ครั้งที่ 3 (28 ก.ค. 2549)
การวิเคราะห์

การวิเคราะห์วงจรลอจิก (Designing Logic Circuits)

1. จากวงจรลอจิกที่ให้มาเขียนสมการของวงจร
2. เขียนตารางความจริงจากสมการที่ได้
3. สรุปการทำงานของวงจร

    output มีค่า 1 ตามเงื่อนไขใดของอินพุต

    output มีค่า 0 ตามเงื่อนไขใดของอินพุต

<u>หมายเหตุ</u> หากวงจรลอจิกนั้นมีการนำ output ไปเชื่อมต่อกับวงจรอื่น จะต้องพิจารณาด้วยว่า ผลของ output ที่เป็น 1 และ 0 นั้นส่งผลอย่างไรต่อวงจรนั้น ๆ ด้วย

การออกแบบวงจรลอจิก (Designing Logic Circuits)

1. จากโจทย์ (ความต้องการ) เขียนตารางความจริง (truth table)
   - หาจำนวน Input / Output
   - หาความสัมพันธ์ระหว่าง Input / Output ในทุกกรณี
   - เขียนตารางความจริง
2. เขียนสมการบูลลีนจากตารางความจริง
   - ใช้วิธีการ Sum of product / Product of sum
3. ลดรูปสมการให้สั้นลง (เพื่อลดจำนวนเกต)
   - ใช้วิธีการ Boolean Algebra / Karnaugh Map/Quine McCluskey
   - หรือเปลี่ยนรูปสมการไปตามชนิดของเกตที่มีใช้
4. เขียนวงจรเกตจากสมการที่ได้

การออกแบบวงจรลอจิก (Designing Logic Circuits)

จากที่ได้เรียนมาในครั้งที่ 2 เราสามารถเขียนสมการตรรกหรือเรียกกันว่า สมการบูลลีน จากตารางความจริงได้โดยวิธีการ Sum Of Product แล้วนำสมการมาเขียนเป็นวงจร

สมการที่เขียนจากตารางความจริงโดยวิธีดังกล่าวนั้นยังเป็นสมการพื้นฐานที่คิดจากค่า output ที่มีค่า 1 โดยพิจารณาแยกสำหรับแต่ละค่า ของ output ที่เป็น 1 ว่าเกิดจาก input ค่าพื้นฐานใด (ค่า 0 หรือ 1) แล้วนำค่าที่ได้มา AND กัน เมื่อได้ครบทุกเทอมสำหรับค่า output ที่เป็น 1 ให้นำเทอมทั้งหมดมา OR กัน ก็จะได้สมการ

การออกแบบวงจรลอจิก (Designing Logic Circuits)

- หากพิจารณาดูสมการที่ได้มานั้น จะพบว่าในบางกรณีเราสามารถที่จะรวมเทอมในสมการเหล่านั้นเข้าด้วยกัน ทำให้สมการมีขนาดสั้นลงได้
- ฉะนั้นสมการของตารางความจริงที่เราเขียนโดยวิธีการของ SOP จึงไม่ใช่สมการที่สั้นที่สุด หากนำไปสร้างวงจรก็จะไม่เป็นวงจรที่ประหยัดที่สุด

การออกแบบวงจรลอจิก (Designing Logic Circuits)

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ Computer Engineering

- หากเราต้องการประหยัดอุปกรณ์ เราต้องทำการลดรูปสมการให้สั้นลงโดย
  - ให้มีจำนวนเทอมน้อยที่สุด หรือ
  - ให้ตัวแปรในเทอมมีจำนวนน้อยที่สุด หรือ
  - เปลี่ยนรูปสมการให้ได้รูปแบบที่ต้องการ

การออกแบบวงจรลอจิก (Designing Logic Circuits)

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
Computer Engineering

เราสามารถลดรูปสมการให้สั้นลงหรือเปลี่ยนรูปสมการได้ โดยใช้

1. วิธีการทางพีชคณิตโดยใช้พีชคณิตบูลลีน (Boolean Algebraหรือ
2. วิธีการของ แผนภาพคาร์นอจ์ (Karnaugh Map)
3. วิธีการของ Quine McCluskey

การลดรูปโดยวิธีการทางพีชคณิต

- พีชคณิตที่นำมาใช้ในการลดรูปสมการตรรกนั้นเรียกชื่อตามผู้ที่คิดหลักการทางพีชคณิตชื่อ George Boole ว่า พีชคณิตบูลลีน (Boolean Algebra) ซึ่งประกอบด้วยทฤษฎีที่เกี่ยวกับการลดรูป และ เปลี่ยนรูปเทอมทางตรรกให้อยู่ในรูปแบบที่ต้องการ

พีชคณิตบูลลีน (Boolean Algebra)

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A + A = A$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot A = A$$

$$A + 0 = A$$

$$A + \overline{A} = 1$$

$$A \cdot 1 = A$$

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot B + A \cdot C = A(B + C)$$

$$A + \overline{A}B = A + B$$

ทฤษฎีบูลลีน

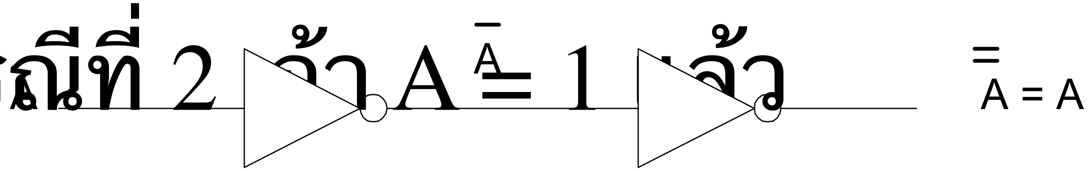
- พีชคณิตบูลลีนพื้นฐานจะประกอบไปด้วย 1 ทฤษฎี $\overline{\overline{A}} = A$

1.

