Конспектик по численным методам

Шоколадные бойцы

10 июня 2019 г.

Здесь был Игрок

1 Понятие погрешности. Абсолютная и относительная погрешности.

Погрешность - отклонение величины от ее истинного значения. То есть, если a реальное значение, а a^* приближенное значение, то погрешность будет равна $a - a^*$

1.1 Причины:

1. Неустранимая погрешность - $\begin{cases} \text{Математическая модель является лишь} \\ \quad \text{приближенным описание процеса.} \\ \text{Исходные данные содержат погрешности.} \end{cases}$

2. Погрершность метода - применяемые методы зачастую являются приближенными.

3. Вычислительная погрешность - при действиях с числами происходит округление.

1.2 Абсолютная и относительная погрешности

Абсолютная погрешность: $\Delta(a^*) = |a - a^*|$
Относительная погрешность: $\delta(a^*) = \frac{|a-a^*|}{|a|} = \frac{\Delta(a^*)}{|a|}$
Чаще реальное значение неизвестно поэтому используются оценки погрешности.
$\Delta(a^*) \leq \overline{\Delta}(a^*)$,
$\delta(a^*) \leq \overline{\delta}(a^*)$,
где $\overline{\Delta}(a^*)$ и $\overline{\delta}(a^*)$ - верхняя граница абсолютной и отностельной погрешности соответственно. При этом если одна из величин известна, вторую можно выразить через нее. На практике часто используются следующие приближения:
$\overline{\delta}(a^*) \approx \frac{\overline{\Delta}(a^*)}{|a^*|}$,
$\overline{\Delta}(a^*) \approx |a^*|\overline{\delta}(a^*)$

2 Погрешности арифметических операций и функций.

2.1 Сумма и разность

Для абсолютной погрешности: Абсолютная погрешность суммы и разности не превосходит суммы абсолютных погрешностей. $\Delta(a^* \pm b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$

Оценка суммы и разности $\overline{\Delta}(a^* \pm b^*) = \overline{\Delta}(a^*) + \overline{\Delta}(b^*)$
Для относительной погрешности: Относительная погрешность суммы не превосходит максимальной относительной погрешности.
$\delta(a^* + b^*) \leq \max(\delta(a^*), \delta(b^*))$
Относительная погрешность разности выглядит так:
$\delta(a^* - b^*) \leq \max(\delta(a^*), \delta(b^*)) * \frac{|a+b|}{|a-b|}$
Для оценок относительной погрешности имеем аналогичные неравенства.

2.2 Произведение и частное.

Для абсолютной погрешности:
Абсолютная погрешность произведения и частного не превышает суммы абсолютных погрешностей.
$\Delta(a^* * b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$
$\Delta(a^*/b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$
Оценка произведения и частного:
$\delta(a^* * b^*) \approx (\overline{\delta}(a^*) + \overline{\delta}(b^*)) * |a^* * b^*|$
$\delta(a^*/b^*) \approx (\overline{\delta}(a^*) + \overline{\delta}(b^*)) * |a^*/b^*|$
Для относительной погрешности:
$\delta(a^*b^*) \leq \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*)$
$\delta(a^*/b^*) \leq \frac{\delta(a^*)+\delta(b^*)}{1-\delta(b^*)}$
Оценка произведения и частного:
$\overline{\delta}(a^* * b^*) \approx \overline{\delta}(\frac{a^*}{b^*}) \approx \overline{\delta}(a^*) + \overline{\delta}(b^*)$

2.3 Функции.

Пусть $f(x) = f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_m)$ функция от m переменных, дифференцируемая в области G, вычисление которой производится на $x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*,\ ...,\ x_m^*$.

2.3.1 Абсолютная погрешность.

$\Delta(y^*) \leq \sum_{j=1}^{m} \underset{[x,\ x^*]}{max} |f'_{x_j}| \Delta(x_j^*)$, где $[x,\ x^*]$ отрезок из x d x^*
Для оценки верно следующее:
$\overline{\Delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} |f'_{x_j}(x^*)| \overline{\Delta}(x_j^*)$
$\overline{\Delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} |f'_{x_j}(x)| \overline{\Delta}(x_j^*)$

2.3.2 Относительная погрешность.

$\overline{\delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} v_j^* \overline{\delta}(x_j^*)$
$\overline{\delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} v_j \overline{\delta}(x_j^*)$
где
$v_j^* = \frac{|x_j^*||f'_{x_j}(x^*)|}{|f(x^*)|}$

$v_j^* = \frac{|x_j||f'_{x_j}(x)|}{|f(x)|}$

2.3.3 Неявные функции.

