

(86.09) PROCESOS ESTOCÁSTICOS

TRABAJO PRACTICO DE SIMULACIÓN N° 1: REPETIDORES

Curso 02

15 de junio de 2020

Integrante		Padrón		Correo electrónico
Mendoza, Leonel	—	101153	—	lmendoza@fi.uba.ar
Rossi, Francisco	—	99540	—	frossi@fi.uba.ar
Demarco, Facundo Agustin	—	100620	—	fdemarco@fi.uba.ar

Índice

1. Resumen	2
2. Introducción	2
2.1. Repetidor digital	2
2.2. Repetidor analógico	2
2.3. Relación señal a ruido	3
3. Resolución	3
3.1. Ejercicio 1 - Cálculo de ganancia de los repetidores analógico	3
3.2. Ejercicio 2	4
3.2.a. Salidas Y_n en función de W , X_1 y G	4
3.2.b. Relación señal ruido de la ultima etapa ρ_n	5
3.2.c. Probabilidad de error promedio en función de SNR de la última etapa ρ_n	6
3.3. Ejercicio 3	7
3.3.a. Probabilidades de error digital Vs. analógico	7
3.3.b. [Opcional] Demostración de la probabilidad de errores digital	9
3.4. Ejercicio 4	11
3.4.a. Simulación Monte Carlo	11
3.4.b. $pdfs$ de $Y_n X_1 = \pm A$ <i>histogramas</i>	12
4. Conclusiones	13

1. Resumen

En el siguiente informe se desarrolla el análisis de dos esquemas de comunicación: en uno se utilizan repetidores digitales y en el otro repetidores analógicos. Con los mismos se quiere transmitir *símbolos* que representan 1 bit. Ambos sistemas poseen n repetidores etapas en cascada y por lo tanto, $n-1$ repetidores (Ver **Fig. 1**)

2. Introducción

En ambos repetidores si el bit a enviar es 1, el símbolo asociado es $X_1 = A$, si en cambio se quiere transmitir el bit 0, el símbolo es $X_1 = -A$, donde $A > 0$. Es decir, la información transmitida se puede modelar como una variable aleatoria discreta de soporte $\{A, -A\}$. Asumiremos que ambos símbolos tienen probabilidad $\mathbb{P}(X_1 = A) = \mathbb{P}(X_1 = -A) = \frac{1}{2}$.

Ambos sistemas de comunicaciones tienen n etapas en cascada, es decir, hay un transmisor $n-1$ repetidores y finalmente un receptor. En cada etapa, los símbolos se envían a través de un canal de comunicaciones que puede ser modelado por un factor de atenuación h y por la adición de ruido W_i , $i \in 1, \dots, n$. Asumiremos que la distribución de este ruido es gaussiana de media nula y varianza σ^2 para cada canal, es decir, $W_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, y que los ruidos de distintas etapas son independientes. La diferencia entre ambos repetidores es la manera de procesar el símbolo recibido Y_i .

2.1. Repetidor digital

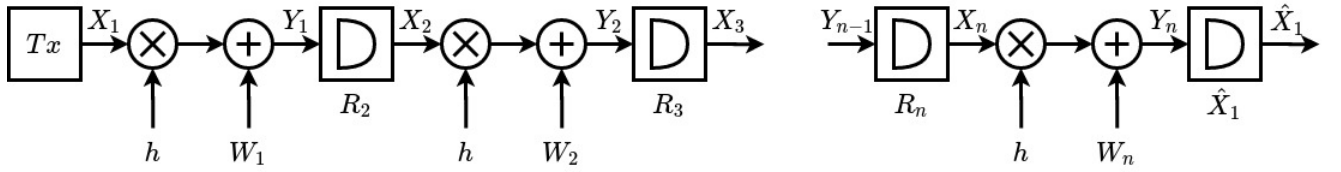


Figura 1: Sistema con repetidores digitales.

En el caso del repetidor digital, el bloque con la letra **D** toma una decisión del símbolo. De manera que en cada repetidor la señal de salida vuelve a valer $X_i = A$ o $X_i = -A$, esta decisión la toma de la siguiente manera:

$$X_{i+1} = \begin{cases} A & \text{si } Y_i \geq 0 \\ -A & \text{si } Y_i < 0 \end{cases}$$

2.2. Repetidor analógico

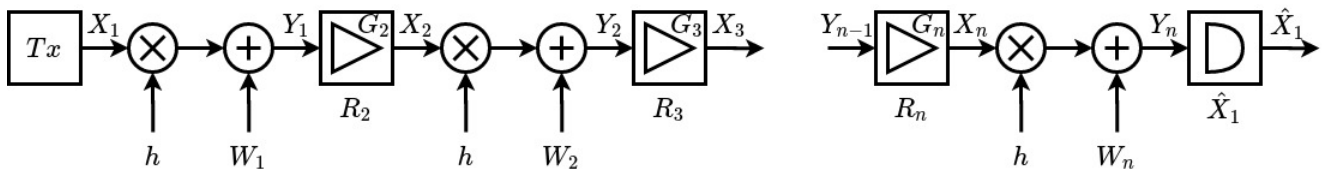


Figura 2: Sistema con repetidores analógicos.

En el caso del repetidor analógico, la decisión es única y se toma en el receptor. En las etapas intermedias, los símbolos recibidos son multiplicados por una ganancia para luego retransmitirlos a la siguiente etapa. Los símbolos retransmitidos responden a la siguiente ecuación:

$$X_{i+1} = G_{i+1}Y_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

2.3. Relación señal a ruido

La relación señal a ruido se define como:

$$SNR = \frac{\text{Energía de la señal de interes}}{\text{Energía del ruido}}$$

La energía promedio de un símbolo, o del ruido, se define como la varianza de la VA asociada. Es decir, la energía promedio del símbolo transmitido es: $\mathbb{E}[X_i^2]$ o $\mathbb{E}[Y_i^2]$.

