

AST2000 Del 2C

Interaktive forelesningsnotater: forelesning 2 av 2

VIKTIG

Dette er et alternativ til forelesningen i emnet. Har du gått skikkelig gjennom disse interaktive forelesningsnotatene så trenger du ikke å lese de fulle forelesningsnotatene (med unntak av oppgavene bak). All informasjonen du trenger, får du her. Du kommer til å få mange grublespørsmål og diskusjonsoppgaver, det er meningen at disse skal gjøres i grupper av minst 2, maks 4 studenter. Det er defor sterkt anbefalt at dere sitter sammen i grupper når dere går gjennom disse interaktive forelesningsnotatene, du vil få betydelig mer utbytte av dem på den måten. Hvis du har kommentarer ris/ros til disse forelesningsnotatene eller til emnet, trykk på ☺☻ knappen som du finner på alle sider.

Trykk denne knappen for å begynne

- HUSK at du får mer ut av de interaktive forelesningsnotatene når du gjør de sammen med noen. Diskusjonene med andre er svært viktige.
- Det er mange spørsmål/grubliser underveis, sett dere selv en tidsgrense, 1 minutt på de korte, maks 4-5 minutter på de lengre. Ha en alarm ved siden av, ellers kommer dere til å bruke alt for langt tid. Har dere ikke fått det til etter kort tid, gå videre, se svaret og lær!
- Er du i det minste tvil om noe, så finnes det en **FORUM** knapp, trykk det og still spørsmål med en gang mens du enda husker spørsmålet!

Trykk denne knappen for å begynne

Forrige side

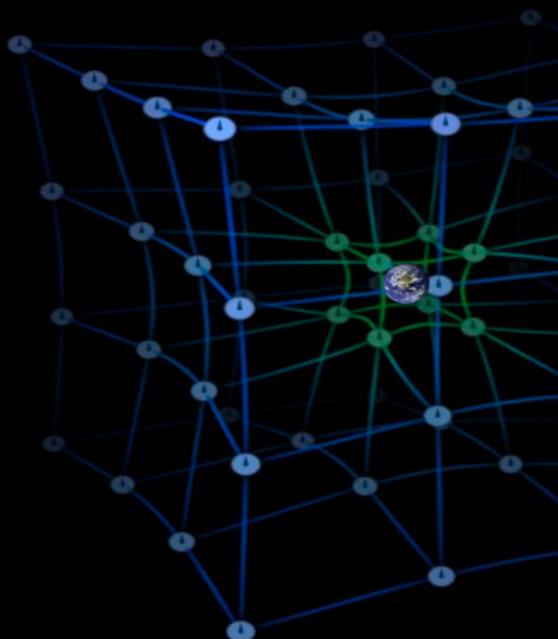
Hvis du allerede har begynt på denne forelesningen og vil hoppe rett inn til et annet kapittel, kan du trykke her:

- Maksimal aldring i Lorentzgeometri
- Maksimal aldring i Schwarzschildgeometri
- Falling, falling...
- GPS

Merk at sidene er merket med sidenummer på denne måten: SIDE X/Y/Z.
Her er Z antall sider totalt, Y er sidenummeret til siste side i avsnittet du holder på med og X er sidenummeret til siden du er på.

Neste side

Forrige side



Velkommen til forelesning 2 av 2 i del 2C! Vi skal nå regne med Schwarzschild -geometri. Først skal vi tilbake til prinsippet for maksimal aldring og se hvilke store konsekvenser dette prinsippet har i et krumt tidrom. Så skal vi se på en stakkar som faller inn i et sort hull og så skal vi se på praktisk anvendelse av generell relativitetsteori: visst du at den er helt nødvendig for å få GPS til å funke? Normalt tar dette forelesningsnotatet en og en halv dobbelttimen (altså 3 klokkeslager). Fremstillingen av generell relativitetsteori i AST2000 er basert på den fantastiske boken "Exploring black holes" av E. Taylor, J. Wheeler og E. Bertschinger, gratis tilgjengelig [her](#). Anbefales på det sterkeste for den som er interessert.

Neste side

[Forrige side](#)



side 1 av 42

[Introduksjon](#)

[FORUM](#)

Vi begynner som vanlig...

...med litt brainstorming. Som det er **svært viktig** at du gjør før du går videre.

[Trykk her for å varme opp](#)

Er du klar og har sendt inn skjemaet?

[Nei](#)

[Ja](#)

Forrige side

Nytt tema:

Maksimal aldring

Dette temaet fortsetter frem til side 37 av 42.

Normalt kommer jeg omtrent frem til avsnittet om GPS i den fysiske forelesningen og tar resten forelesningen etter. Det anbefaler jeg at du også gjør! Vi skal nå snakke om maksimal aldring og ta en liten pause midtveis før neste tema.

Maksimal aldring revisited...

1/31/63

Vi begynner med den siste sida fra forrige forelesning: Hvis du ikke husker helt hva vi drev med anbefales det sterkt å ta en titt på oppsummeringen i **denne videoen** slik at du er klar for det som nå kommer...

[Neste side](#)

2/31/63

Husker du prinsippet om maksimal aldring? I [denne videoen](#) fra del 2B får du en oversikt over prinsippet og hvordan det kan brukes til å vise Newtons 1. lov i et inertialsystem med Lorentzgeometri. Hvis du ikke husker helt hvordan det var, kikk gjennom videoen nå før du går videre!

Neste side

[Forrige side](#)

side 5 av 42

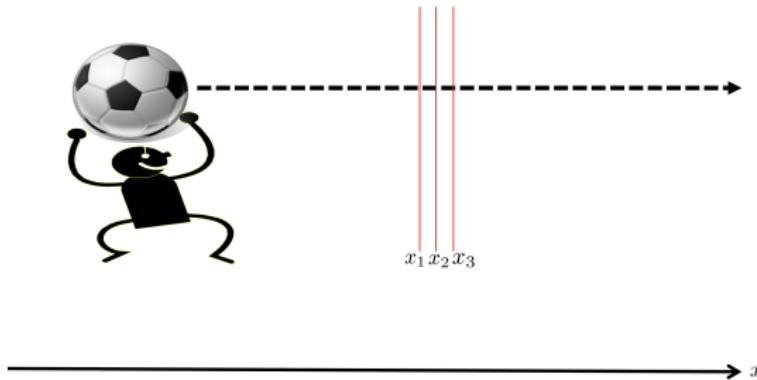
[Maksimal aldring](#)[FORUM](#)[SIDE](#)

3/31/63

Vi skal nå vise det som ble hoppet glatt over i videoen, nemlig hvorfor den rette linja er den **lengste** veien i tidrommet når vi har Lorentzgeometri. Vi tar derfor en kjapp tur tilbake til spesiell relativitetsteori siden vi etterpå skal bruke den samme metoden på generell relativitetsteori og Schwarzschild -geometri.

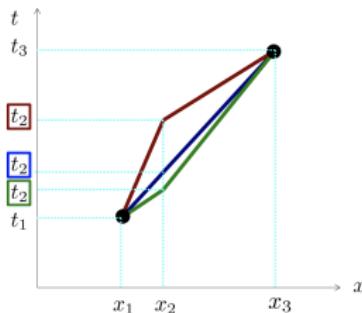
[Neste side](#)

4/31/63



Her ser vi en person som kaster en ball rett bortover x-aksen. Personen befinner seg i et inertialsystem. Det virker altså ingen krefter eller gravitasjon i dette systemet. Vi har så tatt ut en infinitesimal liten del av veien som ballen følger. Vi gjør denne delen av veien så liten at vi fra posisjon x_1 til x_2 kan anta at hastigheten er konstant lik v_A . Og helt tilsvarende for avstanden fra x_2 til x_3 der hastigheten er konstant lik v_B i hele intervallet. Merk at v_A og v_B ikke nødvendigvis er like, vi må være åpne for muligheten for at ballen kan akselerere underveis.

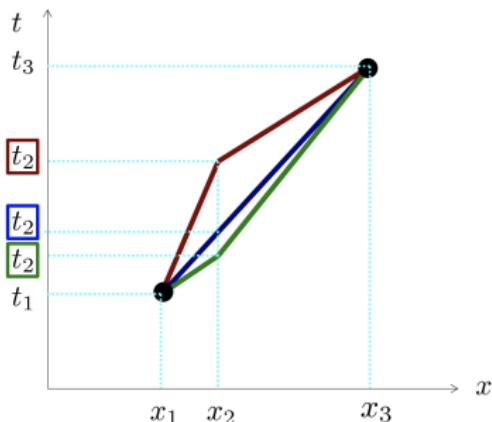
5/31/63



Her ser vi tidromdiagram av situasjonen med tilhørende mulige verdenslinjer. Igjen så ser vi altså bare på en infinitesimal liten del av verdenslinja, to linjestykker som er infinitesimalt små der ballen har konstant hastighet (altså rett linje i tidrommet). Vi ser 3 **mulige** verdenslinjer integnet her av **uendelig mange mulige verdenslinjer** fra x_1 til x_3 . **Vi vet ikke hvilken av de uendelig mange verdenslinjene ballen faktisk tar, det er det vi nå skal bruke prinsippet om maksimal aldring til å finne ut.** (Dvs. vi vet det jo egentlig, men vi later som om vi ikke vet det for å kunne utlede det!)

[Neste side](#)

6/31/63



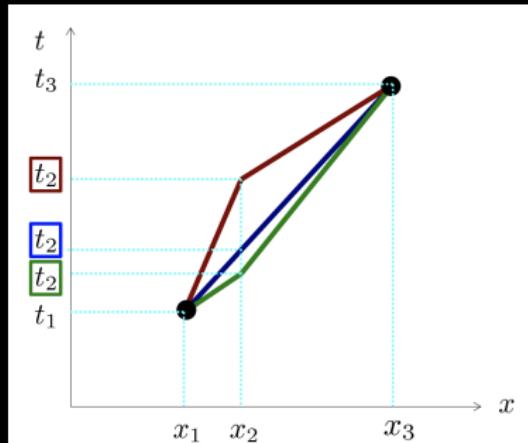
Bare et av disse utsagnene er riktig, trykk på det riktige:

rød sakker farten, grønn øker farten

grønn sakker farten, blå øker farten

grønn sakker farten, rød øker farten

blå sakker farten, rød øker farten



Det ble vel ikke helt riktig? Husker du hvordan sammenhengen mellom fart og helning på linja er? Hvis ikke, ta en kikk nå på forelesningsnotatene for **del 2B**! Husk at fart er endring i posisjon Δx delt på tidsintervall Δt . Prøv igjen!