A มีค่า 2 ค่า คือ 0 หรือ 1 $\overline{A} =$ $\overline{\overline{A}} = 0$

ในกรณีที่ 1 ถ้า A = 0 แล้ว $\overline{A} = 0$ $\overline{\overline{A}} = 1$ และ

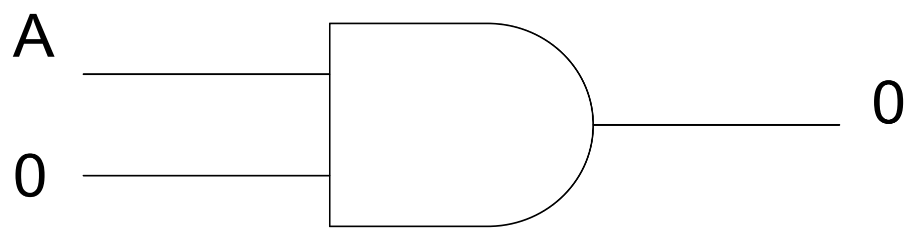
ในกรณีที่ 2 ถ้า A = 1 แล้ว และ



ทฤษฎีบูลลีน

2. $A \cdot 0 = 0$

ค่า 0 นั้นจะส่งผลให้เอาท์พุตมีค่าเป็น 0 เสมอ



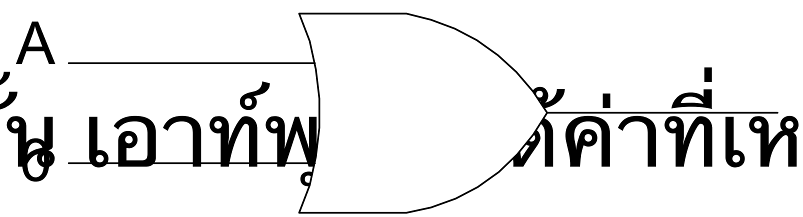
ทฤษฎีบูลลีน

3. $A + 0 = A$

ค่า 0 นั้นจะ Enable อินพุทของเกท

ในกรณีที่ 1 ถ้า A = 1 จะได้เอาท์พุทเท่ากับ 1 ด้วย

ในกรณีที่ 2 ถ้า A = 0 จะได้เอาท์พุทเท่ากับ 0 ด้วย



เพราะฉะนั้น เอาท์พุ ... ค่าที่เหมือนกับ A

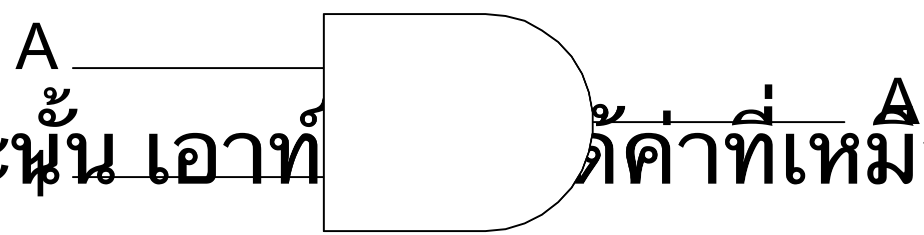
ทฤษฎีบูลลีน

4. $A \cdot 1 = A$

ค่า 1 นั้นจะ Enable อินพุทของเกท

ในกรณีที่ 1 ถ้า A = 1 จะได้เอาท์พุทเท่ากับ 1 ด้วย

ในกรณีที่ 2 ถ้า A = 0 จะได้เอาท์พุทเท่ากับ 0 ด้วย

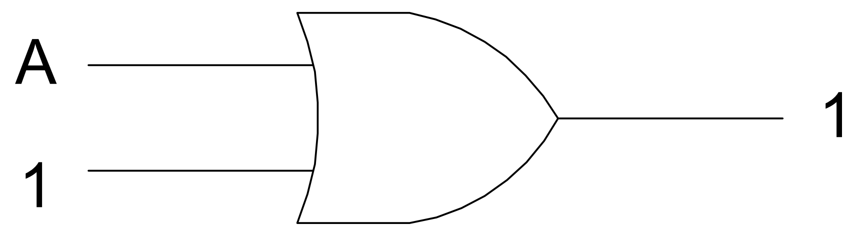


เพราะฉะนั้น เอาท์ ด้ค่าที่เหมือนกับ A

ทฤษฎีบูลลีน

5. $A + 1 = 1$

ค่า 1 นั้นจะ Inhibit เกทและ “lock up” เอาท์พุททิ้งไว้ที่ 1 เพราะฉะนั้นเอาท์พุทจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามค่า A



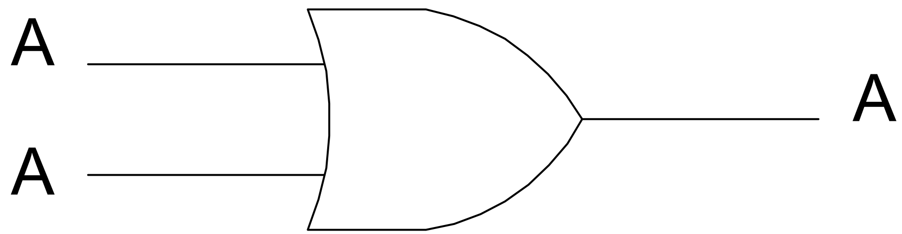
ทฤษฎีบูลลีน

6. $A + A = A$

ในกรณีที่ 1 ถ้า A = 0 แล้ว 0 + 0 = 0

ในกรณีที่ 2 ถ้า A = 1 แล้ว 1 + 1 = 1

ในแต่ละกรณีค่าเอาท์พุทจะขึ้นกับ A



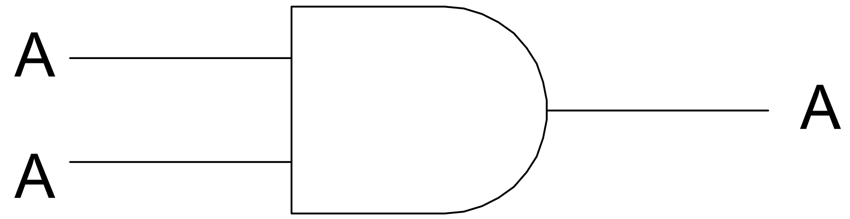
ทฤษฎีบูลลีน

7. $A \cdot A = A$

ในกรณีที่ 1 ถ้า A = 0 จะทำให้เกิดค่า 0 เป็นอินพุทเข้าแอนด์เกททั้งสองค่า แล้วทำให้ได้เอาท์พุทเท่ากับ 0

ในกรณีที่ 2 ถ้า A = 1 จะทำให้เกิดค่า 1 เป็นอินพุทเข้าแอนด์เกททั้งสองค่า แล้วทำให้ได้เอาท์พุทเท่ากับ 1

ในแต่ละกรณี ค่าเอาท์พุทจะเหมือนกับอินพุท

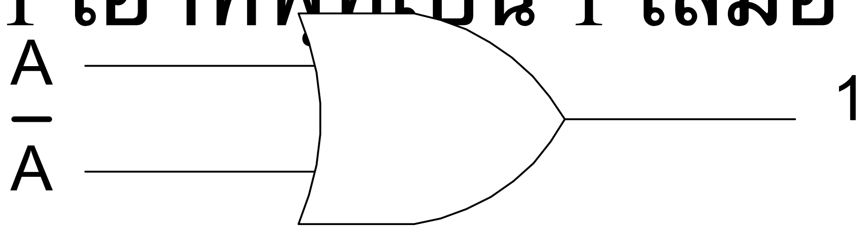


ทฤษฎีบูลลีน

8. $A + \overline{A} = 1$

กรณีที่ 1 ถ้า A = 1 แล้ว เอาท์พุทจะเท่ากับ 1 ด้วย

กรณีที่ 2 ถ้า A = 0 จะทำให้ แล้วเอาท์พุทจะเท่ากับ 1 เอาท์พุทเป็น 1 เสมอ

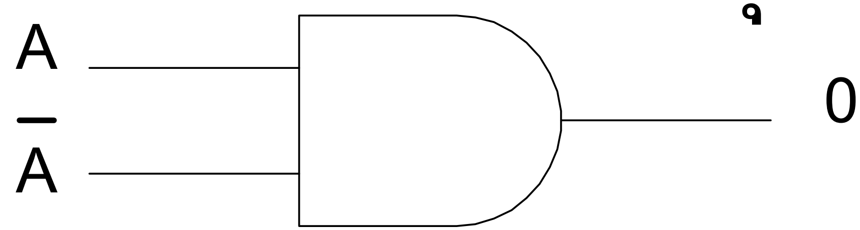


ทฤษฎีบูลลีน

9. $A \cdot \overline{A} = 0$

กรณีที่ 1 ถ้า A = 0 จะทำให้ $\overline{A} = 1$ แล้วจะได้เอาท์พุทเท่ากับ 0

กรณีที่ 2 ถ้า A = 0 แล้วจะได้เอาท์พุทเท่ากับ 0 ในทั้งสองกรณี จะได้เอาท์พุทเท่ากับ 0



ทฤษฎีบูลลีน

10. $A \cdot B + A \cdot C = A(B + C)$

จากตารางให้มีอินพุทคือ A, B และ C เมื่อหาค่าความจริงของ $A \cdot B + A \cdot C$ $A(B + C)$

จะเห็นว่าได้ค่าเอาท์พุทเท่ากับ ทุกกรณี ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $A \cdot B + A \cdot C = A(B + C)$

A	B	C	AB	AC	**AB+AC**	B+C	**A(B+C)**
0	0	0	0	0	**0**	0	**0**
0	0	1	0	0	**0**	1	**0**
0	1	0	0	0	**0**	1	**0**
0	1	1	0	0	**0**	1	**0**
1	0	0	0	0	**0**	0	**0**
1	0	1	0	1	**1**	1	**1**
1	1	0	1	0	**1**	1	**1**
1	1	1	1	1	**1**	1	**1**

ทฤษฎีบูลลีน

11. $A+\overline{A}B = A+B$

เช่นเดียวกับทฤษฎีข้อที่ 10 จากตารางความจริงจะเห็นว่า สมกาซ้ายมือจะให้ค่าเอาท์พุทเท่ากับสมการทางขวามือ ทุกกรณี

