$E[Y] = \sum y\, p(x,y)$ $Var[X] = E[X^2]-\mu^2 = \sum (x_i-\mu)^2 \cdot p(x)$; $\mu = E(X)$

JOINT PROBABILITY DISTRIBUTION

discrete: $p_{X,Y}(x,y) = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = P(X=x, Y=y)$ $p_{X,Y}(x,y)\ge 0$ $\sum_{\forall(x,y)} p(x,y)=1$

y \ x	0	1	2	3	marginal y
0	0/30	1/30	2/30	3/30	6/30
1	1/30	2/30	3/30	4/30	9/30
2	2/30	3/30	4/30	5/30	14/30
marginal x	3/30	6/30	9/30	12/30	

MARGINAL PMF (discrete)
= pmf of x alone, pmf of y alone ใช้หา E[X] or E[Y]

$p_X(x) = \sum_{\forall y} p_{x,y}(x,y)$ $p_Y(y) = \sum_{\forall x} p_{x,y}(x,y)$ * กำกับช่วง x = , y =

JOINT PDF (continu.)
$f_{XY}(x,y)\ge 0$, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = P(\{x<X<x+dx\}\cap\{y<Y<y+dy\})$

$P((X,Y)\in A) = \iint_{(x,y)\in A} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$ → integrate แยกช่วง ดูช่วงดีๆ

JOINT CDF (continu.)
$F_{XY}(x,y) = P(X\le x, Y\le y)$

MARGINAL PDF (continu.)
$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$; กำกับช่วงเสมอ!

CONDITIONAL PDF (GIVEN)
$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$; $f_Y(y)>0$

$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$

INDEPENDENCE
X and Y are independent if
→ $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ discrete
→ $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ continu

EXPECTED VALUE
for $W = g(X,Y)$ → integrate $\iint$

$E[W] = E[g(X,Y)] = \sum_x\sum_y g(x,y)p_{XY}(x,y)$ discrete

$E[W] = \iint_{\forall(x,y)} g(x,y)f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$ continu.

COVARIANCE
$Cov(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E[XY]-E[X]E[Y]$

$= \begin{cases}\sum_x\sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y)p_{x,y}(x,y) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y)f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy\end{cases}$

σ_{XY} ⊕ → $X-\mu_X$ $Y-\mu_Y$ เป็น + or − ทั้งคู่
⊖ → ตรงข้าม
= 0 → uncorrelated แต่ไม่จำเป็นต้อง independent

$Cov(X,X) = Var(X)$ | $Cov(cX,Y) = c\,Cov(X,Y)$
$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$ | $Cov(X,Y+Z) = Cov(X,Y)+Cov(X,Z)$

$Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

X,Y independent $E[XY]=E[X]E[Y]$ ∴ $\sigma_{XY}=0$

$Var[\sum X_i] = \sum\sum cov(X_i,X_j) = \sum Var(X_i) + 2\sum\sum_{j>i} Cov(X_i,X_j)$

X_i independent → $Cov(X_i,X_j)=0$ $i\ne j$ → $Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i)$

CORRELATION COEFFICIENT / normalized covariance
$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$; Corr(x,y)

$-1\le Corr(X,Y)\le 1$
if X and Y independent → $\rho = 0$
$\rho = 1$ or -1 if $Y = aX+b$; $a\ne 0$

$Corr(aX+b, cY+d) = Corr(X,Y)$

a value of ρ near 1 does not necessarily imply that if X increase Y will increase แต่หมายถึง large X value are associated w/ large Y values

SAMPLING DISTRIBUTION ← $\bar{x}$, $\hat{p}$, s^2

normal distribution − μ, σ
binomial distribution − n trials

↳ STATISTIC < Mathematical Cal ; Simulation: จำลองสถานการณ์ สุ่มซ้ำ

$\hat{p}$: porpotion of those who accept

Simple random sampling − สมาชิกทุกคนใน pop มีโอกาสถูกเลือกเท่ากัน

CENTRAL LIMIT THEOREM (CLT)
ยิ่ง n เยอะ ยิ่ง accurate

when n is large, pop with finite μ & σ
↳ $\bar{x}$ ~ normal distri. mean μ s.d. $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\bar{X}\sim N(\mu_{\bar{x}}, \sigma^2_{\bar{x}}) \sim N(\bar{x}, \sigma^2/n)$

original ~ normal | original ไม่ | original ~ symmetric

DISTRIBUTION OF SAMPLE MEAN
สุ่มมาเช็คว่า original ~ normal มั้ย → ใช้ prob. plot