Forrige side



side 9 av 42

Maksimal aldring

FORUM

SIDE

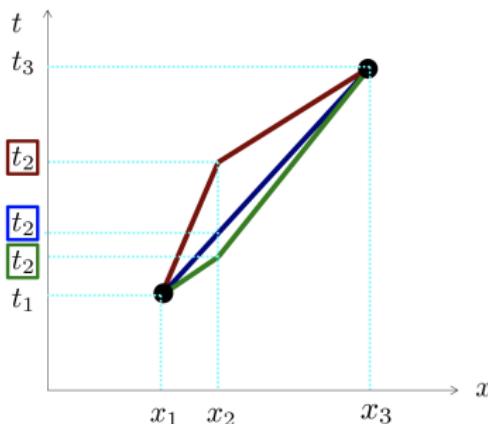
8/31/63



Det er helt riktig. Du har kontroll på verdenslinjene og kan fortsette!

Neste side

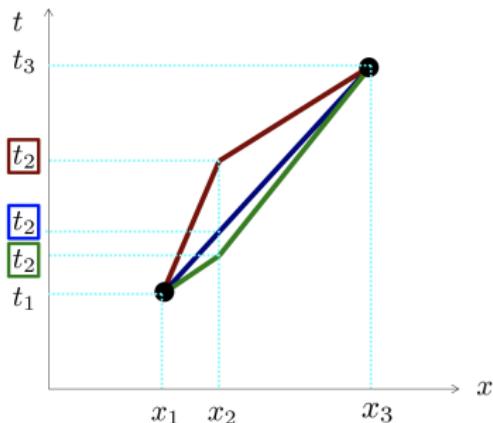
9/31/63



Det vi ikke vet her er endringen i hastighet fra v_A til v_B . Vi antar nå at alle posisjonene x_1 , x_2 og x_3 er kjent. Vi antar også at tidspunktene t_1 og t_3 er kjent. Det som er ukjent er tidspunktet som ballen er i posisjon x_2 . Hvis vi kan bruke prinsippet om maksimal aldring til å fortelle oss tidspunktet t_2 , ja da vet vi hele verdenslinja fra x_1 til x_3 . Det gjør at vi også vil vite om objektet tok en rett linje i tidrommet eller om det endret fart underveis. I figuren ser du de mulige tidspunktene t_2 for de 3 linjene som er opptegnet. Vi ser at hvis prinsippet om maksimal aldring gir oss tidspunktet t_2 som tilsvarer den blå linja, så har vi vist at ballen tar en rett linje med konstant fart i tidrommet.

Neste side

10/31/63



Vi kaller nå avstanden fra x_1 til x_2 for Δx_{12} og tidsintervallet mellom t_1 og t_2 for Δt_{12} . Tidromsintervallet fra punkt 1 til punkt 2 kaller vi Δs_{12} . Og helt tilsvarende for punkt 2 til 3 som vi kaller Δx_{23} , Δt_{23} og Δs_{23} . **Sett opp et uttrykk for den totale egentiden $\Delta \tau_{13}$ som ballen bruker fra punkt 1 til punkt 3 uttrykt kun ved Δx_{12} , Δt_{12} , Δx_{23} , Δt_{23} !** **Ikke gå videre før du har skrevet ned et forslag!**

Neste side

Forrige side



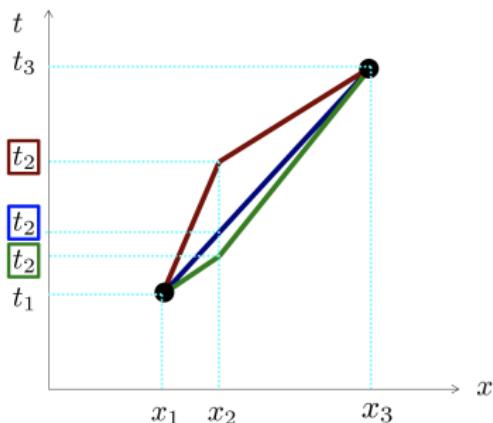
side 12 av 42

Maksimal aldring

FORUM

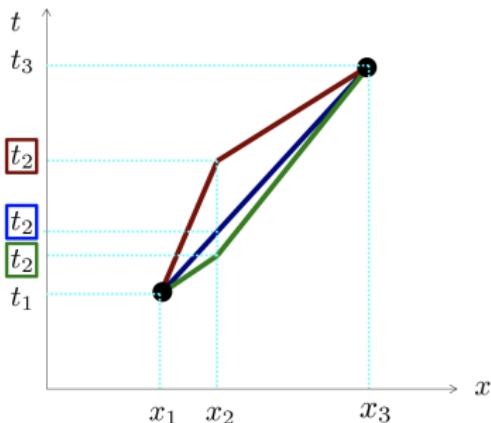
SIDE

11/31/63



Fikk du... Ja, jeg fikk...

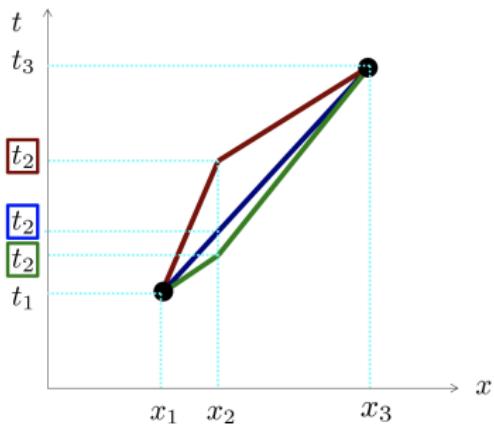
11/31/63

Fikk du... **Ja, jeg fikk...**

$$\Delta\tau_{13} = \sqrt{\Delta t_{12}^2 - \Delta x_{12}^2} + \sqrt{\Delta t_{23}^2 - \Delta x_{23}^2}$$

Hvis du ikke ser hvordan du kommer frem til dette, ta en kikk på
[denne videoen](#). **Neste side**

12/31/63



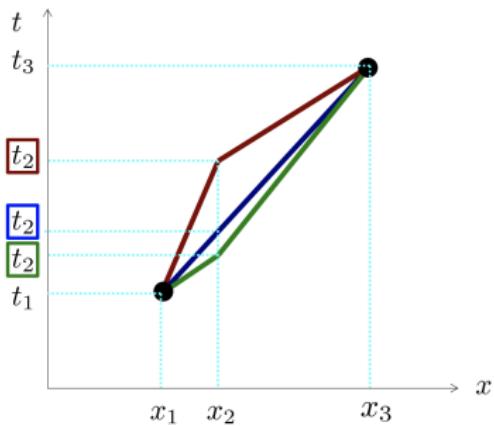
Prinsippet om maksimal aldring sier oss at vi skal maksimalisere, altså finne maksimalpunktet for den totale egentiden $\Delta\tau_{13}$:

$$\Delta\tau_{13} = \sqrt{\Delta t_{12}^2 - \Delta x_{12}^2} + \sqrt{\Delta t_{23}^2 - \Delta x_{23}^2}$$

For å finne et ekstremalpunkt setter vi den deriverte lik null, men den deriverte med hensyn på **hva?** Jo det må vel være med hensyn på t_2 som er vår ukjente. Vi skal altså finne den verdien for t_2 som gjør $\Delta\tau_{13}$ maksimal! **MEEEN.....**

Neste side

13/31/63



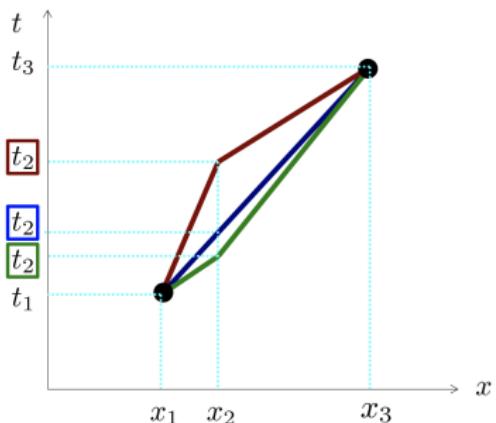
$$\Delta\tau_{13} = \sqrt{\Delta t_{12}^2 - \Delta x_{12}^2} + \sqrt{\Delta t_{23}^2 - \Delta x_{23}^2}$$

...det blir enklere å regne hvis vi isteden deriverer med hensyn på Δt_{12} , altså at vi prøver å finne den verdien for Δt_{12} som maksimaliserer $\Delta\tau_{13}$.

Δt_{12} er jo også en ukjent størrelse her siden t_2 er ukjent, og det er det samme hvilken ukjent størrelse vi bruker. Men kan du se hvordan vi kan skrive Δt_{23} som jo inngår i uttrykket vår over uttrykt ved Δt_{12} og Δt_{13} ? (den siste er jo en **kjent størrelse**). Og hvis du gjør det, kan du nå derivere og sette lik 0? Prøv selv først før du går videre.

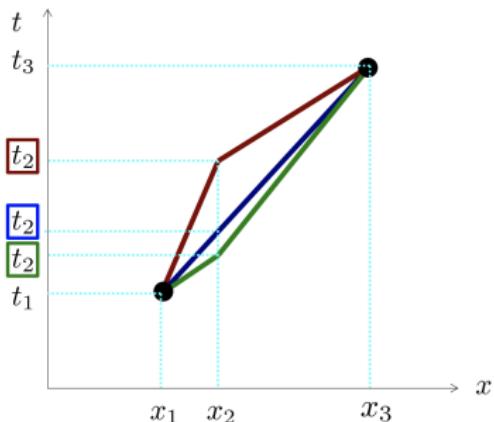
Neste side

14/31/63



Fikk du... Ja, jeg fikk...