Пусть $F(y,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m) = 0$ неявно заданная функция. Тогда $f'_{x_j}(x) = \frac{-F'_{x_j}}{F'_y}|_{y=f(x)},\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m.$
Далее воспользуемся погрешностями описанными выше.

3 Связь погрешности и количества верных значащих цифр в позиционной записи вещественных чисел.

Если число a^* содержит N верных значащих цифр, то справедливо:
$\delta(a^*) \leq (10^{N-1} - 1)^{-1} \approx 10^{-N+1}$
Для того чтобы число a^* содержало N верных значащих цифр, требуется:
$\delta(a^*) \leq (10^{N} + 1)^{-1} \approx 10^{-N}$
Если a^* имеет ровно N верных значащих цифр, то $10^{-N-1} \lesssim \delta(a^*) \lesssim 10^{-N+1}$, а так же $\delta(a^*) \sim 10^{-N}$

4 Компьютерное представление чисел, погрешность компьютерного округления.

Целые числа представляются как:
$n = \pm(a_L 2^L + ... + a_1 2^1 + a_0 2^0)$, где $a \in \{0,\ 1\}$
или через дополнение.
Вещественные числа представляются как:
$n = \pm(a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + ... + a_L 2^{-L}) * 2^p$, где $a \in \{0,\ 1\}$
$(a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + ... + a_L 2^{-L})$ эта часть называется мантисой.
p называют порядком.
Число n нормализуется так, чтобы выполнялось $a_1 = 1$.

4.1 Свойства и замечания:

1. На компьютере представим конечный набор рациональных чисел специального вида.
2. Диапазон мантисы и порядка ограничены. $0.5 \leq |m| < 1$, $|p| \leq 2^{L+1} - 1$
3. Нельзя представить слишком большие и слишком маленькие числа в виду ограничения на порядок.

4. Арифметические операции над числами портят точность. Абсолютную погрешность можно оценить как $|f(a,\ b)| * \varepsilon_M$, где f - арифметическая операция, а ε_M относительная точность ЭВМ.

5. Можно в два раза увеличить размер мантисы.

6. Удобно принимать так $1 + \varepsilon_M > 1$

5 Понятия корректности, устойчивости и обусловленности вычислительных задач. Примеры хорошо и плохо обусловленных задач.

Вычислительная задача - одно из трех:

1. Прямая задача
2. Обратная задача
3. Задача идентификации

Постановка задачи:

1. Задание множества допустимых X (входных данных)
2. Задание множества допустимых Y (выходных данных)

5.1 Корректность задачи.

Задача корректна если:

1. $\forall x \in X \exists y \in Y$
2. Решение единственно
3. Решнеие устойчиво по отношению к малым возмущениям входных данных

5.2 Устойчивость решения.

$\forall \varepsilon \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое что $\forall x^*$ удовлетворяющих условию $\Delta(x^*) < \delta$ выполняется $\exists y^* : \Delta(y^*) < \varepsilon$
Относительная устойчивость.
Все Δ следует заменить на δ
Замечание!
Некоторые задачи дифференцирования или суммирования ряда, не являются корректными, тем не менее имею практическую важность.

5.3 Обусловленность вычислительной задачи.

Под обусловленностью задачи понимается чувствительность решения к малым погрешностям входных данны.
Так например, если при малых погрешностях входных данных, решение дает малые погрешнсоти, то говорят, что задача хорошо обусловленна. И наоборот, если при малых погрешностях могут быть сильные изменения решения.

5.3.1 Число обусловленности

Число обусловленности - мера степени обусловленности задачи.
Пусть выполняется неравенство:
$\Delta(y^*) \leq v_\Delta \Delta(x^*)$
Тогда величина v_Δ называется абсолютным числом обусловленности.
Пусть выполняется неравенство:
$\delta(y^*) \leq v_\delta \delta(x^*)$
Тогда величина v_δ называется относительным числом обусловленности.

5.4 ПРИМЕРЫ:

5.4.1 Плохо обусловеленные

Пусть требуется найти корни многочлена:
$P(x) = (x-1)(x-2)...(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + ...$. Эта задача устойчива. Но если менять первый коэффициент относительное число обусловленности очень большое.

$(x-1) = 0$ ошибка в младшем коэффициенте приведет к комплексным корням, что говорит о плохой обусловленности.

5.4.2 Хорошо обусловеленные

$y = e^x$

$\int_a^b f(x)dx$ если у f постоянный знак на $[a,\ b]$, то задача хорошо обусловлена.

