1 Tarea 1

Pregunta 1 Demuestra que todo torneo T tiene un rey y un súbdito. Es decir, un vértice desde el cual se puede llegar a todos los demás vértices pasando a lo más por dos arcos, y uno al cual todos pueden llegar pasando a lo más por dos arcos

Demostración: Sea $T = (V, E)$ un torneo y $v \in V$ tal que $|out(v)| \geq |out(u)| \forall u \in V$ es decir la cardinalidad de la exvecindad de v es máxima en T
denotaremos $x \to y, si(x, y) \in E$
Afirmación:
v es un rey en T
Es decir

$$\forall u \neq v \in V, (v \to u) \vee (\exists u_v \in V | (v \to u_v) \wedge (u_v \to u))$$

Demostración por reducción al absurdo:
Supongamos que no es cierto, es decir:

$$\exists u \neq v \in V, (u \to v) \wedge (\forall u_v \in V, (v \to u_v) \Rightarrow (u \to u_v)).$$

De ahi podemos decir que $v \in out(u)$ y que $out(v) \subset out(u)$ por lo que $|out(u)| > |out(v)|$ Contradicción a la maximalidad de $v\blacksquare$

Existencia del súbdito: Para un Torneo T considere el torneo $\widehat{T}$ que se obtiene cambiando la orientación de cada arista en T, así un rey en T es súbdito en $\widehat{T}$ y viceversa, como hay un rey en $\widehat{T}$ hay un subdito en T.