En este TP se impone como condición que tanto el bloque Tx como los G_i transmitan con una energía promedio ξ (con ξ constante):

$$\mathbb{E}[X_i^2] \leq \xi \quad \forall i \in [1, n]$$

De hecho, para todos los cálculos vamos a considerar a condición más favorable: $\mathbb{E}[X_i^2] = \xi$ para todo i .

En el caso del primer repetidor:

$$SNR_1 = \frac{\mathbb{E}[(hX_1)^2]}{\mathbb{E}[(W_1)^2]} = \frac{h^2 \mathbb{E}[(X_1)^2]}{\sigma^2} = \frac{h^2 \xi}{\sigma^2} \quad (1)$$

3. Resolución

3.1. Ejercicio 1 - Cálculo de ganancia de los repetidores analógico

Asumiendo que cada repetidor analógico trasmite en la condición más favorable con una energía promedio ξ se determina el valor de A y las ganancias G_2, \dots, G_n para satisfacer ese requisito.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1^2] &= A^2 \mathbb{P}[X_1 = A] + (-A)^2 \mathbb{P}[X_1 = -A] \\ &= A^2 \frac{1}{2} + (-A)^2 \frac{1}{2} \\ &= A^2 \end{aligned}$$

por la condición sobre la energía: $A^2 \leq \xi$, y en la condición más favorable: $A^2 = \xi$. Entonces con esto determinamos el valor de

$$A = \sqrt{\xi}$$

Por un lado obtenemos:

$$\begin{aligned} SNR_1 &= \frac{\mathbb{E}[(hX_1)^2]}{\mathbb{E}[(W_1)^2]} = \frac{h^2 \mathbb{E}[X_1^2]}{\sigma^2} \stackrel{\substack{\mathbb{E}[X_i] = \xi \quad \forall i \in 1, \dots, n-1 \\ \text{Xi e Wi V.A. ind.}}}{=} \frac{h^2 \mathbb{E}[X_{i+1}^2]}{\sigma^2} = \frac{h^2}{\sigma^2} \mathbb{E}[[G_{i+1}(hX_i + W_i)]^2] = \frac{G_{i+1}^2 h^2}{\sigma^2} [\mathbb{E}[(hX_i)^2] + \\ &\quad \mathbb{E}[2(h \underbrace{X_i W_i}_{\text{Xi e Wi V.A. ind.}})] + \mathbb{E}[W_i^2]] = \frac{G_{i+1}^2 h^2}{\sigma^2} [h^2 \mathbb{E}[X_i^2] + \underbrace{2h \mathbb{E}[(X_i) \mathbb{E}[(W_i)]]}_{=0} + \mathbb{E}[W_i^2]] \\ &= \frac{h^2}{\sigma^2} G_{i+1}^2 \mathbb{E}[h^2 \xi + \sigma^2] = G_{i+1}^2 \frac{1}{\sigma^2} [h^4 \xi + \sigma^2] \end{aligned}$$

Por el otro, se obtuvo en (1):

$$SNR_1 = \frac{h^2 \xi}{\sigma^2}$$

igualando ambas ecuaciones se obtiene :

$$G_{i+1} = \sqrt{\frac{\xi}{h^2 \xi + \sigma^2}}$$

y si definimos la relación señal a ruido para cada repetidor de manera independiente como

$$SNR_i = h^2 \frac{E[X_i^2]}{\sigma^2} = \frac{h^2 \xi}{\sigma^2} = SNR$$

Obtenemos

$$G_{i+1} = \sqrt{\frac{\xi}{h^2 \xi + \sigma^2}} = \sqrt{\frac{\frac{\xi}{\sigma^2}}{\frac{h^2 \xi}{\sigma^2} + 1}} = \sqrt{\frac{1}{h^2 \frac{\overbrace{h^2 \xi}^{SNR}}{\sigma^2} + 1}} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{SNR}{SNR + 1}}$$

Finalmente podemos expresar la ganancia de todo repetidor como:

$$G_i = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{SNR}{SNR + 1}}, \quad i \in 2, \dots, n \quad (2)$$

3.2. Ejercicio 2

3.2.a. Salidas Y_n en función de W , X_1 y G

Comenzando por la definición de $Y_i = hX_i + W_i$ que puede ser observada en la **Fig. 2**, con $X_i = G_i Y_{i-1}$, se desarrolla en forma genérica para un cierto Y_k , por ejemplo, Y_5 resulta:

$$Y_5 = h(G_5(h(G_4(h(G_3(h(G_2(hX_1 + W_1) + W_2) + W_3) + W_4) + W_5))$$

Que reescrito en una forma mas útil es:

$$Y_5 = X_1 h^5 G_2 G_3 G_4 G_5 + [W_1(G_2 G_3 G_4 G_5)h^4 + W_2(G_3 G_4 G_5)h^3 + W_3(G_4 G_5)h^2 + W_4(G_5)h + W_5]$$

Podemos expresar entonces de forma genérica la entrada de cada repetidor como:

$$Y_i = X_1 h^i \prod_{k=2}^i G_k + \underbrace{\sum_{j=1}^i \left[h^{(i-j)} W_j \prod_{k=j+1}^i G_k \right]}_{\phi_i}$$

La distribución de los términos asociados al ruido (ϕ_i), dado que $W_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, es una normal con media cero y varianza la suma de las varianzas de cada término de la sumatoria ya que los ruidos son independientes y las constantes salen afuera al cuadrado:

$$\phi_i \sim \mathcal{N} \left(0, \sum_{j=1}^i \left[\sigma^2 h^{2(i-j)} \prod_{k=j+1}^i G_k^2 \right] \right)$$