$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ → เปิดตาราง Z
หา Prob

STANDARD ERROR (SE) = s.d ของ $\bar{X}$

DISTRIBUTION OF SAMPLE PROPORTION
n is large σ^2

CLT : binomial rv $X\sim$ normal(np, npq) (mean, variance) | $\hat{p}\sim$ normal$(p, \frac{pq}{n})$

$\boxed{\hat{p} = \frac{X}{n}}$ if n is large → p is not close to zero or one ; np & $nq \ge 5$

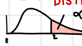
$\mu_{\hat{p}} = E[\hat{p}] = E[\frac{X}{n}] = \frac{1}{n}E(X)$

$\sigma^2_{\hat{p}} = Var[\hat{p}] = \frac{1}{n^2}\cdot npq = \frac{pq}{n}$

หา prob $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ → เปิดตาราง Z

DISTRIBUTION OF SAMPLE VARIANCE
$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}$; S^2 = variance of random sample ; σ^2 = variance of normal pop. CHI-SQUARE DISTRIBUTION with df = n−1

ตาราง χ^2 ; χ^2_α = เหมือน Z ; α = area = prob.



DISTRIBUTION OF LINEAR COMBI
$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ linear combi of X_i s

$E[Y] = a_1E[X_1]+a_2E[X_2]+\dots+a_nE[X_n]$ X_i s independent หรือไม่ก็ตาม

ดูให้ดีว่าเป็น σ ของ $\bar{x}$ รึยัง ถ้าเป็นแล้วก็ไม่ต้องหารด้วย $\sqrt{n}$

ถ้า X_i independent w/ Var $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$

$Var[Y] = a_1^2V(X_1)+a_2^2V(X_2)+\dots+a_n^2V(X_n) = a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2+\dots+a_n^2\sigma_n^2$

In general $Var(Y) = \sum\sum(a_ia_j cov(X_i,X_j))$

$\{X_1-X_2\}$ $n=2$, $a_1=1$, $a_2=-1$ ⇒ $Y = X_1-X_2$ mean difference mean = $\mu_1-\mu_2$

If X_1 & X_2 independent $Var(Y) = a_1^2V(X_1)+a_2^2V(X_2) = V(X_1)+V(X_2)$

DISTRIBUTION OF $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$
$\bar{X}_1-\bar{X}_2 = \mu_1-\mu_2$ s.d. of $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ = SE = $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

if n is large $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ ~ normal SE = $\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$

$Z_{อะไร} = \frac{อะไร - \mu_{อะไร}}{\sigma_{อะไร}}$

POINT ESTIMATION
point estimator of p : $\hat{p}$ =

PARAMETER	ESTIMATOR
θ	$\hat{\theta}$
μ	$\bar{x}$
p	$\hat{p}$
σ^2	$\hat{\sigma}^2$

UNBIASED ESTIMATOR : ถ้าคลาดเคลื่อนก็คลาดพอๆกัน ถ้าค่า expected ตรงกับค่า Parameter = ดี
↳ ถ้าไม่แสดงว่า estimate ผิด $\{E[\hat{\theta}] = \theta\}$

• $E[\hat{\theta}] = E[\bar{X}] = E[\frac{\sum X_i}{n}] = \frac{1}{n}E(\sum X_i) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\dots+E(X_n)) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$

$\bar{X}_{maxmin} = \frac{X_{max}+X_{min}}{2}$ ก็เป็น unbiased

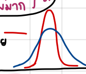
• $E[\hat{\theta}] = E[\hat{p}] = E(\frac{X}{n}) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{np}{n} = p$

$S^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n})$ $Var[Y] = E[Y^2]-(E(Y))^2$

• $E[\hat{\theta}] = E[S^2] = \frac{1}{n-1}E(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n})$ กระจายตัวน้อย ดู n มากกว่า → สุ่มมาก } ดี