14/31/63



Fikk du... Ja, jeg fikk...

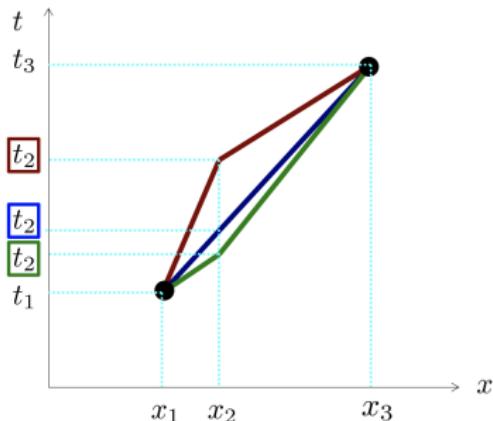
$$\frac{\Delta t_{12}}{\sqrt{\Delta t_{12}^2 - \Delta x_{12}^2}} + \frac{\Delta t_{23}}{\sqrt{\Delta t_{23}^2 - \Delta x_{23}^2}} = 0$$

??? Hvis du ikke fikk det til skal du snart se hvordan, men først, kan du se hvorfor du kan skrive dette som:

$$\frac{\Delta t_{12}}{\Delta \tau_{12}} = \frac{\Delta_{23}}{\Delta \tau_{23}}$$

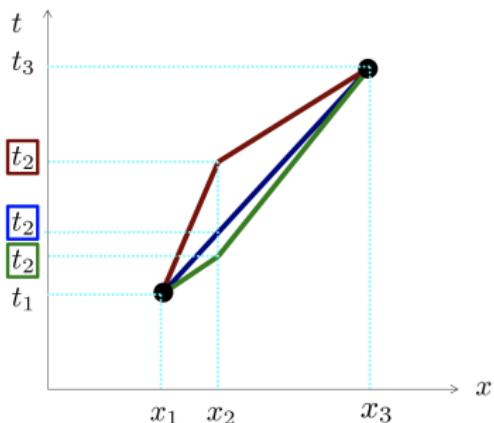
(Hint: Hva er egentiden $\Delta\tau$ og hvordan kan du skrive den uttrykt med Δt og

15/31/63



Hvis du ikke klarte å komme frem selv, se på
denne videoen. [Neste side](#)

16/31/63

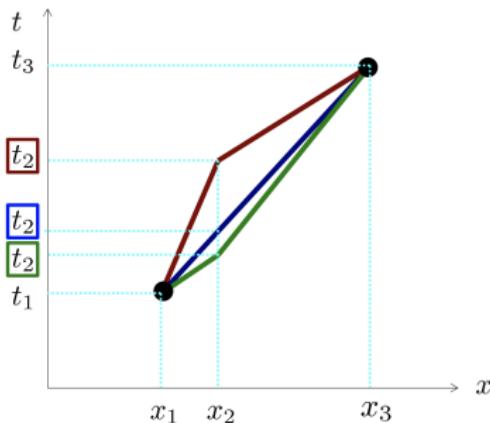


Men hva står det egentlig her??? La oss ekstrapolere litt: Sett at du nå utvider verdenslinja med ett linjestykke til, et rett linje fra punkt 3 til punkt 4. Hvis vi nå gjentok denne utledningen fra punkt 2 til punkt 4 så vil vi jo **nødvendigvis** helt tilsvarende finne:

$$\frac{\Delta t_{23}}{\Delta \tau_{23}} = \frac{\Delta t_{34}}{\Delta \tau_{34}}$$

Og slik fortsetter det utover verdenslinja. Det sier oss vel at vi har en bevert størrelse langs bevegelsen til ballen? Et uttrykk som generelt er

17/31/63



Vi har jo funnet at

$$\frac{\Delta t_{12}}{\Delta \tau_{12}} = \frac{\Delta t_{23}}{\Delta \tau_{23}} = \frac{\Delta t_{34}}{\Delta \tau_{34}}$$

dermed ser vi at størrelsen $\Delta t / \Delta \tau$ er bevart, enig? Men tenk på spesiell relativitetsteori, hvordan kan vi skrive en slik størrelse uttrykt med ballens hastighet? Tenk f.eks. at ballen er et tog, at t er tiden målt fra bakken og τ jo er egentiden i toget...

DÆGGERN!!!! Jeg ser det!!!

18/31/63

Er ikke $\Delta t / \Delta \tau$ bare forholdet mellom tiden i labsystemet og tiden i toget (ballen)??? Var ikke den

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \gamma$$

??? Altså vi har utledet at γ er en bevart størrelse!!! Men hvis γ er bevart så betyr det at v er bevart siden $v = 1/\sqrt{1 - \gamma^2}$!! Er ikke dette det vi ventet? **Altså at vi har utledet at v er den samme for alle linjestykker, altså konstant v gjennom hele verdenslinja, Newtons første lov!** Men har vi utledet noe mer... hvilken annen størrelse avhenger av γ ???

Neste side

19/31/63

Er ikke relativistisk energi gitt ved

$$E = m\gamma$$

??? Har vi utledet at energi per masse er en bevart størrelse? Altså E/m er bevart? Kan se slik ut...

Kan altså være at prinsippet om maksimal aldring er det bakenforliggende prinsippet som sier oss hvorfor energi er en bevart størrelse? **(Merk at det er et punkt vi har hoppet over: vi har funnet ekstremalpunktet til $\Delta\tau_{13}$ men vi har ikke vist at dette er et maksimalpunkt! Det kan du gjøre ved å dobbeltderivere. Den øvelsen kan du gjøre selv hvis du ønsker, men tro meg, det er et maksimalpunkt!)**

Neste side

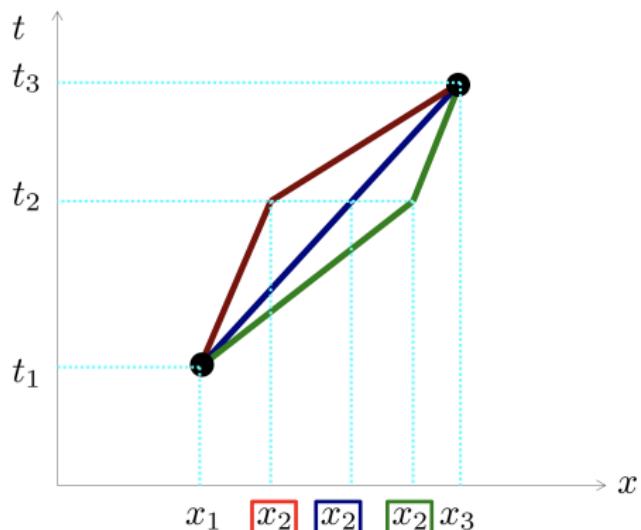
20/31/63



Du skal nå helt på egenhånd få gjøre denne utledningen **en gang til!** Men nå skal du anta at t_2 er kjent men x_2 er ukjent. Du skal altså maksimalisere egentiden $\Delta\tau_{13}$ en gang til men nå med hensyn på x_2 eller da Δx_{12} . Vi skal se at vi da får et noe annet men minst like interessant resultat!

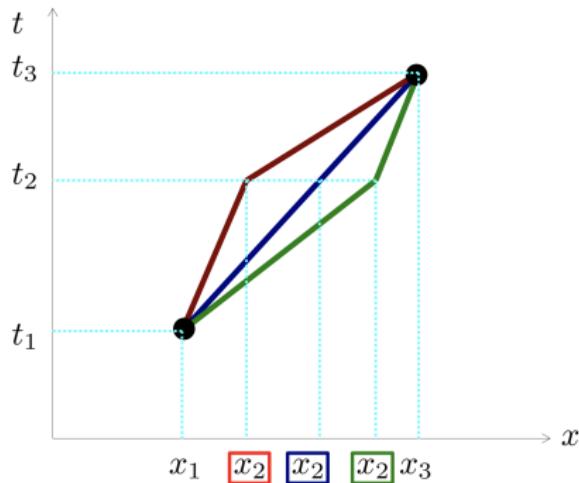
[Neste side](#)

21/31/63



Du får litt hjelp med denne figuren her. Men nå står du på egne ben!
Merk at dere på prosjekt skal gjøre en slik utledning for et nytt tilfelle, og dette kan komme på eksamen, så det er viktig å få prøvd seg alene en gang. Og det vil hjelpe på forståelsen for det som kommer, så dette er et godt øyeblikk å gjøre det på. Når du har gjort hele utledningen og funnet et størrelse som er bevart på samme måte som vi fant at γ er bevart i

22/31/63



Fikk du at $v\gamma$ er en bevart størrelse? Hvis ikke, se gjennom utledningen i [denne videoen](#)!. Men vi vet jo at relativistisk bevegelsesmengde er gitt ved

$$p = m\gamma v$$

Har prinsippet om maksimal aldring her gitt oss bevaring av bevegelsesmengde? Eller det vil si, bevaring av bevegelsesmengde per masse p/m ? Det er litt fristende å dra denne konklusjonen. Altså at prinsippet om maksimal aldring er et overliggende prinsipp som gir opphav til bevaring av energi og bevegelsesmengde.

Forrige side

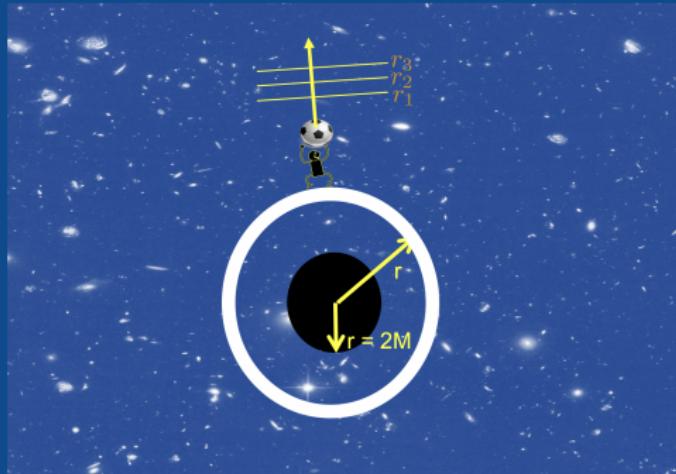
Kaffe!



