Конспектик по численным методам

Шоколадные бойцы

11 июня 2019 г.

Здесь был Игрок

1 Понятие погрешности. Абсолютная и относительная погрешности.

Погрешность - отклонение величины от ее истинного значения. То есть, если a реальное значение, а a^* приближенное значение, то погрешность будет равна $a - a^*$

1.1 Причины:

1. Неустранимая погрешность - $\begin{cases} \text{Математическая модель является лишь} \\ \quad \text{приближенным описание процеса.} \\ \text{Исходные данные содержат погрешности.} \end{cases}$

2. Погрершность метода - применяемые методы зачастую являются приближенными.

3. Вычислительная погрешность - при действиях с числами происходит округление.

1.2 Абсолютная и относительная погрешности

Абсолютная погрешность: $\Delta(a^*) = |a - a^*|$
Относительная погрешность: $\delta(a^*) = \frac{|a-a^*|}{|a|} = \frac{\Delta(a^*)}{|a|}$
Чаще реальное значение неизвестно поэтому используются оценки погрешности.
$\Delta(a^*) \leq \overline{\Delta}(a^*)$,
$\delta(a^*) \leq \overline{\delta}(a^*)$,
где $\overline{\Delta}(a^*)$ и $\overline{\delta}(a^*)$ - верхняя граница абсолютной и отностельной погрешности соответственно. При этом если одна из величин известна, вторую можно выразить через нее. На практике часто используются следующие приближения:
$\overline{\delta}(a^*) \approx \frac{\overline{\Delta}(a^*)}{|a^*|}$,
$\overline{\Delta}(a^*) \approx |a^*|\overline{\delta}(a^*)$

2 Погрешности арифметических операций и функций.

2.1 Сумма и разность

Для абсолютной погрешности: Абсолютная погрешность суммы и разности не превосходит суммы абсолютных погрешностей. $\Delta(a^* \pm b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$

Оценка суммы и разности $\overline{\Delta}(a^* \pm b^*) = \overline{\Delta}(a^*) + \overline{\Delta}(b^*)$
Для относительной погрешности: Относительная погрешность суммы не превосходит максимальной относительной погрешности.
$\delta(a^* + b^*) \leq \max(\delta(a^*), \delta(b^*))$
Относительная погрешность разности выглядит так:
$\delta(a^* - b^*) \leq \max(\delta(a^*), \delta(b^*)) * \frac{|a+b|}{|a-b|}$
Для оценок относительной погрешности имеем аналогичные неравенства.

2.2 Произведение и частное.

Для абсолютной погрешности:
Абсолютная погрешность произведения и частного не превышает суммы абсолютных погрешностей.
$\Delta(a^* * b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$
$\Delta(a^*/b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$
Оценка произведения и частного:
$\delta(a^* * b^*) \approx (\overline{\delta}(a^*) + \overline{\delta}(b^*)) * |a^* * b^*|$
$\delta(a^*/b^*) \approx (\overline{\delta}(a^*) + \overline{\delta}(b^*)) * |a^*/b^*|$
Для относительной погрешности:
$\delta(a^* b^*) \leq \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*)$
$\delta(a^*/b^*) \leq \frac{\delta(a^*)+\delta(b^*)}{1-\delta(b^*)}$
Оценка произведения и частного:
$\overline{\delta}(a^* * b^*) \approx \overline{\delta}(\frac{a^*}{b^*}) \approx \overline{\delta}(a^*) + \overline{\delta}(b^*)$

2.3 Функции.

Пусть $f(x) = f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_m)$ функция от m переменных, дифференцируемая в области G, вычисление которой производится на $x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*,\ ...,\ x_m^*$.

2.3.1 Абсолютная погрешность.

$\Delta(y^*) \leq \sum_{j=1}^{m} \underset{[x,\ x^*]}{max} |f'_{x_j}| \Delta(x_j^*)$, где $[x,\ x^*]$ отрезок из x d x^*
Для оценки верно следующее:
$\overline{\Delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} |f'_{x_j}(x^*)| \overline{\Delta}(x_j^*)$
$\overline{\Delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} |f'_{x_j}(x)| \overline{\Delta}(x_j^*)$

2.3.2 Относительная погрешность.