$= \frac{1}{n-1}(n\sigma^2-\sigma^2) = \sigma^2$

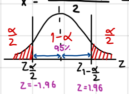
Efficiency
เอาอันที่ variance น้อยกว่า (standard error น้อยกว่า) สีแดงดีกว่า var น้อย



$\bar{x} = \sum\frac{x}{n}$ → $se(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$ ถ้า margin เปลี่ยน เปลี่ยน n ไม่ใช่ s

$\hat{p}$ → $se(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$\tilde{x} = \frac{x_{max}+x_{min}}{2}$ → $se(\tilde{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$



Margin of error = ± $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ × se = 1.96 se 95%
s.d. of parameter = 1.96 se
se estimate sd

	Tail area	$Z_{1-\alpha/2}$	
90%	0.05	1.645	two tailed
95%	0.025	1.96	
99%	0.005	2.58	
90%	0.1	1.282	one tailed
99%	0.01	2.326	

INTERVAL ESTIMATION → หา n

confidence coefficient = 1−α < 0.9, 0.95, 0.99

confidence interval
$P(-1.96 < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.96) = 0.95$ ⇨ $P(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$ margin error

100(1−α)% confident interval for mean μ → $\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}$

100(1−α)% confident interval for proportion p → $\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

confidence interval for σ^2: $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2}$

one-sided confidence bounds
LCB : estimator + Z_α · SE
UCB : estimator − Z_α · SE
Z_α เปลี่ยน 1−α } ของ Z & t

Choose Sample size
- sampling plan / experimental design
- sample size n
- margin of error

1. find margin of error, B
2. calculate n from $Z_{\frac{\alpha}{2}}SE \le B$
3. $\sigma \approx \frac{range}{4}$
4. $p = 0.5$

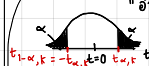
INTERVAL ON NORMAL POP DIS.
(I) normal pop + small n + known σ
$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

(II) Large sample (n>30) unknown or known σ

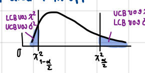
$t = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ is not normal* in case (III) unknown σ rv $X\sim N$, $\bar{X}\sim \cancel{N}$ ~ t

STUDENT'S t DISTRIBUTION w/ df = n−1   t c.d.f กำกับ df. เสมอ!

"อ้วนเตี้ย" กว่า Z
รูปร่างขึ้นกับ n และ df
ถ้า n มาก กราฟ สูงขึ้น → เข้าใกล้ Z

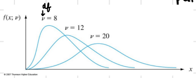


	Twosided	UCB
100(1−α)% confidence interval for mean μ (small n)	$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$ where $t_{\frac{\alpha}{2}}$ is t that cut off area $\frac{\alpha}{2}$	$\bar{x} + t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$ where t_α is t that cut off area α in upper tail



SAMPLING DISTRIBUTION OF SAMPLE VARIANCE
$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}$

pdf of χ^2 : $f(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}x^{(v/2)-1}e^{-x/2}$; $x>0$



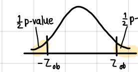
100(1−α) confidence interval for σ^2: $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}),n-1}}$
LCB UCB

HYPOTHESIS TEST

-3σ 3σ critical value เทียบค่า z
p-value เทียบพ.ท. ของ $\bar{x}$ กับ α (พ.ท. reject)

1. $H_0: \mu = \mu_0$
2. $H_a: \mu \ne \mu_0$
3. $\bar{x}$, p
4. rejection region Reject H_0 if $Z_{ob} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ or $Z_{ob} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
5. conclusion

α → significant level
1−α → confident level



(I) normal pop w/ known σ
(II) Large sample (known or unknown σ) $s \approx \sigma$

$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \approx \frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$

(III) normal pop w/ unknown σ → t-dis

P-VALUE
ความน่าจะเป็นที่ $\bar{X}$ ที่สุ่มมาจาก sample จะเท่ากับ $\bar{X}$ เมื่อ H_0 is true
p-value มาก → H_0 มีโอกาสเป็นจริงสูง

p-value < α : reject H_0
≥ α : not reject H_0

p-value : $P(\bar{X} < \bar{X}_{ที่คำนวณ}) = P(Z > Z_{ob}) + P(Z < -Z_{ob})$

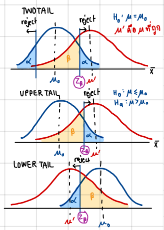
Test statistic > critical value
↳ p-value < α : reject H_0
Test statistic ≤ critical value
↳ p-value ≥ α : not reject H_0

