Lógica Matemática. Tarea 2

1. Di si las afirmaciones (a)–(d) son ciertas dado el marco siguiente:

   El conjunto de mundos posibles $\mathcal{W} = \{A, B, C, D\}$ y la relación de accesibilidad $R = \{(A, B), (C, D), (A, D), (A, A), (B, B), (C, C), (D, D)\}$. Además, tenemos la interpretación v:

   $$\begin{array}{llll} v(A,p) = F & v(B,p) = V & v(C,p) = F & v(D,p) = F \\ v(A,q) = F & v(B,q) = F & v(C,q) = V & v(D,q) = V \\ v(A,r) = F & v(B,r) = V & v(C,r) = F & v(D,r) = V \end{array}$$

   (a) $A \models_v \Diamond(p \wedge q)$; (b) $B \models_v \Box(q \Leftrightarrow r)$; (c) $\models_v \Diamond(p \Rightarrow p)$; (d) $\models_v \Box(\neg q \wedge r)$. Además, verifica si (c) y (d) son válidas.

2. Sea $\mathcal{M} = \langle \{a, b, c\}, \mathcal{A} \rangle$ un marco. Dibuja algunas de las $\mathcal{A}$ posibles tales que $\mathcal{M}$ sea un modelo de:

   $$\begin{array}{lll} \text{(a) } \Box\phi \Rightarrow \Diamond\phi & \text{(b) } \phi \Rightarrow \Box\Diamond\phi & \text{(c) } \Box\phi \Rightarrow \Box\Box\phi \\ \text{(d) } \phi \Rightarrow \Box\phi & \text{(e) } \Diamond\Box\phi \Rightarrow \Box\Diamond\phi & \text{(f) } \Box\Diamond\phi \Rightarrow \Diamond\Box\phi \end{array}$$

3. Demuestra que un marco cumple la propiedad

   $$P_3 \quad \forall u, v \,.\, u \to v \Rightarrow v \to u \qquad \text{(simetría)}$$

   si y sólo si en ese marco es válida la fórmula

   $$S_3 \quad \alpha \Rightarrow \Box\Diamond\alpha \qquad B(\alpha).$$

4. Da una estructura de Kripke de un sistema con dos agentes, cada uno de los cuales tiene como estado un vector de tres bits. Cada agente sabe que el estado del otro agente difiere del suyo en el valor de exactamente un bit, pero no sabe cuál bit.

5. Considera el problema de los niños lodosos visto en clase. La variable m_i denota que el niño i está lodoso. Sea Γ la conjunción de las siguientes fórmulas:

   $$C(m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_n)$$
   $$\bigwedge_{i \neq j} C(m_i \to K_j m_i)$$
   $$\bigwedge_{i \neq j} C(\neg m_i \to K_j \neg m_i)$$

   Sea G cualquier conjunto de niños, y

   $$\alpha_G = \bigwedge_{i \in G} m_i \wedge \bigwedge_{i \notin G} \neg m_i$$

   Es decir, α_G afirma que exactamente los niños en G están lodosos.

Usando deducción natural, demuestra la siguiente implicación lógica:

$$\Gamma, \alpha_{\{i\}} \models K_i m_i$$

que corresponde con la situación en la que si exactamente un niño está lodoso, ese niño lo sabe.