

# **Отчёт по лабораторной работе №8**

**Целочисленная арифметика многократной точности**

Фрол Волков

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>5</b>
2.1	Сложение неотрицательных целых чисел . . . . .	6
2.2	Вычитание неотрицательных целых чисел . . . . .	6
2.3	Умножение неотрицательных целых чисел столбиком . . . . .	6
2.4	Быстрый столбик . . . . .	7
2.5	Деление многоразрядных целых чисел . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Выполнение работы</b>	<b>9</b>
3.1	Реализация алгоритма на языке Python . . . . .	9
3.2	Контрольный пример . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Выводы</b>	<b>16</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>17</b>

# List of Figures

3.1 Работа алгоритма . . . . . 15

# 1 Цель работы

Ознакомление с алгоритмами целочисленной арифметики многократной точности, а также их последующая программная реализация.

## 2 Теоретические сведения

Высокоточная (длинная) арифметика — это операции (базовые арифметические действия, элементарные математические функции и пр.) над числами большой разрядности (многоразрядными числами), т.е. числами, разрядность которых превышает длину машинного слова универсальных процессоров общего назначения (более 128 бит).

В современных асимметричных криптосистемах в качестве ключей, как правило, используются целые числа длиной 1000 и более битов. Для задания чисел такого размера не подходит ни один стандартный целочисленный тип данных современных языков программирования. Представление чисел в формате с плавающей точкой позволяет задать очень большие числа (например, тип `long double` языка C++ — до  $10^{5000}$ ), но не удовлетворяет требованию абсолютной точности, характерному для криптографических приложений. Поэтому большие целые числа представляются в криптографических пакетах в виде последовательности цифр в некоторой системе счисления (обозначим основание системы счисления  $b$ ):  $x = (x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1 x_0)_b$ , где  $\forall i \in [0, n-1] : 0 \leq x_i < b$ .

Основание системы счисления  $b$  выбирается так, чтобы существовали машинные команды для работы с однозначными и двузначными числами; как правило,  $b$  равно  $2^8$ ,  $2^{16}$  или  $2^{32}$ .

При работе с большими целыми числами знак такого числа удобно хранить в отдельной переменной. Например, при умножении двух чисел знак произведения вычисляется отдельно.

Далее при описании алгоритмов квадратные скобки означают, что берётся

целая часть числа.

## 2.1 Сложение неотрицательных целых чисел

\*Вход. Два неотрицательных числа  $u = u_1 u_2 \dots u_n$  и  $v = v_1 v_2 \dots v_n$ ; разрядность чисел  $n$ ; основание системы счисления  $b$ .

\*Выход. Сумма  $w = w_0 w_1 \dots w_n$ , где  $w_0$  - цифра переноса, всегда равная 0 либо 1.

1. Присвоить  $j = n, k = 0$  ( $j$  идет по разрядам,  $k$  следит за переносом).
2. Присвоить  $w_j = (u_j + v_j + k) \pmod{b}$ , где  $k = \left\lfloor \frac{u_j + v_j + k}{b} \right\rfloor$ .
3. Присвоить  $j = j - 1$ . Если  $j > 0$ , то возвращаемся на шаг 2; если  $j = 0$ , то присвоить  $w_0 = k$  и результат:  $w$ .

## 2.2 Вычитание неотрицательных целых чисел

\*Вход. Два неотрицательных числа  $u = u_1 u_2 \dots u_n$  и  $v = v_1 v_2 \dots v_n, u > v$ ; разрядность чисел  $n$ ; основание системы счисления  $b$ .

\*Выход. Разность  $w = w_0 w_1 \dots w_n = u - v$ .

1. Присвоить  $j = n, k = 0$  ( $k$  - заём из старшего разряда).
2. Присвоить  $w_j = (u_j - v_j + k) \pmod{b}$ ;  $k = \left\lfloor \frac{u_j - v_j + k}{b} \right\rfloor$ .
3. Присвоить  $j = j - 1$ . Если  $j > 0$ , то возвращаемся на шаг 2; если  $j = 0$ , то результат:  $w$ .