$\overline{\delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} v_j^* \overline{\delta}(x_j^*)$
$\overline{\delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} v_j \overline{\delta}(x_j^*)$
где
$v_j^* = \frac{|x_j^*||f'_{x_j}(x^*)|}{|f(x^*)|}$

$v_j^* = \frac{|x_j||f'_{x_j}(x)|}{|f(x)|}$

2.3.3 Неявные функции.

Пусть $F(y,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m) = 0$ неявно заданная функция. Тогда $f'_{x_j}(x) = \frac{-F'_{x_j}}{F'_y}|_{y=f(x)},\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m.$
Далее воспользуемся погрешностями описанными выше.

3 Связь погрешности и количества верных значащих цифр в позиционной записи вещественных чисел.

Если число a^* содержит N верных значащих цифр, то справедливо:
$\delta(a^*) \leq (10^{N-1} - 1)^{-1} \approx 10^{-N+1}$
Для того чтобы число a^* содержало N верных значащих цифр, требуется:
$\delta(a^*) \leq (10^N + 1)^{-1} \approx 10^{-N}$
Если a^* имеет ровно N верных значащих цифр, то $10^{-N-1} \lesssim \delta(a^*) \lesssim 10^{-N+1}$, а так же $\delta(a^*) \sim 10^{-N}$

4 Компьютерное представление чисел, погрешность компьютерного округления.

Целые числа представляются как:
$n = \pm(a_L 2^L + ... + a_1 2^1 + a_0 2^0)$, где $a \in \{0,\ 1\}$
или через дополнение.
Вещественные числа представляются как:
$n = \pm(a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + ... + a_L 2^{-L}) * 2^p$, где $a \in \{0,\ 1\}$
$(a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + ... + a_L 2^{-L})$ эта часть называется мантисой.
p называют порядком.
Число n нормализуется так, чтобы выполнялось $a_1 = 1$.

4.1 Свойства и замечания:

1. На компьютере представим конечный набор рациональных чисел специального вида.
2. Диапазон мантисы и порядка ограничены. $0.5 \leq |m| < 1$, $|p| \leq 2^{L+1} - 1$
3. Нельзя представить слишком большие и слишком маленькие числа в виду ограничения на порядок.

4. Арифметические операции над числами портят точность. Абсолютную погрешность можно оценить как $|f(a,\ b)| * \varepsilon_M$, где f - арифметическая операция, а ε_M относительная точность ЭВМ.

5. Можно в два раза увеличить размер мантисы.

6. Удобно принимать так $1 + \varepsilon_M > 1$

5 Понятия корректности, устойчивости и обусловленности вычислительных задач. Примеры хорошо и плохо обусловленных задач.

Вычислительная задача - одно из трех:

1. Прямая задача
2. Обратная задача
3. Задача идентификации

Постановка задачи:

1. Задание множества допустимых X (входных данных)
2. Задание множества допустимых Y (выходных данных)

5.1 Корректность задачи.

Задача корректна если:

1. $\forall x \in X \exists y \in Y$
2. Решение единственно
3. Решнеие устойчиво по отношению к малым возмущениям входных данных

5.2 Устойчивость решения.

$\forall \varepsilon \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое что $\forall x^*$ удовлетворяющих условию $\Delta(x^*) < \delta$ выполняется $\exists y^* : \Delta(y^*) < \varepsilon$
Относительная устойчивость.
Все Δ следует заменить на δ
Замечание!
Некоторые задачи дифференцирования или суммирования ряда, не являются корректными, тем не менее имею практическую важность.

5.3 Обусловленность вычислительной задачи.

Под обусловленностью задачи понимается чувствительность решения к малым погрешностям входных данны.
Так например, если при малых погрешностях входных данных, решение дает малые погрешнсоти, то говорят, что задача хорошо обусловленна. И наоборот, если при малых погрешностях могут быть сильные изменения решения.

5.3.1 Число обусловленности

Число обусловленности - мера степени обусловленности задачи.
Пусть выполняется неравенство:
$\Delta(y^*) \leq v_\Delta \Delta(x^*)$
Тогда величина v_Δ называется абсолютным числом обусловленности.
Пусть выполняется неравенство:
$\delta(y^*) \leq v_\delta \delta(x^*)$
Тогда величина v_δ называется относительным числом обусловленности.