MEN først litt kaffe. Og etter kaffen, en tur ut, ta med deg ball. Kast den bortover og oppover og lim gjerne fast en klokke for å måle hvor mye ballen eldes. Og for å forberede deg på det neste: kast ballen rett oppover og se om den fortsetter med konstant hastighet eller om den akselereres på noen måte. Og hvis det siste skjer kan du jo filosofere litt rundt hvorfor den akselereres? Ikke gå videre før du **er helt klar i hodet igjen!**

Jeg er klar til å fortsette...

23/31/63



Her ser vi situasjonen med gravitasjon. Skallobservatøren kaster en ball **rett oppover i tyngdefeltet**. Ballen går altså oppover i r -retning og passerer punktene r_1 , r_2 og r_3 på sin vei. **Akkurat som for tilfellet med spesiell relativitetsteori så legger vi r_1 og r_2 så nær hverandre at ballen har konstant hastighet mellom disse to punktene.** Helt tilsvarende mellom r_2 og r_3 . Men farta v_A mellom r_1 og r_2 trenger ikke å være den samme som farta v_B mellom r_2 og r_3 . Vi skal også se at vi trenger å definere avstanden r_A som er midlet av avstanden mellom r_1 og r_2 , altså i praksis midtpunktet mellom de to. Helt tilsvarende er r_B midtpunktet mellom r_2 og r_3 . Vi skal nå bruke prinsippet om maksimal aldring til å finne ballens rette verdenslinje...

Neste side

[Forrige side](#)

side 29 av 42

Maksimal aldring

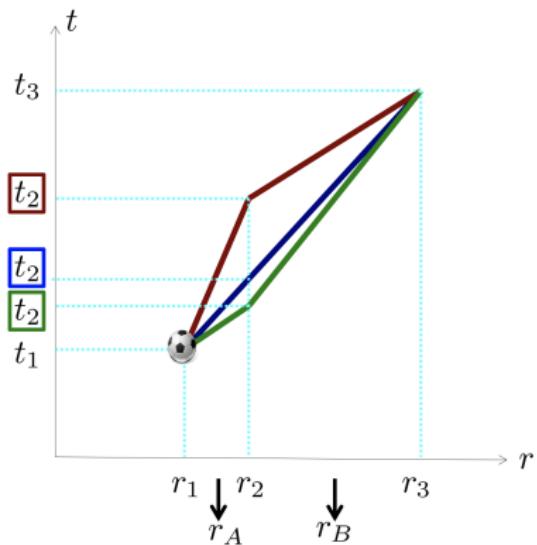
[FORUM](#)[SIDE](#)

24/31/63

Men stopp en hal! Husker du at prinsippet om maksimal aldring **kun gjelder legemer som er i fri flyt?** Altså legemer som det ikke virker noen krefter på!!! **VEL, i generell relativitetsteori er ikke gravitasjonen regnet som en kraft!** Som vi skal se så er det krumningen av tidrommet som gir seg utslag i noe som ser ut som en kraft. Men ifølge relativitetsteorien så **er det ingen kraft.** Dermed er et legeme under gravitasjonspåvirkning enda i fri flyt. Og det er geometrien til tidrommet kombinert med prinsippet om maksimal aldring som gir opphav til akselrasjon, **ikke noen kraft!**

[Neste side](#)

25/31/63



Her ser vi igjen 3 mulige verdenslinjer, eller rettere sagt det littlille utsnittet av mulige verdenslinjer til ballen mellom høyde r_1 til r_3 fra tidspunkt t_1 til t_3 der det har konstant hastighet (rett linje) fra r_1 til r_2 og en (mulig) annen konstant hastighet fra r_2 til r_3 . Her beveger ballen seg over flere skall så vi kan ikke anta lokalt inertialsystem for hele reisen. Dermed må vi bruke Schwarzschild -geometri. Kan du sette opp et uttrykk for den totale egentida slik som du gjorde tidligere?

Ikke bla om før du har et forslag.

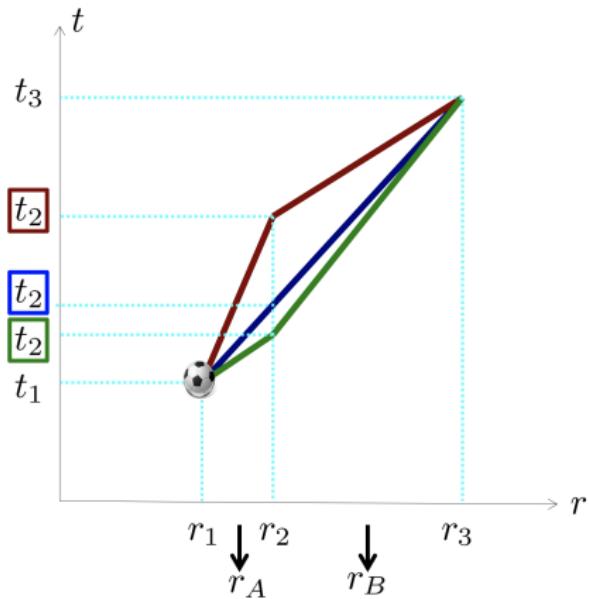
Neste side

26/31/63

Fikk du:

$$\Delta\tau_{13} = \Delta\tau_{12} + \Delta\tau_{23}$$

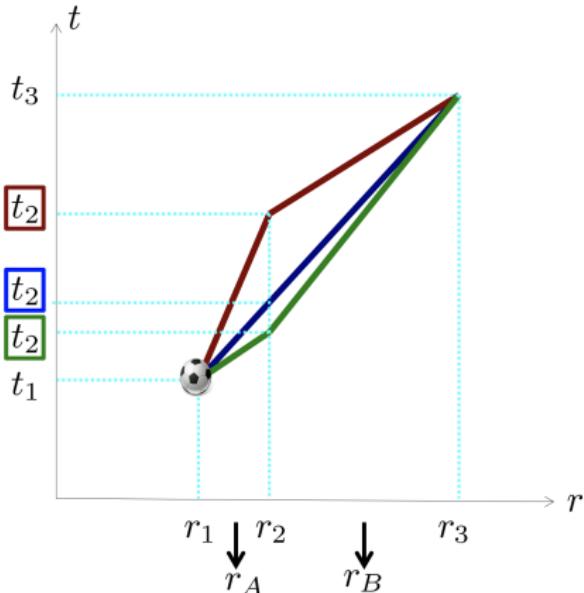
$$= \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right) \Delta t_{12}^2 - \frac{\Delta r_{12}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right)}} \\ + \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right) \Delta t_{23}^2 - \frac{\Delta r_{23}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right)}},$$



Ser du nå hvorfor vi trenger r_A og r_B ? Hvis ikke se [se denne videoen](#) for utledning og forklaringer. **Vi skal nå bruke prinsippet om maksimal aldring på denne egentiden $\Delta\tau_{13}$ og finne hvilket tidspunkt t_2 , og dermed hvilken verdenslinje, som maksimaliserer egentida.**

Neste side

27/31/63



Hvis du som før deriverer dette med hensyn på Δt_{12} , setter dette lik 0 og setter inn for egentidene $\Delta\tau_{12}$ og $\Delta\tau_{23}$ akkurat som før får du da:

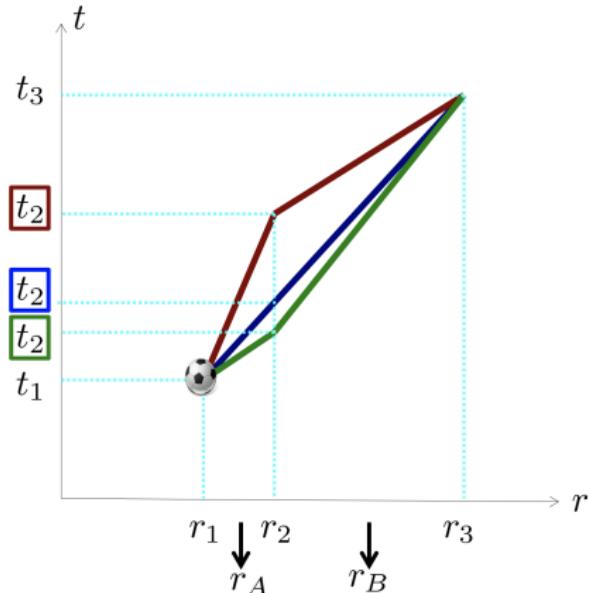
$$\frac{\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right) \Delta t_{12}}{\Delta\tau_{12}} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right) \Delta t_{23}}{\Delta\tau_{23}}.$$

Hvis ikke, se denne videoen for detaljer.

Ser du også her, på samme måte som for eksemplene med Lorentzgeometri, at vi har funnet en størrelse som er bevart langs verdenslina? **Hva er denne størrelsen?**

Neste side

28/31/63



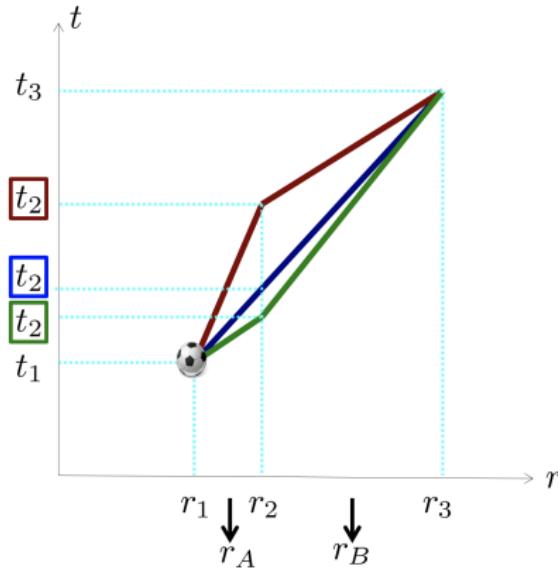
Fikk du at størrelsen

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$$

er en størrelse som er bevart langs (ved ekstrapolasjon) hele bevegelsen til ballen?
Men hva i allverden sier dette oss for noe? I denne videoen skriver vi om og tolker uttrykket.