Y_n en función de X_1 , las ganancias y los ruidos se expresa como:

$$Y_n = X_1 \underbrace{h^n \prod_{k=2}^n G_k}_{\chi_n} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \left[h^{(n-j)} W_j \prod_{k=j+1}^n G_k \right]}_{\phi_n} \quad (3)$$

Y el término asociado solo al ruido se distribuye como:

$$\phi_n \sim \mathcal{N} \left(0, \sum_{j=1}^n \left[\sigma^2 h^{2(n-j)} \prod_{k=j+1}^n G_k^2 \right] \right) \quad (4)$$

3.2.b. Relación señal ruido de la ultima etapa ρ_n

Considerando que en la ultima etapa la señal es:

$$Y_n = X_1 \underbrace{h^n \prod_{k=2}^n G_k}_{\chi_n} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \left[h^{(n-j)} W_j \prod_{k=j+1}^n G_k \right]}_{\phi_n}$$

Se aísla la parte que corresponde a señal útil (χ_n) y la correspondiente al ruido (ϕ_n), y se obtiene SNR_n :

$$\text{SNR}_n = \frac{\mathbb{E}[\chi_n^2]}{\mathbb{E}[\phi_n^2]} = \frac{\xi h^{2n} \prod_{k=2}^n G_k^2}{\sum_{j=1}^n \left[\sigma^2 h^{2(n-j)} \prod_{k=j+1}^n G_k^2 \right]} = \frac{\widehat{\xi h^2}^{\text{SNR}_1}}{\sigma^2} \frac{h^{2n-2} \prod_{k=2}^n G_k^2}{\sum_{j=1}^n \left[h^{2(n-j)} \prod_{k=j+1}^n G_k^2 \right]}$$

Donde la energía de la parte del ruido al cuadrado es su varianza debido a que su media es nula.

$$\begin{aligned} \frac{\xi h^2}{\sigma^2} \frac{h^{2n-2} G_2^2 G_3^2 \dots G_n^2}{h^{2(n-1)} G_2^2 G_3^2 \dots G_n^2 + h^{2(n-2)} G_3^2 G_4^2 \dots G_n^2 + \dots} &= \frac{\xi h^2}{\sigma^2} \frac{h^{2(n-1)}}{h^{2(n-1)} \frac{G_2^2 G_3^2 \dots G_n^2}{G_2^2 G_3^2 \dots G_n^2} + h^{2(n-2)} \frac{G_3^2 G_4^2 \dots G_n^2}{G_2^2 G_3^2 \dots G_n^2} + \dots} = \frac{\xi h^2}{\sigma^2} \frac{h^{2(n-1)}}{h^{2(n-1)} + \frac{h^{2(n-2)}}{G_2^2} + \frac{h^{2(n-3)}}{G_2^2 G_3^2} + \dots} = \\ &= \frac{\xi h^2}{\sigma^2} \frac{1}{\frac{h^{2(n-1)}}{h^{2(n-1)}} + \frac{h^{2(n-2)}}{h^{2(n-1)}} G_2^{-2} + \frac{h^{2(n-3)}}{h^{2(n-1)}} G_2^{-2} G_3^{-2} + \dots} = \frac{\xi h^2}{\sigma^2} \frac{1}{1 + h^{-2(1)} G_2^{-2} + h^{-2(2)} G_2^{-2} G_3^{-2} + \dots} = \\ \text{SNR}_n &= \frac{\text{SNR}_1}{\sum_{j=1}^n \left[h^{-2(j-1)} \prod_{k=2}^j G_k^{-2} \right]} \end{aligned}$$

Usando el resultado $G_k = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\text{SNR}_1}{\text{SNR}_1 + 1}}$:

$$\text{SNR}_n = \frac{\text{SNR}_1}{\sum_{j=1}^n \left[h^{-2(j-1)} \prod_{k=2}^j h^2 \frac{\text{SNR}_1 + 1}{\text{SNR}_1} \right]} = \frac{\text{SNR}_1}{\sum_{j=1}^n \left[h^{-2(j-1)} \left(h^2 \frac{\text{SNR}_1 + 1}{\text{SNR}_1} \right)^j \right]} = \frac{\text{SNR}_1}{\sum_{j=1}^n \left[h^{-2(j-1)} h^{2(j-1)} \left(\frac{\text{SNR}_1 + 1}{\text{SNR}_1} \right)^{j-1} \right]}$$

Luego, con $k = j - 1$

$$\text{SNR}_n = \frac{\text{SNR}_1}{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\text{SNR}_1 + 1}{\text{SNR}_1} \right)^k}$$

Que mediante la identidad, $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$, se obtiene:

$$\text{SNR}_n = \frac{\text{SNR}_1}{\left(\frac{\text{SNR}_1+1}{\text{SNR}_1}\right)^n - 1} = \frac{\text{SNR}_1 \left(\frac{\text{SNR}_1+1}{\text{SNR}_1} - 1\right)}{\left(\frac{\text{SNR}_1+1}{\text{SNR}_1}\right)^n - 1} = \frac{\overbrace{\text{SNR}_1 \left(\frac{\text{SNR}_1+1 - \text{SNR}_1}{\text{SNR}_1}\right)}^{=1}}{\underbrace{\frac{(\text{SNR}_1+1)^n}{\text{SNR}_1^n} - 1}_{\frac{(\text{SNR}_1+1)^n}{\text{SNR}_1^n} - \frac{\text{SNR}_1^n}{\text{SNR}_1^n}}} = \frac{1}{\frac{(\text{SNR}_1+1)^n - \text{SNR}_1^n}{\text{SNR}_1^n}} = \frac{\text{SNR}_1^n}{(\text{SNR}_1+1)^n - \text{SNR}_1^n}$$

Finalmente:

$$\text{SNR}_n = \rho_n = \frac{1}{(1 + \text{SNR}_1^{-1})^n - 1} \quad (5)$$

Esto resulta ser la relación señal a ruido de la etapa n ésima en función de la relación señal a ruido de la primera etapa.