5.4 ПРИМЕРЫ:

5.4.1 Плохо обусловеленные

Пусть требуется найти корни многочлена:
$P(x) = (x-1)(x-2)...(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + ...$. Эта задача устойчива. Но если менять первый коэффициент относительное число обусловленности очень большое.

$(x-1) = 0$ ошибка в младшем коэффициенте приведет к комплексным корням, что говорит о плохой обусловленности.

5.4.2 Хорошо обусловеленные

$y = e^x$

$\int_a^b f(x)dx$ если у f постоянный знак на $[a,\ b]$, то задача хорошо обусловлена.

6 Численное решение нелинейных алгебраических уравнений (НАУ). Обусловленность задачи нахождения простых и кратных корней НАУ.

Задача стостоит в том, чтобы найти корни нелинейного уравнения с одним неизвестным вида $f(x) = 0$.
Далее мы будем полагать, что функция дважды дифференцируема в окрестности корней.
Этапы:

1. Локализация.
   Например так, если функция f непрерына на $[a,\ b]$ и $f(a) * f(b) < 0$, то этот отрезок содержит хотя бы один корень.

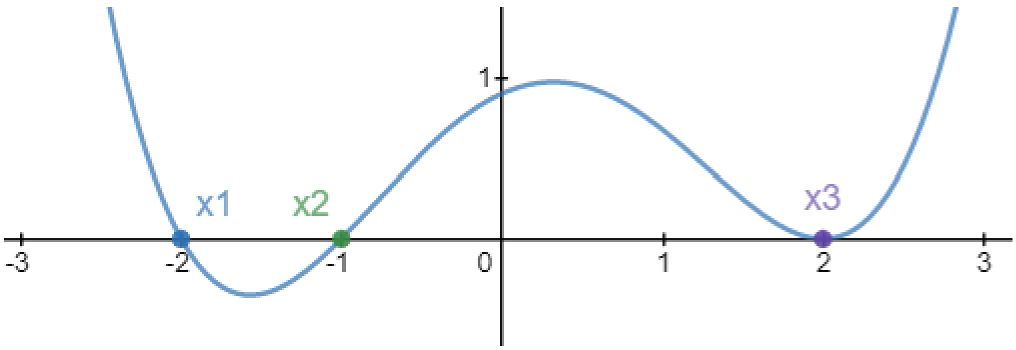
2. Итерационное уточнение корей.
   На этом этапе происходит построение последовательности приближений к $\overline{x}$.

6.1 Понятие сходимости

Метод называется k-шаговым, если для вычисление $x^{(n+1)}$ используется k предыдущих приближений.
Геометрическая скорость сходимости характеризуется следующим:
$q < 1$ и $|x^n - \overline{x}| \leq c_0 q^n$
Линейная/сверхлинейная скорость сходимости характеризуется следующим:
$\exists\delta$-окрестность корня в которой справедлива следующая оценка
$x^{(n+1)} - \overline{x} \leq C|x^{(n)} - \overline{x}|p$
где $C > 0$ и $p \geq 1$ постоянные. p - порядок сходимости метода, при $p = 1$ - линейная скорость сходимости, при $p > 1$ сверхлинейная.

6.2 Виды корней

$\overline{x}$ простой корень $f(x) = 0$ если, $f'(\overline{x}) \neq 0$ в ином случае $\overline{x}$ называется кратным.
число m называется кратностью корня если, $\forall k\ in\ [1,\ 2...m-1]$ верно, что $f^{(k)}(\overline{x}) = 0$ и $f^{(m)}(\overline{x}) \neq 0$



тут например $x1$ и $x2$ простые корни, а $x3$ кратный.

6.3 Обусловленность задачи нахождения корня

Для простых корней обусловенность хорошая, но чем меньше тангенс угла наклона, тем она хуже. Для кратных корней обусловленность плохая, и чем выше кратность, тем хуже.
Пусть у нас есть функция f определенная в окрестности нашего корня и мы хотим определить корень.
Кроме того, будем полагать, что в малой окрестности корня выполняется неравенство:
$|f(x) - f^*(x)| < \overline{\Delta}(f^*)$

6.3.1 Интервал неопределенности

Заметим, что если функция f непрерывна, то
$\exists U_{\overline{\varepsilon}}(\overline{x}) : \overline{\varepsilon} > 0$
для которой выполняется

$$|f(x)| < \overline{\Delta}(f^*) \tag{1}$$

при этом в этой окрестнсоти знак $f^*(x)$ не обязательно должен совпадать с f(x), а значит невозможно определить какой именно x является корнем. Этот интервал называется интервалом неопределенности.

