AST2000 Del 1B
Interaktive forelesningsnotater: forelesning 2 av 2

[redacted]

Dette er et alternativ til forelesningen i emnet. Har du gått skikkelig gjennom disse interaktive forelesningsnotatene så trenger du ikke å lese de fulle forelesningsnotatene (med unntak av oppgavene bak). All informasjonen du trenger, får du her. Du kommer til å få mange grublespørsmål og diskusjonsoppgaver, det er meningen at disse skal gjøres i grupper av minst 2, maks 4 studenter. **Det er defor sterkt anbefalt at dere sitter sammen i grupper når dere går gjennom disse interaktive forelesningsnotatene, du vil få betydelig mer utbytte av dem på den måten. Hvis du har kommentarer ris/ros til disse forelesningsnotatene eller til emnet, trykk på ☺ ☹ knappen som du finner på alle sider.**

Trykk denne knappen for å begynne

- HUSK at du får mer ut av de interaktive forelesningsnotatene når du gjør de sammen med noen. Diskusjonene med andre er svært viktige.
- Det er mange spørsmål/grubliser underveis, sett dere selv en tidsgrense, 1 minutt på de korte, maks 4-5 minutter på de lenger. Ha en alarm ved siden av, ellers kommer dere til å bruke alt for langt tid. Har dere ikke fått det til etter kort tid, gå videre, se svaret og lær!
- Er du i det minste tvil om noe, så finnes det en FORUM knapp, trykk det og still spørsmål med en gang mens du enda husker spørsmålet!

Trykk denne knappen for å begynne

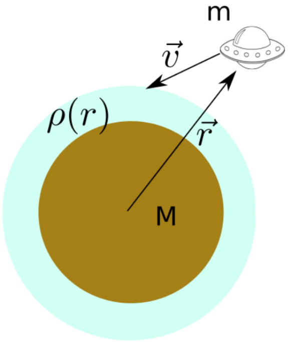
Forrige side

Hvis du allerede har begynt på denne forelesningen og vil hoppe rett inn til et annet kapittel, kan du trykke her:

Merk at sidene er merket med sidenummer på denne måten: SIDE X/Y/Z. Her er Z antall sider totalt, Y er sidenummeret til siste side i avsnittet du holder på med og X er sidenummeret til siden du er på.

Neste side

Forrige side



Velkommen til andre forelesning i del 1B! Under er det noen punkter til repetisjon. Kun når du har **full kontroll** på alt dette kan du gå videre. Hvis ikke, gå tilbake til forrige forelesning for å repetere litt eller spør foreleser og/eller gruppelærer hvis det er ting som er uklare. Dette forelesningsnotatet tilsvarer en og en halv fysisk dobbelttime, kanskje litt mindre.

Er du klar?

Neste side

1. Kan du prøve å tenke gjennom hvordan du ville utledet tolegemeproblemet hvis du skal gjøre det igjen uten hjelp av forelesningsnotater? Du trenger ikke å gjøre alle stegene i detalj, men tenke gjennom, steg for steg, hva vi gjorde. Hvis du er usikker på noen av stegene kikk tilbake.
2. Klarer du å bruke Newtons lover på vektorform, inkludert derivasjoner og bruk av enhetsvektorer i polarkoordinater?
3. Kjenner du til alle begrepene og egenskapene til ellipser som du skal kjenne i kurset?

SIDE 1/3/45

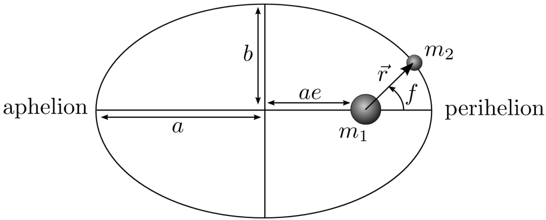
Vi utledet at løsningen av tolegemeproblemet kan skrives som:

$$r(f) = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

der p og e er positive integrasjonskontstanter. Hvis $e < 1$ så er dette formelen for en ellipse:

$$r(f) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos f}$$

der det ene objektet er i brennpunktet:



Men det store spørsmålet i forrige forelesning var:

Hva hvis $e \geq 1$????

