Конспектик по численным методам

Шоколадные бойцы

10 июня 2019 г.

1 Понятие погрешности. Абсолютная и относительная погрешности.

Погрешность - отклонение величины от ее истинного значения. То есть, если a реальное значение, а a^* приближенное значение, то погрешность будет равна $a - a^*$

1.1 Причины:

1. Неустранимая погрешность - $\begin{cases} \text{Математическая модель является лишь} \\ \quad \text{приближенным описание процеса.} \\ \text{Исходные данные содержат погрешности.} \end{cases}$

2. Погрершность метода - применяемые методы зачастую являются приближенными.

3. Вычислительная погрешность - при действиях с числами происходит округление.

1.2 Абсолютная и относительная погрешности

Абсолютная погрешность: $\Delta(a^*) = |a - a^*|$
Относительная погрешность: $\delta(a^*) = \frac{|a-a^*|}{|a|} = \frac{\Delta(a^*)}{|a|}$
Чаще реальное значение неизвестно поэтому используются оценки погрешности.
$\Delta(a^*) \leq \overline{\Delta}(a^*)$,
$\delta(a^*) \leq \overline{\delta}(a^*)$,
где $\overline{\Delta}(a^*)$ и $\overline{\delta}(a^*)$ - верхняя граница абсолютной и отностельной погрешности соответственно. При этом если одна из величин известна, вторую можно выразить через нее. На практике часто используются следующие приближения:
$\overline{\delta}(a^*) \approx \frac{\overline{\Delta}(a^*)}{|a^*|}$,
$\overline{\Delta}(a^*) \approx |a^*|\overline{\delta}(a^*)$

2 Погрешности арифметических операций и функций.

2.1 Сумма и разность

Для абсолютной погрешности: Абсолютная погрешность суммы и разности не превосходит суммы абсолютных погрешностей. $\Delta(a^* \pm b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$
Оценка суммы и разности $\overline{\Delta}(a^* \pm b^*) = \overline{\Delta}(a^*) + \overline{\Delta}(b^*)$
Для относительной погрешности: Относительная погрешность суммы не

превосходит максимальной относительной погрешности.
$\delta(a^* + b^*) \leq \max(\delta(a^*), \delta(b^*))$
Относительная погрешность разности выглядит так:
$\delta(a^* - b^*) \leq \max(\delta(a^*), \delta(b^*)) * \frac{|a+b|}{|a-b|}$
Для оценок относительной погрешности имеем аналогичные неравенства.

2.2 Произведение и частное.

Для абсолютной погрешности:
Абсолютная погрешность произведения и частного не превышает суммы абсолютных погрешностей.
$\Delta(a^* * b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$
$\Delta(a^*/b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$
Оценка произведения и частного:
$\delta(a^* * b^*) \approx (\bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*)) * |a^* * b^*|$
$\delta(a^*/b^*) \approx (\bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*)) * |a^*/b^*|$
Для относительной погрешности:
$\delta(a^* b^*) \leq \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*)$
$\delta(a^*/b^*) \leq \frac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1 - \delta(b^*)}$
Оценка произведения и частного:
$\bar{\delta}(a^* * b^*) \approx \bar{\delta}(\frac{a^*}{b^*}) \approx \bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*)$

2.3 Функции.

Пусть $f(x) = f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_m)$ функция от m переменных, дифференцируемая в области G, вычисление которой производится на $x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*,\ ...,\ x_m^*$.

2.3.1 Абсолютная погрешность.

$\Delta(y^*) \leq \sum_{j=1}^{m} \underset{[x,\ x^*]}{max} |f'_{x_j}| \Delta(x_j^*)$, где $[x,\ x^*]$ отрезок из x d x^*
Для оценки верно следующее:
$\bar{\Delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} |f'_{x_j}(x^*)| \bar{\Delta}(x_j^*)$
$\bar{\Delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} |f'_{x_j}(x)| \bar{\Delta}(x_j^*)$

2.3.2 Относительная погрешность.

$\bar{\delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} v_j^* \bar{\delta}(x_j^*)$
$\bar{\delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} v_j \bar{\delta}(x_j^*)$
где
$v_j^* = \frac{|x_j^*||f'_{x_j}(x^*)|}{|f(x^*)|}$

$v_j^* = \frac{|x_j||f'_{x_j}(x)|}{|f(x)|}$

2.3.3 Неявные функции.