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A}\bullet B$	$A+\overline{A}\bullet B$	$A+B$
0	0	1	0	**0**	**0**
0	1	1	1	**1**	**1**
1	0	0	0	**1**	**1**
1	1	0	0	**1**	**1**

ทฤษฎีของ De'Morgan

- ในพีชคณิตบูลลีนนั้นมีทฤษฎีที่สำคัญมากอยู่ทฤษฎีหนึ่งคือ ทฤษฎีของดีมอร์แกน
- เป็นทฤษฎีที่ใช้เปลี่ยนรูปของสมการจากรูปแบบการ NAND หรือ NOR ให้เป็นรูปแบบของ AND, OR และ NOT หรือในทางตรงกันข้ามในการเปลี่ยนรูปแบบจาก AND, OR และ NOT เป็น NAND หรือ NOR ซึ่งมีประโยชน์ในกรณีที่เกตบางชนิดไม่สามารถหาได้

DeMorgan's Theory

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

ทฤษฎีของ De’Morgan

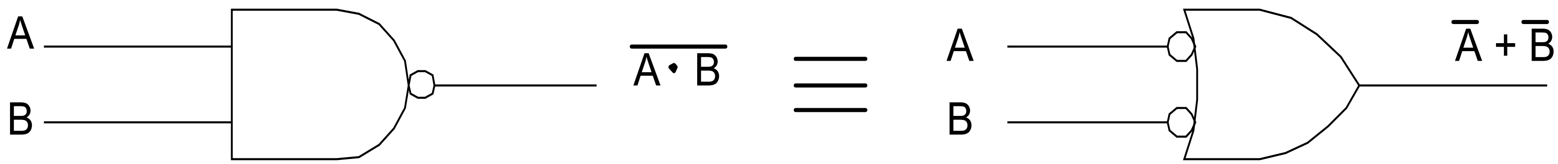
1. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

เราใช้ตารางความจริงในการแสดงการเท่ากันของค่าทางด้านซ้ายมือและค่าทางด้านขวามือ

A	B	$A \bullet B$	$\overline{A \bullet B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

ทฤษฎีของ De'Morgan

จากทฤษฎีนี้ แสดงให้เห็นว่าผลจากการ NAND กันของอินพุต 2 ตัว จะมีค่าเช่นเดียวกับการอินเวอร์ตค่าอินพุตทั้งสองแล้วนำมา OR กัน ดังรูป



ทฤษฎีของ DeMorgan

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ Computer Engineering

2. $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

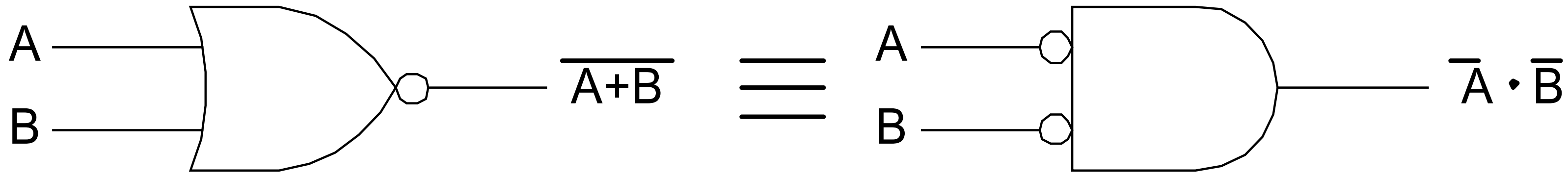
เราใช้ตารางความจริงในการแสดงการเท่ากันของค่าทางด้านซ้ายมือและค่าทางด้านขวามือ

A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \bullet \overline{B}$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

ทฤษฎีบทของ DeMorgan

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ Computer Engineering

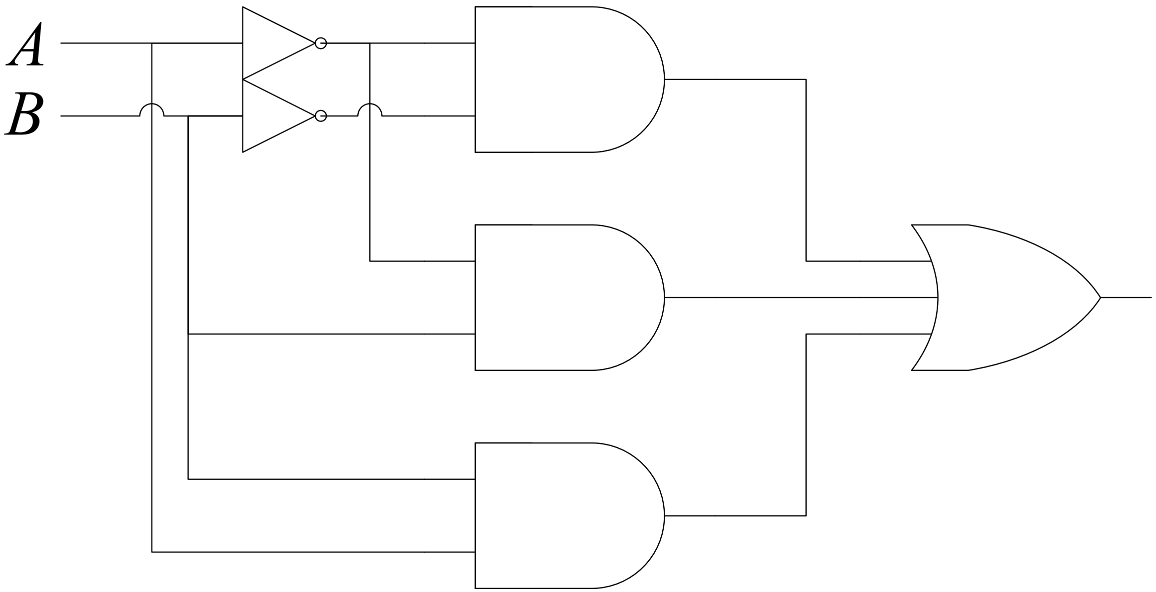
ทฤษฎีนี้แสดงให้เห็นว่าผลจากการ NOR กันของอินพุต 2 ตัว จะมีค่าเช่นเดียวกับการอินเวอร์ตค่าอินพุตทั้งสองแล้วนำมาAND กัน ดังรูป



การลดรูปสมการ

จากทฤษฎีบูลลีนที่กล่าวมาแล้ว เราสามารถนำมาใช้ในสมการ
บูลลีน โดยเฉพาะในสมการที่เขียนจากตารางความจริงเพื่อ
ปรับเปลี่ยนนิพจน์ในสมการที่สามารถทำให้สมการสั้นลง
ทำให้วงจรที่จะสร้างจากสมการใช้เกตน้อยลง หรือเพื่อ
เป็นการปรับเปลี่ยนรูปแบบของสมการได้

