

Programmierparadigmen
Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung

Autor: Frieder Haizmann

Inhaltsverzeichnis

1	Haskell	1
1.1	Listen	1
1.2	Funktionsanwendungen	1
1.3	Lokale Namensbindung	1
1.4	Folds	1
1.5	Typen	2
1.6	Monaden	3
2	λ-Kalkül	3
2.1	untypisiertes λ -Kalkül	3
2.2	Church-Zahlen	4
2.3	Regelsysteme	4
2.4	Typsysteme	5
2.5	Typinferenz	6

1 Haskell

Linear Rekursiv: In jeden Definitionszweig kommt nur ein rekursiver Aufruf vor.

Endrekursiv: Linear rekursiv in jeden Zweig ist der rekursive Aufruf nicht in andere Aufrufe eingebettet.

1.1 Listen

```
[], x:xs, head [1,2,3] => 1, tail [1,2,3] => [2,3], init xs -- Alle elemente bis auf das l
null [1,2,3] => False, length, isIn, a ++ b, take n l -- erste n Elemente von l,
drop n l -- l ohne erste n Elemente, xs !! n -- Nte Listenelement,

reverse xs
map f (x:xs) -- wendet f auf alle Listenelemente an
filter pred (x:xs) -- behalte alle Elemente, die Prädikat erfüllen
```

1.2 Funktionsanwendungen

Funktionskomposition $f \circ g$: `comp f g = (\x -> f (g x))` Infix: `f.g`

n-Fache Funktionsanwendung f^n : `iter f n`

Funktionstypen sind rechts-assoziativ, Funktionsanwendung ist links-assoziativ

`f x = y + x` Variable x Gebunden, Variable y frei.

1.3 Lokale Namensbindung

```
energy m = let c = 299
            square = x -> x * x
            in m * (square c)

energy m = m * (square c)
            where c = 299
            square x = x * x
```

Einrückung hat semantische Bedeutung.

Bei Schachtelung: Inneres `let` bindet stärker.

1.4 Folds

```
foldr operator initial [] = initial
foldr operator initial (x:xs) = operator x (foldr operator initial xs)
foldr f z [x1, x2, ..., xn] == x1 `f` (x2 `f` ... (xn `f` z) ...)
foldl op i [] i
foldl op i (x:xs) = foldl op (op i x) xs
foldl f z [x1, x2, ..., xn] == (...((z `f` x1) `f` x2) `f` ...) `f` xn
```

Beispiel: `length list = foldr (\x n -> n + 1) 0 list`

```
concat [xs, ys, zs] = xs ++ ys ++ zs concat == foldr app []
```

```
zipWith f (x:xs) (y:ys) = f x y : zipWith f xs ys
```

```
zipWith f xs ys = []
```

```
zip = zipWith (,) -- zip [1,2,3], [7,8,9] = [(1,7), (2,8), (3,9)]
```

Kurznotation Intervalle $[a..b] =>^+ [a, a+1, a+2, \dots, b]$

List Comprehensions $[e \mid q_1, \dots, q_m]$, q_i Tests oder Generatoren der Form $p \leftarrow list$ mit Muster p und Listenausdruck $list$

Beispiel: `squares n = [x * x | x <- [0..n]]`

Im Muster p gebundene Variablen können in e und in q_i verwendet werden

Beispiel: `evens n = [x | $\underbrace{x <- [0..n]}_{\text{Generator}}, \underbrace{x \text{ `mod `2 == 0}}_{\text{Tester}}$]` **Unendliche Listen:** `odds = 1 : map (+2)`

```
iterate f a = a : iterate f (f a)
```

```
odds = iterate (+2) 1
```

```
iterate f x !! 23 -- führt "Schleife" 23 mal aus
```

1.5 Typen

```
type neuerName = [Integer]
               = String
               = (a, b)
               = ...
```

Algebraische Datentypen

Konstruktoren

```
data Shape = Circle Double          Circle :: Double -> Shape
           | Rectangle Double Double Rectangle :: Double -> Double -> Shape
```

Aufzählungstypen

```
data Season = Spring | Summer | Autumn | Winter
```

Polymorphe Datentypen (Optionale Werte)

```
data Maybe t = Nothing | Just t
data Either s t = Left s | Right t
data Matrix t = Dense [[t]] -- Liste von Zeilen
               | Sparse [(Integer, Integer t)] t -- Einträge (i,j,v) und Defaultwert
data Stack t = Empty | Stacked t (Stack t)
```

Polymorphe Funktion mit Typeinschränkung

```
qsort :: Ord t => [t] -> [t]
```

```
qsort [] = []
```

```
qsort (p:ps) = ...
```

Instanzen von Ord implementieren

`<=, <, >, >=, ...`

Typklassen-Definitionen

```
instance Eq Bool where
  True == True = True
  True == False = False
  ...
```

```
data shape = Circle Double
           | Rectangle Double Double
  deriving Eq -- Keine eigene (==) Funktion mehr notwendig
```