Neste side

29/31/63



I videoen ser vi at uttrykket som er bevart

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$$

kan skrives som

$$\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{sh}^2}{c^2}}}$$

der v_{sh} er farta målt av en skallobservatør som er **på akkurat det skallet som ballen er i et gitt øyeblikk**. Vi ser at denne størrelsen forteller oss at ballen sakker farten sin når den er på vei oppover i tyngdefeltet: Hvis dette skal være en bevart størrelse, og hvis r øker (ballen beveger seg oppover), **ja da må v_{sh} minke** for å bevare denne størrelsen! **Ser du det?**

Men hva i allverden er dette for en størrelse? Som vi så i del 2B så er et typisk triks for å tolke relativistiske størrelser å gå til grensen med lave hastigheter og **i dette tilfellet også svake gravitasjonsfelt**. Ved svake gravitasjonsfelt, altså langt fra sorte hull bør vi få tilbake noe Newtonsk. I [denne videoen](#) rekkeutvikler vi og tolker

uttrykket.

Neste side

30/31/63

I videoen så vi at den bevarte størrelsen vår tilsvarer total energi per masse til ballen, hvileenergi, kinetisk energi og potensiell gravitasjonsenergi i et og samme uttrykk:

$$\frac{E}{m} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \frac{1}{\sqrt{1 - v_{sh}^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}v^2 - \frac{M}{r}$$

der tilnærmelsen gjelder for lave hastigheter $v \ll 1$ og svake gravitasjonsfelt $r \gg M$, det vi kaller for **den klassiske grensen**. Ganger vi opp med m og bruker SI-enheter ser vi at vi får

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

i den klassiske grensen.

Neste side

31/31/63

Vi har altså

det generelle uttrykket for energi per masse til et legeme...

...med masse m i tyngdefeltet til en kulesymmetrisk massefordeling med masse M i en koordinatavstand r (husk hvordan dette måles) fra sentrum

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$$

der $\Delta t / \Delta \tau$ er forholdet mellom et egentidsintervall $\Delta \tau$ målt på klokka som står fast på objektet og Δt som er det tilsvarende tidsintervallet for langt-vekkobservatøren. Dette kan skrives ut ved hjelp av lokal skallhastighet v_{sh} for legemet som

$$\frac{E}{m} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \frac{1}{\sqrt{1 - v_{sh}^2}}$$

I oppgave 2C.3 (standardløp) eller del 9, oppgave 2 (prosjekt) skal du gjenta utledningen vi akkurat gjorde for å vise bevaring av energi, men ved å holde r_2 fast istedenfor t_2 vil du finne at relativistisk spinn er bevart:

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \gamma_{sh} r v_\phi$$

Neste side

Forrige side

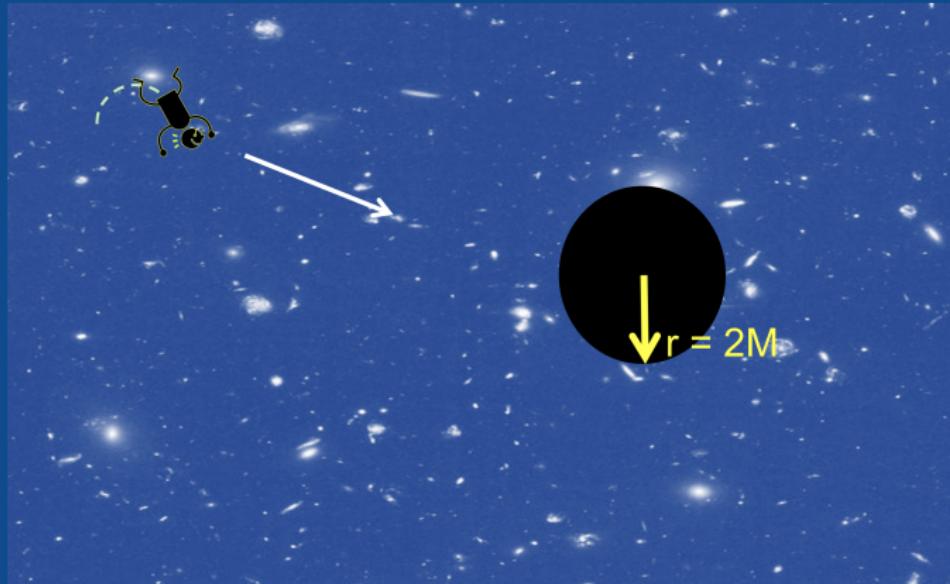
Nytt tema:

Falling, falling...

Dette temaet fortsetter frem til side 46 av 42.

En god strekk på beina nå så du ikke **faller** i søvn! Ti spensthopp samt stupe kråke 10 ganger på gulvet (begynner å bli litt vått ute).
Er tankene klare? **La oss kaste oss ut mot det sorte hullet!**

32/41/63



Vi er tilbake til den **fritt fallende observatøren**. Hun begynner å falle **radialt innover** mot det sorte hullet fra en veldig stor avstand $r \rightarrow \infty$ og med null hastighet $v = 0$. Etterhvert vil gravitasjonen fra det sorte hullet akselerere henne innover mot hullet. La oss prøve å finne et uttrykk for hastigheten hennes som funksjon av tida. **Aller først:** Hva er totalenergien E som hun starter med?

$$E = 0$$

$$E = 1$$

$$E = m$$

$$E = m\gamma$$

$$E = mM$$

Det ble galt. Gå et par sider tilbake og se på uttrykket for energi i tyngdefeltet. Hva blir dette når r er veldig stor og hastigheten er 0?

Forrige side



side 38 av 42

Falling, falling...

FORUM

SIDE

34/41/63

Det ble riktig. Vi begynner med energi $E = m$ i grensen $r \rightarrow \infty$ og $v = 0$.

Neste side

35/41/63

For å komme frem til en hastighet v for det fallende legemet/observatøren skal vi følge oppgave 2C.4. Merk at vi først prøver å finne hastigheten $v = dr/dt$ til det fallende legemet målt av langt-vekkobservatøren. Deretter konverterer vi dette uttrykket til hastighet v_{sh} målt av en lokal skallobservatør. På den måten kan vi sammenlikne den hastigheten til legemet som funksjon av tiden sett av de to forskjellige observatørene. **Det er sterkt anbefalt at du prøver deg på denne oppgaven. Sett deg en kort tidsgrense i tilfelle du blir stående fast og bruk videoen på neste side til å hjelpe deg kun til de delene der du sitter fast.** Dette er en meget god eksemploppgave for å lære å regne med uttrykket for energi. (MERK at det i den første oppgaven står "information above", det tilsvarer det som står på de 3 foregående sidene!)

1. Use the relativistic conservation law for energy and the information above to find a relation between the time intervals dt and $d\tau$.

2. Use the the relation you found above together with a well-known relation between proper time and the space time interval ds (as well as an appropriate expression for this interval) to show that

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \frac{2M}{r}.$$

3. Show that the velocity of the falling object as a function of the distance r from the central mass is given by

$$v = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{\frac{2M}{r}}.$$

4. Use the transformation equations for time and radial distance between the far-away observer and shell observer to show that the velocity of the falling object, as observed by the shell observer at distance r (at the moment when the object passes the shell), is given by

$$v_{shell} = \frac{dr_{shell}}{dt_{shell}} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$$

36/41/63

Fikk du det til? I [denne videoen](#)
får du hjelp til utledningene.

Når du har forstått hvordan vi kommer frem til uttrykkene skal vi begynne å tolke dem. **La oss begynne** med hastigheten v målt av langt-vekkobservatøren. Kan du forenkle dette uttrykket for store avstander r ? Kan du finne et annet forenklet uttrykk for disse uttrykkene når $r \rightarrow 2M$?

1. Use the relativistic conservation law for energy and the information above to find a relation between the time intervals dt and $d\tau$.

2. Use the the relation you found above together with a well-known relation between proper time and the space time interval ds (as well as an appropriate expression for this interval) to show that

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \frac{2M}{r}.$$

3. Show that the velocity of the falling object as a function of the distance r from the central mass is given by

$$v = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{\frac{2M}{r}}.$$

4. Use the transformation equations for time and radial distance between the far-away observer and shell observer to show that the velocity of the falling object, as observed by the shell observer at distance r (at the moment when the object passes the shell), is given by

$$v_{\text{shell}} = \frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$$

37/41/63

Kan du forklare hvorfor

$$v \approx -\sqrt{\frac{2M}{r}}$$

når avstanden r er veldig stor, dvs.
 vi er langt vekk fra tyngdefeltet?
 Ser du at dette er likt uttrykket
 som skallobservatøren måler,
 hvorfor må det være slik? Og kan
 du forklare hvorfor

$$v \approx -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

når r er nær (men utenfor) $2M$?

1. Use the relativistic conservation law for energy and the information above to find a relation between the time intervals dt and $d\tau$.
2. Use the the relation you found above together with a well-known relation between proper time and the space time interval ds (as well as an appropriate expression for this interval) to show that

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \frac{2M}{r}.$$

3. Show that the velocity of the falling object as a function of the distance r from the central mass is given by

$$v = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{\frac{2M}{r}}.$$

4. Use the transformation equations for time and radial distance between the far-away observer and shell observer to show that the velocity of the falling object, as observed by the shell observer at distance r (at the moment when the object passes the shell), is given by

$$v_{\text{shell}} = \frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$$

38/41/63

Du kan få bruk for formlene under for å svare på disse spørsmålene:

- Hva skjer med hastigheten når legemet enda er langt ute men faller innover? Øker eller minker hastigheten?
- Og hva skjer når legemet nærmer seg hendelsehorisonten, øker eller minker hastigheten ettersom det faller innover?
- Hvilken hastighet får det rett på hendelsehorisonten?

Minner igjen om at dette er hastighet $v = dr/dt$ målt av langt-vekkobservatøren!