ตัวอย่างที่ 1 การลดรูปสมการ

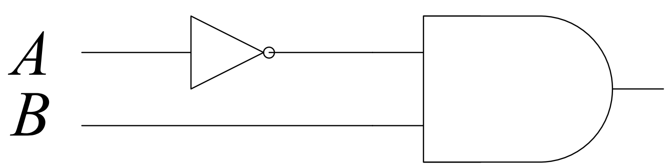


$\overline{A}(\cancel{\overline{B}+B}) + AB$

$$\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B + AB$$

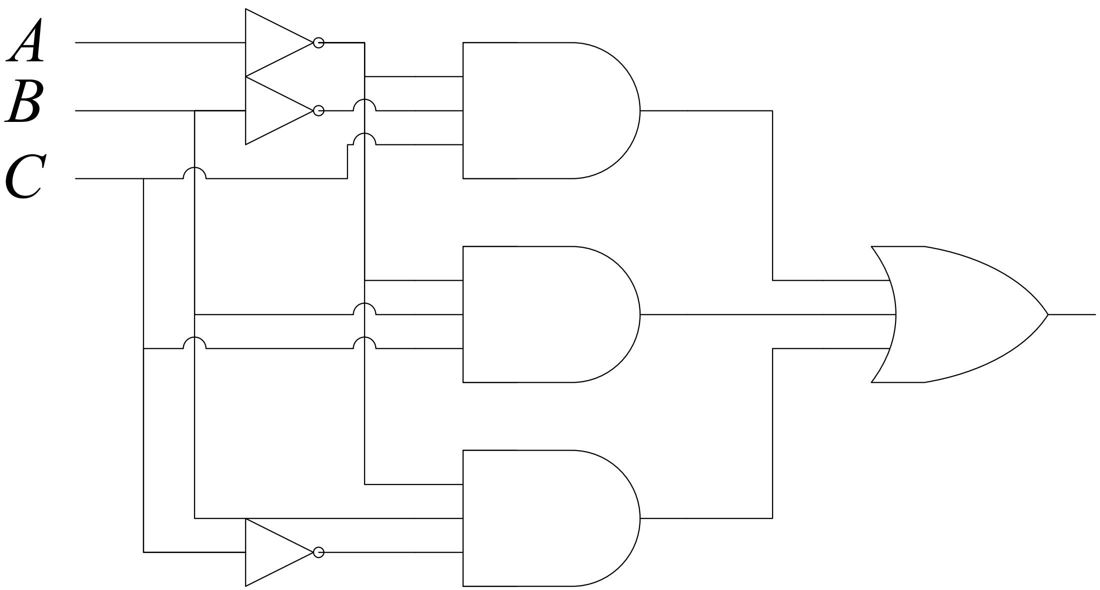
$\overline{A} + \overline{B} + \overline{A}B + AB$

B



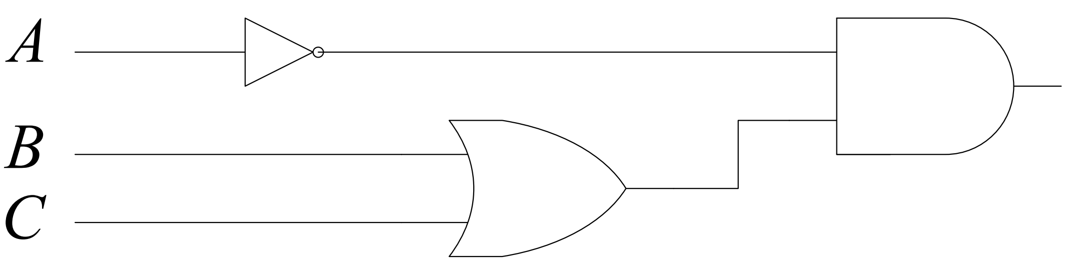
$$\overline{A} + B$$

ตัวอย่างที่ 2 การลดรูปสมการ



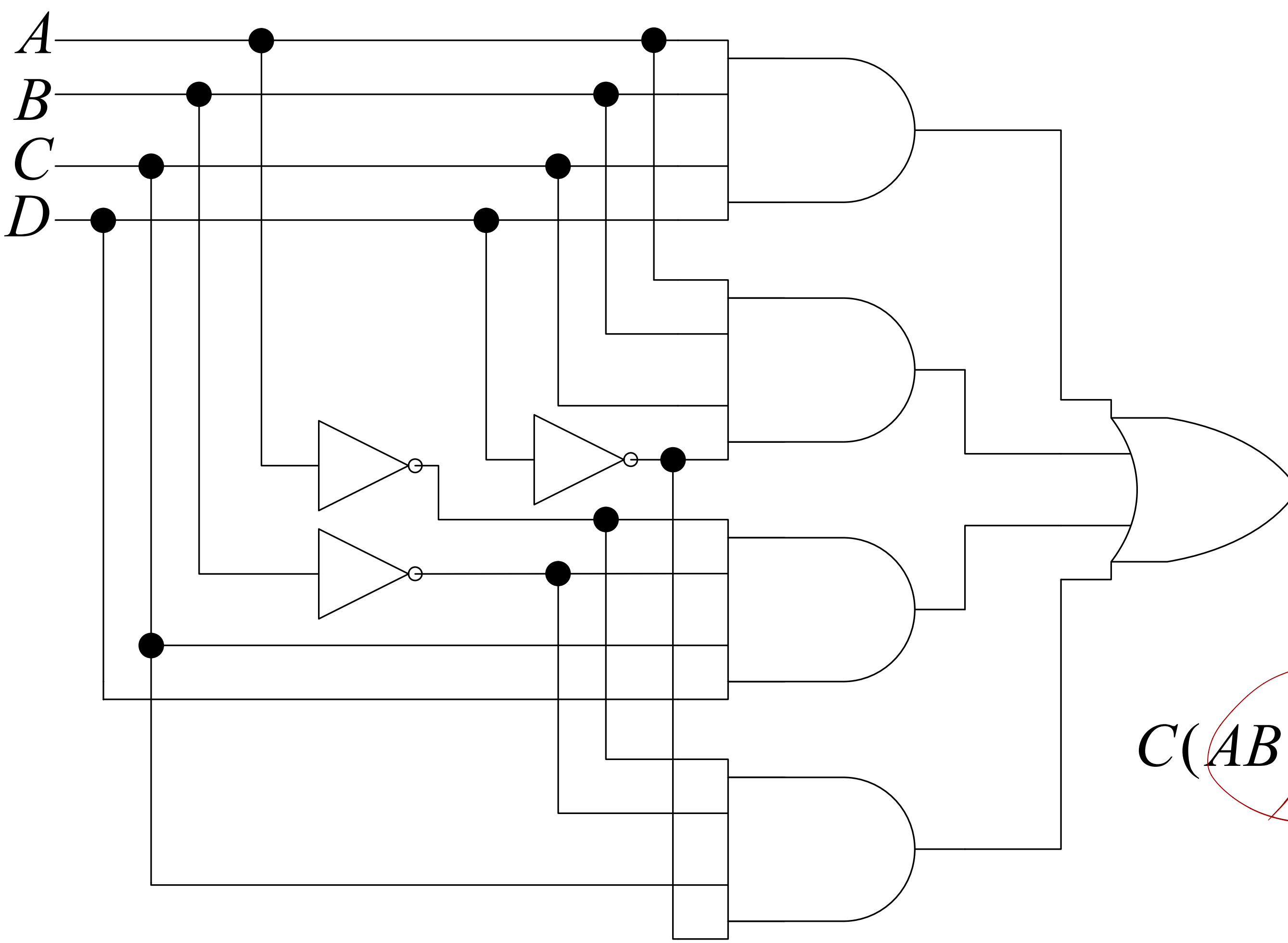
$\overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C}$

$\overline{B}C + BC + B\overline{C}$



$\overline{A}(B + C)$

ตัวอย่างที่ 3 การลดรูปสมการ



$$AB\cancel{C}D + AB\cancel{C}\overline{D}$$
$$+\overline{A}\,\overline{B}\cancel{C}D + \overline{A}\,\overline{B}\cancel{C}\,\overline{D}$$

$$C(AB + \overline{A}\,\overline{B}) = C\left(\overline{A \oplus B}\right)$$

ตัวอย่างที่ 1 การออกแบบวงจร [1]

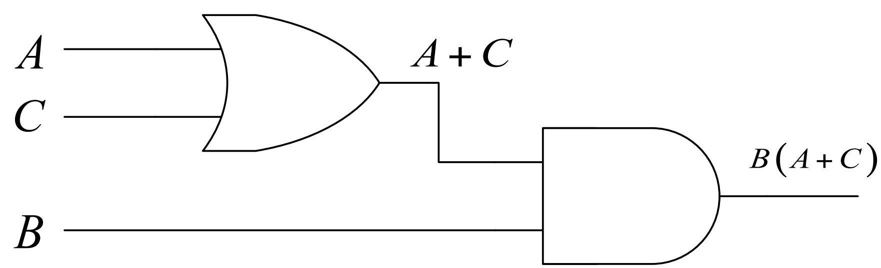
Input			Output	
C	B	A	Y	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{C}BA$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$CB\overline{A}$
1	1	1	1	CBA

Sum of Product

$$Y = \overline{C}BA + CB\overline{A} + CBA$$

ตัวอย่างที่ 1 การออกแบบวงจร [2]