3.2.c. Probabilidad de error promedio en función de SNR de la última etapa ρ_n

La probabilidad de error se puede calcular de la siguiente manera usando probabilidades totales y teniendo en cuenta que el receptor determina el valor de \hat{X}_1 como:

$$\hat{X}_1 = \begin{cases} A & \text{si } Y_n \geq 0 \\ -A & \text{si } Y_n < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto calculamos la probabilidad de error utilizando la formula de probabilidades totales como:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_e &= \mathbb{P}[\hat{X}_1 \neq X_1] \\ &= \mathbb{P}[\hat{X}_1 \neq X_1 | X_1 = A] \mathbb{P}[X_1 = A] + \mathbb{P}[\hat{X}_1 \neq X_1 | X_1 = -A] \mathbb{P}[X_1 = -A] \\ &= \mathbb{P}[\hat{X}_1 = -A | X_1 = A] \mathbb{P}[X_1 = A] + \mathbb{P}[\hat{X}_1 = A | X_1 = -A] \mathbb{P}[X_1 = -A] \\ &= \mathbb{P}[Y_n < 0 | X_1 = A] \mathbb{P}[X_1 = A] + \mathbb{P}[Y_n \geq 0 | X_1 = -A] \mathbb{P}[X_1 = -A] \end{aligned}$$

Anteriormente se obtuvo que:

$$\begin{aligned} Y_n &= \underbrace{X_1 h^n \prod_{k=2}^n G_k}_{\chi_n} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \left[h^{(n-j)} W_{j+1} \prod_{k=j+1}^n G_k \right]}_{\phi_n} \\ \phi_n &\sim \mathcal{N} \left(0, \sum_{j=1}^n \left[\sigma^2 h^{2(n-j)} \prod_{k=j+1}^n G_k^2 \right] \right), \quad \text{si } G_k = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\text{SNR}}{\text{SNR} + 1}} \\ \phi_n &\sim \mathcal{N} \left(0, \sigma^2 [1 + \text{SNR}_1] \left[1 - \left[\frac{\text{SNR}_1}{1 + \text{SNR}_1} \right]^n \right] \right) \end{aligned}$$

Entonces

$$Y_n |_{X_1 = \pm A} \sim \mathcal{N} \left(\pm A h^n \prod_{k=2}^n G_k, \sigma^2 [1 + \text{SNR}_1] \left[1 - \left[\frac{\text{SNR}_1}{1 + \text{SNR}_1} \right]^n \right] \right)$$

Además se obtuvo que:

$$h^n \prod_{k=2}^n G_k = h \left[\frac{\text{SNR}_1}{1 + \text{SNR}_1} \right]^{\frac{n-1}{2}}$$

Luego

$$Y_n|_{X_1=\pm A} \sim \mathcal{N}(\pm Ah \left[\frac{SNR_1}{1+SNR_1} \right]^{\frac{n-1}{2}}, \sigma^2 [1+SNR_1] \left[1 - \left[\frac{SNR_1}{1+SNR_1} \right]^n \right])$$

Finalmente

$$SNR_1 = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{SNR_n} \right]^{\frac{1}{n}} - 1}$$

$$Y_n|_{X_1=\pm A} \sim \mathcal{N}(\pm Ah \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{SNR_n} \right)^{\frac{1}{n}}} \right]^{\frac{n-1}{2}}, \sigma^2 \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{SNR_n} \right)^{\frac{1}{n}}}{\left(1 + \frac{1}{SNR_n} \right)^{\frac{1}{n}} - 1} \right] \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{SNR_n}} \right])$$

Transformamos la función de supervivencia a la función de distribución.

$$\mathbb{P}[Y_n \geq 0|_{X_1=-A}] = 1 - \mathbb{P}[Y_n < 0|_{X_1=-A}]$$

Normalizamos la función de distribución sabiendo que $\mathbb{P}[X_1 = A] = \mathbb{P}[X_1 = -A] = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}_e = \frac{1}{2} \Phi \left(-\frac{\mu_{Y_n|_{X_1=A}}}{\sigma_{Y_n|_{X_1=A}}} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \Phi \left(-\frac{\mu_{Y_n|_{X_1=-A}}}{\sigma_{Y_n|_{X_1=-A}}} \right) \right)$$

Ademas podemos decir que en el segundo termino $-\mu_{Y_n|_{X_1=-A}} = \mu_{Y_n|_{X_1=A}}$ y $\sigma_{Y_n|_{X_1=-A}} = \sigma_{Y_n|_{X_1=A}}$ ya que no depende de que si $X_1 = A$ o $X_1 = -A$ y que el primer término por simetría de la función de distribución de la normal estandar.

$$\mathbb{P}_e = \frac{1}{2} \left(1 - \Phi \left(\frac{\mu_{Y_n|_{X_1=A}}}{\sigma_{Y_n|_{X_1=A}}} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \Phi \left(\frac{\mu_{Y_n|_{X_1=-A}}}{\sigma_{Y_n|_{X_1=-A}}} \right) \right) = 1 - \Phi \left(\frac{\mu_{Y_n|_{X_1=-A}}}{\sigma_{Y_n|_{X_1=-A}}} \right)$$

$$\text{Sabiedo que } \mu_{Y_n|_{X_1=-A}} = Ah^n \prod_{k=2}^n G_k, \quad \text{y que, } SNR_n = \frac{\mathbb{E}[\chi_n^2]}{\mathbb{E}[\Phi_n^2]} = \frac{\xi h^{2n} \prod_{k=2}^n G_k^2}{\sigma_{Y_n|_{X_1=A}}^2}$$

$$\implies \sigma_{Y_n|_{X_1=A}} = \frac{\sqrt{\xi} h^n \prod_{k=2}^n G_k}{\sqrt{SNR_n}}$$

