AST2000 Del 1B
Interaktive forelesningsnotater: forelesning 1 av 2

VIKTIG

Du må bruke **presentasjonsmodus/fullskjermsvisning** for å lese denne, men du skal **ikke** bruke frem/tilbake-knappene, **KUN knappene som dukker opp på sliden** for å ta deg videre! Ofte må du laste filen ned til maskinen din og åpne den der for å få til dette. Merk at noen knapper vil åpne nettskjema, videoer eller andre ressurser i internettbrowseren din. Når du gjør det riktig, skal du kun se en side av gangen, og når du trykker på knappene som dukker opp på skjermen så skal disse ta deg frem/tilbake i dokumentet. Du vil miste mye læringsutbytte hvis du ser flere slides av gangen. Får du det ikke til, spør foreleser/gruppelærer!

Trykk denne knappen for å begynne

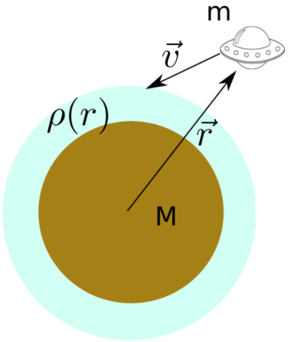
AST2000 Del 1B
Interaktive forelesningsnotater: forelesning 1 av 2

VIKTIG

Dette er en erstatning for forelesningen i emnet. Har du gått skikkelig gjennom disse interaktive forelesningsnotatene så trenger du ikke å lese de fulle forelesningsnotatene (med unntak av oppgavene bak). All informasjonen du trenger, får du her. Du kommer til å få mange grublespørsmål og diskusjonsoppgaver, det er meningen at disse skal gjøres i grupper av minst 2, maks 4 studenter. **Det er defor sterkt anbefalt at dere sitter sammen i grupper når dere går gjennom disse interaktive forelesningsnotatene, du vil få betydelig mer utbytte av dem på den måten**. En god ide kan være å bli enige om å treffes til den faste forelesningstiden og bruke forelesningslokalet som kommer til å være resevert til dette. **Hvis du har kommentarer ris/ros til disse forelesningsnotatene eller til emnet, trykk på ☺ ☹ knappen som du finner på alle sider.**

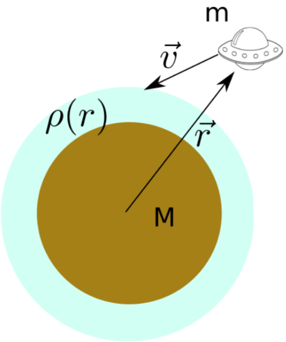
Trykk denne knappen for å begynne

Forrige side



Velkommen til del 1B! Etter at du har skutt raketten din ut i rommet, så skal vi i denne delen beregne banen til både romfartøyet ditt og planeten som du skal besøke. Vi skal se på både analytiske og numeriske baneberegninger og prøve å forstå hva som avgjør banen til et objekt. Vi skal, kun ved å ta utgangspunkt i Newtons lover, utlede analytisk at planeter går i ellipsebaner, og se at det faktisk også finnes andre baner. Numerisk baneberegning har du kanskje gjort før med Eulers metode. Det blir litt repetisjon før vi tar det videre.
Er du klar?

Neste side

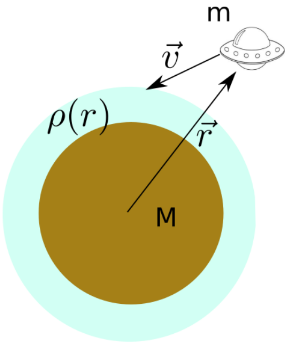


Oppgave 1B8 som er en av innleveringsoppgavene går ut på å myklande en romsonde på en planet med atmosfære som illustert i figuren. I løpet av dette forelesningsnotatet vil du lære det du trenger for å løse denne oppgaven og mer til.

Men før vi setter igang så skal vi varme opp litt med å fort sjekke at vi har kunnskapen fra del 1A på plass, samt se hva du allerede kan om temaene i del 1B.

Trykk her for å varme opp

Har du varmet opp? Er du svett og klar til å starte kampen? ...og sendt inn skjemaet? Nei Ja



Oppgave 1B8 som er en av innleveringsoppgavene går ut på å myklande en romsonde på en planet med atmosfære som illustert i figuren. I løpet av dette forelesningsnotatet vil du lære det du trenger for å løse denne oppgaven og mer til.

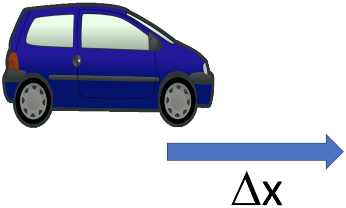
Men før vi setter igang så skal vi varme opp litt med å fort sjekke at vi har kunnskapen fra del 1A på plass, samt se hva du allerede kan om temaene i del 1B.

Trykk her for å varme opp

Har du varmet opp? Er du svett og klar til å starte kampen? ...og sendt inn skjemaet? Nei Ja

Neste side

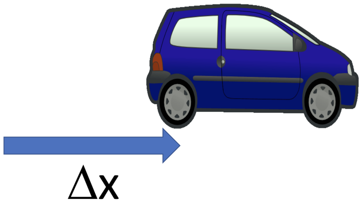
La oss begynne med beina godt plantet på jorda. Og med litt **veldig** grunnleggende videregåendeskole-fysikk (sorry!).



I figuren ser du en bil som beveger seg med konstant hastighet v. Hvilken avstand Δx har denne bilen beveget seg i løpet av tiden Δt?

Trykk her når du har svaret!

La oss begynne med beina godt plantet på jorda. Og med litt **veldig** grunnleggende videregåendeskole-fysikk (sorry!).

