

---

**Estudio de la complejidad de las funciones  
booleanas historial de Máquinas de Turing  
Complexity study of Turing Machines' history  
boolean functions**

---



**Trabajo de Fin de Grado**

**Curso 2024–2025**

**Autor**

Pablo García López

**Directores**

Ismael Rodríguez Laguna

Fernando Rosa Velardo

**Grado en Matemáticas**

**Facultad de Matemáticas**

**Universidad Complutense de Madrid**



Estudio de la complejidad de las funciones  
booleanas historial de Máquinas de Turing  
Complexity study of Turing Machines'  
history boolean functions

**Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas**

**Autor**

Pablo García López

**Directores**

Ismael Rodríguez Laguna

Fernando Rosa Velardo

**Convocatoria:** *Junio 2025*

**Grado en Matemáticas**

**Facultad de Matemáticas**

**Universidad Complutense de Madrid**



# Resumen

## Estudio de la complejidad de las funciones booleanas historial de Máquinas de Turing

Un resumen en castellano de media página, incluyendo el título en castellano. A continuación, se escribirá una lista de no más de 10 palabras clave.

### Palabras clave

P, NP, PSPACE, Funciones booleanas, Complejidad computacional, Complejidad de circuitos



# Abstract

## Complexity study of Turing Machines' history boolean functions

An abstract in English, half a page long, including the title in English. Below, a list with no more than 10 keywords.

## Keywords

P, NP, PSPACE, Boolean functions, Computational complexity, Circuit complexity





# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	1
1.3. Plan de trabajo . . . . .	1
<b>2. Estado de la Cuestión</b>	<b>3</b>
<b>3. Descripción del Trabajo</b>	<b>5</b>
<b>4. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>Conclusions and Future Work</b>	<b>11</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>13</b>
<b>A. Título del Apéndice A</b>	<b>15</b>
<b>B. Título del Apéndice B</b>	<b>17</b>



# Índice de figuras

3.1. Ejemplo de imagen . . . . .	5
----------------------------------	---



# Índice de tablas

3.1. Tabla de ejemplo . . . . .	5
---------------------------------	---



# Introducción

*“If  $P=NP$ , then the world would be a profoundly different place than we usually assume it to be. There would be no special value in “creative leaps,” no fundamental gap between solving a problem and recognizing the solution once it’s found. Everyone who could appreciate a symphony would be Mozart; everyone who could follow a step-by-step argument would be Gauss; everyone who could recognize a good investment strategy would be Warren Buffett.”*  
— Scott Aaronson

## 1.1. Motivación

Introducción al tema del TFG

## 1.2. Objetivos

Descripción de los objetivos del trabajo.

## 1.3. Plan de trabajo

Aquí se describe el plan de trabajo a seguir para la consecución de los objetivos descritos en el apartado anterior.





## Capítulo 2

# Estado de la Cuestión

En el estado de la cuestión es donde aparecen gran parte de las referencias bibliográficas del trabajo. Una de las formas más cómodas de gestionar la bibliografía en  $\text{\LaTeX}$  es utilizando **bibtex**. Las entradas bibliográficas deben estar en un fichero con extensión *.bib* (con esta plantilla se proporciona el fichero *biblio.bib*, donde están las entradas referenciadas más abajo). Cada entrada bibliográfica tiene una clave que permite referenciarla desde cualquier parte del texto con los siguiente comandos:

- Referencia bibliografica con cite: Bautista et al. (1998)
- Referencia bibliográfica con citep: (Oetiker et al., 1996)
- Referencia bibliográfica con citet: Krishnan (2003)

Es posible citar más de una fuente, como por ejemplo (Mittelbach et al., 2004; Lamport, 1994; Knuth, 1986)

Después,  $\text{\LaTeX}$  se ocupa de rellenar la sección de bibliografía con las entradas **que hayan sido citadas** (es decir, no con todas las entradas que hay en el *.bib*, sino sólo con aquellas que se hayan citado en alguna parte del texto).

Bibtex es un programa separado de latex, pdflatex o cualquier otra cosa que se use para compilar los *.tex*, de manera que para que se rellene correctamente la sección de bibliografía es necesario compilar primero el trabajo (a veces es necesario compilarlo dos veces), compilar después con bibtex, y volver a compilar otra vez el trabajo (de nuevo, puede ser necesario compilarlo dos veces).



# Capítulo 3

## Descripción del Trabajo

Aquí comienza la descripción del trabajo realizado. Se deben incluir tantos capítulos como sea necesario para describir de la manera más completa posible el trabajo que se ha llevado a cabo. Como muestra la figura 3.1, está todo por hacer.



Figura 3.1: Ejemplo de imagen

Si te sirve de utilidad, puedes incluir tablas para mostrar resultados, tal como se ve en la tabla 3.1.

Col 1	Col 2	Col 3
3	3.01	3.50
6	2.12	4.40
1	3.79	5.00
2	4.88	5.30
4	3.50	2.90
5	7.40	4.70

Tabla 3.1: Tabla de ejemplo



# Capítulo 4

## Conclusiones y Trabajo Futuro

Conclusiones del trabajo y líneas de trabajo futuro.

Antes de la entrega de actas de cada convocatoria, en el plazo que se indica en el calendario de los trabajos de fin de grado, el estudiante entregará en el Campus Virtual la versión final de la memoria en PDF.



# Introduction

Introduction to the subject area. This chapter contains the translation of Chapter 1.





# Conclusions and Future Work

Conclusions and future lines of work. This chapter contains the translation of Chapter 4.



# Bibliografía

- BAUTISTA, T., OETIKER, T., PARTL, H., HYNA, I. y SCHLEGL, E. *Una Descripción de  $\text{\LaTeX}$  2 $\epsilon$* . Versión electrónica, 1998.
- KNUTH, D. E. *The  $\text{\TeX}$  book*. Addison-Wesley Professional., 1986.
- KRISHNAN, E., editor.  *$\text{\LaTeX}$  Tutorials. A primer*. Indian  $\text{\TeX}$  Users Group, 2003.
- LAMPORT, L.  *$\text{\LaTeX}$ : A Document Preparation System, 2nd Edition*. Addison-Wesley Professional, 1994.
- MITTELBACH, F., GOOSSENS, M., BRAAMS, J., CARLISLE, D. y ROWLEY, C. *The  $\text{\LaTeX}$  Companion*. Addison-Wesley Professional, segunda edición, 2004.
- OETIKER, T., PARTL, H., HYNA, I. y SCHLEGL, E. *The Not So Short Introduction to  $\text{\LaTeX}$  2 $\epsilon$* . Versión electrónica, 1996.



# Apéndice **A**

## Título del Apéndice A

Los apéndices son secciones al final del documento en las que se agrega texto con el objetivo de ampliar los contenidos del documento principal.



Apéndice	<b>B</b>
----------	----------

Título del Apéndice B

Se pueden añadir los apéndices que se consideren oportunos.