6 Численное решение нелинейных алгебраических уравнений (НАУ). Обусловленность задачи нахождения простых и кратных корней НАУ.

Задача стостоит в том, чтобы найти корни нелинейного уравнения с одним неизвестным вида $f(x) = 0$.
Далее мы будем пологать, что функция дважды дифференцируема в окрестности корней.
Этапы:

1. Локализация.
   Например так, если функция f непрерына на $[a,\ b]$ и $f(a) * f(b) < 0$, то этот отрезок содержит хотя бы один корень.

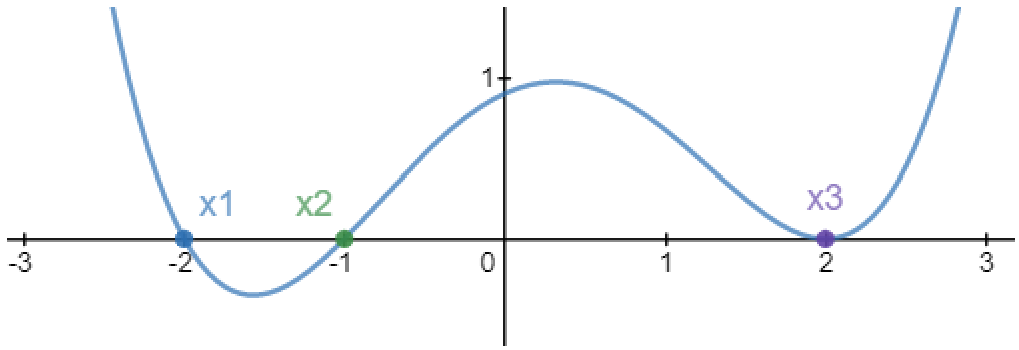
2. Итерационное уточнение корей.
   На этом этапе происходит построение последовательности приближений к $\overline{x}$.

6.1 Понятие сходимости

Метод называется k-шаговым, если для вычисление $x^{(n+1)}$ используется k предыдущих приближений.
Геометрическая скорость сходимости характеризуется следующим:
$q < 1$ и $|x^n - \overline{x}| \leq c_0 q^n$
Линейная/сверхлинейная скорость сходимости характеризуется следующим:
$\exists\delta$-окрестность корня в которой справедлива следующая оценка
$x^{(n+1)} - \overline{x} \leq C|x^{(n)} - \overline{x}|p$
где $C > 0$ и $p \geq 1$ постоянные. p - порядок сходимости метода, при $p = 1$ - линейная скорость сходимости, при $p > 1$ сверхлинейная.

6.2 Виды корней

$\overline{x}$ простой корень $f(x) = 0$ если, $f'(\overline{x}) \neq 0$ в ином случае $\overline{x}$ называется кратным.
число m называется кратностью корня если, $\forall k\ in\ [1,\ 2...m-1]$ верно, что $f^{(k)}(\overline{x}) = 0$ и $f^{(m)}(\overline{x}) \neq 0$



тут например $x1$ и $x2$ простые корни, а $x3$ кратный.

6.3 Обусловленность задачи нахождения корня

Для простых корней обусловенность хорошая, но чем меньше тангенс угла наклона, тем она хуже. Для кратных корней обусловленность плохая, и чем выше кратность, тем хуже.
Пусть у нас есть функция f определенная в окрестности нашего корня и мы хотим определить корень.
Кроме того, будем пологать, что в малой окрестности корня выполняется неравенство:
$|f(x) - f^*(x)| < \overline{\Delta}(f^*)$

6.3.1 Интервал неопределенности

Заметим, что если функция f непрерывна, то
$\exists U_{\overline{\varepsilon}}(\overline{x}) : \overline{\varepsilon} > 0$
для которой выполняется

$$|f(x)| < \overline{\Delta}(f^*) \tag{1}$$

при этом в этой окрестнсоти знак $f^*(x)$ не обязательно должен совпадать с f(x), а значит невозможно определить какой именно x является корнем. Этот интервал называется интервалом неопределенности.