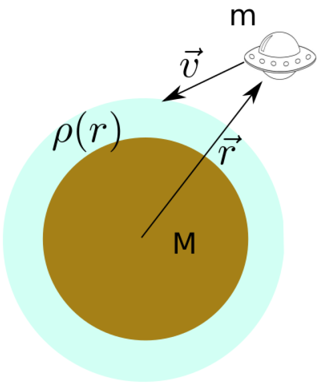


I figuren ser du en bil som beveger seg med konstant hastighet v. Hvilken avstand Δx har denne bilen beveget seg i løpet av tiden Δt?

Ganske riktig ja, strekning er hastighet ganger tid, dermed er $\Delta x = v\Delta t$.

Neste side

Nå har vi samme situasjon en gang til, men med vektorer. En romskip har posisjonsvektor $\vec{r}$. Vi skal i resten av dette emnet bruke konseptet *posisjonsvektor* ganske mye.



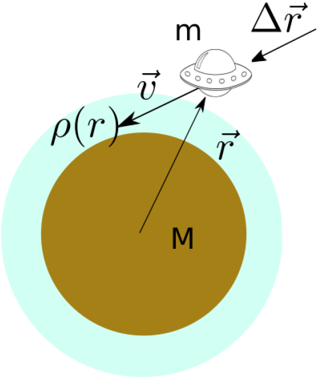
En posisjonsvektor...

... er en vektor som peker fra origo i koordinatsystemet ditt til den posisjonen der objektet du studerer er. Når objektet endrer posisjon så endrer også posisjonsvektoren seg tilsvarende slik at den alltid peker på objektets posisjon.

I figuren ser du dermed at vi har satt origo i sentrum av planeten. Romskipet har hastighetsvektor $\vec{v}$. Hva er forflytningen $\Delta\vec{r}$ som romskipet får i løpet av tid Δt?

Trykk her når du har svaret!

Nå har vi samme situasjon en gang til, men med vektorer. En romskip har posisjonsvektor $\vec{r}$. Vi skal i resten av dette emnet bruke konseptet *posisjonsvektor* ganske mye.



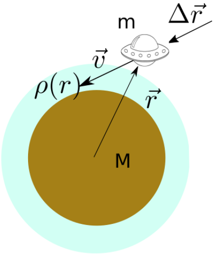
En posisjonsvektor...

... er en vektor som peker fra origo i koordinatsystemet ditt til den posisjonen der objektet du studerer er. Når objektet endrer posisjon så endrer også posisjonsvektoren seg tilsvarende slik at den alltid peker på objektets posisjon.

I figuren ser du dermed at vi har satt origo i sentrum av planeten. Romskipet har hastighetsvektor $\vec{v}$. Hva er forflytningen $\Delta\vec{r}$ som romskipet får i løpet av tid Δt?

Ganske riktig ja, strekningsvektor er hastighetsvektor ganger tid, dermed er $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$.

Neste side



Vi fant at forflytningen er $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$. Hvis vi kaller opprinnelig posisjon for $\vec{r}_0$ og ny poisjon for $\vec{r}_1$, så har vi altså:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{v}\Delta t$$

noe du sikkert kjenner som Eulers metode? Du har i tidligere emner brukt Eulers metode numerisk.

La oss se på hastighetsendring på samme måte:

Vi vet at akselerasjon er endring i hastighet per tid, slik at hvis du har en konstant akselerasjon $\vec{a}$, så vil endring i hastighet i løpet av tid Δt per definisjon være gitt ved

$$\Delta\vec{v} = \vec{a}\Delta t$$

Hvis opprinnelig hastighet var $\vec{v}_0$ og ny hastighet er $\vec{v}_1$ så har vi

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t$$

... og dermed har vi Eulers metode for å oppdatere hastigheten også!

Neste side

Dette var repetisjon, men kanskje en mer fysisk måte å utlede det på enn du er vant til? Det er viktig å forstå de fysiske prinsippene bak når vi nå etterhvert skal ta dette videre.

Numerisk beregning av forflytning og hastighetsendring...

Når du gjør dette numerisk, husk også at det er mer nøyaktig å bruke Euler-Cromers metode, dvs. at du oppdaterer posisjonen med den nye hastigheten, dvs.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t \quad (1)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{v}_1\Delta t \quad (2)$$

Merk at det du har gjort her matematisk er jo å løse likningssystemene

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

Du kommer frem til samme resultat hvis vi gjør de infinitsimale størrelsene endelige (men fortsatt små) ved å kalle dt for Δt, etc:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v} \qquad \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}$$

Hvis du ganger opp med Δt på begge sider av likningene her, så ender du igjen opp med det samme som på de forrige slidene. Merk deg denne måten å tenkte på da du vil bruke den til å løse andre typer differensiallilkninger senere.

Da er repetisjonen over, nå begynner moroa her...

Det vi har gjort så langt er å se hvordan vi kan finne romskipets bevegelse numerisk, steg for steg. Nå skal vi se på hvordan dette kan gjøres analytisk. Det er viktig å gjøre ting analytisk der det kan gjøres analytisk fordi du da kan gjøre ting mye raskere på datamaskin og samtidig få en mye dypere innsikt i fysikken bak. Og ikke minst, det er jo litt kult å faktisk ha utledet at planeter har ellipsebaner helt fra scratch?

Utledningen av løsningen på dette **2-legemeproblemet** (og det er kun for 2 legemer at vi kan løse dette analytisk) er en ganske omfattende utledning, men på veien dit kommer vi innom mange temaer som vi skal bruke igjen og igjen i løpet av kurset, så det er viktig å forstå detaljene her. Trenger du en pause, så ta den nå! Trekk pusten godt!

Er du klar? Ja, kom igjen! Tjjjaaaaa....