Da har vi ikke lenger en ellipsebane...

Men hva har vi da...???

SIDE 3/3/45

Likningen vi har kommet frem til er tilfeldigvis likningen for *kjeglesnitt (conic sections)* i polarkoordinater. Vet du hvilke 3 typer kurver som inngår i kjeglesnittene? Den ene er ellipser ja, men de andre to?

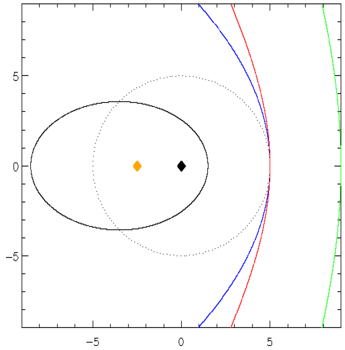
Trykk her når du har funnet ut av det

SIDE 3/3/45

Likningen vi har kommet frem til er tilfeldigvis likningen for *kjeglesnitt (conic sections)* i polarkoordinater. Vet du hvilke 3 typer kurver som inngår i kjeglesnittene? Den ene er ellipser ja, men de andre to?

Trykk her når du har funnet ut av det

Ganske riktig, *parabler* og *hyperbler*:



De sorte linjene er ellipser, den blå er en parabel mens den røde og grønne er hyperbler. Den sorte prikkete ellipsen har $e = 0$ og er dermed en sirkel. Den heltrukne sorte linja er en ellipse med eksentrisitet $e = 0.7$. Den sorte prikken er brennpunktet i sirkelen (og dermed sentrum siden det er sirkel), den oransje prikken er brennpunktet i ellipsen.

Neste side

Forrige side

Nytt tema:

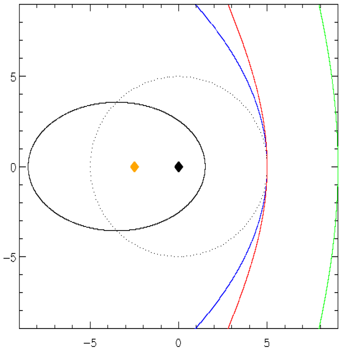
Kjeglesnitt

Dette temaet fortsetter frem til side **??** av 42.

La oss repetere litt om kjeglesnitt og se mer på uttrykket i polarkoordinater.

Ja, hvordan var nå det igjen...

SIDE 4/7/45



Hyperbler og parabler har også formel

$$r(f) = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

men for

- parabler er $e = 1$ og $p = 2a$
- hyperbler er $e > 1$ og $p = -a(1 - e^2)$
- mens vi husker at ellipser hadde $e < 1$ og $p = a(1 - e^2)$

Merk at for ellipser og hyperbler så er det kun et minustegn som skiller uttrykket for p. Årsaken til minustegnet er for å holde p positiv (r må jo være en positiv størrelse) når e plutselig har blitt større enn 1. I figuren til venstre så har alle kurvene $a = 5$ mens de to hyperblene har $e = 2$ (rød) og $e = 2.8$ (grønn).

Neste side

Så ja, Kepler fant faktisk ikke hele sannheten! Hvorfor ikke?

Fordi, som du ser fra figuren, objekter som går i parabelbaner og hyperbelbaner ikke er bundet til sola, de kommer bare innom men aldri tilbake igjen!

Slike objekter vil dermed ikke være fra vårt solsystem men være besøk fra det interstellar rom.

Neste side

Det er først nå i det siste at man har oppdaget slike objekter. Det aller første ble oppdaget i 2017 og ble kalt *Oumuamua*. Her er en kunstrisk fremstilling av hvordan objektet kan se ut (credit: ESO/M. Kornmesser)

SIDE 7/7/45

Vi skal snart se litt på hva betingelsene er for at et objekt får en elliptisk, parabel eller hyperbelbane. Dette er jo spesielt viktig for satelitter. Hvis vi ønsker å ha en satelitt i bane rundt jorda så bør vi helst sørge for at den går i en ellipsebane. Ellers vil vi jo miste satelitten! Men før vi gjør det la oss kikke litt på ukeoppgavene.

