

Конспектик по численным методам

Шоколадные бойцы

10 июня 2019 г.

Здесь был Игрок

1 Понятие погрешности. Абсолютная и относительная погрешности.

Погрешность - отклонение величины от ее истинного значения. То есть, если a реальное значение, а a^* приближенное значение, то погрешность будет равна $a - a^*$

1.1 Причины:

1. Неустраняемая погрешность - $\begin{cases} \text{Математическая модель является лишь} \\ \text{приближенным описанием процесса.} \\ \text{Исходные данные содержат погрешности.} \end{cases}$
2. Погрешность метода - применяемые методы зачастую являются приближенными.
3. Вычислительная погрешность - при действиях с числами происходит округление.

1.2 Абсолютная и относительная погрешности

Абсолютная погрешность: $\Delta(a^*) = |a - a^*|$

Относительная погрешность: $\delta(a^*) = \frac{|a - a^*|}{|a|} = \frac{\Delta(a^*)}{|a|}$

Часто реальное значение неизвестно поэтому используются оценки погрешности.

$$\Delta(a^*) \leq \bar{\Delta}(a^*),$$

$$\delta(a^*) \leq \bar{\delta}(a^*),$$

где $\bar{\Delta}(a^*)$ и $\bar{\delta}(a^*)$ - верхняя граница абсолютной и относительной погрешности соответственно. При этом если одна из величин известна, вторую можно выразить через нее. На практике часто используются следующие приближения:

$$\bar{\delta}(a^*) \approx \frac{\bar{\Delta}(a^*)}{|a^*|},$$

$$\bar{\Delta}(a^*) \approx |a^*| \bar{\delta}(a^*)$$

2 Погрешности арифметических операций и функций.

2.1 Сумма и разность

Для абсолютной погрешности: Абсолютная погрешность суммы и разности не превосходит суммы абсолютных погрешностей. $\Delta(a^* \pm b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$

Оценка суммы и разности $\overline{\Delta}(a^* \pm b^*) = \overline{\Delta}(a^*) + \overline{\Delta}(b^*)$

Для относительной погрешности: Относительная погрешность суммы не превосходит максимальной относительной погрешности.

$$\delta(a^* + b^*) \leq \max(\delta(a^*), \delta(b^*))$$

Относительная погрешность разности выглядит так:

$$\delta(a^* - b^*) \leq \max(\delta(a^*), \delta(b^*)) * \frac{|a+b|}{|a-b|}$$

Для оценок относительной погрешности имеем аналогичные неравенства.

2.2 Произведение и частное.

Для абсолютной погрешности:

Абсолютная погрешность произведения и частного не превышает суммы абсолютных погрешностей.

$$\Delta(a^* * b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$$

$$\Delta(a^*/b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$$

Оценка произведения и частного:

$$\delta(a^* * b^*) \approx (\bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*)) * |a^* * b^*|$$

$$\delta(a^*/b^*) \approx (\bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*)) * |a^*/b^*|$$

Для относительной погрешности:

$$\delta(a^* b^*) \leq \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*)$$

$$\delta(a^*/b^*) \leq \frac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1 - \delta(b^*)}$$

Оценка произведения и частного:

$$\bar{\delta}(a^* * b^*) \approx \bar{\delta}(\frac{a^*}{b^*}) \approx \bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*)$$

2.3 Функции.

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ функция от m переменных, дифференцируемая в области G , вычисление которой производится на $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_m^*$.

2.3.1 Абсолютная погрешность.

$$\Delta(y^*) \leq \sum_{j=1}^m \max_{[x, x^*]} |f'_{x_j}| \Delta(x_j^*), \text{ где } [x, x^*] \text{ отрезок из } x \text{ и } x^*$$

Для оценки верно следующее:

$$\Delta(y^*) \approx \sum_{j=1}^m |f'_{x_j}(x^*)| \Delta(x_j^*)$$

$$\bar{\Delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^m |f'_{x_j}(x)| \bar{\Delta}(x_j^*)$$

2.3.2 Относительная погрешность.

$$\bar{\delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^m v_j^* \bar{\delta}(x_j^*)$$

$$\bar{\delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^m v_j \bar{\delta}(x_j^*)$$

где

$$v_j^* = \frac{|x_j^*| |f'_{x_j}(x^*)|}{|f(x^*)|}$$

$$v_j^* = \frac{|x_j| |f'_{x_j}(x)|}{|f(x)|}$$

2.3.3 Неявные функции.

Пусть $F(y, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ неявно заданная функция. Тогда $f'_{x_j}(x) = -\frac{F'_y}{F'_{x_j}}|_{y=f(x)}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Далее воспользуемся погрешностями описанными выше.