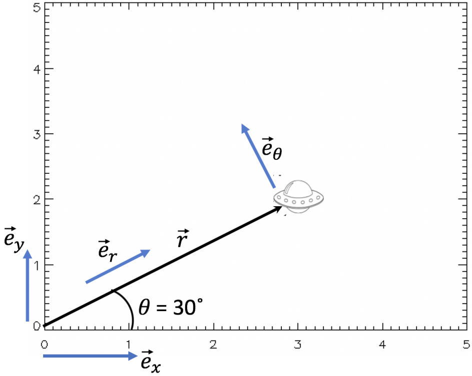
PYSE!

Se det, det var riktig instilling ja! Moroa begynner på ...

.. neste side

Forberede 2-legemeproblem: enhetsvektorer

Før vi begynner på selve utledningen så må vi innom et par småting som forberedelse til utledningen, la oss begynne med koordinatsystemer og enhetsvektorer.



Her ser du posisjonsvektoren $\vec{r}$ til romskipet samt enhetsvektorene $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$. Dette er de samme enhetsvektorene som du kaller for $\vec{i}$ og $\vec{j}$ i andre fag. (vi bruker andre navn på dem her for å skape litt forvirring)

Se for øyeblikket bort ifra andre ting på figuren. Vi starter med litt oppvarming igjen. Vi skal skrive posisjonsvektoren $\vec{r}$ ved hjelp av enhetsvektorene

$$\vec{r} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$$

Hva er a og b her?

$a = 1$ $b = 1$

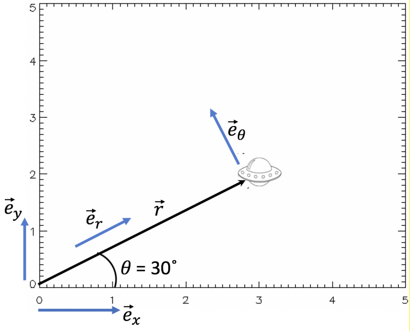
$a = 3$ $b = 2$

$a = 2$ $b = 3$

$a = 0$ $b = 0$

Det ble galt! Er du sikker på at du forstår hva det spørres om? Innser du at a og b her er x- og y-komponentene til vektoren $\vec{r}$? Det er helt essensielt at du forstår dette før du går videre. Spør gruppelærer eller foreleser hvis du har den minste tvil. Gå tilbake og forsikre deg om at du forstår før du går videre!

STEMMER!.Vi ser på figuren igjen:



Ser du at det er tegnet inn to andre enhetsvektorer $\vec{e}_r$ og $\vec{e}_\theta$? Dette er enhetsvektorer som fortsatt har lengde 1, men som peker **langs** $\vec{r}$ og **ortogonalt** med $\vec{r}$.

Merk at hvis f.eks. romskipet har en positiv hastighetskomponent langs $\vec{e}_\theta$ så vil vinkelen θ øke med tiden.

' Vi kan altså representere vektoren $\vec{r}$ med enten x-y enhetsvektorer eller r-θ enhetsvektorer (nå ser du kanskje at det nye navnet på $\vec{i}$ og $\vec{j}$ faktisk **ikke** var for å forvirre deg, men har en mening!)

Du kan dermed representere en vektor enten med komponentene langs x-y enhetsvektorene eller med komponentene langs r-θ enhetsvektorene. Ved første øyesyn kan det kanskje virke som at det er likegyldig hvilket av systemene du velger, men det er en stor grunnleggende forskjell mellom disse to koordinatsystemene. Hvilken?

Tenk deg godt om før du går til neste side der svaret står!

Neste side

Et lite hint før du får svaret: Hva skjer med enhetsvektorene dersom romskipet beveger seg? Er det en grunnleggende forskjell mellom x-y-enhetsvektorene og r-θ-enhetsvektorene da? Tenk deg om og ...

trykk her

Et lite hint før du får svaret: Hva skjer med enhetsvektorene dersom romskipet beveger seg? Er det en grunnleggende forskjell mellom x-y-enhetsvektorene og r-θ-enhetsvektorene da? Tenk deg om og ...

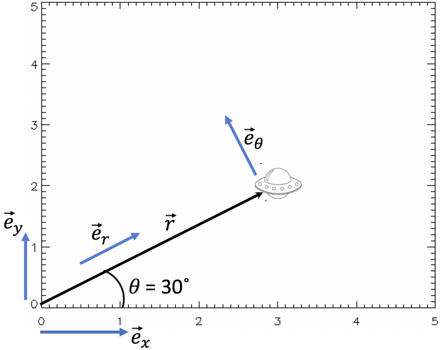
trykk her

> Ganske riktig! r-θ-enhetsvektorene endrer seg med tiden når objektet de peker på endrer posisjon! De er tidsavhengige enhetsvektorer, mens x-y-enhetsvektorene ikke endrer seg.

Men dette gjør det vel mer komplisert å bruke r-θ-enhetsvektorene? Hva iallverden skal vi med disse da? Kan du tenkte deg noen fordeler med dem?

Tenk deg godt om før du går til ... ... neste side

Vi skal se på fordelene etterhvert, men la oss prøve å bruke dem:



Hvis vi nå skal skrive poisjonsvektoren $\vec{r}$ uttrykt ved de nye enhetsvektorne:

$$\vec{r} = a\vec{e}_r + b\vec{e}_\theta$$

hva blir da a og b? $a = 1\ b = 1$ $a = 3\ b = 2$

$a = \sqrt{13}\ b = \sqrt{13}$ $a = \sqrt{13}\ b = 0$

$a = 0\ b = \sqrt{13}$ $a = \sqrt{13}\ b = 30$ $a = \sqrt{13}\ b = 1$

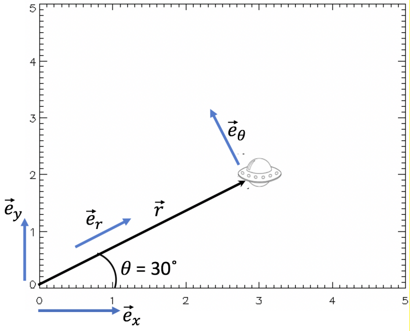
Det ble galt! Husk at r-θ-koordinatsystemet funker helt på samme måte som x-y, altså du dekomponerer vektoren i de to enhetsvektorene. Dvs.

$$a = \vec{r} \cdot \vec{e}_r \tag{3}$$

$$b = \vec{r} \cdot \vec{e}_\theta \tag{4}$$

Hjelper det deg? Prøv igjen med dette som utgangspunkt!