6.3.2 Оценка $\overline{\varepsilon}$

Пусть $\overline{x}$ - простой корень, тогда для значений близких к корню верно следующее:
$f(x) \approx f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) = f'(\overline{x})(x - \overline{x})$
В таком случае неравенство (1) примет вид
$|f'(\overline{x})(x - \overline{x})| \lesssim \overline{\Delta}(f^*)$
откуда получим
$\overline{x} - \frac{\overline{\Delta}(f^*)}{|f'(\overline{x})|} \lesssim x \lesssim \overline{x} + \frac{\overline{\Delta}(f^*)}{|f'(\overline{x})|}$ С учетом того, что

$x \in (\overline{x} - \overline{\varepsilon},\ \overline{x} + \overline{\varepsilon})$
получим
$\overline{\varepsilon} \lesssim v_\Delta * \overline{\Delta}(f^*)$
$v_\Delta = \frac{1}{|f'(\overline{x})|}$ - в нашей задаче играеть роль абсолютного числа обусловенности. Соответственно при уменьшении $|f'(\overline{x})|$ увеличивается число обусловленности, а значит увеличивается погрешность.
Для кратных корней формула для $\overline{\varepsilon}$ не верна, но можно разложить f в ряд тейлора и получить следующее число обусловленности
$\overline{\Delta}(f^*)^{\frac{-1}{m}}$

7 Методы половинного деления и дихотомии решения НАУ.

```
solution(f, l, r)
    if !stop() then    #критерий остановки
        #можно вернуть любое значение из [l, r]
        return l
    m = (l + r) / 2
    if f(l) * f(m) <= 0 then
        return solution(f, l, m)
    elseif f(m) * f(r) <= 0 then
        return solution(f, m, r)
    else bad_range()
```

8 Метод простых итераций решения НАУ.

Представим нашу функцию f в виде $x = g(x)$.

```
solution(g, x0)
    prev_x = x0
    while !stop()    #критерий остановки
        cur_x = g(prev_x)
        dif = abs(cur_x - prev_x)
    return cur_x
```

9 Метод Ньютона решения НАУ и его модификации.

Пусть мы знаем производную нашей функции f.

```
solution(f, x0)
    while stop()    #критерий остановки
        #найдем производную нашей функции
        f'(x) = derivative(f)
        #касательная к f в точке x0
        tangent(x) = f(x0) + f'(x0)*(x - x0)
        #найдем точку пересечения нашей линии о осью Ox
        new_x = resolve(tangent = 0)
        x0 = new_x
    return x0;
```

10 Понятие нормы векторов и матриц. Ассоциированная норма матрицы и ее свойства.

10.1 Нормой вектора.

Нормой вектора называется отображение удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $\|x\| \geq 0$, при этом $\|x\| = 0$ только если x=0
2. $\|ax\| = |a| \, \|x\|$, где a - число
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

В численных методах используются следующие нормы:
$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
где $p \geq 1$, чаще $p = 1$ или 2.

$\|x\|_p = \max |x_i|$
где $1 \leq i \leq m$

10.2 Погрешности нормы вектора.

$\Delta(x^*) = \|x - x^*\|$
$\delta(x^*) = \frac{\|x-x^*\|}{\|x\|}$

10.3 Ассоциированная норма матрицы.

$\|A\| = max \frac{\|A_x\|}{\|x\|}$
Для такой нормы выполняются следующие свойства:

1. $\|A\| \geq 0$, при этом $\|x\| = 0$ только если x=0
2. $\|aA\| = |a| \, \|A\|$, где a - число

3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|AB\| \leq \|A\| * \|B\|$
5. $\|Ax\| \leq \|A\| * \|x\|$ для любого вектора x

10.4 Погрешность решения системы. Невязка.