Vi har her utledet Keplers 1.lov. Men hva med Keplers 2. og 3. lov? De skal du få lov til å utlede selv i oppgave 1B.1 og 1B.2.

Forrige side

Nytt tema:

Keplers 2. og 3.lov

Dette temaet fortsetter frem til side **??** av 42.

Nå skal du få tyvtitte litt på oppgavene der du skal utlede Keplers 2. og 3. lov. Nå som vi har utledet Keplers første lov, så er det **mye** enklere å utlede de to siste, lover!

Virkelig?

SIDE 8/12/45

Keplers 2. og 3.lov

Tenk **fort** gjennom hvordan du kan gå frem for å løse oppgave 1B.1 under her (prosjektstudenter har en liknende oppgave i utfording B1, del 2): **Deretter**, velg om du enten vil gå videre til neste side og heller se mer på oppgaven etter forelesningen **eller** om du vil bruke litt tid på oppgaven nå. Hvis du vil se litt mer på oppgaven nå: tenk litt til og hvis du sitter helt fast, ta gjerne en titt på denne videoen for noen tips. Merk at det ikke er meningen at du skal løse oppgaven nå men finne din egen ide om hvordan du ville startet på hver av deloppgavene. Ikke se på videoen før du har egne forslag

Exercise 1B.1 You need to read all sections from 1 to 5 to be able to solve this exercise. The scope of this problem is to deduce Kepler's second law. Kepler's second law can be written mathematically as

$$\frac{dA}{dt} = \text{constant},$$

i.e. that the area A swept out by the vector $\vec{r}$ per time interval is constant. We will now show this step by step:

1. Show that the infinitesimal area dA swept out by the radius vector $\vec{r}$ for an infinitesimal movement dr and $d\theta$ is $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$. (hint: draw a figure: can you approximate the area in the figure as a triangle?)
2. Divide this expression by dt and you obtain an expression for dA/dt in terms of the radius r and the tangential velocity v_θ.
3. By looking back at the above derivations, you will see that the tangential velocity can be expressed as $v_\theta = h/r$.
4. Show Kepler's second law.

SIDE 9/12/45

Keplers 2. og 3.lov

Tenk **fort** gjennom hvordan du kan gå frem for å løse deloppgave 1 og 3 fra oppgave 1B.2 under her (prosjektstudenter har en liknende oppgave i utfording B1, del 2): Etter at du har tenkt, ta gjerne en titt på denne videoen for noen tips. Merk at det ikke er meningen at du skal løse oppgaven nå men finne din egen ide om hvordan du ville startet på hver av deloppgavene. Ikke se på videoen før du har egne forslag

Exercise 1B.2 The scope of this problem is to deduce Kepler's third law. Again we will solve this problem step by step:

1. In the previous problem we found an expression for dA/dt in terms of a constant. Integrate this equation over a full period P and show that
$$P = \frac{2\pi ab}{h}$$
(Hint: the area of an ellipse is given by πab).

2. Use expressions for h and b found in the text to show that
$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \qquad (26)$$

3. This expression obtained from Newtonian dynamics differs in an important way from the original expression obtain empirically by Kepler (equation 4). How? Why didn't Kepler discover it?

Neste side

SIDE 10/12/45

Spesielt den siste oppgaven her er **svært** viktig!

[redacted]

Du utledet i oppgaven at Keplers versjon av sin 3.lov er noe gal. Det er svært viktig å bruke den riktige formelen i alt som vi gjør i dette kurset her. Den riktige formelen (som også er i SI-enheter) er gitt ved

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

Vi ser at begge massene er med på å bestemme forholdet mellom omløpsperiode og store halvakse i en ellipsebane!