Formler du trenger:



$$v \approx -\sqrt{\frac{2M}{r}}$$

når avstanden r er veldig stor og



$$v \approx -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

når r er nær (men utenfor) $2M$.

Neste side

[Forrige side](#)

side 43 av 42

Falling, falling...

[FORUM](#)[SIDE](#)

39/41/63

La oss nå se på hastigheten v_{sh} **målt av skallobservatøren på det skallet r der ballen passerer på et gitt øyeblikk.:**

$$v_{sh} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$$

Dette uttrykket gjelder for hele fallet fra start til slutt. Hvilken hastighet vil skallobservatører på skall veldig nær hendelsehorisonten måle at legemet har i det det farer forbi?

I [denne videoen](#) får du svar på spørsmålene fra de foregående sidene... [Neste side](#)

Forrige side



side 44 av 42

Falling, falling...

FORUM

SIDE

40/41/63

Vi avslutter vår studie av det fritt fallende legemet for denne gang ved å se på hva som skjer på innsiden av hendelsehorisonten.

Denne videoen tar for seg litt av hva som skjer der.

Neste side

41/41/63

Oppsummert har vi at:

- Langt-vekkobservatøren vill aldri se at legemet faller innenfor eventhorisonten. Han vil se at det sakte min sikkert stopper opp på eventhorisonten (vi skal se senere at lyset også blir kraftig rødforskøvet, så han vil til slutt ikke lenger se legemet).
- Skallobservatører nærmere og nærmere eventhorisonten vil se stadig økende fart på legemet og den vil for skallobservatørene nærmest eventhorisonten nærme seg lysfarta.
- Den fritt fallende observatøren selv merker ingenting når hun nå går gjennom eventhorisonten, det skjer ikke noe spesielt der for den som faller inn (bortsett fra at gravitasjon etterhvert blir veldig sterkt men det har ikke noe å gjøre med selve hendelsehorisonten, denne effekten kan begynne lenge før $r = 2M$). Og i forhold til seg selv har hun alltid hastighet 0.

Som vi ser, **tre helt forskjellige hendelseforløp** for 3 forskjellige observatører!

Forrige side

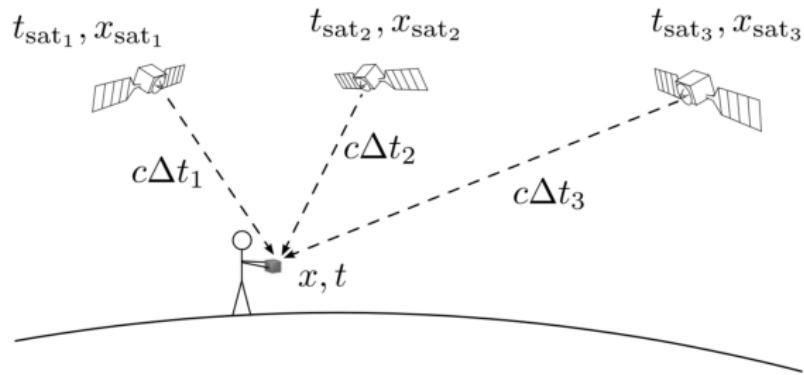
Nytt tema:

GPS

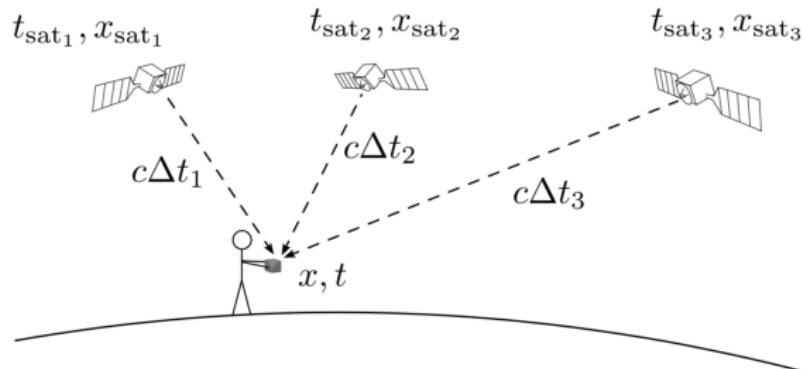
Siste tema i denne forelesningen!

MERK: Normalt kommer jeg frem hit etter en dobbelttime fysisk forelesning. Anbefaler sterkt å vente med resten til morgen! Skulle du derimot være frisk og opplagt er det ingenting i veien for å fortsette etter en skikkelig pause.

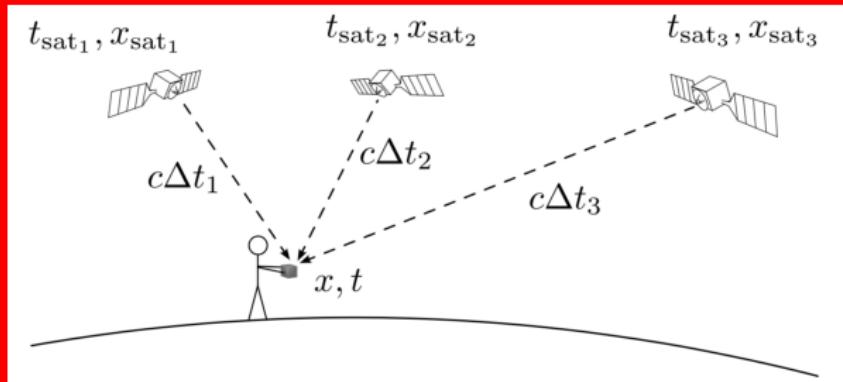
Hva har relativitetsteorien å gjøre med posisjonsmålinger?



GPS-systemet består av 24 satellitter som går i bane rundt jorden i en høyde av omkring 20 000km og med omløpstid på 12 timer. Satellittenes posisjon er beregnet veldig nøyaktig til ethvert tidspunkt. Satellittene har klokke ombord og sender kontinuerlig ut signaler med beskjed om nøyaktig fra hvilken posisjon $\vec{x}_{\text{sat},i}$ og i hvilket tidspunkt $t_{\text{sat},i}$ dette signalet ble sendt ut fra satellitt i. Mobilen eller GPS-mottakeren din tar imot disse signalene fra 3 (egentlig 4 men det er en annen historie) av disse satellittene. GPS-mottakeren din har også en klokke. Tiden t på mobilen kombinert med posisjonene $\vec{x}_{\text{sat},1}$, $\vec{x}_{\text{sat},2}$, $\vec{x}_{\text{sat},3}$, og tidene $t_{\text{sat},1}$, $t_{\text{sat},2}$, $t_{\text{sat},3}$ som den mottar fra 3 satellitter er nok til å beregne din posisjon \vec{x} .

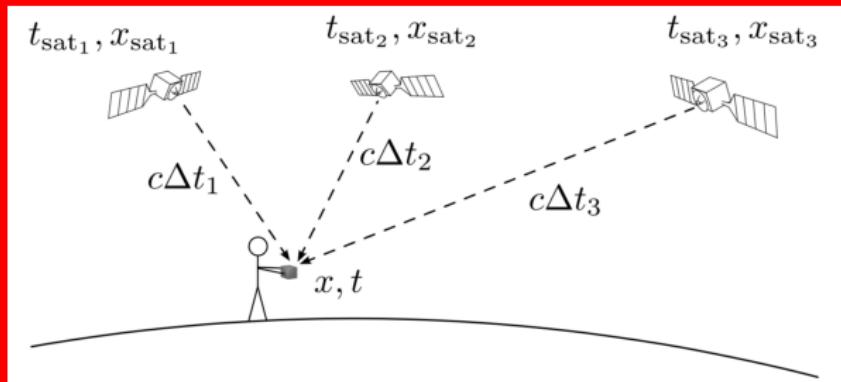


Her har du 3 ukjente som er de 3 komponentene av posisjonsvektoren din \vec{x} . Kan du skrive opp 3 likninger for å løse disse? Dvs. de 3 likningene som GPS-mottakeren løser for å finne din posisjon? **Merk at du ikke skal løse likningene, kun skrive de opp!** Bruk gjerne SI-enheter nå isteden for relativistiske enheter.



Fikk du det til??? Trenger du et hint?

Neida, fikk det til jeg! Gjerne et hint ja!



Fikk du det til??? Trenger du et hint?

Neida, fikk det til jeg! Gjerne et hint ja! Strekning er

lik fart ganger tid. Hvor lang tid bruker hver av signalene fra satelitten frem til GPS-mottakeren? Det er 3 slike signaler!

Nå har jeg det!

$$|\vec{x} - \vec{x}_{\text{sat1}}| = c(t - t_{\text{sat1}}) \equiv c\Delta t_1,$$

$$|\vec{x} - \vec{x}_{\text{sat2}}| = c(t - t_{\text{sat2}}) \equiv c\Delta t_2,$$

$$|\vec{x} - \vec{x}_{\text{sat3}}| = c(t - t_{\text{sat3}}) \equiv c\Delta t_3.$$

Fikk du disse likningene? Her er Δt_i tiden det tar for hver av de 3 signalene å gå fra satelitt og frem til mottaker. Vi skal ikke løse disse likningene i sin helhet her, men jeg vil prøve å overbevise deg om at svaret, f.eks. for x-komponenten kommer til å inneholde flere ledd av typen

$$x = \text{et eller annet ganger } c\Delta t_1 + \dots$$

høres det sannsynlig ut?

Hvis du er enig i det, så la oss som eksempel bare anta for enkelhetsskyld til første orden at

$$x \approx c\Delta t_1$$

(løsningen kommer til å ha mange ledd av denne typen til første orden) Her er jo Δt_1 tiden det tar fra signalet ble sendt ut fra satellitt 1 til det blir mottatt på GPS-mottakeren, altså

$$\Delta t_1 = t - t_{\text{sat},1}$$

Hvis tidsintervallet Δt_1 blir målt feil med kun 1 mikrosekund (10^{-6} sekunder), hvor stor blir feilen i posisjon??