6.3.2 Оценка $\overline{\varepsilon}$

Пусть $\overline{x}$ - простой корень, тогда для значений близких к корню верно следующее:
$f(x) \approx f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) = f'(\overline{x})(x - \overline{x})$
В таком случае неравенство (1) примет вид
$|f'(\overline{x})(x - \overline{x})| \lesssim \overline{\Delta}(f^*)$
откуда получим
$\overline{x} - \frac{\overline{\Delta}(f^*)}{|f'(\overline{x})|} \lesssim x \lesssim \overline{x} + \frac{\overline{\Delta}(f^*)}{|f'(\overline{x})|}$ С учетом того, что

$x \in (\overline{x} - \overline{\varepsilon},\ \overline{x} + \overline{\varepsilon})$
получим
$\overline{\varepsilon} \lesssim v_{\Delta} * \overline{\Delta}(f^*)$
$v_{\Delta} = \frac{1}{|f'(\overline{x})|}$ - в нашей задаче играеть роль абсолютного числа обусловенности. Соответственно при уменьшении $|f'(\overline{x})|$ увеличивается число обусловленности, а значит увеличивается погрешность.
Для кратных корней формула для $\overline{\varepsilon}$ не верна, но можно разложить f в ряд тейлора и получить следующее число обусловленности
$\overline{\Delta}(f^*)^{\frac{-1}{m}}$

7 Методы половинного деления и дихотомии решения НАУ.

```
solution(f, l, r)
    if !stop() then    #критерий остановки
        #можно вернуть любое значение из [l, r]
        return l
    m = (l + r) / 2
    if f(l) * f(m) <= 0 then
        return solution(f, l, m)
    elseif f(m) * f(r) <= 0 then
        return solution(f, m, r)
    else bad_range()
```

8 Метод простых итераций решения НАУ.

Представим нашу функцию f в виде $x = g(x)$.

```
solution(g, x0)
    prev_x = x0
    while !stop()    #критерий остановки
        cur_x = g(prev_x)
        dif = abs(cur_x - prev_x)
    return cur_x
```

9 Метод Ньютона решения НАУ и его модификации.

Пусть мы знаем производную нашей функции f.

```
solution(f, x0)
    while stop()    #критерий остановки
        #найдем производную нашей функции
        f'(x) = derivative(f)
        #касательная к f в точке x0
        tangent(x) = f(x0) + f'(x0)*(x - x0)
        #найдем точку пересечения нашей линии о осью Ox
        new_x = resolve(tangent = 0)
        x0 = new_x
    return x0;
```

10 Понятие нормы векторов и матриц. Ассоциированная норма матрицы и ее свойства.

10.1 Нормой вектора.

Нормой вектора называется отображение удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $\|x\| \geq 0$, при этом $\|x\| = 0$ только если x=0
2. $\|ax\| = |a| \, \|x\|$, где a - число
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

В численных методах используются следующие нормы:
$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
где $p \geq 1$, чаще $p = 1$ или 2.

$\|x\|_p = \max |x_i|$
где $1 \leq i \leq m$

10.2 Погрешности нормы вектора.

$\Delta(x^*) = \|x - x^*\|$
$\delta(x^*) = \frac{\|x - x^*\|}{\|x\|}$

10.3 Норма матрицы.

$\|A\| = max \frac{\|A_x\|}{\|x\|}$

11 Обусловленность задачи решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Стандартное число обусловленности и его свойства.

TODO

12 Прямые методы решения СЛАУ. Метод Гаусса и его особенности.

TODO

13 LU-разложение матриц.

TODO

14 Метод Холецкого решения СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей.

TODO

15 Метод прогонки решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей.

TODO

16 Итерационные методы решения СЛАУ. Метод простых итераций (Якоби).

TODO

17 Методы Зейделя и последовательной релаксации решения СЛАУ.

TODO

18 Понятие о методах спуска решения СЛАУ. Выбор направлений и шагов спуска.

TODO

19 Методы покоординатного и наискорейшего спуска решения СЛАУ. Методы сопряженных направлений и градиентов.

TODO

20 Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений (обзор).

TODO

21 Численное нахождение собственных чисел и векторов матриц. Преобразование подобия и его свойства.

TODO

22 Локализация собственных чисел. Теоремы Гершгорина.

TODO

23 Метод Рэлея для нахождения «первого» собственного числа и вектора.

TODO

24 Метод вращений решения СЛАУ. QR-разложение матриц.

TODO

25 Метод QR-разложения для нахождения всех собственных чисел матриц.

TODO

26 Метод обратных итераций для нахождения всех собственных векторов матриц.

TODO

27 Интерполяция функций одной переменной. Интерполяционный полином в формах Лагранжа и Ньютона-Котеса.

TODO

28 Понятие о стратегии интерполяции. Теоремы Фабера и Чебышева о стратегии интерполяции. Универсальная стратегия интерполяции Чебышева.

TODO

29 Интерполяция сплайнами. Степень гладкости и дефект сплайна. Типовые сплайны третьего порядка. Физическая интерпретация сплайнов.

TODO

30 Аппроксимация функций одной переменной. Метод наименьших квадратов.

TODO