Пусть $F(y,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m) = 0$ неявно заданная функция. Тогда $f'_{x_j}(x) = \frac{-F'_{x_j}}{F'_y}|_{y=f(x)},\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m.$
Далее воспользуемся погрешностями описанными выше.

3 Связь погрешности и количества верных значащих цифр в позиционной записи вещественных чисел.

Если число a^* содержит N верных значащих цифр, то справедливо:
$\delta(a^*) \leq (10^{N-1} - 1)^{-1} \approx 10^{-N+1}$
Для того чтобы число a^* содержало N верных значащих цифр, требуется:
$\delta(a^*) \leq (10^N + 1)^{-1} \approx 10^{-N}$
Если a^* имеет ровно N верных значащих цифр, то $10^{-N-1} \lessapprox \delta(a^*) \lessapprox 10^{-N+1}$, а так же $\delta(a^*) \sim 10^{-N}$

4 Компьютерное представление чисел, погрешность компьютерного округления.

Целые числа представляются как:
$n = \pm(a_L 2^L + ... + a_1 2^1 + a_0 2^0)$, где $a \in \{0,\ 1\}$
или через дополнение.
Вещественные числа представляются как:
$n = \pm(a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + ... + a_L 2^{-L}) * 2^p$, где $a \in \{0,\ 1\}$
$(a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + ... + a_L 2^{-L})$ эта часть называется мантисой.
p называют порядком.
Число n нормализуется так, чтобы выполнялось $a_1 = 1$.

4.1 Свойства и замечания:

1. На компьютере представим конечный набор рациональных чисел специального вида.
2. Диапазон мантисы и порядка ограничены. $0.5 \leq |m| < 1$, $|p| \leq 2^{L+1} - 1$
3. Нельзя представить слишком большие и слишком маленькие числа в виду ограничения на порядок.

4. Арифметические операции над числами портят точность. Абсолютную погрешность можно оценить как $|f(a,\ b)| * \varepsilon_M$, где f - арифметическая операция, а ε_M относительная точность ЭВМ.

5. Можно в два раза увеличить размер мантисы.

6. Удобно принимать так $1 + \varepsilon_M > 1$

5 Понятия корректности, устойчивости и обусловленности вычислительных задач. Примеры хорошо и плохо обусловленных задач.

Вычислительная задача - одно из трех:

1. Прямая задача
2. Обратная задача
3. Задача идентификации

Постановка задачи:

1. Задание множества допустимых X (входных данных)
2. Задание множества допустимых Y (выходных данных)

5.1 Корректность задачи.

Задача корректна если:

1. $\forall x \in X \exists y \in Y$
2. Решение единственно
3. Решнеие устойчиво по отношению к малым возмущениям входных данных

5.2 Устойчивость решения.

$\forall \varepsilon \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое что $\forall x^*$ удовлетворяющих условию $\Delta(x^*) < \delta$ выполняется $\exists y^* : \Delta(y^*) < \varepsilon$
Относительная устойчивость.
Все Δ следует заменить на δ
Замечание!
Некоторые задачи дифференцирования или суммирования ряда, не являются корректными, тем не менее имею практическую важность.

5.3 Обусловленность вычислительной задачи.

Под обусловленностью задачи понимается чувствительность решения к малым погрешностям входных данны.
Так например, если при малых погрешностях входных данных, решение дает малые погрешнсоти, то говорят, что задача хорошо обусловленна. И наоборот, если при малых погрешностях могут быть сильные изменения решения.
Число обусловленности - мера степени обусловленности задачи.
Пусть выполняется неравенство:
$\Delta(y^*) \leq v_\Delta \Delta(x^*)$
Тогда величина v_Δ называется абсолютным чистом обусловленности.
Пусть выполняется неравенство:
$\delta(y^*) \leq v_\delta \delta(x^*)$
Тогда величина v_δ называется относительным числом обусловленности.

5.4 ПРИМЕРЫ:

5.4.1 Плохо обусловеленные

Пусть требуется найти корни многочлена:
$P(x) = (x-1)(x-2)...(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + ...$. Эта задача устойчива. Но если менять первый коэффициент относительное число обусловленности очень большое.

$(x-1) = 0$ ошибка в младшем коэффициенте приведет к комплексным корням, что говорит о плохой обусловленности.

5.4.2 Хорошо обусловеленные

$y = e^x$

$\int_a^b f(x)dx$ если у f постоянный знак на $[a,\ b]$, то задача хорошо обусловлена.