$\Delta x \approx 3$ meter

$\Delta x \approx 30$ meter

$\Delta x \approx 300$ meter

$\Delta x \approx 3$ kilometer

Neste side

[Forrige side](#)



side 53 av 42

[GPS](#)

[FORUM](#)

Her var du litt rask, prøv igjen,
dette får du til!

Netttopp! **Hele 300 meter feil med bare et mikrosekund bom på tiden.** Da må tidsmålingen være **veldig** nøyaktig for at du skal få meningsfull posisjon med GPS. Men ser du et problem her???

mener du et relativistisk problem? Ja, saktens...

[Forrige side](#)

side 54 av 42

[GPS](#)[FORUM](#)

SIDE 49/63/63

Vi jordboere og satellittene er vel begge **skallobservatører** i hvert sitt skall? Vi går rundt med omkring fast avstand r til jordas sentrum, samme gjør satellittene men med en annen r . **Dermed går satellittklokkene med en annen hastighet enn våre klokker!**. Hvordan var nå dette igjen, går satellittklokkene **fortere** eller **saktere** enn våre klokker?

Tror jeg husker...

Var det ikke slik at tiden går saktere **nede i et tyngdefelt?** Altså at tiden vår går saktere enn klokkene i satelitten? Vi hadde:

$$\Delta t_{\text{sh}} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \Delta t$$

Men hvor mye saktere går klokkene våre? Blir det størrelseorden mikrosekund? Isåfall kan det ha stor effekt på posisjonsmålinger med GPS. Men det er en ting til: Satellittene har en ganske høy hastighet i forhold til oss, da kommer også spesiell relativitetsteori inn! Men hvilken vei virker den? Går klokkene våre fortare eller saktere enn satellittens klokker på grunn av spesiell relativitet?

Jeg har tenkt og vet svaret!

Var det ikke slik at tiden går saktere **nede i et tyngdefelt?** Altså at tiden vår går saktere enn klokken i satelitten? Vi hadde:

$$\Delta t_{\text{sh}} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \Delta t$$

Men hvor mye saktere går klokken våre? Blir det størrelseordenen mikrosekund? Isåfall kan det ha stor effekt på posisjonsmålinger med GPS. Men det er en ting til: Satellittene har en ganske høy hastighet i forhold til oss, da kommer også spesiell relativitetsteori inn! Men hvilken vei virker den? Går klokken våre fortare eller saktere enn satellittens klokker på grunn av spesiell relativitet?

Jeg har tenkt og vet svaret!

Var det ikke slik at $\Delta t = \gamma \Delta \tau$? Der t er lab-tida, altså tida vår mens τ er egentida til satelitten (toget)? Husk at γ er en forstørrelsefaktor. Vi husker at vi ser alt i saktefilm i toget slik at tiden mellom to tikk på klokka i toget tok **lenger tid** på våre klokker, $\Delta t > \Delta \tau$. Altså at våre klokker går **raskere** enn satellittklokkenne!.

Denne er **nøyaktig motsatt** av den generell-relativistiske effekten der våre klokker går saktere enn satellittklokkenne på grunn av tyngdefeltet. **De to effektene motvirker altså hverandre, men nuller de hverandre ut??** Det må vi sjekke

[Forrige side](#)

side 58 av 42

[GPS](#)[FORUM](#)

SIDE 51/63/63

Vi skal se at Schwarzschild -geometrien inneholder både generell og spesiell relativitetsteori sammen slik at også effektene av hastighet er med. For å finne hvor mye fortære eller saktere våre klokker går i forhold til satelittklokkene, trenger vi å finne forskjellen mellom et tidsintervall $\Delta\tau_{\text{sat}}$ på en satelittklokke, f.eks. to tikk på satelittklokken, og hvor lang tid $\Delta\tau_{\text{jord}}$ det går på våre klokker mellom disse to tikkene. Er denne forskjellen så stor at den kan medføre at vi beregner gale reisetider til signalene og dermed gale posisjoner med GPS? **Merk** at vi her skal bruke **egentid** $\Delta\tau$ for både satellittene og oss selv. Altså tid målt på klokker som står fast på satellittene og andre som står fast på oss. **Men begge disse egentidene tikker med forskjellig hastighet.**

[Neste side](#)

Har du lagt merke til at vi egentlig skal transformere tidsintervall mellom **to skallobservatører?** Gitt at det tar et tidsintervall $\Delta\tau_{\text{sat}}$ mellom to tikk på klokka til satelitten, så vil vi finne hvor lang tid $\Delta\tau_{\text{jord}}$ det tar på vår klokke mellom de to tikkene. Vi har oss selv som er skallobservatørene på jorda med fast avstands-koordinat r_{jord} og med en tangensialhastighet (på grunn av jordas rotasjon) på $v_{\phi,\text{jord}}$ langs skallet vårt. Satelittene er også skallobservatører som er fast på skallet i avstand r_{sat} og med en tangensialhastighet langs skallet sitt som er $v_{\phi,\text{sat}}$ gitt av banehastigheten. **Men vi har så langt bare utledet transformasjonen av et tidsintervall Δt for langt-vekkobservatøren til et skalltidsintervall Δt_{sh} for et gitt skall! Vi har ikke utledet denne transformasjonen mellom to skall som er det vi trenger her!** Men vi har egentlig det vi trenger for å gjøre denne transformasjonen, ser du det??

Neste side

Forrige side



side 60 av 42

GPS

FORUM

SIDE 53/63/63

Her bør du prøve å se om du finner en løsning. Dette kan være en typisk oppgave... Hint? Please?

Forrige side



side 61 av 42

GPS

FORUM

SIDE 53/63/63

Her bør du prøve å se om du finner en løsning. Dette kan være en typisk oppgave... Hint? Please? Det fikk du på forrige side, selv om det ikke står eksplisitt at det er et hint...

Jeg har tenkt og tenkt...

Prinsippet er som følger:

- La oss ta f.eks. to tikk på (egentids-)klokka til satelitten. Vi kaller tidsintervallet mellom disse for $\Delta\tau_{sat}$.
- Vi vet dermed at vi kan regne dette om til et tidsintervall Δt for langt-vekkobservatøren. For langt-vekkobservatøren tar det altså et tidsintervall Δt mellom de to tikkene på satelittklokka.
- Men vi kan igjen regne om et tidsintervall for langt-vekkobservatøren til et tidsintervall på **vårt skall**. Altså vi kan finne ut hvor lang tid det tar på våre (egentids-)klokker $\Delta\tau_{jord}$ for et tidsintervall Δt på langt-vekk-klokka.
- Men siden tidsintervallet Δt på langt-vekk-klokka tilsvarer tidsintervallet $\Delta\tau_{sat}$ mellom to tikk på satelittklokka, så har vi altså funnet tidsintervallet $\Delta\tau_{jord}$ målt av oss mellom de to tikkene på satelittklokka

Vi trenger altså å finne noen uttrykk for $\Delta\tau_{sat}$ og $\Delta\tau_{jord}$, begge uttrykt ved det felles langt-vekk-tidsintervallet Δt . **Kan du se hvordan vi kan finne et slikt uttrykk?**

Absolutt, dette kan jeg!

Forrige side



side 64 av 42

GPS

FORUM

SIDE 55/63/63

La oss begynne med $\Delta\tau_{\text{sat}}$, kan du finne et uttrykk for denne som også inneholder Δt ? **Hint?**

La oss begynne med $\Delta\tau_{sat}$, kan du finne et uttrykk for denne som også inneholder Δt ? **Hint?** Et egettidsintervall mellom to eventer er vel lik tidromsintervallet mellom disse eventene? Og hvordan ser tidromsintervallet ut? **Ahaa.....**

La oss begynne med $\Delta\tau_{\text{sat}}$, kan du finne et uttrykk for denne som også inneholder Δt ? **Hint?** Et egetidsintervall mellom to eventer er vel lik tidromsintervallet mellom disse eventene? Og hvordan ser tidromsintervallet ut? **Ahaa.....** Siden vi nå skal gå fra et skall til et annet så kan vi ikke anta lokalt inertialsystem, da må vi bruke full Schwarzschild -geometri:

$$\Delta\tau_{\text{sat}}^2 = \Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 - \frac{\Delta r_{\text{sat}}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r_{\text{sat}}^2 \Delta\phi_{\text{sat}}^2$$

der Δs og Δt altså er tidroms- og langt-vekktidsintervall mellom de to tikkene på satelittklokka. **OK!**

La oss begynne med $\Delta\tau_{\text{sat}}$, kan du finne et uttrykk for denne som også

inneholder Δt ? **Hint?** Et eggettidsintervall mellom to eventer er vel lik tidromsintervallet mellom disse eventene? Og hvordan ser

tidromsintervallet ut? **Ahaa.....** Siden vi nå skal gå fra et skall til et annet så kan vi ikke anta lokalt inertialsystem, da må vi bruke full Schwarzschild -geometri:

$$\Delta\tau_{\text{sat}}^2 = \Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 - \frac{\Delta r_{\text{sat}}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r_{\text{sat}}^2 \Delta\phi_{\text{sat}}^2$$

der Δs og Δt altså er tidroms- og langt-vekktidsintervall mellom de to tikkene på satellittklokka. **OK!** **Men satelitten endrer vel ikke r -poisjon?** Den er jo fast på et skall, så vi får vel $\Delta r_{\text{sat}} = 0$ som gir

$$\Delta\tau_{\text{sat}}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 - r_{\text{sat}}^2 \Delta\phi_{\text{sat}}^2$$

Vi hadde altså

$$\Delta\tau_{\text{sat}}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r_{\text{sat}}}\right) \Delta t^2 - r_{\text{sat}}^2 \Delta\phi_{\text{sat}}^2$$

Men vi har en $\Delta\phi_{\text{sat}}$ her! Hadde det ikke vært bedre å få inn satelitthastigheten $v_{\phi,\text{sat}}$? Hvordan kan du gjøre

det? **Jeg har tenkt og har et forslag...**

Vi hadde altså

$$\Delta\tau_{\text{sat}}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r_{\text{sat}}}\right) \Delta t^2 - r_{\text{sat}}^2 \Delta\phi_{\text{sat}}^2$$