## 2.3 Умножение неотрицательных целых чисел столбиком

\*Вход. Числа  $u = u_1 u_2 \dots u_n, v = v_1 v_2 \dots v_m$ ; основание системы счисления  $b$ .

\*Выход. Произведение  $w = uv = w_1 w_2 \dots w_{m+n}$ .

1. Выполнить присвоения:  $w_{m+1} = 0, w_{m+2} = 0, \dots, w_{m+n} = 0, j = m$  ( $j$  перемещается по номерам разрядов числа  $v$  от младших к старшим).
2. Если  $v_j = 0$ , то присвоить  $w_j = 0$  и перейти на шаг 6.
3. Присвоить  $i = n, k = 0$  (значение  $i$  идет по номерам разрядов числа  $u$ ,  $k$  отвечает за перенос).
4. Присвоить  $t = u_i \cdot v_j + w_{i+j} + k, w_{i+j} = t \pmod{b}, k = \lfloor \frac{t}{b} \rfloor$ .
5. Присвоить  $i = i - 1$ . Если  $i > 0$ , то возвращаемся на шаг 4, иначе присвоить  $w_j = k$ .
6. Присвоить  $j = j - 1$ . Если  $j > 0$ , то вернуться на шаг 2. Если  $j = 0$ , то результат:  $w$ .

## 2.4 Быстрый столбик

\*Вход. Числа  $u = u_1 u_2 \dots u_n, v = v_1 v_2 \dots v_m$ ; основание системы счисления  $b$ .

\*Выход. Произведение  $w = uv = w_1 w_2 \dots w_{m+n}$ .

1. Присвоить  $t = 0$ .
2. Для  $s$  от 0 до  $m + n - 1$  с шагом 1 выполнить шаги 3 и 4.
3. Для  $i$  от 0 до  $s$  с шагом 1 выполнить присвоение  $t = t + u_{n-i} \cdot v_{m-s+i}$ .
4. Присвоить  $w_{m+n-s} = t \pmod{b}, t = \lfloor \frac{t}{b} \rfloor$ . Результат:  $w$ .

## 2.5 Деление многоразрядных целых чисел

\*Вход. Числа  $u = u_n \dots u_1 u_0, v = v_t \dots v_1 v_0, n \geq t \geq 1, v_t \neq 0$ .

\*Выход. Частное  $q = q_{n-t} \dots q_0$ , остаток  $r = r_t \dots r_0$ .

1. Для  $j$  от 0 до  $n - t$  присвоить  $q_j = 0$ .
2. Пока  $u \geq vb^{n-t}$ , выполнять:  $q_{n-t} = q_{n-t} + 1, u = u - vb^{n-t}$ .
3. Для  $i = n, n - 1, \dots, t + 1$  выполнять пункты 3.1 – 3.4: 3.1. если  $u_i \geq v_t$ , то присвоить  $q_{i-t-1} = b - 1$ , иначе присвоить  $q_{i-t-1} = \frac{u_i b + u_{i-1}}{v_t}$ . 3.2. пока

$q_{i-t-1}(v_t b + v_{t-1}) > u_i b^2 + u_{i-1} b + u_{i-2}$  выполнять  $q_{i-t-1} = q_{i-t-1} - 1$ .

3.3. присвоить  $u = u - q_{i-t-1} b^{i-t-1} v$ . 3.4. если  $u < 0$ , то присвоить  $u = u + v b^{i-t-1}$ ,  $q_{i-t-1} = q_{i-t-1} - 1$ .

4.  $r = u$ . Результат:  $q$  и  $r$ .