SIDE 11/12/45

Før vi går videre, ta en nøye titt på første deloppgave av oppgave 1B.3:

Exercise 1B.3

1. How can you measure the mass of a planet in the solar system by observing the motion of one of its satellites? Assume that we know only the semimajor axis and orbital period for the elliptical orbit of the satellite around the planet. **Hint 1:** Kepler's third law (the exact version that you deduce in exercise 1B.2). **Hint 2:** You are allowed to make reasonable approximations.

Tenk i maks 2-3 minutter om du ser en måte å løse den på? Hvis ikke, ta det etter forelesningen. Neste side

SIDE 12/12/45

Men stopp en hal! Har vi egentlig løst 2-legemeproblemet? Vi har løst problemet i tilfellet hvor vi setter oss på m_1 og ser på bevegelsen til m_2 som da blir en ellipsebane med m_1 i det ene brennpunktet. Men hva hvis vi setter oss på m_2? Likningene vi får blir jo de samme, så løsningen blir den samme med massene byttet om, m_2 står i et brennpunkt til ellipsebanen som m_1 følger. Men hva hvis vi nå befinner oss et punkt langt vekk og ser legemene på avstand mens vi ikke befinner oss i referansesystemet til noen av dem? Hvordan vil da m_1 og m_2 bevege seg?

Tenk deg godt om før du går til neste side... Neste side

Forrige side

Nytt tema:

Massesenter

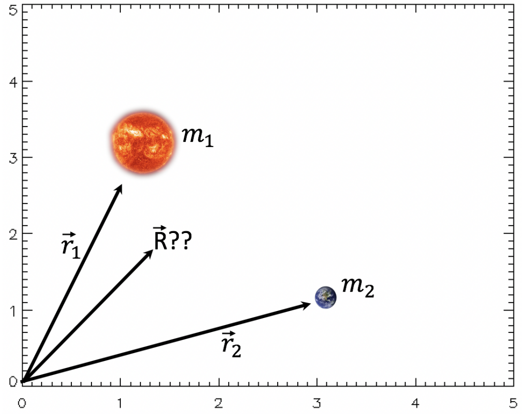
Dette temaet fortsetter frem til side **??** av 42.

Vi skal repetere noe du kjenner godt, og bruke dette til å gjøre det fulle 2-legeme-problemet litt enklere å løse.

Massesenter, kan godt trenge en kjapp repetisjon ja...

SIDE 13/27/45

For å finne svaret, må vi repetere et uttrykk som du allerede kjenner: *massesenter.*



Hvis vi kjenner posisjonene $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ på figuren, hvordan kan vi da finne posisjonen $\vec{R}$ til massesenteret? Du kan bruke massene m_1 og m_2. Hva er formelen?

Trykk her når du har frisket opp massesenterdefinisjonen!

SIDE 14/27/45

Stemmer! Vi må rett og slett ta midlet mellom de to posisjonene, vektet med massene:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

Men hva hvis vi nå skal finne massesenteret $\vec{R}$ til en galakse og vi kjenner posisjonene $\vec{r_i}$ til alle N stjernene med masse m_i i galaksen? (anta at det ikke finnes annen masse i galaksen). Hvordan kan vi generalisere uttrykket vårt??

Diskuter og trykk her når du har funnet ut av det

SIDE 14/27/45

Stemmer! Vi må rett og slett ta midlet mellom de to posisjonene, vektet med massene:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

Men hva hvis vi nå skal finne massesenteret $\vec{R}$ til en galakse og vi kjenner posisjonene $\vec{r_i}$ til alle N stjernene med masse m_i i galaksen? (anta at det ikke finnes annen masse i galaksen). Hvordan kan vi generalisere uttrykket vårt??

Diskuter og trykk her når du har funnet ut av det

Vi bare midler på samme måte over alle objekter:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r_i}$$

Her er M summen over alle massene. Pass på at du har denne friskt i minne videre...