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{C}BA + CB\overline{A} + CBA \\
&= \overline{C}BA + CB\left(\overline{A} + A\right) \\
&= \overline{C}BA + CB \\
&= B\left(\overline{C}A + C\right) \\
&= B\left(A + C\right)
\end{aligned}
$$



ตัวอย่างที่ 2 การออกแบบวงจร [2]

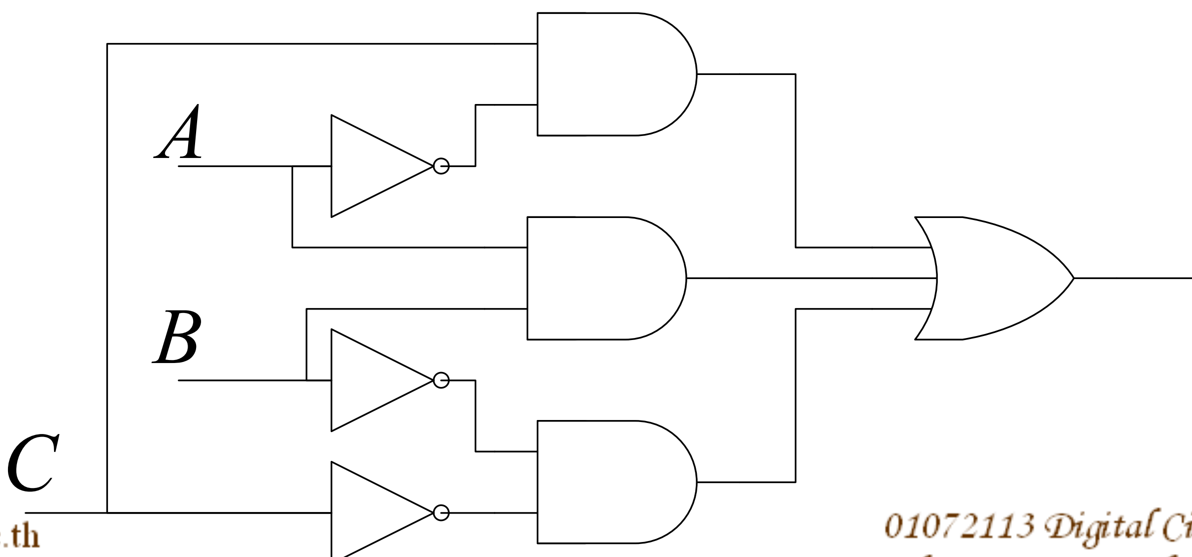
Input			Output	
C	B	A	Y	
0	0	0	1	$\overline{C}\ \overline{B}\ \overline{A}$
0	0	1	1	$\overline{C}\ \overline{B}\ A$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{C}\ B\ A$
1	0	0	1	$C\ \overline{B}\ \overline{A}$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$C\ B\ \overline{A}$
1	1	1	1	$C\ B\ A$

ตัวอย่างที่ 2 การออกแบบวงจร [2]

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,C + A\,B\,C$$

$$= \overline{B}\,\overline{C}\left(A + \overline{A}\right) + A\,B\left(C + \overline{C}\right) + \overline{A}\,C\left(B + \overline{B}\right)$$

$$= \overline{B}\,\overline{C} + A\,B + \overline{A}\,C$$



สรุปการใช้พีชคณิตบูลลีน

- จากการใช้ทฤษฎีบูลลีนในการลดรูปที่ผ่านมาจะพบว่า ผู้ที่ทำการลดรูปจะต้องจดจำทฤษฎีต่าง ๆ ให้ได้ก่อน จากนั้นจึงมองการใช้งานว่า จะใช้ทฤษฎีใดกับเทอมใดในสมการเพื่อให้เกิดการลดรูปหรือเปลี่ยนรูปไปยังรูปแบบที่ต้องการ หากผู้ใช้จำทฤษฎีไม่ได้ก็ไม่สามารถใช้งานได้ หรือหากจำได้แต่มองไม่เห็นแนวทางในการลดรูปก็ไม่สามารถลดรูปได้ นอกจากนั้นในบางครั้งการนำทฤษฎีไปใช้กลับทำให้สมการยาวขึ้นกว่าเดิม และผู้ใช้ต้องหาวิธีการทำให้สั้นลงใหม่

สรุปการใช้พีชคณิตบูลลีน

- เราอาจจะสรุปได้ว่าการใช้พีชคณิตนี้จะขึ้นอยู่กับการจดจำทฤษฎีให้ได้ทั้งหมด และในการใช้งานนั้นขึ้นกับประสบการณ์ของผู้ที่ทำการลดรูป หากเคยใช้มามากก็จะมีประสบการณ์มาก มองหาแนวทางการใช้ทฤษฎีได้ง่ายและรวดเร็ว
- วิธีการในลักษณะนี้ทำให้ผลการลดรูปยังไม่สามารถทำได้ง่ายและรวดเร็ว

วิธีการของ Karnaugh Map

แผนภาพคาร์นอจ์ เป็นแผนภาพที่เขียนจากตารางความจริง (หรือจากสมการก็ได้) โดยการนำตารางความจริงมาเขียนในรูปแบบใหม่ โดยการจัดวางให้ความสัมพันธ์ระหว่างนิพจน์ที่อยู่ข้างเคียงกัน (ทางตรรก) ทั้งในแนวนอนและแนวตั้งสามารถลดรูปได้ แผนภาพนี้มีขนาดตามขนาดของตารางความจริง (จำนวน input)

Karnaugh Map

แผนภาพคาร์นอจ์มีอยู่หลายขนาดขึ้นอยู่กับตัวแปรในสมการ ซึ่งขนาดของแผนภาพคาร์นอจ์มีความสัมพันธ์กับตัวแปร คือ ขนาดของแผนภาพคาร์นอจ์เท่ากับ 2^n โดยที่ n คือจำนวนของตัวแปรในสมการและ n มีค่ามากกว่า 1 ดังนั้น

ถ้ามีตัวแปรอยู่ 2 ขนาดของแผนภาพก็คือ $2^2 = 4$ ช่องนั่นเอง

ถ้ามีตัวแปรอยู่ 3 ขนาดของแผนภาพก็คือ $2^3 = 8$ ช่องนั่นเอง

Karnaugh Map

	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	$\overline{B}\,\overline{A}$	$\overline{B}A$
B	$B\overline{A}$	BA

	$\overline{B}\,\overline{A}$	$\overline{B}A$	BA	$B\overline{A}$
$\overline{C}$	$\overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A}$	$\overline{C}\,\overline{B}A$	$\overline{C}BA$	$\overline{C}B\overline{A}$
C	$C\overline{B}\,\overline{A}$	$C\overline{B}A$	CBA	$CB\overline{A}$

	$\overline{B}\,\overline{A}$	$\overline{B}A$	BA	$B\overline{A}$
$\overline{D}\,\overline{C}$	$\overline{D}\,\overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A}$	$\overline{D}\,\overline{C}\,\overline{B}A$	$\overline{D}\,\overline{C}BA$	$\overline{D}\,\overline{C}B\overline{A}$
$\overline{D}C$	$\overline{D}C\overline{B}\,\overline{A}$	$\overline{D}C\overline{B}A$	$\overline{D}CBA$	$\overline{D}CB\overline{A}$
DC	$DC\overline{B}\,\overline{A}$	$DC\overline{B}A$	$DCBA$	$DCB\overline{A}$
$D\overline{C}$	$D\overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A}$	$D\overline{C}\,\overline{B}A$	$D\overline{C}BA$	$D\overline{C}B\overline{A}$

ตัวอย่างที่ 1 (ต่อ)

Input			Output
C	B	A	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

C \ BA	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	1

$$Y = B + AC$$

ตัวอย่างที่ 2 การใช้ Karnaugh Map

Input			Output
C	B	A	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

C \ BA	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

$C\overline{AB} + \overline{C}AB + CB\overline{A} + ABC$

$$Y = AB + \overline{A}C$$

$\overline{C}AB$

CAB

$= AB +$

ตัวอย่างที่ 3 การใช้ Karnaugh Map

Input				Output
D	C	B	A	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

ตัวซ้ำ

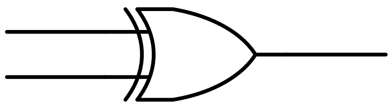
$$Y = A\,B + \bar{A}\,\bar{C} + A\,C\,\bar{D}$$