Men vi har en $\Delta\phi_{\text{sat}}$ her! Hadde det ikke vært bedre å få inn satelitthastigheten $v_{\phi,\text{sat}}$? Hvordan kan du gjøre

det? **Jeg har tenkt og har et forslag...** Vi vet jo fra celestmekanikk at tangensialhastighet er gitt ved $v_\phi = r\dot{\phi} = r\Delta\phi/\Delta t$, ikke sant? Omskrevet har vi da $r\Delta\phi = v_\phi\Delta t$. Insatt gir det oss

$$\Delta\tau_{\text{sat}}^2 = \Delta t^2 \left(1 - \frac{2M}{r_{\text{sat}}} - v_{\phi,\text{sat}}^2\right)$$

Vi kan bruke nøyaktig samme tankegang for oss selv som skallobservatører og komme frem til nøyaktig samme uttrykk:

$$\Delta\tau_{\text{jord}}^2 = \Delta t^2 \left(1 - \frac{2M}{r_{\text{jord}}} - v_{\phi, \text{jord}}^2 \right)$$

Sammen med uttrykket for satelitten fra forrige side

$$\Delta\tau_{\text{sat}}^2 = \Delta t^2 \left(1 - \frac{2M}{r_{\text{sat}}} - v_{\phi, \text{sat}}^2 \right)$$

kan vi nå finne forholdet $\Delta\tau_{\text{jord}}/\Delta\tau_{\text{sat}}$ som sier oss forholdet mellom et tidsintervall på satelittklokke og vår egen klokke. Vi deler rett og slett de to likningen på hverandre og tar kvadratroten:

$$\frac{\Delta\tau_{\text{jord}}}{\Delta\tau_{\text{sat}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_{\text{jord}}} - v_{\phi, \text{jord}}^2}{1 - \frac{2M}{r_{\text{sat}}} - v_{\phi, \text{sat}}^2}}$$

Legg merke til at tidsintervallet Δt blir forkortet vekk siden vi ser på det samme tidsintervallet (for langt-vekkobservatøren) i begge tilfeller.

Pent lite uttrykk, hva?

$$\frac{\Delta\tau_{\text{jord}}}{\Delta\tau_{\text{sat}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_{\text{jord}}} - v_{\phi,\text{jord}}^2}{1 - \frac{2M}{r_{\text{sat}}} - v_{\phi,\text{sat}}^2}}$$

Hvis vi lar tyngdefeltet her bli veldig svakt, si $M \rightarrow 0$ og vi lar oss selv stå i ro $v_{\phi,\text{jord}} = 0$, ser du hva vi får da? Står det ikke da egentlig her at $\Delta t = \gamma \Delta\tau$? Slik ser vi at den spesielle relativitetsteorien er innebakt i Schwarzschild -geometrien, når tyngdefeltet er lite får vi tilbake Lorentz.

$$\frac{\Delta\tau_{\text{jord}}}{\Delta\tau_{\text{sat}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_{\text{jord}}} - v_{\phi, \text{jord}}^2}{1 - \frac{2M}{r_{\text{sat}}} - v_{\phi, \text{sat}}^2}}$$

La oss prøve å sette inn tall: Vi kjenner avstanden til jordas overflate $r_{\text{jord}} \approx 6000$ km og satellittene går i en høyde av 20 000 km som betyr $r_{\text{sat}} \approx 26000$ km. Det holder med omtrentlige tall her, vi skal jo kun gjøre et overslag for å finne størrelseorden. Et punkt på jordoverflaten snurrer en gang rundt i løpet av omkring 24 timer, altså er

$v_{\phi, \text{jord}} = 2\pi \times 6000 / (24 \times 3600)$ km/s og satellittene bruker 12 timer på en runde, altså $v_{\phi, \text{sat}} = 2\pi \times 26000 / (12 \times 3600)$ km/s. Vi fant på forrige forelesning at jordas masse i meter er $M = 4.45$ mm. **Husk at**

hastighetene må deles på lyshastigheten for å få relativistiske enheter! Sett inn disse tallene i telleren og nevneren av brøken hver for seg! Hvilke tall fikk du?

Det er svært viktig at du faktisk gjør dette, du kommer til å oppdage noe!

[Forrige side](#)

side 77 av 42

[GPS](#)[FORUM](#)

SIDE 60/63/63

Fikk du noe alla 0.99999999 og kanskje til slutt noen andre siffer? For både telleren og nevneren? Fikk du ikke det, har du gjort noe galt, du **skal få det!**. Men dele to slike tall på hverandre? Og deretter ta kvadratroten??? **Her er det duket for store numeriske feil!!!**

[Neste side](#)

$$\frac{\Delta\tau_{\text{jord}}}{\Delta\tau_{\text{sat}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_{\text{jord}}} - v_{\phi, \text{jord}}^2}{1 - \frac{2M}{r_{\text{sat}}} - v_{\phi, \text{sat}}^2}}$$

Dette skjer selvfølgelig fordi både $2M/r$ og v^2 er **mye mindre** enn 1 både i teller og nevner. Vi har altså 1 og trekker fra noen bittesmå tall. **Dette vil alltid skje når du bruker relativitetsteori på "hverdagen"**, altså lave hastigheter og svake gravitasjonsfelt. Hva gjør vi da??? **Forslag til løsning?** Jeg tror jeg vet det...

[Forrige side](#)

side 79 av 42

[GPS](#)[FORUM](#)

SIDE 62/63/63

$$\frac{\Delta\tau_{\text{jord}}}{\Delta\tau_{\text{sat}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_{\text{jord}}} - v_{\phi, \text{jord}}^2}{1 - \frac{2M}{r_{\text{sat}}} - v_{\phi, \text{sat}}^2}}$$

Jaaaa, altså hvis $2M/r$ og v^2 er små størrelser, hvorfor ikke **rekkeutvikle** i disse? Da skulle vi ende opp med polynomer som vi fint kan regne uten numeriske problemer. **Dette pleier å være løsningen!**. Men hvordan vil du gå frem for å rekkeutvikle

her? **Tjaaaaaa...**

[Forrige side](#)

side 80 av 42

[GPS](#)[FORUM](#)

SIDE 62/63/63

$$\frac{\Delta\tau_{\text{jord}}}{\Delta\tau_{\text{sat}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_{\text{jord}}} - v_{\phi,\text{jord}}^2}{1 - \frac{2M}{r_{\text{sat}}} - v_{\phi,\text{sat}}^2}}$$

Jaaaa, altså hvis $2M/r$ og v^2 er små størrelser, hvorfor ikke **rekkeutvikle** i disse? Da skulle vi ende opp med polynomer som vi fint kan regne uten numeriske problemer. **Dette pleier å være løsningen!**. Men hvordan vil du gå frem for å rekkeutvikle

her?

Tjaaaaaaa...

I denne videoen får du hjelp...

Neste side

Vi får altså:

$$\frac{\Delta\tau_{\text{jord}}}{\Delta\tau_{\text{sat}}} \approx 1 + \left(\frac{M}{r_{\text{sat}}} - \frac{M}{r_{\text{jord}}} \right) + \frac{1}{2} (v_{\phi,\text{sat}}^2 - v_{\phi,\text{jord}}^2)$$

Her har vi altså et uttrykk for hvor mye fortære en klokke går enn den andre. Anta at klokka i GPS-satelittene ble synkronisert med jord-klokker i det øyeblikk satelittene begynte å bli operasjonelle. Et døgn, nøyaktig 24 timer senere, målt på satellittklokkene, hvor mye har klokkene på jorda gått? Hvis vi setter $\Delta\tau_{\text{sat}} = 24$ timer så ser vi at det første ledet etter 1-tallet, det ledet som korrigere for relativistiske effekter fra tyngdefeltet gir oss -49 mikrosekunder mens det andre ledet som avhenger av hastighet og dermed kommer fra spesiell relativitetsteori gir oss +7 mikrosekunder. Totalt er det da en forskjell mellom GPS-klokker og jordklokker på 42 mikrosekunder! Hvis vi igjen ser på løsningen av likningene for å finne din posisjon så gir dette en posisjonsfeil av størrelseordenen $\Delta x = c \times 42\mu s \approx 13$ km!!!. **Etter et døgn ville GPS-systemet vært ubruklig hvis det ikke tar hensyn til relativistiske korreksjoner, både fra generell og spesiell relativitetsteori!**

Forrige side



Du er ferdig med forelesning 2 av 2 i del 2C.. Du bør nå:

- Du bør kjenne til de 3 observatørene som brukes i et Schwarzschild -tidrom. Du bør vite hvordan disse måler avstander og tidsintervaller mellom eventer og hvilke koordinanter de bruker.
- Du bør kjenne til betingelsene for å kunne bruke antakelsen om lokalt inertialsystem og hva det innebærer.
- Du bør kunne bruke uttrykket for Δs i Schwarzschild -geometri.
- Du bør kunne bruke prinsippet om maksimal aldring til å utele energi og bevegelsesemengdebevaring i Lorentz- og i Schwarzschild -geometri.
- Du bør kjenne til og kunne bruke uttrykket for total relativistisk energi i Schwarzschild -geometri. Du bør også kjenne de to formene uttrykket kan skrives på og kunne utele det ene fra det andre.
- Du bør kjenne til hvordan forskjellige observatører opplever at noe faller inn mot et sort hull.
- Du bør kunne utele hvordan man finner hvor fort klokker tikker for en skallobservatør i forhold til langt-vekkobservatøren og i forhold til en annen skallobservatør. Spesielt bør du kunne bruke dette til å vise hvorfor man trenger å ta i bruk relativistiske korrekSJONER når man bruker GPS.

Flott hvis du nå kan klikke på smilefjesene over og fortelle hva du synes om dette interaktive forelesningsnotatet. Hva var bra og nøyaktig hva kan forbedres? All ris og ros mottaes med takk! Det anbefales nå at du sjekker [kortsvarsoppgavene](#) til del 2C for å kontrollere at du har forstått stoffet. Kan du svare på disse, blir det lettere å bruke kunnskapen din i oppgavene/prosjektet. Noen av disse kommer på eksamen.