TWO TYPES OF ERRORS
α = P(Type I error) = P(reject H_0 when H_0 is true)

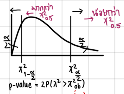
β = P(Type II error) = P(accept H_0 when H_0 is false)

Actual Fact / Your Decision	H_0 true (Accept H_0)	H_0 false (Reject H_0)
H_0 true (Accept H_0)	Correct	Type II Error β
H_0 false (Reject H_0)	Type I Error α (ขนาด)	Correct 1−β = power of test

ถ้า α ลด เส้น critical จะเลื่อนขวา → β เพิ่ม
ถ้า n เพิ่ม → curve จะแคบลง → β ลด
ยิ่ง μ_0 และ μ' ใกล้กันมากๆ → n เยอะ → สรุปได้ยาก → β เพิ่ม



VARIANCE σ^2
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_a: \sigma^2 \ne \sigma_0^2$
$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$



p-value = $2P(\chi^2 > \chi^2_{ob})$
ค่ากลางของ chi-sq ที่ $\chi^2_{0.5}$ ของ df แต่ละตัว
If $P(\chi^2 > \chi^2_{ob}) < 0.5$ → lower
p-value = $2P(\chi^2 > \chi^2_{ob})$
$P(\chi^2 > \chi^2_{ob}) > 0.5$ → upper
p-value = $2P(\chi^2 < \chi^2_{ob})$
$= 2(1-P(\chi^2 > \chi^2_{ob}))$

↗ ดูเครื่องหมาย

sytem design ให้ ควรจะ ≤ ค่านึง

is the system working as specified

$H_0: \mu_0 \leq$ _

$H_a: \mu_0 >$ _

↳ check ว่าไม่ work as specified

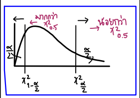
- refuse = reject → ตั้งไว้ H_0
- support = accept → ตั้งไว้ H_a

Type II Error : Accept H_0 แต่ H_0 False

☆ ก่อนหา β check ก่อนว่า H_0 False มั้ย ถ้า H_0 True → $\beta = 0$ ☆

สูตรเกี่ยวกับการทดสอบสมมติฐานสำหรับประชากรเดียว

Note: subscript ของค่า Z คือ พื้นที่ด้านซ้าย subscript ของค่า t และ Chi-squared คือ พื้นที่ด้านขวา

