Algoritmos
TAREA 2

Compilado de respuestas

4 de diciembre de 2013

1. Teorema de Landau

Problema 1.1

Demuestre en detalle que si una secuencia es de puntajes de un torneo, entonces satisface la condición.

Se demostrará por inducción sobre el tamaño de la secuencia.

- CASO BASE:
  Para un torneo de tamaño 2 se tiene la unica secuencia $(0,1)$ que cumple con el teorema.
  Para un torneo de tamaño n=3 se tienen las secuencias $(0,1,2)$ y $(1,1,1)$, las cuales cumplen la condición.

- HIPÓTESIS:
  Si $s(s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n)$ es una secuencia de tamaño n correspondiente a un torneo, se cumple que: $\sum_{i=1}^{k} s_i \geq \binom{k}{2}$ e igual para $k = n$

- P.D. para una secuencia de tamaño n+1
  A partir de un torneo de tamaño n construimos unmo de tamaño $n+1$ añadiendo un elemento que se relacionará con los n elementos iniciales, resultando entonces que el torneo de tamaño n es un subtorneo del que se acaba de contruir (tamaño $n+1$), cuya secuencia se contruye de la siguiente manera:
  Suponemos que hay r elementos del subtorneo de tamaño n cuya arista llega hacia el nuevo elemento agregado, donde $0 \leq r \leq n$ (seria cero si no hay ninguna arista hacia el nuevo elemento y n si todas las aristas mencionadas llegan al nuevo). Esto hace que dichos elementos incrementen en uno su marcador, por lo tanto, la nueva secuencia de marcadores para el subtorneo de tamaño n es: $\sum_{i=1}^{n} s_i + r$
  y el marcador del nuevo elemento es $n - r$. Como se puede observar, ahora la secuencia $s(s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n)$ para el torneo de tamanño $n+1$ es mayor (cuando $r > 0$) o igual (cuando $r = 0$) a $\binom{n}{2}$ por la hipótesis. Ahora, $\sum_{i=1}^{n+1} s_i = \sum_{i=1}^{n} s_i + r + n - r$, por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n+1} s_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} s_i + n \tag{1}$$

  Pero:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \quad \geq \quad \binom{n}{2}$$

Sumando n de ambos lados:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} s_i + n &\geq \binom{n}{2} + n \\
\sum_{i=1}^{n} s_i + n &\geq \frac{n(n-1)}{2} + n \\
\sum_{i=1}^{n} s_i + n &\geq \frac{n(n-1+2)}{2} \\
\sum_{i=1}^{n} s_i + n &\geq \frac{n(n+1)}{2} \\
\sum_{i=1}^{n} s_i + n &\geq \binom{n+1}{2} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo 2 en 1:

$$
\sum_{i=1}^{n+1} s_i \geq \binom{n+1}{2} \qquad (3)
$$

Que es nuestra hipótesis de inducción. $\surd$

Observaciones: El ayudante comentó que era mas fácil quitar uno que añadirlo.

Al finaL comenta que se demuestra la igualdad pero no queda muy clara la desigualdad.

CALIFICACIÓN: 0.95