Пусть x^* вектор - приближенное решение системы, а x реальное решение системы. Тогда определим погрешность как
$e = x - x^*$
Но зачастую показателем качества решения может служить малая невязка:
$r = b - Ax^*$
Кроме того, $e = x - x^* = A^{-1}r$

11 Обусловленность задачи решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Стандартное число обусловленности и его свойства.

TODO

12 Прямые методы решения СЛАУ. Метод Гаусса и его особенности.

TODO

13 LU-разложение матриц.

TODO

14 Метод Холецкого решения СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей.

TODO

15 Метод прогонки решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей.

TODO

16 Итерационные методы решения СЛАУ. Метод простых итераций (Якоби).

TODO

17 Методы Зейделя и последовательной релаксации решения СЛАУ.

TODO

18 Понятие о методах спуска решения СЛАУ. Выбор направлений и шагов спуска.

TODO

19 Методы покоординатного и наискорейшего спуска решения СЛАУ. Методы сопряженных направлений и градиентов.

TODO

20 Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений (обзор).

На данном этапе введем понятие вектор функции $\overrightarrow{f} = (f_1,\ f_2,\ ...,\ f_m)^T$
Тогда наша задача пример следующий вид:
$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = 0$
Также будем считать, что функция $\overrightarrow{f}$ дифференцируема в некоторой окрестности $\overrightarrow{\overline{x}}$
Для системы введем матрицу Якоби.

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1(x)}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1(x)}{\delta x_2} & ... & \frac{\delta f_1(x)}{\delta x_m} \\ \frac{\delta f_2(x)}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2(x)}{\delta x_2} & ... & \frac{\delta f_2(x)}{\delta x_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\delta f_m(x)}{\delta x_1} & \frac{\delta f_m(x)}{\delta x_2} & ... & \frac{\delta f_m(x)}{\delta x_m} \end{pmatrix}$$

20.1 Основные этапы

20.1.1 Локализация

Выбор множества содержащего только одно решение.

20.1.2 Использование итерационного метода для поиска решений

На данном этапе для поиска решения используется один из итерационных методов.

20.2 Корректность и обусловленность задачи.

Как и в НАУ в нашей задаче имеет место быть область неопределенности. Она может иметь сложную структуру, но ограничимся только оценкой радиуса $\overline{\varepsilon}$.
Для близких к $\overline{x}$ знаний верно, что
$f(x) - f^*(x) \leq \overline{\Delta}(f^*)$
Тогда оценим $\overline{\varepsilon} \lesssim \left\|(f'(\overline{x})^{-1})\right\| \overline{\Delta}(f^*)$

20.3 Методы

20.3.1 Метод простой итерации

Преобразуем нашу задачу к виду
$x_1 = g_1(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m)$
$x_2 = g_2(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m)$
...
$x_m = g_m(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m)$

можно записать это в виде $x = g(x)$. Далее будем действовать как в методе простой итерации для НАУ(Вопрос 8).

Сходимость метода.
Если функция(в некоторой окрестности $\overline{x}$) дифференцируема и выполнено неравенство $\|g'(x)\| \leq q$, где $q \in [0,\ 1]$
Тогда выполняется следующее
$\left\|x^{(n)} - \overline{x}\right\| \leq q^n \left\|x^{(0)} - \overline{x}\right\|$
что говорит о геометрической скорости сходимости. Начальное условие будет выполняться если функции g слабо менялись при изменении аргументов.

Апостериорная оценка
$\left\|x^{(n)} - \overline{x}\right\| \leq \frac{q}{1-q} \left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|$
на практике иногда удобнее принять, что $q \approx q_0 = \left\|g'(x^{(0)})\right\|$ и использовать следующий критерий останова
$\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| \leq \varepsilon_1 = \frac{1-q_0}{q_0}\varepsilon$

20.3.2 Метод Ньютона

Пусть у нас уже построены приближения $x^{(1)},\ x^{(2)}, ...,\ x^{(n)}$ Заменим каждую функцию нашей задачи $f(x) = 0$ на линейную часть разложения по формуле Тейлора в точке x^n.
В результате мы получим систему линейных алгебраических уравнений имеющих вид:
$f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) = 0$
Если предположить, что матрица $f'(x^{(n)})$ невырожденная, то есть существует обратная. Тогда система будет иметь едиественное решение, а точнее наше следующее приближение:
$x^{(n+1)} = x^{(n)} - (f'x^{(n)})^{-1} f(x^{(n)})$

Сходимость метода
Для этого метода верна оценка:
$\left\|x^{(n+1)} - \overline{x}\right\| \leq \delta^{-1} \left\|x^{(n)} - \overline{x}\right\|$
то есть метод сходится с квадратичной скоростью.