Entonces la probabilidad de error del sistema analógico es:

$$\mathbb{P}_e = 1 - \Phi \left(\frac{\mu_{Y_n|_{X_1=-A}}}{\sigma_{Y_n|_{X_1=-A}}} \right) = 1 - \Phi \left(\frac{Ah^n \prod_{k=2}^n G_k}{\frac{\sqrt{\xi} h^n \prod_{k=2}^n G_k}{\sqrt{SNR_n}}} \right) \stackrel{A=\sqrt{\xi}}{=} 1 - \Phi \left(\sqrt{SNR_n} \right)$$

con Φ la función de distribución $\mathcal{N}(0,1)$

Se obtuvo la probabilidad de error promedio del sistema analógico en función de SNR_n :

$$\mathbb{P}_e = 1 - \Phi(\sqrt{SNR_n}) = 1 - \Phi(\sqrt{\rho_n}) \quad (6)$$

3.3. Ejercicio 3

3.3.a. Probabilidades de error digital Vs. analógico

A partir de lo obtenido en el inciso anterior y teniendo en cuenta que la probabilidad de error del sistema de comunicaciones digital es de la forma:

$$P_{e,n}^d = \frac{1}{2} (1 - (1 - 2Q(\sqrt{SNR}))^n)$$

Se obtuvo el gráfico de la **Fig. 3** donde se muestran las probabilidades de error del sistema digital y del sistema analógico en función de la SNR, para sistemas de $n \in [1, 25]$ (con pasos de 4) cantidad de repetidores. Luego, se determinaron gráficamente para cada n los valores de SNR para la cual ambas probabilidades (analógica y digital)

son iguales (estos valores se muestran en la **Tabla 1**).

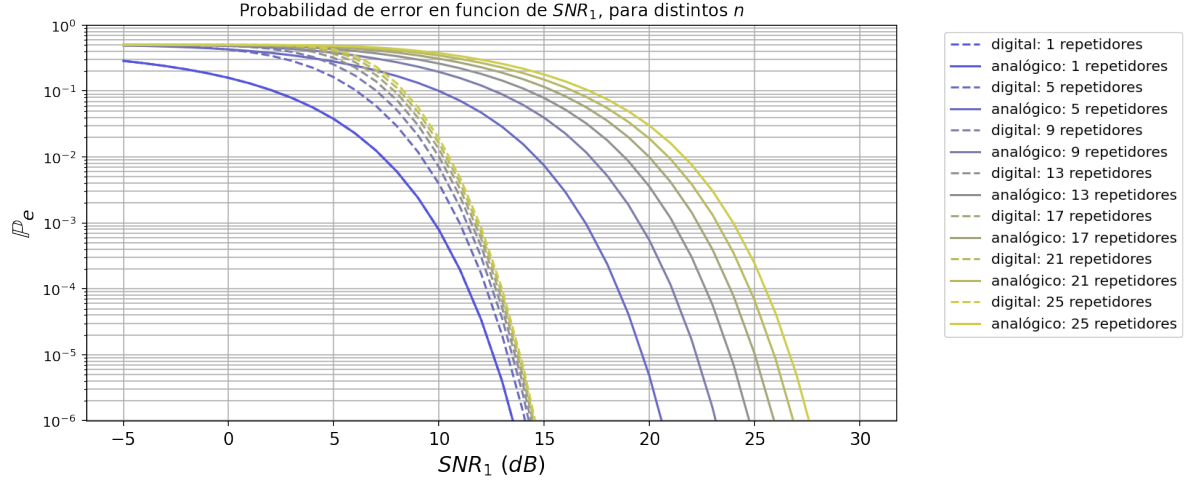


Figura 3: Probabilidades de error para ambos sistemas, con n repetidores

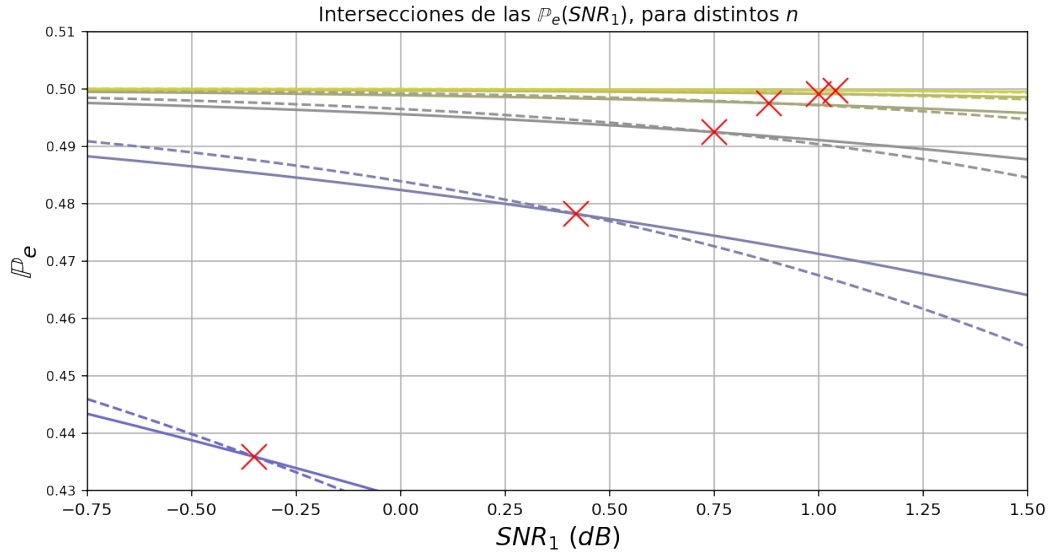


Figura 4: Intersecciones de las probabilidades de error para una cada n .