Fehlende Implementierungen: Default implementiert

Automatische Instanziierung auch für **Show,Ord,Enum**

1.6 Monaden

2 λ -Kalkül

2.1 untypisiertes λ -Kalkül

	Notation	Beispiele	
Variablen	x	x	y
Abstraktion	$\lambda x.t$	$\lambda y.0$	$\lambda f.\lambda x.\lambda y.f\ y\ x$
Funktionsanwendung	$t_1 t_2$	$f42$	$\lambda x.x + 5) 7$

Funktionsanwendung linksassoziativ, bindet stärker als Abstraktion

α -Äquivalenz	t_1 und t_2 heißen α -äquivalent $t_1 \stackrel{\alpha}{=} t_2$, wenn t_1 in t_2 durch konsistente Umbenennung der λ -gebundenen Variablen überführt werden kann
η -Äquivalenz	Terme $\lambda x.f\ x$ und f heißen η -äquivalent $(\lambda x.f\ x \stackrel{\eta}{=} f)$ falls x nicht freie Variable von f
Redex	Ein λ -Term der Form $(\lambda x.t_1) t_2$ heißt Redex
β -Reduktion	β -Reduktion entspricht der Ausführung der Funktionsanwendung auf einen Redex

$$(\lambda x.t_1)t_2 \Rightarrow t_1[x \mapsto t_2]$$

Substitution	$t_1[x \mapsto t_2]$ erhält man aus dem Term t_1 , wenn man alle freien Vorkommen von x durch t_2 ersetzt
Normalform	Ein Term, der nicht weiter reduziert werden kann
Volle β -Reduktion	Jeder Redex kann jederzeit reduziert werden
Normalreihenfolge	Immer der linkeste äußerste Redex wird reduziert

$let\ x = t_1\ in\ t_2$ wird zu $(\lambda x.t_2) t_1$

2.2 Church-Zahlen

Eine (natürliche) Zahl drückt aus, wie oft die funktion s angewendet wurde

$$\begin{array}{ll}
 c_0 = \lambda s. \lambda z. z & \text{Nachfolgefunktion} \\
 c_1 = \lambda s. \lambda z. s \ z & succ = \lambda n. \lambda s. \lambda z. s \ (n \ s \ z) \\
 c_2 = \lambda s. \lambda z. s \ (s \ z) & \text{wobei } n \text{ Church Zahl} \\
 \vdots & \\
 c_n = \lambda s. \lambda z. s^n \ z &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Addition} & plus = \lambda m. \lambda n. \lambda z. m \ s \ (n \ s \ z) \\
 & times = \lambda m. \lambda n. \lambda s. n \ (m \ s) \\
 \text{Multiplikation} & \stackrel{\eta}{=} \lambda m. \lambda n. \lambda s. \lambda z. n \ (m \ s) \ z \\
 \text{Potenzieren} & exp = \lambda m. \lambda n. n \ m \\
 & \stackrel{\eta}{=} \lambda m. \lambda n. \lambda s. \lambda z. n \ m \ s \ z \\
 c_{true} = \lambda t. \lambda f. t & c_{false} = \lambda t. \lambda f. f \\
 isZero = \lambda n. n \ (\lambda x. c_{false}) & c_{true}
 \end{array}$$

Rekursionsoperator $y = \lambda f. (\lambda x. f \ (x \ x)) (\lambda x. f \ (x \ x))$
 $f \ (y \ f) \stackrel{\eta}{=} y \ f$
 $y \ f$ ist Fixpunkt von f

Church-Rosser: Wenn $t \Rightarrow t_1$ und $t_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} t_2$, dann gibt es t' mit $t_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} t'$ und $t_2 \stackrel{*}{\Rightarrow} t'$

Call-by-name Reduziere linkesten äußersten Redex aber nicht, falls von einem λ umgeben \rightarrow Reduziere Argumente erst, wenn benötigt
 Call-by-Value Reduziere linkesten Redex, der nicht von einem λ umgeben und dessen Argument ein Wert \rightarrow Argument vor Funktionsaufruf ist auszuwerten

2.3 Regelsysteme

Frege'scher Schlussstrich

$$\frac{\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \dots \quad \varphi_n}{\varphi}$$

Jede Regel stellt Implikation dar, φ_i Voraussetzungen, φ Konklusion

Introduktionsregel

Eliminationsregel

Konjunktion

$$\wedge I \frac{\psi \quad \varphi}{\psi \wedge \varphi}$$

$$\wedge E_1 \frac{\psi \wedge \varphi}{\psi} \quad \wedge E_2 \frac{\psi \wedge \varphi}{\varphi}$$

