "A" (3/8).

Somente a título de estudo, simulou-se também a possibilidade de reposição (0.25, 25%), a qual não faz sentido no contexto da questão, conforme explicado adiante em seção própria. Perceba que o resultado aponta para a independência entre os eventos nesse cenário.

Em Python

Foram usadas cem mil (100.000) iterações para o script em Python:

```
$ time python simulacao.py
Simulação com embaralhamento aleatório sem reposição
Probabilidade de a segunda bola ser preta: 0.33328878970507664
Tempo de execução: 0.6774859659926733 seconds

Simulação com embaralhamento redistribuído sem reposição
Probabilidade de a segunda bola ser preta: 0.33242088396314595
Tempo de execução: 1.0199562030029483 seconds

Simulação com embaralhamento aleatório com reposição
Probabilidade de a segunda bola ser preta: 0.2501732132388211
Tempo de execução: 0.733854796999367 seconds

Simulação com embaralhamento redistribuído com reposição
Probabilidade de a segunda bola ser preta: 0.25174331949323964
Tempo de execução: 1.3112545519979903 seconds

real    0m3,808s
user    0m3,781s
sys     0m0,026s
```

O script pode ser executado de maneira independente [neste link](#).

Em Javascript

Resultados usando Javascript:

```
$ node simulacao.js
Simulação com embaralhamento aleatório sem reposição
Probabilidade de a segunda bola ser preta: 0.3340281953631322
Tempo de execução: 0.057 seconds
```

```
Simulação com embaralhamento redistribuído sem reposição
Probabilidade de a segunda bola ser preta: 0.33413304543697603
Tempo de execução: 0.084 seconds

Simulação com embaralhamento aleatório com reposição
Probabilidade de a segunda bola ser preta: 0.24883584006851148
Tempo de execução: 0.047 seconds

Simulação com embaralhamento redistribuído com reposição
Probabilidade de a segunda bola ser preta: 0.2504057469735267
Tempo de execução: 0.081 seconds
```

Uma versão do script com menos iterações (1500 por conta do limite do site) pode ser executada de maneira independente [neste link](#).

Versão simplificada em Java

Resultado usando um código simplificado em Java:

```
[Running] cd "/home/fabio/Pessoal/Concursos-Publicos/Concursos-E-
Provas/FGV/2023/Camara-dos-Deputados/recursos/questas-52-probabilidade/" &&
javac Simulacao.java && java Simulacao
Probabilidade de a segunda bola ser preta: 0.33308904848832094
Tempo de execução: 0.107 seconds
```

Uma versão do código em Java pode ser executada de maneira independente [neste link](#).

Sobre o Embaralhamento das Urnas

A etapa de "embaralhar as urnas" no problema apresentado pode ter múltiplas interpretações, dependendo de como se entende o ato de embaralhar no contexto.

Cada uma dessas interpretações leva a uma maneira diferente de abordar o problema e calcular as probabilidades resultantes. A escolha da interpretação correta dependeria do contexto específico ou de esclarecimentos adicionais na formulação do problema.

As seções a seguir abordam algumas possíveis interpretações.

Aleatoriedade na Escolha da Urna

"Embaralhar as urnas" pode significar que a escolha da urna para a próxima retirada da bola é feita de forma completamente aleatória, sem qualquer viés ou padrão. Isso implicaria que não há como saber de qual urna a próxima bola será retirada, independentemente de qual urna foi usada anteriormente. Essa parece ser a interpretação mais razoável e é a primeira considerada nas simulações.

Redistribuição (Permutação) das Bolas entre as Urnas

Uma interpretação mais complexa poderia ser a de que as bolas são redistribuídas entre as urnas de alguma forma antes da segunda retirada. No entanto, esta interpretação não altera as probabilidades envolvidas

no problema, porquanto as urnas servem apenas como container. Essa interpretação é considerada e o resultado da simulação confirma essa tese.

Restauração das Condições Iniciais (Reposição)

Pode ser entendido que após a retirada da primeira bola, as urnas são reconfiguradas para seu estado inicial (por exemplo, se a primeira bola veio da Urna 2, uma nova bola branca é colocada de volta nela), garantindo que a segunda retirada seja feita sob as mesmas condições iniciais.

A questão não menciona reposição. A interpretação mais razoável é a de entender que não há reposição, pois se houvesse reposição o segundo evento seria independente do primeiro, não impactando a retirada da primeira bola ou qualquer embaralhamento.

Embora falte razão nesse cenário, ele foi considerado nas últimas simulações a título de estudo.

Troca Física das Posições das Urnas

Pode-se interpretar que as urnas são fisicamente movidas ou rearranjadas. Isso não altera o conteúdo das urnas, mas poderia afetar a escolha se a decisão de qual urna usar é baseada na posição física (por exemplo, sempre escolhendo a urna à esquerda). Isso não ocorre no enunciado do problema, portanto não deve ser considerado.

Simbólico, Sem Efeito Prático

"Embaralhar as urnas" pode ser simplesmente uma frase para indicar uma pausa ou separação entre os eventos de retirada das bolas, sem ter um efeito prático ou literal no problema. Isso não altera as probabilidades.