XOR & XNOR Gates

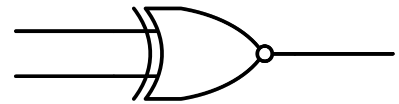
$$Y1 = A \oplus B$$
$$= A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$Y2 = \overline{A \oplus B}$$
$$= \overline{A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B}$$
$$= \overline{(A \cdot \bar{B})} \cdot \overline{(\bar{A} \cdot B)}$$
$$= (\bar{A} + B) \cdot (A + \bar{B})$$
$$= (\bar{A} + B) \cdot A + (\bar{A} + B) \cdot \bar{B}$$
$$= \cancel{\bar{A}A} + AB + \bar{A}\bar{B} + \cancel{B\bar{B}}$$
$$= \bar{A}\bar{B} + AB$$

XOR & XNOR Gates



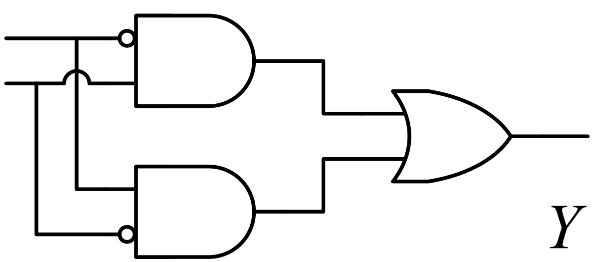
$Y = A \oplus B$



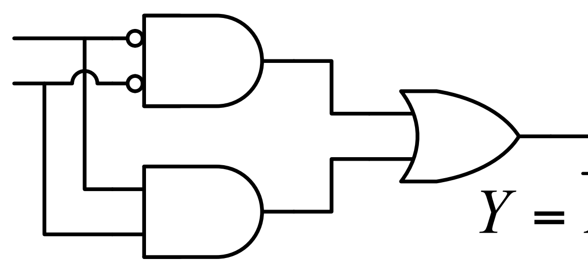
$Y = \overline{A \oplus B}$

Input		Output	
A	B	Y	
0	0	0	
0	1	1	$\overline{A} \cdot B$
1	0	1	$A \cdot \overline{B}$
1	1	0	

Input		Output	
A	B	Y	
0	0	1	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$A \cdot B$

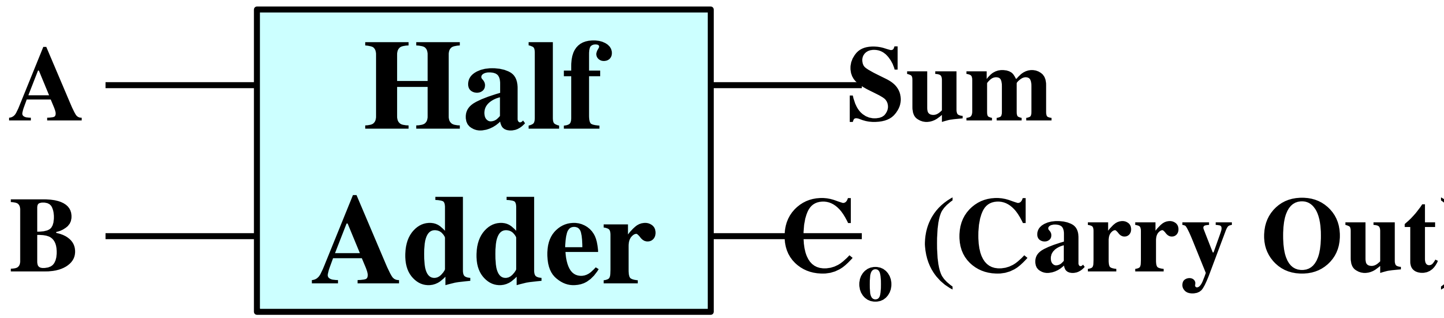


$Y = \overline{A}B + A\overline{B}$



$Y = \overline{A}\ \overline{B} + A\ B$

การสร้างวงจร Half-Adder [1]

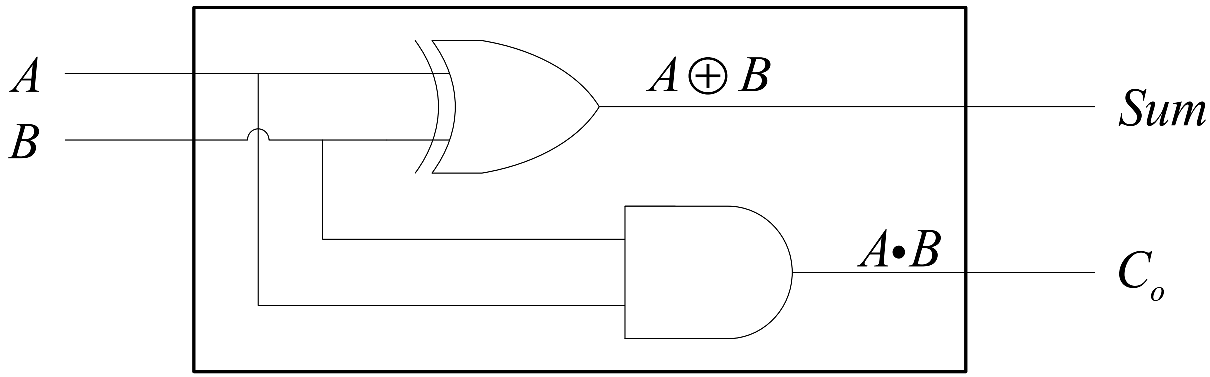


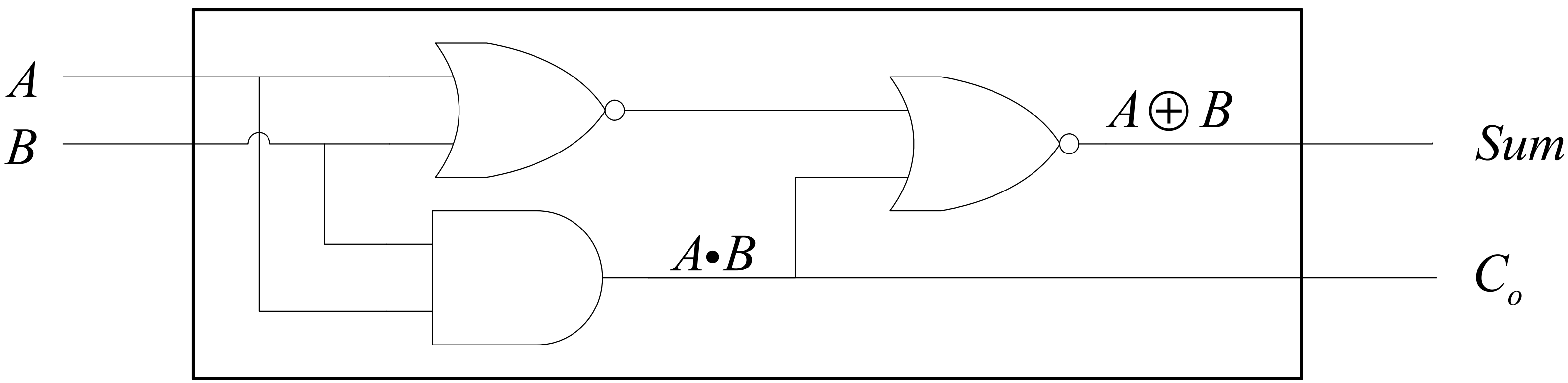
Input		Output	
A	B	C_O	Sum
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$Sum = A \oplus B$$
$$= \overline{\overline{A \oplus B}}$$
$$= \overline{\bar{A}\bar{B} + AB}$$
$$= \overline{\overline{\overline{\bar{A}\bar{B}}} + AB}$$
$$= \overline{\overline{A + B} + AB}$$

$$C_o = A \bullet B$$

การสร้างวงจร Half-Adder [2]