Para empezar, se observa que a medida que la SNR del primer repetidor aumenta, la probabilidad de un evento de error en la determinación del símbolo de la entrada es menor lo cual tiene sentido ya que si la relación señal a ruido es mas grande quiere decir que la energía de la señal transmitida es mayor a la energía del ruido y por ende hay mas posibilidades de recibir el bit correcto. Cabe destacar también que con un incremento de la cantidad de repetidores la curva decrecerá mas debido a que a mayor etapas, mayor es la probabilidad de evento de error.

Además, se puede observar en el gráfico como la cantidad de repetidores influye en mayor medida a la probabilidad de error en el sistema analógico que en el digital. Esto se debe a que al tener una regla de decisión por cada etapa en el digital el efecto de la atenuación de la señal y la adición de ruido no se acumula de una etapa a otra, en cambio en el sistema analógico, el ruido de la etapa anterior afecta a la siguiente y estos se amplifican en cada etapa hasta llegar al receptor en el cual toma la decisión, por ende, si se tiene mas igual cantidad de repetidores en ambos y $n > 1$, la probabilidad de un evento de error resulta mas grande que en el digital.

Luego, a partir del gráfico se puede apreciar que fijando un n , la probabilidad de error del sistema digital es mayor que la del sistema analógico hasta el valor de SNR donde las probabilidades de error coinciden (**Tabla.1**). Esto es a causa de que si la relación señal a ruido es negativa (ruido mayor a entrada) o pequeña, al tener una

regla de decisión en cada etapa, el sistema digital esta teniendo una probabilidad muy alta de equivocarse una gran cantidad de veces, en cambio con en analógico se decide solo al final.

Vale la pena destacar que para $n=1$ repetidor las probabilidades de error son iguales para ambos sistemas y eso se debe a que los dos canales de comunicación serán iguales ya que el analógico tendrá la regla de decisión como primera y única etapa y sera idéntico al digital.

Tabla 1: Valores de intersección entre la probabilidad de error del sistema analógico y del digital para cada n .

n	SNR_1 (dB)	\mathbb{P}_e
1	Dom	[0,1]
5	-0.35	0.4358
9	0.42	0.4782
13	0.75	0.4925
17	0.88	0.4975
21	1	0.4991
25	1.04	0.4997

Por lo antes desarrollado para valores de SNR_1 cercanos a cero o negativos (antes del punto de intersección) para cada n , conviene elegir el sistema analógico. Sin embargo, este sistema empeora rápidamente cuando aumenta la cantidad de repetidores y por lo tanto, cuando la SNR_1 no sea demasiado baja y la cantidad de repetidores sea $n > 1$ conviene elegir el sistema digital.

3.3.b. [Opcional] Demostración de la probabilidad de errores digital

Probaremos por inducción:

Empezando por $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{e,1}^d &= \mathbb{P}(X_2 \neq X_1) = \mathbb{P}(X_2 = A|X_1 = -A)P(X_1 = -A) + \mathbb{P}(X_2 = -A|X_1 = A)P(X_1 = A) \\
&= \frac{1}{2} \left[\overbrace{\mathbb{P}(X_2 = A|X_1 = -A)}^{(1)} + \overbrace{\mathbb{P}(X_2 = -A|X_1 = A)}^{(2)} \right] \\
(1) &= \mathbb{P}(Y_1 \geq 0|X_1 = -A) = 1 - \Phi\left(\frac{Ah}{\sigma}\right) = Q(\sqrt{SNR}) \\
(2) &= \mathbb{P}(Y_1 < 0|X_1 = -A) = \Phi\left(\frac{-Ah}{\sigma}\right) = Q(\sqrt{SNR})
\end{aligned}$$

Luego,

$$\boxed{\mathbb{P}_{e,1}^d = \frac{1}{2}Q(\sqrt{SNR}) = \frac{1}{2}[1 - (1 - Q(\sqrt{SNR}))^1]}$$

Para $n = 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{e,2}^d &= \mathbb{P}(X_3 \neq X_1) = \mathbb{P}(X_3 = A|X_1 = -A)P(X_1 = -A) + \mathbb{P}(X_3 = -A|X_1 = A)P(X_1 = A) \\
&= \frac{1}{2} \left[\overbrace{\mathbb{P}(X_3 = A|X_1 = -A)}^{(3)} + \overbrace{\mathbb{P}(X_3 = -A|X_1 = A)}^{(4)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{3} &= \mathbb{P}(Y_2 \geq 0 | X_1 = -A) = \overbrace{\mathbb{P}(Y_2 |_{X_2=-A} \geq 0 | X_1 = -A)}^{\textcircled{3}_1} \overbrace{\mathbb{P}(X_2 = -A | X_1 = -A)}^{\textcircled{3}_2} + \\
&\quad \overbrace{\mathbb{P}(Y_2 |_{X_2=A} \geq 0 | X_1 = -A)}^{\textcircled{3}_3} \overbrace{\mathbb{P}(X_2 = A | X_1 = -A)}^{\textcircled{3}_4} \\
\textcircled{3}_1 &= \mathbb{P}(Y_2 |_{X_2=-A} \geq 0) = 1 - \Phi(\sqrt{SNR}) \\
\textcircled{3}_2 &= 1 - \mathbb{P}(X_2 = A | X_1 = -A) = 1 - \textcircled{1} = \Phi(\sqrt{SNR}) \\
\textcircled{3}_3 &= 1 - \textcircled{3}_1 = \Phi(\sqrt{SNR}) \\
\textcircled{3}_4 &= 1 - \textcircled{3}_2 = 1 - \Phi(\sqrt{SNR}) \\
\textcircled{3} &= 2[\Phi(\sqrt{SNR}) - \Phi^2(\sqrt{SNR})] \stackrel{\text{completando cuadrados}}{=} -2[(\Phi(\sqrt{SNR}) - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}] \\
\textcircled{4} &= \textcircled{3}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\mathbb{P}_{e,2}^d = \textcircled{3} = 2\left[\frac{1}{4} - \left(\Phi(\sqrt{SNR}) - \frac{1}{2}\right)^2\right] = 2\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - Q(\sqrt{SNR})\right)^2\right] = 2\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1 - 2Q(\sqrt{SNR}))^2\right]$$