Neste side

SIDE 15/27/45

For å kunne finne bevegelsen til både m_1 og m_2 skal vi nå utlede en utvidelse av Newtons 2.lov som gjelder for et mangelegemesystem. Anta igjen at vi har galaksen vår med N stjerner og at det mellom disse kun virker gravitasjonskrefter $\vec{f_{ij}}$ (krafta på legeme i fra legeme j). I tillegg kan det virke en ekstern kraft $\vec{F}_{\rm ext}$ som virker likt på hele systemet, dvs. på alle objektene, f.eks. en annen galakse som trekker på galaksen. I denne videoen blir du satt igang med utledningen av Newtons 2.lov på mangelegemesystemer.

Etter å ha sett videoen skal du nå se om du kan komme frem til et uttrykk av typen:

$$\vec{F} = \Sigma\Sigma\vec{f} + \vec{F}_{\rm ext} = \Sigma m\vec{r}$$

og sett inn riktige indekser på krefter, masser, posisjonsvektorer og tidsderiverte. Pass spesielt på at summegrensene blir riktige! Bruk maks 5 minutter. Neste side

SIDE 16/27/45

Vi skal nå forenkle dette uttrykket: Ved å bruke

- en av Newtons lover som sier noe om krefter som er lik hverandre, dette skal gi deg at et av leddene er 0
- massesenterdefinisjonen $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$

skal du vise at

$$\vec{F}_{\mathrm{ext}} = M\ddot{\vec{R}}$$

som er Newtons 2.lov for mangelegemesystemer. Fikk du det til? Hvis du er usikker, se på denne videoen.

Før du går til neste side, prøv å si til hverandre med ord hva denne likningen sier. Ser du hva essensen er? Neste side

SIDE 17/27/45

Hva hvis de eksterne kreftene på systemet er null?

Da er $\ddot{\vec{R}} = 0$ og massesenteret har ingen akselerasjon! Massesenteret vil da kun bevege seg med konstant hastighet. Vi kan da dele bevegelsen til en stjerne i galaksen opp i

- bevegelsen til stjerna i forhold til massesenteret PLUSS
- bevegelsen til massesenteret

Hvis det ikke er noen ytre krefter så vil massesenterbevegelsen være enkel, konstant hastighet. Da trenger vi kun å finne bevegelsen til stjerna om massesenteret.

Dette hjelper oss med tolegemeproblemet vårt: vi trenger dermed kun å finne bevegelsen til de to legemene omkring deres felles massesenter.

Forrige side

TID FOR KAFFEPAUSE!!!

Ut å strekke på bena. Inn med litt koffein...

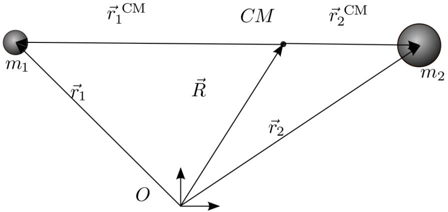
Ihvertfall 10 min...

I den fysiske forelesningen kommer vi noen få sider til før den andre dobbelttimen er over. Hvis du følger anbefalingene mine og idag begynte der du slapp på forrige forelesningsnotat, så tar du noen få sider til og gir deg for idag. Etter det skal det stå igjen ca. en halv dobbelttime fysisk forelesning.

Jeg lover, jeg har tatt pause og er klart til å fortsette

SIDE 18/27/45

Her har vi situasjonen:



Fra et gitt origo O utenfor systemet så har vi poisjonsvektorene $\vec{r_1}$ og $\vec{r_2}$ som peker på de to legemene, samt $\vec{R}$ som peker på massesenteret (CM, Center of Mass) til de to legemene. Vi er interessert i disse legemenes bevegelse i forhold til massesenteret (se forrige side hvis du er usikker på hvorfor!).

Da velger vi å flytte origo til massesenteret. Dette nye koordinatsystemet kaller vi massesentersystemet. Posisjonsvektorene $\vec{r_1}^{CM}$ og $\vec{r_2}^{CM}$ fra det nye origo er tegnet inn i figuren. Men hva med $\vec{R}^{CM}$. Hva er posisjonsvektoren til massesenteret fra dette nye origo?