## 3 Выполнение работы

### 3.1 Реализация алгоритма на языке Python

```
import math
# надо ввести данные сначала
u = "12345"
v = "56789"
b = 10
n = 5
# алгоритм 1
j = n
k = 0

w = list()
for i in range(1, n+1):
    w.append(
        (int(u[n-i]) + int(v[n-i]) + k) % b
    )

    k = (int(u[n-i]) + int(v[n-i]) + k) // b
    j = j - 1
w.reverse()
print(w)
```

```

# алгоритм 2
u = "56789"
v = "12345"

j = n
k = 0
w = list()
for i in range(1, n+1):
    w.append(
        (int(u[n-i]) - int(v[n-i]) + k) % b
    )

    k = (int(u[n-i]) - int(v[n-i]) + k)//b
    j = j - 1
w.reverse()
print(w)

```

```

# алгоритм 3
u = "123456"
v = "7890"
n = 6
m = 4

w = list()
for i in range(m+n):
    w.append(0)
j = m

```

```

def step6():
    global j
    global w
    j = j - 1
    if j > 0:
        step2()
    if j == 0:
        print(w)

```

```

def step2():
    global v
    global w
    global j
    if j == m:
        j = j-1
    if int(v[j]) == 0:
        w[j] = 0
        step6()

```

```

def step4():
    global k
    global t
    global i
    if i == n:
        i = i - 1
    t = int(u[i]) * int(v[j]) + w[i + j] + k

```

```
w[i + j] = t % b
k = t / b
```

```
def step5():
    global i
    global w
    global j
    global k
    i = i - 1
    if i > 0:
        step4()
    else:
        w[j] = k
```

```
step2()
i = n
k = 0
t = 1
step4()
step5()
step6()
print(w)
```

```
# алгоритм 4
u4 = "12345"
n = 5
```

```

v4 = "6789"
m = 4
b = 10
w1 = list()
for i in range(m+n+2):
    w1.append(0)
t1 = 0
for s1 in range(0, m+n):
    for i1 in range(0, s1+1):
        if n-i1>n or m-s1+i1>m or n-i1<0 or m-s1+i1<0 or m-s1+i1-1<0:
            continue
        t1 = t1 + (int(u[n-i1-1]) * int(v[m-s1+i1-1]))
    w1[m+n-s1-1] = t1 % b
    t1 = math.floor(t1/b)
print(w1)

```

```

# алгоритм 5
u = "12346789"
n = 7
v = "56789"
t = 4
b = 10
q = list()
for j in range(n-t):
    q.append(0)
r = list()
for j in range(t):
    r.append(0)

```

```

while int(u) >= int(v)*(b**(n-t)):
    q[n-t] = q[n-t] + 1
    u = int(u) - int(v)*(b**(n-t))
u = str(u)
for i in range(n, t+1, -1):
    v = str(v)
    u = str(u)
    if int(u[i]) > int(v[t]):
        q[i-t-1] = b - 1
    else:
        q[i-t-1] = math.floor((int(u[i])*b + int(u[i-1]))/int(v[t]))

    while (int(q[i-t-1])*(int(v[t])*b + int(v[t-1])) > int(u[i])*(b**2) + int(u[i-1])*b + int(u[i-2])):
        q[i-t-1] = q[i-t-1] - 1
    u = (int(u) - q[i-t-1]*b**(i-t-1)*int(v))
    if u < 0:
        u = int(u) + int(v) *(b**(i-t-1))
        q[i-t-1] = q[i-t-1] - 1
r = u
print(q, r)

```

## 3.2 Контрольный пример

```
149     while (int(q[i-t-1])*(int(v[t])*b + int(v[t-1])) > int(u[i])*(b**2) + i
150         q[i-t-1] = q[i-t-1] - 1
151     u = (int(u) - q[i-t-1]*b**(i-t-1)*int(v))
152     if u < 0:
153         u = int(u) + int(v) *(b**(i-t-1))
154         q[i-t-1] = q[i-t-1] - 1
155     r = u
156     print(q, r)
157
```

```
[6, 9, 1, 3, 4]
[4, 4, 4, 4, 4]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.3999999999999986, 4, 0, 0]
[8, 3, 1, 4, 0, 2, 0, 5, 0, 0, 0]
[0, 2, 9] -39899091
```

Figure 3.1: Работа алгоритма

## 4 Выводы

Изучили задачу представления больших чисел, познакомились с вычислительными алгоритмами.



# Список литературы

1. Длинная арифметика от Microsoft
2. Как оперировать числами, не помещающимися ни в один из числовых типов