STEMMER!.Vi ser på figuren igjen:



Poisjonsvektoren har altså kun en komponent som går langs $\vec{e}_r$, ingen som går ortogonalt. Hvis vi tenker litt på det så er det egentlig opplagt siden $\vec{e}_r$ er definert fra $\vec{r}$.

Neste side

Det vi fant er altså at posisjonsvektoren kan skrives som

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

der $r = |\vec{r}|$. Enig?

Hvis du tar utgangspunkt i dette, hvordan vil du nå gå frem for å finne hastighetsvektoren $\vec{v}$ til romskipet, gitt at du kjenner $r(t)$ og $\theta(t)$?

MERK: Det er ikke meningen at du skal regne ut hastighetsvektoren riktig enda, kun tenke gjennom hvordan du vil gå frem for å gjøre det!

Har du tenkt nøye gjennom hvordan du kunne tenke deg å gjøre det? Har du en ide?

Ja, jeg tror det!

tjaaaaa, et bittelite hint kanskje?

Hint skal bli:

Hva er definisjonen av hastighet? Den med en derivert?

Var det noe alla:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

du tenkte på?

Hvordan går du videre her?

Har du en ide?

Var det noe alla:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

du tenkte på?

Hvordan går du videre her?

Har du en ide?

Jepp, kjerneregel selvfølgelig. Da blir det vel:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d}{dt}\vec{e}_r$$

Merk at vi skriver tidsderivert som en prikk over, dvs

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

Dette skal vi bruke mye i resten av kurset, så lær deg dette med en gang!

Neste side

Vi har altså:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d}{dt}\vec{e}_r$$

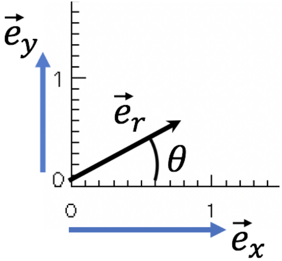
Der vi trenger å finne *den tidsderiverte av enhetsvektoren!*. Dette er litt uvant, vanligvis er enhetsvektorer faste størrelser.

Grublis

Hvordan kan du går frem for å finne den tidsderiverte av enhetsvektoren $\vec{e}_r$??? Du kan uttrykke svaret med de tidsderiverte, $\dot{r}$ og $\dot{\theta}$ samt enhetsvektorer.

Jeg har grublet og er klar til å gå videre

Første steg kan være å uttrykke $\vec{e}_r$ med faste enhetsvektorer som $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$.



La oss bruke denne figuren:

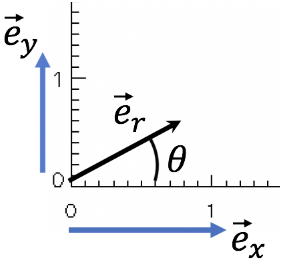
Hvis vi nå skal skrive

$$\vec{e}_r = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$$

Hva er a og b? Tenk deg litt om, før du ...

... trykker her for noen alternativer

Første steg kan være å uttrykke $\vec{e}_r$ med faste enhetsvektorer som $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$.



La oss bruke denne figuren:

Hvis vi nå skal skrive

$$\vec{e}_r = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$$

Hva er a og b? Tenk deg litt om, før du ...

... trykker her for noen alternativer

Er det:

$a = \theta \;\; b = 0$

$a = \sin\theta \;\; b = 0$

$a = \cos\theta \;\; b = 0$

$a = \sin\theta \;\; b = \cos\theta$

$a = \cos\theta \;\; b = \sin\theta$

$a = 1 \;\; b = \sin\theta$

Det ble galt! Husk at alt du gjør er å dekomponere $\vec{e}_r$ ned på x- og y-aksene. Husk også at lengden av $\vec{e}_r$ er 1. Hvis du har en hvilken som helst vektor med kjent lengde og du skal finne x- og y-komponentene, hva gjør du vanligvis?

Prøv å ha dette i tankene når du nå går tilbake og gjør et nytt forsøk. Hvis du ikke forstår dette, ta kontakt med gruppelærer eller foreleser!

STEMMER!. Når vi dekomponerer $\vec{e}_r$ ned på x- og y-aksen så er x- og y-komponentene av en vektor med lengde 1 lik cosinus og sinus til vinkelen, akkurat slik vi er vant til, dermed

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$$

Man kan vise helt tilsvarende at

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$$

(hvordan kan du sjekk 'e om disse er ortogonale?)
Nå har du fått god hjelp til å derivere $\vec{e}_r$ med hensyn på tiden. Gjør regningen på papir og se om du finner et av følgende svar:

$\dot{\vec{e}}_r = \vec{e}_\theta$ $\dot{\vec{e}}_r = \cos\theta\,\vec{e}_r$ $\dot{\vec{e}}_r = -\sin\theta\,\vec{e}_\theta$

$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_r + \theta\,\vec{e}_r$ $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_r$

Det ble galt! Hint:

$$\frac{d}{dt}(\cos\theta) = -\dot{\theta}\sin\theta$$

Forsikre deg om at du forstår hvordan du kommer frem til dette, spør hvis du trenger! Et hint til: sammenlikn svaret ditt med formen på $\vec{e}_\theta$. Gå tilbake og prøv igjen, hvis du sliter med å forstå, kontakt foreleser/gruppelærer.