Критерий останова
$\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| < \varepsilon$

20.3.3 Использование метода минимизации

Введем следующую функцию $F(x) = \sum_{i=1}^{m} (f_i(x))^2$. Эта функция будет принимать свой минимум(то есть ноль), только если все $f_i(x) = 0$. Применив метод отыскания минимума мы найдем корень. Методы спуска имеют более широкую область сходимости, а поэтому можно использовать полученное решение как $x^{(0)}$.

21 Численное нахождение собственных чисел и векторов матриц. Преобразование подобия и его свойства.

Вектор X называется собственным вектором матрицы A, если выполняется $AX = \lambda X$ и $\exists \lambda \neq 0$.
Собственное число - корень характеристического уравнения $det(A - \lambda E) = 0$
Далее будем предпологать, что $\|x\| = \|x\|_2$.

21.1 Поиск собственных чисел

Задача поиска собственных чисел может быть сведена к задаче поиска решения НАУ. Такой подход называется прямым.

Данный подход может быть неприемлим при работе с большими матрицами, так как решения весьма чувствительны к погрешностям в коэффициентах, а при вычислении коэффициентов для больших матриц погрешность будет тоже большой.

21.2 Преобразование подобия

А и В подобны если существует такая невырожденная матрица Р, что $B = P^{-1} * A * P$. При этом В будет обладать теми же собственными числами, а собственные вектора будут связаны следующим равенством $x = Px'$.
Теорема!
Любую квадратную матрицу А с помощью преобразования подобия можно привести к следующему виду(жордановая форма матрицы):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \gamma_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \gamma_3 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_{m-1} & \gamma_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

где λ_i собственные числа матрицы А. γ принимает значения 1 или 0, при этом если $\gamma_i = 1$, то $\lambda_i = \lambda_{i+1}$

21.3 Матрицы простой структуры

Марица простой структуры может быть приведена к диагональной преобразованием подобия.
Если все собсвтенные значени матрицы А различны, то она является матрицей простой структуры.
Если А- вещественная симметричная матрица, то она подобна диагональной матрице, при этом Р может быть выбрана ортогональной($P^{-1} = P^T$).

22 Локализация собственных чисел. Теоремы Гершгорина.

Теорема Гершгорина.
Пусть $r_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{m} |a_{i,j}|$. Сумма всех внедиагональных элементов i-той строки
За S_i обозначим круг радиуса r_i на комплексной плоскости с центром в точке $a_{i,i}$. Тогда верно следующее - все собственные значения матрицы А лежат в объединении кругов $S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m$

Доказательство
Пусть i такое, что x_i максимальная по модулю координата x. Запишем i-e уравнение системы в виде:
$(a_{i,i} - \lambda)x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j$
Тогда с учетом того, что $|\frac{x_j}{x_i}| \leq 1$ следует, что
$|a_{i,i} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||\frac{x_j}{x_i}| \leq r_i$, а значит $\lambda \in S_i$
Следствие Если круг Гершгорина изолирован, то в нем находится ровно одно собственное значение.

23 Метод Рэлея для нахождения «первого» собственного числа и вектора.

TODO

24 Метод вращений решения СЛАУ. QR-разложение матриц.

TODO

25 Метод QR-разложения для нахождения всех собственных чисел матриц.

TODO

26 Метод обратных итераций для нахождения всех собственных векторов матриц.

TODO

27 Интерполяция функций одной переменной. Интерполяционный полином в формах Лагранжа и Ньютона-Котеса.

TODO

28 Понятие о стратегии интерполяции. Теоремы Фабера и Чебышева о стратегии интерполяции. Универсальная стратегия интерполяции Чебышева.

TODO

29 Интерполяция сплайнами. Степень гладкости и дефект сплайна. Типовые сплайны третьего порядка. Физическая интерпретация сплайнов.

TODO

30 Аппроксимация функций одной переменной. Метод наименьших квадратов.

TODO