การสร้างวงจร Full-Adder [1]

Input			Output	
C_{in}	A	B	C_o	Sum
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$$
\begin{array}{rr}
 & C_{in} \\
 & A \\
+ & B \\
\hline
C_o & Sum
\end{array}
$$

การสร้างวงจร Full-Adder [2]

$$Sum = A\overline{B}\,\overline{C_{in}} + \overline{A}B\overline{C_{in}} + \overline{A}\,\overline{B}C_{in} + ABC_{in}$$

$$= \left(A\overline{B} + \overline{A}B\right)\overline{C_{in}} + \left(\overline{A}\,\overline{B} + AB\right)C_{in}$$

$$= \left(A \oplus B\right)\overline{C_{in}} + \left(\overline{A \oplus B}\right)C_{in}$$

$$= (A \oplus B) \oplus C_{in}$$

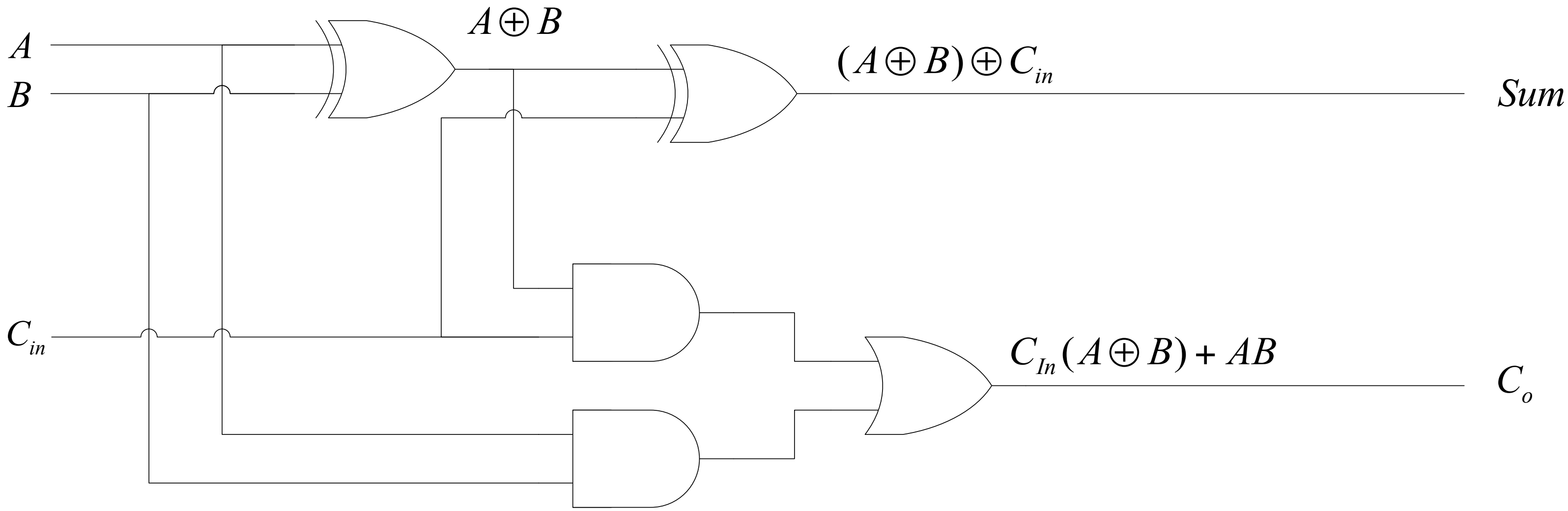
$$C_O = \overline{A}BC_{In} + A\overline{B}C_{In} + AB\overline{C_{In}} + ABC_{In}$$

$$= C_{In}(\overline{A}B + A\overline{B}) + AB(\overline{C_{In}} + C_{In})$$

$$= C_{In}(A \oplus B) + AB$$

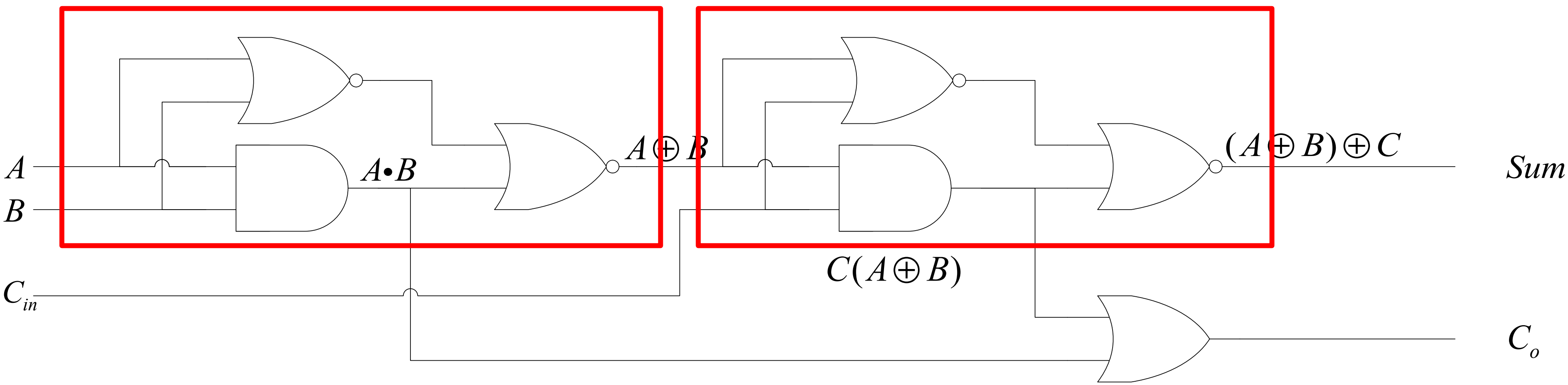
การสร้างวงจร Full-Adder [3]