Diskuter og tenk deg nøye om (1-2 min) før du ser på svaret på neste side. Svaret er kanskje enklere enn du tror... Neste side

SIDE 19/27/45

Siden poisjonen til massesenteret i massesenteret er i origo selv: $\vec{R}^{CM} = 0$!
Nå til litt regning. Finn frem papir og blyant og forbered deg på å leke litt med likninger (ikke mye, gjør du det riktig så er dette fort gjort).

[redacted]

Bruk nå massesentersystemet (sjekk forrige side hvis du har glemt ...), og **sett inn i definisjonen av massesenteret for $\vec{R}$**. Gjør følgende substitusjoner:

$$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \quad \text{og} \quad \hat{\mu} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

MERK at vi har fjernet CM fra symbolene, i fortsettelsen så betyr $\vec{r_1}$ og $\vec{r_2}$ egentlig alltid $\vec{r_1}^{CM}$ og $\vec{r_2}^{CM}$! Den første liknigen her har vi brukt helt fra starten av: $\vec{r}$ var vektoren som pekte fra m_1 til m_2. Den andre er definisjonen av *redusert masse*. Den er mest for å gjøre likningene pene, men vi skal snart se at det også har en tolkning. Fra dette skal du komme frem til et uttrykk for $\vec{r_1}$.Altså: (1) du skal ta utgangspunkt i definisjon av massesenteret som nå er i origo, og (2) deretter bli kvitt $\vec{r_2}$ ved hjelp av uttrykket over og få inn μ. Hva får du?

$\vec{r_1} = \hat{\mu}\vec{r}$ $\vec{r_1} = \frac{m_1}{\hat{\mu}}\vec{r}$ $\vec{r_1} = \frac{m_1}{\hat{\mu}}$ $\vec{r_1} = -\frac{m_2}{\hat{\mu}}\vec{r}$ $\vec{r_1} = -\frac{\hat{\mu}}{m_1}\vec{r}$

Det ble galt! Prøv igjen. Husk at $\vec{R} = 0$ i massesentersystemet. Og du kan bli kvitt $\vec{r}_2$ med uttrykket for $\vec{r}$. Da står du igjen med en likning med kun $\vec{r}_1$ og $\vec{r}$ som du løser for $\vec{r}_1$. Og til slutt erstatter du m_1 eller m_2 med $\hat{\mu}$, du vil nå ganske greit se hvordan $\hat{\mu}$ kommer inn her.

Hjelper det deg? Prøv igjen med dette som utgangspunkt!

(HUSK at vi nå har fjernet CM fra alle symbolene for å gjøre skrivingen lettere, alle vektorer har nå origo i massesenteret.)

SIDE 21/27/45

STEMMER! Nå som du har funnet $\vec{r_1}$, så kan du se om du klarer å vise at

$$\vec{r_2} = \frac{\hat{\mu}}{m_2}\vec{r}$$

Vi har dermed banene til de to legemene om massesenteret:

$$\vec{r_1} = -\frac{\hat{\mu}}{m_1}\vec{r} \tag{1}$$

$$\vec{r_2} = \frac{\hat{\mu}}{m_2}\vec{r} \tag{2}$$

Men vi ser enda ikke hva slags form banen har. La oss ta absoluttverdiene til disse likningene. Bruk deretter det du vet om $r = |\vec{r}|$ (Jepp, dette er den samme som vi utledet i forrige forelesning, det er jo avstanden mellom de to objektene). Ser du nå hva slags baner de to legemene får om massesenteret (anta at det er bundet)?

JA, kult, nå ser jeg det!

