Tarea 4
Estructuras de datos y teoría de algoritmos
2014-1
Fecha de entrega: 19 de Noviembre

6 de noviembre de 2013

Para cada uno de los algoritmos solicitados, argumenta claramente su corrección y su complejidad. En el caso de los algoritmos de programación dinámica, escribe y justifica las correspondientes ecuaciones funcionales.

La tarea se resolverá y entregará en equipos de dos personas. Se penalizará estríctamente el encontrar dos respuestas idénticas o casi idénticas a un ejercicio.

1. Reporte de lectura

1. Lee el artículo *RICHARD BELLMAN ON THE BIRTH OF DYNAMIC PROGRAMMING*, y escribe un resumen de una cuartilla sobre el mismo.

2. Divide y vencerás

1. El *cierre convexo* de un conjunto de S de n puntos en el plano, es una secuencia $h_1, h_2, \ldots, h_z$ de puntos de S en posición convexa, que forman los vértices del polígono convexo más pequeño que contiene en su interior o frontera a todos los puntos de S. Diseña un algoritmo divide y vencerás de tiempo $O(n \log n)$ que tome como entrada un conjunto S de n puntos representados como pares de coordenadas (x, y) y calcule el cierre convexo de S. Muestra una ejecución de tu algoritmo con $n = 16$ puntos. Puedes suponer que tu conjunto de entrada no tiene a tres puntos que son colineales.

2. En la primaria aprendiste un algoritmos de multiplicación de secuencias de n dígitos de complejidad $\Theta(n^2)$. Ahora diseña un algoritmo que tome como entrada dos cadenas S_x y S_y de n bits cada una, y calcule en tiempo $o(n^2)$ la cadena de $2n$ bits que representa al producto de los números x y y, donde x es la concatenación de los bits de S_x y y es la concatenación de S_y. Muestra una ejecución de tu algoritmo con dos números de 16 bits.

3. Programación dinámica.

1. Mone Dita tiene una obsesión compulsiva con el cambio, por lo que continuamente se pregunta de cúantas maneras puede sumar una cantidad de centavos x, utilizando únicamente monedas de 1, 5, 10, 25 y 50 centavos. Por ejemplo, 6 centavos se pueden cambiar de dos formas: como seis monedas de un centavo, o como una moneda de cinco centavos y una de un centavo. Diseña un algoritmo eficiente que ayude a Mone Dita a lidiar, que tome como entrada al número x y dé como salida el número de cambios diferentes que tiene x.

2. El Conde Contador te ha contratado para que elabores un algoritmo que le ayude a calmar sus obsesiones. Últimamente se ha preguntado de cuántas formas distintas puede expresarse un entero no negativo n como suma de m enteros ordenados no negativos. Por ejemplo, el 1 puede expresarse de 5 formas distintas como suma de 5 enteros no negativos: 1+0+0+0+0, 0+1+0+0+0, 0+0+1+0+0, 0+0+0+1+0 y 0+0+0+0+1. Diseña un algoritmo que dados n y m, calcule el respectivo número de maneras de escribir a n como la suma de m enteros no negativos ordenados.

3. Te dan una imagen representada por una matriz de pixeles de tamaño $m \times n$, donde cada pixel es una tripleta de intensidades RGB (rojo, verde, azul). Supón que queremos comprimir la imagen un poquito. Específicamente, queremos quitar un pixel de cada una de las m filas, de modo que la imagen quede un pixel más angosta. Para evitar efectos ópticos indeseables, necesitamos que los pixeles removidos en dos filas adyacentes estén en la misma columna o en dos columnas adyacentes. Los pixeles eliminados forman una *costura* desde la primera fila hasta la última, en donde pixeles sucesivos de la costura son adyacentes de forma vertical o diagonal.

    a) Demuestra que el número de posibles costuras diferentes crece de forma exponencial en m, suponiendo que $n > 1$.

    b) Ahora supón que asociado a cada pixel, te dan una medida con valor real *d[i,j]* que mide que tan indeseable sería remover el pixel i, j. Intiutivamente, esa medida indica que tan diferente es ese pixel de sus pixeles vecinos. Supón que la medida de una costura es la suma de las medidas de sus pixeles. Diseña un algoritmo eficiente que encuentre una costura de medida mínima (debe dar una costura óptima, no sólo su medida). Muestra la ejecución de tu algoritmo con una matriz de medida de 8x8.