3 Связь погрешности и количества верных значащих цифр в позиционной записи вещественных чисел.

Если число a^* содержит N верных значащих цифр, то справедливо:

$$\delta(a^*) \leq (10^{N-1} - 1)^{-1} \approx 10^{-N+1}$$

Для того чтобы число a^* содержало N верных значащих цифр, требуется:

$$\delta(a^*) \leq (10^N + 1)^{-1} \approx 10^{-N}$$

Если a^* имеет ровно N верных значащих цифр, то $10^{-N-1} \lesssim \delta(a^*) \lesssim 10^{-N+1}$, а так же $\delta(a^*) \sim 10^{-N}$

4 Компьютерное представление чисел, погрешность компьютерного округления.

Целые числа представляются как:

$$n = \pm(a_L 2^L + \dots + a_1 2^1 + a_0 2^0), \text{ где } a \in \{0, 1\}$$

или через дополнение.

Вещественные числа представляются как:

$$n = \pm(a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \dots + a_L 2^{-L}) * 2^p, \text{ где } a \in \{0, 1\}$$

$(a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \dots + a_L 2^{-L})$ эта часть называется мантией.

p называют порядком.

Число n нормализуется так, чтобы выполнялось $a_1 = 1$.

4.1 Свойства и замечания:

1. На компьютере представим конечный набор рациональных чисел специального вида.
2. Диапазон мантии и порядка ограничены. $0.5 \leq |m| < 1$, $|p| \leq 2^{L+1} - 1$
3. Нельзя представить слишком большие и слишком маленькие числа в виду ограничения на порядок.

4. Арифметические операции над числами портят точность. Абсолютную погрешность можно оценить как $|f(a, b)| * \epsilon_M$, где f - арифметическая операция, а ϵ_M относительная точность ЭВМ.
5. Можно в два раза увеличить размер мантисы.
6. Удобно принимать так $1 + \epsilon_M > 1$

5 Понятия корректности, устойчивости и обусловленности вычислительных задач. Примеры хорошо и плохо обусловленных задач.

Вычислительная задача - одно из трех:

1. Прямая задача
2. Обратная задача
3. Задача идентификации

Постановка задачи:

1. Задание множества допустимых X (входных данных)
2. Задание множества допустимых Y (выходных данных)

5.1 Корректность задачи.

Задача корректна если:

1. $\forall x \in X \exists y \in Y$
2. Решение единственно
3. Решение устойчиво по отношению к малым возмущениям входных данных

5.2 Устойчивость решения.

$\forall \epsilon \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое что $\forall x^*$ удовлетворяющих условию $\Delta(x^*) < \delta$ выполняется $\exists y^* : \Delta(y^*) < \epsilon$

Относительная устойчивость.

Все Δ следует заменить на δ

Замечание!

Некоторые задачи дифференцирования или суммирования ряда, не являясь корректными, тем не менее имеют практическую важность.

5.3 Обусловленность вычислительной задачи.

Под обусловленностью задачи понимается чувствительность решения к малым погрешностям входных данных.

Так например, если при малых погрешностях входных данных, решение дает малые погрешности, то говорят, что задача хорошо обусловлена. И наоборот, если при малых погрешностях могут быть сильные изменения решения.

5.3.1 Число обусловленности

Число обусловленности - мера степени обусловленности задачи.

Пусть выполняется неравенство:

$$\Delta(y^*) \leq v_{\Delta} \Delta(x^*)$$

Тогда величина v_{Δ} называется абсолютным числом обусловленности.

Пусть выполняется неравенство:

$$\delta(y^*) \leq v_{\delta} \delta(x^*)$$

Тогда величина v_{δ} называется относительным числом обусловленности.

5.4 ПРИМЕРЫ:

5.4.1 Плохо обусловленные

Пусть требуется найти корни многочлена:

$$P(x) = (x - 1)(x - 2) \dots (x - 20) = x^{20} - 210x^{19} + \dots$$

Эта задача устойчива. Но если менять первый коэффициент относительное число обусловленности очень большое.

$(x - 1) = 0$ ошибка в младшем коэффициенте приведет к комплексным корням, что говорит о плохой обусловленности.

5.4.2 Хорошо обусловленные

$$y = e^x$$

$\int_a^b f(x)dx$ если y и f постоянны на $[a, b]$, то задача хорошо обусловлена.

6 Численное решение нелинейных алгебраических уравнений (НАУ). Обусловленность задачи нахождения простых и кратных корней НАУ.

Задача стоит в том, чтобы найти корни нелинейного уравнения с одним неизвестным вида $f(x) = 0$.

Далее мы будем полагать, что функция дважды дифференцируема в окрестности корней.