Kanskje det, men jeg er litt usikker

La oss først se hvordan likningene blir hvis vi tar absoluttverdi:

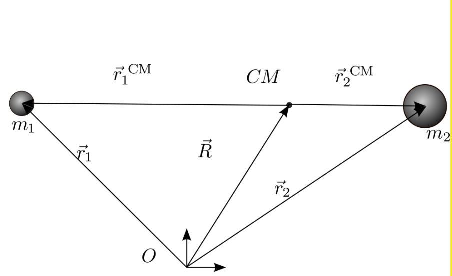
$$|\vec{r_1}| = r_1 = \frac{\hat{\mu}}{m_1}|\vec{r}| = \frac{\hat{\mu}}{m_1} r \tag{3}$$

$$|\vec{r_2}| = r_2 = \frac{\hat{\mu}}{m_2}|\vec{r}| = \frac{\hat{\mu}}{m_2} r \tag{4}$$

Her er r_1 og r_2 avstanden til de to legemene fra massesenteret, ser du det? Disse avhenger jo av en vinkel f ettersom de går i bane rundt massesenteret. I tillegg så fant vi jo i forrige forelesning et uttrykk for r som inneholder en vinkel f. Da skulle du få uttrykk for r_1 og r_2 som inneholder vinklen f. Hjelper det deg? Neste side

SIDE 23/27/45

Fant du det? Innser du at begge legemene går i ellipser omkring massesenteret?



$$\vec{r}_1 = -\frac{\hat{\mu}}{m_1}\vec{r} \qquad (5)$$

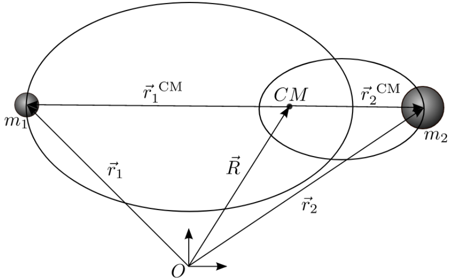
$$\vec{r}_2 = \frac{\hat{\mu}}{m_2}\vec{r} \qquad (6)$$

(MINNER IGJEN OM at vi nå har fjernet CM fra alle symbolene for å gjøre skrivingen lettere, alle vektorer har nå origo i massesenteret slik at $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ tilsvarer $\vec{r}_1^{\,CM}$ og $\vec{r}_2^{\,CM}$ på figuren.) Ser du at ved å ta absoluttverdien på begge sider her, så har du likningene for $r_1(f)$ og $r_2(f)$ som altså er lengdene av vektorene $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$. Disse viser altså banene til m_1 og m_2 som funksjon av en gitt vinkel f. Mens r (eller egentlig $r(f)$) som står på høyre side i likningen er lengden $\vec{r}$ som vi utledet i forrige forelesning, altså banen til m_2 omkring m_1. Hvis denne er en ellipsebane ser du da at også $r_1(f)$ og $r_2(f)$ blir likninger for ellipser med massesenteret som brennpunkt?

Neste side

SIDE 24/27/45

Hva er de store halvaksene a_1 og a_2 til disse to ellipsene? Og hva er eksentrisiteten e?? Uttrykk svaret ved hjelp av massene og egenskapene til ellipsen som vi så på tidligere: nemlig ellipsebanen som det ene objektet har rundt det andre. Ved å sammenlikne uttrykkene for r_1 og r_2 som funksjon av f som du nå har funnet, og sammenlikner med formelen for ellipse, så bør dette falle rett ut.



Jeg har tenkt og tror jeg har svaret

Hvis du ikke har svaret, må du spørre foreleser/gruppelærer før du går videre. Det er veldig viktig at du har dette klart for deg nå!

SIDE 25/27/45

La oss først klare opp i begreper her, viktig at du har oversikt:

- Vektoren $\vec{r}$ peker fra det ene legemet til det andre. Lengden $r(f)$ av denne vektoren som avhenger av vinkelen f som definert tidligere utgjør ellipsebanen til det ene legemet omkring det andre. Denne ellipsebanen har store halvakse lik a og eksentrisitet e. **Merk at sett fra referansesystemet til et av legemene (systemet der det ene legemet står i ro), vil man se at det andre legemet går i ellipsebane rundt det første. Mens sett fra massesentersystemet vil man se at begge legemene går i ellipsebaner omkring massesenteret som vist på figur på forrige side. Klarer du å se dette for deg?**

- Vektoren $\vec{r_1}$ peker fra massesenteret ut til legeme m_1. Lengden $r_1(f)$ av denne gir oss ellipsebanen omkring massesenteret med store halvakse a_1 og samme eksentrisitet e som banen til et legeme om det andre.