Det er helt riktig. Vi har altså

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Helt samme resonnement gir

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

Denne siste får du bruk for senere. Tilbake til hastigheten. Prøv nå å vise at

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Hvis du ikke får dette til etter å ha prøvd flere ganger, ta en titt på denne videoen her.

Neste side

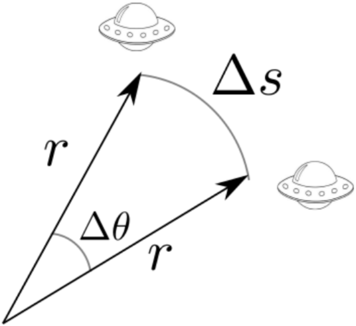
La oss prøve å tolke uttrykket for hastighet

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

I denne videoen tolker vi de to hastighetskomponentene og du lærer noen svært viktige nye begreper som skal brukes gjennom hele kurset.

Neste side

Har du nå klart for deg hva *radiell* og *tangensiell* hastighet er for noe?
La oss se om vi kan utlede uttrykket for tangensiell hastighet, altså $v_\theta = r\dot{\theta}$ med litt geometri og rent fysiske argumenter. Vi skal bruke denne figuren her



som viser en liten forflytning Δs av romskipet i retning av enhetsvektoren $\vec{e}_\theta$. Det er altså en forflytning ortogonalt på posisjonsvektoren som skjer i løpet av et kort tidsrom Δt. Hvordan kan du bruke disse to størrelsene til å definere v_θ, og hvordan kan du skrive Δs uttrykt med r og $\Delta\theta$?

Neste side

Hvis du har tenkt deg nøye om, se på denne videoen her for en forklaring.
Bruk nå uttrykket du har funnet for v_θ til å vise at spinn (angulærmoment) per masse for romskipet, h, er gitt ved $h = r^2\dot{\theta}$.
Spinn per masse er definert som

$$\vec{h} = \frac{\vec{r} \times \vec{p}}{m}$$

der $\vec{p} = m\vec{v}$ er bevegelsesmengden til romskipet og m er massen. Denne størrelsen skal vi bruke mye fremover. Hvis du har forstått alt vi har gått gjennom frem til nå, så bør du få til å vise at $h = r^2\dot{\theta}$ (bruk uttrykket vi har funnet for $\vec{v}$). Hvis ikke, så er det **svært viktig** at du kontakter foreleser eller gruppelærer for hjelp før du går videre! Neste side

Nå begynner vi å nærme oss den analytiske utledning av baner her, men før i setter igang, har du hørt om Keplers lover? JA! NEI!

Nå begynner vi å nærme oss den analytiske utledning av baner her, men før i setter igang, har du hørt om Keplers lover? JA! NEI!

Så fint da!

Da husker du kanskje også omtrent hva Keplers lover sier? Tenk deg godt om før du går videre!!!

Få se Keplers lover da vel!

Nå begynner vi å nærme oss den analytiske utledning av baner her, men før i setter igang, har du hørt om Keplers lover? JA! NEI!

Så fint da!

Da husker du kanskje også omtrent hva Keplers lover sier? Tenk deg godt om før du går videre!!!

Få se Keplers lover da vel!

Nå begynner vi å nærme oss den analytiske utledning av baner her, men før i setter igang, har du hørt om Keplers lover? JA! NEI!

Så fint da!

Da husker du kanskje også omtrent hva Keplers lover sier? Tenk deg godt om før du går videre!!!

Få se Keplers lover da vel!

OK da, her er de:

1. Planetene går i ellipsebaner med sola i det ene brennpunktet
2. En linje fra sola til planeten sveiper ut like store areler i løpet av like store tidsrom
3. Omløpsperioden (gitt i jordår) i annen potens er lik store halvakse i ellipsebanen (gitt i AU) i tredje potens, $P^2 = a^3$.

Se gjerne denne videoen hvis du er usikker på hva lovene sier.

Neste side

Merket du det forresten en viktig ting på forrige side og i videoen? I astrofysikken bruker vi enheten AU (Astronomial Unit), astronomiske enheter, veldig mye så lær deg med en gang hva denne betyr:

Astronomisk enhet (AU)

Er middelavstanden mellom sola og jorda, ca. 150 millioner km!

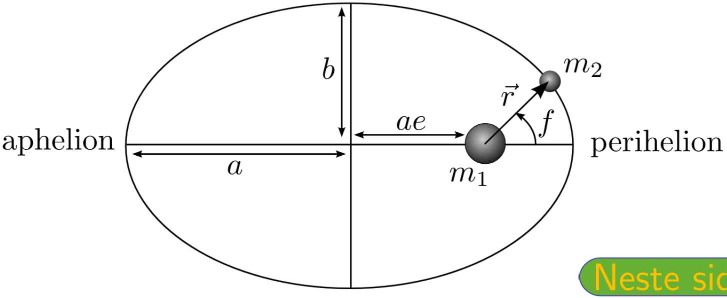
Når vi snakker om ellipsebaner, husker du forresten formelen for en ellipse...? Trykk her når du husker, ikke før!