Y volvemos a encontrar la forma:

$$\boxed{\mathbb{P}_{e,2}^d = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2Q(\sqrt{SNR}))^2]}$$

Para $n = 3$ se desarrolla de la misma forma, pero expresando los términos de probabilidad del nuevo repetidor con Bayes, y completando cubos:

$$\boxed{\mathbb{P}_{e,2}^d = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2Q(\sqrt{SNR}))^3]}$$

Para n repetidores:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{e,n}^d &= \mathbb{P}(X_{n+1} \neq X_1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = A | X_1 = -A)P(X_1 = -A) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -A | X_1 = A)P(X_1 = A) \\
&= \frac{1}{2} \left[\overbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = A | X_1 = -A)}^{\textcircled{5}} + \overbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = -A | X_1 = A)}^{\textcircled{6}} \right]
\end{aligned}$$

Extrapolando el resultado:

$$\boxed{\mathbb{P}_{e,n}^d = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2Q(\sqrt{SNR}))^n]}$$

3.4. Ejercicio 4

3.4.a. Simulación Monte Carlo

Se realizó una simulación Monte Carlo de ambos sistemas y se calculó la probabilidad de error promedio para cada $SNR \in [5, 25]$ dB con $n = 9$. Las curvas obtenidas se aprecian en la **Fig. 5** donde están también las curvas para $n = 9$ obtenidas en el **Ejercicio 3**.

Para la simulación se utilizaron $N = 10^5$ realizaciones para cada valor de SNR con pasos de 1 dB, siendo que con este valor se obtiene una *buena*¹ estimación sin que el tiempo de procesamiento sea demasiado lento. Al estar variando SNR, para realizar el metodo Monte-Carlo debemos fijar 2 variables entre A , h y σ^2 (las que definen a SNR) y variar la restante.

Dadas las ecuaciones $SNR_1 = \frac{h^2 \xi}{\sigma^2}$, $A^2 = \xi$, se puede encarar la variación de la relación señal a ruido de dos maneras diferentes:

En un contexto de **diseño** del sistema, se puede optar por modificar el valor de SNR a partir de variar la **atenuación** (h) o la **amplitud** (A), en donde se considera un ruido dado, que es posible caracterizar y obtener su varianza (σ^2), la cuál es fijada con algún criterio. De esta manera se puede analizar como se ve afectado el sistema ante distintos valores de atenuación y amplitud con los que se lo pueda diseñar.

En contextos de un **sistema implementado**, se puede modificar el valor de SNR variando la **intensidad del ruido** (σ^2) y de esta forma analizar como se comporta el sistema ante variaciones en ruidos.

Se consideró también que la atenuación h no es arbitraria ya que dependería de como está implementado dicho sistema (i.e. él o los cables por los cuales se transmiten las señales tienen una atenuación que puede ser caracterizada a partir de las propiedades físicas del mismo (longitud, diámetro, resistividad, etc.)).

En este caso se optó por variar el valor de A conforme varía SNR(dB) como se indica en la tabla **2**.

Tabla 2: Valores elegidas para las constantes en la simulación Monte Carlo.

σ^2	1
h	0,9
A	$\sqrt{\frac{SNR_1}{0,9^2}}$

Se obtuvo el siguiente gráfico:

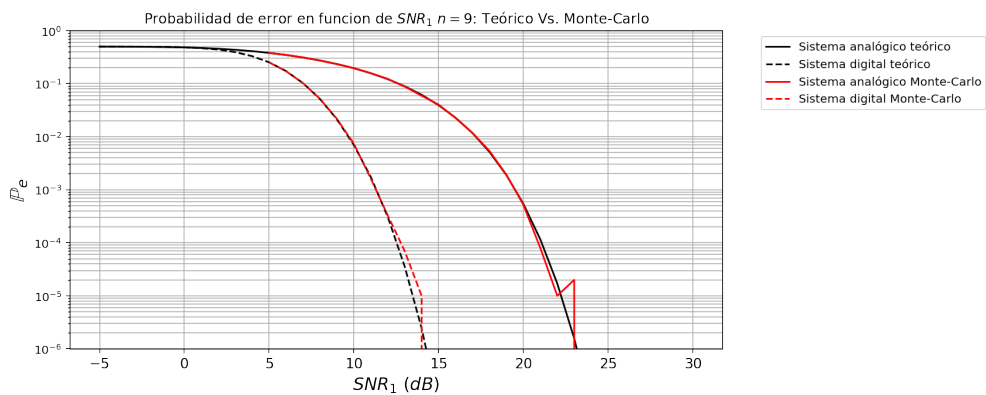


Figura 5: Experimento Monte Carlo Vs. Resultados teóricos

¹Consideramos como parámetro el error cuadrático medio entre el resultado teórico y el estimador. Se eligió un N tal que el $ECM < 0,01$.