- Vektoren $\vec{r_2}$ peker fra massesenteret ut til legeme m_2. Lengden $r_2(f)$ av denne gir oss ellipsebanen omkring massesenteret med store halvakse a_2 og samme eksentrisitet e som banen til et legeme om det andre.

Jeg har tenkt og tror jeg har svaret

SIDE 26/27/45

Når vi setter inn for r i uttrykket for r_1 fikk vi

$$r_1 = \frac{\hat{\mu}}{m_1}\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} = \frac{\frac{\hat{\mu}a}{m_1}(1-e^2)}{1+e\cos f}$$

Hvis vi kaller $a_1 = \frac{\hat{\mu}a}{m_1}$ så får vi

$$r_1 = \frac{a_1(1-e^2)}{1+e\cos f}$$

som er en ellipse med store halvakse a_1 og eksentrisitet e (som var samme eksentrisitet som vi hadde i uttrykket for r). Det blir helt tilsvarende for r_2:

$$r_2 = \frac{a_2(1-e^2)}{1+e\cos f}$$

med $a_2 = \frac{\hat{\mu}a}{m_2}$ Neste side

SIDE 27/27/45

En siste lite utfordring før vi går over til siste tema på del 1B. Klarer du å vise at

$$a_1 + a_2 = a?$$

Her kommer du til å trenge definisjonen av $\hat{\mu}$ (ikke bruk mer enn 2-3 min her, spør hvis du sitter fast) Før du går over til siste tema, ta en liten pause, jogg en tur rundt Blindern, stup kråke 10 ganger på gressplenen ved Frederikke. Ikke gå videre før du har gjort alt det! Neste side

Forrige side

Nytt tema:

Energi og type kjeglesnitt

Dette temaet fortsetter frem til side **??** av 42.

Vi skal gjøre noen energibetraktninger og finne noen svært viktige resultater.

Å ja?

SIDE 28/41/45

Så var vi kommet til siste tema her. Vi hintet allerede om det tidligere: Hva avgjør om et objekt følger en ellipsebane, parabelbane eller hyperbelbane? Og hva avgjør parameterene a og e til denne banen? Vi har allerede innsett at ellipsebaner betyr at objektet er gravitasjonelt bundet siden det holder seg i bane rundt det andre objektet, mens for parabel- og hyperbelbaner så er det ikke lenger gravitasjonelt bundet, objektet bare 'sneier forbi'. Det må vel bety at totalenergien er viktig her: er den potensielle gravitasjonsenergien større eller mindre enn den kinetiske energien? La oss sette opp energien til systemet vårt. Vi tar igjen perspektivet fra m_1 og ser på banen som m_2 lager rundt m_1: der $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, altså den relative hastigheten til m_2 i forhold til m_1 siden $\vec{v}$ er den deriverte av posisjonsvektoren $\vec{r}$ som peker fra m_1 til m_2. Er du enig i at dette er uttrykket for energien til systemet?

YES, absolutt, sånn må det være!

Njaaa, jeg er litt usikker

SIDE 29/41/45

Er du **HELT** sikker på at dette er riktig uttrykk for energien?

$$E = \frac{1}{2} m_2 \vec{v}^2 - G \frac{m_1 m_2}{r}$$

JA, jeg sa jo det jo!

Njaaa, nå ble jeg litt i tvil her likevel

Det er **FEIL**

$$\cancel{E = \frac{1}{2} m_2 \vec{v}^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}}$$

Tenk deg godt om her...kan du se hva som er feil?
(du trenger ikke finne hva som er riktig, bare innse hva som er feil)

Neste side

SIDE 31/41/45

Du hadde god grunn til å tvile, det er nemlig **FEIL**

$$\cancel{E = \frac{1}{2} m_2 \vec{v}^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}}$$

Tenk deg godt om her...kan du se hva som er feil?

(du trenger ikke finne hva som er riktig, bare innse hva som er feil)