All-Quantor

$$\forall I \frac{P(y) \text{ } y \text{ ist frei in } P}{\forall x.P(x)}$$

$$\forall E \frac{\forall x.P(x)}{P(y)}$$

Implikation

$$\begin{array}{c} \psi \\ \vdots^1 \\ \rightarrow I \frac{\varphi}{\psi \rightarrow \varphi} \end{array}$$

$$\text{MP} \frac{\psi \rightarrow \varphi \quad \psi}{\varphi}$$

Alternative Notation

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\vdash \varphi}$$

Regelsysteme alternative Notation

Introduktionsregeln

Eliminationsregeln

$$\wedge I \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$$

$$\wedge E_1 \frac{\Gamma \vdash \psi \wedge \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \quad \wedge E_2 \frac{\Gamma \vdash \psi \wedge \varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

$$\rightarrow I \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \quad \text{ASSMI} \frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

$$\text{MP} \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

$$\wedge I_1 \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} \quad \dots$$

$$\vee E \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \omega \quad \Gamma, \psi \vdash \omega}{\Gamma \vdash \omega}$$

2.4 Typsysteme

Funktionstypen rechtsassoziativ Typsystem $\Gamma \vdash t : \tau$ im Typkontext Γ hat Term t Typ τ . Γ ordnet freien Variablen x ihren Typ $\Gamma(x)$ zu.

¹Herleitung gemäß Regeln verbindet Implikation der Regeln mit prädikatenlogischer Implikation

$$\text{CONST} \frac{c \in \text{Const}}{\Gamma \vdash c : \tau_2}$$

$$\text{VAR} \frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x : \tau}$$

$$\text{ABS} \frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x. t : \tau_1 \longrightarrow \tau_2}$$

$$\text{APP} \frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_2 \longrightarrow \tau \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash t_1 t_2 : \tau}$$

Typisierung von λ -Term t : Paar (Γ, τ) , sodass $\Gamma \vdash t : \tau$ herleitbar
 β -Reduktion: Substitution von x ($\lambda x. t_1$) $t_2 \Rightarrow t_1[x \mapsto t_2]$

Substitutionslemma	Wenn $\Gamma, x : \tau_2 \vdash t_1 : \tau_1$ und $\Gamma \vdash t_2 : \tau_2$ dann $\Gamma \vdash t_1[x \mapsto t_2] : \tau_1$
Typerhaltungstheorem	Wenn $\Gamma \vdash t : \tau$ und $t \Rightarrow t'$ dann $\Gamma \vdash t' : \tau$
Typschema	Typ der Gestalt $\forall \alpha_1. \forall \alpha_2. \dots \forall \alpha_n$ heißt Typschema. Es bindet freie Typvariablen $\alpha_1 \dots \alpha_n$ in τ
Instanziierung eines Typschemas	Für nicht-Schema-Typen τ_2 ist der Typ $\tau[\alpha \mapsto \tau_2]$ eine Instanziierung vom Typschema $\forall \alpha. \tau$ Schreibweise $(\forall \alpha. \tau) \succeq \tau[\alpha \rightarrow \tau_2]$
Beispiele	$\forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha \succeq \text{int} \rightarrow \text{int}$ $\forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha \succeq (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \quad \text{int} \succeq \text{int}$ $\alpha \rightarrow \alpha \not\succeq \text{int} \rightarrow \text{int} \quad \alpha \not\succeq \text{bool}$ $\forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha \not\succeq \text{bool}$

2.5 Typinferenz

$ta(\tau, \Gamma)$ bindet alle in Γ freien Typvariablen mit einem \forall in τ
 Bsp.: $ta(\alpha \rightarrow \beta, x : \beta, y : \delta) = \forall \alpha. \alpha \rightarrow \beta$

$$\text{LET} \frac{\Gamma \vdash y : \pi \quad \Gamma' \vdash b : \beta}{\Gamma \vdash \text{let } x = y \text{ in } b : \tau}$$

Constraints: Finde Unifikator σ_{LET} und allg. Typ π für y

1. Sei C_0 die bisherige Constraintmenge inklusive $\{\tau = \beta\}$
2. Sammle Constraints aus linken Teilbaum in C_{LET}
3. Berechne mgu σ_{LET} von C_{LET}
4. Berechne $\Gamma' := \sigma_{\text{LET}}(\Gamma), x : ta(\sigma_{\text{LET}}(\pi), \sigma_{\text{LET}}(\Gamma))$
5. Benutze Γ' in rechten Teilbaum, sammle Constraints in C_1

6. Ergebnisconstraints sind $C_0 \cup C'_{\text{LET}} \cup C_1$
mit $C'_{\text{LET}} := \{\alpha_i = \sigma_{\text{LET}}(\alpha_i) \mid \sigma_{\text{LET}} \text{ definiert f\"ur } \alpha_i\}$