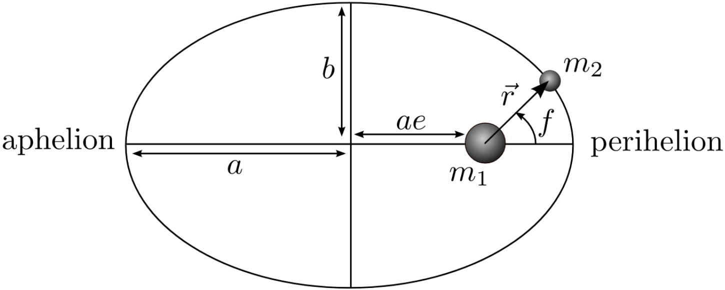
Når vi snakker om ellipsebaner, husker du forresten formelen for en ellipse...? Trykk her når du husker, ikke før!

Ellipser:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

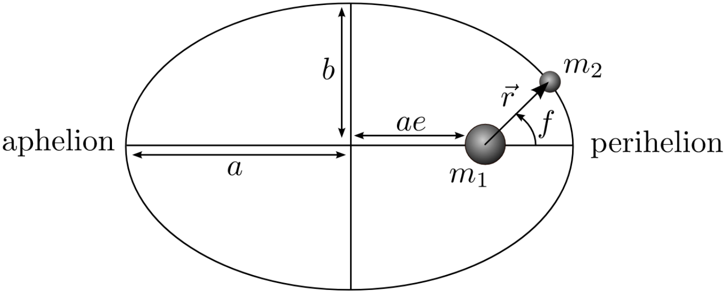
der a er store halvakse (semi major axis) og b er lille halvakse (semi minor axis).





I tillegg til halvaksene bør du kjenne til begrepet brennpunkt. Denne er markert med massen m_1 på figuren. En ellipse har to brennpunkter, begge ligger i en avstand ae fra sentrum langs store halvakse. Størrelsen e kaller vi eksentrisiteten og sier noe om hvor avlang ellipsen er.

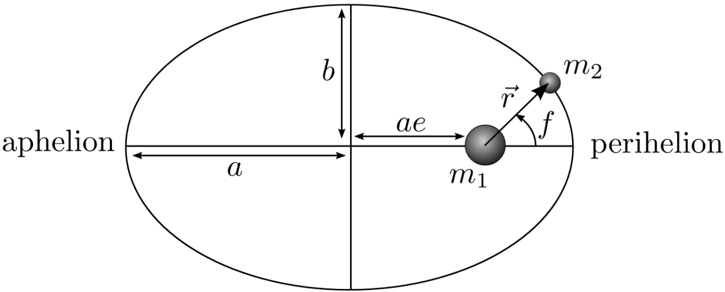
Neste side



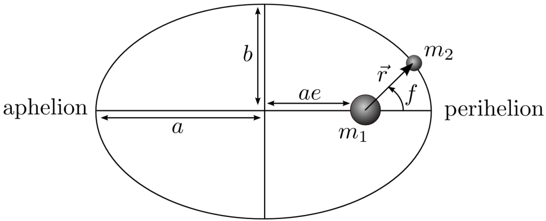
Sammenhengen mellom eksentrisiteten og lille og store halvakse er gitt ved

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Vi ser at hvis vi har en sirkel så må store og lille halvakse være like store, $a = b$, og da ser vi fra denne formelen at $e = 0$. Hvis derimot a er mye større enn b så har vi en veldig avlang ellipse og da gir formelen oss at eksentrisiteten er veldig stor, $e \to 1$. Eksentrisiteten er alltid $e < 1$.



Når vi snakker om ellipsebanene i Keplers første lov, enten det gjelder planetenes baner rundt sola eller en satelitts bane rundt en planet, så ligger altså den ene massen m_1 i brennpunktet og den andre massen m_2 går i ellipsebane rundt. Det er noen ord til som du må lære her: periapsis er punktet i ellipsebanen der objektene er nærmest hverandre og apoapsis er punktet i ellipsebanen der de er lengst fra hverandre. For en planets bane rund sola så brukes ordene perihel og aphel isteden.



En liten ting til om ellipser. I polarkoordinater kan du skrive ellipseformelen på denne måten (hvis du er interessert i hvordan du går fra uttrykket i xy-koordinater til polarkoordinater, så ta en kikk i de vanlige forelesningsnotatene, det er ikke pensum):

$$r(f) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$$

der $r(f)$ er lengden av vektoren $\vec{r}$ i figuren, altså avstanden fra brennpunktet til objekt m_2 og vinkelen f er definert som vinkelen mellom $\vec{r}$ og vektoren som går fra brennpunktet i m_1 til perihel. Hvis vi setter inn $f = 0$ her hva får du da for lengden r? Stemmer det overens med det du ser geometrisk på figuren? Og hva med $f = \pi$? (**hint:** avstand fra sentrum til brennpunkt er ae.)

Forrige side

TID FOR KAFFEPAUSE!!!

Ut å strekke på bena. Inn med litt koffein...

Ihvertfall 10 min...

Jeg lover, jeg har tatt pause og er klart til å fortsette

Da er vi klare til å begynne utledningen av Keplers første lov! Eller???

En rask sjekk om du har oversikt over det som trengs

- Du kjenner til enhetsvektorene $\vec{e}_r$ og $\vec{e}_\theta$ og hvordan disse er definert?
- Du forstår hvordan du deriverer disse enhetsvektorene?
- Du forstår hvordan du kan derivere posisjonsvektoren $\vec{r}$ og dermed finne hastighetsvektoren $\vec{v}$?
- Du forstår forskjellen mellom radiell og tangensiell hastighet og kan uttrykke disse ved hjelp av r og θ samt disses derivert?
- Du kan kan uttrykket for spinn per masse (h) uttrykt ved hjelp av r og θ samt disses derivert? Og kan utlede dette?
- Du vet hva lille/store halvakse, eksentrisitet, brennpunkt, apoapsis/aphel, periapsis/perihel er?

ÅJA, dette kan jeg, la oss sette igang med utledningen!

Njaaaa...jeg trenger kanskje litt repetisjon

Da er vi klare til å begynne utledningen av Keplers første lov! Eller???