$$Sum = (A \oplus B) \oplus C_{in} \qquad C_O = C_{In}(A \oplus B) + AB$$

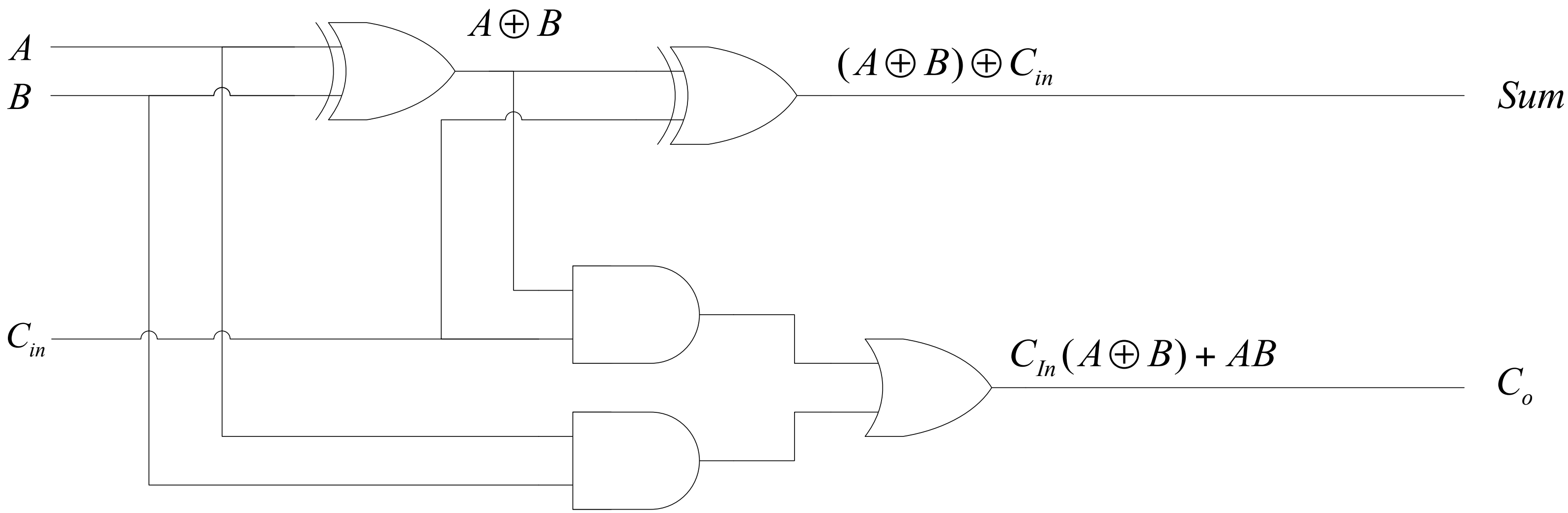


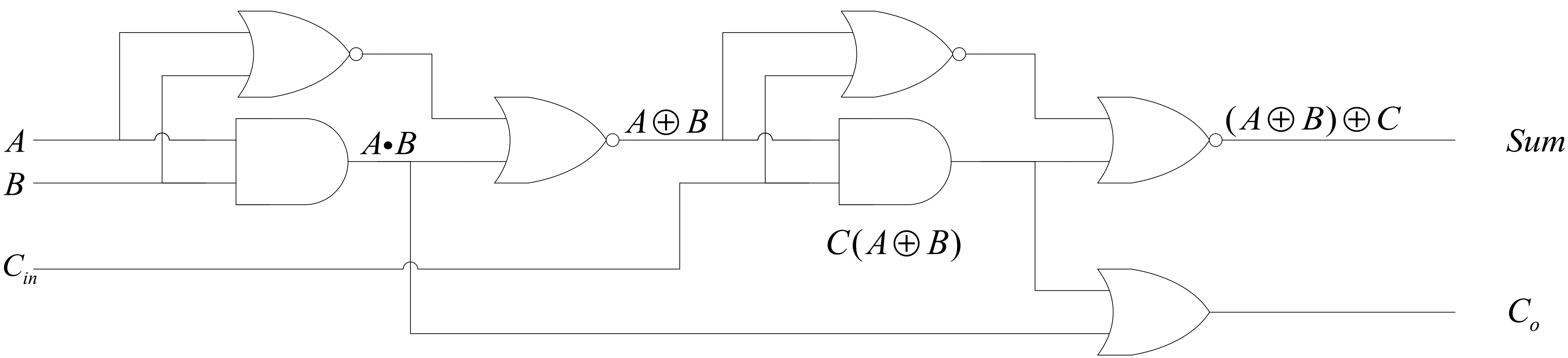
การสร้างวงจร Full-Adder [4]

$$Sum = (A \oplus B) \oplus C_{in} \qquad C_O = C_{In}(A \oplus B) + AB$$



การสร้างวงจร Full-Adder [5]





วิธีการของ Quine McCluskey

- เราได้เรียนถึงวิธีการลดรูปสมการโดยใช้พีชคณิตบูลลีน และวิธีการของแผนภาพคาร์นอจ์มาแล้ว จากวิธีการทั้งสองจะพบว่า หากสมการมีตัวแปรจำนวนมาก การลดรูปจะยุ่งยากและซับซ้อนขึ้น ทำให้ยากต่อการลดรูป และในปัจจุบันนี้เราสามารถใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการลดรูปสมการโดยการเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จึงได้มีผู้คิดวิธีการลดรูปในอีกลักษณะหนึ่งเรียกว่า วิธีการ Prime Implicant แต่นิยมเรียกตามชื่อเจ้าของวิธีการว่า Quine McCluskey

วิธีการของ Quine McCluskey

- หลักการของวิธีการนี้คือ การเปรียบเทียบระหว่างเทอมของสมการไปเรื่อย ๆ จนพบคู่ที่ลดรูปกันแล้วนำมาลดรูป และนำผลที่ลดรูปได้มาเปรียบเทียบกันอีก ทำไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งลดรูปไม่ได้อีกแล้ว

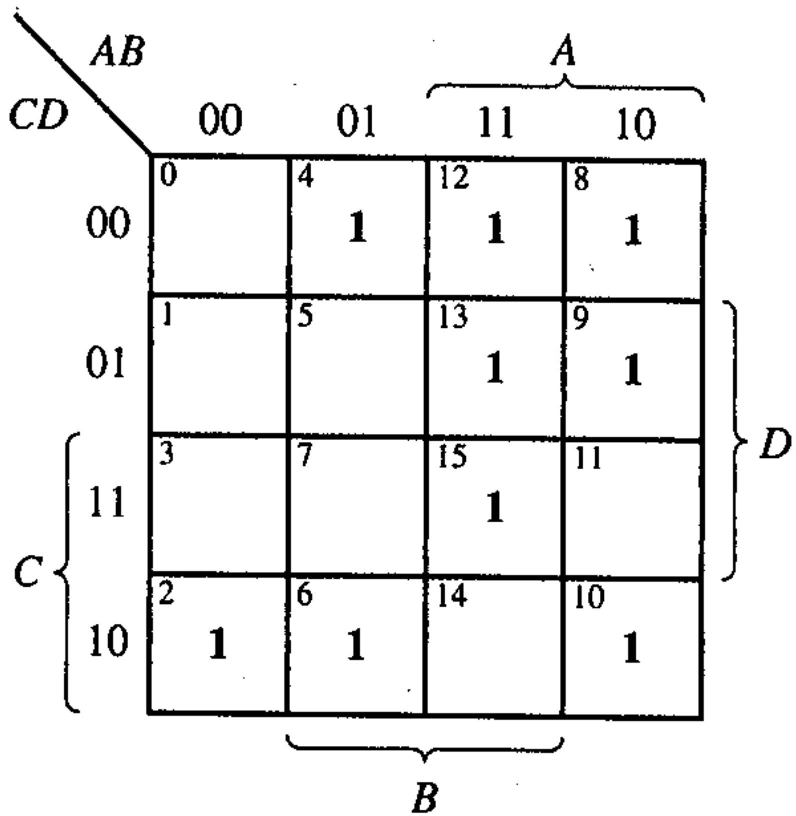
- ในการเปรียบเทียบนั้น หากเป็นการเปรียบเทียบโดยตรงแล้วจะพบว่ามีจำนวนเทอมที่จะเปรียบเทียบกันจำนวนมาก จึงต้องหาวิธีการจำแนกเทอมที่มีอยู่ออกเป็นกลุ่ม

วิธีการของ Quine McCluskey

- การจัดกลุ่มของเทอมในสมการ
  1. กลุ่มที่สมาชิกในกลุ่มไม่ต้องนำมาเปรียบเทียบกัน
  2. กลุ่มที่สมาชิกในกลุ่มต้องนำมาเปรียบเทียบกัน
- ในการจัดกลุ่มนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการลดรูป เราจะใช้เลขค่า 0 และ 1 เขียนแทนค่าในเทอมของสมการ โดยใช้ค่า 0 แทนค่าตัวแปรที่มีค่า invert และ1 แทนค่าตัวแปรที่เป็นค่าปกติ และใช้ตำแหน่งของค่าที่เขียนแสดงถึงชื่อตัวแปร

วิธีการของ Quine McCluskey

- ตัวอย่าง จาก Karnaugh Map ให้ลอรูปโดยวิธีการของ Q



วิธีการของ Quine McCluskey

Minterms	$ABCD$	
2	0010	
4	0100	Group 1 (a single 1)
8	1000	
6	0110	
9	1001	Group 2 (two 1's)
10	1010	
12	1100	
13	1101	Group 3 (three 1's)
15	1111	Group 4 (four 1's)

วิธีการของ Quine McCluskey

List 1			List 2			List 3		
Minterm	*ABCD*		Minterms	*ABCD*		Minterms	*ABCD*	
2	0010	√	2, 6	0-10	PI_2	8, 9, 12, 13	1-0-	PI_1
4	0100	√	2, 10	-010	PI_3			
8	1000	√	4, 6	01-0	PI_4			
6	0110	√	4, 12	-100	PI_5			
9	1001	√	8, 9	100-	√			
10	1010	√	8, 10	10-0	PI_6			
12	1100	√	8, 12	1-00	√			
13	1101	√	9, 13	1-01	√			
15	1111	√	12, 13	110-	√			
			13, 15	11-1	PI_7			