Null Hypothesis	Test Statistic	Alternative Hypothesis	Criteria for Rejection	P-value	Beta (β)	Sample size (n)
$H_0: \mu = \mu_0$ σ^2 known	$Z_{ob} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$H_a: \mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_{ob}\rvert > Z_{1-\alpha/2}$	$2 \times P(Z > \lvert Z_{ob}\rvert)$	$\beta = P\left(Z_{\alpha/2} + \frac{(\mu_0-\mu')}{\sigma/\sqrt{n}} < Z < Z_{1-\alpha/2} + \frac{(\mu_0-\mu')}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$	$n = \frac{(Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2\sigma^2}{(\mu_0-\mu')^2}$
		upper tail $H_a: \mu > \mu_0$	$Z_{ob} > Z_{1-\alpha}$	$P(Z > Z_{ob})$	$\beta = P\left(Z < Z_{1-\alpha} + \frac{(\mu_0-\mu')}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$	$n = \frac{(Z_\alpha + Z_\beta)^2\sigma^2}{(\mu_0-\mu')^2}$
		lower tail $H_a: \mu < \mu_0$	$Z_{ob} < Z_\alpha$	$P(Z < Z_{ob})$	$\beta = P\left(Z > Z_\alpha + \frac{(\mu_0-\mu')}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$	$n = \frac{(Z_\alpha + Z_\beta)^2\sigma^2}{(\mu_0-\mu')^2}$
$H_0: \mu = \mu_0$ σ^2 unknown T-test	$t_{ob} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$H_a: \mu \neq \mu_0$	$\lvert t_{ob}\rvert > t_{\alpha/2,n-1}$	$2 \times P(T > \lvert t_{ob}\rvert)$	$\beta = P\left(-t_{\alpha/2,n-1} + \frac{\mu_0-\mu'}{s/\sqrt{n}} < t < t_{\alpha/2,n-1} + \frac{\mu_0-\mu'}{s/\sqrt{n}}\right)$	$n = \frac{(t_{\alpha/2,n-1} + t_{\beta,n-1})^2 s^2}{(\mu_0-\mu')^2}$
		$H_a: \mu > \mu_0$	$t_{ob} > t_{\alpha,n-1}$	$P(T > t_{ob})$	$\beta = P\left(t < t_{\alpha,n-1} + \frac{\mu_0-\mu'}{s/\sqrt{n}}\right)$	$n = \frac{(t_{\alpha,n-1} + t_{\beta,n-1})^2 s^2}{(\mu_0-\mu')^2}$ เปลี่ยนค่าทไปเรื่อยๆ จน 2 ข้างเท่ากัน
		$H_a: \mu < \mu_0$	$t_{ob} < -t_{\alpha,n-1}$	$P(T < t_{ob})$	$\beta = P\left(t > -t_{\alpha,n-1} + \frac{\mu_0-\mu'}{s/\sqrt{n}}\right)$	$n = \frac{(t_{\alpha,n-1} + t_{\beta,n-1})^2 s^2}{(\mu_0-\mu')^2}$
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2_{ob} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ 	$H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_{ob}^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ or $\chi_{ob}^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$	If $P(\chi^2 > \chi^2_{ob}) < 0.5$ → lower $P-\text{value} = 2 \times P(\chi^2 > \chi^2_{ob})$ If $P(\chi^2 > \chi^2_{ob}) > 0.5$ → upper $P-\text{value} = 2 \times P(\chi^2 < \chi^2_{ob})$	$\beta = P\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}{(\sigma'/\sigma_0)^2} \leq \chi^2 \leq \frac{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}{(\sigma'/\sigma_0)^2}\right)$ 	Case 1 $\left(\frac{\sigma'}{\sigma_0}\right)^2 = \left(\frac{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}{\chi^2_{1-\beta,n-1}}\right)$ Case 2 $\left(\frac{\sigma'}{\sigma_0}\right)^2 = \left(\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}{\chi^2_{\beta,n-1}}\right)$ เปลี่ยนค่าทไปเรื่อยๆ จน 2 ข้างเท่ากัน
		$H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi_{ob}^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$	$P(\chi^2 > \chi^2_{ob})$	$\beta = P\left(\chi^2 \leq \frac{\chi^2_{\alpha,n-1}}{(\sigma'/\sigma_0)^2}\right)$	$(\sigma'/\sigma_0)^2 = \frac{\chi^2_{\alpha,n-1}}{\chi^2_{1-\beta,n-1}}$ where $\sigma' > \sigma_0$
		$H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_{ob}^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$	$P(\chi^2 < \chi^2_{ob})$	$\beta = P\left(\chi^2 \geq \frac{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}{(\sigma'/\sigma_0)^2}\right)$	$(\sigma'/\sigma_0)^2 = \frac{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}{\chi^2_{\beta,n-1}}$ where $\sigma' < \sigma_0$
$H_0: p = p_0$	$Z_{ob} = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$H_a: p \neq p_0$	$\lvert Z_{ob}\rvert > Z_{1-\alpha/2}$	$2 \times P(Z > \lvert Z_{ob}\rvert)$	$\beta = P\left(\frac{(p_0-p')+Z_{\alpha/2}\sqrt{p_0q_0/n}}{\sqrt{p'q'/n}} < Z < \frac{(p_0-p')-Z_{\alpha/2}\sqrt{p_0q_0/n}}{\sqrt{p'q'/n}}\right)$	$n = \frac{(Z_{\alpha/2}\sqrt{p_0q_0} + Z_\beta\sqrt{p'q'})^2}{(p'-p_0)^2}$
		$H_a: p > p_0$	$Z_{ob} > Z_{1-\alpha}$	$P(Z > Z_{ob})$	$\beta = P\left(Z < \frac{(p_0-p')+Z_{1-\alpha}\sqrt{p_0q_0/n}}{\sqrt{p'q'/n}}\right)$	$n = \frac{(Z_\alpha\sqrt{p_0q_0} + Z_\beta\sqrt{p'q'})^2}{(p'-p_0)^2}$
		$H_a: p < p_0$	$Z_{ob} < Z_\alpha$	$P(Z < Z_{ob})$	$\beta = P\left(Z > \frac{(p_0-p')+Z_\alpha\sqrt{p_0q_0/n}}{\sqrt{p'q'/n}}\right)$	$n = \frac{(Z_\alpha\sqrt{p_0q_0} + Z_\beta\sqrt{p'q'})^2}{(p'-p_0)^2}$