Этапы:

1. Локализация.

Например так, если функция f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то этот отрезок содержит хотя бы один корень.

2. Итерационное уточнение корней.

На этом этапе происходит построение последовательности приближений к \bar{x} .

6.1 Понятие сходимости

Метод называется k -шаговым, если для вычисления $x^{(n+1)}$ используется k предыдущих приближений.

Геометрическая скорость сходимости характеризуется следующим:

$$q < 1 \text{ и } |x^n - \bar{x}| \leq c_0 q^n$$

Линейная/сверхлинейная скорость сходимости характеризуется следующим:

$\exists \delta$ -окрестность корня в которой справедлива следующая оценка

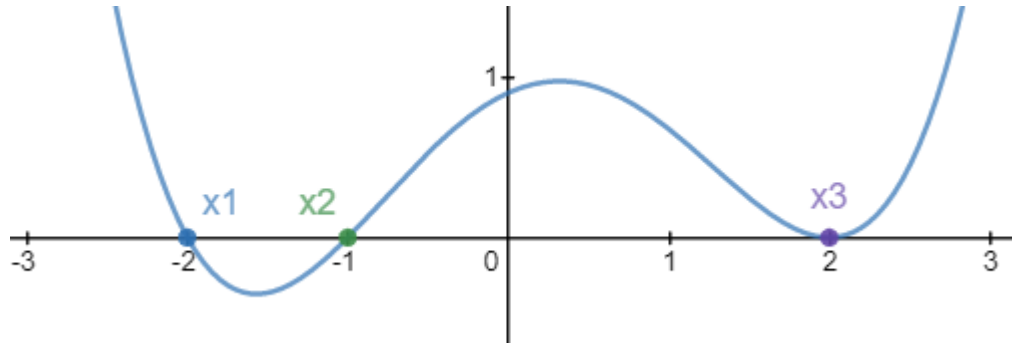
$$|x^{(n+1)} - \bar{x}| \leq C |x^{(n)} - \bar{x}|^p$$

где $C > 0$ и $p \geq 1$ постоянные. p - порядок сходимости метода, при $p = 1$ - линейная скорость сходимости, при $p > 1$ сверхлинейная.

6.2 Виды корней

\bar{x} простой корень $f(x) = 0$ если, $f'(\bar{x}) \neq 0$ в ином случае \bar{x} называется кратным.

число m называется кратностью корня если, $\forall k \in [1, 2 \dots m - 1]$ верно, что $f^{(k)}(\bar{x}) = 0$ и $f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$



тут например x_1 и x_2 простые корни, а x_3 кратный.

6.3 Обусловленность задачи нахождения корня

Для простых корней обусловленность хорошая, но чем меньше тангенс угла наклона, тем она хуже. Для кратных корней обусловленность плохая, и чем выше кратность, тем хуже.

Пусть у нас есть функция f определенная в окрестности нашего корня и мы хотим определить корень.

Кроме того, будем полагать, что в малой окрестности корня выполняется неравенство:

$$|f(x) - f^*(x)| < \overline{\Delta}(f^*)$$

6.3.1 Интервал неопределенности

Заметим, что если функция f непрерывна, то

$$\exists U_{\bar{\varepsilon}}(\bar{x}) : \bar{\varepsilon} > 0$$

для которой выполняется

$$|f(x)| < \overline{\Delta}(f^*) \quad (1)$$

при этом в этой окрестности знак $f^*(x)$ не обязательно должен совпадать с $f(x)$, а значит невозможно определить какой именно x является корнем. Этот интервал называется интервалом неопределенности.

6.3.2 Оценка $\bar{\varepsilon}$

Пусть \bar{x} - простой корень, тогда для значений близких к корню верно следующее:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

В таком случае неравенство (1) примет вид

$$|f'(\bar{x})(x - \bar{x})| \lesssim \overline{\Delta}(f^*)$$

откуда получим

$$\bar{x} - \frac{\overline{\Delta}(f^*)}{|f'(\bar{x})|} \lesssim x \lesssim \bar{x} + \frac{\overline{\Delta}(f^*)}{|f'(\bar{x})|} \quad \text{С учетом того, что}$$

$$x \in (\bar{x} - \bar{\varepsilon}, \bar{x} + \bar{\varepsilon})$$

получим

$$\bar{\varepsilon} \lesssim v_{\Delta} * \bar{\Delta}(f^*)$$

$v_{\Delta} = \frac{1}{|f'(\bar{x})|}$ - в нашей задаче играет роль абсолютного числа обусловленности. Соответственно при уменьшении $|f'(\bar{x})|$ увеличивается число обусловленности, а значит увеличивается погрешность.

