GE450 - ES2

Filippo Rossi

November 2024

Esercizio (1). *(a)* Fissiamo $A \subset X$ spazi topologici, $r : X \longrightarrow A$ retratto e $i : A \hookrightarrow X$ inclusione. Consideriamo un $a := \overline{\sum n_i \sigma_i} = \sum n_i \sigma_i + Im(\partial_{n+1}) \in H_n(A)$ tale che $i_*(a) = i_*(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i(i \circ \sigma_i) = 0$. Ma allora $\sum n_i(i \circ \sigma_i) + Im(\partial_{n+1}) = 0 \implies \exists \sum m_j \eta_j \in C_{n+1}(X)$ tale che $\partial_{n+1}(\sum m_j \eta_j) = \sum n_i(i \circ \sigma_i))$. Possiamo considerare allora $r(\sum m_j \eta_j) \in C_{n+1}(A)$ e quindi otteniamo che $\partial_{n+1}(r(\sum m_j \eta_j)) =^1 r(\partial_{n+1}(\sum m_j \eta_j)) = r(\sum n_i(i \circ \sigma_i))) = \sum n_i(r \circ i \circ \sigma_i) \in C_n(A)$. Osservando che $\forall u \in \Delta^n$ abbiamo che $i \circ \sigma_i(u) \in A$ e ricordando che r è un retratto, e che quindi $r_{|A} = id_A$, allora vale $r(i \circ \sigma_i(u)) = i \circ \sigma_i(u) = \sigma_i(u) \in A \implies \sum n_i(r \circ i \circ \sigma_i) = \sum n_i \sigma_i \implies \partial_{n+1}(r(\sum m_j \eta_j)) = \sum n_i \sigma_i \implies \sum n_i \sigma_i \in Im(\partial_{n+1}) \implies \sum n_i \sigma_i + Im(\partial_{n+1}) = \overline{0} \in H_n(A) \implies i_*$ è iniettiva.
(b) Consideriamo la solita sequenza esatta:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Dal punto a sappiamo che i_* è iniettiva, e visto che la sequenza è esatta, $\forall n$ vale $Im(\partial_n) = \mathrm{Ker}(i_*) = 0 \implies \partial_n = 0 \implies \mathrm{Im}(j_*) = \mathrm{Ker}(\partial_n) = H_n(X,A) \implies j_*$ è suriettiva. Ricordando che vale $\mathrm{Im}(i_*) = H_n(A)$ dal punto (a) poichè i_* è iniettiva per ipotesi, per il primo teorema di isomorfismo concludiamo che $H_n(X)/H_n(A) = H_n(X)/\mathrm{Im}(i_*) = H_n(X)/\mathrm{Ker}(j_*) \cong H_n(X,A)$.

[1] Questo è vero poiche ∂ sono solo mappe di bordo, e quindi rsetringono semplicemente il dominio della funzione.