En rask sjekk om du har oversikt over det som trengs

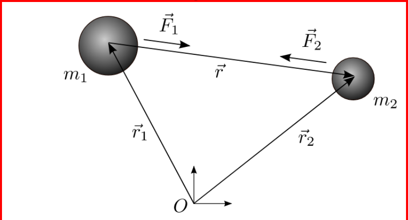
- Du kjenner til enhetsvektorene $\vec{e}_r$ og $\vec{e}_\theta$ og hvordan disse er definert?
- Du forstår hvordan du deriverer disse enhetsvektorene?
- Du forstår hvordan du kan derivere posisjonsvektoren $\vec{r}$ og dermed finne hastighetsvektoren $\vec{v}$?
- Du forstår forskjellen mellom radiell og tangensiell hastighet og kan uttrykke disse ved hjelp av r og θ samt disses derivert?
- Du kan kan uttrykket for spinn per masse (h) uttrykt ved hjelp av r og θ samt disses derivert? Og kan utlede dette?
- Du vet hva lille/store halvakse, eksentrisitet, brennpunkt, apoapsis/aphel, periapsis/perihel er?

ÅJA, dette kan jeg, la oss sette igang med utledningen!

Njaaaa...jeg trenger kanskje litt repetisjon

Bruk 'forrige side'-knappene til å gå bakover og repetere. Dette er viktig, ikke gå videre før du har kontroll, da blir alt bare så mye vanskeligere.

Vi skal i det følgende løse det som vi kaller **2-legeme-problemet**:

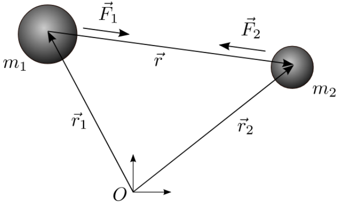


To legemer med masse m_1 og m_2 påvirker hverandre kun med gravitasjonskrefter. Det virker ingen eksterne krefter. Initialposisjonene og initialhastighetene til begge legemene er kjent. For å gjøre utledningen enklere skal vi først sette oss på m_1 og utlede bevegelsen til m_2 sett ifra m_1. Dermed trenger vi kun å se på bevegelsen til *et* legeme. Etter det skal vi se på bevegelsene til begge legemene. På figuren ser du at vektoren $\vec{r}$ peker fra m_1 til m_2. **Når vi setter oss på m_1 og definerer origo der, så er denne $\vec{r}$ altså poisjonsvektoren til m_2. Når vi har funnet hvordan $\vec{r}(t)$ endrer seg som funksjon av tiden så har vi løst 2-legeme-problemet sett fra objekt m_1.**

I denne videoen begynner vi utledningen av løsningen på 2-legemeproblemt. Vi diskuterer krefter på objektene og bruker Newtons lover inkludert gravitasjonsloven til å komme frem til

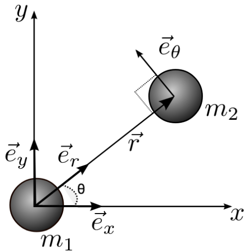
$$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

der vi har definert $m = G(m_1 + m_2)$ og $r = |\vec{r}|$ der $\vec{r}$ peker fra masse m_1 til masse m_2.



Dette **bevegelseslikningen** for systemet vårt. Det er en differensiallikning i funksjonen $\vec{r}(t)$. Hvis vi klarer å løse for $\vec{r}(t)$, har vi funnet bevegelsen til m_2 i forhold til m_1 og dermed løst 2-legemeproblemet sett ifra m_1.

For å kunne løse denne likningen, så trenger vi å innføre enhetsvektorer. Det viser seg at det er lettere å jobbe med $\vec{e}_r$ og $\vec{e}_\theta$ her! Ta en titt på denne figuren:



$$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

Vi har nå definert origo i sentrum av m_1 slik at $\vec{r}$ er en posisjonsvektor som peker på m_2. Sett inn enhetsvektorer, deriver og dobbeltderiver $\vec{r}$ og se om du klarer å komme frem til: **(hint: gå baklengs fra dette svaret for å sammenlikne!)**

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta = -\frac{m}{r^2}\vec{e}_r.$$

Flere hint: start fra uttryket for $\dot{\vec{r}}$ og husk at $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ og $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r$. Hvis du ikke får det til, ta en titt på denne videoen her , men **kun når du har gjort et skikkelig forsøk selv!**. Neste side **(Feil i videoen: det står r^3 under brøkstreken på høyre side, det skal være r^2 som i likningen rett over)**

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta = -\frac{m}{r^2}\vec{e}_r.$$

Se nøye på denne likningen! Se om du kan bruke den til å trekke følgende konklusjoner:

Vi har gjort om vektorlikningen til to skalare likninger som sier:

- Vi har utledet at spinn per masse (h) er en bevart størrelse.
- Vi har kommet til at

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{m}{r^2}$$

Hvis du ikke ser hvordan vi kommer frem til dette, så kikk på denne videoen.

Neste side

Nå nærmer vi oss slutten her!

Vi skal nå gjøre to steg:

1. vi skal bruke θ som variabel isteden for tiden t. Hvis vi kun er interessert i formen på banen og ikke hvor objektet er til en gitt tid, så holder det å få ut svaret $r(\theta)$, dvs. hva er lengden av $\vec{r}$ når vinkelen som vektoren danner med x-aksen er θ? Vi skal altså ha deriverte i forhold til θ isteden for tiden.
2. For å gjøre det enklere å løse likningen, så viser det seg at det er bedre å definere $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ og substituerer u overalt der det er r. Vi løser for $u(\theta)$ og til slutt setter vi inn for r igjen.