Для кратных корней формула для $\bar{\varepsilon}$ не верна, но можно разложить f в ряд Тейлора и получить следующее число обусловленности

$$\bar{\Delta}(f^*)^{\frac{-1}{m}}$$

7 Методы половинного деления и дихотомии решения НАУ.

```

solution(f, l, r)
  if !stop() then      #критерий остановки
    #можно вернуть любое значение из [l, r]
    return l
  m = (l + r) / 2
  if f(l) * f(m) <= 0 then
    return solution(f, l, m)
  elseif f(m) * f(r) <= 0 then
    return solution(f, m, r)
  else bad_range()

```

8 Метод простых итераций решения НАУ.

Представим нашу функцию f в виде $x = g(x)$.

```

solution(g, x0)
  prev_x = x0
  while !stop()      #критерий остановки
    cur_x = g(prev_x)
    dif = abs(cur_x - prev_x)
  return cur_x

```

9 Метод Ньютона решения НАУ и его модификации.

Пусть мы знаем производную нашей функции f .

```

solution(f, x0)
    while stop()      #критерий остановки
        #найдем производную нашей функции
        f'(x) = derivative(f)
        #касательная к f в точке x0
        tangent(x) = f(x0) + f'(x0)*(x - x0)
        #найдем точку пересечения нашей линии о осью 0x
        new_x = resolve(tangent = 0)
        x0 = new_x
    return x0;

```

10 Понятие нормы векторов и матриц. Ассоциированная норма матрицы и ее свойства.

10.1 Нормой вектора.

Нормой вектора называется отображение удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $\|x\| \geq 0$, при этом $\|x\| = 0$ только если $x=0$
2. $\|ax\| = |a| \|x\|$, где a - число
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

В численных методах используются следующие нормы:

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^m |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

где $p \geq 1$, чаще $p = 1$ или 2 .

$$\|x\|_p = \max |x_i|$$

где $1 \leq i \leq m$

10.2 Погрешности нормы вектора.

$$\Delta(x^*) = \|x - x^*\|$$

$$\delta(x^*) = \frac{\|x - x^*\|}{\|x\|}$$

10.3 Ассоциированная норма матрицы.

$$\|A\| = \max_{\|x\|} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Для такой нормы выполняются следующие свойства:

1. $\|A\| \geq 0$, при этом $\|A\| = 0$ только если $x=0$
2. $\|aA\| = |a| \|A\|$, где a - число

3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|AB\| \leq \|A\| * \|B\|$
5. $\|Ax\| \leq \|A\| * \|x\|$ для любого вектора x

10.4 Погрешность решения системы. Невязка.

Пусть x^* вектор - приближенное решение системы, а x реальное решение системы. Тогда определим погрешность как

$$e = x - x^*$$

Но зачастую показателем качества решения может служить малая невязка:

$$r = b - Ax^*$$

Кроме того, $e = x - x^* = A^{-1}r$

11 Обусловленность задачи решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Стандартное число обусловленности и его свойства.

TODO

12 Прямые методы решения СЛАУ. Метод Гаусса и его особенности.

TODO

13 LU-разложение матриц.

TODO

14 Метод Холецкого решения СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей.

TODO

15 Метод прогонки решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей.

TODO

16 Итерационные методы решения СЛАУ. Метод простых итераций (Якоби).

TODO

17 Методы Зейделя и последовательной релаксации решения СЛАУ.

TODO

18 Понятие о методах спуска решения СЛАУ. Выбор направлений и шагов спуска.

TODO

19 Методы покоординатного и наискорейшего спуска решения СЛАУ. Методы сопряженных направлений и градиентов.

TODO

20 Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений (обзор).

TODO

21 Численное нахождение собственных чисел и векторов матриц. Преобразование подобия и его свойства.

TODO

22 Локализация собственных чисел. Теоремы Гершгорина.

TODO

23 Метод Рэлея для нахождения «первого» собственного числа и вектора.

TODO

24 Метод вращений решения СЛАУ. QR-разложение матриц.

TODO

25 Метод QR-разложения для нахождения всех собственных чисел матриц.

TODO

26 Метод обратных итераций для нахождения всех собственных векторов матриц.

TODO

27 Интерполяция функций одной переменной. Интерполяционный полином в формах Лагранжа и Ньютона-Котеса.

TODO

28 Понятие о стратегии интерполяции. Теоремы Фабера и Чебышева о стратегии интерполяции. Универсальная стратегия интерполяции Чебышева.

TODO

29 Интерполяция сплайнами. Степень гладкости и дефект сплайна. Типовые сплайны третьего порядка. Физическая интерпретация сплайнов.

TODO

30 Аппроксимация функций одной переменной. Метод наименьших квадратов.

TODO