La semejanza entre los resultados de la probabilidad según el método Monte Carlo y la probabilidad teórica depende de la cantidad de muestras que se tomen de X y de W , apoyado por la **ley fuerte de los grandes números**. Sabiendo como converge el estimador (*a.s.*) que se esta usando para estimar la esperanza de la variable, se consigue una buena estimación de la probabilidad si se define una variable $Z = \mathbb{1}[Y_9 < 0|X_1 = A]$. Podemos definir la probabilidad como una esperanza:

$$\mathbb{P}[Y_9 < 0|X_1 = A] = \mathbb{E}[\mathbb{1}[Y_9 < 0|X_1 = A]]$$

Luego generamos N realizaciones IID $(Y_{9_1}, \dots, Y_{9_N})$ con la distribucion de $Y_n|X_1 = A$ y utilizando la **ley fuerte de los grandes números**:

$$\overline{Y_n|_{X_1=A}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}\{[Y_{9_i} < 0|X_1 = A]\} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{a.s.} \mathbb{P}_e(Y_9 < 0|X_1 = A)$$

de la misma manera:

$$\overline{Y_n|_{X_1=-A}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}\{[Y_{9_i} \geq 0|X_1 = -A]\} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{a.s.} \mathbb{P}_e(Y_9 \geq 0|X_1 = -A)$$

Notar como se separan las curvas cuando se llega a una de probabilidad menor a 10^{-5} . Se observó que esto es porque se están generando $N = 10^5$ muestras de las variables aleatorias y era poco probable que exista un valor de salida que sea distinto al de entrada en un vector de muestreo N si su probabilidad (como mejor caso) es $\frac{1}{N}$. Un mejor enfoque se presenta en las Conclusiones.

3.4.b. *pdfs de $Y_n|X_1 = \pm A$ histogramas*

Para la resolución de este inciso se realizo el histograma de la salida del ultimo repetidor simulada cuando la entrada del primero vale A y el histograma de la salida del ultimo repetidor simulada cuando la entrada del primero vale $-A$ y se comparo con la función de densidad de la variable gaussiana con media y varianza teórica de la variable aleatoria de la salida cuando vale $-A$ y cuando vale A visto en el inciso 2.c del ejercicio 3. Para ello se uso la función de `scipy` ‘‘norm.pdf’’.

Se pueden observar en la figura 6 leves diferencias entre las medias y varianzas de la densidad teórica y el histograma, esta diferencia es del 3 % al 4 % aproximadamente, y se debe al N (muestras de variables aleatorias).

	μ	σ
Teórico	3.673	7.460
Histograma A	3.559	8.074
Histograma -A	-3.568	8.072
Error relativo A [%]	3.1	4.0
Error relativo -A [%]	2.9	4.0

Tabla 3: Errores: parametros teoricos y simulados

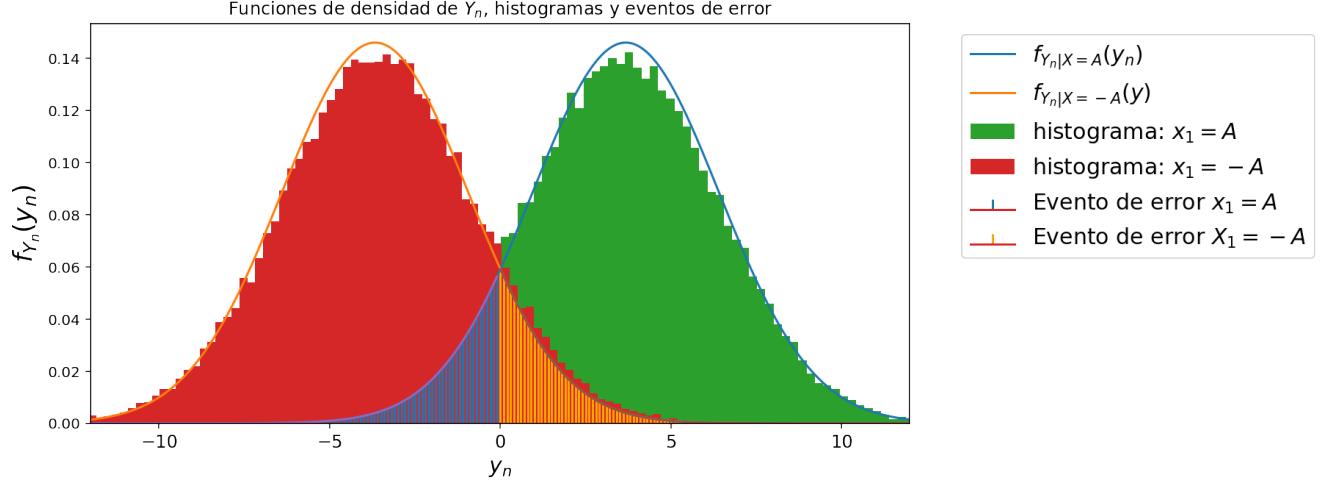


Figura 6: Funciones de densidad de $Y_n|X = \pm A$, Histogramas y eventos de error; para SNR = 13 dB

4. Conclusiones

Para concluir, del sistema se puede afirmar que es mas apropiado trabajar con un sistema digital si se cuenta con valores de SNRs altos, ya que si se tiene una mejor relación señal a ruido se tendrá una mayor probabilidad de recibir correctamente la entrada. Caso contrario, a SNRs bajas, el sistema digital tendrá mas probabilidad de cometer errores (ya que se cuenta con n bloques que deciden), haciendo mas apropiado trabajar con sistemas analógicos (tiene un solo bloque que decide). Si la cantidad de repetidores es alta es conveniente utilizar repetidores digitales, ya que en el caso de los repetidores analógicos la relación señal a ruido se deteriora.

Respecto al método de Monte Carlo, es una herramienta muy poderosa para la obtención de información de las variables estudiadas mediante simulación, pero como se dijo anteriormente se observaron **probabilidades nulas** cuando la cantidad de muestras que se toman es comparable con el recíproco de la probabilidad. Eso no quiere decir que la probabilidad del evento (en este caso el error) sea nula, si no, se interpreta que el **método pierde resolución** para las probabilidades que son comparables con el recíproco de N , si N es la cantidad de muestras que se generan de la variable aleatoria. Esto explica las diferencias en valores de probabilidad cercanos a 10^{-5} en la **Fig. 5**.