Du skal nå få prøve deg litt selv, før du får svaret... Neste side

Deriver u med hensyn på θ, bruk kjerneregel til å forbinde denne med $\dot{r}$ og se om du klarer å få:

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{h}$$

der h er spinn per masse. Og deriverer du en gang til skal du få:

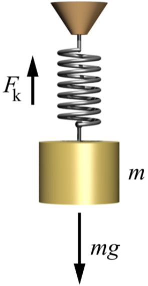
$$\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{\ddot{r}}{h\dot{\theta}}$$

Hvis du nå setter inn $\ddot{r}$ fra likningen vi fant over ($\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{m}{r^2}$), klarer du å få

$$\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2}$$

Var disse stegene litt vanskelige? Det var meningen! Ikke bruk mye tid på dette, her er det mer matematisk triksing enn det er fysikk. HER finner du en video som forklarer det. Neste side

Før vi går videre, la oss snakke om noe helt annet. Har du hørt om *harmonisk oscillator?*. Se på denne situasjonen:



Hvis vi antar at vi har en x-akse som går nedover her, er du enig i at følgende likning beskriver x-posisjonen til loddet:

$$F = ma = m\ddot{x} = -kx + mg$$

der m er massen til loddet, kx er fjærkraften som virker oppover, k er fjærkonstanten, jo større x er jo større er kraften, og mg er vanlig tyngdekraft (vi antar g konstant her). Hvis vi deler med m her og flytter over får vi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = g$$

som er likningen for en harmonisk oscillator. Hvis vi setter $k/m = 1$ så ser vi at vi har nøyaktig samme type differensiallikning:

$$\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2}$$

Dette er også en harmonisk oscillator.

Neste side

Vi forstår at løsningen er oscillerende: loddet kommer til å svinge opp og ned ettersom tyngden drar det nedover og fjæren oppover så få vi en svingene bevegelse. Det samme må altså skje med $u(\theta)$, ettersom θ endrer seg så må u (og dermed r) bli større og mindre. Dette stemmer jo med en ellipse: planeten går fra perihel til aphel og dermed svinger r (avstanden til brenpunktet) mellom minste og største verdi, akkurat som loddet. Men kan du se en analytisk løsning av denne likningen?

Hvis du først setter konstanten lik 0 og flytter over på høyre side så står det:

$$\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} = -u$$

Ser du en løsning av denne likningen? Her har vi jo en funksjon u som er slik at hvis du deriverer den to ganger så får vi $-u$ tilbake, hva må det være?

Tenk deg godt om! Ikke trykk her før du har svaret!

Ganske riktig ja! En cosinus eller sinus er jo akkurat slik at hvis du deriverer den to ganger så få du tilbake minus funksjonen selv. Hva hvis vi nå tar med konstantleddet da. Hva blir løsningen av denne likningen?

Likningen for harmonisk oscillator for tolegemeproblemet

$$\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2}$$

Prøv deg litt frem på papir til du finner en løsning!

Nå har jeg prøvd meg frem helt til jeg fant en løsning!

Er du **helt** sikker på at du har funnet riktig løsning?. Før du går videre nå, ta din løsning $u(\theta)$ og dobbeltderiver den! Er svaret du får lik:

$$\frac{m}{h^2} - u$$

???

Helt sikker? Neste side

Da skulle du ha fått følgende svar:

$$u(\theta) = \frac{m}{h^2} + A\cos\left(\theta - \omega\right)$$

hvor A og ω er integrasjonskonstanter. Ble det riktig?
Hvis vi nå omdøper integrasjonskontantene og gjør om til $r(\theta)$ ved $r = 1/u$ så få vi da:

$$r(f) = \frac{p}{1 - e\cos f}$$

hvor vi har definert $f = \theta - \omega$, $p = h^2/m$ og $e = Ap$. MERK at p her ikke har noe med bevegelesmengde å gjøre! Ser du noe kjent med dette uttrykket? Kan du skrive det litt om for å få noe kjent?
(MERK deg også definisjonen $p = h^2/m$ her, den kommer du til å bruke i neste forelesning!)

Ganske riktig ja! Hvis vi definerer en størrelse a slik at $p = a(1 - e^2)$ så har vi jammen

Keplers første lov utledet fra Newtons lover

Planetene går i ellipsebaner

$$r(f) = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos f}$$

Der solen er i det ene brennpunktet

Dette er jo en generell løsning av 2-legemeproblemet og gjelder da for enhver banebevegelse. MEN, for ellipser så må $e = [0, 1)$ men e kan aldri bli 1. I denne løsningen så kan e være en hvilken som helst positiv størrelse og enda være en løsning av likningen vår. Men hvis $e \geq 1$ så har vi ikke en ellipse lenger! Betyr det at det finnes løsninger av tolegemeproblemet som **ikke** er ellipsebaner men andre typer baner? Som Kepler ikke visste noe om??

Fortsettelse følger... Neste side

Forrige side ☺ ☹ ... i den neste og meget spennende forelesningen i emnet AST2000...

Følg med!

Neste side

Forrige side ☺ ☹ Da er vi ved veis enda av den første forelesningen i del 1B. Du bør nå ha god oversikt over dette:

- posisjonsvektorer, hastighetsvektorer, enhetsvektorer i polarkoordinater
- hvordan derivere vektorer i polarkoordinater
- størrelser og egenskaper til en ellipse
- vite hva en harmonisk oscillator er
- kjenne hovedtrekkene i hvordan man løser 2-legemeproblemet

Trykk nå gjerne på smilefjesene og si meninga di om dette interaktive forelesningsnotatet. Spesielt er jeg interessert i å vite hvor lang tid du brukte og da hva du brukte mest tid på! All ris og ros mottaes med takk for å vite om alt arbeidet med å lage disse interaktive slidene er verd det, om jeg bør fortsette med det og om det er noe jeg bør endre.