At most ≤

HYPOTHESIS TEST

1. $H_0 : \mu = \mu_0$
2. $H_a : \mu \neq \mu_0$
3. $\bar{x}$, p
4. rejection region Reject H_0 if $Z_{ob} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ or $Z_{ob} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
5. Conclusion

$\alpha \rightarrow$ significant level
$1-\alpha \rightarrow$ confident level

Ⅰ normal pop w/ known σ

Ⅱ Large sample (known or unknown σ) $s \sim \sigma$

$$Z = \underbrace{\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}}_{\text{Ⅰ}} \approx \underbrace{\frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}}_{\text{Ⅱ}} \qquad t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

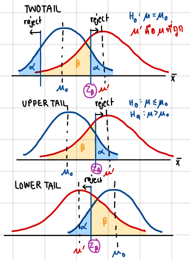
Ⅲ normal pop w/ unknown $\sigma \rightarrow$ t-dis

TWO TYPES OF ERRORS

Actual Fact / Your Decision	H_0 true (Accept H_0)	H_0 false (Reject H_0)
H_0 true (Accept H_0)	Correct	Type II Error β
H_0 false (Reject H_0)	Type I Error α (ห้อย)	Correct $1-\beta$ = power of test

$\alpha = P(\text{Type I error})$
$= P(\text{reject } H_0 \text{ when } H_0 \text{ is true})$

$\beta = P(\text{Type II error})$
$= P(\text{accept } H_0 \text{ when } H_0 \text{ is false})$



ถ้า α ลด เส้น critical จะเลื่อนขวา $\rightarrow \beta$ เพิ่ม
ถ้า n เพิ่ม $\rightarrow$ curve จะแคบลง $\rightarrow \beta$ ลด
ยิ่ง μ_0 และ μ' ใกล้กันมากๆ $\rightarrow$ n เยอะ $\rightarrow$ สรุปได้ยาก $\rightarrow \beta$ เพิ่ม

$H_0 : p = p_0$
$H_a : p \neq p_0$

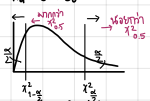
$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

PORPORTION p

VARIANCE σ^2

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

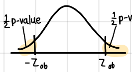


p-value $= 2P(\chi^2 > \chi^2_{ob})$

ค่ากลางของ chi-sq ที่ $\chi^2_{0.5}$ ของ df แต่ละตัว

If $P(\chi^2 > \chi^2_{ob}) < 0.5 \rightarrow$ lower
p-value $= 2P(\chi^2 > \chi^2_{ob})$
$P(\chi^2 > \chi^2_{ob}) > 0.5 \rightarrow$ upper
p-value $= 2P(\chi^2 < \chi^2_{ob})$
$= 2(1 - P(\chi^2 > \chi^2_{ob}))$

critical value เทียบค่า z
p-value เทียบพ.ท. ของ $\bar{x}$ กับ α (พ.ท. reject)



ความน่าเชื่อถือของ H_0

P-VALUE

p-value มาก $\rightarrow H_0$ มีโอกาสเป็นจริงสูง

ความน่าจะเป็นที่ $\bar{x}_{ob}$ ที่สุ่มมาจาก sample จะเท่ากับ $\bar{x}$ เมื่อ H_0 is true

p-value $< \alpha$: reject H_0
$\geq \alpha$: not reject H_0

p-value : $P(\bar{x} < \bar{x}_{\text{ที่คำนวณ}})$
$= P(Z < Z_{ob}) + P(Z < -Z_{ob})$

Test statistic > critical value
↳ p-value $< \alpha$: reject H_0
Test statistic $\leq$ critical value
↳ p-value $\geq \alpha$: not reject H_0